

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**  
**Et analyse numérique**

Par :

**MERABTI NARIMANE**

## **Intitulé**

**Sur quelques méthodes numériques de résolution des  
équations intégro-différentielles.**

Dirigé par : **Dr. Fernane Khaireddine**

Devant le jury composé de :

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr. Frioui Assia</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>Dr. Fernane Khaireddine</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr. Djenaoui Saliha</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>

**Session Septembre 2020**



---

# Dédicace

Merci Allah de m'avoir donné la capacité d'écrire de penser et de pouvoir et de la patience pour réaliser mon rêve tant.

Je dédie cet humble travail à celui qui m'a donné la vie, qui elle s'est sacrifiée pour mon bonheur et mon succès pour ma mère et mon père aussi et pour mes sœurs et ma famille Merabti en général

Je dédie un cadeau spécial à mon mari qui m'a aidé avec tout jusqu'à la dernière minute.

Je n'oublie pas mes amis et mes camarades.

A tout le monde j'aime dédie ce travail.



---

# Remerciements

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances au Docteur "**Fernane Khairddine**" de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail. Je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien, sa grande disponibilité et surtout ses conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.

J'exprime également mes chaleureux remerciement au docteur **Frioui Assia** et au Docteur **Djenaoui Saliha**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.



# Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté et expliqué la méthode de Ritz, la méthode d'itération variationnelle, la méthode des éléments finis et leurs applications pour rechercher une solution approximative à certaines équations intégrales et essayer de faire une comparaison entre ces méthodes. Nous avons donc pris trois exemples d'équations intégrales. Ainsi, nous avons comparé l'approche numérique avec la solution exacte.

**Mots clés :**

Equation Intégrale, Equations intégrales, Méthode de Ritz, La méthode d'itération variationnelle, Eléments finis.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Définitions et Préliminaires</b>	<b>7</b>
2.1	Equations intégrales . . . . .	7
2.2	Types des équations intégrales . . . . .	7
2.3	Equations integrales lineaires . . . . .	8
2.3.1	Equations intégrale de Fredholm . . . . .	8
2.3.2	Equations intégrale de Volterra . . . . .	8
2.3.3	Equation intégrale d'Abel (Singulière) . . . . .	8
2.3.4	Equation intégrale de Wiener-Hopf . . . . .	9
2.3.5	Equation intégrale de de Renwal . . . . .	9
2.4	Equations integrales non lineaires . . . . .	9
2.5	Equation intégrales mixte . . . . .	10
2.5.1	Equation intégrale de Fredholm-Volterra . . . . .	10
2.5.2	Equation intégrale de Volterra- Fredholm . . . . .	10
2.5.3	Equations intégrales singulières . . . . .	10
2.6	Relation entre équation différentielle et équation intégrale . . . . .	10
2.7	Equation intégro- différentielle . . . . .	12
2.7.1	Classification des équations intégrales . . . . .	12
2.7.2	Equations intégro-différentielles . . . . .	13
2.8	Equation intégro- différentielle singulier . . . . .	14
2.8.1	Classification des équations intégro- différentielles (E.I-D) . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Méthodes de résolution approchées des équations intégro-différentielles</b>	<b>16</b>
3.1	Méthode de Ritz ([8]) . . . . .	16
3.1.1	Principe de la méthode . . . . .	16

3.1.2	Application de la méthode de Ritz pour résolution des équations intégrales-différentielles de Volterra d'ordre deux à coefficients continus . . . . .	18
3.1.3	Formulation variationnelle . . . . .	18
3.2	Exemples . . . . .	21
3.3	Résolution des équations intégrales-différentielles (E.I-Ds) linéaires en utilisant la méthode des itérées variationnelle (VIM)([29]) . . . . .	25
3.3.1	Description de la méthode . . . . .	25
3.3.2	Application de la méthode itérative variationnelle (VIM) pour les EDOs d'ordre $n$ . . . . .	25
3.3.3	Application de la méthode (VIM) pour les équations intégrales-différentielles de Volterra d'ordre 2 . . . . .	26
3.4	Exemples . . . . .	28
3.5	Méthode des éléments finis([7], [10]) . . . . .	33
3.6	Exemples . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>

# Introduction générale



De nombreux problèmes scientifiques (mécaniques, physiques, chimiques, biologiques, ...) sont modélisés par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles (EDP) où une équation intégrale. Une équation intégro-différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale, mais aussi ses dérivées.

Il est difficile de résoudre ces équations de manière analytique dans certains cas particuliers, par conséquent, la résolution numérique d'équations intégro-différentielles est très souvent nécessaire, faute de l'existence de solutions analytiques.

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout d'exhiber des méthodes d'approximation efficaces.

L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilité de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur.

Suivant ces axes normaux, notre travail est divisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale (Intégro-différentielle).

Le deuxième chapitre est consacré à la description et à l'analyse de trois méthodes d'approximation sur lesquelles sont appliqués trois exemples instructifs.

# Définitions et Préliminaires



Dans ce chapitre introductif nous rappelons quelques notions de base qui seront utiles dans la suite de notre travail.

## 2.1 Equations intégrales

**Définition 2.1.1** Une équation intégrale également notée (EI) est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous un ou plusieurs signes intégraux. Par exemple :

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.1)$$

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

$$u(x) = \int_a^b k(x,t)[u(t)]^2 dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.3)$$

où la fonction  $u(x)$ , est les fonctions  $f(x)$  et  $K(x;t)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes, sont toutes des équations intégrables. Les fonctions mentionnées ci-dessus peuvent être des fonctions à valeur réelle ou complexe dans  $x$  et  $t$ . Dans ce travail, nous n'avons considéré que les fonctions à valeur réelle.

## 2.2 Types des équations intégrales

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm (Ivare Fredholm (1866-1927), mathématicien Suédois), et les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra (Vito Volterra (1860-1940), mathématicien Italien).

## 2.3 Equations integrales lineaires

### 2.3.1 Equations integrale de Fredholm

On appelle equation integrale de Fredholm dans laquelle les deux bornes d'integrations sont constantes avec la forme :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k((x,t), u(t))dt \quad (2.1)$$

Une equation integrale de Fredholm (premiere espèce) si  $\beta(x) = 0$  et de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k((x,t), u(t))dt = 0 \quad (2.2)$$

► Une equation integrale de Fredholm (2<sup>ème</sup> espèce) si  $\beta(x) \neq 0$  est de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k((x,t), u(t))dt = u(x) \quad (2.3)$$

### 2.3.2 Equations integrale de Volterra

On appelle equation integrale de Volterra dans laquelle l'un des deux bornes d'integrations est variable avec la forme :

$$\beta(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k((x,t), u(t))dt \quad (2.4)$$

Une equation integrale de Volterra (premiere espèce) si  $\beta(x) = 0$  est de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k((x,t), u(t))dt = 0 \quad (2.5)$$

Une equation integrale de Volterra (2<sup>ème</sup> espèce) si  $\beta(x) = \text{constant} = c \neq 0$ , Donc l'equation (2.4) est de la forme :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k((x,t), u(t))dt \quad (2.6)$$

► Si  $\beta(x) \neq 0$ , alors l'equation (2.4) est appelee une equation integrale de Volterra (3<sup>ème</sup> espèce).

### 2.3.3 Equation integrale d'Abel (Singuliere)

Quelques equations integrales s'appellent singulieres, quelques auteurs appellent une equation singuliere si l'integrale ne peut pas etre interpretee comme d'habitude (c'est-à-dire : dans le sens de Riemann ou de Lebesgue), mais doit etre considere en tant qu'integrale de valeur principale. Equation integrale d'Abel lineaire une equation de la forme :

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{|x-t|^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.7)$$

Où  $\alpha$  est une constant.

### 2.3.4 Equation intégrale de Wiener-Hopf

On appelle équation intégrale de Wiener-Hopf une équation de la forme :

$$c(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{+\infty} k(x-t)u(t)dt \quad (2.8)$$

### 2.3.5 Equation intégrale de de Renwal

On appelle équation intégrale de Renwal une équation de la forme :

$$c(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x-t)u(t)dt \quad (2.9)$$

## 2.4 Equations integrales non lineaires

En générale les équations intégrales non linéaires sont de la forme :

$$c(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} g(x, t, u(t))dt \quad (2.1)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $c(x)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues,  $h$  est une fonction non linéaire et  $\lambda$  un paramètre réel.

Si  $f(x) = 0$  donc l'équation (2.1) est dite homogène.

► Si  $b(x) = x$  alors l'équation (2.1) est appelée équation intégrale de Volterra :

$$c(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x g(x, t, u(t))dt \quad (2.2)$$

a)- Si  $c(x) = 1$  alors (2.2) est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

b)- Si  $c(x) = 1$  alors (2.2) est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Si  $b(x) = b$  ( $b = \text{constant}$ ) alors l'équation (2.1) est appelée équation intégrale de Fredholm :

$$c(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b g(x, t, u(t))dt \quad (2.3)$$

a)- Si  $c(x) = 1$  alors (2.3) est appelée équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

b)- Si  $c(x) = 1$  alors (2.3) est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce.

## 2.5 Equation intégrales mixte

### 2.5.1 Equation intégrale de Fredholm-Volterra

On appelle équation de Fredholm-Volterra une équation de la forme :

$$\beta(x)u(x,t) + \gamma \int_a^b k(x,y)u(y,t)dy + \gamma \int_0^t F(t,s)u(x,s)ds = f(x,t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty \quad (2.1)$$

La fonction  $\beta(x)$  détermine le type de l'équation intégrale.

