République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : Mendjel Fatima

Intitulé

Sur une équation parabolique fractionnaire avec une condition aux limites de Dirichlet manquante

<u>Dirigé par</u> : Pr. Chaoui Abderrazek

Devant le jury

PRESIDENT	**Aries Med Salah**	**M.C.B. Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Chaoui Abderrazek**	**Prof. Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Debbouche Amar**	**Prof. Univ-Guelma**

Session Septembre 2020

REMERCIEMENT

Je tiens avant tout à remercie le Professeur ***A. CHAOUI*** *pour avoir accepté d'être mon directeur de mémoire. Sans l'aide précieuse qui m'accordé, ce travail n'aurait pu aboutir.*
Je lui suis profondément reconnaissante de m'avoir fait bénéficier de son expérience et de ses compétences pour la réalisation de cette thèse.
Enfin, J'adresse un grand merci à toute ma famille en particulier à ma mère mon père, mes sœurs et mon frère.
Je réserve les derniers mots pour tous mes amis.

Abstract

In this memory, we prove the existence, uniqueness and some stability results for fractional integro-differential equation of reconstruction of the unknown time-dependent boundary function γ (t) from an additional integral measurement by the use of Rothe time discretization.

Key words : Fractional integro-differential equations, Weak solution, Discrete problem, A priori estimate, Rothe method.

ملخص

في هذه المذكرة ، نثبت وجود حل وحيد و مستقر لمعادلة تفاضلية تكاملية بمشتقات كسرية ونعيد بناء المعطيات الحدية الناقصة $\gamma(t)$ انطلاقا من تكامل إضافي باستخدام طريقة تقسيمات روث.

الكلمات المفتاحية : معادلات تكاملية تفاضلية كسرية ، حل ضعيف ، مشكلة منفصلة ، تقدير مسبق ، طريقة روث.

Résumé

Dans ce mémoire, on prouve l'existence, l'unicité et certains résultats de stabilité pour une équation fractionnaire intégro-différentielle et on reconstruit la donné aux limites manquante γ (t) à partir d'une intégrale supplémentaire en utilisant de la méthode de discrétisation de Rothe.

Mots clés :Equations intégro-différentielles fractionnaires, Solution faible, Problème discret, Estimation a priori, Méthode de Rothe.

Table des matières

introduction

Les équations aux dérivées partielles modélisent la majorité des phynomènes physiques. La résolution directe de ces équations est parfois difficille ce qui fait obliger les chercheurs de changer l'orientation vers les études numériques des EDP. Parmis les méthodes d'approximation, la méthode de Rothe est l'une des méthodes les plus populaires et éfficace dans la discrétisation des équiations d'évolutions.

Dans ce mémoire on est concerné par l'étude de l'équation parabolique fractionnaire avec une condition aux limites de Dirichlet manquante suivante

$$D_{RL}^{\alpha} u(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_0^t k(s, u(s,x))\, ds + f(t,x) \qquad sur\ I \times \Omega$$

Avec condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad sur\ \Omega$$

condition de Neuman

$$\nabla u.\nu = g \qquad sur\ I \times \Gamma_N$$

condition de Dirichlet

$$u = \gamma(t) \quad sur\ I \times \Gamma_D$$

et la condition intégrale

$$\int_{\Omega} I^{1-\alpha}\left(u\left(t,x\right)\right)dx=\theta\left(t\right)$$

Les équations différentielles parboliques fractionnaires apparaissent dans plusieurs domaines d'investigation par exemple en sciences, les flux de fluides, les réseaux électriques, la physique chimique, la mécanique, ect...

La théorie des dérivées et des intégrales fractionnaires remonte à la fin de l'année 1695 quand L' Hospital a soulevé une question à leibniz en sinterrogeant comme Euler, Liouville, Abel, Riemann, Letnikov,.... ,ont contribué au développement de ce sujet. les premières définitions de la dérivée et L'intégrales fractionnaire sont dues à Liouville, après Riemann a proposé une approche plus importante.

Notre objectif dans ce travail est d'appliquer la méthode de Rothe pour reconstruire la donné manquante de Dirichlet à travers une donné auxilière de type intégrale et de démontrer l'existence d'une solution unique pour le problème cidessus.

Ce mémoire est composé par trois chapitres :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle nécessaire pour l'étude des problèmes paraboliques.

Dans le deuxième chapitre on va résoudre une équation parabolique fractionnaire intégro-différentielle avec une condition de Dirichlet inconnue qu'on va la trouver à travers une nouvelle condition intégrale, et aussi on va montrer quelques estimations à priori.

Enfin, dans le troisième chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution faible dans des espaces fonctionel appropriés.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse fonctionnelle

1.1 Espaces de Hilbert

soit $(H, (.,.))$ un espace préhilbertien. On définit une norme sur H par
$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

On appelle espace de Hilbert espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.

Définition 1.1 *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de lebesgue, on définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables dans Ω muni du produit scalaire :*

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\,g(x)$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert . On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.2 *on pose*

$L^{\infty} = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \;\; mesurable\ et\ \exists\ une\ constante\ C\ telle\ que\ |f(x)| \leq C\ \ p.p\ sur\ \Omega\}$ *.on note*

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \inf\{C, |f(x)| \leq C\ \ p.p\ sur\ \Omega\}$$

la norme correspondante.

pour plus de détails sur les sur les espaces $L^2(\Omega)$ et $L^{\infty}(\Omega)$, voir[2] .

1.2 Espaces de sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .On définit l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ par :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tq } D_i u(\Omega) \in L^2(\Omega) \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n\right\}$$

Dans cette définition, lorsque on dit $D_i u(\Omega) \in L^2(\Omega)$,on sous entend, il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$(D_i f(\Omega), \varphi)_{D'(\Omega), C_c^{\infty}(\Omega)} = -\int_{\Omega} g.\varphi\ dx \text{ pour tout } \ \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

1.3 Espaces de Boschner

- $C([0,T], L^2(\Omega)) = \{f : [0,T] \to L^2(\Omega)$ qui associe à $t,\ f(t)$ continue$\}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{C([0,T],L^2(\Omega))} = \max_{t \in I} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

- $L^{\infty}([0,T], H^1(\Omega)) = \{f : [0,T] \to H^1(\Omega)$ essenstiellement bornés pour la variable $t\}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^{\infty}([0,T],H^1(\Omega))} = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_{H^1(\Omega)} \text{ p. p sur } I$$

- $L^2([0,T], L^2(\Omega)) = \left\{f : [0,T] \to L^2(\Omega) \; ; \int_{[0,T]} \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \prec \infty\right\}$ muni de la norme :

$$\|f\|^2_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} = \int_{[0,T]} \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

1.3.1 La Convergence faible

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.3 *On dit que (u_n) converge faiblement dans E vers u (voir [1]), si l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} (f, u_n)_{E'\times E} = (f,u)_{E'\times E} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (f, u_n - u)_{E'\times E} = 0 \;, \forall f \in E'.$$

avec E' est l'espace duel de E.

