

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : KHELIL Khouloud

Intitulé

**Les Transformations Intégrales Et Leurs
Applications**

Dirigé par : Dr. OUANAS Nawel

Devant le jury

PRÉSIDENT	Dr. FERNANE Kaireddine	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. OUANAS Nawel	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BADI Sabrina	Univ-Guelma

Session Juin 2020

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
dédicace	vi
Introduction	vii
Rappel	viii
1 La transformation de Fourier et de Laplace	1
1.1 Intégrale et Transformée de Fourier	1
1.1.1 Introduction :	1
1.1.2 Représentations intégrales de Fourier	2
1.1.3 La transformation Paire de Fourier	9
1.1.4 Transformations des fonctions plus compliquées	15
1.2 La transformation de Laplace	21
1.2.1 Introduction	21
1.2.2 Les transformations de certaines fonctions ty- piques	23
1.2.3 Transformations de fonctions plus compliquées .	28
2 La transformation de Legendre, Hermite et Leguerre	1
2.1 La transformation de Legendre	1
2.1.1 Introduction	1
2.1.2 Définition de la transformée de Legendre	1
2.1.3 Propriétés élémentaires des transformées de Legendre .	2

2.1.4	Propriétés opérationnelles des transformées de Legendre	8
2.1.5	Application aux problèmes de valeur limite	12
2.2	Transformation d’Hermite	13
2.2.1	Introduction	13
2.2.2	Définition de la transformée d’Hermite	13
2.2.3	Propriétés élémentaires des transformées d’Hermite . .	14
2.2.4	Propriétés opérationnelles des transformées d’Hermite .	16
2.3	La transformation de Laguerre	21
2.3.1	Introduction	21
2.3.2	Définition de la transformée de Laguerre	21
2.3.3	Propriétés élémentaires des transformées de Laguerre .	22
2.3.4	Propriétés opérationnelles des transformées de Laguerre	24
3	Bibliographie	28

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie certaines transformations intégrales et leurs applications il a été utilisé avec succès depuis la résolution de nombreux problèmes de mathématiques appliquées, de physique et de sciences de l'ingénieur pour ce travail en deux chapitres.

On commence par un rappel sur les transformations de Fourier et Laplace, où nous sommes partis de l'intégrale de Fourier pour arriver à la transformée de Fourier, puis nous en avons déduit la transformée de Laplace.

Enfin, on termine par mentionnant trois types de transformations intégrales. Les transformations de Legendre, Hermite et Laguerre, et mentionnons leurs caractéristiques élémentaires et opérationnelles avec application aux problèmes de valeur limite sur la transformation de Legendre.

Abstract

In this memory, , we study certain integral transformations and their applications. It has been used successfully since the resolution of many problems of applied mathematics, physics and engineering sciences for this work in two chapters.

We start with a reminder on the Fourier and Laplace transformations, where we started from the Fourier integral to arrive at the Fourier transform, then we deduced the Laplace transform from it.

Finally, we end by mentioning three types of integral transformations : the Legendre, Hermite and Laguerre transformations, and we mention their elementary and operational characteristics with application to the problems of limit value on the Legendre transformation.

Remerciements

Merci à "DIEU" de m'avoir donné le pouvoir pour réaliser ce travail.

Je remercie tout d'abord, mon chère encadreure "M me.Ouanas Nawel", enseignante à l'Université de Guelma, 8 Mai 1945. En tant que directeur de mémoire, pour son aide considérable, son suivi, ces conseils précieux, soutien intéressant et sa patience, pour que ce travail a pu voir le jour.

Mes vifs remerciements aux membres de jury pour leur acceptation d'avoir examiner ce mémoire.

une grand merci à mes professeurs qui m'ont accompagné au cours ses années de la formation.

Je tien a adressé un sincère remerciement à "M lle.Arba Assia" se m'avoire dériquer par leurs précieux informations.

Enfin, merci à mes proches qui m'on encouragés ainsi que ceux qui ont participés de loin ou de prés, à l'élaboration et l'amélioration de ce travail.Le premier d'entre eux mes parents.

dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

Jusqu'au couronne de ma tête, a la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse, et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles : mon adorable mère Hassiba.

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père Mouhamed.

A vous mes frères (Houssam, Akrem) et sœurs (Halima, Ritadj, Aya, Amani) qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

À tous les membres de la famille de ma mère, J'offre ma plus profonde gratitude pour votre amour éternel, que Dieu vous bénisse d'une longue et heureuse vie.

À mes camarades sur mon chemin (Amel, Ahlem, Amina, Soumia), Pour leur soutien moral, leur patience et leur compréhension tout au long de ce projet.

Sans oublier mon amis que j'ai connu jusqu'à maintenant.

Introduction

La transformation intégrale est l'un des outils puissants des mathématiques appliquées qui utilisé pour résoudre des problèmes de valeurs initiales et limites en sciences physiques mathématique, sciences de l'ingénieur et domaine connexes.

Ici, une tentative a été faite pour couvrir les théorèmes de base des diverses techniques de transformation intégrale avec leurs application.

Les transformation intégrale qui ont été traitées dans cette mémoire en détail sont les transformations des Fourier et Laplace, Legendre, Hermite et Laguerre. Nous commençons par un rappel de la transformée de Fourier et de Laplace, où une partie du travail de Fourier manquait de rigueur, mais il donna néanmoins le premier élan réel au sujet qui porte désormais son nom. L'intégrale de Fourier a également été introduite pour la première fois par Fourier comme une tentative de généraliser ses résultats d'intervalles finis à des intervalles infinis. Il existe de nombreuses transformations intégrales qui ont été développées au fil des ans, dont beaucoup sont hautement spécialisées. La plus polyvalente de toutes les transformations intégrales, y compris la transformée de Fourier, est la transformée de Laplace. Nous pouvons définir directement la transformée de Laplace, mais il est instructif de la dériver formellement et de sa formule d'inversion directement à partir du théorème de Fourier. De cette façon, nous aurons une meilleure perspective sur la relation entre les transformées de Fourier et Laplace, et donner des exemples que nous considérons en même temps des formules que nous utilisons pour calculer les différentes transformations, puis nous passons à la définition des trois transformations restantes individuellement avec sa polynôme comme noyau et discutons des propriétés élémentaires et opérationnelles de base, y compris le théorème de convolution. Les transformées de Legendre sont ensuite utilisées pour résoudre des problèmes de valeurs limites dans la théorie des potentiels.

Rappel

* *Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)* est surtout connu pour ses travaux sur la représentation des fonctions par séries trigonométriques dans ses études sur la théorie de la chaleur conduction. Ses documents de base, présentés à l'Académie des sciences de Paris en 1807 et 1811, ont été critiqués par les arbitres pour un Jack de rigueur et par conséquent n'ont pas été publiés puis. Cependant, lors de la publication du classique *Théorie analytique de la Chaleur* en 1822, il a également incorporé ses travaux antérieurs presque sans changement.

* Pour une discussion générale de la *série de Fourier*, voir L. C. Andrews, *Elementary Partial Équations différentielles avec problèmes de valeur limite*, Orlando : Academic Press, 1986.

* Par «formelle», nous entendons une procédure qui n'est pas mathématiquement rigoureuse.

* Les limites droite et gauche sont définies respectivement par $f(x^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x + \varepsilon)$ and $f(x^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x - \varepsilon)$. Aux points de continuité, il s'ensuit que $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$.

* Ceci, bien sûr, est un résultat intégral standard qui peut également être dérivé en utilisant théorie des variables complexes. C'est un résultat important auquel nous ferons référence à plusieurs reprises.

Lemme 0.0.1 (Riemann-Lebesgue)

Si f est continu par morceaux et absolument intégrable sur tout l'axe réel, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = 0$$

ou équivalent, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$

* *Fonction gamma* pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma, et notée par la lettre grecque Γ (gamma majuscule)

$$\Gamma : z \rightarrow \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

* Pour les valeurs entières de $\alpha = n$, les fonctions de Bessel de première espèce J_n sont définies par la série entière (de rayon de convergence infini) suivante :

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\alpha}}{p! \Gamma(p + \alpha + 1)}$$

* *Oliver Heaviside (1850-1925)* était un ingénieur électricien anglais qui s'est fixé en dehors des scientifiques établis de l'époque en étudiant principalement. Il était un selfmade homme, sans titres universitaires, mais a apporté une contribution significative au développement et application de la théorie électromagnétique. Il a appelé les mathématiciens "à tête de bois".

* Pour une discussion de la convergence de l'intégrale de la transformée de Laplace en général voir W. R. LePage, *Variables complexes et la transformation de Laplace pour les ingénieurs*, New York : Douvres, 1980.

* Pour une preuve de *Théor.1.2.2*, voir R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, New York : McGraw-Hill, 1972.

* la fonction d'erreur (aussi appelée fonction d'erreur de Gauss) est une fonction entière utilisée en analyse. Cette fonction se note erf et fait partie des fonctions spéciales. Elle est définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

* les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiales $P_n(x)$ de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] - n(n+1) P_n(x) = 0$$

Chapitre 1

La transformation de Fourier et de Laplace

1.1 Intégrale et Transformée de Fourier

1.1.1 Introduction :

Le concept d'une série infinie remonte aux Grecs antiques comme Archimède (287 – 212*B.c.*), qui ont sommé une série géométrique afin de calculer l'aire sous un arc parabolique. Au *XVIIIe* siècle, les extensions de séries de puissances pour des fonctions comme e^x , $\sin x$ et $\arctan x$ ont été publiées pour la première fois par le mathématicien écossais C. Maclaurin (1698 – 1746), et le mathématicien britannique B. Taylor (1685 – 1731) a généralisé ce travail en fournissant des expansions de séries de puissance sur un point autre que $x = 0$.

Au milieu du *XVIIIe* siècle il est devenu important d'étudier la possibilité de représenter une fonction donnée par des séries infinies autres que des séries de puissances. D. Bernoulli (1700 – 1783) a montré que les conditions mathématiques imposées par des considérations physiques pour résoudre le problème des cordes vibrantes étaient formellement satisfaites par des fonctions représentées comme des séries infinies impliquant des fonctions sinusoïdales. Au début des années 1800, le physicien français J. Fourier* rencontre des représentations similaires et annonce dans ses travaux sur la conduction thermique qu'une "fonction arbitraire" pourrait être développée dans une série de fonctions sinusoïdales. Une partie du travail de Fourier manquait de rigueur, mais il donna néanmoins le premier élan réel au sujet qui

porte désormais son nom. L'intégrale de Fourier a également été introduite pour la première fois par Fourier comme une tentative de généraliser ses résultats d'intervalles finis à des intervalles infinis. La transformée de Fourier, bien qu'apparaissant dans certains écrits bienveillants de A. L. Cauchy (1789 – 1857) et P. S. de Laplace (1749 – 1827), apparaît également dans l'œuvre de Fourier.

1.1.2 Représentations intégrales de Fourier

Un problème important en analyse mathématique est la détermination de diverses représentations d'une fonction donnée f . Par exemple, une représentation particulière peut révéler des informations sur la fonction qui ne sont pas aussi évidentes par une autre représentation. Dans le calcul, nous apprenons que certaines fonctions ont des représentations de séries de puissance de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1.1)$$

où

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les séries de puissance telles que celles-ci sont utiles pour les calculs numériques en plus de diverses autres utilisations. Si la fonction est périodique avec la période $2p$, elle peut avoir une représentation en série de Fourier*.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \quad (1.2)$$

où

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

et

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

La théorie des séries de Fourier montre qu'une fonction périodique satisfaisant certaines exigences minimales peut être représentée par la somme infinie de fonctions sinusoïdales donnée en (1.2). La limite formelle* de cette représentation alors que la période tend vers l'infini peut être utilisée pour introduire la notion de représentation intégrale de Fourier. En d'autres termes,

1.1. INTÉGRALE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

alors que les fonctions périodiques définies sur tout l'axe réel ont des représentations en série de Fourier, les fonctions apériodiques définies de manière similaire ont des représentations intégrales de Fourier.