### 2.5.2 Equation intégrale de Volterra- Fredholm

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\beta(x)u(x,t) + \gamma \int_0^t \int_a^b k(x,t)F(t,s)u(y,s)dyds = f(x,t), \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

### 2.5.3 Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux bornes d'intégration sont infinies, ou bien le noyau  $k(x,t)$  devient infini au voisinage des bornes d'intégration.

**Définition 2.5.1** Une équation intégrale de la forme :

$$u(x) = f(x) + \int_{\omega} M(x,t)k(x,t)u(t)dt \quad (2.3)$$

Est singulière si  $M(x,t)$  admet une singularité ou le domaine  $\omega$  n'est pas bornée.

## 2.6 Relation entre équation différentielle et équation intégrale

Le problème aux limites pour les équations différentielles se ramène à une équation intégrale (appelée équation intégrale de Fredholm de seconde espèce) au moyen de la fonction de Green :

Considérons un exemple relatif au problème de Cauchy :

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x)u = f(x) \quad (2.1)$$

à coefficients continus  $a_i(x)$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) avec les conditions initiales :  $u^{(i)}(0) = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .  
où  $u^{(i)}(0)$  désigne la dérivée d'ordre  $i$  de la fonction  $u$  au point 0.

Cette équation peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f(x) \quad (2.2)$$

avec les conditions initiales :  $u^{(i)}(0) = \alpha_i, i = 0, 1$ .

Posons :

$$y(x) = \frac{d^2u}{dx^2}(x) \quad (2.3)$$

On intègre cette dernière équation et en utilisant les conditions initiales :

$$u'(x) = \int_0^x y(t)dt + \alpha_1 \quad (2.4)$$

et en utilisant la formule ;

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x}_{n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (2.5)$$

Compte tenu de (2.3) et de (2.4) mettons l'équation différentielle (2.2) sous la forme :

$$y(x) + \int_a^x a_1(x)y(t)dt + \alpha_1 a_1(x) + \int_a^x a_2(x)(x-t)y(t)dt + \alpha_1 x a_1(x) + \alpha_0 a_2(x) = f(x) \quad (2.6)$$

Posons :

$$K(x;t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (2.7)$$

et

$$f(x) = F(x) - \alpha_1 a_1(x) - \alpha_1 x a_2(x) - \alpha_0 a_2(x) \quad (2.8)$$

Nous ramenons l'équation (2.2) à la forme :

$$y(x) = \int_0^x K(x;t)y(t)dt + f(x) \quad (2.9)$$

i.e. nous obtenons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

L'unicité de la solutions de l'équation intégrale (2.2) résulte de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continues dans un voisinage du point  $x = 0$ .

Inversement, en résolvant l'équation intégrale (2.9) avec  $K$  et  $f$  définis par les formules (2.7) et (2.8), puis partant  $y(x)$  obtenue dans la dernière équation (2.9), nous obtenons la solution de (2.2) vérifiant

les conditions initiales  $u^{(i)}(0) = \alpha_i, i = 0, 1$ .

## 2.7 Equation intégro- différentielle

**Définition 2.7.1** Une équation intégro-différentielle (E.I.D) est composée de deux opérations intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnu  $u(x)$  avec la forme générale d'une équation intégro- différentielle non linéaire d'ordre  $n$  :

$$u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), \lambda \int_E k(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t) dt) \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales :

$$u(\alpha) = \beta_0, u'(\alpha) = \beta_1, u''(\alpha) = \beta_2, \dots, u^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1} \quad (2.2)$$

Tels que  $\beta_i, 0 \leq i \leq n-1$  sont des nombres donnés,  $u, u', u'', \dots, u^{(n)}$  sont des fonctions inconnues ;  $k(x, t)$  : Noyau de l'équation intégro-différentielle,  $E$  : est un ensemble fermé borné d'un espace euclidien de dimension finie,

$x, t$  : sont des éléments de cet espace.  $n, m$  : sont des nombres naturelles.

$\lambda$  : Est un paramètre numérique.

**Remarque 2.7.2** Une équation intégro-différentielle linéaire d'ordre  $n$  est de la forme :

$$\sum_{i=0}^n p_i(x) u^{(i)}(x) = \lambda \int_T k(x, t) \sum_{j=0}^m b_j(t) u^{(j)}(t) dt + f(x) \quad (2.3)$$

Nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=0}^m b_j(t) u^{(j)}(t) = M_t(u) \quad (2.4)$$

et

$$\sum_{i=0}^n p_i(x) u^{(i)}(x) = L_x(u) \quad (2.5)$$

Avec  $p_i(x), b_j(x)$  et  $f(x)$  : sont des fonctions données avec  $(0 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq n)$ .

### 2.7.1 Classification des équations intégrales

En théorie classique, on distingue une différence entre équation intégrale de Volterra et équation intégrale de Fredholm.

Les classifications de (E.I) ont un rôle très important et sont classées par leurs caractéristiques en quatre types qui convient.

1. Si les bornes d'intégration sont fixés, alors l' (E.I) est dite de Fredholm :

$$L_x(u) = \lambda \int_a^b k(x,t)M_t(u) + f(x) \quad (2.6)$$

2. Si  $b = x$  alors (E.I-D) est dit de Volterra :

$$L_x(u) = \lambda \int_a^x k(x,t)M_t(u) + f(x) \quad (2.7)$$

3. Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l' (E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra :

$$L_x(u) = \lambda_1 \int_a^b k(x,t)M_t(u) + \lambda_2 \int_a^x k(x,t)M_t(u) + f(x) \quad (2.8)$$

### 2.7.2 Equations intégrro-différentielles

la forme générale d'une équation intégrro-différentielle non linéaire d'ordre  $n$  est :

$$u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), \lambda \int_E k(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t))dt) \quad (2.9)$$

Avec les conditions initiales :  $u^{(i)}(a) = \alpha_i, i = 1; n - 1, a, \alpha_i$  nombres donnés

$u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)$  sont des fonctions inconnues.

$K$  : noyau de l'équation intégrro-différentielle.

$E$  : un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension fini,(

$x$  et  $t$  sont des éléments de cet espace ).

$n$  et  $m$  sont des nombres naturels.

$\lambda$  : est paramètre numérique.

La forme linéaire d'une (E.I-D) d'ordre  $n$  est :

$$u^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x,t)u^{(m)}(t)dt \quad (2.10)$$

$\alpha_i(x)$  et  $k(x,t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données,  $\lambda$  : est paramètre numérique.

L'ordre de (E.I-D) est l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparait dans l'opérateur différentiel.

– Type de (E.I-D), (espèce) L' (E.I-D) est dite de première espèce si la partie différentiel est nulle, sinon est dit de deuxième espèce.

**Remarque 2.7.3** Si la fonction dépend d'une seule variable alors l' (E.I-D) est dite ordinaire sinon (E.I-D) est dite partielle.

## 2.8 Equation intégro- différentielle singulier

Une équation intégro-différentielle est dite singulier si :

1. L'un ou les deux bornes de l'intégration sont infinis,
2. Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

**Remarque 2.8.1**

$$\sum_{i=0}^n p_i(x)\varphi^{(i)}(x) = \lambda \int_T k(x, t) \sum_{j=0}^m b_j(t)\varphi^{(j)}(t)dt + f(x) \quad (2.1)$$

Nous pouvons écrit :

$$\sum_{j=0}^m b_j(t)\varphi^{(j)}(t) = M_t(\varphi) \quad (2.2)$$

et :

$$\sum_{i=0}^n p_i(x)\varphi^{(i)}(x) = L_x(\varphi) \quad (2.3)$$

Avec  $p_i(x), b_j(x)$  et  $f(x)$  :sont des fonctions données aves ( $0 \leq j \leq m$  ,  $0 \leq i \leq n$ ).

### 2.8.1 Classification des équations intégro- différentielles (E.I-D)

Les classifications de (E.I-D) ont un rôle très important et sont classées par leurs caractéristiques en quatre types qui convient.

**1)-** Bornes d'intégration : Si les bornes d'intégration sont fixés, alors l' (E.I-D) est dite de Fredholm :

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^b k(x, t)M_t(\varphi) + f(x) \quad (2.4)$$

**2)-** Si  $b = x$  alors (E.I-D) est dit de Volterra :

$$L_x(\varphi) = \lambda \int_a^x k(x, t)M_t(\varphi) + f(x) \quad (2.5)$$

**3)-** Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l' (E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra :

$$L_x(\varphi) = \lambda_1 \int_a^b k(x, t)M_t(\varphi) + \lambda_2 \int_a^x k(x, t)M_t(\varphi) + f(x) \quad (2.6)$$

**Remarque 2.8.2** 1)- *L'ordre de (E.I-D) est l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparait dans l'opérateur différentiel.*

2)- *L'(E.I-D) est dite de première espèce si la partie différentiel est nul, sinon est dit de deuxième espèce.*

3)- *Si la fonction dépende d'une seule variable alors l' (E.I-D) est dite ordinaire sinon (E.I-D) est dite partielle.*

### **Equation intégro- différentielle singulier**

Une équation intégro-différentielle est dite singulier si :

- L'un ou les deux bornes de l'intégration sont infinis.
- Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.



# Méthodes de résolution approchées des équations intégro-différentielles

Il existe de très nombreuses méthodes de résolution des équations intégro-différentielles et aucune méthode n'est clairement supérieure à toutes les autres dans toutes les circonstances, ces méthodes sont analytiques, semi analytiques.

