République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{lle} BENCHAABANE MERYEM

Intitulé

Etude d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du quatrième ordre

Dirigé par : M^{me} Lilia Zenkoufi

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Nabil Sellami	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Lilia Zenkoufi	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Ghania rebeai	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2020

Remerciements

*Avant tout je remercie **Dieu** le tout puissant de m'avoir accordé la force et la santé de mener à bien mes études et d'avoir terminé ce petit travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus sincères a mon encadreur : Dr **ZENKOUFI Lilia** pour son soutien, ses conseils et m'avoir dirigée tout le long de mon travail.*

Un grand merci sera également adressé aux membres jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je tiens aussi a remercier mes chers parents qui m'ont entouré avec leur amour et m'ont donné la capacité d'atteindre ce niveau de savoir.

Je ne saurai oublier ma belle soeur Chaima et mon cher frére Salah et mes amis : Samia, Khadidja et Nada pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et assisté.

ملخص

الهدف من هذا العمل المعروض في هذه المذكرة هو دراسة إثبات الوجود و الوحدانية لحل مسألة حدية مرفقة بمعادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة أين ترد الشروط الحدية في ثلاث نقاط من المجال.

الكلمات المفتاحية : مبدأ التقلص لباناخ، المتناوبة غير الخطية لليري شودار، مسألة حدية، وجود الحل، الوحدانية.

Résumé

L'objective de ce travail présenté dans ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites d'ordre quatre, où les conditions aux limites sont imposées en trois points du domaine.

Mots clés : Le principe de contraction de Banach, Alternative non linéaire de Leray-Schauder, problèmes aux limites, Existence de la solution, Unicité.

Abstract

The objective of this work presented in this memory is to study the existence and uniqueness of the solution of a fourth order boundary value problem, where the boundary conditions are imposed in three points of the domain.

Key words : Banach contraction principle, Leray-Schauder nonlinear alternative, boundary value problems, Existence of solution, Uniqueness.

Table des matières

Introduction

Les problèmes aux limites modélisent un grand nombre de phénomènes, en physique, en science technologiques ou en mathématiques appliquées.

dans ce contexte, notre objectif est l'étude de l'existence et l'unicité d'un problème aux limites engendré par une equation differentielle d'ordre quatre avec des conditions aux limites en trois points.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$.

Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le plus simple théorème de point fixe connu est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction : "toute contraction d'un espace métrique complet vers lui même admet un unique point fixe."

En 1912, Brouwer a trouvé une généralisation du théorème de Banach, il affirme que : "une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle même doit avoir un point fixe". Ce résultat a été généralisé par plusieurs mathématiciens, la plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "toute application continue et compacte d'un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même admet un point fixe". Ce puissant théorème de point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.

Notons que les théorèmes de Brouwer et de Schauder ne s'appliquent pas si la compacité n'a pas lieu.

Nous passons maintenant à la description de ce mémoire.

Le premier chapitre se compose notament des rappels de quelques

résultats théoriques, et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.
Dans le deuxième chapitre on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où on va étudier les théorèmes de : Banach, Brower et Schauder.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer l'alternative non linéaire de leray-schauder et le principe de contraction de Banach pour discuter des résultats d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du quatrième ordre où les conditions aux limites sont imposées en trois points du domaine.

Enfin, nous clôturons ce travail par **une bibliographie**.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelle

L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse qui étudie les espaces de fonctions , structures (espaces normés, espaces Hilbert, espaces Banach,..) et propriétés de la théorie des opérateurs (opérateur borné, compact, fermé,...etc).
Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail. Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis, [1, 2, 5, 7].

1.1 Quelques rappels

Définition 1.1. *(**ouvert**).*
Un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans V si $\forall x \in O$, $\exists\ \epsilon$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O$ avec $B(x, \epsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \epsilon\}$ boule ouverte de centre x et de rayon ϵ.

Définition 1.2. *(**fermé**).*
Un ensemble $F \subset V$ est fermé dans V si $V \backslash F$ est ouvert dans V.

Définition 1.3. *(**convergence**).*
Soit u_n une suite de V. On dit que u_n converge vers $l \in V$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N;\ \|u_n - l\|_V \leq \epsilon$

Définition 1.4. *(**convexe**).*
on dit qu'une partie A de V est convexe si pour tout $x,y \in A$, on a pour tout $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

ce qui signifie que le segment joignant x et y est entrièrement contenu dans A.

Définition 1.5. *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V. On dit que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \ \forall n \geq N, \ \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon.$$

Définition 1.6. ***(espace metrique)***

Une distence (métrique) sur un ensemble $E \neq \emptyset$ est une application $d : E \to R^+$ vérifiant :

$1.d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

$2.d(x,y) = d(y,x).$

$3.d(x,y,z) \leq d(x,y) + d(y,z); \forall x,\ y,\ z \in E.$

Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.