Si f et f' sont des fonctions continues par morceaux sur un certain intervalle $[-p, p]$, nous disons que f est lisse par morceaux. Si f a cette propriété et est périodique avec la période $2p$, il a la représentation en série de Fourier (1.2) – (1.4). Pour obtenir formellement la représentation intégrale de Fourier de f de cette série comme $p \rightarrow \infty$, nous commençons par substituer les formules intégrales pour a_0 , a_n et b_n données par (1.3) et (1.4) dans la série de Fourier (1.2). Cette action conduit à

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dt + \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} \sin \frac{n\pi x}{p} dt \right]$$

où

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt + \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi(t-x)}{p} dt \quad (1.5)$$

où nous avons échangé l'ordre de sommation et d'intégration et utilisé l'identité trigonométrique

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$$

Nous souhaitons maintenant examiner ce qui se passe lorsque nous laissons p tendre vers l'infini. Tout d'abord, nous devons faire l'exigence supplémentaire que f est absolument intégrable, c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1.6)$$

Pour que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt = 0 \quad (1.7)$$

Pour la somme infinie restante dans (1.5), il est commode de laisser $\Delta s = \frac{\pi}{p}$ et ensuite considérer la limite équivalente

$$f(x) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta s}}^{\frac{\pi}{\Delta s}} f(t) \sum_{n=1}^{\infty} \cos [n\Delta s(t-x)] \Delta s dt \quad (1.8)$$

(Notons qu'un $\Delta s \rightarrow 0$ comme $p \rightarrow \infty$) lorsque Δs est un petit nombre positif, les points $n\Delta s$ sont également espacés le long de l'axe s . Dans un tel cas, nous pouvons nous attendre à ce que la série de (1.8) se rapproche de l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos [s (t - x)] ds$$

dans la limite comme $\Delta s \rightarrow 0$ Bien que cela ne signifie pas que la limite de la série dans (1.8) est définie comme étant la ci-dessus, nous pouvons prendre, dans des conditions appropriées sur f , que (1.8) tend vers la forme intégrale

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \int_0^\infty \cos [s (t - x)] ds dt \quad (1.9)$$

En changeant l'ordre d'intégration, nous obtenons le formulaire équivalente

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos [s (t - x)] ds dt \quad (1.10)$$

La procédure purement formelle que nous venons de traverser (puisque le passage à la limite ne peut être rigoureusement justifié) nous a conduit à un résultat important appelé *Théorème intégral de Fourier*.

Théorème 1.1.1 (Théorème intégral de Fourier) : Si f et f' sont des fonctions continues par morceaux sur chaque intervalle fini, et si

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt < \infty$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos [s (t - x)] dt ds$$

aux points x où f est continu. Si x est un point de discontinuité de f , l'intégrale ci-dessus converge vers la valeur moyenne $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ des limites droite et gauche*.

Les conditions énumérées dans **Théorème. 1.1.1** ne sont que des conditions suffisantes, pas des conditions nécessaires. Autrement dit, il existe des fonctions f qui ont des représentations intégrales valides mais qui ne satisfont pas aux conditions de ce théorème. De plus, les conditions énoncées dans

1.1. INTÉGRALE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

Théorème.1.1.1 ne sont pas l'ensemble le plus général de conditions suffisantes qui ont été établies au fil des ans. Néanmoins, ces conditions sont suffisamment larges pour couvrir la plupart des fonctions courantes dans la pratique.

Pour souligner l'analogie entre la série de Fourier et le Théorème intégral de Fourier, nous réécrivons (1.10) sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos st \cos sx + \sin st \sin sx) dt ds$$

où équivalent,

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(s) \cos sx + B(s) \sin sx] ds \quad (1.11)$$

où

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt \quad (1.12)$$

et

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt \quad (1.13)$$

Dans ce cadre, nous référons à (1.11) à la représentation intégrale de Fourier de la fonction f avec des coefficients définis par (1.12) et (1.13). La théorie générale concernant de telles représentations est étroitement parallèle à celle de la série de Fourier.

exemple 1.1.1 Trouver une représentation intégrale de la forme (1.11) pour la fonction rectangle $f(x) = h(1 - |x|)$, où h est la fonction de Heaviside (également fonction échelon unité, fonction marche d'escalier).

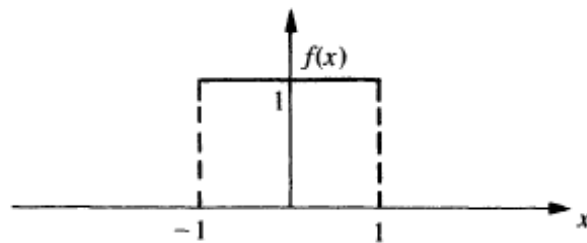


Fig 1 Le graphe de la fonction $f(x)=h(1-|x|)$.

Solution : Les coefficients $A(s)$ et $B(s)$ sont donnés par

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1 - |x|) \cos sxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos sxdx = \frac{2 \sin s}{\pi s}$$

et

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin sxdx = 0$$

Ainsi, la représentation intégrale de Fourier devient

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s} \right) \cos sxdx$$

Puisque $x = 0$ est un point de continuité de f , nous pouvons utiliser le théorème intégral de Fourier pour déduire que

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds$$

ce qui conduit au résultat intéressant

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \tag{1.14}$$

Observez qu'à $x = \pm 1$ il y a une discontinuité de saut dans la fonction f indiquée ci-dessus. À ces points, l'intégrale de Fourier converge vers la valeur moyenne des limites gauche et droite. Il s'ensuit donc que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s} \right) \cos sxdx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & \text{si non} \end{cases} \tag{1.15}$$

Enfin, il peut être intéressant de tracer "l'intégrale partielle" de la fonction f , définie par

$$S_{\mu}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \left(\frac{\sin s}{s} \right) \cos sxdx \tag{1.16}$$

pour voir comment ça a tendance à $f(x)$ comme $\mu \rightarrow \infty$. Rappel de l'identité

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

1.1. INTÉGRALE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

on a

$$\begin{aligned}
 S_\mu(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \frac{\sin [s(1+x)]}{s} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \frac{\sin [s(1-x)]}{s} ds \quad (1.17) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu(1+x)} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu(1-x)} \frac{\sin t}{t} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \{ \text{Si} [\mu(1+x)] + \text{Si} [\mu(1-x)] \}
 \end{aligned}$$

où Si est l'intégrale sinus définie par

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad (1.18)$$

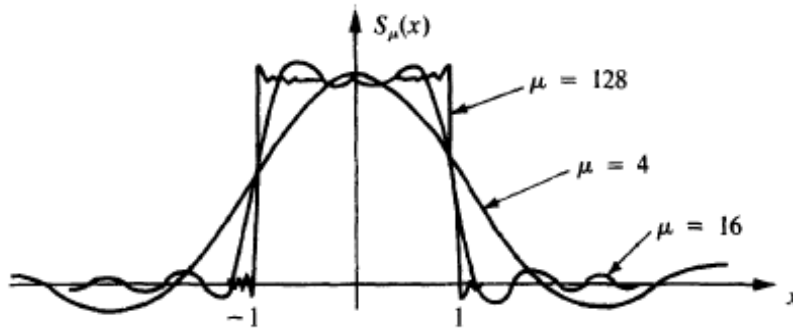


Fig 2 $S_\mu(x)$ pour les valeurs de $\mu=4,16,128$.

Représentations intégrale en cosinus et sinus :

Si la fonction f est une fonction paire, c'est-à-dire, si $f(-x) = f(x)$, elle résulte des propriétés des intégrales qui

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos sxdx \quad (1.19)$$

et

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sxdx = 0 \quad (1.20)$$

dont on déduit

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(s) \cos sxds \quad (1.21)$$

Nous appelons (1.21) une représentation intégrale de cosinus de Fourier.

De manière similaire, si f est une fonction impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, on obtient la représentation intégrale sinus de Fourier

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(s) \sin sxdx \quad (1.22)$$

où $A(s) = 0$ et

$$B(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin sxdx \quad (1.23)$$

Enfin, si f doit être une fonction définie uniquement sur l'intervalle $0 < x < \infty$, nous pouvons la représenter sur cet intervalle soit par une intégrale de cosinus de Fourier soit par une intégrale de sinus de Fourier, analogue aux expansions demi-gamme des séries de Fourier. Prenons l'exemple suivant.

exemple 1.1.2 *Trouver une représentation intégrale du cosinus de Fourier et du sinus de Fourier de la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

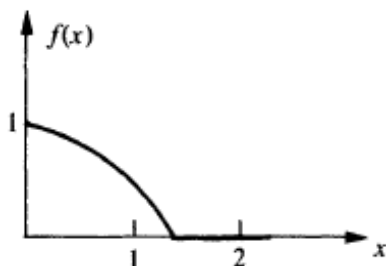


Fig 3 Le graphe de la fonction $f(x) = h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x$.

Solution : *Pour une représentation intégrale du cosinus, nous calculons*

$$A(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos sxdx = \frac{2 \cos \frac{\pi s}{2}}{\pi (1 - s^2)}$$

et donc

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{\pi s}{2}}{1 - s^2} \right) \cos sxds$$

De la même manière

$$B(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin sxdx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{s - \sin \frac{\pi s}{2}}{s^2 - 1} \right)$$

dont on déduit la représentation intégrale sinusoidale

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{s - \sin \frac{\pi s}{2}}{s^2 - 1} \right) \sin s x ds$$

1.1.3 La transformation Paire de Fourier

Le théorème intégral de Fourier (*Théor.1.1.1*) déclare que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos [s(t-x)] dt ds \quad (1.24)$$

Grâce à l'utilisation de la formule d'Euler, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, nous pouvons exprimer (1.24) en termes de fonctions exponentielles complexe est

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos [s(t-x)] dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}] dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(t-x)} dt ds \end{aligned}$$

où

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt ds \quad (1.25)$$

qui est la forme exponentielle du théorème intégral de Fourier.

Ce que nous avons établi par la formule intégrale (1.25) est la paire de formule de transformation

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt \quad (1.26)$$

et

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} F(s) ds \quad (1.27)$$

Nous définissons $F(s)$ comme la transformée de Fourier de $f(t)$, également écrite comme

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t); s\} \quad (1.28)$$

et $f(t)$ comme la transformée de Fourier inverse de $F(s)$, qui peut être écrite comme

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(s); t\} \quad (1.29)$$

L'emplacement de la constante $\frac{1}{2\pi}$ dans la définition des paires de transformées est arbitrairement sélectionné tant que (1.25) est satisfait. Pour des raisons de symétrie, nous avons divisé la constante entre les paires de transformées, mais dans la littérature, il n'existe pas d'accord universel sur l'emplacement de ces constantes. Dans certains textes, la constante $\frac{1}{2\pi}$ est positionnée devant l'une des paires de transformées sans constante devant l'autre. Il y a aussi une certaine variation quant à quelle intégrale représente la transformée et laquelle représente la transformée inverse. Dans la pratique, bien sûr, ces différences sont de peu d'importance mais l'utilisateur doit en être conscient lors de la consultation de différentes sources de référence.

En conséquence immédiate de (1.26), nous observons que

$$|F(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (1.30)$$

Par conséquent, si f est absolument intégrable, il s'ensuit que sa fonction de transformation $F(s)$ est bornée. Un argument similaire appliqué à (2.28) montre que $f(t)$ est également borné lorsque $F(s)$ est absolument intégrable. De plus, le lemme de Riemann-Lebesgue* montre que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (1.31)$$

Puisque la fonction de transformation $F(s)$ associée à des fonctions absolument intégrables qui sont également lisses par morceaux doit satisfaire cette dernière relation, elle exclut immédiatement certaines fonctions comme fonctions de transformation possibles. Par exemple, les sinus, les cosinus et les polynômes ne satisfont pas à cette relation. Enfin, c'est une propriété curieuse que bien que la fonction $f(t)$ puisse avoir certaines discontinuités finies, sa transformée $F(s)$ peut être montrée comme une fonction continue. De ce fait, la transformée de Fourier est parfois appelée "processus de lissage".

