République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle} HAMANA Imane

Intitulé

Méthode itérative monotone pour un problème de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire

Dirigé par : Dr.TABOUCHE Nora

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. REBAI Gania**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. TABOUCHE Nora**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. ZANKOUFI Lilia**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Octobre 2020

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanahou wa tahala.
Je tiens à remercier vivement mon encadreur de mémoire, **Prof. Tabouche Nora**, pour ses conseils, ses encouragements et sa grande disponibilité pour le suivi de ce travail.
Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mon frère et mon mari, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement. Il est important pour moi de remercier toutes mes amies.
Je remercie Dr REBAI Gania pour l'honneur qu'elle m'a accordé de présider ce jury.
Je remercie également Dr ZANKOUFI Lilia d'avoir accepter de faire partie du jury.

Je remercie tous les enseignants de l'université 8-mai-1945-GUELMA.

الملخص

في بداية مذكرتنا ، تطرقنا الى تحليل ودراسة عمل د.هايجود وب.رزقان التي تتناول مشكلة كسور غير خطية لريمان-ليوفيل الخاضعة لشرط حد متكامل يتضمن دراسة وجود الحل و ذلك باستعمال طريقة الرتابة.

الهدف من من هذه الاطروحة هو استغلال هذه الطريقة لدراسة وجود حل لمعادلة تفاضلية كسرية غير خطية لريمان-ليوفيل الجديدة بشرطين حدوديين ثابتين (مشكلة لم تدرس من قبل) ندرس وجود الحل في فضاء الدوال المستمرة مع ثقل.

نؤسس أولاً مبدأً جديدًا للمقارنة وهو الأداة الحاسمة في تحليلنا. ثم نظهر وجود الحلول القصوى لمشكلتنا في استخدام الأسلوب التكراري الرتيب وطريقة تكرار الحلول.

أخيرا نرفق بالنتائج المتحصل عليها مثال توضيحي لتبرير صحتها .

Résumé

Dans notre mémoire, nous avons commencé par une synthèse du travail de D.Dhaigude et B. Rizqan article [8] qui traite un problème fractionnaire non linéaire de Reimann-Liouville avec une condition intégrale aux limites dont l'étude de l'existence de la solution est basée sur la méthode monotone. l'objectif de notre travail est d'exploiter cette méthode, en considèrant un nouveau problème fractionnaire non-linéaire de Reimann-Liouville d'ordre $1 < \alpha < 2$ *avec deux conditions aux limites constantes (problème non étudié au paravant). On étudie l'existence de la solution dans l'espace des fonctions continues avec poids.*

Nous établissons d'abord un nouveau principe de comparaison qui est l'outil crucial dans notre analyse. Ensuite, nous montrons l'existence des solutions extremums de notre problème en utilisant la technique itérative monotone et la méthode de sous et sur solutions. On achève le travail par un exemple illustrant les résultats obtenus.

Contents

0.1 *Introduction* . . . 1

1 Préliminaires et rappels de calcul fractionnaire 4

1.1 Espaces fonctionnels . . . 4

1.1.1 Espaces des fonctions absolument continues . . . 4

1.1.2 Espaces des fonctions continues avec poids . . . 4

1.2 Définitions de base dans le calcul fractionnaire . . . 5

1.2.1 fonctions spéciales . . . 5

1.2.2 Fonction Mittag-Leffler . . . 6

1.3 Calcul fractionnaire . . . 7

1.3.1 Intégrale fractionnaire . . . 7

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville . . . 7

1.3.3 Dérivée fractionnaires . . . 8

1.4 Théorèmes . . . 10

1.4.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . 10

1.4.2 Théorème d'Arzela -Ascoli . . . 10

1.4.3 Théorème du point fixe de Banach . . . 11

2 Méthode monotone d'un problème de Reimann-Liouville avec condition intégrale au limites 12

2.1 Position du problème . . . 12

2.2 Préliminaires . . . 12

2.3 Unicité et existence de la solution . . . 15

2.4 La méthode monotone itérative . . . 17

2.4.1 Existence de la solution . . . 18

2.4.2 Unicité de la solution . . . 23

3 Méthode monotone d'un problème de Reimann-Liouville avec deux conditions constantes aux limites 25

3.1 Position du problème 25

3.2 Définitions et lemmes 25

3.3 Méthode itérative monotone 31

3.3.1 Principe de comparaison 31

3.3.2 Existence de solutions 33

3.4 Exemple 44

Conclusion 46

Bibliography 47

0.1 *Introduction*

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des dérivées et des intégrales d'ordre non entier (appelés dérivées et intégrales fractionnaires). En particulier, cette discipline implique des méthodes de résolution des équations differentielles à dérivée fractionnaire de l'inconnue.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier remonte son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles".

La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo voir [11].
A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....
Par exemple : les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la visco-élasticité des matières, les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégro-différentiels fractionnaires. En biologie, ils a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire, et alors est classé en groupe de modèles d'ordre non entier et en économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire. D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendent ces dernières décennies.

La méthode monotone combinée à la méthode de sous et sur solution est un outil puissant dans l'étude de l'existence de solutions de problèmes differentiels d'ordre fractionnaire.
Cabada, A. Habvets, P.Lois et Cabada, A., Sanchez [2, 3] ont développé la méthode mono-

tone pour des équations différentielles ordinaires (problème de Neumann).

La méthode monotone pour des équations différentielles fractionnaires de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 2$ a été exploitée dans [1, 9, 19, 20, 21].

L'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles fractionnaires de Riemann-Liouville avec des conditions aux limites intégrales sont également étudiées par Nanware et Dhaigude dans [14, 15, 16, 17].

Recemment, Bo. Tang , Jing Zhao et Zhenhai Liu [20] ont étudié l'existence de solutions pour un probllème de Riemann-Liouville avec deux conditions aux limites en utilisant la méthode monotone combinée avec la méthode de sous et sur solution.

Motivée par ce dernier travail, dans le cadre de ce mémoire nous proposons une étude assez exhaustive de l'existence de solutions de problèmes de Riemann-Liouville via la méthode monotone.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.
l'étude se veut assez détaillée dans le chapitre 2, le chapitre 1 étant introductif. Dans le chapitr 3, on établit l'existence d'un autre problème de Riemann-Liouville mais avec deux conditions aux limites constantes , toujours en utilisant la méthode monotone.

1. Premier chapitre : étant introductif dans lequel nous rappelons les définitions et quelques résultats de base utiles dans la suite du travail.

2. Deuxième chapitre : est destiné à une étude plus complète du problème fractionnaire de Riemann et Liouville avec une condition intégrale au bord suivant

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))), & t \in J = [0, T],\ T \geqslant 0 \\ u(0) = \lambda \displaystyle\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d, & d \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.1}$$

   où $f \in C(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\theta \in C(J, J)$, $\theta(t) \leq t$ et $t \in J$, $\lambda \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$.
   D_{0+}^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-liouville d'ordre α.

3. Troisième chapitre : on utilise la méthode monotone combinée à la méthode de sous et sur solution pour établir l'existence d'un problème fractionnaire de Reimann-

Liouville avec deux conditions aux limites

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))), & t \in J = (a, b) \\ \\ I^{2-\alpha}u(t)_{|t=a} = A, \\ \\ u(b) = B. \end{cases}$$

Où, $f \in C(J \times \mathbb{R}^2)$, $1 < \alpha < 2$, $A, B \in \mathbb{R}$, D^{α} et $I^{2-\alpha}$ sont respectivement la dérivée et l'intégrale fractionnaire au sens de Reimann-liouville d'ordre α et d'ordre $2 - \alpha$.

Finalement, nous illustrons les résultats obtenus par un exemple.

Chapter 1

Préliminaires et rappels de calcul fractionnaire

Ce chapitre est introductif dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de calcul fractionnaire et de l'analyse fonctionnelle qui représentent des outils indispensables dans la suite de notre travail.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions absolument continues

Définition 1.1 Soit $[a,b]$ un intervalle fini et soit $AC[a,b]$ l'espace des fonctions f absolument continues dans $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n[a,b]$ l'espace défini par

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ tq\ f^{n-1}(x) \in AC([a,b])\}. \tag{1.1}$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.2 Soit $(0 \leq p \leq 1)$, on appelle espace des fonctions f continues avec poids dans $[t_0, T]$ noté par $C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f \in C([t_0,T]$ défini par

$$C_p([t_0,T] = \{f \in C([t_0,T],\mathbb{R}),\ tq\ f(t)(t-t_0)^p \in C([t_0,T],\mathbb{R})\} \tag{1.2}$$

$$\|f(t)\|_{C_p} = \|(t-t_0)^p f(t)\|_C \qquad avec \quad \|f(t)\|_C = \max_{t\in[t_0,T]} \mid f(t) \mid . \tag{1.3}$$

En particulier $C_0([a,b]) = C([a,b])$.

1.2 Définitions de base dans le calcul fractionnaire

1.2.1 fonctions spéciales

La fonction Gamma

une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, qui généralise factoriel n ($n!$).

Définition 1.3 [11, 12] La fonction Gamma est définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad z \in \mathbb{C}, \ \Re(z) > 0. \tag{1.4}$$

Propriétés de la fonction Gamma

- $\Gamma(z)$ est une fonction monotone est strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ z \in \mathbb{C}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\dfrac{1}{2})$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\Gamma(n+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}(2n!)}{2^{2n}n!}$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma(\dfrac{n}{2}) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, où $n!!$ est le factoriel double

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\dots 5.3.1, & n \ impair \\ n(n-2)\dots 6.4.2, & n \ pair \\ 1, & n = 0, -1. \end{cases}$$

- $\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

- $\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

La fonction Bêta

La fonction Bêta est un type d'int égrale d'Euler donn ée par la d éfinition suivante

Définition 1.4 [11, 12] La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivant

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.5}$$

où $z, w \in \mathbb{C}$, avec $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$.

Propriétés de la fonction Bêta

- $\beta(z,w) = \beta(w,z),\ \Re(z) > 0, \Re(w) > 0.$

- $\beta(z,w) = \beta(z+1,w) + \beta(z,w+1),\ \Re(z) > 0, \Re(w) > 0.$

- $\beta(z,1) = \frac{1}{z}, \Re(z) > 0.$

- $\beta(z,w+1) = \frac{z}{w}\beta(z+1,w), \Re(z) > 0, \Re(w) > 0.$

- $\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$

1.2.2 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.5 [11] La fonction Mittag-Leffler d'un paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)},\ z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0$$

Définition 1.6 [11] La fonction Mittag-Leffler de deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)},\ z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Remarque 1.1 $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k\,!} = e^z.$

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrale fractionnaire

Définition 1.7 [11] Soit $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale fractionnaire de f est donnée par

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n = \frac{1}{(n-1)\,!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)ds, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.8 [11] L' intégrale de Riemann-Liouville d'une fonction f continue d'ordre $\alpha > 0$, noté $I^\alpha f(t)$ est défini par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{1.6}$$

Propriétés

- Pour $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_+,\;\; I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f)$.

- Linéairité : $I_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + \mu I_a^\alpha g(t)$.

- $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} I_a^\alpha f(t) = f(t)$.

- L' intégrale fractionnaire de Reimann-Liouville d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ de quelques fonctions $I_0^{1/2} C = 2C\sqrt{\frac{t}{\pi}}$; ($C$ constante), $I_0^{1/2} t = \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$, $I_0^{1/2} t^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi} t^2}{8}$, $I_0^{1/2} t^a = \frac{\Gamma(a+1) t^{a+1/2}}{\Gamma(a+3/2)}$, $a > -1$.

1.3.3 Dérivée fractionnaires

Dérivée fractionnaire au sens de Reimann-liouville

Définition 1.9 Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.7}$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de la fonction f est définie par

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{-d}{dt}\right)^n I_{b-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.8}$$

Remarque 1.2 Dans ce qui suit, nous considérons que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.