Remarque 1.1 *la convergence forte $\Longrightarrow$ la convergence faible .*

1.4 Quelques inégalités et théorèmes utilisés

Théorème 1.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$,$\forall$ f,g $\in L^2(\Omega)$,on :*

$$\left|\int_{\Omega} f(x)\; g(x)\; dx\right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(x)\, dx\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 1.1 (*Inégalitè de Young*) *soit* $a, b \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

Lemme 1.2 (*Inégalité de trace*)*soit* Ω *un ouvert dans* $\mathbb{R}^n$,(*voir* [3]) *on a*

$$\|Z\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon \|\nabla Z\|^2 + C_\varepsilon \|Z\|^2, \forall Z \in H^1(\Omega), \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[.$$

Lemme 1.3 (*lemme de Gronwall*)

-***Cas continu :****soit* α, β,*et* γ *des fonctions réeles à valeur dans* $I = [1, \infty[$, *supposons que* β *et* γ *sont deux fonctions continues. si* β *est non négatif,*α *est non décroissant et si* γ *satisfait l'inégalité intégrale suivante :*

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\, \gamma(s)\, ds, \quad \forall t \in I,$$

alors

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\, ds\right).$$

-***Cas discret :****si* $\gamma_n \geq 0, \alpha_n \geq \alpha_{n-1}, \beta_j \geq 0$ *et* $\gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \gamma_j, \quad n \geq 0,$*alors*

$$\gamma_n \leq \alpha_n \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j\right).$$

Lemme 1.4 (*Lemme d'Abel*)

$$\sum_{i=1}^{j} z_i (w_i - w_{i-1}) = z_j w_j - z_0 w_0 - \sum_{i=1}^{j} (z_i - z_{i-1})\, w_{i-1}, \quad \forall z_i w_i \in \mathbb{R}^n.$$

(voir [2])

Formule de Green

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$

on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}.vdx = -\int_{\Omega} u.\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_{\Gamma} u.v.\gamma_i d\sigma$$

où γ_i est la i éme composante du vecteur unitaire normale extèrieure.

En remarquant que $\Delta u = \mathrm{div}\,(\nabla u)$ alors on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u.vdx = -\int_{\Omega} \nabla u.\nabla vdx + \int_{\Gamma} (\nabla u.\eta)\, vd\sigma$$

1.5 Intégrales et dérivéés fractionnaires

1.5.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcule fractionnaire et la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui généralise le factoriel $n!$ et permet à n de prendre des valeurs non entiers et même complexes.

Définition 1.4 (*L'intégrale d'Euler du second type*)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \mathrm{Re}\,(z) \succ 0. \tag{1.1}$$

est appelée la fonction Gamma , avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0+) = +\infty$.

Proposition 1.1 ***1-*** $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 \leq z \prec 1$.

2- *la fonction Gamma converge pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $\mathrm{Re}\,(z) \succ 0$.

3- L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) \succ 0.$$

qui est prouvée par intégration par parties

$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^2dt$

$= \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$

$= z\Gamma(z).$

on a pour $z = n$ on obtient :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!. \tag{1.2}$$

de plus

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}, \quad \operatorname{Re}(z) \succ -n,\ n = 1,2,\ldots z \neq 0,-1,-2,\ldots \tag{1.3}$$

selon la dérnière formule (1.3) ,la fonction Gamma est analytique sur $\mathbb{C}$ sauf pour $z = 0,-1,-2,.....$ où elle a des poles simples.

1.5.2 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

la suite des intégrales répétés n-fois est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^s dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots\ldots \int_a^{t_{n-1}} g(t_n)\,dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^s (s-t)^{n-1} g(t)\,dt, \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.4}$$

.

puisque $(n-1)! = \Gamma(n)$ on remarque que le nombre droit de l'égalité (1.4) a un sens pour des valeurs non entière de n alors on peut définir l'intégration d'ordre non entier comme suit .

Définition 1.5 *soit* $g \in L^1(a,b)$ *et* $\alpha \succ 0$. *On appelle intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville, les intégrales*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \qquad t \succ a \tag{1.5}$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha} g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{g(s)}{(s-t)^{1-\alpha}} ds, \qquad t \prec b \tag{1.6}$$

Les intégrales (1.5) *et* (1.6) *sont aussi appelées intégrales fractionnaires d'ordre* α *respectivement à gauche et à droite .*

Quand $\alpha = 0$ *,on pose :* $I_{a+}^{0} = I$ *,l'opérateur d'identité c'est -à dire* $I_{a+}^{0} g(t) = g(t)$.

De plus $I_{a+}^{\alpha} g(0^+)$ *désigne la limite* (*si elle existe*) *de* $I_{a^+}^{\alpha} g(t)$ *quand* $t \to 0^+$ *.*

Remarque 1.2 *Les intégrales fractionnaires données par* (1.5) *et* (1.6) *définies sur l'intervalle fini* $[a,b]$, *peuvent être eux mêmes étendues sur les demi-axes ou les axes des nombres réels. Ainsi on peut utiliser ces notations sur les demi axes* $(0,\infty)$ *et donner la définition suivante.*

Définition 1.6 *soit la fonction* $g \in L^1(0,\infty)$ *et* $\alpha \succ 0$ *, l'intégrale fractionnaire de Rieman-Liouville est défini par :*

$$\left(I_0^{\alpha} g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \tag{1.7}$$

1.5.3 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.7 *soit* $g \ : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *et* $\alpha \succ 1$, *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *respectivement à gauche et à droite :*

$$D_{a+}^{\alpha}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}g\left(s\right)ds, n=\left[\alpha\right]+1 \tag{1.9}$$

$$D_{b-}^{\alpha}g\left(t\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{t}^{b}\left(s-t\right)^{n-\alpha-1}g\left(s\right)ds, n=\left[\alpha\right]+1 \tag{1.10}$$

Définition 1.8 *soit* $g : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ *.la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$D_{RL}^{\alpha}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}g\left(s\right)\ ds, avec\ \alpha\in\left(n-1,n\right), n\in\mathbb{N}\ \ , t\succ 0 \tag{1.11}$$

Lemme 1.5 (*voir*[6]) *soit* $T \succ 0$, $g\in C^{m}\left(\left[0,T\right]\right)$, $\alpha\in\left(m-1,m\right)$, $m\in\mathbb{N}$.