Transformations cosinus et sinus de Fourier :

Nous avons constaté que lorsque la fonction f est paire, la représentation intégrale de Fourier de $f(x)$ se réduit à

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} A(s) \cos sx ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos sx \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt ds \end{aligned} \quad (1.32)$$

Sur la base de cette relation, nous introduisons la transformée de cosinus de Fourier

$$\mathcal{F}_c \{f(t); s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt = F_c(s), \quad s > 0 \quad (1.33)$$

et transformée en cosinus inverse

$$\mathcal{F}_c^{-1} \{F_c(s); t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(s) \cos st ds = f(t), \quad t > 0 \quad (1.34)$$

Ces résultats sont intéressants en ce qu'ils impliquent l'équivalence des opérateurs \mathcal{F}_c et \mathcal{F}_c^{-1} . En d'autres termes, la transformée en cosinus et son inverse sont exactement les mêmes sous forme fonctionnelle. De même, lorsque f est une fonction impaire, sa représentation intégrale de Fourier devient

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin sx \int_0^{\infty} f(t) \sin st dt ds \quad (1.35)$$

Ce qui conduit à la transformée sinus de Fourier

$$\mathcal{F}_s \{f(t); s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin st dt = F_s(s) \quad (1.36)$$

et transformée sinus inverse

$$\mathcal{F}_s^{-1} \{F_s(s); t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(s) \sin st ds = f(t) \quad (1.37)$$

Par conséquent, nous voyons que la transformée sinus de Fourier et son inverse sont également exactement les mêmes sous forme fonctionnelle.

Si la fonction f n'est ni paire ni impaire, mais définie uniquement pour $t > 0$. alors elle peut avoir à la fois une transformée en cosinus et une transformée en sinus. En outre. les extensions paires et impaires de f auront alors

des transformées de Fourier exponentielles. Pour voir les relations entre ces différentes transformées, construisons l'extension paire de f en posant

$$f_e(t) = f(|t|), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.38)$$

La transformée de Fourier de $f_e(t)$ conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_e(t); s\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) e^{ist} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cos st dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \sin st dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos st dt \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\mathcal{F}\{f_e(t); s\} = \mathcal{F}_c\{f(t); s\}, \quad -\infty < s < \infty \quad (1.39)$$

D'après (1.39), il est clair que la transformée de Fourier et la transformée en cosinus d'une fonction paire donnent des résultats identiques. En particulier, leurs transformées sont même des fonctions de s . L'extension impaire de f est construite en définissant

$$f_0(t) = f(|t|) \operatorname{sgn}(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.40)$$

où la fonction *signum* est définie par

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

dans ce cas, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_0(t); s\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{ist} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) \cos st dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) \sin st dt \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin st dt \end{aligned}$$

Parce que la transformée de Fourier d'une fonction impaire est également une fonction impaire, nous concluons que la transformation de Fourier et transformer sinus sont liés par

$$\mathcal{F}\{f_0(t); s\} = i \mathcal{F}_s\{f(t); |s|\} \operatorname{sgn}(t), \quad -\infty < s < \infty \quad (1.42)$$

L'utilisation pratique de (1.39) est que si nous voulons évaluer la transformée de Fourier d'une fonction paire, nous pouvons le faire en calculant simplement sa transformée en cosinus. Si la fonction que nous souhaitons transformer est impaire, nous pouvons d'abord trouver sa transformée sinus puis utiliser (1.42).

Évaluation des transformations des fonctions élémentaires :

Comme nous l'avons déjà souligné, de nombreuses fonctions élémentaires comme les sinus, les cosinus, les polynômes, et en général toute fonction périodique, n'ont pas de transformées de Fourier (au moins dans le sens habituel) car elles ne sont pas absolument intégrables. Une classe spéciale de fonctions élémentaires qui ont des transformées de Fourier et peuvent être calculées par des méthodes de base sont celles qui impliquent des fonctions exponentielles. Plusieurs de ces transformations sont liées aux intégrales

$$I = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos st dt = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad a > 0 \quad (1.43)$$

et

$$J = \int_0^{\infty} e^{-at} \sin st dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad a > 0 \quad (1.44)$$

Une façon de vérifier ces formules intégrales est d'utiliser l'intégration par parties pour obtenir les relations

$$I = \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin st dt = \frac{1}{a} - \frac{s}{a} J$$

et

$$J = \left(\frac{s}{a}\right) I$$

Résoudre ces deux dernières équations simultanément pour I et J donne les résultats donnés par (1.43) et (1.44).

exemple 1.1.3 Trouver la transformée de Fourier de te^{-at} , $a > 0$

Solution : La différenciation formelle des deux côtés de (1.44), d'abord par rapport à a puis par rapport à s , nous donne, respectivement,

$$-\int_0^{\infty} te^{-at} \sin stdt = -\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

et

$$\int_0^{\infty} te^{-at} \cos stdt = \frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\mathcal{F}_s \{te^{-at}; s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$$

et

$$\mathcal{F}_c \{te^{-at}; s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$$

exemple 1.1.4 Trouver la transformée de Fourier de $\frac{1}{t}e^{-at}$, $a > 0$

Solution : Nous commençons par intégrer les deux côtés de (1.44) par rapport au paramètre a de a à ∞ , qui conduit à

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} e^{-at} \sin stdt &= \int_a^{\infty} \frac{s}{s^2 + a^2} da \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{a}{s} \\ &= \tan^{-1} \frac{s}{a} \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{t} e^{-at}; s \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tan^{-1} \frac{s}{a}, \quad a > 0$$

Si nous autorisons un $a \rightarrow 0^+$, on trouve

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{t}; s \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{1.48}$$

Ce résultat n'est qu'un résultat formel puisque ni $\frac{1}{t}$ ni $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ne satisfont aux conditions du théorème d'intégrale de Fourier. Néanmoins, il peut être utile de traiter (1.48) comme un cas limite de la relation de transformation donnée dans cet exemple. En utilisant (1.42), nous obtenons la relation similaire

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{t}; s \right\} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(s) \quad (1.49)$$

1.1.4 Transformations des fonctions plus compliquées

Lorsque les fonctions impliquées dans une transformée de Fourier ou une transformation inverse sont de nature plus compliquée, il faut généralement recourir à des techniques autres que les méthodes d'intégration standard du calcul. Parfois, il est utile de représenter une partie de l'intégrale dans une série de puissances et d'effectuer une intégration terminologique sur l'expression résultante. Dans certains cas, la série intégrée résultante peut être additionnée pour produire la transformation que nous recherchons. D'autres techniques utiles sont celles impliquant les méthodes puissantes de variables complexes.

Pour illustrer la méthode des séries de puissance mentionnée ci-dessus, considérons l'exemple suivant.

exemple 1.1.5 *Trouvez la transformée de cosinus de Fourier de, $(a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} h(a-t)$, $p > -1/2$, $a > 0$ où $h(t)$ est la fonction unitaire de Heaviside.*

Solution : à partir de la définition de la transformée en cosinus, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \left\{ (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} h(a-t); s \right\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos st dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{(2k)!} \int_0^a (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} t^{2k} dt \end{aligned}$$

Où nous avons remplacé la fonction cosinus par sa représentation en série

de puissance. La substitution $t = a \sin \theta$ dans l'intégrale ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned} \int_0^a (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} t^{2k} dt &= a^{2p+2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} \theta \sin^{2k} \theta d\theta \\ &= a^{2p+2k} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{2\Gamma(p + k + 1)} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2k-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(p) \Gamma(k)}{2\Gamma(p+k)}, p > 0, k > 0.$$

Ensuite, en utilisant la formule de duplication de la fonction gamma

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Nous constatons que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \left\{ (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} h(a-t); s \right\} &= \frac{a^{2p} \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2}) (as)^{2k}}{(2k)! \Gamma(p + k + 1)} \\ &= 2^{p-\frac{1}{2}} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a}{s}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{as}{2}\right)^{2k+p}}{k! \Gamma(p + k + 1)} \end{aligned}$$

Cette dernière série de puissance est reconnue comme la fonction de Bessel $J_P(as)$, et donc nous avons le résultat

$$\mathcal{F}_c \left\{ (a^2 - t^2)^{p-\frac{1}{2}} h(a-t); s \right\} = 2^{p-\frac{1}{2}} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a}{s}\right)^p J_P(as), p > -\frac{1}{2}, a > 0$$

Parce que la transformée de cosinus de Fourier et la transformée de cosinus inverse sont des opérations identiques, nous pouvons utiliser le résultat de cet exemple pour déduire la relation de transformation cosinus supplémentaire

$$\mathcal{F}_c \{t^{-p} J_P(at); s\} = \frac{(a^2 - s^2)^{p-\frac{1}{2}} h(a-s)}{2^{p-\frac{1}{2}} a^p \Gamma(p + \frac{1}{2})}, p > -\frac{1}{2}, a > 0 \quad (1.51)$$

Aussi, pour $p = 0$ on obtient le cas particulier

$$\mathcal{F} \{J_0(at); s\} = \mathcal{F}_c \{J_0(at); s\} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}, & |s| < a \\ 0, & |s| > a \end{cases} \quad (1.52)$$

L'utilisation de la théorie des résidus :

Le calcul des résidus de variables complexes est un outil puissant dans le calcul de nombreuses formules de transformation. Pour traiter certaines des intégrales qui surgiront, nous devons utiliser les théorèmes des variables complexes.

Pour commencer, nous souhaitons dériver la paire de formules de transformation :

$$\mathcal{F}_c \{t^{\alpha-1}; s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), s > 0, 0 < \alpha < 1 \quad (1.53a)$$

$$\mathcal{F}_s \{t^{\alpha-1}; s\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), s > 0, 0 < \alpha < 1 \quad (1.53b)$$

Définissons la fonction complexe $f(z) = z^{\alpha-1}e^{-sz}$ et intégrons-la autour du contour fermé représenté sur la figure

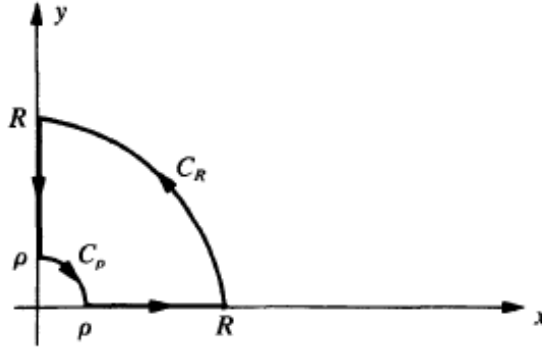


Fig 4 Contour d'intégration

D'après le théorème intégral de Cauchy, il s'ensuit que

$$\oint_c f(z)dz = 0 \quad (1.54)$$

où

$$\int_{C_\rho} f(z)dz + \int_\rho^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^\rho f(iy)d(iy) = 0 \quad (1.55)$$

Le long de l'axe imaginaire, nous avons fixé $z = iy$, de sorte que

$$f(iy) = i^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-isy}$$

Si nous autorisons maintenant $\rho \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, nous avons

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = 0, \quad \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (1.56)$$

et donc (1.55) se réduit à

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-sx} dx + i^\alpha \int_\infty^0 y^{\alpha-1} e^{-isy} dy = 0$$

Maintenant, en définissant $i^{-\alpha} = e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}$, nous pouvons récrire cette dernière expression sous la forme

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-isy} dy = e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-sx} dx \quad (1.57)$$

Afin d'évaluer l'intégrale de droite, on fait le changement de variable $u = sx$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-sx} dx &= s^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du \\ &= s^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

Dont on déduit

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-isy} dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \quad (1.58)$$

Enfin, en multipliant les deux côtés de (1.58) par le facteur constant $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et en assimilant les parties réelles et imaginaires, nous sommes conduits aux formules souhaitées données par (1.53a) et (1.53b).

