République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiqes et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{lle}. Harid Loubna

Intitulé

La Décroissance Exponentielle Avec Un Terme Mémoire D'une Equation Des Ondes Avec Des Conditions Aux Limites Dynamiques.

Dirigé par : **Mohammed Es-salih Aries**

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.** R. Mellal	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.** M. ES. Aries	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.** F. Ellaggoune	**PROF**	**Univ-Guelma**

Session Septembre 2020

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. Aries Mohammed es-salih** pour l'aide qu'il a fournie et les connaissances qu'il a su me transmette. Je le remercie également pour sa disponibilité et la qualité de ses conseils.

Je remercie Dr R.Melle, pour l'honneur qu'elle m'a fait en présidante le jury de cette mémoire. Je remercie également le Prof. F. Ellaggoune , d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes années de recherche à l'université de **08 Mai 1945 de Guelma**, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Je tiens à remercier ma famille : en particulier mon père et ma mère, ma soeur et mes frères, pour leur amour et leur soutien sans faille.

Je les remercie de m'avoir supporté et encouragé pendant les moments de doute. Je n'aurai jamais pu faire cette mémoire sans eux.

Enfin, toute personne ayant aidé de près où de loin à la réalisation de cette mémoire est vivement remerciée.

Table des matières

Résumé

Dans cette mémoire, nous sommes intéréssés à un problème viscoélastique avec des conditions aux limites de type Ventcel. Nous avons démontré tout d'abord l'existence, l'unicité et la régularité des solutions globales.

Nous avons prouvé ensuite la décroissance exponentielle de l'énergie $E(t)$ associée aux solution du problème. Les noyaux utilisés sont fortement définis positifs. Nous avons démontré que les termes mémoires interne et frontière sont assez forts via le processus de transmission $(u|_{\Gamma} = v)$ pour stabiliser tout le système.

Finalement, nous avons prouvé que la fonction $e^{2\alpha t}E(t)$ appartient a l'espace $L^1(0,\infty)$.

Mots clés : Équation des ondes- Viscoélastique- Conditions aux limites dynamique- Existence globale- Stabilité asymtotique- Noyaux fortement définis positifs.

Introduction

La Théorie du Contrôle des Equations aux Dérivées Partielles intervient différents contextes et de plusieures manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilité des équations aux Dérivés partielles ont l'objet, récemment, de nombreux travaux. Dans cette mémoire nous sommes intéressés à l'étude de la décroissance d'un problème viscoélastique semilinéaire avec des condition aux limites dynamiques et des noyaux fortement définis positifs. Le problème de contrôlabilité peut se formuler simplement de la manière suivante :

On considère un système d'évolution décrit par les équations aux dérivées patielles et un inteval de temps $[0, t]$. Peut-on amener les solutions d'un état initial (au temps $t = 0$) à un état final (au temps $t = T$) en agissant par un contrôle approprié appliqué sur le bord ou dans une partie du domaine dans laquelle l'équation évolue ?

La décroissance a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que nous notons par $E(t)$, à étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas, et si cette limite est nulle donne une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.

0.1 Problèmes viscoélastiques

0.1.1 Elasticité, viscosité

L'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation.

La viscosité est une propriété interne d'un fluide qui offre une résistance à l'écoulement. Un liquide visqueux n'a pas de forme définie, il s'écoule de manière irréversible sous l'action des forces externes. Cependant, il existe des matériaux dont les propriétés sont intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité.

0.1.2 Matériau viscoélastique

La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, et la plupart des matériaux ont un comportement viscoélastique. La partie viscoélastique provoque une décroissance de l'énergie associée. La partie élastique donne une équation conservatrice par contre la partie viscoélastique produit un mécanisme de dissipation qui agit sur une partie ou tout le domaine pour donner une décroissence de l'énergie associée à la solution pou ramener le système à l'état d'équilibre.

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire.

Du point de vu mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intéro différentiels, par exenple $\int_0^t h\,(t-s)\,\Delta\,(s)\,ds$, ou h représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subi.

0.1.3 Problème de Ventcel

Les problèmes de ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateur différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal. Ils interviennent dans la modélisation des phénomènes mécaniques comme l'élasticité, ou physique comme processus de diffusion [10] ou la propagation d'onde [2]. Les conditions de ventcel sont obtenues par des méthodes asymptotiques à partir de problèmes de transmission.

Chapitre 1

Préliminaires

Afin de facilité la lecture de ce travail il nous a paru utile de rappeler quelques éléments d'analyse fonctionnelles et leurs principales propriétés.

1.1 Espace L^p

Définition 1.1.1 *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions u définies sur Ω à valeur dans $\mathbb{k}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que u est mesurable et $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, pour p \in [1, +\infty[$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1.2 *on appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace constitué des (classes de) fonctions mesurables et bornées presque partout sur Ω. Muni de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)|$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = \{\inf \;\; C \succ 0 \; tel \; que \;\; |u(x)| \leq C \; p.p \; sur \; \Omega\}.$$

1.2 Notions de base sur les distributions

1.2.1 Rappels et définitions

soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) définie par $f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n))$. Rappelons que l'application f est de classe $\mathbb{C}^k$ sur Ω, ce que l'on note par $f \in \mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si toutes les dérivées partielles d'ordre inferieure ou égal à $\Bbbk$ sont des fonction continues sur Ω. L'espace $\mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte est noté par $\mathbb{C}^k(\Omega)$.

1.2.2 Fonction de classe $\mathbb{C}^\infty(\Omega)$ à support compact

Définition 1.2.1 *Soit une fonction continue ϕ définie sur un espace topologique X et à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. le support de la fonction ϕ est*

$$\sup(\phi) = \overline{\{x \in X,\ \phi(x) \neq 0\}}.$$

L'espace de base $D(\Omega)$

Définition 1.2.2 *On appelle espace des fonctions d'essai, et que l'on note par $D(\Omega)$, l'espace des fonctions ϕ définies et indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω. Autrement dit*

$$D(\Omega) = \{\text{espace des fonctions } C^\infty \text{ à support compact } \subset \Omega\}.$$

On désigne par $D(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$.

1.2.3 Espace des distributions D'(Ω)

Définition 1.2.3 *(Notion et caractérisation de distribution)*
soient $n \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $D'(\Omega)$ à valeur réelles (ou comlexes) vérifiant la propriété de continuité suivante :
Pour tout compact K, il existe $C_K \succ 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$ avec supp$(\varphi) \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Autrement dit

$$T \in D'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \varphi \to \langle T, \varphi \rangle \ \text{ est linéaire de } D(\Omega) \ \text{ dans } \mathbb{R}. \\ 2) \quad Si\ \varphi_j \to 0 \ \text{ dant } D(\Omega) \ \text{ alors } \langle T, \varphi_j \rangle \to 0 \qquad \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On note toutjours par $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes).

1.3 Espaces de sobolev

Définition 1.3.1 *[1]soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un entier $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$.L'espace de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p; D^\alpha v \in L^p(\Omega), \ pour \ |\alpha| \leq m \}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W,^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, pour \ 1 \leq p \prec +\infty$$

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup ess \, |D^\alpha u(x)|, pour p = +\infty.$$

$$|u|_{H^m(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Formule de Green

On définit les traces de u sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelé trace

$$\begin{cases} \gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \qquad u \to u/_\Gamma \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 *[11] la fonction $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est surjective et son noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 1.3.1 *(Formule de green[3]). Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Si $f, g \in H^1(\Omega)$, alors pour $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma (\gamma_0 f)\ (\gamma_0 g)\, \nu_i d\Gamma,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ est la normale unitaire extèrieure à Γ.Si $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_\Omega \nabla f \nabla g dx = -\int_\Omega \Delta f g dx + \int_\Gamma g \frac{\partial f}{\partial \nu} d\Gamma.$$

1.4 Quelques inégalités

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposent conjugué de p c'est à dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Inégalité de Hölder [1]

Théorème 1.4.1 *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégualité de poincaré

Théorème 1.4.2 *Soit Ω un ouvet borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B \|\nabla u\|_2, pour u \in H_0^1(\Omega)$$

où $B^{-1} = \inf_{u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

Inéqalité de Young [4]

Théorème 1.4.3 *Soient* $1 \prec p, q \prec \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b \geq 0$.*Alors pour tout* $\eta \succ 0$,

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q\,(\eta p)^{\frac{p}{q}}},$$

1.5 Lemmes de types Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du types gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration.

Lemme 1.5.1 *soient* m,$\eta \in C\,([0, T]\,; \mathbb{R})$ *telles que* $m\,(t) \geq 0$ *et* $n\,(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0, T]$ *et soit* $a \geq 0$. *si* $\Psi \in C\,([0, T]\,; \mathbb{R})$ *est une fonction telle que :*

$$\Psi\,(t) \leq a + \int_0^t m\,(s)\,ds + \int_0^t \eta\,(s)\,\Psi\,(s)\,ds \qquad \forall t \in [0, T]\,,$$

alors

$$\Psi\,(t) \leq \left(a + \int_0^t m\,(s)\;\;ds\right) \exp\left(\int_0^t \eta\,(s)\;\;ds\right) \quad \forall t \in [0, T]\,.$$

1.6 Noyaux définis positifs

Définition 1.6.1 *Pour tout fonction* $g \in L^1_{loc}\,(0, \infty)$ *et* $y \in L^1_{loc}\,(0, T; X)$, *on définit le produit de convolution par*

$$g * y\,(t) = \int_0^t g\,(t - s)\,y\,(s)\,ds, \quad t \geq 0.$$

Définition 1.6.2 *Une fonction $g \in L^1_{loc}(0,\infty)$ est dite un noyau défini positif si*

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s)\rangle \, ds \geq 0 \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0,\infty;X)$.

Définition 1.6.3 *une fonction g est dite un noyau fortement défini positif s'il existe une constante $\delta \succ 0$ telle que $g(t) - \delta e^{-t}$ soit défini positif, c'est à dire*

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s)\rangle \, ds \geq \delta \int_0^t \langle e * y(s), y(s)\rangle \, ds, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0,\infty;X)$, où $e(t) = e^{-t}$.