Alors pour $t\in\left[0,T\right]$, *les propriétés suivantes sont vérifiés*

$$D_{RL}^{\alpha}g\left(t\right)=\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}g\left(t\right), m=1. \tag{1.12}$$

$$D_{RL}^{\alpha}I^{\alpha}g\left(t\right)=g\left(t\right). \tag{1.13}$$

$$I^{\alpha}D_{RL}^{\alpha}g\left(t\right)=g\left(t\right)-\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k\right)}\left(I^{m-\alpha}g\right)^{\left(m-k\right)}\left(0\right). \tag{1.14}$$

$$I^{\alpha}D_{RL}^{\alpha}g\left(t\right)=g\left(t\right)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(I^{1-\alpha}g\right)\left(0\right), si\ m=1. \tag{1.15}$$

1.6 Le schéma de discrétisation de la méthode de Rothe

-On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles $(t_{i-1}, t_i), i = 1, ..., n$ où $t_i = ih$ et $h = \frac{T}{n}$.

-On note par $u_i = u_i(x, ih)$ les approximations de u .

-On remplace la dérivée de la fonction u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i$.

-On obtient un systhème formé de n équations en x où $u_i(x)$ est inconnu, donc on approxime le problème posé à tout point $t = t_i$,$i = 1, .., n$ par un nouveau problème discret.

-On détermine les fonctions u^n solutions de système obtenu .

-On construit les fonctions de Rothe(voir [4]) comme suit :

$$u^n = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\ \delta u_i, t \in [t_{i-1}, t_i] \qquad i = 1, .., n$$

c-à-d on vas approximer la solution u par une suite de polynome de degré 1,u^n par morceau sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

Les fonctions test corresspondantes :

$$\overline{u_n}(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \qquad i = 1, ..., n$$

Aprés avoir démontré quelques estimations pour la solution approchée nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du problème posé.

Chapitre 2

Position du problème et estimation à priori

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné sur $\mathbb{R}^n$ avec une frontière lipschitzienne continue $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, on pose $I = [0, T]$ avec $T \succ 0$, on note v le vecteur unitaire orienté à l'exterieur sur Γ, le problème qu'on va étudier est représenté par une équation intégro-différentielle parabolique linéaire avec une donné initiale de Direchlet inconnu $\gamma(t)$, plus précisément :

$$D^{\alpha}_{RL} u(t,x) - \triangle u(x,t) = \int_0^t k(s, u(s,x)) \; ds + f(t,x) \qquad \text{sur} \;\; I \times \Omega \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{sur} \;\; \Omega \tag{2.2}$$

$$\nabla u.v = g \qquad \text{sur} \;\; I \times \Gamma_N \tag{2.3}$$

$$u = \gamma(t) \qquad \text{sur} \quad I \times \Gamma_D \tag{2.4}$$

a partir de :

$$\int_\Omega I^{1-\alpha}(u(t,x))\ dx = \theta(t) \tag{2.5}$$

avec $\alpha \in]0,1[$, $I^{1-\alpha}$ est l'intégrall fractionnare d'ordre $(1-\alpha)$ et la dérivée D^{α}_{RL} d'ordre α sont aux sens de Riemann-Liouville .

pour plus d'informations sur ce sujet(voir [5]) .

2.1.1 Formulation variationnelle et schéma de discrétisation

2.2.1 Formulation variationnelle

On définit l'espace sobolev V comme suit :

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } u_{\setminus\Gamma_D} \text{ est une constante } \right\}$$

associé à une norme :

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(1) $Hyp_1 : u \in V \cap L^\infty(\Omega)$ et $g : I \times \Gamma_N$ est une fonction continue.

(2) $Hyp_2 : f(t) \in L^2(\Omega)$ et$\|f(t) - f(t')\| \leq l\ |t - t'|$.

(3) $Hyp_3 : k$ est une fonction globalement lipschitzienne continue c-à-d :

$$|k(t,u) - k(t',u')| \leq C(|t-t'| + |t-t'|\,|u'| + |u-u'|)$$

(4) $Hyp_4 : |D^{\alpha}_{RL}u| \succ p \succ 0.$

Définition 2.1 *On dit que le couple* (u, γ) *est un solution du problémes* (2.1) *et* (2.5) *si :*

1- $u \in L^2(I, V)$ *et* $I^{1-\alpha}(u) \in C(I, V^*)$ *et* $\partial_t I^{1-\alpha}(u) \in L^2(I, V^*)$.

2- $u_{\backslash\Gamma_D} = \gamma(t)$.

3-$\forall\ \phi \in V$ *on a :*

$$\begin{aligned} & \int_I \left(\partial_t I^{1-\alpha}(u), \phi\right) dt + \int_I (\nabla u, \nabla \phi)\, dt + \int_I (g, \phi)_{\Gamma_N} dt \\ = & \int_I (f, \phi)\, dt + \int_I \phi_{\backslash\Gamma_D} \left[\theta' + (g, 1)_{\Gamma_N} - (f, 1) - \left(\int_0^t k(s, u(s))\, ds, 1\right)\right] dt \\ & + \int_I \left(\int_0^t k(s, u(s, x))\, ds, \phi\right) dt \end{aligned}$$

.

Remarque 2.1 *On utilise la formule* (1.12) *alors* (2.1) *devient :*

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{1-\alpha} u(t, x) - \Delta u(t, x) = \int_0^t k(s, u(s, x))\ ds + f(t, x) \tag{2.6}$$

soit ϕ une fonction test telle que $\phi \in V$ alors on a la formulation variationell suivante :

$$\begin{aligned} & \int_I \left(\partial_t I^{1-\alpha}(u), \phi\right) dt + \int_I (\nabla u, \nabla \phi)\, dt + \int_I (g, \phi)_{\Gamma_N} dt \\ = & \int_I (f, \phi)\, dt + \int_I \phi_{\backslash\Gamma_D} \left[\theta' + (g, 1)_{\Gamma_N} - (f, 1) - \left(\int_0^t k(s, u(s))\, ds, 1\right)\right] dt \\ & + \int_I \left(\int_0^t k(s, u(s, x))\, ds, \phi\right) dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

cette formulation et trouver a partir de la formule suivante :$\forall \phi \in V$ on à