Définition 1.7. ***(espace metrique complet)***

On dit que l'espace métrique $(V;d)$ est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de V converge dans V.

Proposition 1.1. *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Définition 1.8. *Une norme est une application définie sur V (ev) réel à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, notée $||.||_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0,$

(ii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V,\ \|\lambda v\|_V = |\lambda|\ \|v\|_V.$

(iii) *Inégalité triangulaire*: $\forall v, w \in V,\ \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V.$

Définition 1.9. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(e.v.n)$ sur un sous-corps $\mathbb{k}$ (en général $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.), complet pour la distance issue de sa norme.*

Soit V un espace vectoriel normé.

Définition 1.10. *Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.*

Proposition 1.2. *1) Si V est compact et si A est une partie fermée de V alors, A est compacte.*

2) Si A est une partie compacte de V alors, A est fermée et bornée.

Proposition 1.3. *Si V est de dimension finie alors, A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Définition 1.11. *Soit V un espace topologique séparé.*

Un sous-ensemble F de V est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.

Le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.

Evidemment, lorsque V est lui-même complet les deux notions sont équivalentes.

Proposition 1.4. *Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.*

Définition 1.12. *Soit $\|.\|_{V,1}$, et $\|.\|_{V,2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, c_1 \|.\|_{V,2} \leq \|.\|_{V,1} \leq c_2 \|.\|_{V,2}.$$

Si $\|.\|_{V,1}$, et $\|.\|_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence :

$$(u_n)\textit{converge vers } l \textit{ suivant } \|.\|_{V,1} <=> (u_n)\textit{converge vers } l \textit{ suivant } \|.\|_{V,2}.$$

Proposition 1.5. *Si V est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.13. *Soit V un espace vectoriel normé, et f une application de V dans V. On dit que f est lipschitzienne sur V s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\forall u_1, u_2 \in V : \|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L \|u_1 - u_2\|_V.$$

Proposition 1.6. *Soit V un espace vectoriel norménormé.*

La norme sur V est ***une application continue****, autrement dit : la fonction $\varphi : v \in V \longmapsto \|.\|_V \in \mathbb{R}$ est continue.*

En effet, on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ et φ est lipschitzienne donc continue.

Théorème 1.1. *soient E et F deux espaces vectoriels normés et L une application linéaire de E dans F. Les trois conditions sont équivlentrs :*

-l'application L est lipschitzienne,

-l'application L est continue,

-il existe un ouvert U de E tel que Lsoit bornée sur U, c-à-d , $\sup_{x\in U} \|L(x)\|_F < \infty$.

Définition 1.14. *(Opérateur complètement continu)*
Soit E un espace de Banach et Ω une partie de E. On dit que l'opérateur $T : \Omega \to E$ est complètement continu s'il est continu et pour toute partie bornée B de Ω , $T(B)$ est relativement compact dans E.

Théorème 1.2. *(Convergence dominée)*

Soit $f_n \in L^1(E)$, une suite de fonctions sommable sur E telle que :
1) Pour presque tout x, $f_n(x) \to f(x)$ sur E.
2) $|f_n| \leq g \in L^1(E)$.
Alors, $f \in L^1(E)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.

1.1.1 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a,b]) = [m,M]$ lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.15. ***(Continuité en un point)***.

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

Définition 1.16. ***(Continuité sur un intervalle)***.

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Théorème 1.3. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***.

Soient I un intervalle, a et b inclu dans I avec $a < b$, f une application continue sur l'intervalle I, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors : il existe (au moins) un réel c dans $[a,b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a,b]$)

Théorème 1.4. (***théorème des accroisements finis***) :
Si f est une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe c de $]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

1.1.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

On va rappeler le théorème d'Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [5].

Définition 1.17. *une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues sur un interval $I = [a,b]$ est **uniformément bornée** s'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)| \leq M$$

Définition 1.18. *(Equicontinuité).*

La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue sur* $[a,b]$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$, *tel que*

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |x-y| < \delta, \ \text{alors}, \ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.5. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et supposons que* X *compact. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X,Y)$ *est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

- La famille $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

- La famille $\mathcal{F}$ *est unifomément bornée sur* X.

Théorème 1.6. *(*Y *compact)*

Soient (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques compacts. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X,Y)$ *est relativement compacte ssi* $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

Théorème 1.7. *(*Y *evn de dimension finie)*

Soient (X, d_X) *un espace métrique compact et* $(Y, \|\|)$ *un evn de dimension finie. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X,Y)$ *est relativement compacte ssi*

- La famille $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

- $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est borné pour tout* $x \in X$.