Si nous laissons un $\alpha = \frac{1}{2}$ dans (1.53a) et (1.53b), nous obtenons les cas spéciaux

$$\mathcal{F}_c \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}}; s \right\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (1.59a)$$

et

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}}; s \right\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (1.59b)$$

Ce qui montre que $\frac{1}{\sqrt{t}}$ est auto-réciproque sous les transformations cosinus et sinus. Le calcul des résidus est particulièrement utile pour trouver des transformations de fonctions rationnelles. Pour illustrer la technique, notons $f(z)$ une fonction complexe avec les propriétés suivantes :

1.1. INTÉGRALE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

1. $f(z)$ a un nombre fini de pôles a_1, a_2, \dots, a_n dans le demi-plan supérieur.
2. $f(z)$ est analytique le long de l'axe réel sauf aux points b_1, b_2, \dots, b_m , qui sont de simples pôles.
3. $zf(z)e^{isz} \rightarrow 0$ comme $z \rightarrow \infty$, $\text{Im}(z) > 0$.

Supposons que nous intégrons la fonction complexe $f(z)e^{isz}$, $s > 0$, autour du contour représenté sur la figure 5.

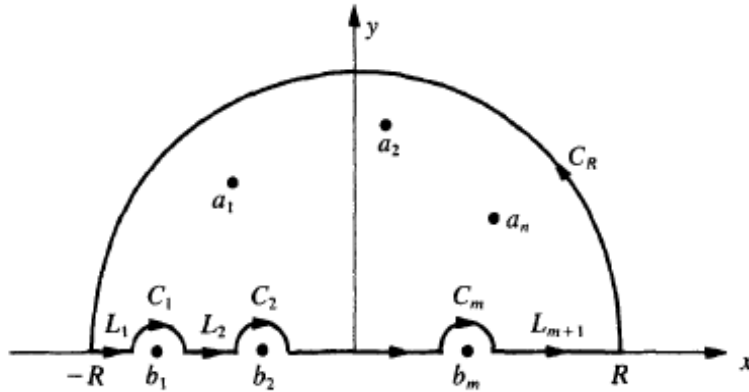


Fig 5 Contour d'intégration

En utilisant le théorème des résidus de variables complexes, nous constatons que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} \int_{L_k} f(x)e^{isx} dx + \sum_{k=1}^m \int_{C_k} f(z)e^{isz} dz + \int_{C_R} f(z)e^{isz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Re s} \{ f(z)e^{isz}; a_k \} \end{aligned}$$

où L_1, L_2, \dots, L_{m+1} sont les segments de ligne droite le long de l'axe x et C_1, C_2, \dots, C_m sont de petits demi-cercles avec des centres aux pôles simples b_1, b_2, \dots, b_m . Dans la limite où $R \rightarrow \infty$ et les rayons des petits demi-cercles tendent vers zéro, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx - \pi i \sum_{k=1}^m \text{Re s} \{ f(z)e^{isz}; b_k \} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Re s} \{ f(z)e^{isz}; a_k \} \quad (1.60)$$

où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{isz} dz = 0$$

Ainsi, nous avons développé la formule générale de transformation pour les fonctions rationnelles (changer x en t dans l'intégrale)

$$\mathcal{F}\{f(t); s\} = i\sqrt{2\pi} \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Re} s \{f(z)e^{isz}; a_k\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} s \{f(z)e^{isz}; b_k\} \right], s > 0 \quad (1.61)$$

Si f est pair ou impair, nous pouvons étendre le résultat (1.61) pour inclure $s < 0$ en utilisant les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_c(t); s\} &= \mathcal{F}_c\{f(t); s\}, -\infty < s < \infty, \\ \mathcal{F}\{f_0(t); s\} &= i\mathcal{F}_s\{f(t); s\} \operatorname{sgn}(s), -\infty < s < \infty, \end{aligned}$$

On peut fixer $s = -\sigma < 0$ et intégrer la fonction $f(z)e^{-i\sigma z}$ autour d'un contour similaire à celui de la figure 5, mais dans le demi-plan inférieur. De manière équivalente, on peut remplacer z par $-z$ et intégrer la fonction $f(-z)e^{-i\sigma z}$ e contour dans le demi-plan supérieur. Le résultat de cette dernière approche est la relation de transformation

$$\mathcal{F}\{f(t); s\} = i\sqrt{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s \{f(-z)e^{isz}; \alpha_k\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \operatorname{Re} s \{f(-z)e^{isz}; \beta_k\} \right] \quad (1.62)$$

Où $s < 0$. Ici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sont les pôles de $f(-z)$ dans le demi-plan supérieur et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ sont les pôles simples de $f(-z)$ le long de l'axe réel.

Pour calculer les transformées de Fourier inverses par cette méthode, nous observons simplement que les cas correspondant aux t positifs et négatifs sont l'inverse de ceux des s positifs et négatifs en conséquence du fait que le noyau de la transformée inverse est le conjugué complexe du noyau de la transformation

exemple 1.1.6 Trouver la transformée de Fourier de $\frac{1}{t(t^2+k^2)}$, $k > 0$.

Solution : La fonction complexe $f(z) = \frac{1}{z(z^2+k^2)}$ a des pôles simples à $z = 0, z = \pm ik$. Par conséquent, le calcul des résidus à $z = 0, z = ik$ on trouve que

$$\operatorname{Re} s \{f(z)e^{isz}; 0\} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) e^{isz} = \frac{1}{2k^2}$$

et

$$\operatorname{Re} s \left\{ f(z)e^{isz}; ik \right\} = \lim_{z \rightarrow ik} (z - ik) f(z)e^{isz} = -\frac{e^{-ks}}{2k^2}$$

De (1.61), nous avons maintenant

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t(t^2 + k^2)}; s \right\} = i\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{e^{-ks}}{2k^2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{k^2} (1 - e^{-ks}), s > 0$$

Parce que $f(t) = t(t^2 + k^2)$ est une fonction impaire, nous pouvons utiliser (1.40) pour déduire que, pour tous les s

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t(t^2 + k^2)}; s \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{k^2} (1 - e^{-k|s|}) \operatorname{sgn}(s)$$

1.2 La transformation de Laplace

1.2.1 Introduction

Il existe de nombreuses transformations intégrales qui ont été développées au fil des ans, dont beaucoup sont hautement spécialisées. La plus polyvalente de toutes les transformations intégrales, y compris la transformée de Fourier, est la transformée de Laplace. Les transformations de Laplace remontent au mathématicien français Laplace qui a utilisé l'intégrale de transformation dans ses travaux sur la théorie des probabilités dans les années 1780. S. D. Poisson (1781 – 1840) connaissait également l'intégrale de la transformée de Laplace dans les années 1820 et cela s'est produit dans le célèbre article de Fourier de 1811 sur la conduction thermique. Néanmoins, c'est Oliver Heaviside* qui a popularisé l'utilisation de la transformée de Laplace comme outil de calcul dans les équations différentielles élémentaires et le génie électrique.

Nous pouvons définir directement la transformée de Laplace, mais il est instructif de la dériver formellement et de sa formule d'inversion directement à partir du théorème de Fourier. De cette façon, nous aurons une meilleure perspective sur la relation entre les transformées de Fourier et Laplace. Pour commencer, supposons que f et sa dérivée f' des fonctions continues par morceaux pour tout $t \geq 0$. Dans ce cas, la transformée de Fourier de $f(t)$ peut ne pas exister, que nous supposons généralement nulle pour $t < 0$. Ces fonctions sont appelées fonctions causales dans la littérature d'ingénierie et sont généralement mieux gérées par la transformation de Laplace.

Bien que nous n'ayons pas besoin que f soit absolument intégrable, supposons la fonction associée

$$g(t) = e^{-ct} f(t) h(t) \quad (1.63)$$

Possède cette propriété, où c est une constante réelle positive et $h(t)$ est la fonction unitaire de Heaviside. Il s'ensuit donc que f doit satisfaire à la condition

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt < \infty \quad (1.64)$$

Parce que la fonction g satisfait aux conditions du théorème de Fourier intégrale (*Théor.*1.1.1), nous pouvons écrire

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx ds$$

ou de manière équivalente,

$$f(t) h(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \int_0^{\infty} f(x) e^{-(c-is)x} dx ds \quad (1.65)$$

Si nous introduisons maintenant le changement de la variable $p = c - is$, alors (1.65) prend la forme

$$f(t) h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx dp \quad (1.66)$$

Ainsi, nous avons dérivé la paire de formules de transformation

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t); p\} \quad (1.67)$$

Appelé la transformée de Laplace de $f(t)$, et

$$f(t) h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \mathcal{L}^{-1}\{F(p); t\} \quad (1.68)$$

désignant la transformée de Laplace inverse. Le chemin d'intégration dans (1.68) apparaît comme illustré sur la figure 6

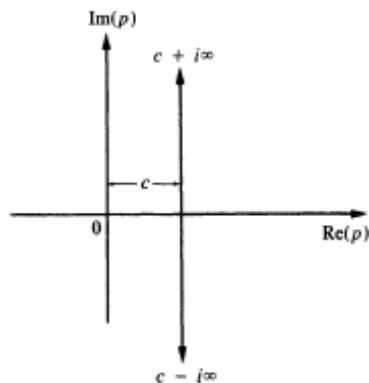


Fig 6 chemin d'intégration de la transformée de Laplace inverse

Cette intégrale converge si la partie réelle de p dépasse une valeur minimale, disons c_0 , de sorte que toutes les singularités de $F(p)$ se trouvent à gauche de la ligne $\text{Re}(p) = c_0$. la transformée de Laplace inverse donnée dans (1.68) existe alors pour tout $c > c_0$.

Dans notre discussion ultérieure des transformées de Laplace, il faut comprendre que $f(t)$ n'est défini que pour $t \geq 0$. Par conséquent, nous n'écrirons plus $f(t)h(t)$ dans la relation de transformation inverse.

1.2.2 Les transformations de certaines fonctions typiques

La transformation de Laplace de nombreuses fonctions peut être obtenue par des intégrations de routine formelles de l'intégrale de définition (1.67) en traitant p comme s'il s'agissait d'une variable réelle. Pour l'instant, nous allons procéder à de telles intégrations et examiner plus tard les conditions dans lesquelles ce formalisme est valable.

exemple 1.2.1 Trouver la transformée de Laplace de e^{at} .

Solution : Par définition,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}; p\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale diverge pour $\operatorname{Re}(p) \leq a$, tandis que pour $\operatorname{Re}(p) > a$, nous obtenons

$$\mathcal{L}\{e^{at}; p\} = \frac{1}{p-a}, \operatorname{Re}(p) > a$$

La restriction $\operatorname{Re}(p) > a$ requise à cet exemple est typique dans l'évaluation des transformées de Laplace. Autrement dit, l'intégrale de transformation (1.67) n'aura de sens que pour les valeurs complexes de p dans un demi-plan et pas pour d'autres, si l'intégrale converge effectivement. De telles restrictions sont importantes dans le développement de la théorie générale des transformées de Laplace mais sont peu importantes dans de nombreuses applications de la transformée. Autrement dit, dans la pratique, nous sommes généralement satisfaits si nous savons que la transformation existe pour certaines valeurs de p sans savoir spécifiquement pour quelles valeurs. Notez qu'en autorisant $a \rightarrow 0^+$ dans le résultat de l'examp, nous obtenons le cas limite

$$\mathcal{L}\{1; p\} = \frac{1}{p}, \operatorname{Re}(p) > 0 \tag{1.69}$$

exemple 1.2.2 *Trouvez les transformées de Laplace de $\cos at$ et $\sin at$.*

Solution : *D'après la définition, nous avons*

$$\mathcal{L}\{\cos at; p\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos at dt = \frac{p}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re}(p) > a$$

$$\mathcal{L}\{\sin at; p\} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt = \frac{a}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re}(p) > a$$

qui découle directement des résultats des équations (1.43) et (1.44). De plus, nous notons la rapports

$$\mathcal{L}\{\cos at; p\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_c\{e^{-pt}; a\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at; p\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_s\{e^{-pt}; a\}$$

où \mathcal{F}_c et \mathcal{F}_s désignent respectivement les transformées de cosinus de Fourier et de sinus de Fourier.

exemple 1.2.3 *Trouvez la transformée de Laplace de t^x , où $x > -1$.*

Solution : *A partir de l'intégrale de définition*

$$\mathcal{L}\{t^x; p\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^x dt = \frac{1}{p^{x+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^x du$$

où nous avons fait le changement de variable $u = pt$. En utilisant les propriétés de la fonction gamma, nous déduisons maintenant que

$$\mathcal{L}\{t^x; p\} = \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}, \quad x > -1, \operatorname{Re}(p) > 0$$

Nous allons considérer certaines Transformations supplémentaires dans la prochaine section. Pour l'instant, examinons les conditions dans lesquelles la transformation de Laplace existe.