$$\left(\partial_t I^{1-\alpha}(u),\phi\right)+(\nabla u,\nabla\phi)+(g,\phi)_{\Gamma_N}-\phi_{\backslash\Gamma_D}(\nabla u.\eta,1)_{\Gamma_D}=(f,\phi)+\left(\int_0^t k(s,u(s))\,ds,\phi\right) \tag{2.8}$$

et de la formule (2.5) telle que en prend $\phi=1$ on obtien

$$(\nabla u.\eta,1)_{\Gamma_D}=\theta'+(g,1)_{\Gamma_N}-(f,1)-\left(\int_0^t k(s,u(s))\,ds,1\right) \tag{2.9}$$

on remplace (2.9) dans (2.8) en trouve :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t I^{1-\alpha}(u),\phi\right)+(\nabla u,\nabla\phi)+(g,\phi)_{\Gamma_N} &= (f,\phi)+\left(\int_0^t k(s,u(s))\,ds,\phi\right) \\ &\quad +\phi_{\backslash\Gamma_D}\left[\theta'+(g,1)_{\Gamma_N}-(f,1)-\left(\int_0^t k(s,u(s))\,ds,1\right)\right]\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.1.2 Schéma de Discrétisation

Le but principal de cette section est de construire un schéma numérique de(2.1) basé sur une discrétisation en temps pour obtenir à un système récurent de problèmes elliptiques qui peut être résolu sur chaque sous intervalle de temps. pour cela, nous allons introduire le schéma de discrétisation en temps qui correspond à la méthode de Rothe pour le problème considéré .

Soit n un entier positif, divisons l'intervalle $I=[0,T]$ en n sous-intervalles $I_i=[t_{i-1},t_i]$, de longueur $h=\frac{T}{n}$ et notons : $t_i=ih, u_i=u(t_i,x), \delta u_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}, f=f(t_i,x), k(u_j)=k(t_i,u_j), i=1,..,n$

pour simplifer nous allons négliger x .

Alors aprés la discrétisation on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left(I^{1-\alpha}\left(u_i\right)-I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right),\phi\right)+h\left(\nabla u_i,\nabla\phi\right)+h\left(g_i,\phi\right)_{\Gamma_N} \\
= & \ h\left(f_i,\phi\right)+h\sum_{j=1}^{i-1}\left(k\left(t_j,u_j\right)h,\phi\right) \\
& +h\phi_{\backslash\Gamma_D}\left[\theta_i'+\left(g_i,1\right)_{\Gamma_N}-\left(f_i,1\right)-\sum_{j=1}^{i-1}\left(k\left(t_j,u_j\right)h,1\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dans le lemme suivant on va démontrer l'éxictance de la solution faible u_i en chaque points de l'intervalle I .

Lemme 2.1 *soit* $g\in L^2\left(\Gamma_N\right)$ *et* $\theta'(t)\in\mathbb{R}$, $\forall t\in[0,T]$, *alors il existe une solution faible* u_i *du problème* (2.11) *en chaque point* t_i .

Preuve. On définit l'opérateur suivant

$$\begin{aligned}
T &: V\to V' \qquad \textit{telle que} \\
\left(T\left(u\right),\phi\right) &= \left(I^{1-\alpha}\left(u\right),\phi\right)+h\left(\nabla u,\nabla\phi\right)
\end{aligned}$$

D'aprés la formule (2.11) on à ■

$$\begin{aligned}
\left(T\left(u_i\right),\phi\right) = & \left(I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right),\phi\right)-h\left(g_i,\phi\right)_{\Gamma_N}+h\left(f_i,\phi\right) \\
& +h\sum_{j=1}^{i-1}\left(k\left(t_j,u_j\right)h,\phi\right) \\
& +h\phi_{\backslash\Gamma_D}\left[\theta_i'+\left(g_i,1\right)_{\Gamma_N}-\left(f_i,1\right)-\sum_{j=1}^{i-1}\left(k\left(t_j,u_j\right)h,1\right)\right]
\end{aligned}$$

Pour démontrer le lemme il suffit de démonter la bornitude, la monotonie, la coercivité et la semi countinuité de T

Preuve.

1-La bornitude :

On a :

$$\left|\left(T\left(u_i\right),\phi\right)\right| \leq \left|\left(I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right),\phi\right)\right| + h\left|\left(g_i,\phi\right)_{\Gamma_N}\right| + h\left|\left(f_i,\phi\right)\right| + h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left|\left(k\left(u_j,tj\right),\phi\right)\right|$$
$$+h\left|\phi_{\setminus\Gamma_D}\right|\left[\left|\theta_i'\right| + \left|\left(g_i,1\right)_{\Gamma_N}\right| + \left|\left(f_i,1\right)\right| + h\sum_{j=1}^{i-1}\left|\left(k\left(t_j,uj\right),1\right)\right|\right].$$

De plud d'après Cauchy-Schwarz en trouve :

$$\left|\left(T\left(u_i\right),\phi\right)\right| \leq \left\|I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right)\right\|\left\|\phi\right\| + h\left\|g_i\right\|_{\Gamma_N}\left\|\phi\right\| + h\left\|f_i\right\|\left\|\phi\right\| + h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left\|k\left(t_j,u_j\right)\right\|\left\|\phi\right\|$$
$$+h\left|\phi_{\setminus\Gamma_D}\right|\left[\left|\theta_i'\right| + \left\|g_i\right\|_{\Gamma_N}\left\|1\right\| + \left\|f_i\right\|\left\|1\right\| + h\sum_{j=1}^{i-1}\left(\left\|k\left(t_j,u_j\right)\right\|\left\|1\right\|\right)\right].$$

En utilisant la continuité lipschitizienne de k et l'inégalité de trace, nous obtenons :

$$\left(T\left(u_i\right),\phi\right) \leq c\left(i\right)\left\|u\right\|_{H^1(\Omega)}^2$$

donc T est borné .

2-La monotonie :

En utilisant le théorème de la valeur moyenne et l'hypthèse Hyp_3 nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left(T\left(u\right)-T\left(v\right),u-v\right) &= \left(I^{1-\alpha}\left(u\right)-I^{1-\alpha}\left(v\right),u-v\right) + h\left(\nabla\left(u-v\right),\nabla\left(u-v\right)\right)\\ &\geq \left(I^{1-\alpha}\right)'\left(\xi\right)\left\|u-v\right\|^2 + h\left\|\nabla u-v\right\|^2\\ &\geq p\left\|u-v\right\|^2 + h\left\|\nabla\left(u-v\right)\right\|^2\\ &\geq C\left\|u-v\right\|_{H^1(\Omega)}^2\end{aligned}$$

telle que : $p = \left(I^{1-\alpha}\right)'\left(\xi\right), C = \min\left(p,h\right)$

Donc T est montone .

de meme manière on démontre :

3-La Coercivité :

En utilisant $I^{1-\alpha}\left(0\right) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(T\left(u\right),u\right) &= \left(I^{1-\alpha}\left(u\right)-I^{1-\alpha}\left(0\right),u-0\right) + h\left(\nabla\left(u\right),\nabla\left(u\right)\right)\\ &\geq \left(I^{1-\alpha}\right)'\left(\xi\right)\left\|u\right\|^2 + h\left\|\nabla u\right\|^2\end{aligned}$$

$$\geq p\left\|u\right\|^2 + h\left\|\nabla u\right\|^2$$
$$\geq C\left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Donc a partir de la quelle nous concluons la coercivité de T.