1.7 Noyau résolvant

Des résultats classiques pour les équations intégrales (voir le Théorème **2.3.5** [**5**] donnent pour tout noyau $h \in L^1_{loc}(0,\infty)$ et tout $\psi \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$, le problème

$$\varphi(t) - h * \varphi(t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

admet une solution unique $\varphi \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$. En particulier, il existe une solution unique $r \in L^1_{loc}(0,\infty)$ de

$$r(t) - h * r(t) = h(t), \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Une telle solution est appelée le noyau résolvant de h. De plus, la solution φ de (1.3) est donne par la formule de la variation des constantes

$$\varphi(t) = \psi(t) + r * \psi(t), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

où r le noyau résolvant de h.

Rappelons le Théorème classique de Paley-Wiener [5], qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau résolvant appartient à l'espace $L^1(0,\infty)$.

Corollaire 1.7.1 *soit* $g \in L^1(0,\infty)$ *tel que* $\int_0^\infty g(s)\,ds \prec 1$ *et on suppose que* $G(t) = \int_0^\infty g(s)\,ds$ *et un noyau fortement défini positif. Alors,*

(a) le noyau résolvant r de g appartient à $L^1(0,\infty)$;
(b) pour tout $\psi \in L^p(0,\infty;X)$, $1 \leq p \leq \infty$, la solution φ de léquation

$$\varphi(t) - g * \varphi(t) = \psi(t), \quad t \geq 0,$$

appartient à $L^p(0,\infty;X)$ et

$$\|\varphi\|_p \leq (1 + \|r\|_1)\,\|\psi\|_p\,. \tag{1.6}$$

Chapitre 2

Etude de l'existence et l'unicité d'un problème viscoélastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité locale et globale des solutions du problème viscoélastique avec des conditons aux limites de type de ventcel suivant :

$$\begin{cases} u" + (1-\Delta)\, u - g * (1-\Delta)\, u + h_1(u) = f_1(t) \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = v \text{ on } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ v" + \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\Delta_\Gamma)\, v - g * (1-\Delta_\Gamma)\, v + h_2(v) = f_2(t) \text{ on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)\,, \ \ (u'(0), v'(0)) = (u_1, v_1) \text{ in } \Omega \times \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec un frontière régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \phi.\nabla_\Gamma$ représente le gradient tengentiel sur Γ, on désigne par Δ_Γ l'opérateur de laplace-beltrami sur Γ et par ∂_ν la dérivée normale où ν représente la normale unitaire exterieure à Γ.

Supposons que h_i sont globalement lipschitziennes, i.e. $h_i \in C^1(\mathbb{R})$, $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, et qu'il existe des constantes $c_1, c_2 \succ 0$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ \left|h_1(s_1) - h_1(s_2)\right| \leq c_1 \left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right) |s_1 - s_2|, \\ \left|h_2(s_1) - h_2(s_2)\right| \leq c_2 \left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right) |s_1 - s_2| \end{array} \right. \tag{2.2}$$

où $p \succ 1; (n-2)\, p \leq n$.
Supposons que

$$R(U) = \int_{\Omega} F_1(u(t))\, dx + \int_{\Gamma} F_2(v(t))\, d\Gamma \geq 0, \tag{2.3}$$

où

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(u) = \int_0^u h_1(s)\, ds, F_2(v) = \int_0^v h_2(s)\, ds.$$

pour simplifier les notation, nous écrivons le problème 2.1 sous la forme

$$U"(t) + AU(t) - \int_0^t g(t-s)\, AU(s)\, ds + H(U(t)) = f(t), t \geq 0, \tag{2.4}$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, U'(0) = U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, H(U(t)) = \begin{pmatrix} h_1(u(t)) \\ h_2(v(t)) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Posons

$$\begin{cases} H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ u|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ \mathbf{V} = \left\{z = (u, v) \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^2(\Gamma),\ u|_{\Gamma} = v\right\}, \\ \widetilde{\mathbf{V}} = \left\{z = (u, v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma),\ u|_{\Gamma} = v\right\}, \\ \mathbf{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \end{cases}$$

$\widetilde{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{H}$ deux espace de Hilbert et $\widetilde{\mathbf{V}}$ est dence dans $\mathbf{H}$ avec injection continue. $\widetilde{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{H}$ sont munis de produits scalaires

$$\begin{cases} \langle z_1, z_2\rangle_{\mathbf{H}} = \langle u_1, u_2\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v_1, v_2\rangle_{L^2(\Gamma)}, \\ \langle z_1, z_2\rangle_{\tilde{\mathbf{V}}} = \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}, \end{cases}$$

et des normes canoniques

$$\begin{cases} \|z\|^2_{\mathbf{H}} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma)}, \\ \|z\|^2_{\tilde{\mathbf{V}}} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_\Gamma v\|^2_{L^2(\Gamma)}. \end{cases}$$

Pour tout fonction $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ et tout fonction $y \in L^1_{loc}(0, \infty, \mathbf{H})$ nous définissons

$$g * y(t) = (g * y_1(t), g * y_2(t)),$$

où

$$g * y_i(t) = \int_0^t g(t-s)\, y_i(s)\, ds, i = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Nos hypothèses sur le noyau g sont les suivantes :

Hypothèse (H1). Nous supposons que $g \in L^1(0, \infty)$ et vérifie

$$\int_0^\infty g(t)\, dt \prec 1 \tag{2.7}$$

De plus, nous supposons que l'application

$$t \rightarrow \int_t^{\infty} g(s)\, ds$$

et défini positif.

Définition 2.1.1 *Une fonction $g \in L^1_{loc}(0,\infty)$ est dite un noyau défini positif si*

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

pour toute fonction $y \in L^2_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$.

Définition 2.1.2 *Une fonction g est dite un noyau fortement défini positif s'il existe une constante $\delta \succ 0$ telle que $g(t) - \delta e^{-t}$ est définie positive, c'est à dire*

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \geq \delta \int_0^t \langle e * y(s), y(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds, \quad t \geq 0, \tag{2.9}$$

pour toute fonction $y \in L^2_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$, où $e(t) = e^{-t}$.

$\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire auto-adjoint sur $\mathbf{H}$ avec domaine dense

$$D(\mathbf{A}) = \{(u,v) \in \mathbf{V},\ \mathbf{A}(u,v) \in \mathbf{H}\}.$$

2.2 Existence et unicité locale

2.2.1 Existence et unicité locale de la solution mild

La proposition suivante assure l'existence locale et l'unicité de la solution mild du problème (2.4) -(2.5).

Proposition 2.2.1 *soient $U_0 \in \widetilde{\mathbf{V}}, U_1 \in H$ et $f \in L^1(0,T,H)$ où $0 \leq T \leq \infty$. Noun supposons que les hypothèse **(H1)**,(2.2) $-$ (2.3) sont vérifiées. Alors, il existe un nombre positif $T_0 \leq T$ tel que le problème de Cauchy (2.4) $-$ (2.5) admet une unique solution mild U sur $[0,T_0]$.*

De plus, pour tout $U_0, \tilde{U}_0 \in \widetilde{\mathbf{V}}, U_1, \tilde{U}_1 \in \mathbf{H}$ et $f, \tilde{f} \in L^1(0, T, \mathbf{H})$, il existe une constante $C_T \succ 0$ (dépend de T) telle que, si$U$ et $\tilde{U}$ sont les solutions mild avec des données U_0, U_1, f et $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$, $\tilde{f}$ respectivement, alors nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| Grad\left(U(t) - \tilde{U}(t)\right)\right\|_{\mathbf{H}} + \left\|U(t) - \tilde{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}} + \left\|U'(t) - \tilde{U}'(t)\right\|_{\mathbf{H}} \\ \leq\ & C_T\left(\left\|Grad\left(U_0 - \tilde{U}_0\right)\right\|_{\mathbf{H}} + \left\|U_0 - \tilde{U}_0\right\|_{\mathbf{H}} + \left\|U_1 - \tilde{U}_1\right\|_{\mathbf{H}} + \left\|f - \tilde{f}\right\|_{1,T}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

pour tout $t \in \left[0,\ \min\left\{T_0, \tilde{T}_0\right\}\right]$.

2.2.2 Existene et unicité locale de la solution forte

Proposition 2.2.2 *soient* $U_0 \in D(A), U_1 \in \widetilde{\mathbf{V}}$ *et* $f \in W^{1,1}(0, T, H)$ *.Alors, la solution mild (donnée par la proposition* 3.2.1*) pour le problème de cauchy* (2.4) $-$ (2.5) *sur* $[0, T_0]$*, où* $T_0 \in (0, T]$ *et une solution forte. De plus,* U *appartient à* $C^1\left([0, T_0], \widetilde{\mathbf{V}}\right)$.

Dans la suite, nous supposerons que l'hypotèse **(H1)** est vérifiée et posons

$$G(t) := \int_t^{\infty} g(s)\, ds, \quad t \geq 0$$

.

Le Lemme suivant joue un role trés important pour faire le reste des calcules.