Propriétés

- **Linéarité**

$$D_{a+}^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_{a+}^{\alpha} f(t) + \mu D_{a+}^{\alpha} g(t). \tag{1.9}$$

- En général on a

$$D_{a+}^{\alpha}(D_{a+}^{\beta} f)(t) \neq D_{a+}^{\beta}(D_{a+}^{\alpha} f)(t) \neq D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) \tag{1.10}$$

- La dérivée fractionnaire séquentielle de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$ d'ordre $k\alpha$, $0 < \alpha < 1$ est définie par

$$D_{a+}^{k\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{(k-1)\alpha} f(t), \qquad (k = 2, 3, 4, \cdots). \tag{1.11}$$

- Pour $\alpha > 0$ et $t > a$, on a

$$D_{a+}^{\alpha}(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = D_{a+}^{\alpha}(D_{a+}^{-\alpha} f)(t) = f(t). \tag{1.12}$$

- Pour $n-1<\alpha<n$

$$I^{\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t)=D^{-\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t)=f(t)-\sum_{j=1}^{n}[D^{\alpha-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (1.13)$$

Cas particulier si $(0<\alpha<1)$, alors

$$I^{\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t)=f(t)-[D^{\alpha-1}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.14)$$

- Formules de composition
Soit $m-1\leq\alpha<m$ et $n-1\leq\beta<n$

$$D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+}f)(t)=D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t)-\sum_{j=1}^{n}[D^{\beta-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}. \quad (1.15)$$

$$D^{\beta}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t)=D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t)-\sum_{j=1}^{m}[D^{\alpha-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}. \quad (1.16)$$

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est donnée par

$$D^{\alpha}_{a+}C=\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \qquad t>a. \quad (1.17)$$

- La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction puissance $(t-a)^{\nu}$ pour $\nu>-1$

$$D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}, \quad (1.18)$$

et

$$D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j}=0, \qquad j=1,2,\cdots,\alpha+1. \quad (1.19)$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.10 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha\in\mathbb{R}_+$ d'une fonction u de classe $C^n([a,b])$ est définie par

$${}^{C}D^{\alpha}_{a}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(s)ds, \quad t>a \quad (1.20)$$

avec $n-1<\alpha<n$.

Propriétés

- Linéarité ${}^{C}D^{q}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda^{C}D^{q}f(t) + \mu^{C}D^{q}g(t)$.

- ${}^{C}D^{q}C = 0$, C constante.

- Règle de Leibnitz

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(f(t)g(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(D^{\alpha-k}f(t)\right)g^{k}(t) \\ &- \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\left(f(t)g(t)\right)^{(k)}(0). \end{aligned}$$

1.4 Théorèmes

Dans cette partie, nous présentons des théorèmes utiles dans la suite de notre travail.

Théorème 1.1 *[10] Si une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans C(J) est bornée et équicontinue, alors il existe une sous-suite uniformément convergente.*

1.4.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.2 *[13] Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$ existe. Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable et on a*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

1.4.2 Théorème d'Arzela -Ascoli

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.3 *[10] Soit $Y = C([a,b])$ muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{t\in[a,b]} \mid u(t) \mid$$

. Si M est un sous ensemble de Y tel que

(i) M est uniformément borné, i.e $\exists r > 0, \|u\| \leq r, \forall u \in M$.

(ii) M est équicontinu c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in [a,b] \ \textit{ tel que } \mid t_1 - t_2 \mid < \delta \textit{ et } u \in M \Longrightarrow \mid u(t_1) - u(t_2) \mid < \varepsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

1.4.3 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.4 *[10] Soit U un fermé non vide d'un espace de Banach X et $T : U \rightarrow U$ un opérateur contraction. Alors il existe un unique $u \in U$ tel que $Tu = u$.*

Chapter 2

Méthode monotone d'un problème de Reimann-Liouville avec condition intégrale au limites

Dans ce chapitre, on mène une synthèse du travail de D. Dhaigude et B. Rizqan [8], sur l'étude de l'existence et l'unicité d'un problème de Reimann-Liouville avec condition intégrale au limites par application de la méthode monotone.

2.1 Position du problème

On considère le problème différentiel fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))), & t \in J = [0, T], \\ u(0) = \lambda \int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d, & d \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\theta \in C(J, J)$, $\theta(t) \leq t$ et $t \in J$, $\lambda \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$.
D^{α}_{0+} est la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-liouville d'ordre α.

2.2 Préliminaires

Nous présentons quelques résultats de base utiles pour la suite du travail.

On considère l'espace

$$C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R}) = \{u \in C((0,T],\mathbb{R}) \mid t^{1-\alpha}u \in C(J,\mathbb{R})\}. \tag{2.2}$$

Définition 2.1 Les deux fonctions v_0, w_0 dans $C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ sont appelées respectivement sous (solution inférieure) et sur solution (solution supérieure) du problème (2.1) si

$$D^{\alpha}_{0+}v_0(t) \leq f(t, v_0(t), v_0(\theta(t))), \qquad v_0(0) \leq \int_0^T v_0(s)ds + d \tag{2.3}$$

et

$$D^{\alpha}_{0+}w_0(t) \geq f(t, w_0(t), w_0(\theta(t))), \qquad w_0(0) \geq \int_0^T w_0(s)ds + d. \tag{2.4}$$

Lemme 2.1 *[7, 8] Soit $m \in C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ où pour tout $t_1 \in (0,T]$, tel que*

$$m(t_1) = 0 \textit{ et } m(t) \leq 0 \textit{ pour } 0 \leq t \leq t_1,$$

il s'ensuit que

$$D^{\alpha}m(t_1) \geq 0.$$

Lemme 2.2 *[8] Soit $f \in C(J \times \mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, la fonction $u \in C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ est une solution du problème* (2.1) *si est seulement si est une solution de l'équation intégrale*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s), u(\theta(s)))ds + \lambda \int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d \tag{2.5}$$

Preuve. ($\Leftarrow$) Supposons $u \in C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ satisfaisant l'équation intégrale (2.5). Appliquons l'opérateur différentiel D^{α} aux deux membres de l'équation (2.5) on trouve

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{0+}u(t) &= D^{\alpha}_{0+}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u(\theta(s)))ds + u(0)\right) \\
&= D^{\alpha}_{0+}u(0) + D^{\alpha}_{0+}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s),u(\theta(s)))ds\right) \\
&= D^{\alpha}_{0+}u(0) + D^{\alpha}_{0+}I^{\alpha}_{0+}f(s,u(s),u(\theta(s))) \\
&= D^{\alpha}_{0+}u(0) + f(s,u(s),u(\theta(s))).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}u(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{0+}u(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds. \end{aligned}$$

Comme on a n=1, donc

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}u(t) &= \frac{d}{dt}\left(I^{1-\alpha}_{0+}u(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d^1}{dt}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha-1}u(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$D^{\alpha}_{0+}u(0) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times 0 = 0.$$

On obtient

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))).$$

En plus, $u(0) = \lambda \int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d$ (par (2.5)).
Réciproquement si $u(t)$ est solution continue de (2.1). On a

$$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) = I^{\alpha}f(t, u(t), u(\theta(t))).$$

par la formule (1.14),on a

$$\begin{aligned} I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) &= u(t) - [D^{\alpha-1}_{0+}u(t)]_{t=0}\frac{(t-0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \\ &= u(t) - u(0)\frac{(t-0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{(t-0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \\ &= u(t) - u(0). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u(t) &= I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) + u(0) \\ &= I^{\alpha}_{0+}f(t, u(t), u(\theta(t))) + u(0) \\ &= I^{\alpha}_{0+}f(t, u(t), u(\theta(t))) + \lambda\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s, u(s), u(\theta(s)))ds + \lambda\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d. \end{aligned}$$

D'où $u(t)$ solution de (2.5). ■

Lemme 2.3 *[8] Soit $\{u_\epsilon\}$ une famille de fonction continue sur J, pour tout $\epsilon > 0$ satisfaisant*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u_\epsilon(t) = f(t, u_\epsilon(t), u_\epsilon(\theta(t))), & t \in J = [0, T],\ T \geq 0 \\ u_\epsilon(0) = \lambda \displaystyle\int_0^t u(s)\mathrm{d}s + d, & d \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\mid f(t, u_\epsilon(t), u_\epsilon(\theta(t))) \mid \leq M$, *pour* $t \in J$. *Alors la famille* $\{u_\epsilon\}$ *est équicontinue dans* J.

Preuve. D'après le lemme 2.2, on a

$$u_\epsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_\epsilon(s), u_\epsilon(\theta(s)))ds + \lambda \int_0^T u_\epsilon(s)\mathrm{d}s + d.$$

Pour $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$,

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(t_1) - u_\epsilon(t_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s, u_\epsilon(s), u_\epsilon(\theta(s)))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s, u_\epsilon(s), u_\epsilon(\theta(s)))ds \right| \\ &\leq M \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}ds - \int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\right) \\ &\leq M \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right)ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[t_1^\alpha - t_2^\alpha + 2(t_2-t_1)^\alpha\right] \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha < \epsilon. \end{aligned}$$

Pour $|t_2 - t_1| < \delta$ avec $\delta = \dfrac{\epsilon\Gamma(\alpha+1)}{2M}^{1/\alpha}$, la famille $\{u_\epsilon\}$ est équicontinue. ∎

2.3 Unicité et existence de la solution

Dans cette section, l'existence de la solution unique du problème (2.1) est établie par application du théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.1 *[8] Supposons*

1. $f \in C(J \times \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}),\ \theta \in C(J, J),\ \theta(t) \leq t,\ t \in J.$

2. *Ils existes deux constantes positives M et N tel que* $|f(t,u_1,u_2)-f(t,v_1,v_2)|\leq M|u_1-v_1|+N|u_2-v_2|$.

3. *Pour tout* $t\in J,\ \ u_i,v_i\in\mathbb{R},\ i=1,2$. *Si* $\lambda<\dfrac{\Gamma(\alpha+1)-T^{\alpha}(M+N)}{T\Gamma(\alpha+1)}$,

le problème (2.1) *admet une solution unique.*

Preuve. On considère l' opérateur T définit par :
$(Tu)(t)=\lambda\displaystyle\int_0^T u(s)\mathrm{d}s+d+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s),u(\theta(s)))ds.$
Montrons que T: $C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})\to C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ est une contraction. Pour tout $u,v\in C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\|Tu-Tv\|_C &= \max_{t\in J}|(Tu)(t)-(Tv)(t)|\\
&= \max_{t\in J}\Big|\lambda\int_0^T u(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s),u(\theta(s)))ds\\
&\quad -\lambda\int_0^T v(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,v(s),v(\theta(s)))ds\Big|\\
&\leq \max_{t\in J}\lambda\int_0^T |u(s)-v(s)|\mathrm{d}s+\max_{t\in J}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\\
&\quad \times|f(s,u(s),u(\theta(s)))-f(s,v(s),v(\theta(s)))|ds\\
&\leq \lambda\int_0^T ds\|u(t)-v(t)\|_C+\max_{t\in J}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s),u(\theta(s)))\\
&\quad -f(s,v(s),v(\theta(s)))|ds.
\end{aligned}$$

Par hypothèse (2)

$$\begin{aligned}
\|Tu-Tv\|_C &\leq \lambda\int_0^T ds\|u(t)-v(t)\|_C+\max_{t\in J}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\\
&\quad \times\left[|M\left(u(s)-v(s)\right)|+|N\left(u(\theta(s))-v(\theta(s))\right)|\right]ds\\
&\leq \lambda T\|u(t)-v(t)\|_C+\max_{t\in J}\frac{M+N}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|u-v\|_C ds\\
&\leq \|u-v\|_C\left[\lambda T+\max_{t\in J}\frac{M+N}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^t\right]\\
&\leq \|u-v\|_C\left[\lambda T+\frac{(M+N)}{\alpha\Gamma(\alpha)}t^{\alpha}\right]\\
&\leq \left[\lambda T+\frac{(M+N)}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha}\right]\|u-v\|_C\\
&\leq \|u-v\|_C.
\end{aligned}$$

Le théorème du point fixe de Banach implique que l'opérateur T admet un unique point fixe. Par conséquent, le problème (2.1) admet une unique solution. ■

Corollaire 2.1 *[8] Soit M, N constantes $\sigma \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$. Le problème linéaire*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) + Mu(t) + Nu(\theta(t)) = \sigma(t), & t \in J = [0, T],\ 0 < \alpha < 1 \\ u(0) = \lambda \displaystyle\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d, & d \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

admet une solution unique.