Théorème d'existence

Notre évaluation des transformations de Laplace jusqu'à présent a été purement formelle, utilisant des techniques d'intégration élémentaires de variables réelles. Nous n'avons pas abordé la question de savoir quelle classe de fonctions a réellement des transformations de Laplace. Autrement dit, comme la transformée de Fourier, toutes les fonctions (même les fonctions continues) n'ont pas une transformée de Laplace.

Supposons que f soit une fonction continue par morceaux avec la propriété supplémentaire qu'il existe un nombre réel c_0 tel qu'une

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-ct} = \begin{cases} 0, & c > c_0 \\ \text{sans limites,} & c < c_0 \end{cases} \quad (1.70)$$

f fonction satisfaisant à cette condition dite d'ordre exponentiel c_0 , également écrite $O(e^{c_0 t})$. L'équation (1.69) peut ou peut ne pas être satisfaite si $c = c_0$.

Les fonctions bornées $f(t)$, telles que le courant et la vitesse, qui se produisent dans la solution pour la réponse temporelle des systèmes linéaires stables sont d'ordre exponentiel nul. C'est-à-dire que le produit $|f(t)| e^{-ct}$ égale à zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ pour tous $c > 0$. Même certaines fonctions illimitées, comme la charge électrique ou le déplacement mécanique dans des systèmes affichant une résonance, peuvent avoir un ordre exponentiel nul si

elles augmentent comme t^n , $n > 0$. Dans certains systèmes instables, la réponse peut augmenter exponentiellement comme e^{at} . Ici, nous voyons que dans de tels cas se rapproche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{-ct} = 0, \quad c > a$$

et ainsi déduire que e^{at} est d'ordre exponentiel a . Un exemple de la fonction qui n'est pas d'ordre exponentiel est $f(t) = e^{t^2}$, puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2} e^{-ct} = \infty$$

pour toute constante $c > -\infty$

Remarque 1.2.1 Les fonctions qui sont identiques à zéro pour $t \geq t_0 > 0$ sont dites d'ordre exponentiel $-\infty$

Pour établir qu'une fonction $f(t)$ donnée a une transformée de Laplace $F(p)$, nous devons montrer que l'intégrale de la transformée de Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

converge ce sera le cas à condition

$$|F(p)| \leq \int_0^{\infty} |e^{-pt} f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt < \infty$$

où $c = \operatorname{Re}(p)$, Soit f continu par morceaux sur $t \geq 0$ et de $0(e^{c_0 t})$, et soit c_1 un nombre tel que $c_0 < c_1 < c$. Parce que $f(t) = 0(e^{c_0 t})$, il s'ensuit que pour toute petite constante positive ε donnée, il en existe certaines t_0 telles que

$$|f(t)| e^{-c_1 t} < \varepsilon \quad \text{quand } t > t_0$$

Nous écrivons maintenant

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt = \int_0^{t_0} e^{-ct} |f(t)| dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt$$

où existe la première intégrale à limites finies car f est continu par morceaux. De plus, la seconde intégrale satisfait

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-(c-c_1)t} |f(t)| e^{-c_1 t} dt \\ &< \varepsilon \int_{t_0}^{\infty} e^{-(c-c_1)t} dt \end{aligned}$$

Mais cette dernière intégrale existe pour $c > c_1$, et donc nous avons établi des conditions dans lesquelles l'intégrale de la transformée de Laplace converge absolument dans le demi-plan $\operatorname{Re}(p) > c_0$. On peut également montrer que l'intégrale de la transformée de Laplace converge uniformément pour $\operatorname{Re}(p) \geq c_2 > c_0$, où c_2 est tout nombre réel satisfaisant $c_0 < c_2 \leq c$.

En résumé, nous avons le théorème d'existence suivant.

Théorème 1.2.1 (théorème d'existence). *Si f est continu par morceaux sur $t \geq 0$ et vaut 0 ($e^{c_0 t}$), alors $f(t)$ a une transformée de Laplace $F(p)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(p) > c_0$. De plus, l'intégrale de transformée de Laplace converge de façon absolue et uniforme pour $\operatorname{Re}(p) \geq c_2 > c_0$.*

La plupart des fonctions remplies dans la pratique satisfont aux conditions de *théor.1.2.1*. Cependant, ces conditions sont suffisantes plutôt que nécessaires pour garantir qu'une fonction donnée a une transformée de Laplace. Par exemple, les deux t^{-1} et $t^{-1/2}$ ont des discontinuités infinies à $t = 0$ et ne sont donc pas continûment picewise sur $t \geq 0$. Pourtant, alors que l'intégrale

$$\mathcal{L}\{t^{-1}; p\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-1} dt$$

n'existe pas, (Puisque p est complexe, il faut vraiment aussi spécifier la branche du multivalué fonction $p^{1/2}$, qui peut être soit \sqrt{p} soit $-\sqrt{p}$ en général.)

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}; p\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-1/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

également, la transformation de Laplace peut exister dans certains cas lorsque f n'est pas d'ordre exponentiel, bien que nous ne fournirons aucune discussion générale de ce cas*.

La suite analytique

Selon le *théor.1.2.1*, chaque fonction $f(t)$ qui est d'ordre exponentiel et appartient à la classe des fonctions continues par morceaux a une transformée de Laplace $F(p)$. En raison des propriétés des intégrales définies, nous savons également que $F(p)$ est unique. Enfin, la fonction de transformation $F(p)$ a la propriété importante suivante que nous ne prouvons pas*.

Théorème 1.2.2 *Si $f(t)$ est continu par morceaux sur $t \geq 0$ et vaut 0 ($e^{c_0 t}$), sa transformée de Laplace $F(p)$ est une fonction analytique de la variable complexe p dans le demi-plan $\operatorname{Re}(p) > c_0$*

Dans certains cas, la fonction $F(p)$ peut être analytique à gauche de la droite $\operatorname{Re}(p) = c_0$, bien que pour nos besoins il suffit de savoir qu'il existe un demi-plan où $F(p)$ est bien analytique. Jusqu'à présent, nous avons produit des transformées de Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Par des méthodes d'intégration formelles applicables aux intégrales réelles. En d'autres termes, nous avons traité la variable complexe p comme s'il s'agissait d'une variable réelle x , puis une fois $F(x)$ déterminée, nous avons obtenu $F(p)$ en remplaçant simplement x par p . Il est rassurant de savoir que cette procédure formelle est effectivement valable ! Ce qui permet ce type de formalisme est le fait que $F(p)$ est une fonction analytique, et donc nous pouvons utiliser la continuation analytique pour obtenir $F(p)$ à partir de $F(x)$, où x est réel.

1.2.3 Transformations de fonctions plus compliquées

Lorsque la fonction dont la transformation est nécessaire conduit à une intégrale non élémentaire, nous devons généralement recourir à des techniques d'intégration avancées ou à diverses astuces et manipulations pour accomplir notre tâche. Illustrons-le par quelques exemples.

exemple 1.2.4 *Trouvez la transformée de Laplace de $\operatorname{erf}(t)$ qui est la fonction d'erreur.**

Solution : *A partir de l'intégrale de définition de la transformée de Laplace et de celle de la fonction d'erreur, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{erf}(t); p\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \operatorname{erf}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx dt \end{aligned}$$

Recaractérisation de la région d'intégration $0 \leq x \leq t, 0 \leq t < \infty$ par $x \leq t < \infty, 0 \leq x < \infty$, nous pouvons échanger l'ordre d'intégration selon

Fig.7

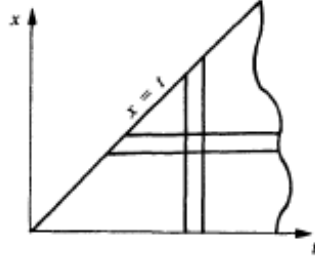


Fig 7 domaine d'intégration.

pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \operatorname{erf}(t) ; p \} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \int_x^{\infty} e^{-pt} dt dx \\ &= \frac{2}{p\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+px)} dx \\ &= \frac{2}{p\sqrt{\pi}} e^{p^2/4} \int_0^{\infty} e^{-(x+p/2)^2} dx \end{aligned}$$

Où nous avons écrit

$$x^2 + px = (x + p/2)^2 - p^2/4$$

Enfin, faire le changement de variable $u = x + p/2$ conduit à

$$\mathcal{L} \{ \operatorname{erf}(t) ; p \} = \frac{2}{p\sqrt{\pi}} e^{p^2/4} \int_{p/2}^{\infty} e^{-u^2} du$$

et on en déduit que

$$\mathcal{L} \{ \operatorname{erf}(t) ; p \} = (1/p) e^{p^2/4} \operatorname{erfc}(p/2), \operatorname{Re}(p) > 0$$

Plusieurs relations de transformation de Laplace impliquent la formule intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2 - b^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{2ab}, a > 0, b \geq 0 \quad (1.71)$$

exemple 1.2.5 Trouver la transformée de Laplace de $(1/\sqrt{t}) e^{-k/t}, k \geq 0$.

Solution : D'après la définition,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-k/t}; p\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-k/t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-px^2 - k/x^2} dx\end{aligned}$$

où nous avons défini $t = x^2$ à la dernière étape. En se référant maintenant à l'équation (1.71), nous voyons que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-k/t}; p\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{kp}}, k \geq 0, \operatorname{Re}(p) > 0$$

En différenciant formellement les deux côté du résultat de cette exemple par rapport au paramètre k , on obtient la nouvelle relation de transformation

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t\sqrt{t}}e^{-k/t}; p\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-2\sqrt{kp}}, k > 0, \operatorname{Re}(p) > 0 \quad (1.72)$$

Transformations impliquant des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel surviennent dans diverses applications impliquant la transformée de Laplace et il est donc important de connaître certaines relations de transformation de ces fonctions.

exemple 1.2.6 Trouver la transformée de Laplace de $t^{v/2} J_v(2\sqrt{t})$.

Solution : Ici, nous trouvons pratique d'exprimer d'abord la fonction donnée dans une série de puissance ; ainsi,

$$\begin{aligned}t^{v/2} J_v(2\sqrt{t}) &= t^{v/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+v/2}}{n! \Gamma(n+v+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+v}}{n! \Gamma(n+v+1)}\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de cette série, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^{v/2} J_v(2\sqrt{t}); p\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+v+1)} \mathcal{L}\{t^{n+v}; p\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! p^{n+v+1}} \\ &= \frac{1}{p^{v+1}} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{p}\right)^n\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\mathcal{L}\left\{t^{v/2}J_v\left(2\sqrt{t}\right);p\right\}=\frac{1}{p^{v+1}}e^{-1/p}, \operatorname{Re}(p)>0$$

*CHAPITRE 1. LA TRANSFORMATION DE FOURIER ET DE
LAPLACE*

Chapitre 2

La transformation de Legendre, Hermite et Leguerre

2.1 La transformation de Legendre

2.1.1 Introduction

Nous considérons dans ce section la transformée de Legendre avec un polynôme de Legendre comme noyau et discutons des propriétés opérationnelles de base, y compris le théorème de convolution. Les transformées de Legendre sont ensuite utilisées pour résoudre des problèmes de valeurs limites dans la théorie des potentiels.