4-Semi-continue :

pour $v_n \to v$ dans V on a :

$$\begin{aligned}|(T(v_n) - T(v), \phi)| &= |(I^{1-\alpha}(v_n) - I^{1-\alpha}(v), \phi) + h(\nabla(v_n - v), \nabla\phi)| \,\forall\phi \in V \\ &\leq \left\|I^{1-\alpha}(v_n) - I^{1-\alpha}(v)\right\| \left\|\phi\right\| + \left\|\nabla(v_n - v)\right\| \left\|\nabla\phi\right\| \forall\phi \in V \\ &\leq \left\|I^{1-\alpha}(v_n - v)\right\| \left\|\phi\right\| + h\left\|v_n - v\right\|_{H^1(\Omega)} \left\|\phi\right\| \forall\phi \in V\end{aligned}$$

de la continuité de $v_n \to v$ dans V , il s'ensuit que :

$|(T(v_n) - T(v), \phi)| \to 0 \ \forall\phi \in V$

donc T est semi-continue . ■

2.2 Estimations à priori

Dans cette section, nous établissons quelque estimations a priori utiles

Lemme 2.2 *Il existe une constante positive C telle que Les estimations suivantes sont uniformément vérifiées en $n, i,\ j$ et h :*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} h\left\|\delta u_i\right\|^2 &\leq C \qquad (2.12) \\ \left\|\nabla u_i\right\|^2 &\leq C \\ \sum_{i=1}^{l} \left\|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\right\|^2 &\leq C \\ \left\|u_i\right\| &\leq C.\end{aligned}$$

Preuve. posons $\phi = u_i - u_{i-1}$ dans (2.11) et faissons la somme pour $i = 1, .., l$,nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} h\left(\delta I^{1-\alpha}(u_i), \delta u_i\right) + \sum_{i=1}^{l} (\nabla u, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{l} h(f_i, \delta u_i) - \sum_{i=1}^{l} h(g_i, \delta u_i)_{\Gamma_N} \\
&\quad + h^2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{i-1} (k(t_j, u_j) h, \delta u_i) \\
&\quad + h \sum_{i=1}^{l} \phi_{\backslash \Gamma_D} \left[\theta_i' + (g_i, 1)_{\Gamma_N} - (f_i, 1)\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{i-1} h(k(t_j, u_j) h, 1)\right] \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

L'énigalité (2.13) est brièvement notée par : $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 + E_5 + E_6$. maintenent, nous estimons chaque terme :

On applique le lemme d'Abel, on trouve :

$$E_2 = \frac{1}{2}\left[\|\nabla u_l\|^2 - \|\nabla u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{l} \|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\|^2\right]. \qquad (2.14)$$

De plus en utilisant le théorème de la valeurs moyenne, telle que $(I^{1-\alpha})' \geq \delta$, on obtient :

$$C \sum_{i=1}^{l} h \|\delta u_i\| + \frac{1}{2}\left[\|\nabla u_l\|^2 - \|\nabla u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{l} \|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\|^2\right] \leq E_1 + E_2 \qquad (2.15)$$

D'autre part on appliquant l'inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et la continuité lipschitzienne de k, on trouve :

$$\begin{aligned}
|E_3+E_5| &\leq |E_3|+|E_5| \\
&\leq h\sum_{i=1}^{l}\|f_i\|\,\|\delta u_i\|+h^2\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{i-1}\|k(t_j,u_j)\|\,\|\delta u_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{l}C\,\|\delta u_i\|\,h \\
&\leq C\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\sum_{i=1}^{l}h\,\|\nabla\delta u_i\|^2\right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Eutilisant le lemme d'Abel, les inégalités de trace, young et de cauchy, on trouve :

$$\begin{aligned}
|E_4| &= \left|(g_l,u_l)_{\Gamma_N}-(g_0,u_0)_{\Gamma_N}+\sum_{i=1}^{l}(\delta g_i,u_{i-1})_{\Gamma_N}\,h\right| \\
&\leq \|g_l\|_{\Gamma_N}\|u_l\|_{\Gamma_N}+\|g_0\|_{\Gamma_N}\|u_0\|_{\Gamma_N}+\sum_{i=1}^{l}\|\delta g_i\|_{\Gamma_N}\|u_{i-1}\|_{\Gamma_N}\,h \\
&\leq C\,\|u_l\|_{\Gamma_N}+C+\sum_{i=1}^{l}C\,\|u_{i-1}\|_{\Gamma_N}\,h \\
&\leq \|u_l\|_{\Gamma_N}^2+C+\sum_{i=1}^{l}\|u_{i-1}\|_{\Gamma_N}^2\,h \\
&\leq \varepsilon\,\|\nabla u_l\|^2+C_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

De la même manière pour faire une estimation pour le dérnier terme de (2.13) :