2.4 La méthode monotone itérative

Dans cette section, nous utilisons la méthode monotone itérative pour établir l'existence et l'unicité du problème (2.1). Le principe de cette méthode est basé sur la recherche de deux suites $v_n(t)_{n \in N}$ et $w_n(t)_{n \in N}$ monotones qui convergent respectivement vert la solution minimale et maximale de (2.1).

Commençons par définir l'intervalle fonctionnel

$$[v_0,\, w_0] = \{u \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}), \quad v_0(t) \leq u(t) \leq w_0, \quad \forall t \in J\}.$$

Lemme 2.4 *Soit $\theta \in C(J, J)$ où $\theta(t) \leq t$ dans J. Supposons $p \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$ satisfaisons les inégalités suivantes*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} p(t) \leq -Mp(t) - Np(\theta(t)) = Fp(t), & t \in J, \\ p(0) \leq 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où M et N sont des constantes. Si

$$-\left(1 + T\right)^{\alpha} [M + N] < \Gamma(1 + \alpha) \tag{2.9}$$

alors, $p(t) \leq 0$ pour tout $t \in J$.

Preuve. Considérons $p_\epsilon(t) = p(t) - \epsilon(1 + t^\alpha), \quad \epsilon > 0$. On applique l'opérateur D_{0+}^{α} à cette égalité on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} p_\epsilon(t) &= D_{0+}^{\alpha} p(t) - D_{0+}^{\alpha} \epsilon(1 + t^\alpha) \\ &\leq Fp(t) - D_{0+}^{\alpha} \epsilon(1 + t^\alpha) \\ &= Fp(t) - D_{0+}^{\alpha} \epsilon - \epsilon D_{0+}^{\alpha} t^\alpha \end{aligned}$$

Par (1.17) et (1.18), on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}p_\epsilon(t) &\leq Fp(t) - \frac{\epsilon}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \epsilon\Gamma(1+\alpha) \\ &= Fp_\epsilon(t) + \epsilon\left[-M(1+t^\alpha) - N(1+t^\alpha) - \frac{1}{t^\alpha\Gamma(1-\alpha)} - \Gamma(1+\alpha)\right] \\ &< Fp_\epsilon(t) + \epsilon\left[-(1+t^\alpha)(M+N) - \Gamma(1+\alpha)\right] < Fp_\epsilon(t) \end{aligned}$$

et

$$p_\epsilon(0) = p(0) - \epsilon < 0.$$

Nous prouvons que $p_\epsilon(t) < 0$ dans J. Supposons que $p_\epsilon(t) \nless 0$ dans J. Il existe alors $t_1 \in (0,T]$ tel que $p_\epsilon(t_1) = 0$ et $p_\epsilon(t) < 0$, $t \in (0,t_1)$. A partir du lemme 2.1, on a $D^{\alpha}_{0+}p_\epsilon(t_1) \geq 0$. Il s'ensuit que

$$0 < Fp_\epsilon(t) = -Np_\epsilon(\theta(t)).$$

Si $N = 0$, alors $0 < 0$, ce qui est une contradiction. Si $-N > 0$, alors $p_\epsilon(\theta(t_1)) > 0$, ce qui est encore une contradiction. Cela prouve que $p_\epsilon(t) < 0$ dans J. Donc $p(t) - \epsilon(1+t^\alpha) < 0$ dans J. Prenons $\epsilon \to 0$, Nous obtenons le résultat souhaité. ■

2.4.1 Existence de la solution

Théorème 2.2 *[8] Supposons que*

(H1) $f \in C(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ \theta \in C(J,J),\ \theta(t) \leq t,\ t \in J.$

(H2) Les fonctions v_0 et w_0 dans $C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solution du problème(2.1) avec $v_0(t) \leq w_0(t)$ dans J.

(H3) Ils existe deux constantes positives M et N, tel que la fonction f satisfait la condition suivante

$$f(t,u_1,u_2) - f(t,v_1,v_2) \geq -M\left(u_1 - v_1\right) - N\left(u_2 - v_2\right). \tag{2.10}$$

pour $v_0(t) \leq v_1 \leq u_1 \leq w_0(t)$, $v_0(\theta(t)) \leq v_2 \leq u_2 \leq w_0(\theta(t))$.

Alors ils existe deux suites monotone $v_n(t)$ et $w_n(t)$ dans $C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ tel que

$$v_n(t) \to v(t) \text{ et } w_n(t) \to w(t) \text{ lorsque } n \to \infty$$

. Pour tout $t \in J$, où v et w sont respectivement les solutions minimale et maximale du problème(2.1) et $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ dans J.

Preuve. Pour tout $\eta \in C_{1-\alpha}(J,\mathbb{R})$ tel que $\eta \in [v_0, w_0]$. Nous considérons le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u(t) = f(t,\eta(t),\eta(\theta(t))) + M[\eta(t) - u(t)] + N[\eta(\theta(t)) - u(\theta(t))] \\ \\ u(0) = \displaystyle\int_0^T u(s)\mathrm{d}s + d \end{cases} \tag{2.11}$$

par le corollaire 2.1, le problème linéaire (2.11) admet une unique solution $u(t)$.
Par la suite, nous définissons les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}v_{n+1}(t) = f(t,v_n(t),v_n(\theta(t))) - M[v_{n+1}(t) - v_n(t)] - N[v_{n+1}(\theta(t)) - v_n(\theta(t))] \\ v_{n+1}(0) = \displaystyle\int_0^T v_n(s)\mathrm{d}s + d, \end{cases} \tag{2.12}$$

et

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}w_{n+1}(t) = f(t,w_n(t),w_n(\theta(t))) - M[w_{n+1}(t) - w_n(t)] - N[w_{n+1}(\theta(t)) - w_n(\theta(t))] \\ w_{n+1}(0) = \displaystyle\int_0^T w_n(s)ds + d. \end{cases} \tag{2.13}$$

L'existence des solutions v_{n+1} et w_{n+1} des problèmes respectifs (2.12) et (2.13) découle de ce qui précède (Thm 2.1 et corollaire 2.1).
Maintenant, on va montrer que les suites v_n et w_n sont monotones. Pour cela, on va utiliser le raisonnement par récurrence.
Prenons n=0 dans (2.12) et (2.13) nous obtenons

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}v_1(t) + Mv_1(t) + Nv_1(\theta(t)) = f(t,v_0(t),v_0(\theta(t))) + Mv_0(t) + Nv_0(\theta(t)),\ n \in \mathbb{N} \\ v_1(0) = \displaystyle\int_0^T v_0(s)ds + d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}w_1(t) + Mw_1(t) + Nw_1(\theta(t)) = f(t,w_0(t),w_0(\theta(t))) + Mw_0(t) + Nw_0(\theta(t)),\ n \in \mathbb{N} \\ w_1(0) = \displaystyle\int_0^T w_0(s)ds + d. \end{cases}$$

Comme $v_0(t)$ et $w_0(t)$ sont dans $C_{1-\alpha}(\mathbb{R}, J)$, l'éxistence de la solution $v_1(t)$ et $w_1(t)$ est évidente.
Montrons que $v_0(t) \leq v_1(t) \leq w_1(t) \leq w_0(t)$. Posons $p_1(t) = v_1(t) - v_0(t)$, puisque $v_0(t)$

est la solution minimale du problème (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p_1(t) &= D_{0+}^{\alpha}v_1(t) - D_{0+}^{\alpha}v_0(t) \\ &\geq f(t, v_0(t), v_0(\theta(t))) - f(t, v_0(t), v_0(\theta(t))) - M[v_1(t) - v_0(t)] \\ &\quad -N[v_1(\theta(t)) - v_0(\theta(t))] \\ &\geq -Mp_1(t) - Np_1(\theta(t)). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} p_1(0) = v_1(0) - v_0(0) &\geq \int_0^T v_0(s)ds + d - d - \int_0^T v_0(s)ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par le lemme2.4, $p_1(t) \geq 0$ c-à-d $v_1(t) - v_0(t) \geq 0$ donc $v_0(t) \leq v_1(t)$ dans J.
De même, posons $p_2(t) = w_0(t) - w_1(t)$

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p_2(t) &= D_{0+}^{\alpha}w_0(t) - D_{0+}^{\alpha}w_1(t) \\ &\geq f(t, w_0(t), w_0(\theta(t))) - f(t, w_0(t), w_0(\theta(t))) - M[w_0(t) - w_1(t)] \\ &\quad -N[w_0(\theta(t)) - w_1(\theta(t))] \\ &\geq -Mp_2(t) - Np_2(\theta(t)), \end{aligned}$$

avec

$$p_2(0) = w_0(0) - w_1(0) \geq \int_0^T w_0(s)\mathrm{d}s - \int_0^T w_0(s)\mathrm{d}s = 0,$$

alors

$$D_{0+}^{\alpha}p_2(t) \geq -Mp_2(t) - Np_2(\theta(t)) \; avec \; p_2(0) \geq 0.$$

En appliquant le lemme2.4, on obtient $w_0(t) - w_1(t) \geq 0$ donc $w_0(t) \geq w_1(t)$ dans J.
En posant $p_3(t) = w_1(t) - v_1(t)$ et par hypothèse (H3) on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p_3(t) &= D_{0+}^{\alpha}w_1(t) - D_{0+}^{\alpha}v_1(t) \\ &= f(t, w_0(t), w_0(\theta(t))) - M[w_1(t) - w_0(t)] - N[w_1(\theta(t)) - w_0(\theta(t))] \\ &\quad -f(t, v_0(t), v_0(\theta(t))) + M[v_1(t) - v_0(t)] + N[v_1(\theta(t)) - v_0(\theta(t))] \\ &\geq -Mp_3(t) - Np_3(\theta(t)). \end{aligned}$$

Avec $p_3(0) = w_1(0) - v_1(0) = \displaystyle\int_0^T w_0(s)ds - \int_0^T v_0(s)ds$, tant que $v_0(t) \leq w_0(t)$ on a

$$\int_0^T w_0(s)ds \geq \int_0^T v_0(s)ds,$$

ce qui implique $p_3(0) \geq 0$. Par le lemme2.4 on a $v_1(t) \leq w_1(t)$.