Lemme 2.2.1 *Pour tout* $w \in C^1([0, T], \mathbf{H})$ *et* $\forall t \in [0, T]$, *nous avons*

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^t \langle g * w(s), w'(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds = -\int_0^t \langle G * w'(s), w'(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ +\frac{G(0)}{2}\left(\|w(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|w(0)\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\ -G(t)\langle w(0), w(t)\rangle_{\mathbf{H}} - \int_0^t g(s)\langle w(0), w(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds, \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle w(t), w(t) - g * w(t)\rangle_{\mathbf{H}} = (1 - G(0))\|w(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ +G(t)\langle w(0), w(t)\rangle_{\mathbf{H}} + \langle w(t), G * w'(t)\rangle_{\mathbf{H}} \end{array} \right. \tag{2.12}$$

De plus, si $G \in L^2(0, \infty)$, *alors nous avons pour tout* $t \in [0, T]$

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^t \|w(s) - g * w(s)\|_{\mathbf{H}}^2\, ds \leq 2(1 - G(0)) \\ \int_0^t \langle w(s), w(s) - g * w(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ +2\|G\|_2^2\|w(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + 2\int_0^t \|G * w'(s)\|_{\mathbf{H}}^2\, ds \end{array} \right. \tag{2.13}$$

2.3 Energie modifiée

En multipliant scalairement les équations $(2.1)_1$ et $(2.1)_3$ par $u'(t)$ et $v'(t)$ respectivement,nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right\} \\ \qquad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_\Gamma v(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\right\} \\ -\left\{\langle g*\nabla u(t), \nabla u'(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g*\nabla_\Gamma v(t), \nabla_\Gamma v'(t)\rangle_{L^2(\Gamma)}\right\} \\ \quad -\left\{\langle g*u(t), u'(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g*v(t), v'(t)\rangle_{L^2(\Gamma)}\right\} \\ \quad + \langle h_1(u(t))\, u'(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h_2(v(t), v'(t))\rangle_{L^2(\Gamma)} \\ \quad = \langle f_1(t), u'(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t), v'(t)\rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|U(t)\|^2_H + \|U'(t)\|^2_H + \|Grad\ U(t)\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ & -\left\{\langle g*Grad\ U(t), Grad\ U'(t)\rangle_H + \langle g*U(t), U'(t)\rangle_{\mathbf{H}}\right\} + \frac{d}{dt}R(U(t)) \\ = \; & \langle f(t), U'(t)\rangle_{\mathbf{H}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Si nous appliquons (2.11) en prenant $w = U$ et $w = GradU$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle g * U(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds &= -\int_0^t \langle G * U'(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ &+\frac{G(0)}{2}\left(\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|U(0)\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\ &-G(t)\langle U(0), U(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &-\int_0^t g(s)\langle U(0), U(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds\end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle g * GradU(s), GradU'_\alpha(s)\rangle_H\, ds &= -\int_0^t \langle G * GradU'(s), GradU'(s)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &+\frac{G(0)}{2}\left(\|GradU(t)\|_H^2+\|GradU(0)\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\ &-G(t)\langle GradU(0), GradU(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &-\int_0^t g(s)\langle GradU(0), GradU(s)\rangle_{\mathbf{H}},\end{aligned} \tag{2.16}$$

alors, nous déduisons les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} \langle g * U(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}} &= \frac{d}{dt}\frac{G(0)}{2}\left(\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\ &\quad - \langle G(s)U(0), U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}} \\ &\quad - \langle G * U'(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$\begin{aligned} \langle g * Grad\ U(s), Grad\ U'(s)\rangle_{\mathbf{H}} &= \frac{d}{dt}\frac{G(0)}{2}\left(\|Grad\ U(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\ &\quad - \langle G(s)\,Grad\ U(0), Grad\ U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}} \\ &\quad - \langle G * Grad\ U'(s), Grad\ U'(s)\rangle_{\mathbf{H}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Nous remplaçons (2.17) et (2.18) dans (2.14), nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ U\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\ -\left\{\frac{d}{dt}\frac{G(0)}{2}\|Grad\ U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 - \langle G(s)\,Grad\ U(0), Grad\ U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\langle G * Grad\ U'(s), Grad\ U'(s)\rangle_{\mathbf{H}}\,ds + \langle G * U'(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}} \\ \left\{\frac{d}{dt}\frac{G(0)}{2}\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 - \langle G(s)U(0), U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\frac{d}{dt}R(U(t)) = \langle f(t), U'(t)\rangle_{\mathbf{H}} \end{cases}$$

D'après l'égalité ci dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|U'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2}\left(\|Grad\ U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right) + R(U(t))\right\} \\ = \langle f(t), U'(t)\rangle_{\mathbf{H}} - \langle G(s)\,Grad\ U(0), Grad\ U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\langle G(s)U(0), U'(s)\,ds\rangle_{\mathbf{H}} - \langle G * Grad\ U'(s), Grad\ U'(s)\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\langle G * U'(s), U'(s)\rangle_{\mathbf{H}}. \end{cases}$$

De l'égalité précédente, nous définissons l'énergie associée à la solution U du problème $(2.4)-(2.5)$ par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|U'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^\infty g(s)\,ds\right)\left(\|Grad\ U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right) + R(U(t)), \tag{2.19}$$

où $R(U(t))$ et donné par (2.3).

2.4 Existence et unicité globale

2.4.1 Existence et unicité de la solution mild globale

Théorème 2.4.1 *Nous supposons que* ***l'hypotèse (H1)****,* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. Alors pour tout* $U_0 \in \tilde{V}$, $U_1 \in \mathbf{H}$, *et pour tout* $f \in L^0(0,\infty;\mathbf{H})$, *le problème* $(2.4)-(2.5)$ *admet une unique solution mild* U *sur* $[0,\infty)$.
De plus, $E(t)$ *est positive et vérifie*

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\left\|U'(t)\right\|_{\mathbf{H}}^{2} + \frac{1-G(0)}{2}\left\{\left\|U(t)\right\|_{\mathbf{H}}^{2} + \left\|Grad\ U(t)\right\|_{\mathbf{H}}^{2}\right\}, \tag{2.20}$$

$$E(t) \leq \tilde{C}_1 \tag{2.21}$$

pour tout $t \geq 0$, *où* $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1\left(\|U_1\|, \|GradU_0\|, \|f\|_1\right)$ *est une fonction positive et croissanten en chaque variable.*

2.4.2 Existence et unicité de la solution forte globale

Théorème 2.4.2 *Nous supposons que* ***l'hypotèse(H1)****,* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées.*
Alors, pour tout $U_0 \in D(A)$, $U_1 \in \widetilde{\mathbf{V}}$ *et* $f \in W_{loc}^{1,1}(0,\infty;\mathbf{H})$ *le problème* $(2.4)-(2.5)$ *admet une unique solution* ***forte*** *sur* $[0,\infty)$*.De plus,* U *appartient à*

$$C^1\left([0,\infty[;\tilde{\mathbf{V}}\right),$$

$$E(t) + \int_0^t \left\{\left\langle G * GradU'(s), GradU'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle G * U'(s), U'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \leq \tilde{C}_2, \tag{2.22}$$

où $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2\left(\|U_1\|, \|GradU_0\|, \|f\|_1\right)$ *est une fonction positive croissante en chaque variable.*

Chapitre 3

La décroissance exponentielle du problème linéaire

3.1 Introduction

Pour l'étude de la décroissance de notre problème (2.1), nous allons traiter premièrement le cas linéaire. Pour simplifier les notations nous allons transformer le problème (2.1) sous la forme ci après

$$U"(t) + AU(t) - \int_0^t g(t-s)\, AU(s)\, ds = f(t)\,,\ t \geq 0, \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\,,\ U'(0) = U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1-\Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & 1-\Delta \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}\,,\ f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Notre objectif dans cette partie et montrer que l'énergie de la solution associée au problème $(3.1)-(3.4)$ décroît exponentiellement vers zéro quant $t \longrightarrow +\infty$ et que la fonction $e^{\alpha t}E(t)$ appartient à l'espace $L^1(0,\infty)$.

pour toute fonction mesurable $g:(0,\infty)\longrightarrow X$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, nous posons

$$g_\alpha(t) := e^{\alpha t} g(t), t \succ 0.$$

Considérons l'hypotèse suivante :

Hypothèse (H2).

Il existe $\alpha_0 \succ 0$ tel que $g_{\alpha_0} \in L^1(0,\infty)$ et $t \longrightarrow \int_t^\infty g_{\alpha_0}(s)\,ds$ est un noyau fortement défini positif.

Le résultat principal de la décroissance de notre travail et donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Nous supposons que les hypothèse **(H1), (H2)** avec $\alpha_0 \succ 0$, sont vérifiées.*

Alors, il existe des constant positives K_i, $i=0,1$, telles que, pour tout $U_0 \in \widetilde{\mathbf{V}}, U_1 \in \mathbf{H}$ et tout $f_{\eta_0} \in L^1(0,\infty;\mathbf{H})$, $\eta_0 \succ 0$, l'énergie $E(t)$ associée à la solution mild U du problème $(3.1)-(3.4)$ vérifie

$$E(t) \le K_0 e^{-2\alpha t}, \qquad \forall t \ge 0, \tag{3.5}$$

et

$$\int_0^\infty e^{2\alpha s} E(s)\,ds \le K_1, \tag{3.6}$$

pour tout $\alpha \in [0,\alpha^*]$, où $\alpha^* \in]0,\min\{\alpha_0,\eta_0\}[$ et $K_i = K_i(\|U_1\|, \|GradU_0\|, \|f\|_1)$ sont des fonctions positives, croissante, telles que $K_i(0)=0$, $i=0,1$.

3.2 Préliminaires

La proposition suivante est d'une grande importance pour étudier la décroissance exponentielle.

Proposition 3.2.1 *soit $g \in L^1(0,\infty)$ une fonction telle que $t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)\,ds$ est un noyau fortement définie positif. Alors $t \longrightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s} g(s)\,ds$, $\sigma \succ 0$, est aussi un noyau fortement définie positif.*

De plus, si δ est la constante dans (2.9) *correspodante à* $t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)\,ds$, *alors la constante analogue* δ_σ *pour* $t \longrightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s} g(s)\,ds$ *est donnée par*

$$\delta_\sigma = \frac{\delta}{(\sigma+1)^2}. \tag{3.7}$$

Maintenant, en adaptant certaines estimations pour les noyaux définis positifs [6, 8], nous obtenons les trois lemmes suivants

Lemme 3.2.1 *soit* $g \in C([0,\infty))$ *un noyau définis positif. Alors* $g(0) \geq 0$ *et*

$$\|g * y(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq 2g(0) \int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau)\rangle_{\mathbf{H}}\, d\tau, \quad t \geq 0, \tag{3.8}$$

pour tout $y \in L^1_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$.