Ce chapitre s'intéresse aux équations intégro-différentielles du second ordre de la forme :

$$\begin{cases} -u''(x) + pu'(x) + qu(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt, & a < x < b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  sont des fonctions données,  $k$  est le noyau.

Indiquons quelques méthodes classiques de résolution des équations intégrales, pour des données assez régulières.

## 3.1 Méthode de Ritz ([8])

### 3.1.1 Principe de la méthode

La méthode de Ritz est une technique de discrétisation de problème variationnel et est en quelque sorte le précurseur de la méthode des éléments finis.

Soit donc un problème variationnel vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in \mathbb{V} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbb{V}$  est un espace de Hilbert.

Où la fonction  $v$  vérifie les conditions aux limites essentielles homogènes (le cas des conditions aux limites non homogènes nécessite la construction d'une fonction de relèvement  $\delta_u$  mais ne pose pas de difficultés théoriques supplémentaires).

On se donne maintenant  $N$  fonction  $\phi_j \in V$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , appelées fonction d'interpolation de Ritz

ou plus simplement fonctions de Ritz vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes.

On suppose ensuite que l'on peut écrire :

$$u(x) = u^N(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) \quad (3.2)$$

Les  $N$  coefficients  $u_j$  sont à déterminer et le problème est maintenant de dimension finie  $N$ .

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions  $\phi_j$  forme un sous-espace de dimension  $N$  de  $\mathbb{V}$  noté  $\mathbb{V}^N$  (toujours en supposant que les fonctions  $\phi_j$  sont choisies dans  $\mathbb{V}$  dès le départ et qu'elles sont linéairement indépendantes).

On considère donc le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^N \in \mathbb{V}^N \text{ telle que :} \\ a(u^N, v^N) = l(v^N), \forall v^N \in \mathbb{V}^N \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ou encore :

$$a\left(\sum_{j=1}^N u_j \phi_j, v^N\right) = l(v^N), \forall v^N \in \mathbb{V}^N \quad (3.4)$$

La bilinéarité de  $a(.,.)$  nous permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, v^N) = l(v^N), \forall v^N \in \mathbb{V}^N \quad (3.5)$$

On va maintenant construire un système linéaire (parce que le problème de départ (3.5) est linéaire) dont les inconnues sont les coefficients  $u_j$ .

Soit donc  $N$  nouvelles fonctions  $\tilde{\phi}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  appartenant à l'espace  $\mathbb{V}^N$ .

Puisque l'équation précédente est vraie quelle que soit la fonction  $v^N \in \mathbb{V}^N$ , elle est valide pour chacune des fonctions  $\tilde{\phi}_i$  et on a :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, \tilde{\phi}_i) = l(\tilde{\phi}_i), 1 \leq i \leq N \quad (3.6)$$

Qui est un système linéaire  $N \times N$  de la forme :

$$AU = F \quad (3.7)$$

Où la matrice  $A$  et les vecteurs  $Y$  et  $F$  ont pour coefficients :

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \tilde{\phi}_1) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_1) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_1) \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_2) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_2) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_N) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_N) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\tilde{\phi}_1) \\ l(\tilde{\phi}_2) \\ \vdots \\ l(\tilde{\phi}_N) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Si les fonctions  $\phi_j$  et  $\tilde{\phi}_i$  sont bien choisies, ce système linéaire est inversible et on peut dès lors déterminer les inconnues  $u_j$  et ainsi obtenir une approximation  $u^N(x)$  de la fonction  $u$  par la relation (3.2).

Un choix naturel pour les fonction  $\tilde{\phi}_i$  consiste à prendre tout simplement  $\tilde{\phi}_i = \phi_i$ , pour tout  $i$ .

C'est la méthode de **Ritz** ou méthode de **Rayleigh-Ritz**.

Dans le cas où  $\tilde{\phi}_i \neq \phi_i$ , on parle de la méthode de **Petrov-Galekin**.

### 3.1.2 Application de la méthode de Ritz pour résolution des équations intégral-différentielles de Volterra d'ordre deux à coefficients continus

Considérons l'équation intégral-différentielle de Volterra linéaire définie comme suit :

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt, & a < x < b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont des fonctions données continues sur  $[a, b]$  tels que :

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dt \leq \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \infty \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Formulation variationnelle

Puisque les conditions aux limites essentielles en  $x = a$  et  $x = b$ , on peut prendre :

$$\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{H}^1([a, b]) / v(a) = 0, v(b) = 0\} = \mathbb{H}_0^1([a, b]) \quad (3.11)$$

Soit  $w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , on multiplie par  $v \in \mathbb{V}$  et intègre :

$$\begin{aligned} \int_a^b -u''(x)v(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx \\ + \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)u(t)dt \right) v(x)dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

Puisque le terme de bord est nul en  $x = a$  et  $x = b$ . On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx + \\ + \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)u(t)dt \right) v(x)dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

La formulation variationnelle s'écrit donc : Trouver  $u \in \mathbb{V}$  tel que :

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.14)$$

où

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx - \int_a^b \left( \int_a^x k(x, t)u(t)dt \right) v(x)dx \quad (3.15)$$

et

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (3.16)$$

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnelle (3.14) le théorème de Lax-Milgram apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution dans un cadre précis.

**Théorème 3.1.1 (Lax-Milgram)** Soit  $a(.,.)$  la forme bilinéaire définie par (3.14), et soit  $M_1 \leq p(x) \leq M_2$ ,  $P_1 \leq q(x) \leq P_2$  et  $0 \leq q'(x) \leq T_2$ . Alors  $a(.,.)$  est une  $\mathbb{V}$ -ellipticité, (3.14) a une solution unique.

En effet de (3.14), nous avons

**Preuve.**

$$|a(u, v)| = \left| \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx - \int_a^b \left( \int_a^x k(x, t)u(t)dt \right) v(x)dx \right| \quad (3.17)$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + P_2 \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + M_2 \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \\ &\quad + KR \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} = (1 + P_2 + M_2 + KR) \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \\ &= C \|u(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \cdot \|v(x)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où  $C = 1 + P_2 + M_2 + KR$ ,  $K = \text{Max}|K(x, t)|$ ,  $x \in [a, b]$ , et  $R = \|1\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2$ . Ce qui montre que  $a(.,.)$  est continue.

De plus,

$$a(v, v) = \int_a^b v'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)v'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)v(x)v(x)dx - \int_a^b \left( \int_a^x k(x, t)v(t)dt \right) v(x)dx \quad (3.19)$$

nous avons :

$$\int_a^b v'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)v'(x)v(x)dx \geq \int_a^b (v'(x))^2 dx \geq \frac{1}{1+c} \|v(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \quad (3.20)$$

où  $c$  est la constante de Poincaré.

et

$$\int_a^b p(x)v'(x)v(x)dx \geq -\frac{1}{2} \int_a^b p'(x)(v(x))^2 dx \geq -\frac{T_2}{2} \int_a^b p'(x)(v(x))^2 dx \geq -\frac{T_2}{2} \|v(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \quad (3.21)$$

$$- \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)v(t)dt \right) v(x)dx \geq -KR \|v(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \quad (3.22)$$

Ainsi

$$a(v, v) \geq \left( \frac{1}{1+c} - \frac{T_2}{2} - KR \right) \|v(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \geq C' \|v(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \quad (3.23)$$

ce qui montre que  $a(.,.)$  est V-elliptique

–  $l(.)$  définie sur  $\mathbb{V}$  est continue si :

$$\exists c > 0 : |l(v)| \leq c \|v\|_{\mathbb{V}}, \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.24)$$

On peut à présent écrire

$$|l(v)| = \left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \|v\|_{\mathbb{V}(\Omega)} \quad (3.25)$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont donc vérifiées et on peut en déduire l'existence et l'unicité d'une ■

solution  $u \in \mathbb{V}$  de la formulation variationnelle.

On relève maintenant les conditions aux limites essentielles

On pose :

$$u(x) = u_g(x) + \delta_u(x), \text{ avec } \delta_u(a) = \delta_u(b) = 0 \quad (3.26)$$

et on peut choisir tout simplement la fonction  $u_g(x) = \frac{\alpha-\beta}{a-b}x + \frac{\alpha-\beta}{a-b}$  qui appartient à  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  et qui satisfait les les conditions aux limites essentielles :

On a alors  $\forall v \in \mathbb{V}$  :

$$\begin{aligned} \int_a^b (u_g(x) + \delta_u(x))' v'(x)dx + \int_a^b p(x)(u_g(x) + \delta_u(x))' v(x)dx + \int_a^b q(x)(u_g(x) + \delta_u(x)) v(x)dx \\ - \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)(u_g(t) + \delta_u(t))dt \right) v(x)dx = \int_a^b f(x)w(x)dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \int_a^b \delta_u(x)'v'(x)dx + \int_a^b p(x)\delta_u(x)'v(x)dx + \int_a^b q(x)\delta_u(x)v(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x k(x,t)\delta_u(t)v(x)dx\right. \\ & \left. = \int_a^b f(x)v(x)dx - \int_a^b u'_g(x)v'(x)dx - \int_a^b p(x)u'_g(x)v(x)dx - \int_a^b q(x)u_g(x)v(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x k(x,t)u_g(t)v(x)dx\right) \right. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pour la méthode de Ritz, on peut ici choisir les fonctions  $\varphi_i \in \mathbb{V}$  et vérifier les conditions aux limites essentielles homogènes. Dans ce cas : ce choix est arbitraire si on s'assure que  $\varphi_i \in \mathbb{V}$ . On peut prendre par exemple :

$$\varphi_i(x) = [(a-x)(b-x)]^i, i \geq 1 \quad (3.29)$$

et on s'assure facilement que toutes les conditions sont bien remplies.