Pour n= 0 on a

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq w_1(t) \leq w_0(t).$$

Supposons pour $n = k > 1$ les inégalités suivantes sont vraies

$$v_{k-1}(t) \leq v_k(t) \leq w_k(t) \leq w_{k-1}(t) \quad dans\ J, \tag{2.14}$$

et on montre pour n=k+1 les inégalités

$$v_k(t) \leq v_{k+1}(t) \leq w_{k+1}(t) \leq w_k(t)\ dans\ J.$$

Par le même raisonnement que précédement, on pose $p(t) = v_{k+1}(t) - v_k(t)$. On trouve

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}p(t) &= D^{\alpha}_{0+}v_{k+1}(t) - D^{\alpha}_{0+}v_k(t) \\ &= f(t, v_k(t), v_k(\theta(t))) - M[v_{k+1}(t) - v_k(t)] - N[v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))] \\ &\quad -f(t, v_{k-1}(t), v_{k-1}(\theta(t))) + M[v_k(t) - v_{k-1}(t)] + N[v_k(\theta(t)) - v_{k-1}(\theta(t))] \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H3), on trouve

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+}p(t) &\geq -M[v_{k+1}(t) - v_k(t)] - N[v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))] \\ &\geq -Mp(t) - Np(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p(0) &= v_{k+1}(0) - v_k(0) \\ &= \int_0^T v_k(s)ds - \int_0^T v_{k-1}(s)ds \\ &= \int_0^T (v_k(s) - v_{k-1})ds \\ &\geq \int_0^T (v_k(s) - v_k)ds = 0. \end{aligned}$$

Par le lemme2.4, on obtient $p(t) \geq 0$ impliquant $v_k(t) \leq v_{k+1}(t)$ pour tout $t \in J$.

De même on montre que

$$v_{k+1}(t) \leq w_{k+1}(t) \text{ et } w_{k+1}(t) \leq w_k(t).$$

Alors, les suites $v_n(t)$ et $w_n(t)$ sont monotones, dans $[v_0, w_0]$ avec

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \ldots \leq v_k(t) \leq w_k(t) \leq \ldots \leq w_1(t) \leq w_0(t),$$

et uniformément bornées. De plus, vu (2.12) et (2.13) les suites $(D^\alpha v_n)$ et $(D^\alpha w_n)$ sont aussi uniformément bornées dans J.
Appliquons le lemme 2.3, nous concluons que les suites (v_n) et (w_n) sont equicontinues. Par le théorème d'Arzela-Ascoli les suites (v_n) et (w_n) sont uniformément convergentes respectivement vers v et w dans J.
Vérifions que $v(t)$ et $w(t)$ sont solutions du problème (2.1), on a

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &= v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} \{ f(t, v_{n+1}(t), v_{n+1}(\theta(t))) \\ &\quad - M[v_{n+1}(t) - v_n(t)] - N[v_{n+1}(\theta(t)) - v_n(\theta(t))] \} \mathrm{d}s, \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

par passage à la limite et$f$ continue, on trouve

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), v(\theta(s))) ds, \ n \in \mathbb{N}$$

par le lemme 2.2 $v(t)$ est une solution de (2.1).
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} w_{n+1}(t) &= w_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} \{ f(t, w_{n+1}(t), w_{n+1}(\theta(t))) \\ &\quad - M[w_{n+1}(t) - w_n(t)] - N[w_{n+1}(\theta(t)) - w_n(\theta(t))] \} \mathrm{d}s, \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

par passage à la limite et f continue, on trouve

$$w(t) = w_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} f(s, w(s), w(\theta(s))) ds, \ n \in \mathbb{N}$$

par le lemme 2.2 $w(t)$ est une solution de (2.1).
Maintenant, montrons que $v(t)$ est $w(t)$ sont respectivement les solutions minimale et maximale de (2.1). Soit $u(t)$ une autre solution différente de $v(t)$ et $w(t)$. Alors, il existe un entier positif k tel que $v_k \leq u \leq w_k$ dans J. Posons $p(t) = u(t) - v_{k+1}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha p(t) &= D_{0+}^\alpha u(t) - D_{0+}^\alpha v_{k+1}(t) \\ &= f(t, u(t), u(\theta(t))) - f(t, v_k(t), v_k(\theta(t))) + M[v_{k+1}(t) - v_k(t)] \\ &\quad + N[v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))]. \end{aligned}$$

Par hypothèse (H3),

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p(t) &\geq -M\left(u(t)-v_{k+1}(t)\right)-N\left(u(\theta(t)-v_{k+1}(\theta(t))\right) \\ &\geq -Mp(t)-Np(\theta(t)), \end{aligned}$$

et $p(0)=u(0)-v_{k+1}(0)=\int_0^T (u(s)-v_k(s))\ ds \geq 0$.
Par le lemme 2.4, on obtient $p(t)\geq 0$ donc $u(t)\leq v_{k+1}(t)$ pour tout k dans J. De la même manière, on montre que $u(t)\leq w_{k+1}(t)$ pour tout k dans J. Puisque $v_0(t)\leq u(t)\leq w_0(t)$ dans J. Par récurrence, il vient que $v_k\leq u(t)$ et $u(t)\leq w_k$ pour tout k. Par conséquent, $v_k\leq u(t)\leq w_k$ le même raisonnement de $v_0(t)\leq u(t)$ on montre que $u(t)\leq w_0(t)$ dans J. Pour $k\to\infty$, on obtient $v(t)\leq u(t)\leq w(t)$ dans J. Alors, $v(t)$ et $w(t)$ sont les solutions minimale et maximale du problème (2.1). ■

2.4.2 Unicité de la solution

Théorème 2.3 *[8] Supposons que*

(i) les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées,

(ii) il existe deux constantes positives M, N et tel que la fonction f satisfait la condition

$$f(t,u_1,u_2)-f(t,v_1,v_2)\leq M(u_1-v_1)+N(u_2-v_2), \tag{2.15}$$

pour $v_0(t)\leq v_1\leq u_1\leq w_0(t)$, $v_0(\theta(t))\leq v_2\leq u_2\leq w_0(\theta(t))$.

Alors le problème (2.1) *admet une solution unique.*

Preuve. Puisque $v(t)\leq w(t)$ dans J, il suffit de montrer que $v(t)\geq w(t)$ dans J.
Posons $p(t)=w(t)-v(t)$, on a

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p(t) &= D_{0+}^{\alpha}w(t)-D_{0+}^{\alpha}v(t) \\ &= f(t,w(t),w(\theta(t))-f(t,v(t),v(\theta(t)), \end{aligned} \tag{2.16}$$

par hypothèses (ii)

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}p(t) &\leq -M[w(t)-v(t)]-N[w(\theta(t))-v(\theta(t))] \\ &= -Mp(t)-Np(\theta(t)), \end{aligned}$$

et

$$D_{0+}^{\alpha}p(t)\leq Mp(0)-Np(\theta(0))\leq -Mp(0)-Np(0),$$

donc

$$D_{0+}^{\alpha}p(0) \leq -(M+N)p(0),$$

ce qui donne

$$\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)T^{\alpha}} + (M+N)\right)p(0) \leq 0.$$

Alors, $p(0) \leq 0$ puisque $\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)T^{\alpha}} + (M+N)\right) > 0$.

Par le lemme 2.4, $p(t) \leq 0$ ce qui implique $v(t) \geq w(t)$ alors $v(t) = w(t)$.
D'où l'unicité de la solution du problème (2.1). ■

Chapter 3

Méthode monotone d'un problème de Reimann-Liouville avec deux conditions constantes aux limites

Dans ce chapitre, on applique la méthode monotone pour établir l'existence de solutions pour un problème fractionnaire de Reimann-Liouville avec deux conditions constantes aux limites .

3.1 Position du problème

Soit le problème

$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))), \qquad t \in J = (a, b) \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha} u(t)_{|t=a} = A, \quad u(b) = B, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\theta \in C(J, J)$, $1 < \alpha < 2$ et $\theta(t) \leq t$, $t \in J$.
D_{a+}^{α}, $I_{a+}^{2-\alpha}$ sont respectivement la dérivée et l'intégrale au sens de Reimann-liouville d'ordre fractionnaire α et $2 - \alpha$. A, B $\in \mathbb{R}$.

3.2 Définitions et lemmes

Nous présentons quelques définitions et lemmes de base utiles pour la suite du travail.

On considère l'espace

$$C_{2-\alpha}(J)=\{x : x\in C(a,b],(t-a)^{2-\alpha}x(t)\in C(J),1<\alpha<2\}. \tag{3.2}$$

Définition 3.1 [20] Une fonction $y_0(t)\in C_{2-\alpha}(J)$ est dite sous solution du problème (3.1), si elle satisfait

$$\begin{cases} {}^{L}D_{a+}^{\alpha}y_0(t)\geq f(t,y_0(t),y_0(\theta(t))), \quad t\in(a,b), \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha}y_0(t)_{|t=a}\leq A, \quad y_0(b)\leq B. \end{cases} \tag{3.3}$$

De façon analogue, la fonction $z_0(t)\in C_{2-\alpha}(J)$ est dite sur solution du problème (3.1), si elle satisfait

$$\begin{cases} {}^{L}D_{a+}^{\alpha}z_0(t)\leq f(t,z_0(t),z_0(\theta(t))), \quad t\in(a,b), \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha}z_0(t)_{|t=a}\geq A, \quad z_0(b)\geq B. \end{cases} \tag{3.4}$$

Lemme 3.1 *[11] Soit $\alpha>0$, $m=[\alpha]+1$ et soit $x_{m-\alpha}(t)=I_{a+}^{m-\alpha}x(t)$ l'intégrale fractionnaire d'ordre $m-\alpha$. Si $x(t)\in L^1(a,b)$ et $x_{m-\alpha}(t)\in AC^m(J)$, alors nous avons l'égalité suivante*

$$(I_{a+}^{\alpha})D_{a+}^{\alpha}x(t)=x(t)-\sum_{k=1}^{m}\frac{x_{m-\alpha}^{(m-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k}.$$

Pour $1<\alpha<2$ et $u\in C_{2-\alpha}(J)$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}I_{a+}^{2-\alpha}u(t)_{|t=a}=\lim_{t\to a}[(t-a)^{2-\alpha}u(t)]. \tag{3.5}$$

Lemme 3.2 *On considère le problème linéaire suivant*

$$\begin{cases} {}^{L}D_{a+}^{\alpha}u(t)+Mu(t)+Nu(\theta(t))=\sigma(t), \qquad t\in(a,b), \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha}u(t)_{|t=a}=A, \quad u(b)=B, \end{cases} \tag{3.6}$$

où M, N sont constantes et $\sigma\in C_{2-\alpha}(J)$.
Le problème de (3.6) a la représentation intégrale de la solution

$$\begin{aligned} u(t) &= B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}+A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} \\ &\quad -\int_a^b G(t,s)\big(\sigma(s)-Mu(s)-Nu(\theta(s))\big)ds, \end{aligned}$$

avec $G(t,s)$ *est la fonction de Green donnée par*

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & a \le s \le t \le b, \\ \\ \dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}. & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors $u \in C_{2-\alpha}(J)$ *est solution du problème* (3.1), *si l'équation intégrale suivante est vérifiée*

$$u(t) = B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \int_a^b G(t,s)f(s,u(s),u(\theta(s)))ds. \tag{3.8}$$

Preuve. Appliquons l'opérateur I^α aux deux membres de l'équation (3.6) on trouve

$$I^\alpha D^\alpha_{a+}u(t) = I^\alpha\big(\sigma(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t))\big)$$

Par (1.13) on obtient

$$u(t) - \sum_{j=1}^{2} \frac{D^{\alpha-j}u(t)_{|t=a}}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\alpha-j} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds,$$

posons $D^{\alpha-j}u(t)_{|t=a} = b_j$, il vient que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\quad \times\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds, \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec $I^{2-\alpha}_{a+}u(t)_{|t=a} = A$, et

$$u(b) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}(b-a)^{\alpha-1} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}(b-a)^{\alpha-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds,$$

$$B = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}(b-a)^{\alpha-1} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}(b-a)^{\alpha-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds,$$

il suit que

$$b_1 = B\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{b_2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds. \tag{3.10}$$

On remplace (3.10) dans (3.9) on obtient,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(B\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{b_2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \\ &\quad \times \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\{\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\}ds\Big) + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\big)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{B(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{b_2(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds) + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds. \end{aligned}$$

Comme $I^{2-\alpha}u(t)_{|t=a} = A$, par (3.5) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}A &= \lim_{t\to a}[(t-a)^{2-\alpha}u(t)] \\ &= \lim_{t\to a}\frac{B(t-a)}{(b-a)^{\alpha-1}} - \lim_{t\to a}\frac{b_2(t-a)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \lim_{t\to a}\frac{(t-a)}{(b-a)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)} \\ &\quad + \lim_{t\to a}\frac{(t-a)^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds \\ A &= b_2. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{B(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{A(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} + \frac{A}{\Gamma(\alpha-1)}(t-a)^{\alpha-2} \\ &\quad - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\Big(\sigma(s) - Mu(s) - Nu(\theta(s))\Big)ds, \end{aligned}$$

avec $G(t,s)$ la fonction de Green définie par

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & a\leq s\leq t\leq b\\ \\ \dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}. & a\leq t\leq s\leq b.\end{cases}$$

La solution de (3.1) est donnée alors sous la forme suivante

$$u(t)=B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}+A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}-\int_a^b G(t,s)f(s,u(s),u(\theta(s)))ds.$$

■

Lemme 3.3 *[9, 20] Soit G la fonction de Green définie par* (3.7)*(lemme 3.2), alors*

(1) $G(t,s)\geq 0$ *pour tout* $a\leq t,\ s\leq b$,

(2) $\max\limits_{t\in J}G(t,s)=G(s,s),\ s\in J$,

(3) $G(s,s)$ *a un unique maximum donné par*

$$\max_{s\in J}G(s,s)=G\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1},$$

(4) $\displaystyle\int_a^b G(t,s)ds\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha}$.