Si g est un noyau fortement défini positif et δ la constante donnée par la formule (2.9), alors par le lemme 3.2.1, nous avons

$$g(0) \geq \delta. \tag{3.9}$$

Lemme 3.2.2 *Soit g un noyau fortement défini positif tel que* $g, g' \in L^1(0,\infty)$. *Alors*

$$\int_0^t \|g * y(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2\, d\tau \leq \frac{1}{\delta}\left(\|g\|_1^2 + 4\|g'\|_1^2\right) \int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau)\rangle_{\mathbf{H}}\, d\tau,\ t \geq 0, \tag{3.10}$$

pour tout $y \in L^1_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$, *où δ est la constant donnée par* (2.9).

Lemme 3.2.3 *soit* $g \in L^1_{loc}(0,\infty)$ *un noyau fortement défini positif. Alors*

$$\begin{aligned} \int_0^t \|y(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2\, d\tau \quad &\leq \quad \|y(0)\|_{\mathbf{H}}^2 \qquad (3.11)\\ &+ \frac{2}{\delta}\left\{\int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau)\rangle_{\mathbf{H}}\, d\tau + \int_0^t \langle g * y'(\tau), y'(\tau)\rangle_{\mathbf{H}}\, d\tau\right\}, \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$ *et* $y \in L^2_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$ *avec* $y' \in L^1_{loc}(0,\infty;\mathbf{H})$, *où δ est la constante donnée par* (2.9).

Remarque 3.2.1 *1. Pour tout* $\alpha \in [0, \alpha_0]$ *,on a* $g_\alpha \in L^1(0,\infty)$ *et*

$$G_\alpha(t) = \int_t^\infty g_\alpha(s)\,ds$$

est un noyau fortement défini positif avec

$$\delta_\alpha := \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0-\alpha)^2} \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)^2}, \tag{3.12}$$

notant que $G_\alpha(t) = \int_t^\infty e^{-(\alpha_0-\alpha)s} g_{\alpha_0}(s)\,ds$ *et en appliquant la proposition* 3.2.1 *pour* g_{α_0}*, et d'après* (3.9) *et* (3.12) *,on a*

$$G_\alpha(0) \geq \delta_\alpha \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)^2}. \tag{3.13}$$

2. Comme $g_{\alpha_0} \in L^1(0,\infty)$*, d'après le théorème de convergence dominé et* $G(0) \prec 1$*, on a pour tout* $\alpha \in [0, \alpha_0]$

$$1 - G_\alpha(0) \geq \frac{1-G(0)}{2} \succ 0. \tag{3.14}$$

3. Pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$*,* $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_0$*,* $G_\alpha \in L^1(0,\infty)$ *et*

$$\|G_\alpha\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0}\|g_{\alpha_0}\|, \tag{3.15}$$

car il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |G_\alpha(s)|\,ds &\leq \int_0^\infty s e^{\alpha s}|g(s)|\,ds \qquad (3.16) \\ &= \int_0^\infty s e^{-(\alpha_0-\alpha)s} e^{\alpha_0 s}|g(s)|\,ds \leq \int_0^\infty e^{\alpha_0 s}|g(s)|\,ds. \end{aligned}$$

4. Pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$*,* $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_0$*,* $G_\alpha \in L^2(0,\infty)$ *et d'après*(3.15) *on a*

$$\|G_\alpha\|_2^2 \leq \|G_\alpha\|_1 \|g_\alpha\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0}\|g_{\alpha_0}\|_1^2. \tag{3.17}$$

3.3 Transformation du problème $(3.1)-(3.4)$

pou démontrer le Théorème 3.1.1, nous faisons le changement de fonction $U_\alpha(t) = e^{\alpha t}U(t)$ où $\alpha \geq 0$,ce qui nous permet de transformer le problème $(3.1)-(3.4)$ sousla forme suivant

$$\begin{cases} U"_\alpha(t) - 2\alpha U'_\alpha(t) + \alpha^2 U_\alpha(t) + AU_\alpha(t) - g_\alpha * AU_\alpha(t) = f_\alpha(t), \\ U_\alpha(0) = U_0,\ U'_\alpha(0) = U_1 + \alpha U_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

3.4 Énergie modifiée

En multipliant scalairement (3.18) par $U'_\alpha(t)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{(\alpha^2+1)}{2}\|U_\alpha\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ & - \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} - \langle g_\alpha * Grad\ U_\alpha(t), Grad\ U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ = \ & 2\alpha\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

en appliquant (2.11) avec $w = U_\alpha$ et $w = Grad\ U_\alpha$, il vient

$$\begin{cases} \int_0^t \langle g_\alpha * U_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds = -\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ \qquad + \frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ \qquad - G_\alpha(t)\langle U_\alpha(0), U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ \qquad - \int_0^t g_\alpha(s)\langle U_\alpha(0), U_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \int_0^t \langle g_\alpha * GradU_\alpha(s), GradU'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds = -\int_0^t \langle G_\alpha * Grad\ U'_\alpha(s), Grad\ U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ \qquad + \frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|Grad\ U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ \qquad - G_\alpha(t)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ \qquad - \int_0^t g_\alpha(s)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds, \end{cases}$$

pour cela, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} = \ & \frac{d}{dt}\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ & - \langle G_\alpha(t)\, U_\alpha(0), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ & - \langle G_\alpha * U'_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \end{aligned} \tag{3.20}$$

de même pour

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha * GradU_\alpha(t), GradU'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} &= \frac{d}{dt}\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(Grad\ \|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ &- \langle G_\alpha(t)\, Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &- \langle G_\alpha * Grad\ U'_\alpha(t), Grad\ U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}}\end{aligned} \tag{3.21}$$

en injectant (3.20) et (3.21) dans l'égalité (3.19), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} \\ &+\frac{1+\alpha^2-G_\alpha(0)}{2}\ \|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}\Big) \\ = \;& 2\alpha\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &- \langle G_\alpha(t)\,U_\alpha(0), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} - \langle G_\alpha(t) * U'_\alpha(t), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &- \langle G_\alpha(t)\, Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &- \langle G_\alpha(t) * Grad\ U'_\alpha(0), Grad\ U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}}\end{aligned} \tag{3.22}$$

A partir de l'égalité (3.22), nous définissons l'énergie assosiée à la solution U_α de (3.18) par

$$E_\alpha(t) = \frac{1}{2}\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}(1-G_\alpha(0))\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\left(1+\alpha^2-G_\alpha(0)\right)\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}.$$

Remarque 3.4.1 *pour $\alpha = 0$, nous avons*

$$E(t) = E_0(t).$$

3.5 Preuve de théorème 3.1.1

Supposons que $U_0 \in D(\mathbf{A})$, $U_1 \in \tilde{\mathbf{V}}$ et $f \in C^1([0,\infty);\mathbf{H})$, alors d'après la proposition 2.2.2, la solution mild U est une solution forte.
Dans la suite, nous noterons par C_i, $i \in \mathbb{N}$, les constantes positives dépendant des normes $\|U_1\|, \|Grad\ U_0\|, \|f\|_1$.

3.5.1 Estimation de l'énergie cinétique

le terme le plus difficile à estimer est l'énergie cinétique $\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|^2_{\mathbf{H}}\, ds$, en effet, nous appliquons l'inégalté (3.11) en prenant $g = G_\alpha$ et $y = U'_\alpha$, pour tout $t \geq 0$ nous obtenons l'inégualité suivante

$$\begin{aligned}\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|^2_{\mathbf{H}}\, ds \quad &\leq \quad \|U'_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}} \\ &+ \frac{2}{\delta_\alpha}\int_0^t \left\{\langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}} + \langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Estimation du terme $\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle\, ds$

Le lemme suivant nous permet d'obtenir une estimation pour le terme

$$\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds.$$

Lemme 3.5.1 *Pour tout solution U_α du problème (3.18) et pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, où α_0 et défini dans l'**hypothèse (H2)** avec $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \left\| Grad\ U_\alpha(t) \right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ & + \int_0^t \left\langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ & + \int_0^t \left\langle G_\alpha(s) * Grad\ U'_\alpha(0), Grad\ U'_\alpha(s) \right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ \leq\ & C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha \int_0^t \left\| U'_\alpha(s) \right\|_{\mathbf{H}}^2 ds, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $C_1 \succ 0$ et

$$\begin{aligned} H_{\alpha,1}(t) &= -G_\alpha(t) \left\{ \langle U_0, U_\alpha(t) \rangle_{\mathbf{H}} + \langle Grad\ U_0, Grad\ U_\alpha(t) \rangle_{\mathbf{H}} \right\} \\ & - \int_0^t g_\alpha(s) \left\{ \langle U_0, U_\alpha(s) \rangle_{\mathbf{H}} + \langle Grad\ U_0, Grad\ U_\alpha(s) \rangle_{\mathbf{H}} \right\} ds \\ & + \int_0^t \langle f_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbf{H}} ds. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En multipliant (3.18) scalairement par $U'_\alpha(t)$ et en intégrant entre 0 et t, nous obtenons pour $t \geq 0$ l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|U_\alpha'(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1}{2}\left\|Grad\ U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{(\alpha^2+1)}{2}\left\|U_\alpha\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\
& -\int_0^t \left\langle g_\alpha * U_\alpha(\tau), U'(\tau)\right\rangle_{\mathbf{H}} d\tau \\
& -\int_0^t \left\langle g_\alpha * Grad\ U_\alpha(\tau), Grad\ U_\alpha'(\tau)\right\rangle_{\mathbf{H}} d\tau \\
= & \frac{1}{2}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1}{2}\left\|Grad\ U_\alpha(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{(\alpha^2+1)}{2}\left\|U_\alpha(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\
& +2\alpha\int_0^t \left\|U_\alpha'(\tau)\right\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau+\int_0^t \left\langle f_\alpha(\tau), U_\alpha'(\tau)\right\rangle_{\mathbf{H}} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Par application de (2.11) avec $w = U_\alpha$, $w = Grad\ U_\alpha$ et $g = g_\alpha$, nous avons les égalités ci- après