$$
\begin{aligned}
& \left| h \sum_{i=1}^{l} \delta u_{i \backslash \Gamma_D} \left[\theta'_i + (g_i, 1)_{\Gamma_N} - (f_i, 1) - \sum_{j=1}^{i-1} h \left(k \left(t_j, u_j \right) h, 1 \right) \right] \right| \qquad (2.18) \\
= & \left| u_{l \backslash \Gamma_D} \left[\theta'_l + (g_l, 1)_{\Gamma_N} - (f_l, 1) - \sum_{j=0}^{l-1} h \left(k \left(t_j, u_j \right) h, 1 \right) \right] - u_{0 \backslash \Gamma_D} \left[\theta'_0 + (g_0, 1)_{\Gamma_N} - (f_0, 1) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{l} u_{i-1 \backslash \Gamma_D} \left[\delta\theta'_i + (\delta g_i, 1)_{\Gamma_N} - (\delta f_i, 1) - \left(k \left(t_{i-1}, u_{i-1} \right), 1 \right) \right] h \right| \\
\leq & \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_D|}} \| u_l \|_{\Gamma_D} \left(|\theta'_l| + \| g_l \|_{\Gamma_N} \| 1 \|_{\Gamma_N} + \| f_l \| \| 1 \| + \sum_{j=0}^{l-1} \| k \left(t_j, u_j \right) h \| \| 1 \| \right) + C \\
& + \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_D|}} \| u_{i-1} \|_{\Gamma_D} \left(|\delta\theta'_i| + \| \delta g_i \|_{\Gamma_N} \| 1 \|_{\Gamma_N} + \| \delta f_i \| \| 1 \| + \| k \left(t_{i-1}, u_{i-1} \right) \| \| 1 \| \right) h \\
\leq & C \| u_l \|_{\Gamma_D} + C + \sum_{i=1}^{l} \| u_{i-1} \|_{\Gamma_D} h \\
\leq & \| u_l \|^2_{\Gamma_D} + C + \sum_{i=1}^{l} \| u_{i-1} \|^2_{\Gamma_D} h \\
\leq & \varepsilon \| \nabla u_l \|^2 + C_\varepsilon
\end{aligned}
$$

Nous rassemblons toutes les inégalités, et on fixe ε très petit, avec une application direct du lemme de Gronwall, le lemme est démontré. ■

Lemme 2.3 *Il exicte une constante positive C indépendante de n, i, j et h telle que :*

$$\left\| \delta I^{1-\alpha} \left(u_i \right) \right\|_{V^*} \leq C \qquad (2.19)$$

Preuve. D'aprés la formule (2.11) ,on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left(\delta I^{1-\alpha} \left(u_i \right), \phi \right) = & \left(-\nabla u_i, \nabla \phi \right) - \left(g_i, \phi \right)_{\Gamma_N} + \left(f_i, \phi \right) \\
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(k \left(t_j, u_j \right) h, \phi \right) + \phi_{\backslash \Gamma_D} \left[\theta'_i + (g_i, 1)_{\Gamma_N} - (f_i, 1) - \sum_{j=1}^{i-1} \left(k \left(t_j, u_j \right) h, 1 \right) \right]
\end{aligned}
$$

En appliquant les estimations standard et en utilisant le lemme (3.1) nous obtenons :

$$\left|\left(\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right), \phi\right)\right| \leq C \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$$

ce qui implique :

$$\left\|\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right)\right\|_{V^*} = \sup_{\|\phi\|_V \leq 1} \left|\left(\delta I^{1-\alpha}, \phi\right)\right| \leq C$$

Maintenant ,on définit les fonctions de Rothe sur l'intervalle I par

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]\,,\ i = 1, ..., n \tag{2.20}$$

$$I_n\left(\overline{u}^n(t)\right) = I^{1-\alpha}\left(u_{i-1}\right) + (t_i - t_{i-1})\,\delta I^{1-\alpha}\left(u_i\right) \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]\,, i = 1, ..., n \tag{2.21}$$

soit $\overline{u}^n$ une fonction d'état définie par :

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} ,\ i = 1, ..., n, \tag{2.22}$$

$$\overline{I_n}\left(\overline{u}^n(t)\right) = \begin{cases} I^{1-\alpha}\left(u_i\right) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ I^{1-\alpha}u\left(0^+\right) = U_1 & t = 0 \end{cases} ,\ i = 1, ...n. \tag{2.23}$$

On note par f^n et K^n les fonctions :

$$f^n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ f_0 & t = 0 \end{cases} ,\ i = 1, ..., n, \tag{2.24}$$

$$K^n(t) = h \sum_{j=0}^{i-1} k\left(t_j, u_j\right) \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]\,, i = 1, ..., n. \tag{2.25}$$

Ensuite, nous définissons g_n, θ_n et θ_n' d'une manière similaire .

$$g_n = \begin{cases} g_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ g_0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\theta_n' = \begin{cases} \theta_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \theta_0 & t = 0 \end{cases}$$

■

D'après le lemme 2.2.1 , on conclut l'estimation à priori suivante :

$$\int_I \|\partial_t I_n\|_{V^*}^2 \leq C.$$

telle que C une constante positive indépendante de i, j, n et h.

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution faible

3.1 Existence

Dans cette partie, nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution au problème variationnel (2.11)

D'aprés le lemme (3.1.1) on peut avoir :

$$\max_I \left\|\overline{I}_n\right\| + \left\|\partial_t I_n\right\|_{L^2(I,V^*)} \leq C$$

par conséquent,(voir [4] lemme (1)) il existe $w \in C(I, V^*) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))$ avec $\partial_t w \in L^2(I, V^*)$

et une suite I_{n_k} telle que

$$I_{n_k} \longrightarrow w \text{ dans } C(I, V^*), \overline{I_{n_k}}(t) \rightharpoonup w(t) \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{3.1}$$

$$I_{n_k}(t) \longrightarrow w(t) \text{ dans } L^2(\Omega), \partial_t I_{n_k} \rightharpoonup \partial_t w \text{ dans } L^2(I, V^*) \tag{3.2}$$

selon le lemme (3.1.1) ,on peut déduire que $\{\overline{u}^n\}_n$ et $\frac{du^n}{dt}$ sont uniformément bornées dans $L^2(I, V)$, alors on peut extraire une sous-suite $\{\overline{u}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2(I, V)$$

$$\frac{du^{n_k}}{dt} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^2(I, V) \tag{3.3}$$

En utilisant le critère de compacité de Kolmogorov on trouve :

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} u \text{ dans } L^2(I, V)$$

$$\frac{du^{n_k}}{dt} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2(I, V) \tag{3.4}$$

D'après toutes les résultats obtenu, on peut annoncer les théorèmes d'exictence suivant

Théorème 3.1 *Il existe $u \in L^2(I, V)$ et $\gamma \in L^2(0, T)$ telle que $\{u, \gamma\}$ est un solution de* (2.1) , (2.4) *dans les sens de la définition* (2.1.1) .