Lemme 3.4 *Supposons que M et N vérifient*

$$0\leq M+N<\frac{4^{\alpha-1}(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}, \tag{3.11}$$

alors le problème (3.6) *admet une unique solution.*

Preuve. On définit l'opérateur $T:C_{2-\alpha}(J)\to C_{2-\alpha}(J)$ par

$$\begin{aligned}(Tu)(t)\ &=\ B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}+A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}-\int_a^b G(t,s)\\ &\quad\times\Big(\sigma(s)-Mu(s)-Nu(\theta(s))\Big)ds.\end{aligned}$$

Montrons que l'opérateur T a un unique point fixe. Pour $u(t), v(t) \in C_{2-\alpha}(J)$ alors on a

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\|_{C_{2-\alpha}} &= \Big\| -\int_a^b G(t,s)(\sigma(s)-Mu(s)-Nu(\theta(s)))ds + \int_a^b G(t,s) \\
&\quad \times(\sigma(s)-Mv(s)-Nv(\theta(s)))ds\Big\|_{C_{2-\alpha}} \\
&= \Big\| \int_a^b G(t,s)(M(u(s)-v(s))+N(u(\theta(s))-v(\theta(s))))ds\Big\|_{C_{2-\alpha}} \\
&= \max_{t\in J}\Big\{(t-a)^{2-\alpha}\Big|\int_a^b G(t,s)(M(u(s)-v(s))+N(u(\theta(s)) \\
&\quad -v(\theta(s))))ds\Big|\Big\},
\end{aligned}$$

par le lemme 3.3 on a

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\|_{C_{2-\alpha}} &\leq \max_{t\in J}\big\{(t-a)^{2-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1}\int_a^b \big|M\big(u(s)-v(s)\big) \\
&\quad +N\big(u(\theta(s))-v(\theta(s))\big)\big|ds\big\},
\end{aligned}$$

on a $\theta(s)\leq s$ donc

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\|_{C_{2-\alpha}} &\leq \max_{t\in J}\{(t-a)^{2-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1}\int_a^b (M+N)|u(s)-v(s)|ds\} \\
&\leq \max_{t\in J}\{(t-a)^{2-\alpha}\frac{(M+N)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1}\int_a^b |u(s)-v(s)|ds\},
\end{aligned}$$

comme on a

$$\|u-v\|_{C_{2-\alpha}} = \max_{t\in J}\{(t-a)^{2-\alpha}|u(s)-v(s)|\},$$

c'est à dire

$$(t-a)^{\alpha-2}\|u-v\|_{C_{2-\alpha}} = \max_{t\in J}|u(s)-v(s)|.$$

On remplace dans ci-dessous

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\|_{C_{2-\alpha}} &\leq \max_{t\in J}(t-a)^{2-\alpha}\frac{(M+N)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1}\int_a^b (s-a)^{\alpha-2}ds\|u-v\|_{C_{2-\alpha}}, \\
&\leq \max_{t\in J}(t-a)^{2-\alpha}(M+N)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{\alpha-1}\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\|u-v\|_{C_{2-\alpha}}, \\
&\leq (M+N)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)4^{(\alpha-1)}(\alpha-1)}\|u-v\|_{C_{2-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq M + N < \dfrac{4^{\alpha-1}(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}$, T est un opérateur contractant dans $C_{2-\alpha}(J)$. Par le téorème1.4du point fixe de Banach le problème (3.6) a une unique solution. ■

3.3 Méthode itérative monotone

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solutions pour le problème (3.1) par la méthode itérative monotone.

3.3.1 Principe de comparaison

Nous établissons un résultat de principe de comparaison qui est l'outil crucial pour nos principaux résultats.

Lemme 3.5 *Soit $\theta \in C(J, J)$ où $\theta(t) \leq t$ dans J. Si $x \in C_{2-\alpha}(J)$ satisfait les relations suivantes*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}x(t) + Mx(t) + Nx(\theta(t)) \geq 0, \qquad t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}x(t)_{|t=a} \leq 0, \quad x(b) \leq 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

où M et N sont des constantes telles que

$$0 \leq M + N \leq \Gamma(\alpha)\frac{\alpha^{\alpha+1}(\alpha-1)^{1-\alpha}}{(b-a)^{\alpha+1}}, \tag{3.13}$$

alors, pour tout $t \in (a,b)$, $x(t) \leq 0$.

Preuve. Supposons qu' il existe $t \in (a,b)$ tel que $x(t) > 0$.
Soit $x(t^*) = \max\{x(t) : t \in (a,b)\} = \rho, \quad \rho > 0$. Par (3.12), il existe $q(t) \geq 0$ et $A^* \leq 0$, $B^* \leq 0$ tel que

$$\begin{cases} {}^{L}D^{\alpha}_{a+}x(t) + Mx(t) + Nx(\theta(t)) = q(t), \qquad t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}x(t)_{|t=a} = A^*, \quad x(b) = B^*, \end{cases}$$

par le lemme 3.2 et lemme 3.3 on a

$$\begin{aligned} x(t) &= B^*\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + A^*\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - A^*\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} \\ &\quad - \int_a^b G(t,s)(q(s) - Mx(s) - Nx(\theta(s)))ds, \end{aligned}$$

comme $x(t) > 0$, $q(t) \geq 0$ et $A^* \leq 0$, $B^* \leq 0$ et le lemme 3.3 alors,

$$\begin{aligned} x(t) &\leq \int_a^b G(t,s)(-q(s) + Mx(s) + Nx(\theta(s)))ds \\ &\leq \int_a^b G(t,s)(Mx(s) + Nx(\theta(s)) - (D_{a+}^{\alpha}x(s) + Mx(t) + Nx(\theta(s))))ds \\ &\leq \int_a^b G(t,s) - D_{a+}^{\alpha}x(s)ds, \end{aligned}$$

par (3.12) on a

$$-D_{a+}^{\alpha}x(s) \leq Mx(s) + Nx(\theta(s)),$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &\leq \int_a^b G(t,s)(Mx(s) + Nx(\theta(s))ds \\ &\leq M\int_a^b G(t,s)x(s)ds + N\int_a^b G(t,s)x(\theta(s))ds, \end{aligned}$$

par le lemme 3.3 on obtient

$$x(t) \leq M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha}\int_a^b x(s)ds + N\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha}\int_a^b x(\theta(s))ds,$$

comme on a $\theta(t) \leq t$ et $\int_a^b x(\theta(s))ds \leq \rho(b-a)$ alors,

$$x(t) \leq \frac{(N+M)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha+1}\rho,$$

soit $t = t^*$ et par (3.13) on a

$$\rho \leq \frac{(N+M)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha+1}\rho,$$

donc

$$\frac{(N+M)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha+1} \geq \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

contradiction avec le fait que

$$\frac{(N+M)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}(b-a)^{\alpha+1} < 1.$$

Par conséquent $x(t) \leq 0$, $\forall t \in (a,b)$. ■

3.3.2 Existence de solutions

Dans cette section, nous prouvons l'existence des solutions extremums du problème (3.1) par la méthode monotone. Tout d'abord, on considère les hypothèses suivantes

(H1) Les fonctions y_0 et z_0 dans $C_{2-\alpha}(J,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solution du problème (3.1) avec $y_0(t) \leq z_0(t)$ dans J.

(H2) Ils existe deux constantes positives M et N, tel que la fonction f satisfait la condition suivante
$$f(t,u_1,u_2) - f(t,v_1,v_2) \leq -M\left(u_1 - v_1\right) - N\left(u_2 - v_2\right), \tag{3.14}$$
$$\text{pour } y_0(t) \leq v_1 \leq u_1 \leq z_0(t),\ y_0(\theta(t)) \leq v_2 \leq u_2 \leq z_0(\theta(t)).$$

(H3) Ils existe deux constantes positives M et N, tel que la fonction f satisfait la condition suivante
$$|f(t,u_n(t),u_n(\theta(t)))| \leq (M+N). \tag{3.15}$$

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées et que* $\eta(t),\zeta(t) \in C_{2-\alpha}(J)$ *tel que*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}\eta(t) + M\eta(t) + N\eta(\theta(t)) = f(t,y_0(t),y_0(\theta(t))) + My_0(t) + Ny_0(\theta(t)), & t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}\eta(t)_{|t=a} = A, \quad \eta(b) = B, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}\zeta(t) + M\zeta(t) + N\zeta(\theta(t)) = f(t,z_0(t),z_0(\theta(t))) + Mz_0(t) + Nz_0(\theta(t)), & t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}\zeta(t)_{|t=a} = A, \quad \zeta(b) = B. \end{cases} \tag{3.17}$$

Alors

$$y_0(t) \leq \eta(t) \leq \zeta(t) \leq z_0(t), \qquad y_0(\theta(t)) \leq \eta(\theta(t)) \leq \zeta(\theta(t)) \leq z_0(\theta(t)),$$

et $\zeta(t)$, $\eta(t)$ *sont respectivement sur et sous solution de* (3.1).