2.1.2 Définition de la transformée de Legendre

La transformée de Legendre d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$ est définie par

$$\bar{f}_l(n) \equiv l[f(x); x \rightarrow n] = \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx \quad (2.1)$$

Où $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre de degré n ($n \geq 0$) à condition que l'intégrale dans (2.1) existe. La propriété orthogonale du polynôme de Legendre

est connue sous le nom de*

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (2.2)$$

et cela peut également être exprimé comme

$$l[P_m(x); x \rightarrow n] = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (2.3)$$

Depuis les éqns (2.2) et (2.3) Théorème d'expansion de Fourier-Legendre de une fonction continue par morceaux $f(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$ est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \bar{f}_l(n) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in C(-1, 1) \\ [f(x+0) + f(x-0)], & \text{si } f(x) \in P^1(-1, 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous avons donc la formule d'inversion pour la transformée de Legendre est

$$l^{-1}[P_m(x); x \rightarrow n] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \bar{f}_l(n) P_n(x) \quad (2.5)$$

2.1.3 Propriétés élémentaires des transformées de Legendre

1. Puisque $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ on obtient

$$\bar{f}_l(0) = \int_{-1}^1 f(x)dx \quad (2.6)$$

et

$$\bar{f}_l(1) = \int_{-1}^1 xf(x)dx \quad (2.7)$$

Encore,

$$l[f'(x); x \rightarrow 0] = \int_{-1}^1 f'(x)dx = f(1) - f(-1) \quad (2.8)$$

2.1. LA TRANSFORMATION DE LEGENDRE

$$l[f'(x); x \rightarrow 1] = \int_{-1}^1 x f'(x) dx = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (2.9)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} l[f''(x); x \rightarrow 1] &= f'(1) + f'(-1) - \int_{-1}^1 f'(x) dx \quad (2.10) \\ &= f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1) \end{aligned}$$

et

$$l[C; x \rightarrow 0] = \int_{-1}^1 C dx = 2C \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} l[C; x \rightarrow n] &= \int_{-1}^1 C P_n(x) dx \\ &= C \int_{-1}^1 P_n(x) dx = C \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(x) dx \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$l[C; x \rightarrow n] = 0, \text{ quand } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

(en mettant $m = 0$ dans l'équation. (2.3)).

2. Encore une fois depuis, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ nous avons

$$\begin{aligned} l[f(-x); x \rightarrow n] &= \int_{-1}^1 f(-x) P_n(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) P_n(-x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \\ &= (-1)^n l[f(x); x \rightarrow n] \end{aligned}$$

De ce résultat, nous pouvons écrire

$$l^{-1}[(-1)^n \bar{f}_l(n); n \rightarrow x] = f(-x) \quad (2.13)$$

3. La transformée de Legendre de $e^{i\alpha x}$ est donnée par

$$l_n[e^{i\alpha x}; x \rightarrow n] = \int_{-1}^1 e^{i\alpha x} P_n(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} i^n J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha) \quad (2.14)$$

De même,

$$l_n[e^{\alpha x}; x \rightarrow n] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} I_{n+\frac{1}{2}}(\alpha) \quad (2.15)$$

4. Aussi

$$l\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; x \rightarrow n\right] = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi P_n^2(0)$$

et

$$l\left[\frac{1}{2(t-x)}; x \rightarrow n\right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) dx}{t-x} = Q_n(t), |t| > 1 \quad (2.17)$$

5. De la relation génératrice du polynôme de Legendre nous avons

$$(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x), |r| < 1$$

Multipliant les deux côtés par $P_n(x)$ et intégrant le résultat avec par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} P_n(x) dx &= r^n \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\ &= \frac{2r^n}{(2n+1)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lorsque $r = 1$, on obtient

$$\int_{-1}^1 [2(1-x)]^{-\frac{1}{2}} P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

2.1. LA TRANSFORMATION DE LEGENDRE

⇒

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} P_n(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

ou

$$l \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} ; x \rightarrow n \right] = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1} \quad (2.19)$$

Équation différentielle. (2.18) par rapport à r et après multiplication le résultat par r , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-2rx+r^2)^{-3/2} (2rx-2r^2) P_n(x) dx = \frac{2nr^n}{(2n+1)}$$

⇒

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-2rx+r^2)^{-3/2} [-\{1+2rx+r^2+r^2-1\}] P_n(x) dx = \frac{2nr^n}{2n+1}$$

⇒

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-2rx+r^2)^{-1/2} P_n(x) dx + \frac{(1-r^2)}{2} \int_{-1}^1 (1-2rx+r^2)^{-3/2} P_n(x) dx \\ = \frac{2nr^n}{2n+1} \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} -l \left[(1-2rx+r^2)^{-1/2} ; x \rightarrow n \right] + (1-r^2) l \left[(1-2rx+r^2)^{-3/2} ; x \rightarrow n \right] \\ = \frac{4nr^n}{2n+1} \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'équation. (2.18), le résultat ci-dessus se réduit à

$$\begin{aligned} l \left[(1-2rx+r^2)^{-3/2} ; x \rightarrow n \right] &= \left[\frac{4nr^n}{2n+1} + \frac{2r^n}{2n+1} \right] \frac{1}{1-r^2} \\ &= \frac{2r^n}{1-r^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

6. La transformée de Legendre de $H(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} l[H(x); x \rightarrow n] &= \int_{-1}^1 H(x)P_n(x)dx \\ &= \int_0^1 H(x)P_n(x)dx \\ &= \int_0^1 P_n(x)dx \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $P_n(x) = P_0(x) = 1$ et donc $l[H(x); x \rightarrow n] = 1$,

Si $n > 1$, nous savons de la relation de récurrence du polynôme de Legendre que

$$(2n + 1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad (2.21)$$

Par conséquent, dans ce cas

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x)dx &= \frac{1}{2n + 1} \int_0^1 [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)] dx \\ &= \frac{1}{2n + 1} [P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)] \end{aligned}$$

Donc,

$$l[H(x); x \rightarrow n] = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 0 \\ \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)], & \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

7. De l'éqn.(2.21) nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 g(x) P_n(x) dx &= \frac{1}{2n+1} \left[\int_{-1}^1 g(x) P'_{n+1}(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) P'_{n-1}(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left[g(x) P_{n+1}(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g'(x) P_{n+1}(x) dx \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2n+1} \left[-g(x) P_{n-1}(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 g'(x) P_{n-1}(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2n+1} [g(x) \{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\} \Big|_{-1}^1] \\
 &\quad - \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 g'(x) \{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\} dx \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Ainsi, si $g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ est une fonction continue dans $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}
 l[g(x); x \rightarrow n] &= \frac{1}{2n+1} [l\{g'(x); x \rightarrow (n-1)\}] \\
 &\quad - \frac{1}{2n+1} [l\{g'(x); x \rightarrow (n+1)\}]
 \end{aligned}$$

à condition que l'expression $[\dots]_{-1}^1$ disparaît. Ainsi, en particulier, nous avons le cas particulier

$$l \left[\int_{-1}^x f(t) dt; x \rightarrow n \right] = \frac{1}{2n+1} [\bar{f}_l(n-1) - \bar{f}_l(n+1)] \quad (2.24)$$

Par conséquent, par application répétée de (2.8) et (2.9) et par (2.23) nous obtenons

$$l[f'(x); x \rightarrow 2m] = f(1) - f(-1) - \sum_{r=0}^{m-1} (4m - 4r - 1) \bar{f}_l(2m - 2r - 1) \quad (2.25)$$

$$l[f'(x); x \rightarrow 2m+1] = f(1) - f(-1) - \sum_{r=0}^{m-1} (4m - 4r - 1) \bar{f}_l(2m - 2r) \quad (2.26)$$

Également de la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

on peut facilement en déduire

$$l[xf(x); x \rightarrow n] = \frac{1}{2n+1} [(n+1)\bar{f}_l(n+1) + n\bar{f}_l(n)] \quad (2.27)$$

2.1.4 Propriétés opérationnelles des transformées de Legendre

Théorème 2.1.1 *Si $f'(x)$ est continu et $f''(x)$ est borné et intégrable dans chaque sous-intervalle de $-1 \leq x \leq 1$ et si la transformée de Legendre de $f(x)$ existe et*

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} (1-x^2) [f(x), f'(x)] = 0$$

alors

$$l \left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right\}; x \rightarrow n \right] = -(n+1) n \bar{f}_l(n)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} l \left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right\}; x \rightarrow n \right] &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right\} P_n(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) P_n'(x) dx \end{aligned}$$

sur l'intégration par partie et en utilisant la condition donnée.

Encore une fois sur l'intégration par partie, le résultat ci-dessus devient

$$\begin{aligned} &= - \left[(1-x^2) P_n'(x) f(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) P_n'(x) \right\} f(x) dx \right] \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right\} f(x) dx \end{aligned}$$

2.1. LA TRANSFORMATION DE LEGENDRE

en utilisant une condition donnée. Mais on sait que

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] = -n(n+1) P_n(x)$$

et donc,

$$\begin{aligned} l \left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right\}; x \rightarrow n \right] &= -n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx \\ &= -n(n+1) \bar{f}_l(n) \end{aligned} \quad (2.28)$$

■

Remarque 2.1.1 Si nous désignons l'opérateur R par

$$Rf(x) = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right]$$

nous pouvons étendre le résultat suivant

$$\begin{aligned} l[R^2 f(x); x \rightarrow n] &= (-1)^2 n^2 (n+1)^2 \bar{f}_l(n) \\ l[R^3 f(x); x \rightarrow n] &= (-1)^3 n^3 (n+1)^3 \bar{f}_l(n) \\ &\dots \dots \\ l[R^k f(x); x \rightarrow n] &= (-1)^k n^k (n+1)^k \bar{f}_l(n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Corollaire 2.1.1 On voit que

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} l[Rf(x); x \rightarrow n] &= -(n+1) n \bar{f}_l(n) \\ &= - \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \bar{f}_l(n) \\ &= - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \bar{f}_l(n) + \frac{1}{4} \bar{f}_l(n) \end{aligned}$$

Donc,

$$l\left[\frac{1}{4}f(x) - Rf(x); x \rightarrow n\right] = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \bar{f}_l(n) \quad (2.30)$$

En étendant ce résultat, nous obtenons

$$(-1)^k l[R^k(f(x)) - 4^k; x \rightarrow n] = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r k_{c_r} \left[4^{-r} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2k-2r}\right] \bar{f}_l(n)$$

Théorème 2.1.2 (Théorème de convolution). si

$$l[f(x); x \rightarrow n] = \bar{f}_l(n) \quad \text{et} \quad l[g(x); x \rightarrow n] = \bar{g}_l(n)$$

alors

$$l^{-1}[\bar{f}_l(n) \bar{g}_l(n); x \rightarrow n] = f(x) * g(x) \quad (2.31)$$

où $f(x) * g(x)$ est appelée la convolution de $f(x)$ et $g(x)$ et est définie par

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda d\lambda \int_0^\pi g(\cos \eta) d\beta \quad (2.32)$$

avec

$$x = \cos \mu \quad \text{et} \quad \cos \eta = \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \beta$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{f}_l(n) \bar{g}_l(n) &= \int_0^\pi f(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) (\sin \lambda) d\lambda \int_0^\pi g(\cos \eta) P_n(\cos \eta) \sin \eta d\eta \\ &= \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda \left[\int_0^\pi g(\cos \eta) P_n(\cos \eta) P_n(\cos \lambda) \sin \eta \right] d\lambda \end{aligned}$$

où

$$f(x) = f(\cos \lambda) \quad \text{et} \quad g(x) = g(\cos \eta)$$

En outre, depuis

$$P_n(\cos \eta) P_n(\cos \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \mu) d\alpha$$