En remplaçant (3.29) dans (3.28). La matrice  $A$  correspondante a pour coefficients :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \int_a^b \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx + \int_a^b p(x)\varphi'_i(x)\varphi_j(x)dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + \\ & \int_a^b \left(\int_a^x k(x,t)\varphi_i(t)dt\right)\varphi_j(x)dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Tandis que le vecteur  $b$  a pour coefficients :

$$b_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx - \int_a^b p(x)u'_g(x)\varphi_i(x)dx - \int_a^b q(x)u_g(x)\varphi_i(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x k(x,t)u_g(t)\varphi_i(x)dx\right) \quad (3.31)$$

On obtient un système linéaire :

$$Ac = b \quad (3.32)$$

Ce système linéaire est ensuite résolu par les techniques habituelles d'algèbre linéaire.

## 3.2 Exemples

**Exemple 3.2.1** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} -u''(x) + (1-x^2)u(x) = f(x) - \int_0^x xtu(t)dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution exacte de cette équation :  $u_{ex}(x) = x - x^2$ . Avec  $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 + x^2 + x + 2$ .

En faisant varier la taille  $n$ , si tout se passe bien, on doit se rapprocher d'une éventuelle solution analytique. En se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour  $n = 1$  afin d'obtenir :

$$u_n(x) = x(x-1) = x - x^2 \quad (3.2)$$

**Exemple 3.2.2** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :*

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) + \int_0^x (x+t)u(t)dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1 \\ u(1) = e \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution exacte de cette équation :  $u(x) = e^x$ . Avec  $f(x) = (1-2x)e^x + x - 1$

En faisant varier la taille  $n$ , en se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour  $n = 1$ .

$$u_n(x) = 1 + 0.8719x + 0.8464x^2 \quad (3.4)$$

Pour estimer la précision de la solution numérique, nous avons calculé l'erreur absolue :  $E_i = |u_{ex}(x_i) - u_n(x_i)|$  sur tous les nœuds de coordonnées  $x_i = 0, 0.1, \dots, 1$ .

La figure ( 3.1) et le tableau (3.1) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $n = 2$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_n$	$ u_{ex}(x_i) - u_n(x_i) $
0	1	1	0
0.1	1.10517091807565	1.09565496315743	0.00951595491822
0.2	1.22140275816017	1.20823730846785	0.01316544969232
0.3	1.34985880757600	1.33774703593127	0.01211177164473
0.4	1.49182469764127	1.48418414554769	0.00764055209358
0.5	1.64872127070013	1.64754863731709	0.00117263338303
0.6	1.82211880039051	1.82784051123950	0.00572171084899
0.7	2.01375270747048	2.02505976731489	0.01130705984442
0.8	2.22554092849247	2.23920640554328	0.01366547705081
0.9	2.45960311115695	2.47028042592467	0.01067731476772
1	$e$	$e$	0

TABLE 3.1 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $n = 2$ .

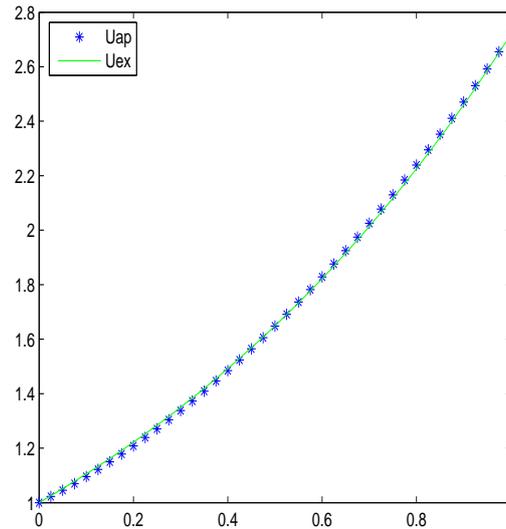


FIGURE 3.1 – Solution exacte et solution numérique obtenues par la méthode de Ritz pour  $n = 2$

La comparaison est un peu moins convaincante. La situation s'améliore cependant très rapidement lorsque  $n$  augmente.

**Exemple 3.2.3** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} u''(x) - xu(x) = f(x) + \int_{-1}^x xt u(t) dt, & -1 \leq x \leq 1 \\ u(-1) = 1 \\ u(1) = \sqrt{3} \end{cases} \quad (3.5)$$

dont la solution exacte est :  $u(x) = \sqrt{x+2}$ .

Avec  $f(x) = -\frac{1}{60(x+2)^{\frac{3}{2}}} \left( 56x(x+2)^{\frac{3}{2}} - 16x + 48x^2 + 156x^3 + 112x^4 + 24x^5 + 15 \right)$ .

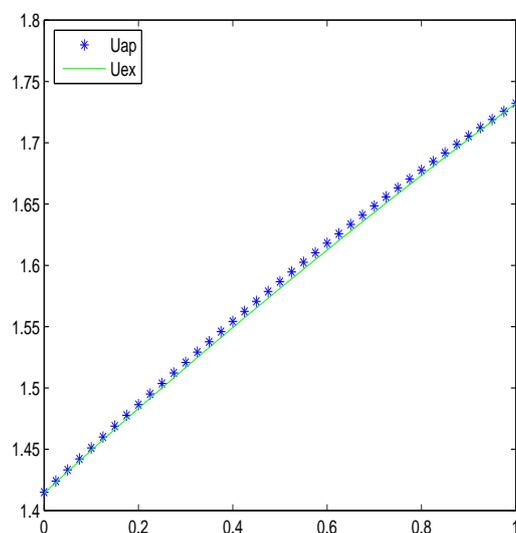
En faisant varier la taille  $n$ , en se servant du logiciel Matlab, on a résolu ce système pour  $n = 2$ .

$$u_n(x) = \sqrt{2} - 0.0039x + 0.3660x^2 - 0.0435x^3 \quad (3.6)$$

Pour estimer la précision de la solution numérique, nous avons calculé l'erreur absolue :  $E_i = |u_{ex}(x_i) - u_n(x_i)|$  sur tous les nœuds de coordonnées  $x_i = -1, -0.75, \dots, 0, \dots, 1$ .

La figure ( 3.2) et le tableau (3.2) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $n = 2$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_n$	$ u_{ex}(x_i) - u_n(x_i) $
-1	1	1	0
-0.75	1.11803398874989	1.11411862075714	0.00391536799276
-0.5	1.22474487139159	1.22062410579123	0.00412076560036
-0.25	1.32287565553230	1.32066894230788	0.00220671322441
0	1.41421356237310	1.41494462263047	0.00073106025737
0.25	1.50000000000000	1.50368164420010	0.00368164420010
0.5	1.58113883008419	1.58664950957567	0.00551067949148
0.75	1.65831239517770	1.66315672643379	0.00484433125609
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

TABLE 3.2 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $n = 2$ .FIGURE 3.2 – Solution exacte et solution numérique obtenues par la méthode de Ritz pour  $n = 2$ 

*La comparaison est un peu moins convaincante. La situation s'améliore cependant très rapidement lorsque  $n$  augmente.*

### Analyse des résultats numériques

La résolution approchée par la méthode de Ritz est identique dans le cas des équations intégrales dont la solution analytique est un polynôme, par contre dans les autres cas l'écart entre la solution exacte et la solution numérique reste toujours constant.

### 3.3 Résolution des équations intégro-différentielles (E.I-Ds) linéaires en utilisant la méthode des itérées variationnelle (VIM) ([29])

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de solution sous forme série pour la résolution des équations intégro-différentielles. On utilise la méthode des itérées variationnelles, cette méthode a été développée par JI-HUAN HE au début des années 1990, a été utilisée par beaucoup des chercheurs et elle est permise de résoudre des problèmes linéaire et non linéaire, elle est utilisée pour obtenir une solution approchée; cette méthode basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange et elle donne par la formulation :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(t) [Lu_k(t) + N\tilde{u}_k(t) - h(t)] ds, \quad k \geq 0 \quad (3.1)$$

#### 3.3.1 Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(u) + N(u) = h(x) \quad (3.2)$$

Avec

$L$  : est un opérateur linéaire,

$N$  : est un opérateur non linéaire,

$h(x)$  : est une fonction connue.

La forme de la solution est donnée par la formulation :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(t) [Lu_k(t) + N\tilde{u}_k(t) - h(t)] dt \quad (3.3)$$

Où

$\lambda$  : est un multiplicateur général de Lagrange,

$n$  : est un indice représente la nièmes approximation,

$\tilde{u}_k(t)$  : est une variation restreinte c.à.d.  $\delta\tilde{u}_k(t) = 0$ ,

et la solution est donné par :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = u(x)$ .