Preuve. Par le lemme 3.4, $\zeta(t)$ et $\eta(t)$ sont bien définies. Soit $m(t) = y_0(t) - \eta(t)$, alors

$$\begin{cases} {}^{L}D^{\alpha}_{a+}m(t) + Mm(t) + Nm(\theta(t)) = D^{\alpha}_{a+}y_0(t) - D^{\alpha}_{a+}\eta(t) \\ \qquad\qquad +M(y_0(t) - \eta(t)) + N(y_0(\theta(t)) - \eta(\theta(t))), \quad t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}m(t)_{|t=a} \leq 0, \quad m(b) \leq 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

par (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}m(t) &\geq f(t, y_0(t), y_0(\theta(t))) - f(t, y_0(t), y_0(\theta(t))) \\ &\quad -M(y_0(t) - \eta(t)) - N(y_0(\theta(t)) - \eta(\theta(t))) \\ &\geq -M(y_0(t) - \eta(t)) - N(y_0(\theta(t)) - \eta(\theta(t))) \\ &\geq -Mm(t) - Nm(\theta(t)), \end{aligned}$$

par conséquent $D^{\alpha}_{a+}m(t) + Mm(t) + Nm(\theta(t)) \geq 0$, avec
$I^{2-\alpha}m(t)_{|t=a} = I^{2-\alpha}y_0(t) - I^{2-\alpha}\eta(t) \leq 0$ et $m(b) = y_0(b) - \eta(b) \leq B - B = 0$.
Par le lemme 3.5, on a $m(t) \leq 0$, d'où $y_0(t) \leq \eta(t)$, $\forall t \in (a,b)$. Par le même argument utilisant la propriété de sur solution du problème (3.1) on trouve $\zeta(t) \leq z_0(t)$, $\forall t \in (a,b)$. Maintenant, posons $w(t) = \eta(t) - \zeta(t)$, on obtient

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}w(t) + Mw(t) + Nw(\theta(t)) = D^{\alpha}_{a+}\eta(t) - D^{\alpha}_{a+}\zeta(t) \\ \qquad\qquad +M(\eta(t) - \zeta(t)) + N(\eta(\theta(t)) - \eta(\theta(t))), \qquad t \in (a,b), \\ \\ I^{2-\alpha}w(t)_{|t=a} \leq 0, \quad w(b) \leq 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

par hypothèse (H2), on trouve

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}w(t) &\geq -M(\eta(t) - \zeta(t)) - N(\eta(\theta(t)) - \zeta(\theta(t))) \\ &\geq -Mw(t) - Nw(\theta(t)), \end{aligned}$$

$I^{2-\alpha}w(t)_{|t=a} \leq 0$ et $m(b) = \eta(b) - \zeta(b) \leq B - B = 0$, Alors

$$D^{\alpha}_{a+}w(t) + Mw(t) + Nw(\theta(t)) \geq 0$$

avec $I^{2-\alpha}w(t)_{|t=a} \leq 0$ et $m(b) \leq 0$, par le lemme 3.5 on a $w(t) \leq 0$, d'où

$$\eta(t) \leq \zeta(t), \quad \forall t \in (a,b).$$

Alors

$$y_0(t) \leq \eta(t) \leq \zeta(t) \leq z_0(t) \text{ et } y_0(\theta(t)) \leq \eta(\theta(t)) \leq \zeta(\theta(t)) \leq z_0(\theta(t)).$$

Ensuite, montrons que $\eta(t)$ est sous solution du problème (3.1).

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}\eta(t) &= f(t, y_0(t), y_0(\theta(t))) + My_0(t) + Ny_0(\theta(t)) \\ &\quad -M\eta(t) - N\eta(\theta(t)) \\ &= f(t, y_0(t), y_0(\theta(t))) + My_0(t) + Ny_0(\theta(t)) \\ &\quad -M\eta(t) - N\eta(\theta(t)) + f(t, \eta(t), \eta(\theta(t))) - f(t, \eta(t), \eta(\theta(t))), \end{aligned}$$

par l'hypothèse (H2), on a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}\eta(t) &\geq +My_0(t) + Ny_0(\theta(t)) - M\eta(t) - N\eta(\theta(t)) - M(y_0(t) - \eta(t)) \\ &\quad -N(y_0(\theta(t)) - \eta(\theta(t))) \\ &\geq f(t, \eta(t), \eta(\theta(t))), \end{aligned}$$

de plus, par $I^{2-\alpha}\eta(t)_{|t=a} = A$, $\eta(b) = B$ et la définition de sous solution , on obtient que $\eta(t)$ est une sous solution de (3.1). Par le même raisonnement $\zeta(t)$ est une sur solution du problème(3.1). ■

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), il existe deux suites monotones* $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{v_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $C_{2-\alpha}(J)$ *tel que* $\{u_n(t)\} \to u(t)$ *et* $\{v_n(t)\} \to v(t)$ *uniformément dans* $[y_0, z_0]$ *quand* $n \to \infty$ *et* $u(t)$, $v(t)$ *sont respectivement les solutions minimale et maximale du problème (3.1) dans* $[y_0, z_0]$.

Preuve. Pour toute suite $u_n(t)$, $v_n(t) \in C_{2-\alpha}(J)$, nous définissons les suites $\{u_{n+1}(t)\}$ et $\{v_{n+1}(t)\}$ dans $[y_0, z_0]$ vérifiant les équations suivantes

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}u_{n+1}(t) = f(t, u_n(t), u_n(\theta(t))) - M(u_{n+1}(t) - u_n(t)) - N(u_{n+1}(\theta(t)) - u_n(\theta(t))), \\ \\ I^{2-\alpha}_{a+}u_{n+1}(t)_{|t=a} = A, \quad u_{n+1}(b) = B, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}v_{n+1}(t) = f(t, v_n(t), v_n(\theta(t))) - M(v_{n+1}(t) - v_n(t)) - N(v_{n+1}(\theta(t)) - v_n(\theta(t))), \\ \\ I^{2-\alpha}_{a+}v_{n+1}(t)_{|t=a} = A, \quad v_{n+1}(b) = B, \end{cases} \tag{3.21}$$

par le lemme 3.4 , $\{u_{n+1}(t)\}$ et $\{v_{n+1}(t)\}$ sont bien définies.

Maintenant, utilisons le téorème 3.1 et le raisonnement par récurence pour montrer la monotonie des deux suites, tel que

$$y_0(t) = u_0(t) \leq u_1(t) \leq \cdots \leq \cdots \leq u_n(t) \leq \cdots \leq v_n(t) \leq v_1(t) \leq v_0(t) = z_0(t).$$

Pour n=0, on a

$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha} u_1(t) = f(t, u_0(t), u_0(\theta(t))) - M(u_1(t) - u_0(t)) - N(u_1(\theta(t)) - u_0(\theta(t))), \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha} u_1(t)_{|t=a} = A, \quad u_1(b) = B, \end{cases}$$
$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha} v_1(t) = f(t, v_0(t), v_0(\theta(t))) - M(v_1(t) - v_0(t)) - N(v_1(\theta(t)) - v_0(\theta(t))), \\ \\ I_{a+}^{2-\alpha} v_1(t)_{|t=a} = A, \quad v_1(b) = B. \end{cases}$$

Comme $u_0(t)$ et $v_0(t)$ sont dans $C_{2-\alpha}(J)$, l'existence de la solution $u_1(t)$ et $v_1(t)$ est évidente.
Maintenant, nous prouvons que

$$y_0 = u_0(t) \leq u_1(t) \leq v_1(t) \leq v_0(t) = z_0(t), \quad pour \quad t \in J.$$

Posons $p_1(t) = u_0(t) - u_1(t)$, appliquons l'opérateur D_{a+}^{α}, on obtient

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} p_1(t) &= D_{a+}^{\alpha}(u_0(t) - u_1(t)) \\ &= D_{a+}^{\alpha} u_0(t) - D_{a+}^{\alpha} u_1(t), \end{aligned}$$

par (3.3) on a

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} p_1(t) &\geq f(t, u_0(t), u_0(\theta(t))) - f(t, u_0(t), u_0(\theta(t))) + M(u_1(t) - u_0(t)) \\ &\quad + N(u_1(\theta(t)) - u_0(\theta(t))) \\ &\geq -M(u_0(t) - u_1(t)) - N(u_0(\theta(t)) - u_1(\theta(t))) \\ &\geq -Mp_1(t) - Np_1(\theta(t)). \end{aligned}$$

Par conséquent $D_{a+}^{\alpha} p_1(t) + Mp_1(t) + Np_1(\theta(t)) \geq 0$, avec $I_{a+}^{2-\alpha} p_1(t)_{|t=a} \leq 0$
et $p_1(b) = u_0(b) - u_1(b) \leq B - B = 0$. Par le lemme 3.5, on obtient $p_1(t) \leq 0$, soit $u_0(t) - u_1(t) \leq 0$, d'où $u_0(t) \leq u_1(t)$ pour tout $t \in J$. Par le même raisonnement on trouve $v_1(t) \leq v_0(t)$. Reste à montrer que $u_1(t) \leq v_1(t)$. Posons $p_2(t) = u_1(t) - v_1(t)$,

appliquons l'opérateur D^{α}_{a+}, on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_2(t) &= D^{\alpha}_{a+}(u_1(t)-v_1(t)) \\
&= D^{\alpha}_{a+}u_1(t)-D^{\alpha}_{a+}v_1(t) \\
&= f(t,u_0(t),u_0(\theta(t)))-M(u_1(t)-u_0(t))-N(u_1(\theta(t))-u_0(\theta(t))) \\
&\quad -f(t,v_0(t),v_0(\theta(t)))+M(v_1(t)-v_0(t))+N(v_1(\theta(t))-v_0(\theta(t))),
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (H2), il suit que

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_2(t) &\geq -M(u_0(t)-v_0(t))-N(u_0(\theta(t))-v_0(\theta(t)))-M(u_1(t)-u_0(t)) \\
&\quad -N(u_1(\theta(t))-u_0(\theta(t)))+M(v_1(t)-v_0(t))+N(v_1(\theta(t))-v_0(\theta(t))) \\
&\geq -M(u_1(t)-v_1(t))-N(u_1(\theta(t))-v_1(\theta(t))) \\
&\geq -Mp_2(t)-Np_2(\theta(t)).
\end{aligned}$$

Par conséquent $D^{\alpha}_{a+}p_2(t)+Mp_2(t)+Np_2(\theta(t)) \geq 0$ avec $p_2(b)=u_1(b)-v_1(b)\leq 0$ et $I^{2-\alpha}_{a+}p_2(t)_{|t=a}\leq 0$, Par le lemme 3.5 $p_2(t)\leq 0$, soit $u_1(t)-v_1(t)\leq 0$ alors $u_1(t)\leq v_1(t)$ pour tout $t\in J$.
Pour $n=k>1$, supposons que les inégalités suivantes sont vraies

$$u_{k-1}(t)\leq u_k(t)\leq v_k(t)\leq v_{k-1}(t), t\in J, \tag{3.22}$$

et on montre pour $n=k+1$ les inégalités

$$u_k(t)\leq u_{k+1}(t)\leq v_{k+1}(t)\leq v_k(t), t\in J. \tag{3.23}$$

Posons $p_3(t)=u_k(t)-u_{k+1}(t)$, appliquons l'opérateur D^{α}_{a+}, on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_3(t) &= D^{\alpha}_{a+}(u_k(t)-u_{k+1}(t)) \\
&= D^{\alpha}_{a+}u_k(t)-D^{\alpha}_{a+}u_{k+1}(t) \\
&= f(t,u_{k-1}(t),u_{k-1}(\theta(t))-M(u_k(t)-u_{k-1}(t))-N(u_k(\theta(t))-u_{k-1}(\theta(t))) \\
&\quad -f(t,u_k(t),u_k(\theta(t)))+M(u_{k+1}(t)-u_k(t))+N(u_{k+1}(\theta(t))-u_k(\theta(t))),
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (H2), il suit que

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_3(t) &\geq -M(u_{k-1}(t)-u_k(t))-N(u_{k-1}(t)-u_k(t))-M(u_k(t)-u_{k-1}(t)) \\
&\quad -N(u_k(\theta(t))-u_{k-1}(\theta(t)))+M(u_{k+1}(\theta(t))-u_k(\theta(t))) \\
&\quad +N(u_{k+1}(\theta(t))-u_k(\theta(t))) \\
&\geq -M(u_k(t)-u_{k+1}(t))-N(u_k(\theta(t))-u_{k+1}(\theta(t))) \\
&\geq -Mp_3(t)-Np_3(\theta(t)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $D^{\alpha}_{a+}p_3(t) + Mp_3(t) + Np_3(\theta(t)) \geq 0$ avec $p_3(b) = u_k(b) - u_{k+1}(b) = 0$ et $I^{2-\alpha}_{a+}p_3(t)_{|t=a} = 0$.
Par le lemme 3.5 $p_3(t) \geq 0$, soit $u_k(t) \leq u_{k+1}(t)$ pour tout $t \in J$. De même on trouve $v_k(t) \leq v_{k+1}(t)$ pour tout $t \in J$.