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\langle g_\alpha * U_\alpha(s), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds = & -\int_0^t \left\langle G_\alpha * U_\alpha'(s), U_\alpha'(s)\right\rangle ds \\
& +\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\left\|U_\alpha(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2\right) \\
& -G_\alpha(t)\left\langle U_\alpha(0), U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha(0), U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle g_\alpha * Grad\ U_\alpha(s), Grad\ U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\
= \quad & -\int_0^t \langle G_\alpha * Grad\ U'_\alpha(s), Grad\ U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\
& +\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|Grad\ U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\
& -G_\alpha(t)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\
& -G_\alpha(t)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

en injectant (3.27) et (3.28) dans (3.26), nous avons l'égalité suivant

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1}{2}\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{(\alpha^2+1)}{2}\|U_\alpha\|^2_{\mathbf{H}} + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle\, ds \\
-\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}}\right) + G_\alpha(t)\langle U_\alpha(0), U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\
+\int_0^t g_\alpha(s)\langle U_\alpha(0), U_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad\ U'_\alpha(s), Grad\ U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\
-\frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|Grad\ U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\
+G_\alpha(t)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} + \int_0^t g_\alpha(s)\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\
= \frac{1}{2}\|U'_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\|Grad\ U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{(\alpha^2+1)}{2}\|U_\alpha(0)\|^2_{\mathbf{H}} \\
+2\alpha\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|^2_{\mathbf{H}}\, d\tau + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau)\rangle_{\mathbf{H}}\, d\tau.
\end{array}\right.$$

donc nous obtenons l'expression ci-après

$$\begin{cases} \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|Grad\ U_\alpha\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\int_0^t\left\langle G_\alpha * U_\alpha'\left(s\right),U_\alpha'\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ +\int_0^t\left\langle G_\alpha\left(s\right) * Grad\ U_\alpha'\left(0\right),Grad\ U_\alpha'\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ +\frac{1}{2}\left\|U_\alpha'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{\left(1+\alpha^2-G_\alpha(0)\right)}{2}\left\|U_\alpha\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ =\frac{1}{2}\left\|U_\alpha'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|Grad\ U_\alpha\left(0\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{\left(\alpha^2+1\right)+G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha\left(0\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ -G_\alpha\left(t\right)\left\langle U_\alpha\left(0\right),U_\alpha\left(t\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}-\int_0^t g_\alpha\left(s\right)\left\langle U_\alpha\left(0\right),U_\alpha\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ -G_\alpha\left(t\right)\left\langle Grad\ U_\alpha\left(0\right),Grad\ U_\alpha\left(t\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}-\int_0^t g_\alpha\left(s\right)\left\langle Grad\ U_\alpha\left(0\right),Grad\ U_\alpha\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ +\int_0^t\left\langle f_\alpha\left(\tau\right),U_\alpha'\left(\tau\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}d\tau+2\alpha\int_0^t\left\|U_\alpha'\left(\tau\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2d\tau, \end{cases}$$

comme $\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\succ 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|Grad\ U_\alpha\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\int_0^t\left\langle G_\alpha * U_\alpha'\left(s\right),U_\alpha'\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ +\int_0^t\left\langle G_\alpha * Grad\ U_\alpha'\left(s\right),Grad\ U_\alpha'\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ \leq C_1+2\alpha\int_0^t\left\|U_\alpha'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2d\tau \\ -G_\alpha\left(t\right)\left\langle U_\alpha\left(0\right),U_\alpha\left(t\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}-G_\alpha\left(t\right)\left\langle Grad\ U_\alpha\left(0\right),Grad\ U_\alpha\left(t\right)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\int_0^t g_\alpha\left(s\right)\left\langle U_\alpha\left(0\right),U_\alpha\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds-\int_0^t g_\alpha\left(s\right)\left\langle Grad\ U_\alpha\left(0\right),Grad\ U_\alpha\left(s\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}ds \\ +\int_0^t\left\langle f_\alpha\left(\tau\right),U_\alpha'\left(\tau\right)\right\rangle_{\mathbf{H}}d\tau, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} C_1=\frac{1}{2}\left\|U_\alpha'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|Grad\ U_\alpha\left(0\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ +\frac{\left(\alpha^2+1\right)+G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha\left(0\right)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \end{cases}$$

et en posant

$$\left\{\begin{array}{c} H_{\alpha,1} = -G_\alpha(t)\left\langle U_\alpha(0), U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} - G_\alpha(t)\left\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha(0), U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle Grad\ U_\alpha(0), Grad\ U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ +\int_0^t \left\langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau)\right\rangle_{\mathbf{H}} d\tau, \end{array}\right.$$

nous obtenons le résultat.

Estimation du terme $\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.$
En utilisant le lemme ci-après, nous obtenons une estimation du terme

$$\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds$$

Lemme 3.5.2 *Si* U_α *est la solution du problème* (3.18), *alors il existe un nombre* $\alpha_1 \succ 0$, *tel que pour tout* $\alpha \in [0, \alpha_1 - \varepsilon_0]$, $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_1$ *et* $t \geq 0$, *nous avons*

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ \leq\ & \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\left(C_2 + H_{\alpha,2}(t)\right) \\ & +\alpha\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}\right)\int_0^t \left\|U'_\alpha(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U'_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ & +\frac{1}{2}\left\{\left\|Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\ & +\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{4}\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ \leq\ & C_2 + H_{\alpha,2}(t) + \alpha\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}\right)\int_0^t \left\|U'_\alpha(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds, \end{aligned} \tag{3.30}$$

où $C_2 \succ 0$ *et*

$$\begin{aligned} H_{\alpha,2}(t) &= \frac{2\alpha^2}{1-G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t) \qquad (3.31)\\ &-G_\alpha(t)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} - \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ &- \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ &- \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle Grad\ U_0, Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ &+ \int_0^t \left\langle f_\alpha(s), U'_\alpha(s) - g_\alpha * U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds. \end{aligned}$$

En multipliant (3.18) scalairement par

$$U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) = \frac{d}{dt}(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) + g_\alpha(t) U_0, \qquad (3.32)$$

et comme $U \in C^1([0,\infty);\mathbf{V})$ (voir le Théorème 2.4.2), nous obtenons l'égalité ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\langle U"_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} - 2\alpha\left\langle U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\alpha^2\left\langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\left\langle Grad\ U_\alpha(t), Grad\ (U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t))\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\left\langle g_\alpha * U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\left\langle g_\alpha * Grad\ U_\alpha(t), Grad\ (U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'(t))\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ = \left\langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}}, \end{array} \right.$$

après calcul, nous pouvons écrire

$$U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) = \frac{d}{dt}(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) + g_\alpha(t)\,U_0,$$

il vient alors

$$\begin{cases} \langle U"_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} - 2\alpha\langle U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\alpha^2\langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ +g_\alpha(t)\{\langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\rangle_{\mathbf{H}} + \langle Grad\ U_0, Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\rangle_{\mathbf{H}}\} \\ = \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \end{cases}$$

en integrant l'égalité ci dessus entre 0 et t, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\left\{\left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + Grad\ \left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ -\int_0^t \left\langle U"_\alpha(s), g_\alpha * U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ = \frac{1}{2}\left\{\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|Grad\ U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ -\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0, \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle Grad\ U_0, Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\ +\int_0^t \left\{\left\langle f_\alpha(s), \left(U'_\alpha(s) - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds + 2\alpha\int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ -\alpha^2\int_0^t \left\langle U_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds. \end{cases}$$

Pour estimer l'intégrale sur le coté gauche de l'égalité ci-dessus, nous utilisons (2.11) avec $w = U'_\alpha$,afin d'obtenir l'expression

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\left\{\left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + Grad\ \left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds - \frac{G_\alpha(0)}{2}\left(\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right) \\ +G_\alpha(t)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ = \frac{1}{2}\left\{\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|Grad\ U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ -\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0, \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle Grad\ U_0, Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\ +\int_0^t \left\{\left\langle f_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds + 2\alpha\int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ -\alpha^2\int_0^t \left\langle U_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds. \end{cases}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \qquad (3.33)\\
& +\frac{1}{2}\left\{\left\|\left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\left\|Grad\ \left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\}\\
= & \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1}{2}\left\{\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2+\left\|Grad\ U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\}\\
& -G_\alpha(t)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}}\\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0, \left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right.\\
& \left.+\left\langle Grad\ U_0, Grad\ \left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds\\
& +\int_0^t\left\{\left\langle f_\alpha(s), \left(U_\alpha'-g_\alpha * U_\alpha'\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds\\
& +2\alpha \int_0^t\left\langle U_\alpha'(s), \left(U_\alpha'-g_\alpha * U_\alpha'\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
& -\alpha^2 \int_0^t\left\langle U_\alpha(s), \left(U_\alpha'-g_\alpha * U_\alpha'\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{aligned}$$

Pour pouvoir continuer la suite des calcules, nous devons estimer les deus derniers termes se trouvant sur le coté droit de l'égalité ci-dessus, pour cela nous appliquons (2.13) avec $w=U_\alpha'$, et nous obtenons alors l'énégalité suivante

$$\begin{cases} 2\int_0^t \left\langle U_\alpha'(s), (U_\alpha' - g_\alpha * U_\alpha')(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\ \leq \int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds + \int_0^t \|(U_\alpha' - g_\alpha * U_\alpha')(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ \leq \int_0^t \|U_\alpha'\|_{\mathbf{H}}^2 ds + 2(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \|(U_\alpha' - g_\alpha * U_\alpha')(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ +2\|G_\alpha\|_2^2 \|U_\alpha'(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + 2\int_0^t \|G_\alpha * U"_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds. \end{cases}$$

par utilisation de l'inégalité à (3.10), nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
& 2G(0)\int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \qquad (3.34) \\
\leq \; & 2\left\|G_\alpha\right\|_2^2 \left\|U'_\alpha(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \left\|U'_\alpha(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\
& 2\int_0^t \left\|G_\alpha * U"_\alpha(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\
\leq \; & 2\left\|G_\alpha\right\|_2^2 \left\|U'_\alpha(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \left\|U'_\alpha(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\
& + \frac{2}{\delta_\alpha}\left(\left\|G_\alpha\right\|_1^2 + 4\left\|g_\alpha\right\|_1^2\right)\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant (3.32), nous avons