#### 3.3.2 Application de la méthode itérative variationnelle (VIM) pour les EDOs d'ordre $n$

**Théorème 3.3.1** Soit  $\alpha_i(x)$  avec  $(i = 1, \dots, n-1)$  et  $h(x)$  est une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , et soit  $a \leq x_0 \leq b$ , alors le problème suivant :

$$u^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) u^{(i)}(x) = h(x) \quad (3.4)$$

Avec les conditions  $u(a) = \mu_0$ ,  $u'(a) = \mu_1$ ,  $u^{(n-1)}(a) = \mu_{n-1}$ , a une solution unique qui définie sur  $[a; b]$  de plus l'application de la méthode VIM sur ce problème est donnée par la formulation qui convient :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(t) \left[ u_k^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \tilde{u}_k^{(i)}(t) - h(t) \right] dt \quad \text{et} \quad (k \geq 0) \quad (3.5)$$

Avec  $\lambda(t)$  : est un multiplicateur générale de Lagrange,

$n$  : est un indice représent la nièmes approximation,

$\tilde{u}_k(t)$  : est une valeur restreinte i.e.  $\delta \tilde{u}_k(t) = 0$ ,

d'abord la détermination de  $\lambda(t)$  est de façons optimale et par l'integration par partie et l'utilisation de la valeur restreinte  $\delta \tilde{u}_k(t)$  on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + (-1)^{(n-1)} \lambda_{t=x}^{(n)} = 0 \\ \lambda_{t=x}^{(i)} = 0 \quad i = 0, \dots, n-2 \end{cases} \quad (3.6)$$

qui nous prouve que  $\lambda(t)$  est de la forme suivant :

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \quad (3.7)$$

En remplaçant la valeur de  $\lambda(t)$  dans l'équation (3.5) pour calculer la solution approchée à traver la suite d'itération :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (t-x)^{(n-1)} \left[ u_k^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \tilde{u}_k^{(i)}(t) - h(t) \right] dt, \quad k \geq 0 \quad (3.8)$$

### 3.3.3 Application de la méthode (VIM) pour les équations intégro- différentielles de Volterra d'ordre 2

Dans cette partie, nous étendons l'application de la méthode d'itération variationnelle (VIM) afin de construire des solutions approchées pour les équations intégro-différentielles de Volterra d'ordre  $n$  dont la forme général :

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad , a < x < b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont des fonctions données continues sur  $[a, b]$  tels que :

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dt \leq \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \infty \quad (3.10)$$

On obtient l'algorithme suivant :

**Algorithme.**

**Etape 1**

On construit la correction fonctionnelle de (3.5) selon la méthode ( VIM ) pour trouver le multiplicateur de lagrange  $\lambda(t)$  de cette façon :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(t) \left[ -u_k''(t) + p(t)\tilde{u}_k'(t) + q(t)\tilde{u}_k(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_k(s)ds \right] dt \quad (3.11)$$

avec  $u_k^{(i)} (i = 1, 2)$  est considéréé comme une valeur restreinte qui est  $\delta u_m^{(i)} = 0, i = 0, 1, 2$

**Etape 2**

avec la condition  $\delta u_k^{(i)} = 0$  on a :

$$\delta u_{m+1}(x) = \delta u_m(x) + \delta \int_0^x \lambda(t) \left[ -u_k''(t) + p(t)\tilde{u}_k'(t) + q(t)\tilde{u}_k(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_k(s)ds \right] dt \quad (3.12)$$

et par l'intégration on trouve l'équation d'Euler-lagrange suivante :

$$\begin{cases} 1 - \lambda'_{t=x} = 0 \\ \lambda_{t=x} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

donc  $\lambda(t)$  est de la même formulation précédent (3.7) et d'abord :

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_a^x (t-x) \left[ -u_k''(t) + p(t)\tilde{u}_k'(t) + q(t)\tilde{u}_k(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_k(s)ds \right] dt \quad (3.14)$$

**Etape 3**

Finalemnt et par intégration de (3.14) on peut calculer la solution approchéé avec la condition initiale  $u_0(x) = \frac{\alpha-\beta}{a-b}x + \frac{\alpha-\beta}{a-b}$ , on trouve les approximation successisive suivante :

$$\begin{cases} u_1(x) = u_0(x) + \int_a^x (t-x) \left[ \left[ -u_0''(t) + p(t)\tilde{u}_0'(t) + q(t)\tilde{u}_0(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_0(s)ds \right] ds \right] dt \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_a^x (t-x) \left[ \left[ -u_1''(t) + p(t)\tilde{u}_1'(t) + q(t)\tilde{u}_1(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_1(s)ds \right] ds \right] dt \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_a^x (t-x) \left[ \left[ -u_n''(t) + p(t)\tilde{u}_n'(t) + q(t)\tilde{u}_n(t) - f(t) + \int_a^t k(t,s)\tilde{u}_n(s)ds \right] ds \right] dt \end{cases} \quad (3.15)$$

La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \quad (3.16)$$

### 3.4 Exemples

Dans cette partie, l'exactitude de la méthode présentée est illustrée dans trois exemples suivants. Le logiciel (**Matlab**) est utilisé pour calculer la solution approchée.

**Exemple 3.4.1** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :*

$$\begin{cases} -u''(x) + (1 - x^2)u(x) = f(x) - \int_0^x xt u(t) dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution exacte de cette équation :  $u_{ex}(x) = x - x^2$ . Avec  $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 + x^2 + x + 2$ .

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans ([12]), La correction fonctionnelle selon la méthode d'itération variationnelle de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x) \left\{ \begin{array}{l} [u_n''(t) + (1-x^2)u_n(t) - \\ (-\frac{1}{4}t^5 + \frac{1}{3}t^4 - t^3 - t^2 + t + 2) \\ + \int_0^x tsu_n(s)ds] dt \end{array} \right. \quad (3.2)$$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve  $u_0(x) = x$ . Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x) = x - \frac{1}{168}x^7 - \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{12}x^4 - x^2 \\ u_2(x) = x + \frac{1}{360}x^6 - x^2 + \frac{1}{199584}x^{12} + \frac{17}{184800}x^{11} \\ + \frac{1}{2700}x^{10} - \frac{5}{18144}x^9 - \frac{1}{480}x^8 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

La figure ( 3.3) et le tableau (3.3) illustrent la précision de la solution approchée pour  $n = 4$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_n$	$ u_{ex}(x_i) - u_n(x_i) $
0	0	0	0
0.1	0.0900000000000000	0.0900000000000000	0.0000000055511E-07
0.2	0.1600000000000000	0.1600000000000000	0.00000053262950E-07
0.3	0.2100000000000000	0.21000000000285	0.00002846112235E-07
0.4	0.2400000000000000	0.24000000004527	0.00045268067073E-07
0.5	0.2500000000000000	0.25000000036323	0.00363229113454E-07
0.6	0.2400000000000000	0.24000000185219	0.01852191650054E-07
0.7	0.2100000000000000	0.21000000674825	0.06748250319655E-07
0.8	0.1600000000000000	0.16000001867099	0.18670986368097E-07
0.9	0.0900000000000000	0.09000004018887	0.40188871786029E-07
1	0	0.00000006635982	0.66359817540976E-07

TABLE 3.3 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $n = 4$ .

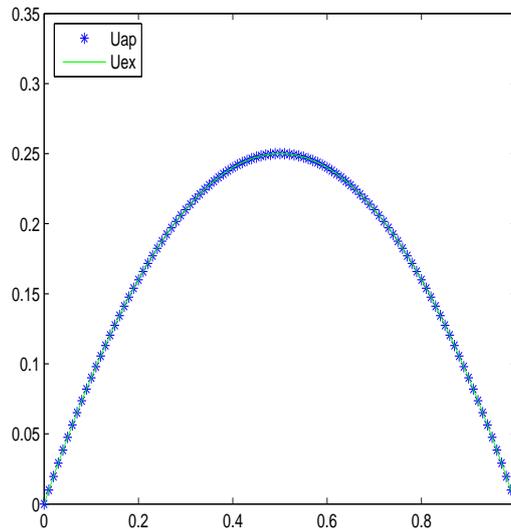


FIGURE 3.3 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $n = 4$

La figure ( 3.3) montre que la solution numérique et analytique sont identiques et les résultats sont satisfaisants.

**Exemple 3.4.2** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) + \int_0^x (x+t)u(t)dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1 \\ u(1) = e \end{cases} \quad (3.4)$$

La solution exacte de cette équation :  $u(x) = e^x$ . Avec  $f(x) = (1 - 2x)e^x + x - 1$

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présenter dans ([12]), La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x) \left[ u_n''(t) - u_n(t) - f(t) - \int_0^x (x+s)u_n(s)ds \right] dt \quad (3.5)$$

Nous choisissons une approximation initiale de la solution  $u_0(x) = x + 1$  qui satisfait aux conditions initiales, on obtient finalement,

$$\begin{cases} u_0(x) = x + 1 \\ u_1(x) = 2x + 4 - 3e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + 2xe^x \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.6)$$

L'utilisation de développement de Taylor de  $e^x$  au voisinage de 0, la solution exacte de l'équation est donnée comme suit :

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad (3.7)$$

La solution exacte est la suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = e^x = u(x) \quad (3.8)$$

Pour estimer la précision de la solution numérique, nous avons calculé l'erreur absolue :  $E_i = |u_{ex}(x_i) - u_n(x_i)|$  sur tous les nœuds de coordonnées  $x_i = 0, 0.1, \dots, 1$ .

La figure ( 3.4) et le tableau (3.4) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $n = 5$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_n$	$ u_{ex}(x_i) - u_n(x_i) $
0	1	1	0
0.1	1.10517091807565	1.10517091803922	0.03783968693938E - 08
0.2	1.22140275816017	1.22140275804850	0.01066069454936E - 08
0.3	1.34985880757600	1.34985880792374	0.07551883562940E - 08
0.4	1.49182469764127	1.49182469767402	0.00618527451479E - 08
0.5	1.64872127070013	1.64872127104900	0.04369331563225E - 08
0.6	1.82211880039051	1.82211880042451	0.07227034526380E - 08
0.7	2.01375270747048	2.01375270710560	0.02754032557561E - 08
0.8	2.22554092849247	2.22554092848441	0.18124990397439E - 08
0.9	2.45960311115695	2.45960311189992	0.26912783113175E - 08
1	$e$	$e$	0.15233370120882E - 08

TABLE 3.4 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $n = 5$ .