Preuve. *Etape 1 :*(Existance de u)

En vue de (3.2) et (3.3) et d'après théorème de Minty-Browder [7] on a :

$$w = I^{1-\alpha}(u) \quad \text{et} \quad \partial_t w = \partial_t I^{1-\alpha}(u) \tag{3.5}$$

D'autre part ,de l'égalité :

$$I_{n_k}\left(\overline{u}^{n_k}(t)-U_1,\phi\right)=\int_0^t\left(\partial_t I_{n_k}\left(\overline{u}^{n_k}(s),\phi\right)\right)ds \tag{3.6}$$

quand $k\rightarrow\infty$ on obtient

$$\left(I^{1-\alpha}(u)-U_1,\phi\right)=\int_0^t\left(w(s),\phi\right)ds \tag{3.7}$$

ce qui implique

$$\left(I^{1-\alpha}-U_1-\int_0^t\xi(s)\,ds,\phi\right)=0 \tag{3.8}$$

Donc on peut écrire

$$\partial_t I^{1-\alpha}(u)=\xi \tag{3.9}$$

Maintenant, compte tenu de (2.20)et(2.25) l'égalité (2.11) peut être réecrite comme suit

$$\begin{aligned}\int_I\left(\partial_t I_n(t),\phi\right)+\int_I\left(\nabla\overline{u}^{n_k},\nabla\phi\right) &= \int_I\left(f^n,\phi\right)+\int_I\left(k^n(t),\phi\right)-\int_I\left(\overline{g}_n,\phi\right)_{\Gamma_N} \\ &\quad -\int_I\phi_{\Gamma_D}\left|\overline{\theta'}_n+\left(\overline{g}_n,1\right)_{\Gamma_N}-\left(f_n,1\right)-\left(k_n(t),1\right)\right|\end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme f est lipschtzienne, en déduire que :

$$\left\|f^n-f\right\|_{L^2(I,L(\Omega))}\leq\frac{C}{n}$$

alors

$$f^n(t)\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow}f\qquad\text{sur } L^2\left(I,L^2(\Omega)\right) \tag{3.11}$$

Maintenant, en utilise le même argument dans [8] en trouve

$$k^{n_k}\rightharpoonup k(s,u(s))\qquad\text{sur } L^2\left(I,L^2(\Omega)\right)$$

par passage à la limite pour $n \to \infty$ dans (3.10) on conclure que u est vérifiée la (difénition 2.1)

Etape 2 :(Existence de γ)

Nous définissons

$$\gamma_n = u_{n\backslash\Gamma_D} \text{ et } \gamma = u_{\backslash\Gamma_D}$$

Ensuite, il suffit de montrer que γ_n converge vers γ. En utilisant le lemme (3.1.1), nous déduisant que :

$$\begin{aligned}
\|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,V)} &= \|u_{i-1} - u_i + (t - t_{i-1})\,\delta u_i\|_{L^2(I,V)} \\
&= \|(h - (t - t_{i-1}))\,\delta u_i\|_{L^2(I,V)} \\
&\leq (h - (t - t_{i-1}))\,\|\delta u_i\|_{L^2(I,V)} \\
&\leq \frac{C}{n}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que (u^n) et $(\overline{u}^n)$ ont la même limite u .

comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\gamma_n - \gamma\|_{\Gamma_D}^2 &= \int_0^T \|u^n - u\|_{\Gamma_D}^2 \\
&\leq \int_0^T \|u^n - u\|_{\Gamma}^2 \\
&\leq C\int_0^T \|u^n - u\|_V^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Donc $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ dans $L^2(I, L^2(\Gamma_D))$. ■

3.2 Unicité de la solution faible

Théorème 3.2 *supposons que les hypothèses* (Hyp_1) *et* (Hyp_3) *sont satisfaites alors le problème* (2.10) *admet une unique solution faible* u *pour tout* $t \in [0, T]$.

Preuve. supposons qu ' il y ait deux solutions faible u_1 et u_2 au problème (2.10).

Nous soustrayons la formulation variationnelle pour u_1 de celui pour u_2 et nous intégrons par rapport au temps de 0 à τ, telle que $\tau \in [0,T]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \left(I^{1-\alpha}u_1(\tau) - I^{1-\alpha}u_2(\tau), \phi\right) + \left(\int_0^\tau \nabla(u_1-u_2)(t)\,dt, \nabla\phi\right) \\
= \; & \left(\int_0^\tau \int_0^t (k(s,u_1(s))\,ds - k(s,u_2(s)))\,dsdt, \phi\right) \\
& + \phi_{\backslash\Gamma_D}\left(\int_0^\tau \int_0^t (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s)))\,dsdt, 1\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Après, en substituons $\phi = u_1 - u_2$ et en intégrons par rapport à t pour $\eta \in [0,T]$, et après l'intégration partielle du premier terme du côté droit de (3.11) ,on trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \left(\int_0^\tau \int_0^t (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s)))\,dsdt, 1\right)(u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_D}\,d\tau \\
= \; & \int_0^\eta \left(\int_0^t (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s))), 1\right)\int_0^\tau (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_D}\,dsd\tau \\
& - \int_0^\eta \left[\left(\int_0^\tau (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s))), 1\right)\int_0^\tau (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_D}\,ds\right]d\tau \\
\leq \; & \left|\left(\int_0^\eta \int_0^t (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s)))\,dsdt, 1\right)\int_0^\eta (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_D}\,d\tau\right| \\
& + \left|\int_0^\eta \left[\left(\int_0^\tau (k(s,u_2(s))\,ds - k(s,u_1(s))), 1\right)\int_0^\tau (u_1-u_2)_{\backslash\Gamma_D}\,ds\right]d\tau\right|
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En utilisant les inégalités de trace, schwartz et de young et la continuité lipschitzienne de k alors nous déduisons pour le premier terme de droit de (3.12)

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\int_0^\eta \int_0^t \left(k\left(s, u_1\left(s\right)\right) ds - k\left(s, u_2\left(s\right)\right)\right) dsdt, 1 \right) \int_0^\eta \left(u_1 - u_2\right)_{\backslash \Gamma_D} d\tau \right| \qquad (3.13) \\
\leq\ & \left\| \int_0^\eta \int_0^t \left(k\left(s, u_2\left(s\right)\right) ds - k\left(s, u_1\left(s\right)\right)\right) dsdt \right\| \left\| \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\|_{\Gamma_D} \\
\leq\ & c \int_0^\eta \int_0^t \left\| u_2\left(s\right) - u_1\left(s\right) \right\| ds \left\| \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\|_{\Gamma_D} \\
\leq\ & c \int_0^\eta \int_0^t \left\| u_2\left(s\right) - u_1\left(s\right) \right\| dsdt \left\| \nabla \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\| \\
& + c \int_0^\eta \int_0^t \left\| u_2\left(s\right) - u_1\left(s\right) \right\| dsdt \left\| \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\| \\
\leq\ & \frac{c}{2\varepsilon} \int_0^\eta \int_0^t \left\| u_2\left(s\right) - u_1\left(s\right) \right\|^2 dsdt + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \nabla \left(\int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right) \right\|^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\|^2 \\
\leq\ & c_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \left\| u_2\left(s\right) - u_1\left(s\right) \right\|^2 dsdt + \varepsilon \left\| \nabla \left(\int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right) \right\|^2 \\
& + \varepsilon \left\| \int_0^\eta \left(u_1\left(\tau\right) - u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \right\|^2
\end{aligned}$$