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\int_0^t \left\langle U_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
= \left\langle U_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right\rangle_{\mathbf{H}|_0^t} + \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_0, U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
- \int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha(s)\right)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
= \left\langle U_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right\rangle_{\mathbf{H}|_0^t} + \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_0, U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds + \frac{1}{2}\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\
-\frac{1}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), g_\alpha * U_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{array}
\right.
$$

Pour le dernier terme se trouvant sur le coté droit ci dessus, nous appliquons (2.11) avec $w = U_\alpha$, pour obtenir l'expression ci-après

$$\int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds = \tag{3.35}$$
$$\langle U_\alpha, U_{-g_\alpha} * U_\alpha\rangle_{\mathbf{H}|_0^t} + \frac{1+G_\alpha(0)}{2}\|U_0\|^2_{\mathbf{H}}$$
$$-G_\alpha(t)\langle U_0, U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} - \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}}$$
$$-\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds$$

L'égalité (2.12) donne

$$\begin{cases} \langle U_\alpha(t), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\rangle_{\mathbf{H}} - G_\alpha(t)\langle U_0, U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ = (1-G_\alpha(0))\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}}, \end{cases}$$

L'égalité (3.35) peut être écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds &= \\ &\frac{G_\alpha(0)-1}{2}\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} \\ &+ \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ &- \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds\end{aligned} \tag{3.36}$$

En remplaçant (3.34) et (3.36) dans (3.33) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\int_0^t\left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
& +\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} \\
& +\frac{1}{2}\left\{\left\|(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\left\|Grad\ \ (U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha)(t)\right\|\right\} \\
\leq\ & \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\frac{1}{2}\left\{\left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}+\left\|Grad\ U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\
& +\alpha\frac{2\left\|G_\alpha\right\|^2_2}{G_\alpha(0)}\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}-G_\alpha(t)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds+\int_0^t\left\langle f_\alpha(s), (U'_\alpha-g_\alpha * U'_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
& -\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0, (U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}+\left\langle Grad\ U_0, Grad\ \ (U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\
& +\frac{\alpha}{G_\alpha(0)}\int_0^t\left\|U'_\alpha(s)\right\|^2_{\mathbf{H}} ds-\alpha^2\left\langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}}+\alpha^2\int_0^t\left\langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
& +2\alpha\frac{\left\|G_\alpha\right\|^2_1+4\left\|g_\alpha\right\|^2_1}{G_\alpha(0)\,\delta_\alpha}\int_0^t\left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

D'après $(3.15), (3.13)$ et (3.12), pour $\alpha \leq \frac{\alpha_0}{2}$, nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{\|G_\alpha\|^2_1+4\|g_\alpha\|^2_1}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \\
\\
\leq \frac{4\left(1+\alpha_0^2\right)(1+\alpha_0)^4}{\alpha_0^2\delta^2_{\alpha_0}}\left\|g_{\alpha_0}\right\|^2_1 \\
\\
\leq \frac{1}{2\alpha_1},
\end{array}\right.$$

où

$$\alpha_1 = \min\left\{\frac{\alpha_0^2\delta_{\alpha_0}^2}{8\left(1+\alpha_0^2\right)\left(1+\alpha_0\right)^4\left\|g_{\alpha_0}\right\|_1^2}, \frac{\alpha_0}{2}\right\} \tag{3.38}$$

et de(3.8), nous avons

$$-\left\langle U_\alpha(t), G_\alpha * U_\alpha'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \leq \frac{1-G_\alpha(0)}{4}\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\int_0^t \left\langle G_\alpha * U_\alpha'(s), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds, \tag{3.39}$$

en remplaçant (3.24) dans (3.37), nous avons

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds + \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \\
+\frac{1}{2}\left\{\left\|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \left\|Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
\leq \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \left\|Grad\ U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+\alpha\frac{2\left\|G_\alpha\right\|_2^2}{G_\alpha(0)}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2 + \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2 - G_\alpha(t)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
-\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds + \int_0^t \left\langle f_\alpha(s), \left(U_\alpha' - g_\alpha * U_\alpha'\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
-\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0, \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle Grad\ U_0, Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\
+\frac{\alpha}{G_\alpha(0)}\int_0^t \left\|U_\alpha'(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds - \alpha^2\left\langle U_\alpha(t), G_\alpha * U_\alpha'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
+2\alpha\frac{\left\|G_\alpha\right\|_1^2 + 4\left\|g_\alpha\right\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha}\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
+\alpha^2\left(H_{\alpha,1} + 2\alpha\int_0^t \left\|U_\alpha'(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds + C_1\right),
\end{array}\right.$$

a partir de l'énégalité(3.39) , nous pouvons écrire

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\int_0^t\left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} \\
+\frac{1}{2}\left\{\left\|\left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\left\|Grad\ \left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\
\leq\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\frac{1}{2}\left\{\left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}+\left\|Grad\ U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\
+\alpha\frac{2\|G_\alpha\|^2_2}{G_\alpha(0)}\left\|U'_\alpha(0)\right\|^2_{\mathbf{H}}+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_0\right\|^2_{\mathbf{H}}-G_\alpha(t)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
-\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds+\int_0^t\left\langle f_\alpha(s),\left(U'_\alpha-g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
-\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0,\left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}+\left\langle Grad\ U_0, Grad\ \left(U_\alpha-g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\
+\frac{\alpha}{G_\alpha(0)}\int_0^t\left\|U'_\alpha(s)\right\|^2_{\mathbf{H}} ds+\alpha^2\left(2\frac{G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\right)\int_0^t\left\langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
+2\alpha\frac{\|G_\alpha\|^2_1+4\|g_\alpha\|^2_1}{G_\alpha(0)\delta_\alpha}\int_0^t\left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
+\alpha^2\left(H_{\alpha,1}+2\alpha\int_0^t\left\|U'_\alpha(s)\right\|^2_{\mathbf{H}} ds+C_1\right),
\end{array}\right.$$

en utilisant (3.24), nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \qquad (3.40)\\
&+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2\\
&+\frac{1}{2}\left\{\left\|(U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\left\|Grad\ (U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\}\\
\leq\ &\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\frac{1}{2}\left\{\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2+\left\|Grad\ U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2\right\}\\
&+\alpha\frac{2\left\|G_\alpha\right\|_2^2}{G_\alpha(0)}\left\|U_\alpha'(0)\right\|_{\mathbf{H}}^2+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_0\right\|_{\mathbf{H}}^2-G_\alpha(t)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(t)\right\rangle_{\mathbf{H}}\\
&-\int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds+\int_0^t\left\langle f_\alpha(s),(U_\alpha', g_\alpha*U_\alpha')(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
&-\int_0^t g_\alpha(s)\left\{\left\langle U_0,(U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}+\left\langle Grad\ U_0, Grad\ (U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds\\
&+2\alpha\frac{\left\|G_\alpha\right\|_1^2+4\left\|g_\alpha\right\|_1^2}{G_\alpha(0)\,\delta_\alpha}\int_0^t\left\langle G_\alpha*U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds+\alpha^2C_1\left(1+\frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\right)\\
&+\alpha\left(\frac{1}{G_\alpha(0)}+\alpha^2\frac{4G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}+2\alpha^2\right)\int_0^t\left\|U_\alpha'(s)\right\|_{\mathbf{H}}^2 ds\\
&+\alpha^2\left(1+\frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\right)H_{\alpha,1}(t).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&2\alpha\frac{\left\|G_\alpha\right\|_1^2+4\left\|g_\alpha\right\|_1^2}{G_\alpha(0)\,\delta_\alpha}\int_0^t\left\langle G_\alpha*U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \qquad (3.41)\\
\leq\ &\frac{\alpha}{\alpha_1}\int_0^t\left\langle G_\alpha*U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds,
\end{aligned}$$

et comme $G_\alpha(0) \prec 1$, nous pouvons écrire

$$\left(\alpha^2 + \alpha^2 \frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)},\right) H_{\alpha,1}(t) \leq \frac{2\alpha^2}{1-G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t), \tag{3.42}$$

et

$$\begin{aligned} & \alpha\left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \alpha^2 \frac{4G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)} + 2\alpha^2\right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|^2_{\mathbf{H}}\, ds \\ \leq\ & \alpha\left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \frac{4\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}\right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|^2_{\mathbf{H}}\, ds, \end{aligned} \tag{3.43}$$

En substituant les inégalités $(3.41), (3.42)$ et (3.43) dans (3.42), nous aboutissons à l'expression ci-après

$$\begin{cases} \frac{1-G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \int_0^t \langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ +\frac{1}{2}\left\{\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\alpha^2 \frac{1-G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} \\ \leq C_2 + \frac{2\alpha^2}{1-G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t) - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(0)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds \\ -\int_0^t g_\alpha(s) \left\{\langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} + \langle Grad\ U_0, Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}}\right\} ds \\ \frac{\alpha}{\alpha_1} \int_0^t \langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\rangle_{\mathbf{H}}\, ds + \alpha\left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \frac{4\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}\right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|^2_{\mathbf{H}}\, ds, \end{cases}$$

où C_2 est un nombre positif, tel que

$$\begin{cases} C_2 = \frac{1+G_\alpha(0)}{2} \left\| U'_\alpha(0) \right\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \left\| U_0 \right\|_{\mathbf{H}}^2 + \left\| Grad\ U_0 \right\|_{\mathbf{H}}^2 \right\} \\ \quad +\alpha \frac{2\|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \left\| U'_\alpha(0) \right\|_{\mathbf{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1-G_\alpha(0)}{2} \left\| U_0 \right\|_{\mathbf{H}}^2 + \alpha^2 C_1 \\ \qquad +\alpha^2 \frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)} C_1. \end{cases}$$

Finaliment, nous pouvons faire absorber le terme $\frac{\alpha}{\alpha_1}\int_0^t \left\langle G_\alpha * U"_\alpha(s), U"_\alpha(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds$ par le terme similaire se trouvant sur le coté gauche de l'énigalité ci-dessus. Par la suite, les estimation (3.29) et (3.30) sont vérifiées pour $\alpha \leq \alpha_1 - \varepsilon_0$.