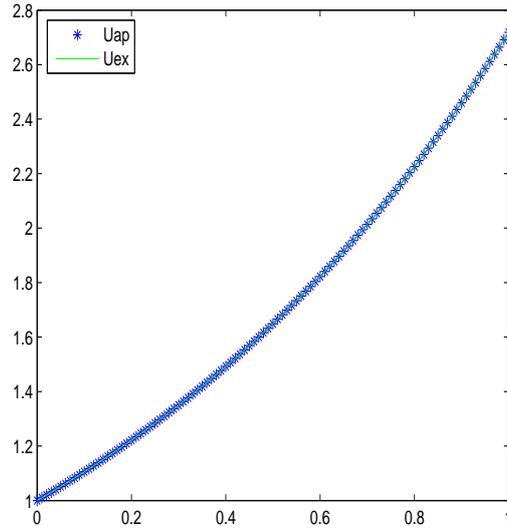


FIGURE 3.4 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $n = 5$

Comme l'exemple précédent les solutions numériques et analytiques sont presque semblables et les résultats sont très encourageants.

**Exemple 3.4.3** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} u''(x) - xu(x) = f(x) + \int_{-1}^x xtu(t)dt, & -1 \leq x \leq 1 \\ u(-1) = 1 \\ u(1) = \sqrt{3} \end{cases} \quad (3.9)$$

dont la solution exacte est :  $u(x) = \sqrt{x+2}$ .

Avec  $f(x) = -\frac{1}{60(x+2)^{\frac{3}{2}}} \left( 56x(x+2)^{\frac{3}{2}} - 16x + 48x^2 + 156x^3 + 112x^4 + 24x^5 + 15 \right)$ .

En utilisant la méthode d'itération variationnelle présentée dans ([12]), La correction fonctionnelle selon VIM de cette équation donne :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_{-1}^x (t-x)[u_n''(t) - tu_n(t) - f(t) - \int_{-1}^x su_n(s)ds]dt \quad (3.10)$$

et en utilisant les valeurs initiales on trouve  $u_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ u_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{166320}(-189280 + 16640x^2 - 46000x + 2176x^3 - 5696x^4 + 924x^6\sqrt{(x+2)} - 9728x^5 \\ - 462x^3\sqrt{(x+2)} + 6237x^5\sqrt{(x+2)} + 6930x^4\sqrt{(x+2)} - 2688x^6 + 147602\sqrt{(x+2)} + 22209x) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(x) = \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (3.11)$$

L'utilisation de développement de Taylor de  $\sqrt{x+2}$  au voisinage de  $-1$ , la solution exacte de l'équation est donnée comme suit :

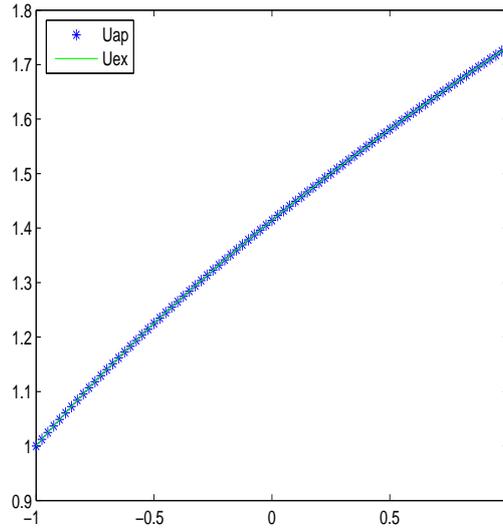
$$u_n(x) = \frac{71\sqrt{2}}{64} + \frac{11\sqrt{2}}{64}x - \frac{1}{256}\sqrt{2}x^2 \dots + \dots = \sqrt{x+2} \quad (3.12)$$

Pour estimer la précision de la solution numérique, nous avons calculé l'erreur absolue :  $E_i = |u_{ex}(x_i) - u_n(x_i)|$  sur tous les nœuds de coordonnées  $x_i = -1, -0.75, \dots, 0, \dots, 1$ .

La figure ( 3.5) et le tableau (table :5) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $n = 4$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_n$	$ u_{ex}(x_i) - u_n(x_i) $
-1	1	1	0
-0.75	1.11803398874989	1.11803398874993	0.00000032196468E - 07
-0.5	1.22474487139159	1.22474487140685	0.00015260015473E - 07
-0.25	1.32287565553230	1.32287565588283	0.00350535156457E - 07
0	1.41421356237310	1.41421356428152	0.01908423419295E - 07
0.25	1.50000000000000	1.50000000265132	0.02651323827152E - 07
0.5	1.58113883008419	1.58113882634224	0.03741947196545E - 07
0.75	1.65831239517770	1.65831239923768	0.04059977465332E - 07
1	$\sqrt{3}$	1.73205086489734	0.57328458868966E - 07

TABLE 3.5 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $n = 4$ .

FIGURE 3.5 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $n = 4$ 

### Analyse des résultats numériques

A travers les résultats numériques obtenues dans les exemples précédant, nous pouvons conclure que ces résultats calculés par cette approche montre que cet algorithme est plus efficace relativement au nombre d'itérations.

## 3.5 Méthode des élément finis([7], [10])

([8]) Dans cette partie, nous nous sommes concentrés sur la résolution d'une équation intégro-différentielle linéaire du second ordre en dimension un est de mettre en oeuvre la méthode des éléments finis.

On s'intéresse aux solution du problème continu unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt, & a < x < b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont des fonctions données continues sur  $[a, b]$  tels que :

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 dt \leq \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \infty \quad (3.2)$$

### Formulation variationnelle

Puisque les conditions aux limites essentielles en  $x = a$  et  $x = b$ , on peut prendre :

$$\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{H}^1([a, b]) / v(a) = 0, v(b) = 0\} = \mathbb{H}_0^1([a, b]) \quad (3.3)$$

On multiplie par  $v \in \mathbb{V}$  et intègre :

$$\begin{aligned} \int_a^b -u''(x)v(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)wv(x)dx \\ &+ \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)u(t)dt \right) v(x)dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

Puisque le terme de bord est nul en  $x = a$  et  $x = b$ . On en déduit alors :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)v(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)u(t)dt \right) v(x)dx \quad (3.5)$$

La formulation variationnelle s'écrit donc : Trouver  $u \in \mathbb{V}$  tel que :

$$a(u, v) = l(w), \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.6)$$

où

$$a(u; w) = \int_a^b u'(x)w'(x)dx + \int_a^b p(x)u'(x)w(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)w(x)dx - \int_a^b \left( \int_a^x k(x,t)u(t)dt \right) w(x)dx \quad (3.7)$$

et

$$l(w) = \int_a^b f(x)w(x)dx \quad (3.8)$$

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnelle le théorème de Lax-Milgram apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution dans un cadre précis.

### Analogie discret du problème PV

L'approximation du problème variationnel PV peut se faire par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de Lagrange. Pour ce faire, on introduit un maillage régulier de l'intervalle  $[a, b]$ , de pas constant  $h = \frac{1}{n+1}$  ; tels que :

$$\begin{cases} x_0 = a, x_{n+1} = b \\ x_{i+1} = x_i + ih, i = 0, \dots, n \end{cases} \quad (3.9)$$

On définit à présent l'espace d'approximation  $\mathbb{V}_h$  par :

$$\mathbb{V}_h = \left\{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in \mathbf{C}^0([a, b]), w\varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \right\} \quad (3.10)$$

où  $\mathbb{P}_1$  désigne l'espace des polynômes défini sur  $[x_i, x_{i+1}]$  de degré inférieur ou égal à un.

Soit  $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ , la base canonique de  $\mathbb{V}_h$  :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (3.11)$$

telle que :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 0 \leq j \leq N+1 \quad (3.12)$$

La formulation variationnelle approchée s'obtient en substituant les fonctions d'approximations :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad (3.13)$$

L'analogie discret du problème (PV) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver une fonction } u_h \in \mathbb{V}_h, \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in \mathbb{V}_h \end{array} \right. \quad (3.14)$$

le problème (3.14) devient avec  $a$  bilinéaire et  $l$  linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver une fonction } u_h \in \mathbb{V}_h, \text{ telle que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in \mathbb{V}_h \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Pour  $v = \varphi_j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver une fonction } u_h \in \mathbb{V}_h, \text{ telle que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Le système (3.16) s'écrit ainsi :

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_N, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & a(\varphi_2, \varphi_N) & \dots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ l(\varphi_2) \\ \vdots \\ l(\varphi_N) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Où simplement :

$$Au = b \quad (3.18)$$

### Analyse des erreurs

([8]) Supposons que  $u$  soit la solution exacte du problème et  $u_h$  sa solution approximative, alors nous avons :

$$B(u, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (3.19)$$

et nous avons aussi :

$$B(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (3.20)$$

si  $e = u - u_h$ , alors :

$$B(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (3.21)$$

**Définition 3.5.1** Soit  $\mathbb{V}$  un espace de Hilbert et supposons que  $\mathbb{B}$ , soit une forme bilinéaire et  $\mathbb{V}$ -elliptique nous définir un produit intérieur comme suit :

$$\begin{cases} (\cdot, \cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v)_B = B(u, v) \end{cases} \quad (3.22)$$

Qui est appelé l'énergie du produit scalaire. Nous définissons également la norme énergétique comme suit :

$$\|u\|_{\mathbb{E}}^2 = (u, u)_B \quad (3.23)$$

Par l'inégalité de schwarz, nous avons la relation suivante entre la norme énergétique et le produit intérieur :

$$|B(v, w)| \leq \|v\|_{\mathbb{E}} \|w\|_{\mathbb{E}} \quad \forall v, w \in \mathbb{V} \quad (3.24)$$

Donc, de ( 3.21) on obtient :

$$(e, v_h) = B(e, v_h) = 0 \quad (3.25)$$

Par conséquent,  $e$  est orthogonal à chaque  $v_h$  :

$$(u - u_h, v_h) = 0 \quad (3.26)$$

**Théorème 3.5.2**  $u$  solution exacte,  $u_h$  solution approchée, alors ;

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{E}} = \min\{\|u - v_h\|_{\mathbb{E}}; v_h \in \mathbb{V}_h\} \quad (3.27)$$

**Lemme 3.5.3 ( Cea)** Supposons que  $\mathbb{V}$  est un espace de Hilbert, et  $B$  est une forme bilinéaire continue fonctionnelle linéaire sur  $\mathbb{V}$ .