2.1. LA TRANSFORMATION DE LEGENDRE

où

$$\cos \mu = \cos \eta \cos \lambda + \sin \eta \sin \lambda \cos \alpha$$

on peut récrire

$$\bar{f}_l(n) \bar{g}_l(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda \left[\int_0^\pi \int_0^\pi g(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) \sin \eta d\alpha d\eta \right] d\lambda$$

Maintenant, l'intégrale double à droite de l'équation ci-dessus est donnée par

$$\int_0^\pi \int_0^\pi g(\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \beta) P_n(\cos \mu) \sin \mu d\mu$$

En utilisant ce résultat et en changeant l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{f}_l(n) \bar{g}_l(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \mu) \sin \mu \left[\int_0^\pi \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda g(\cos \eta) d\lambda d\beta \right] d\mu \\ &= \int_0^\pi h(\cos \mu) P_n(\cos \mu) \sin \mu d\mu \end{aligned}$$

où

$$\cos \eta = \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \beta$$

et

$$h(\cos \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda \int_0^\pi g(\cos \eta) d\beta$$

Ainsi le théorème est démontré. En particulier, si $\mu = 0$, nous obtenons de (2,32) que

$$h(1) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt \tag{2.33}$$

et lorsque $\mu = \pi$,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 f(t)g(-t)dt \tag{2.34}$$

■

2.1.5 Application aux problèmes de valeur limite

À titre d'illustration, nous considérons l'application de la transformée de Legendre finie dans la solution du problème de Dirichlet intérieur pour le potentiel $u(r, \theta)$ à l'intérieur une sphère unitaire ($r = 1$) satisfaisant l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \quad 0 < r \leq 1 \quad (2.35)$$

avec condition aux limites

$$u(1, x) = f(x), \quad -1 < x < 1 \quad (2.36)$$

où $x = \cos \theta$.

Appliquer la transformée de Legendre finie sur la variable x , la EDP (2, 35) et la condition aux limites (2, 36) se réduisent à

$$r^2 \frac{d^2 \bar{u}_l(r, n)}{dr^2} + 2r \frac{d\bar{u}_l(r, n)}{dr} - n(n+1) \bar{u}_l(r, n) = 0 \quad (2.37)$$

et

$$\bar{u}_l(1, n) = \bar{f}_l(n) \quad (2.38)$$

respectivement, où $\bar{u}_l(r, n)$ est une fonction continue de r dans $0 < r \leq 1$ La solution bornée de (2.37) et (2.38) est $\bar{u}_l(r, n) = \bar{f}_l(n)r^n, 0 < r \leq 1$, où n est un entier non négatif.

Lors de l'inversion, la solution du problème est donnée par

$$u(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \bar{f}_l(n) r^n p_n(x), \quad 0 < r \leq 1, |x| < 1 \quad (2.39)$$

Une autre représentation de cette solution peut également être obtenue via application du théorème de convolution et aussi de la formule de l'équation (2.20) comme

$$\begin{aligned} u(r, \cos \theta) &= l^{-1}[\bar{f}_l(n)r^n; n \rightarrow x = \cos \theta] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda d\lambda \int_0^\pi \frac{(1-r^2)d\eta}{(1-2r \cos \mu + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

où

$$\cos \mu = \cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta \cos \eta$$

L'intégrale dans (2.40) est appelée la formule intégrale de Poisson du potentiel à l'intérieur de la sphère unitaire.

La solution du problème de Dirichlet extérieur sous condition aux limites $w(1, x) = f(x)$, $x = \cos \theta$ de la sphère unitaire $r = 1$ est alors donné par

$$w_l(r, n) = \bar{f}_l(n)r^{-n}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Sur l'inversion, cela donne

$$\begin{aligned} u(r, \cos \theta) &= \frac{1}{r} w \left(\frac{1}{r}, \cos \theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \lambda) \sin \lambda d\lambda \int_0^\pi \frac{(r^2 - 1)d\eta}{(1 - 2r \cos \mu + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

où

$$\cos \mu = \cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta \cos \eta$$

et $w(r, \cos \theta)$ est la solution du problème extérieur.

2.2 Transformation d'Hermite

2.2.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons la transformée Hermite avec un noyau impliquant un polynôme Hermite et discutons ses propriétés opérationnelles de base, y compris le théorème de convolution. Debnath (1964) a introduit cette transformation pour la première fois et a démontré certaines de ses propriétés opérationnelles de base.

2.2.2 Définition de la transformée d'Hermite

Debnath a introduit la transformation d'Hermite à travers son article intitulé «sur Hermite transform», *Mathematicki Vesnik*, il l'a dénoté et défini par

$$H[f(x); x \rightarrow n] \equiv f_H(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) f(x) dx \quad (2.42)$$

où $H_n(x)$ est le polynôme Hermite de degré n défini par la formule Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \{ \exp(-x^2) \} \quad (2.43)$$

La transformée Hermite inverse notée $H^{-1}[f_H(n); n \rightarrow x]$ est défini par

$$H^{-1}[f_H(n); n \rightarrow x] \equiv f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{-1} f_H(n) H_n(x) \quad (2.44)$$

où δ_n est donné par

$$\delta_n = \sqrt{\pi n!} 2^n \quad (2.45)$$

Étant donné que toute fonction $f(x)$ peut être développée dans une série de Hermite des polynômes comme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

où les coefficients a_n du $(n+1)$ ème terme sont donnés par

$$a_n = \delta_n^{-1} f_H(n)$$

après avoir utilisé la relation d'orthogonalité des polynômes Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} \delta_n \quad (2.46)$$

2.2.3 Propriétés élémentaires des transformées d'Hermite

(a) Soit $f(x) =$ un polynôme de degré $r < n$

$$f(x) = P_r(x), r < n$$

Puis

$$\begin{aligned} H[f(x); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \sum_{k=0}^r a_k H_k(x) H_n(x) dx, r < n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \{0\} = 0 \end{aligned}$$

à partir de la relation d'orthogonalité des polynômes Hermite.

2.2. TRANSFORMATION D'HERMITE

(b) La transformée d'Hermite de $H_m(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} H[H_m(x); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_n(x) dx \\ &= \delta_n \delta_{nm} \end{aligned}$$

(c) Pour trouver $H[\exp(2xt - t^2); x \rightarrow n]$ nous considérons la génération fonction du polynôme Hermite comme

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

puis

$$\begin{aligned} H[\exp(2xt - t^2); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n^2(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta_n, |t| < \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n, |t| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(d) Nous avons de la définition

$$H[\exp(ax); x \rightarrow n] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp(ax) H_n(x) dx$$

Depuis,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + 2bx) H_n(x) dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2b)^n \exp(b^2)$$

la relation ci-dessus donne

$$H[\exp(ax); x \rightarrow n] = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \exp\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

2.2.4 Propriétés opérationnelles des transformées d'Her- mite

Théorème 2.2.1 *Si $f'(x)$ est continu et $f''(x)$ est intégrable dans $-\infty < x < \infty$ et si $H[f(x); x \rightarrow n] = f_H(n)$, puis*

$$H[R\{f(x)\}; x \rightarrow n] = -2nf_H(n)$$

où $R[f(x)]$ est défini comme

$$R[f(x)] = \exp(x^2) \frac{d}{dx} \left[\exp(-x^2) \frac{df}{dx} \right]$$

Preuve. Nous avons par définition,

$$\begin{aligned} H[R\{f(x)\}; x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d}{dx} \left[\exp(-x^2) \frac{df}{dx} \right] dx & (2.47) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} (x) e^{-x^2} H_n'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[e^{-x^2} H_n''(x) - 2xe^{-x^2} H_n'(x) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) [-2nH_n(x)] dx \\ &= -2nf_H(n) \end{aligned}$$

Si $R[f(x)]$ satisfait également aux conditions du théorème, alors

$$H [R^2\{f(x)\}; x \rightarrow n] = (-1)^2(2n)^2 f_H(n)$$

En général, lorsque R^{k-1} satisfait les conditions du théorème, alors

$$H [R^k\{f(x)\}; x \rightarrow n] = (-1)^k(2n)^k f_H(n), \text{ où } k = 1, 2, \dots$$

■

2.2. TRANSFORMATION D'HERMITE

Théorème 2.2.2 *Si $f(x)$ est borné et intégrable et $f_H(0) = 0$, alors pour chaque constante C*

$$H^{-1} \left[-\frac{f_H(n)}{2n} \right] = R^{-1}[f(x)] = \int_0^x \exp(s^2) \int_{-\infty}^s \exp(-t^2) f(t) dt ds + C$$

où R^{-1} est l'inverse de l'opérateur différentiel R et n est un positif entier.

Preuve.

$$\text{Let } R^{-1}[f(x)] = y(x) \Rightarrow R[y(x)] = f(x)$$

Ainsi, $y(x)$ est la solution d'une ODE de second ordre. Depuis, $f_H(0) = 0$ et $H_0(x) = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} R[y(x)] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} R[y(x)] H_0(x) dx & (2.48) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_0(x) dx \\ &= f_H(0) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la première intégrale de $R[y(x)] = f(x)$ est

$$\exp(-x^2) \frac{dy}{dx} = \exp(-t^2) f(t) dt$$

Comme $|x| \rightarrow \infty$, l'intégrale de droite ci-dessus tend vers zéro par vertu de l'eqn. (2, 48). Ensuite, la deuxième intégrale est

$$y(x) = \int_0^x \exp(s^2) \left\{ \int_{-\infty}^s [\exp(-t^2) f(t)] dt \right\} ds + C \quad (2.49)$$

Par conséquent ,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp(-x^2) y(x) = 0 \text{ et } H[y(x)] \text{ existe.}$$

Donc,

$$H[R\{y(x)\}; x \rightarrow n] = -2nH[y(x)]$$

impliquant

$$H[f(x); x \rightarrow n] = -2nH[y(x)]$$

\Rightarrow

$$f_H(n) = -2nH [R^{-1}\{f(x)\}]$$

\Rightarrow

$$H [R^{-1}\{f(x)\}] = -\frac{f_H(n)}{2n} \tag{2.50}$$

■

Transformation d'Hermite de dérivée d'une fonction

Théorème 2.2.3 *Si*

$$H[f(x); x \rightarrow n] = f_H(n)$$

et m est positif entier, puis

$$H[f^{(m)}(x); x \rightarrow n] = f_H(n + m)$$

Preuve. nous avons par définition

$$\begin{aligned} H[f'(x); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) f'(x) dx \\ &= [\exp(-x^2) f(x) H_n(x)]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx} \{ \exp(-x^2) H_n(x) \} dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) H_n(x) f(x) dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) H'_n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) [H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)] f(x) dx \\ &\quad - 2n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_{n-1}(x) f(x) dx \end{aligned}$$

puisque

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (2.51)$$

et

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (2.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_{n+1}(x) f(x) dx = f_H(n+1) \quad (2.53)$$

En procédant de la même manière, nous pouvons arriver à

$$H[f^{(m)}(x); x \rightarrow n] = f_H(n+m)$$

■

Théorème 2.2.4 *Si des transformées d'harmite de $f(x)$ et de $xf^{m-1}(x)$ existent, puis*

$$H[xf^{(m)}(x); x \rightarrow n] = nf_H(m+n-1) + \frac{1}{2}f_H(m+n+1)$$

Preuve. nous avons par définition

$$\begin{aligned} H[xf^{(m)}(x); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) \{xf^{(m)}(x)\} dx \\ &= [x \exp(-x^2) H_n(x) f^{(m-1)}(x)]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \{x \exp(-x^2) H_n(x)\} f^{(m-1)}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2x^2 \exp(-x^2) H_n(x) f^{(m-1)}(x) dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) f^{(m-1)}(x) dx \\ &\quad - n \int_{-\infty}^{\infty} 2x \exp(-x^2) H_{n-1}(x) f^{(m-1)}(x) dx \end{aligned}$$