Estimation du terme $\int_0^t \left\| U'_\alpha(\tau) \right\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau$

Le lemme suivant nous donne une estimation du terme $\int_0^t \left\| U'_\alpha(s) \right\|_{\mathbf{H}}^2 ds$.

Lemme 3.5.3 *Si U_α est la solution du problème* (3.18), *alors il existe un nombre $\alpha_2 \geq 0$, donné par*

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{\delta_{\alpha_0}}{4(1+\alpha_0)^2} \left(1 + \frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta\alpha_0} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)} \right)^{-1}, \frac{\alpha_1}{2}, \eta_0 \right\},$$

tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_2$ et $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\| U'_\alpha(\tau) \right\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \\ \leq\ & \frac{\alpha_2}{\varepsilon_0} \left\| U'_\alpha(0) \right\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0}(C_1 + 2C_2) \\ & + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0}\left(H_{\alpha,1}(t) + 2H_{\alpha,2}(t)\right), \end{aligned} \tag{3.44}$$

où η_0 a été introduit dans le Théorème 3.1.1.

Nous estimons le terme $\int_0^t \left\| U'_\alpha(\tau) \right\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau$ après utilisation de l'inégalité (3.23). En tenant comptes des inégalités (3.24), (3.29) et (3.12), nous obtenons pour $\alpha \leq \frac{\alpha_1}{2}$ et $t \geq 0$

$$\begin{cases} \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \\ \leq \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0}(C_1+2C_2) \\ +\frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}(H_{\alpha,1}(t)+2H_{\alpha,2}(t)) \\ +\frac{\alpha}{\alpha_2}\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau. \end{cases}$$

Pour $\alpha \leq \alpha_2 - \varepsilon_0$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \\ \leq\ & \frac{\alpha_2}{\varepsilon_0}\|U'_\alpha(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0}(C_1+2C_2) \\ & +\frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0}(H_{\alpha,1}(t)+2H_{\alpha,2}(t)). \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5.2 Lemmes technique

Lemme 3.5.4 *soit U_α la solution du problème* (3.18), *alors il existe un nombre $\alpha_2 \succ 0$, tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_2$ et $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\{\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\ & +\frac{1}{2}\left\{\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\ & +\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ \leq\ & C_3, \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \leq C_4, \tag{3.47}$$

où α_2 est donné par le lemme 3.5.3 *et $C_3, C_4 \succ 0$.*

Nous remplaçons (3.44) dans (3.30) , et d'après (3.24) , (3.25) et (3.31) , ainsi que les inégalités de Cauchy schwarz et de Young nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\{\|U_\alpha'(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+\frac{1}{2}\left\{\|(U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ (U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \\
\leq\varepsilon\left\{\|U_\alpha'(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\alpha^2\|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+C_\varepsilon+C\int_0^t\left(\left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1+|g_{\alpha_0}(s)|\right)\|U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2\,ds \\
+C\int_0^t|g_{\alpha_0}(s)|\left\{\|(U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ (U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2\right\}ds \\
+C\int_0^t|g_{\alpha_0}(s)|\left\{\|U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2\right\}ds \\
+C\int_0^t\left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1\|(U_\alpha'-g_\alpha*U_\alpha')(s)\|_{\mathbf{H}}^2\,ds,
\end{array}\right.$$

pou tout $\varepsilon\succ 0$, où C sont des constantes positives.
En appliquant le lemme de Gronwall,nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\{\|U_\alpha'(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+\frac{1}{2}\left\{\|(U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2+\|Grad\ (U_\alpha-g_\alpha*U_\alpha)(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} \\
+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}\|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \\
\leq C+C'\int_0^t\left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1\|(U_\alpha'-g_\alpha*U_\alpha')(s)\|_{\mathbf{H}}^2\,ds,
\end{array}\right.$$

où C et C' sont des constantes positives dépendant des données $\|U_1\|$, $\|Grad\ U_0\|$, $\|f\|_1$.

Pour tout $T\succ 0$,nous avons

$$\left(\|(U_\alpha'-g_\alpha*U_\alpha')(s)\|_{\mathbf{H}}\right)_{\infty,T}\leq\left(1+\|g_{\alpha_0}\|_1\right)\left(\|U_\alpha'\|_{\mathbf{H}}\right)_{\infty,T},$$

par la suite

$$\begin{cases} \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\{\left\|U'_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|Grad\ U_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\frac{1}{2}\left\{\left\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} \\ +\alpha^2 \frac{1-G_\alpha(0)}{2}\left\|U_\alpha(t)\right\|^2_{\mathbf{H}} \\ \leq \varepsilon\left(\left\|U'_\alpha\right\|_{\mathbf{H}}\right)_{\infty,T} + C_\varepsilon, \end{cases}$$

pour tout $t \in [0,T]$, nous pouvons contrôler le terme $\left(\left\|U'_\alpha\right\|^2_{\mathbf{H}}\right)_{\infty,T}$ par des constantes positives indépondantes de t, alors nous obtenons (3.46).

Finalement, les fonctions $H_{\alpha,1}(t)$ et $H_{\alpha,2}(t)$ dans (3.44) peuvent être bornées par le biais de (3.46), alors nous obtenons (3.47).

Lemme 3.5.5 *Pour tout solution* $U\alpha$ *du problème* (3.18) *où* $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 \prec \varepsilon_0 \prec \alpha_2$, *et* $t \geq 0$,*nous avons*

$$\int_0^t \left\{\left\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\|^2_{\mathbf{H}} + \left\|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\right\|^2_{\mathbf{H}}\right\} ds \leq C_5, \quad (3.48)$$

où $C_5 \succ 0$.

En multipliant (3.18) scalairement par $U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \left\langle U"_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} - 2\alpha\left\langle U'_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\alpha^2\left\langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ +\left\langle Grad\ U_\alpha(t), Grad\ (U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t))\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\left\langle g_\alpha * U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ -\left\langle g_\alpha * Grad\ U_\alpha(t), Grad\ (U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t))\right\rangle_{\mathbf{H}} \\ = \left\langle f_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\right\rangle_{\mathbf{H}}, \end{cases}$$

après calcul, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \langle U"_\alpha (t), U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ & -2\alpha \langle U'_\alpha (t), U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ & +\alpha^2 \langle U_\alpha (t), U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ & \|U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\|_{\mathbf{H}} + \|Grad\ U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\|_{\mathbf{H}} \\ = & \langle f_\alpha (t), U_\alpha (t) - g_\alpha * U_\alpha (t)\rangle_{\mathbf{H}}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

En intégrant (3.49) entre 0 et t, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle U"_\alpha (s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds \\ & -2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha (s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds \\ & +\alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha (s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds \\ & + \int_0^t \left\{\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}} + \|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}\right\} ds \\ = & \int_0^t \langle f_\alpha (s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds. \end{aligned} \tag{3.50}$$

En intégrant par partie, nous otenons

$$\begin{aligned} - \int_0^t \langle U"_\alpha (s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds \quad = \quad & - \langle U'_\alpha, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)\rangle_{\mathbf{H}|_0^t} \\ & + \int_0^t \langle U'_\alpha (s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} \, ds \\ & - \int_0^t g_\alpha (s) \langle U'_\alpha (s), U_0\rangle_{\mathbf{H}} \, ds, \end{aligned} \tag{3.51}$$

en remplaçant (3.51) dans (3.50), nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\{\|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2\right\} ds \quad (3.52)\\
= &\int_0^t \langle f_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds - \langle U'_\alpha, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)\rangle_{\mathbf{H}}|_0^t\\
&+ \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s)\langle U'_\alpha(s), U_0\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
&+2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
&-\alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{aligned}$$

Pour estimer le dernier terme sur le côté droit de (3.52), par utilisation de l'inégalité(2.13), nous avons alors

$$\begin{aligned}
&-(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds\\
\leq\ & -\frac{1}{2}\int_0^t \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds + \|G_\alpha\|_2^2 \|U_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|G_\alpha * U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant l'inégalité précédente dans (3.52) , nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{c}
\int_0^t \|Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
+\left(\frac{\alpha^2}{2(1-G_\alpha(0))}+1\right)\int_0^t \|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
\leq \int_0^t \left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1 \|\left(U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\right)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds - \left\langle U_\alpha', U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right\rangle_{\mathbf{H}|_0^t} \\
+\int_0^t \left\langle U_\alpha'(s), \left(U_\alpha' - g_\alpha * U_\alpha'\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s)\left\langle U_\alpha'(s), U_0\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
+\frac{\alpha^2\|G_\alpha\|_2^2}{1-G_\alpha(0)}\|U_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}\int_0^t \|G_\alpha * U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
+4\left(1-G_\alpha(s)\right)\int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds + \frac{\alpha^2}{4(1-G_\alpha(0))}\int_0^t \|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds.
\end{array}\right.$$