En suite, il ya une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \leq c \inf_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.28)$$

**Définition 3.5.4 (Opérateur de projection)** Les opérateurs de projection sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi & : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}_h \\ \Pi u & = \tilde{u} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \phi_i(x) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Autrement dit, chaque membre de  $\mathbb{V}$ , correspond à sa fonction interpolée par opérateur de projection. Depuis pour chaque  $\tilde{v}_h$  en  $\mathbb{V}_h$ , nous avons :

$$\inf \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \leq \|u - \tilde{v}_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.30)$$

Pour trouver une borne supérieure pour  $u - u_h$ , on peut prendre  $\tilde{v}_h$  égale à  $\tilde{u}_h$  alors :

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \leq c \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.31)$$

Par conséquent, il suffit d'obtenir une limite supérieure pour l'erreur d'interpolation. Si la forme bilinéaire est symétrique, puis du théorème 2 nous avons :

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} = \min_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.32)$$

En suite :

$$\alpha \|u - u_h\|_{\mathbb{V}}^2 \leq B(u - u_h, u - u_h) = \|u - u_h\|_{\mathbb{V}}^2 \implies \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.33)$$

Par continuité de  $B$ , on a :

$$\|u - v_h\|_{\mathbb{V}}^2 = B(u - v_h, u - v_h) \leq C \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \implies \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \leq \sqrt{C} \|u - v_h\|_{\mathbb{V}} \quad (3.34)$$

et de (3.33) et (3.34), on obtient ;

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{C}{\alpha}} \min_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_V \quad (3.35)$$

Puisque la forme variationnelle a une solution unique, donc  $\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$  est un nombre constant.

Cependant, selon le lemme 3 :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - \tilde{u}_h\|_V \quad (3.36)$$

où  $C$  est la constante de continuité et  $\alpha$  est la constante de  $\mathbb{V}$ -ellipticité. Alors :

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq C_1 \sqrt{2} h^2 \|u\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)}, \quad C_1 = \frac{C}{\alpha} \quad (3.37)$$

et donc l'erreur bornée est d'ordre  $O(h^2)$ .

### 3.6 Exemples

**Exemple 3.6.1** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :*

$$\begin{cases} -u''(x) + (1 - x^2)u(x) = f(x) - \int_0^x xtu(t)dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution exacte de cette équation :  $u_{ex}(x) = x - x^2$ . Avec  $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 + x^2 + x + 2$ .

La formulation variationnelle est :

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in \mathbb{V} \quad (3.2)$$

Où

$$a(u, w) = \int_0^1 u'(x)w'(x)dx + \int_0^1 (1 - x^2)u(x)w(x)dx + \int_0^1 \left( \int_0^x xtu(t)dt \right) w(x)dx \quad (3.3)$$

$$l(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx \quad (3.4)$$

et

$$\mathbb{V} = \{w \in \mathbb{H}^1([0, 1]) | w(0) = w(1) = 0\} = \mathbb{H}_0^1([0, 1]) \quad (3.5)$$

Le coefficient général de la matrice  $A$  est donc :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx + \int_0^1 (1 - x^2)\phi_i(x)\phi_j(x)dx + \int_0^1 \left( \int_0^x xt\phi_i(t)dt \right) \phi_j(x)dx \quad (3.6)$$

tandis que le vecteur  $b$  a pour coefficients :

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \quad (3.7)$$

Le tableau (3.6) illustre la comparaison de la solution exacte et approchée et l'erreur comme étant l'écart absolu entre la solution exacte du problème (3.1) et la solution approchée pour  $h = 0.1$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_h$	$ u_{ex}(x_i) - u_h(x_i) $
0	0	0	0
0.1	0.0900000000000000	0.08973978741399	0.00026021258601
0.2	0.1600000000000000	0.15945974222030	0.00054025777970
0.3	0.2100000000000000	0.20915704518149	0.00084295481851
0.4	0.2400000000000000	0.23883505076741	0.00116494923259
0.5	0.2500000000000000	0.24851356188082	0.00148643811918
0.6	0.2400000000000000	0.23824062959246	0.00175937040754
0.7	0.2100000000000000	0.20810283142622	0.00189716857378
0.8	0.1600000000000000	0.15823082362911	0.00176917637088
0.9	0.0900000000000000	0.08879676203212	0.00120323796788
1	0	0	0

TABLE 3.6 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $h = 0.1$ .

On remarque bien à partir des résultats obtenus dans ce tableau, la convergence des résultats est lent, bien entendu, on peut améliorer la solution en diminuant  $h$  (i.e. en augmentant le nombre d'intervalles).

Sur la figure ( 3.6), on représente une comparaison de la solution approchée obtenu et la solution exacte.

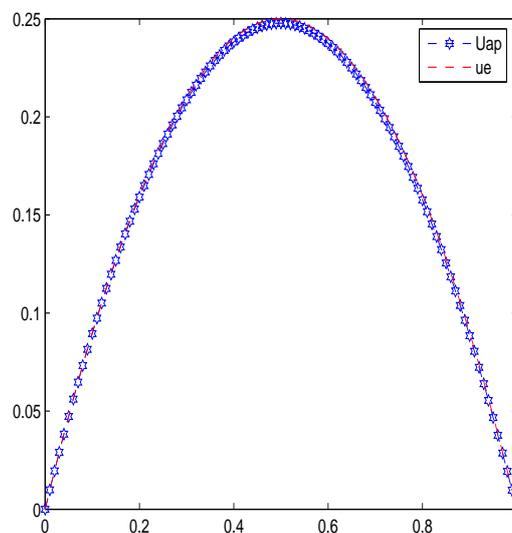


FIGURE 3.6 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $h = 0.1$

La figure ( 3.6) montre que la solution numérique et analytique sont presque identique.

**Exemple 3.6.2** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) + \int_0^x (x+t)u(t)dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1 \\ u(1) = e \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution exacte de cette équation :  $u(x) = e^x$ . Avec  $f(x) = (1 - 2x)e^x + x - 1$

La formulation variationnelle est :

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in \mathbb{V} \quad (3.9)$$

Où

$$a(u, w) = \int_0^1 u'(x)w'(x)dx + \int_0^1 u(x)w(x)dx - \int_0^1 \left( \int_0^x (x+t)u(t)dt \right) w(x)dx \quad (3.10)$$

$$l(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx + \int_0^1 \phi_0'(x)w'(x)dx - \int_0^1 \phi_0(x)w(x)dx + \int_0^1 \left( \int_0^x (x+t)\phi_0(t)dt \right) w(x)dx \quad (3.11)$$

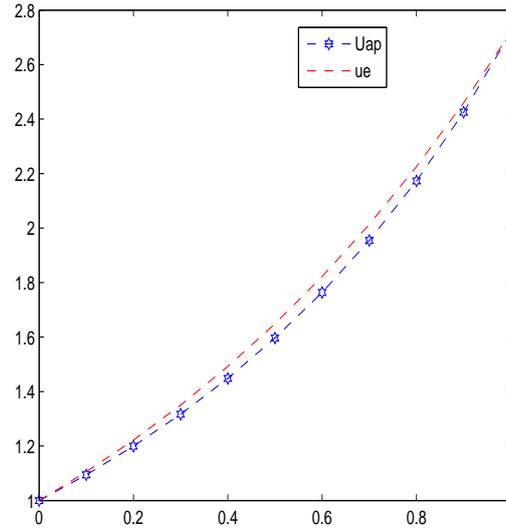
et

$$\mathbb{V} = \{w \in \mathbb{H}^1([0, 1]) | w(0) = w(1) = 0\} = \mathbb{H}_0^1([0, 1]) \quad (3.12)$$

La figure ( 3.7) et le tableau (3.7) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $h = 0.1$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_h$	$ u_{ex}(x_i) - u_h(x_i) $
0	1	1	0
0.1	1.10517091807565	1.09431193089795	0.01085898717770
0.2	1.22140275816017	1.19954891815964	0.02185384000053
0.3	1.34985880757600	1.31702139120291	0.03283741637309
0.4	1.49182469764127	1.44853001800124	0.04329467964003
0.5	1.64872127070013	1.59644582326787	0.05227544743226
0.6	1.82211880039051	1.76380429689087	0.05831450349964
0.7	2.01375270747048	1.95441513059290	0.05933757687758
0.8	2.22554092849247	2.17298941876749	0.05255150972498
0.9	2.45960311115695	2.42528637280825	0.03431673834870
1	$e$	$e$	0

TABLE 3.7 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $h = 0.1$ .