Posons $p_4(t) = v_k(t) - v_{k+1}(t)$, appliquons l'opérateur D^{α}_{a+}, on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_4(t) &= D^{\alpha}_{a+}(v_k(t) - v_{k+1}(t)) \\
&= D^{\alpha}_{a+}v_k(t) - D^{\alpha}_{a+}v_{k+1}(t) \\
&= f(t, v_{k-1}(t), v_{k-1}(\theta(t)) - M(v_k(t) - v_{k-1}(t)) - N(v_k(\theta(t)) - v_{k-1}(\theta(t))) \\
&\quad -f(t, v_k(t), v_k(\theta(t))) + M(v_{k+1}(t) - v_k(t)) + N(v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))),
\end{aligned}$$

par l' hypothèse (H2), il suit que

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}p_4(t) &\geq -M(v_k(t) - v_{k-1}(t)) - N(v_k(t) - v_{k-1}(t)) - M(v_k(t) - v_{k-1}(t)) \\
&\quad -N(v_k(\theta(t)) - v_{k-1}(\theta(t))) + M(v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))) \\
&\quad +N(v_{k+1}(\theta(t)) - v_k(\theta(t))) \\
&\geq -M(v_k(t) - v_{k+1}(t)) - N(v_k(\theta(t)) - v_{k+1}(\theta(t))) \\
&\geq -Mp_4(t) - Np_4(\theta(t)).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$D^{\alpha}_{a+}p_4(t) + Mp_4(t) + Np_4(\theta(t)) \geq 0$$

avec $p_4(b) = v_k(b) - v_{k+1}(b) = 0$ et $I^{2-\alpha}_{a+}p_4(t)_{|t=a} = 0$. Par le lemme 3.5 $p_4(t) \leq 0$, soit $v_k(t) \leq v_{k+1}(t)$, pour tout $t \in J$. Par conséquent, les suites $u_n(t)$ et $v_n(t)$ sont monotones dans $[y_0, z_0]$ avec

$$y_0(t) = u_0(t) \leq u_1(t) \leq \cdots \leq \cdots \leq u_n(t) \leq \cdots \leq v_n(t) \leq v_1(t) \leq v_0(t) = z_0(t), \quad t \in J.$$

Dans ce qui suit on montre que les suites $u_n(t)$ et $v_n(t)$ sont uniformément convergentes.

Utilisons les équations intégrales suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = u_{n+1}(b)\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + I_{a+}^{2-\alpha}u_{n+1}(t)_{|t=a}\dfrac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - I_{a+}^{2-\alpha}u_{n+1}(t)_{|t=a} \\ \quad \times\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \displaystyle\int_a^b G(t,s)\Big(f(s,u_n(s),u_n(\theta(s))) + M(u_n(s)-u_{n+1}(s)) \\ \quad +N(u_n(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\Big)ds, \\ \\ v_{n+1}(t) = v_{n+1}(b)\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + I_{a+}^{2-\alpha}u_{n+1}(t)_{|t=a}\dfrac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - I_{a+}^{2-\alpha}u_{n+1}(t)_{|t=a} \\ \quad \times\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \displaystyle\int_a^b G(t,s)\big(f(s,v_n(s),v_n(\theta(s))) + M(v_n(s)-v_{n+1}(s)) \\ \quad +N(v_n(\theta(s)) - v_n(\theta(s)))\big)ds, \end{cases}$$

prouvons que les suites $u_n(t)$ et $v_n(t)$ sont bornées, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u_n(b)\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + \frac{I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\ &\quad -\frac{I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \int_a^b G(t,s)\big(f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) \\ &\quad +M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) + N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\big)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)| &= \Bigg|(t-a)^{2-\alpha} \times \Bigg(u_n(b)\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\ &\quad -I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \int_a^b G(t,s) \\ &\quad \times\big(f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) + M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) \\ &\quad +N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\big)ds\Bigg)\Bigg| \\ &= \Bigg|(u_n(b)\frac{(t-a)}{(b-a)^{\alpha-1}} + \frac{I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}}{\Gamma(\alpha-1)} - I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a} \\ &\quad \times\frac{(t-a)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} + (t-a)^{2-\alpha}\int_a^b G(t,s) \\ &\quad \times\big(-f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) - M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) \\ &\quad -N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\big)ds\Bigg|. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)| &\leq \Big|(u_n(b)\frac{(t-a)}{(b-a)^{\alpha-1}}\Big| + \Big|I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| \\
&+\Big| - I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}\Big| + (t-a)^{2-\alpha} \\
&\times \int_a^b \Big|G(t,s)\big(- f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) \\
&-M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) - N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\big)ds\Big|,
\end{aligned}
$$

par l'hypothèse (H3), on a

$$
|f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) + M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) + N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s))| \leq M+N,
$$

et comme $t \in [a,b]$, alors

$$
\begin{aligned}
|(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)| &\leq |u_n(b)(b-a)^{2-\alpha}| + 2\Big|I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| \\
&+(b-a)^{2-\alpha}\int_a^b |G(t,s)(M+N)|ds \\
&\leq |u_n(b)(b-a)^{2-\alpha}| + 2\Big|I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| \\
&+(b-a)^{2-\alpha}(M+N)\int_a^b |G(t,s)|ds,
\end{aligned}
$$

par le lemme 3.3 on obtient

$$
\begin{aligned}
|(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)| &\leq |B|(b-a)^{2-\alpha} + 2\Big|\frac{A}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| \\
&+(b-a)^2(M+N)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}.
\end{aligned}
$$

Donc $\{(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $C(J)$. Par le même raisonnement on a

$$
\begin{aligned}
|(t-a)^{2-\alpha}v_n(t)| &\leq \Big|(v_n(b)\frac{(t-a)}{(b-a)^{\alpha-1}}\Big| + \Big|I_{a+}^{2-\alpha}v_n(t)_{|t=a}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| + \Big| - I_{a+}^{2-\alpha}v_n(t)_{|t=a} \\
&\frac{(t-a)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}\Big| + (t-a)^{2-\alpha}\int_a^b \Big|G(t,s)\{-f(s,v_{n-1}(s),v_{n-1}(\theta(s))) \\
&-M(v_{n-1}(s)-v_n(s)) - N(v_{n-1}(\theta(s)) - v_n(\theta(s))\}ds\Big| \\
&\leq |v_n(b)(b-a)^{2-\alpha}| + 2\Big|I_{a+}^{2-\alpha}v_n(t)_{|t=a}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\Big| \\
&+(b-a)^2(M+N)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}.
\end{aligned}
$$

Donc $\{(t-a)^{2-\alpha}v_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $C(J)$.

Montrons que les suites $u_n(t)$ et $v_n(t)$ sont équicontinues. Pour $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, on a

$$\begin{aligned}
|(t_1-a)^{2-\alpha}u_n(t_1)-(t_2-a)^{2-\alpha}u_n(t_2)| &= \big|B\frac{(t_1-t_2)}{(b-a)^{\alpha-1}}+A\frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}\\
&\quad -\int_a^{t_1}(t_1-a)^{2-\alpha}G(t_1,s)f(s,u_n(s),u_n(\theta(s)))ds\\
&\quad +\int_a^{t_2}(t_2-a)^{2-\alpha}G(t_2,s)f(s,u_n(s),u_n(\theta(s)))ds\big|,
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (H3) on a

$$\begin{aligned}
|(t_1-a)^{2-\alpha}u_n(t_1)-(t_2-a)^{2-\alpha}u_n(t_2)| &\leq |B\frac{(t_1-t_2)}{(b-a)^{\alpha-1}}|+|A\frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}|\\
&\quad +(M+N)\big(|\int_a^{t_1}-(t_1-a)^{2-\alpha}G(t_1,s)ds\\
&\quad +\int_a^{t_2}(t_2-a)^{2-\alpha}G(t_2,s)ds|\big)\\
&\leq |B\frac{(t_1-t_2)}{(b-a)^{\alpha-1}}|+|A\frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}|+(M+N)\\
&\quad \big(|\int_a^{t_1}(t_2-a)^{2-\alpha}G(t_2,s)-(t_1-a)^{2-\alpha}G(t_1,s)ds\\
&\quad +\int_{t_1}^{t_2}(t_2-a)^{2-\alpha}G(t_2,s)ds|\big),
\end{aligned}$$

par le lemme 3.3 on obtient

$$\begin{aligned}
|(t_1-a)^{2-\alpha}u_n(t_1)-(t_2-a)^{2-\alpha}u_n(t_2)| &\leq |B\frac{(t_1-t_2)}{(b-a)^{\alpha-1}}|+|A\frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}|+(M+N)\\
&\quad \times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}}\big|((t_2-a)^{2-\alpha}(t_1-a)^{\alpha+1}-(t_1-a)^3)\\
&\quad +(t_2-a)^{2-\alpha}(t_2-t_1)^{\alpha+1}\big|.
\end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned}
|(t_1-a)^{2-\alpha}u_n(t_1)-(t_2-a)^{2-\alpha}u_n(t_2)| &\leq \Big(|\frac{B}{(b-a)^{\alpha-1}}|+|\frac{A}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}|\\
&\quad +(M+N)|\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}(b-a)^{2-\alpha}|\Big)\\
&\quad \times(t_2-t_1)^{\alpha+1}\\
&\quad <\epsilon.
\end{aligned}$$

Pour

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{\left|\frac{B}{(b-a)^{\alpha-1}}\right| + \left|\frac{A}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)}\right| + (M+N)\left|\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}(b-a)^{2-\alpha}\right|} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

les suites $\{(t-a)^{2-\alpha}u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{(t-a)^{2-\alpha}v_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien équicontinues dans $C(J)$. Par le théorème d'Arzela -Ascoli on conclut que les suites sont uniformément convergentes dans J, i.e ($(t-a)^{2-\alpha}u_n \longrightarrow (t-a)^{2-\alpha}u$ et $(t-a)^{2-\alpha}v_n \longrightarrow (t-a)^{2-\alpha}v$, c'est à dire $u_n \longrightarrow u$ et $v_n \longrightarrow v$, quand $n \to \infty$ dans $C_{2-\alpha}(J)$.
Vérifions d'abord que $u(t)$ et $v(t)$ sont les solutions de (3.1), on a