Utilisation d'équations. (2.51) et (2.52), nous avons donc

$$\begin{aligned}
 H[xf^m(x); x \rightarrow n] &= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}[H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)]f^{(m-1)}(x)dx \\
 &\quad -n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)]f^{(m-1)}(x)dx \\
 &\quad -f_H(n+m+1) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_{n+2}(x) + 2(n+1)H_n(x)]f^{(m-1)}(x)dx \\
 &\quad +n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)]f^{(m-1)}(x)dx \\
 &\quad -nf_H(n+m-1) \\
 &\quad -2n(n-1)f_H(n+m-3) - f_H(n+m+1)
 \end{aligned}$$

depuis

$$\begin{aligned}
 H[f^{(m)}(x)] &= f_H(n+m) \\
 &= \frac{1}{2}f_H(n+m+1) + (n+1)f_H(n+m-1) + n[f_H(n+m-1) \\
 &\quad + 2(n-1)f_H(n+m-3)] - nf_H(n+m-1) \\
 &\quad - 2n(n-1)f_H(n+m-3) - f_H(n+m+1) \\
 &= \frac{1}{2}nf_H(n+m-1) + \frac{1}{2}f_H(n+m+1)
 \end{aligned}$$

En conséquence, pour $m = 1$ et $m = 2$, nous obtenons

$$H[xf'(x); x \rightarrow n] = nf_H(n) + \frac{1}{2}f_H(n+2)$$

$$H[xf''(x); x \rightarrow n] = nf_H(n+1) + \frac{1}{2}f_H(n+3)$$

■

2.3 La transformation de Laguerre

2.3.1 Introduction

Cette section est consacrée à l'étude de la transformée de Laguerre et de ses propriétés opérationnelles de base. Il est démontré que la transformée de Laguerre peut être utilisée efficacement pour résoudre le problème de conduction thermique dans un milieu semi-infini à conductivité thermique variable en présence d'une source de chaleur à l'intérieur du milieu.

2.3.2 Définition de la transformée de Laguerre

Debnath et McCully ont introduit cette transformation à travers leurs travaux pionniers. La transformée de Laguerre d'une fonction $f(x)$ sur $0 < x < \infty$ est désignée et défini par l'intégrale

$$L[f(x); x \rightarrow n] \equiv \bar{f}_\alpha(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) f(x) dx \quad (2.54)$$

où $L_n^\alpha(x)$ est le polynôme de Laguerre de degré $n(\geq 0)$ et d'ordre $\alpha > -1$ qui satisfait l'ODE

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) \right] + n e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) = 0 \quad (2.55)$$

Ces polynômes de Laguerre satisfont la propriété orthogonale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(n+1) \delta_{mn} = \delta_n \delta_{mn} \quad (2.56)$$

où δ_{mn} est la fonction delta de Kronecker et δ_n est donné par

$$\delta_n = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(n+1) \quad (2.57)$$

En conséquence, la transformée de Laguerre inverse est définie par

$$f(x) \equiv L^{-1}[\bar{f}_\alpha(n); n \rightarrow x] = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n)^{-1} \bar{f}_\alpha(n) L_n^\alpha(x) \quad (2.58)$$

Si $\alpha = 0$, selon McCully, la transformées paire de Laguerre prend la forme

$$L[f(x); x \rightarrow n] \equiv \bar{f}_0(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx \quad (2.59)$$

$$L^{-1}[\bar{f}_0(n); n \rightarrow x] \equiv f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_0(n) L_n(x) \quad (2.60)$$

où $L_n(x)$ est le polynôme de Laguerre de degré n et d'ordre zéro

2.3.3 Propriétés élémentaires des transformées de Laguerre

1. Si $f(x) = L_m^\alpha(x)$ on a $L[f(x)] = \delta_n \delta_{mn}$, nous avons de la définition

$$\begin{aligned} L[f(x); x \rightarrow n] &= L[L_m^\alpha(x); x \rightarrow n] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx \\ &= \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(n+1) \delta_{mn} \end{aligned}$$

par la propriété orthogonale du polynôme de Laguerre

$$L[f(x); x \rightarrow n] = \delta_n \delta_{mn}$$

2. $f(x) = e^{-\alpha x}$, $\alpha > -1$, nous avons

$$\begin{aligned} L[e^{-\alpha x}; x \rightarrow n] &= \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+1)} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \alpha^n}{n! (\alpha-1)^{n+\alpha+1}} \end{aligned}$$

donc

$$L[e^{-\alpha x}; x \rightarrow n] = \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \alpha^n}{n! (\alpha-1)^{n+\alpha+1}}$$

2.3. LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE

3. Nous pouvons exprimer x^k comme une combinaison linéaire de polynômes $L_0(x), L_1(x), \dots, L_k(x)$. Laisse faire

$$x^k = \sum_{r=0}^k C_r L_r(x)$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \sum_{r=0}^k C_r \int_0^{\infty} e^{-x} L_r(x) L_n(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^k C_r \times 0 \end{aligned}$$

par la relation d'orthogonalité puisque $k = r \neq n$.
mais si $k = n$, puis

$$\begin{aligned} x^k &= x^n = \sum_{r=0}^k C_r L_r(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} C_r L_r(x) + C_n L_n(x) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n L_n(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) C_n dx = C_n * 1$$

Maintenant, dans l'expansion de x^n

$$\begin{aligned} x^n &= C_0 L_0(x) + C_1 L_1(x) + \dots + C_n L_n(x) \\ &= [C_0 L_0(x) + C_1 L_1(x) + \dots + C_{n-1} L_{n-1}(x)] + C_n \left[\frac{(-1)^n x^n}{n!} + \text{un polynôme de degré } (n-1) \right] \end{aligned}$$

comme x^n ne se produit que sur le seul terme $C_n \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ sur le côté droit de l'expansion ci-dessus, nous avons en comparant les coefficients

de x^n sur des deux côtés

$$1 = C_n \frac{(-1)^n}{n!}$$

Cela implique que $C_n = (-1)^n n!$ et donc

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n L_n(x) dx = (-1)^n n!$$

c'est à dire

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n^\alpha(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ (-1)^n n!, & k = n \end{cases}$$

où $L_n(x)$ est un polynôme de Laguerre dû à McCully.

2.3.4 Propriétés opérationnelles des transformées de Laguerre

(a) Transformation de Laguerre de la dérivée d'une fonction.

$$L[f(x); x \rightarrow n] = \bar{f}_\alpha(n)$$

puis

$$\begin{aligned} L[f'(x); x \rightarrow n] &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) f'(x) dx & (2.61) \\ &= [e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) f(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) f(x) dx \\ &\quad - \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} L_n^\alpha(x) f(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha \frac{d}{dx} \{L_n^\alpha(x)\} f(x) dx \\ &= \bar{f}_\alpha(n) - \alpha \sum_{k=0}^n \bar{f}_{n-1}(k) - \sum_{k=0}^n \bar{f}_\alpha(k) \end{aligned}$$

(b) si

$$L[f(x); x \rightarrow n] = \bar{f}_\alpha(n) \quad (2.62)$$

puis

$$L[R\{f(x)\}; x \rightarrow n] = -n\bar{f}_\alpha(n)$$

où R est l'opérateur différentiel défini par α

$$R[f(x)] = e^x x^{-\alpha} \frac{d}{dx} \left[e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{df(x)}{dx} \right]$$

Nous avons par définition

$$\begin{aligned} L[R\{f(x)\}; x \rightarrow n] &= \int_0^\infty L_n^\alpha(x) \frac{d}{dx} \left[e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{df(x)}{dx} \right] dx \\ &= \left[L_n^\alpha(x) \left\{ e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{df(x)}{dx} \right\} \right]_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} \frac{df(x)}{dx} dx \\ &= - \left[e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) f(x) \right]_0^\infty \\ &\quad + \int_0^\infty f(x) \frac{d}{dx} \left\{ e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) \right\} dx \\ &= \int_0^\infty f(x) \{ -n e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) \} dx, \text{ par équation (2.48)} \\ &= -n \int_0^\infty e^x x^\alpha L_n^\alpha(x) f(x) dx \\ &= -n \bar{f}_\alpha(n) \end{aligned}$$

En étendant cette preuve, nous pouvons avoir

$$R^2\{f(x); x \rightarrow n\} = (-1)^2 n^2 \bar{f}_\alpha(n)$$

Plus généralement,

$$R^k\{f(x); x \rightarrow n\} = (-1)^k n^k \bar{f}_\alpha(n), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.63)$$

(c)

Théorème 2.3.1 (Théorème de convolution) *Le théorème de convolution de la transformée de Laguerre d'ordre zéro ($\alpha = 0$) est donné par*

$$L^{-1}[\bar{f}_0(n)\bar{g}_0(n)] = h(x)$$

où $h(x)$ est donné par

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt \int_0^{\pi} \exp(\sqrt{xt} \cos \theta) \cos(\sqrt{xt} \sin \theta) g(x + t - 2\sqrt{xt} \cos \theta) d\theta \quad (2.64)$$

si

$$L[f(x); x \rightarrow n] = \bar{f}_0(n) \text{ et } L[g(x); x \rightarrow n] = \bar{g}_0(n)$$

Preuve. Nous avons par définition

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(n)\bar{g}_0(n) &= \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-y} L_n(y) g(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \left[\int_0^{\infty} e^{-y} L_n(x) L_n(y) g(y) dy \right] \end{aligned}$$

Maintenant, à partir d'une formule du produit de deux fonctions de Laguerre, nous avons

$$L_n(x)L_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(\sqrt{xy} \cos \theta) \cos(\sqrt{xy} \sin \theta) L_n(x + y - 2\sqrt{xy} \cos \theta) d\theta$$

donc

$$\begin{aligned} \pi \bar{f}_0(n)\bar{g}_0(n) &= \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \\ &\left[\int_0^{\infty} e^{-y} g(y) \left\{ \int_0^{\pi} \exp(\sqrt{xy} \cos \theta) \cos(\sqrt{xy} \sin \theta) L_n(x + y - 2\sqrt{xy} \cos \theta) d\theta \right\} dy \right] \end{aligned}$$

L'intégrale dans le crochet est

$$\int_0^{\infty} e^{-t} L_n(t) dt \int_0^{\pi} \exp(\sqrt{xt} \cos \phi) \cos(\sqrt{xt} \sin \phi) g(x + t - 2\sqrt{xt} \cos \phi) d\phi$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(n) \bar{g}_0(n) &= L[h(t); t \rightarrow n] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} L_n(t) h(t) dt \end{aligned}$$

où,

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} f(x) dx \left[\int_0^{\pi} \exp(\sqrt{xt} \cos \theta) \cos(\sqrt{xt} \sin \theta) g(x + t - 2\sqrt{xy} \cos \theta) d\theta \right]$$

Ceci est le théorème de convolution de la transformée de Laguerre et la preuve est complète. ■

Chapitre 3

Bibliographie

[1] Andrews, Larry C. Integral transformns for engineers, ISBN 0 – 8194 – 3232 – 6, New York : Macmillan, c1988.

[2] Davies, Integral Transforms and Their Applications, New York : Springer-Verlag, 1985.

[3] L. C. Andrews, *Elementary Partial Équations différentielles avec problèmes de valeur limite*, Orlando : Academic Press, 1986.

[4] R. V. Churchill, Operational Mathematics, New York : McGraw-Hill, 1972

[5] W. R. LePage, *Variables complexes et la transformation de Laplace pour les ingénieurs*, New York : Douvres, 1980.