En utilisant le lemme 3.2.2, l'intégrale $\int_0^t \|G_\alpha * U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds$ du membre de droite de l'inégalité précédente donne

$$\left\{\begin{array}{c}
\int_0^t \|G_\alpha * U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
\leq \frac{1}{\delta_\alpha}\left\{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2\right\}\int_0^t \left\langle G_\alpha * U_\alpha'(s), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds.
\end{array}\right.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 3.5.1 nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{c}
\int_0^t \|G_\alpha * U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \leq \frac{1}{\delta_\alpha}\left\{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2\right\}\int_0^t \left\langle G_\alpha * U_\alpha'(s), U_\alpha'(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
\leq \frac{1}{\delta_\alpha}\left\{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2\right\}\left\{C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha\int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds\right\}.
\end{array}\right.$$

par la suite

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^t \|Grad\ \ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ + \left(\frac{\alpha^2}{2(1-G_\alpha(0))} + 1 \right) \int_0^t \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ \leq \int_0^t \left\| f_{\eta_0}(s) \right\|_1 \|(U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s))\|_{\mathbf{H}}^2 ds - \langle U'_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbf{H}}|_0^t \\ + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbf{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbf{H}} ds \\ + \frac{\alpha^2}{1-G_\alpha(0)} \left(\frac{1}{\delta_\alpha} \left(\|G_\alpha\|_1^2 + 4 \|g_\alpha\|_1^2 \right) \left(C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2 \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \right) \right) \\ +4(1 - G_\alpha(s)) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds + \frac{\alpha^2}{4(1-G_\alpha(0))} \int_0^t \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ + \frac{\alpha^2 \|G_\alpha\|_2^2}{1-G_\alpha(0)} \|U_0\|_{\mathbf{H}}^2 . \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t \|Grad \ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \qquad (3.53) \\
& + \left(\frac{\alpha^2}{2\left(1 - G_\alpha(0)\right)} + 1 \right) \int_0^t \|\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
& - \frac{\alpha^2}{4\left(1 - G_\alpha(0)\right)} \int_0^t \|\left(U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\right)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
\leq \ & \int_0^t \left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1 \|\left(U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\right)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds - \left\langle U'_\alpha(t), \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(t)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
& + \left\langle U'_\alpha(0), \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(0)\right\rangle_{\mathbf{H}} \\
& + \int_0^t \left\langle U'_\alpha(s), \left(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\right)(s)\right\rangle_{\mathbf{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \left\langle U'_\alpha(s), U_0\right\rangle_{\mathbf{H}} ds \\
& + \frac{\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \left(\frac{1}{\delta_\alpha} \left(\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2\right) \left(C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \right) \right) \\
& + 4\left(1 - G_\alpha(s)\right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds \\
& + \frac{\alpha^2 \|G_\alpha\|_2^2}{1 - G_\alpha(0)} \|U_0\|_{\mathbf{H}}^2,
\end{aligned}
$$

d'après (3.46), nous avons

$$
\begin{cases}
\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}} \leq C'_3, \\
\|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}} \leq C"_3,
\end{cases}
$$

nous arrivons à écrire que

$$
\int_0^t \left\|f_{\eta_0}(s)\right\|_1 \|\left(U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\right)\|_{\mathbf{H}} \, ds \leq \tilde{K}_0, \qquad (3.54)
$$

et

$$\begin{aligned} & \langle U'_\alpha(t), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ \leq\ & \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}} \|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}} \\ \leq\ & \tilde{K}_1, \end{aligned} \tag{3.55}$$

où $C'_3, C"_3, \tilde{K}_0, \tilde{K}_1$ sont des constantes positives. A partir de l'inégalité (3.47), nous arrivons à écrire que

$$\int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\rangle_{\mathbf{H}} ds \leq \tilde{K}_2, \tag{3.56}$$

où $\tilde{K}_2$ est une constante positive.

D'après l'estimations $(3.54) - (3.56)$ et comme $H_{\alpha,1}(t)$ et bornée, de l'inégalité (3.53), nous arrivons au résultat suivant

$$\int_0^t \|Grad\ (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|^2_{\mathbf{H}} ds \int_0^t \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|^2_{\mathbf{H}} ds \leq C_5.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.5.5.

3.6 Fin de la preuve du Théorème 3.1.1

Dans la suite, nous noterons par $\tilde{K}_i = \tilde{K}_i(\|U_1\|, \|Grad\ U_0\|, \|f\|_1)$ les fonctions positives, croissantes, telles que $\tilde{K}_i(0) = 0$, $i = 3, 4, 5, 6$.

D'après le lemme 3.5.4, nous obtenons pour tout $t \geq 0$,

$$\|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|Grad\ U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|U_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} \leq \tilde{K}_3 \tag{3.57}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \|U'_\alpha(t)\|^2_{\mathbf{H}} = \langle U_\alpha(t), U_\alpha(t)\rangle_{\mathbf{H}} \\ \qquad = e^{2\alpha t}\langle U(t), U(t)\rangle_{\mathbf{H}} \end{cases}$$

de l'inégalité (3.57), nous avons

$$\|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = e^{2\alpha t}\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \tilde{K}_3,$$

ce qui donne

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \tilde{K}_3 e^{-2\alpha t}, \tag{3.58}$$

ainsi nous trouvons

$$\|Grad\ U(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \tilde{K}_3 e^{-2\alpha t}. \tag{3.59}$$

Nous avons

$$U'(t) = e^{-\alpha t}U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t}U_\alpha(t),$$

en prenant les normes il vient

$$\|U'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = \left\|e^{-\alpha t}U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t}U_\alpha(t)\right\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \tilde{K}_4 e^{-2\alpha t}\left(\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U_\alpha(t)\|_{\mathbf{H}}^2\right)$$

d'après l'inégalité (3.57) nous déduisons

$$\|U'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \tilde{K}_3\tilde{K}_4 e^{-2\alpha t}, \tag{3.60}$$

en utilisant (3.58) – (3.60), nous obtenons le premier résultat du Théorème, c'est à dire l'estimation (3.5) pour le cas linéaire.
comme le noyau résolvant de g_α est donné par $r_\alpha(t) = e^{\alpha t}r(t)$, nous pouvons appliquer le corollaire 1.7.1 pour obtenir

$$\left(\|Grad\ U_\alpha\|_{\mathbf{H}}\right)_\infty \leq \left(1 + \|r_{\alpha_0}\|_1\right)\left(\|Grad\ \left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)\|_{\mathbf{H}}\right)_\infty, \tag{3.61}$$

$$\left(\|U_\alpha\|_{\mathbf{H}}\right)_\infty \leq \left(1 + \|r_{\alpha_0}\|_1\right)\left(\left(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\right)(s)_{\mathbf{H}}\right)_\infty. \tag{3.62}$$

En utilisant $(3.61), (3.62), (2.12)$ et (3.48), nous pouvons montrer l'estimation uniforme des termes

$$\int_0^\infty \|Grad\ U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2\, ds,$$

et

$$\int_0^\infty \|U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \, ds,$$

Par conséquent, l'inégalité (3.47) nous donne

$$\int_0^\infty \left\{ \|U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ U_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \right\} ds \leq \tilde{K}_5, \tag{3.63}$$

Comme $U(t) = e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$, et $U'(t) = e^{-\alpha t} U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$, nous pouvons écrire

$$\int_0^\infty e^{2\alpha s} \left(\|U'(s)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|U(s)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|Grad\ U(s)\|_{\mathbf{H}}^2 \right) ds \leq \tilde{K}_6,$$

ainsi nous trouvons la deuxième estimation du Théorème (l'estimation (3.6) pour le cas linéaire). Les arguments standards de densité permettent d'étendre les résultats aux solutions mild.

Conclusion

Dons cette mémoire, nous avons étudié l'existence des solutions et la décroissance d'une équation des ondes

– **viscoélastique (**avec des noyaux fortement définis positifs),

– **semilinéaire (**les nonlinéairités sont globalement lipschitziennes),

– **avec des conditions aux limites dynamiques.**

Dans la première partie, nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions

– **locales mild et fortes,**

– **globales mild et fortes.**

la deuxième partie de la mémoire a été consacrée à l'étude de la décroissance, nous avons considéré séparément les problèmes linéaire et semilinéaire.

malgré la complication des calculs techniques de la méthode utilisée, nous avons pu montrer

– **la décroissance exponentielle.**

– **la fonction** $e^{2\alpha t}E(t)$ **appartient à l'espace** $L^1(0,\infty)$.

on peut envisager comme **perspective** d'étudier la stabilisation, en considérant un seul terme mémoire (damping) agissant dans une seule équation. C'est un problème très difficile ayant des conditions aux limites dynamiques.

Bibliographie

[1] Adams R. A., and fourier J. F, Sobolev Spaces. 2003, Academic Press.

[2] Bendali A., et Lemrabet K. The effect of athin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J. Appl. Math. 56 :1664-1693, 1996.

[3] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Ryuichi Fukuoka and Daniel Toundykov., Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions, J. Evol. Equ. 9 :143-169, 2009.

[4] Evans L. C., Partial Differential Equations. 1998, Graduate Studies in Mathematics, AMS. 91.

[5] Gripenberg G., Londen S.O., Staffans O.J, Volterra Integral and Functional Equations, Encyclopedia Math. App., vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridje, 1990.

[6] Hrusa W.J., Nohel J.A., the Cauchy problem in one-dimensional nonlinear viscoelasticity, J. Differential Equations 59 :388-412, 1985.

[7] Khemmoudj A., Aries M. S., Stabilisation of a wave equation with localised memory term and boundary frictional damping, International Journal of Control, DOI : 10.1080/00207179.2018.1438669, 2018.

[8] Kawashima S., Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory, J. Differential Equations 101 :388-420, 1993.

[9] Khemmoudj A., Seghour L., Exponential stabilization of a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions, Nonlin. Did'er. Equat. and Appli. NoDEA, 22, 1259-1286, 2015.

[10] Lagnese J., Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, J. Di , Equations, 50 : 163-182, 1983.

[11] Medeiros L. A., Milla M. Miranda, Espaços de sobolev (iniciaçao aos problemas elipticos nâo homogêneos). Rio de janeiro : IM-UFRI, 2000.