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u_n(b)\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - I_{a+}^{2-\alpha}u_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} \\ &\quad - \int_a^b G(t,s)\big(f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\theta(s))) + M(u_{n-1}(s)-u_n(s)) \\ &\quad + N(u_{n-1}(\theta(s)) - u_n(\theta(s)))\big)ds, \end{aligned}$$

par passage à la limite et comme f et continue, on obtient

$$u(t) = B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} - \int_a^b G(t,s)f(s,u(s),u(\theta(s)))ds,$$

par (3.8), $u(t)$ est une solution de (3.1) et on a aussi

$$\begin{aligned} v_n(t) &= v_n(b)\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + I_{a+}^{2-\alpha}v_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - I_{a+}^{2-\alpha}v_n(t)_{|t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} \\ &\quad - \int_a^b G(t,s)\big(f(s,v_{n-1}(s),v_{n-1}(\theta(s))) + M(v_{n-1}(s)-v_n(s)) \\ &\quad + N(v_{n-1}(\theta(s)) - v_n(\theta(s)))\big)ds, \end{aligned}$$

par passage à la limite et comme f et continue, on obtient

$$\begin{aligned} v(t) &= B\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} + A\frac{(t-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - A\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)(b-a)} \\ &\quad - \int_a^b G(t,s)f(s,v(s),v(\theta(s)))ds, \end{aligned}$$

d'après (3.8), $v(t)$ est une solution de (3.1).
Finalement, nous prouvons que $u(t)$ et $v(t)$ sont respectivement les solutions minimale et maximale de (3.1) dans $[y_0, z_0]$. Soit $x(t) \in C_{2-\alpha}(J)$ une autre solution de (3.1) différente

de $u(t)$ et $v(t)$. Supposons qu'il existe un entier positif n tel que $u_n(t) \leq x(t) \leq v_n(t)$, pour tout $t \in J$.
Posons $q_1(t) = u_{n+1}(t) - x(t)$, appliquons l'opérateur D^α, on obtient

$$\begin{aligned}
D^\alpha q_1(t)) &= D^\alpha(u_{n+1}(t) - x(t)) \\
&= D^\alpha u_{n+1}(t) - D^\alpha x(t) \\
&= f(t, u_n(t), u_n(\theta(t))) + M(u_n(t) - u_{n+1}(t)) + N(u_n(\theta(t)) - u_{n+1}(\theta(t)) \\
&\quad -f(s, x(t), x(\theta(t))),
\end{aligned}$$

par hypothèse (H2)

$$\begin{aligned}
D^\alpha q_1(t) &\geq -M(u_n(t) - x(s)) - N(u_n(\theta(t)) - x(\theta(t))) + M(u_n(t) - u_{n+1}(t)) \\
&\quad +N(u_n(\theta(t)) - u_{n+1}(\theta(t))) \\
&\geq -M(u_{n+1}(t) - x(t)) - N(u_{n+1}(\theta(t)) - x(\theta(t))) \\
&\geq -Mq_1(t) - Nq_1(\theta(t)).
\end{aligned}$$

$D^\alpha q_1(t) + Mq(t) + Nq_1(\theta(t)) \geq 0$ avec $I_{0+}^{2-\alpha} q_1(t)_{|t=a} \leq 0$ et $q_1(b) \leq 0$.
Par le lemme 3.5 nous obtenons $q_1(t) \leq 0$, d'où $u_{n+1}(t) \leq x(t)$. Si $n = 0$ alors $u_1(t) \leq x(t)$ et comme $u_0(t) \leq u_1(t)$ donc $u_0(t) \leq u(t)$. Par suite, on obtient $u_n(t) \leq x(t)$.
Par le même raisonnement, posons $q_2(t) = x(t) - v_{n+1}(t)$, appliquons l'opérateur D^α, on obtient

$$\begin{aligned}
D^\alpha q_2(t)) &= D^\alpha(x(t) - v_{n+1}(t)) \\
&= D^\alpha x(t) - D^\alpha v_{n+1}(t) \\
&= f(s, x(t), x(\theta(t))) - f(t, v_n(t), v_n(\theta(t))) \\
&\quad -M(v_n(t) - v_{n+1}(t)) - N(v_n(\theta(t)) - v_{n+1}(\theta(t)),
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (H2)

$$\begin{aligned}
D^\alpha q_2(t) &\geq -M(x(t) - v_n(s)) - N(x(\theta(t)) - v_n(\theta(t))) \\
&\quad -M(v_n(t) - v_{n+1}(t)) - N(v_n(\theta(t)) - v_{n+1}(\theta(t)) \\
&\geq -M(x(t) - v_{n+1}(s)) - N(x(\theta(t)) - v_{n+1}(\theta(t))) \\
&\geq -Mq_2(t) - Nq_2(\theta(t)).
\end{aligned}$$

On obtient $D^\alpha q_2(t) + Mq_2(t) + Nq_2(\theta(t)) \geq 0$, avec $I_{0+}^{2-\alpha} q_2(t)_{|t=a} \leq 0$ et $q_2(b) \leq 0$.
Par le lemme 3.5 nous obtenons $q_2(t) \leq 0$, d'où $x(t) \leq v_{n+1}(t)$. Si $n = 0$ alors $x(t) \leq v_1(t)$ et comme $v_1(t) \leq v_0(t)$ donc $x(t) \leq v_0(t)$. Par suite, on obtient $x(t) \leq v_n(t)$. Par passage à la limite et quand $n \to \infty$ on trouve $u(t) \leq x(t) \leq v(t)$. Donc le problème (3.1) admet au mois une solution $u(t)$ dans J. ■

3.4 Exemple

Considérons le système différentiel d'ordre fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}_0^cD^{3/2}u(t) = \frac{1}{30}\cos(u(t)) + \frac{1}{20}\cos(u(\sqrt{t})), \quad t \in [1,2], \\ \\ I^{1/2}u(t)_{|t=1} = 0, \quad u(2) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

avec $\theta(t) = \sqrt{t} \in C([1,2],[1,2])$.

On prend $y_0(t) = -\frac{\pi}{2}$ et $v_0(t) = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} D^{3/2}(-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{30}\cos(-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{20}\cos(-\frac{\pi}{2}) \geq 0, \quad t \in [1,2], \\ \\ I^{1/2}(-\frac{\pi}{2})_{|t=1} \leq 0, \quad y_0(2) \leq 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} (t-1)^{-3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{4} \geq 0, \quad t \in [1,2], \\ \\ I^{1/2}(-\frac{\pi}{2})_{|t=1} = -\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}} \leq 0, \quad y_0(2) = -\frac{\pi}{2} \leq 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} D^{3/2}(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{30}\cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{20}\cos(\frac{\pi}{2}) \leq 0, \quad t \in [1,2], \\ \\ I^{1/2}(\frac{\pi}{2})_{|t=1} \geq 0, \quad v_0(2) \geq 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} -(t-1)^{-3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{4} \leq 0, \quad t \in [1,2], \\ \\ I^{1/2}(\frac{\pi}{2})_{|t=1} = \sqrt{\pi} \geq 0, \quad v_0(2) = \frac{\pi}{2} \geq 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Par conséquent, $y_0(t)$ et $v_0(t)$ sont respectivement sous et sur solution du problème (3.24).

D'autre part,

$$f(t,u(t),u(\theta(t))) = \frac{1}{30}\cos(u(t)) + \frac{1}{20}\cos(u(\sqrt{t}))$$

vérifie

$$\begin{aligned} f(t,x(t),x(\theta(t))) - f(t,y(t),y(\theta(t))) &= \frac{1}{30}(\cos(x(t)) - \cos(y(t))) + \frac{1}{20}(\cos(x(\sqrt{t})) - \cos(y(\sqrt{t}))) \\ &= -\frac{2}{30}\big(\sin(\frac{x(t)+y(t)}{2})\sin(\frac{x(t)-y(t)}{2})\big) \\ &\quad -\frac{2}{20}\big(\sin(\frac{x(\sqrt{t})+y(\sqrt{t})}{2})\sin(\frac{x(\sqrt{t})-y(\sqrt{t})}{2}),\big) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f(t,x(t),x(\theta(t))) - f(t,y(t),y(\theta(t))) \quad \leq \quad -\frac{1}{30}(x(t)-y(t)) - \frac{1}{20}(x(\sqrt{t}) - y(\sqrt{t}))$$

où

$$y_0(t) \leq y \leq x \leq v_0(t), \quad y_0(\theta(t)) \leq y \leq x \leq v_0(\theta(t)).$$

Finalement,

$$|\frac{1}{30}\cos(u(t)) + \frac{1}{20}\cos(u(\sqrt{t}))| \quad \leq \quad |\frac{1}{30}\cos(u(t))| + \frac{1}{20}|\cos(u(\sqrt{t}))|,$$

comme $|\cos(x)| \leq 1$

$$|\frac{1}{30}\cos(u(t)) + \frac{1}{20}\cos(u(\sqrt{t}))| \quad \leq \quad \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = (M+N).$$

Par le théorème3.2 le problème (3.24) admet une solution.

Conclusion

L'apport de notre travail consiste principalement en un point qui est le suivant :
L'extension à l'étude d'un problème fractionnaire non linéaire de Reimann-Liouville avec deux conditions aux limites constantes. Nous avons pu présenter un principe de comparaison outil crucial dans l'étude de l'éxistence de solution de notre problème.
La technique de la méthode monotone combinée avec la méthode de sous et sur solution fût la clé de l'analyse de notre problème.
Cette méthode s'avère être une méthode très efficace afin d'établir l'existence de solutions d'équations fractionnaires non linéaires de Reimann-Liouville. L'exemple numérique confirme les résultats théoriques obtenus.

Bibliography

[1] Al-Refai, M., Hajji, M.A.: Monotone iterative sequences for nonlinear boundary value problems of fractional order. Nonlinear Anal. 74, 3531-3539 (2011).

[2] Cabada, A., Habvets, P., Lois, S.: Monotone method for the Neumann problem with lower and upper solutions in the reverse order. Appl. Math. Comput. 117, 1-14 (2001).

[3] Cabada, A., Sanchez, L.: A positive operator approach to the Neumann problem for a second order ordinary differential equation. J. Math. Anal. Appl. 204, 774-785 (1996).

[4] S. Chergui, Etude d'un problème d'ordre fractionnaire avec condition intégrale au bord. Mémoire de Master EDP et Anlyse numérique. 2019-2020.

[5] Cherpion, M., De Coster, C., Habets, P.: A constructive monotone iterative method for second-order BVP in the presence of lower and upper solutions. Appl. Math. Comput. 123, 75-91 (2001).

[6] J. V. Devi, Generalized Monotone Method for Periodic Boundary Value Problems of Caputo Fractional Differential Equations, Commun. Appl. Anal., 12 (2008), 399-406.

[7] J. V. Devi, F. A. McRae and Z. Drici, Variational Lyapunov method for fractional differential equations, Comp. Math. Appl., 64(2012), 2982-2989 .

[8] D. Dhaigude and B. Rizqan, Existence and Uniqueness of Solutions of Fractional Differential Equations with Deviating Arguments under Integral Boundary Conditions, Kyungpook Math. J. 59(2019), 191-202.

[9] Ferreira, R.A.C.: Existence and uniqueness of solutions for two-point fractional boundary value problems. Electron. J. Differ. Equ. 2.16, 202 (2016).

[10] Granas, A., Dugundji, J.: Fixed Point Theory. Springer, New York (2003).

[11] A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional diferential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[13] J.A.Nanware, Monotone Method In Fractional Differential Equations and Application. PhD Thesis, Dr.Babasaheb Ambedkar Marathwada University, 2013.

[14] J.A.Nanware, Existence and uniquness results for fractional differential equations via monotone methode. Bulletin of the Marathwada Mathematical Society , june 2013, 39-56.

[15] J.A.Nanware , D.B.Dhaigude, Existence and uniquness of solutions of differential equations of fractional order with integral boundary conditions. J. of Nonlinear Science and Applications.

[16] J. A. Nanware, D. B. Dhaigude, Existence and Uniqueness of solution of Riemann-Liouville Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions, Int. J. Nonlinear Sci., 14 (2012), 410-415.

[17] J. A. Nanware, D. B. Dhaigude Monotone Iterative Scheme for System of Riemann-Liouville Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions. Math. Modelling Sci. Computation, Springer-Verlag, 283 (2012), 395-402.

[18] Liu, Z.H., Li, X.W.: Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. SIAM J. Control Optim. 53(4), 1920-1933 (2015).

[19] Shi, A., Zhang, S.: Upper and lower solutions method and a fractional differential equation boundary value problem. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 30, 1 (2009)

[20] B. Tang, J. Zhao, Z. Liu, Monotone iterative method for two-point fractional boundary value problems, Tang et al. Advances in Difference Equations (2018) 2018:182.

[21] Zhang, L., Ahmad, B., Wang, G.: Monotone iterative method for a class of nonlinear fractional differential equations on unbounded domains in Banach spaces. Filomat 31, 1331-1338 (2017).