Pour le second terme du côtè droit de (3.12) nous déduisons que :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^\eta \left[\left(\int_0^\tau \left(k\left(s,u_2\left(s\right)\right)ds - k\left(s,u_1\left(s\right)\right)\right),1\right)\int_0^\tau \left(u_1-u_2\right)_{\backslash\Gamma_D} ds\right] d\tau\right| \qquad (3.14)\\
\leq\ &\left|\int_0^\eta \left(\int_0^\tau \left(k\left(s,u_2\left(s\right)\right)ds - k\left(s,u_1\left(s\right)\right)\right),1\right)\right|\left|\int_0^\tau \left(u_1-u_2\right)_{\backslash\Gamma_D} ds\right| d\tau\\
\leq\ & c\int_0^\eta \int_0^\tau \left\|u_2\left(s\right)-u_1\left(s\right)\right\| ds \left\|\int_0^\tau \left(u_1\left(s\right)-u_2\left(s\right)\right) ds\right\|_{\Gamma_D} d\tau\\
\leq\ & c\int_0^\eta \int_0^\tau \left\|u_2\left(s\right)-u_1\left(s\right)\right\|^2 dsdt + c\int_0^\eta \left\|\int_0^\tau \left(u_1\left(s\right)-u_2\left(s\right)\right) ds\right\|_{\Gamma_D}^2 d\tau\\
\leq\ & c\int_0^\eta \int_0^\tau \left\|u_2\left(s\right)-u_1\left(s\right)\right\|^2 dsdt + c\int_0^\eta \left\|\nabla\int_0^\tau \left(u_1\left(s\right)-u_2\left(s\right)\right) ds\right\|^2 d\tau\\
&+c\int_0^\eta \left\|\int_0^\tau \left(u_1\left(s\right)-u_2\left(s\right)\right) ds\right\|^2 d\tau\\
\leq\ & c\int_0^\eta \int_0^\tau \left\|u_2\left(s\right)-u_1\left(s\right)\right\|^2 dsdt + c\int_0^\eta \left\|\nabla\int_0^\tau \left(u_1\left(s\right)-u_2\left(s\right)\right) ds\right\|^2 d\tau
\end{aligned}
$$

D'autre part en trouve pour le deuxième tèrme intégré de (3.11)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\eta \left(\int_0^\tau \int_0^t \left(k\left(s,u_2\left(s\right)\right) - k\left(s,u_1\left(s\right)\right)\right) dsdt, u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right) d\tau \qquad (3.15)\\
\leq\ & \left\|\int_0^\tau \int_0^t \left(k\left(s,u_2\left(s\right)\right) - k\left(s,u_1\left(s\right)\right)\right) dsdt\right\| \int_0^\eta \left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\| d\tau\\
\leq\ & c_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \left\|u_2\left(s\right)-u_1\left(s\right)\right\|^2 dsdt + \varepsilon\int_0^\eta \left\|u_1\left(\tau\right)-u_2\left(\tau\right)\right\|^2 d\tau
\end{aligned}
$$

En applique le théorème de la valeurs moyenne pour le terme intégré du côté gauche de

(3.11), sachant que $(I^{1-\alpha})' \geq \delta$, on trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \left(I^{1-\alpha}u_1(\tau) - I^{1-\alpha}u_2(\tau), u_1(\tau) - u_2(\tau)\right) d\tau \\
& + \int_0^\eta \left(\int_0^\tau \nabla (u_1 - u_2)(t)\, dt, \nabla (u_1 - u_2)(\tau)\right) d\tau \\
= & \int_0^\eta \left(\left(I^{1-\alpha}\right)'(u_1(\tau) - u_2(\tau)), u_1(\tau) - u_2(\tau)\right) d\tau \\
& + \frac{1}{2}\left\|\nabla \int_0^\eta (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2 \\
\geq & \ \delta \int_0^\eta \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|\nabla \int_0^\eta (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2
\end{aligned}$$

Nous rassemblons les inégalités (3.13),(3.14) et (3.15) on trouve :

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^\eta \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|\nabla \int_0^\eta (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2 \\
\leq & \ c_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|^2 dsdt + \varepsilon \left\|\nabla \int_0^\eta (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2 \\
& + \varepsilon \int_0^\eta \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 d\tau + c \int_0^\eta \left\|\nabla \int_0^\tau (u_1(s) - u_2(s))\, ds\right\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

Nous obtenons pour une valeur très petite et positive de ε

$$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 d\tau + \left\|\nabla \int_0^\eta (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2 \\
\leq & \ c \int_0^\eta \left(\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|^2 ds + \left\|\nabla \int_0^t (u_1(s) - u_2(s))\, ds\right\|^2\right) dt
\end{aligned}$$

Ce qui est valable pour tout $\eta \in [0, T]$, on applique le lemme de gronwall, on trouve :

$$\int_0^T \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 d\tau + \left\|\nabla \int_0^T (u_1(\tau) - u_2(\tau))\, d\tau\right\|^2 = 0 \tag{3.16}$$

Enfin, et d'après la posivité de les termes de la côté gauche de (3.16) :

$u_1 = u_2$ $p.p$ dans $(0, T) \times \Omega$ donc la solution est unique. ■

Bibliographie

[1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson 1987.

[2] M. Thérèse, L.Sonrier,Distrutions et Espace de Sobolev et Applications,ellipses/éditions marketing S. A 1998.

[3] J. Necas. les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,Academia, Prague, 1967

[4] J. Kacur, Method of Rothe in Evolution Equations, in : Teubner Texte zur Mathematik, vol. 80. Teubner, Leipzig, 1985.

[5] A. Chaoui and N. Rezgui. Soloution to fractional pseudoparbolic equation with fractional integral condition. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser, 67(2) :205213,2018.

[6] H. M. Srivastava A. A. Kilbas and J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science B. V., Amesterdam, 2006.

[7] L.C. Evans. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, 74 :205–2015, 1990.

[8] V. Raghavendra D. Bahuguna. Rothe's method to parabolic integrodiferential equation via abstact integrodifferential equation. Appl. anal, 33 :153–167, 1989.

[9] M. S. El-Azab. Solution of nonlinear transport diffusion problem by linearisation. Appl. Math. Comput., 192 :205–2015, 2007.