 FIGURE 3.7 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $h = 0.1$ 

On remarque ici que l'écart entre la solution analytique et la solution numérique est bien plus élevé que celui obtenu avec l'approximation VIM.

**Exemple 3.6.3** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit :

$$\begin{cases} u''(x) - xu(x) = f(x) + \int_{-1}^x xtu(t)dt, & -1 \leq x \leq 1 \\ u(-1) = 1 \\ u(1) = \sqrt{3} \end{cases} \quad (3.13)$$

dont la solution exacte est :  $u(x) = \sqrt{x+2}$ .

Avec  $f(x) = -\frac{1}{60(x+2)^{\frac{3}{2}}} \left( 56x(x+2)^{\frac{3}{2}} - 16x + 48x^2 + 156x^3 + 112x^4 + 24x^5 + 15 \right)$ .

La formulation variationnelle est

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.14)$$

Où

$$a(u, v) = -\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \int_0^1 u(x)v(x)dx - \int_0^1 \left( \int_0^x (x+t)u'(t)dt \right) v(x)dx \quad (3.15)$$

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (3.16)$$

et

$$\mathbb{V} = \{w \in \mathbb{H}^1([0, 1]) | w(-1) = w(1) = 0\} = \mathbb{H}_0^1([0, 1]) \quad (3.17)$$

### 3.6 Exemples

Pour estimer la précision de la solution numérique, nous avons calculé l'erreur absolue :  $E = |u_{ex}(x_i) - u_h(x_i)|$  sur tous les nœuds de coordonnées  $x_i = 0 : 0.1$ .

La figure ( 3.8) et le tableau (3.8) illustrent la précision de la solution et l'analyse d'erreur pour  $h = 0.1$ .

$x_i$	$u_{ex}$	$u_h$	$ u_{ex}(x_i) - u_h(x_i) $
0	1	1	0
0.1	0.95105651629515	0.94655680016828	0.00449971612687
0.2	0.80901699437495	0.80002242521540	0.00899456915954
0.3	0.58778525229247	0.57429587383708	0.01348937845539
0.4	0.30901699437495	0.29106269921054	0.01795429516441
0.5	0	-0.02218861853275	0.02218861853275
0.6	-0.30901699437495	-0.33462946234443	0.02561246796948
0.7	-0.58778525229247	-0.61485089440055	0.02706564210808
0.8	-0.80901699437495	-0.83375855434874	0.02474155997379
0.9	-0.95105651629515	-0.96745976517075	0.01640324887560
1	-1	-1	0

TABLE 3.8 – Comparaison de la solution exacte et approchée pour  $h = 0.1$ .

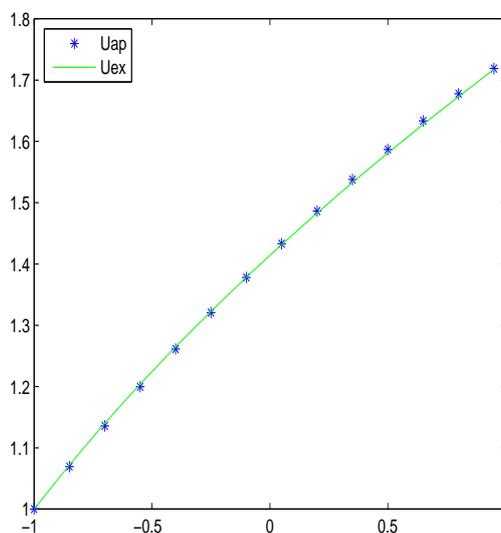


FIGURE 3.8 – Solution exacte et solution numérique obtenues pour  $h = 0.1$

*La solution analytique et numérique pour  $h = 0.1$ . Ici encore, un peu moins convaincante.*

## Conclusion



Dans ce mémoire, nous avons défini trois méthodes pour la résolution numériques des équations intégro-différentielles, méthode des itérée variationnelle, méthode d'éléments finis, et la méthode de Ritz .

On a fait une comparaison entre ces méthodes. Dans le calcul des approximations numériques des équations intégro-différentielles, nous avons pris trois exemples . Nous avons ainsi comparé l'approche numérique des résultats donnés par ces méthodes, à partir de ces résultats nous pouvons tirer les conclusions suivantes : Pour la méthode de Ritz, les résultats numériques obtenus est un peu moins convaincante. Pour La méthode d'itération variationnelle (VIM) est remarquablement efficace pour la résolution des équations intégro-différentielles. Pour la méthode des éléments finis, elle est très facile à programmer mais complexes et plus coûteux en temps de calcul.



# Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, *Application of the variational iteration method for system of non-linear Volterra's integro-differential equations*, Mathematical and Computational Applications, Vol. 14, No. 2, pp. 147-158, (2009).
- [2] F. Bachiri, *Théorèmes du point fixe et Applications aux équations intégrales*, mémoire de master, université M'sila 2010.
- [3] H. Brunner, *Collocation method for Volterra integral and related functional equations*, Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, MA, (2004).
- [4] S. Benyoussef, *Résolution numérique des équations intégral-différentielles de Fredholm*, mémoire de magistère, Université de M'sila 2010.
- [5] H. Brunner, A. Pedaş, and G. Vainikko, *Piecewise Polynomial Collocation Methods for Linear Volterra Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels*, SIAM Journal on Numerical Analysis, (2001), Vol. 39, No. 3 : pp. 957-982.
- [6] W.S. Chen, W. Lin, *Galerkin trigonometric wavelet methods for the natural boundary integral equations*. Appl. Math. Comput, (2005), 121, 7992.
- [7] M. Erfanian & H. Zeidabadi, *Approximate solution of linear Volterra integro-differential equation by using cubic B-spline finite element method in the complex plane*, Erfanian and Zeidabadi Advances in Difference Equations (2019) 2019 :62, <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2012-9>.
- [8] A. Fortin & A. Garon GIREF, *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, Professeur titulaire Département de mathématiques et de statistique Université Laval (1997-2020)
- [9] K. Fernane, *Numerical solution of the general Volterra nth-order integro-differential equations via variational iteration method*, Asian-European Journal of Mathematics Vol. 12, No. 1 (2020) 2050042 (15 pages).
- [10] M. Gachpazan, A. Kerayechian, H. Zeidabadi, *Finite Element Method for solving Linear Volterra Integro-Differential Equations of the second kind*, Journal of Information and Computing Science Vol. 9, No. 4, 2014, pp. 289-297.

- [11] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani and E. Babolian, *Numerical solutions of the nonlinear integro-differential equations : Wavelet–Galerkin method and homotopy perturbation method*, Appl. Math. Comput., 188 (2007), pp. 450-455.
- [12] JH. He, Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique : some examples, International Journal of Non-Linear Mechanics 34 (1999) 699-708.
- [13] JH. JH, Variational iteration method - Some recent results and new interpretations, J. Computat. Appl. Math., (2007), 207(1) 3-17.
- [14] JH. He, XH. Wu, Variational iteration method : New development and applications, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng, (2007),54(7-8) : 881-894.
- [15] H. Jafari, M. Saeidy and D. Baleanu, *The variational iteration method for solving n-th order fuzzy differential equations*, Central European Journal of Physics, Cent. Eur. J. Phys. o 10(1) ( 2012 ) 76-85, DOI : 10.2478/s11534-011-0083-7.
- [16] D. Khojasteh Salkuyeh, *Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODEs with constant coefficients*, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2027-2033.
- [17] R. Lamri, Résolution des équations integro-différentielles de type Volterra, mémoire de magistère, université de M'sila 2012.
- [18] U. Lepik, E. Tamme, *Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., (2007), 56, 1, 17-27.
- [19] U. Lepik, *Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation 176 (2006) 324-333.
- [20] Y. Mahmoudi, *Taylor polynomial solution of non-linear Volterra–Fredholm integral equation*, International Journal of Computer Mathematics Volume 82, (2005) - Issue 7.
- [21] J. P. Mahmoud, M.Y. Rahimi-Ardebili and S. Shahmorad, *Numerical solution of Volterra integro-differential equations by the Tau method with the Chebyshev and Legendre bases*, Appl. Math. Comput , 170 (2005) :314–338.
- [22] M. Moussai, Résolution des équations intégro-défférentielles,Thèse de doctorat, université de M'sila 2018.
- [23] J. Rashidinia, M. Zarebnia, *Solution of a Volterra integral equation by the Sinc-collocation method* : Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 206, Issue 2, 15 September (2007), Pages 801-813.
- [24] A. Rahmoune, équations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution.
- [25] D. Slota, A. Zielonka, *A new application of He's variational iteration method for the solution of the one-phase Stefan problem*,Computers and Mathematics with Applications 58 (2009) 2489-2494.

- [26] M. Tatari, M. Dehghan , *On the convergence of He's variational iteration method*, Journal of Computational and Applied Mathematics 207 (2007) 121-128.
- [27] A. M. Wazwaz, *The combined Laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro-differential equations* , Applied Mathematics and Computation, Volume 216 Issue 4, April, (2010) Pages 1304-1309 .
- [28] X. Shang, D. Han, *Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (2010) 1442-1447.
- [29] M. Zellal, *Résolution des équations différentielles par les méthodes variationnelles et homotopiques*, Mémoire de Magistère, Université D'oran 2014.