Théorème 1.8. *(*X *convexe et* Y *evn de dimension finie)*

Soient (X, d_X) *espace métrique compact et convexe et,* $(Y, \|\|)$ *un evn de dimension finie. Alors, une partie* $\mathcal{F}$ *incluse dans* $C(X,Y)$ *est relativement compacte ssi*

- La famille $\mathcal{F}$ *est équicontinue en tout point de* X.

- Il exisste $x \in X$ *tel que* $\mathcal{F}(x) := \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ *est borné.*

Chapitre 2

Résultats de la théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. On va étudier le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer et Schauder, pour plus de détails voir [1, 2, 3, 5, 7].

2.1 Théorèmes du point fixe

Définition 2.1. *Une application* ***contractante*** *est une application lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$.

Théorème 2.1. *(**Théorème de point fixe**).*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ (I stable par f), alors f admet (au moins) un point fixe sur$I$. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$).

Preuve. Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - x$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \in g(I) \\ g(b) &= f(b) - b \in g(I) \end{aligned}$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a

$$f(a) \geq a \quad \text{et} \quad f(b) \leq b,$$

c'est -à-dire

$$g\left(a\right)\geq0\ \text{ et }\ g\left(b\right)\leq0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x\in I$ tel que

$$g\left(x\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$f\left(x\right)=x.$$

□

2.1.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique.

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-mēme.

Théorème 2.2. ***(Banach)****[3].*
Soient (E,d) un espace métrique complet et f :$E\longrightarrow E$ une application contractante, (i.e, Lipschitzienne de rapport $k<1$).
Alors,
f admet un unique point fixe $a\in E$.
De plus, pour tout point initial $x_0\in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0\in E \quad \textit{quelconque} \\ \quad x_{p+1}:=f(x_p), \end{cases}$$

converge vers a.

Preuve*.*
1. Existence :
Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a

$$d(x_p,x_{p+1})=d\left(f(x_{p-1}),f(x_p)\right)\quad p\geq1.$$

On va prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E, pour $p<q$, on utilise l'inigalité triangulaire

$$d(x_p,x_q)\leq d(x_p,x_{p+1})+d(x_{p+1},x_{p+2})+...+d(x_{q-1},x_q).$$

Puisque f est une contraction, on a

$$\begin{aligned} d(x_p,x_{p+1}) &= d\left(f(x_{p-1}),f(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1},x_p),\quad p\geq1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$a = \lim_{p \to \infty} x_p = \lim_{p \to \infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p \to \infty} x_{p-1}\right) = f(a).$$

Donc a est un point fixe de f (i.e, $f(a) = a$).

2. Unicité :

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on ait $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Alors, on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$$

ce qui implique que : $d(a, b) = 0$, i.e. $a = b$. (puisque $k < 1$). □

les hypothèses de ce théorème sont essentielles et si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire : si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

Exemple 2.1. *1.* $f : \quad x \to \sqrt{1+x}$ *a un unique point fixe sur* $X =]0, \infty[$.
$\mathbb{R}^+$ *est un fermé de* X, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet et*

$$f\left(]0, \infty[\right) =]1, \infty[\subset]0, \infty[,$$

de plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < 1 \\ \sup_{x \in [0, \infty[} \left| f'(x) \right| &< 1 \Longrightarrow f \quad \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \ \textit{est contractante.}$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \to \sqrt{1+x^2}$ *n'a pas de point fixe car,* X *n'est pas stable par* f *:* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0,1]$.

Or X *est fermé dans* $\mathbb{R}$, *et complet car* $\mathbb{R}$ *est complet.*

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \ \ \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f *n'a pas de point fixe car*

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

i.e; X *n'est pas stable par* f.

3. f *n'est pas contractante :*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

sur $X = [0, \infty[$.

Or, $f : X \to X$ *et* X *est un fermé de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet.*

Mais ;

$$\sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| = 1$$

$\Longrightarrow f$ *n'a pas de point fixe..*

4. X *n'est pas complet :*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Or,

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow f \ \textit{est contractante.} \end{aligned}$$

Mais X *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc n'est pas complet*

Remarque 2.1. *Si* φ *est une application lipschitzienne (pas néccessairement une contraction) mais l'une de ces itérées* φ^P *est une contraction, alors* φ *a encore un point fixe et un seul ceci résulte de l'unicité.*

en effet, soit x l'unique point fixe de φ^p on a $\varphi^p(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^p(x)) = \varphi(x)$ ce qui convient à dire que $\varphi(x)$ est aussi un point fixe de φ^p et grâce à l'unicité $\varphi(x) = x$.

Donc, ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

2.1.2 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, qui donne l'existance d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) , il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe [7].

Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation la plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Théorème 2.3. *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque 2.2. *Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.*

Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.4. *Si $f : [a; b] \to [a; b]$ est continue, alors il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même ($[a, b]$), la fonction

$$g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$$

est continue, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. □

Remarque 2.3.

1. L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothése devient inutile.

2. Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur$I$ " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ".

*Voici un **contre-exemple** :*

Soit, $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|.$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.5. ***(Schauder)****[7].*

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Preuve*.* Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x, $y \in K$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K ;

i.e,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq P}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinonn} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g(x) := \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_j(y) (f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$||f(y) - f(x_j)|| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout j,

$$\|\varphi_j(y) (f(y) - f(x_j))\| \leq \epsilon \varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|\varphi_j(y) (f(y) - f(x_j))\| \leq \sum_{i=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*,$$

$i.e$, y^* est un point fixe de f sur K. □

Exemple 2.2. *Etude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On utilisant le théorème suivant :
[5] Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que lintervalle I est stable par g. Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de g.

On peut introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

***Point fixe** de f :*

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+\mathbb{R}_+,\ \ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$*est stable par* f *.*

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n)*définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ*.*

Enfin, si $u_0 \in [-1, \infty]$ *alors* $u_1 \in \mathbb{R}_+$ *et d'après ce qui précède* (u_n)*converge encore vers* λ*.*

Chapitre 3

Problème aux limites du quatrième ordre à trois points

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour un problème aux limite engendré par une equation differentielle du quatrième ordre, où les conditions aux limites sont imposées à trois points du domaine, voir[4, 6].
On se basent sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Nous allons étudier le problème aux limites du quatrième ordre suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u''(1) = \beta u''(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où, $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$, et $f \in C([0,1]\,\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème.
Nous allons d'abord introduire quelques espaces utiles, nous allons utiliser les espaces de Banach $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L^1[0,1]$.

Nous utilisons également, l'espace de Banach $X = C^2[0,1]$ muni de la norme $\|u\|_X = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

3.1 Préliminaires

Dans cette section, nous allons présenter et démontrer la solution du problème, l'opérateur intégral associé et quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$ dont nous avons besoin.

Lemme 3.1. *Soit* $\beta > 0,\ 0 < \eta < 1,\ \beta\eta \neq 1$ *et* $y \in L^1[0,1]$, *alors le problème*

$$\begin{cases} u'''' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u''(1) = \beta u''(\eta), \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)} \int_0^1 G^*(\eta,s)\, y(s)\, ds, \tag{3.3}$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{6} \begin{cases} (1-s)t^3 - (t-s)^3, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (1-s)t^3, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

et

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{2} \begin{cases} (1-s)t^2 - (t-s)^2, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (1-s)t^2, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$G^*(t,s) = \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (1-s)t, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.5'}$$

Preuve. Par intégration de l'équation dans (3.2) sur l'intervalle $[0,t]$ pour $t \in [0,1]$ nous arrivons à

$$u(t) = -\frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 y(s)\, ds + \frac{1}{6} C_1 t^3 + \frac{1}{2} C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

De la condition $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$, nous déduisons que

$$C_4 = C_3 = C_2 = 0.$$

Et la condition $u''(1) = \beta u''(\eta)$ implique que

$$C_1 = \frac{1}{1-\beta\eta} \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \frac{\beta}{1-\beta\eta} \int_0^\eta (\eta - s)\, y(s)\, ds.$$

Donc,

$$u(t) = -\frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 y(s)\, ds + \frac{1}{6} C_1 t^3,$$

alors

$$u(t) = -\frac{1}{6} \int_0^t (t-s)^3 y(s)\, ds$$

$$+\frac{t^3}{6} \left(\frac{1}{1-\beta\eta} \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds - \frac{\beta}{1-\beta\eta} \int_0^\eta (\eta - s)\, y(s)\, ds \right),$$

donc

$$u(t) = -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3 y(s)\,ds$$
$$+\frac{t^3}{6}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds + \frac{\beta\eta t^3}{6(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$-\frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds,$$

et

$$u(t) = -\frac{1}{6}\left(\int_0^t (t-s)^3 y(s)\,ds - t^3\int_0^t (1-s)\,y(s)\,ds\right)$$
$$+\frac{t^3}{6}\int_t^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)}\left(\eta\int_0^\eta (1-s)\,y(s)\,ds + \eta\int_\eta^1 (1-s)\,y(s)\,ds\right)$$
$$-\frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds,$$

i.e,

$$u(t) = \frac{1}{6}\left(\int_0^t \left[(1-s)\,t^3 - (t-s)^3\right] y(s)\,ds + \int_t^1 (1-s)\,t^3 y(s)\,ds\right)$$
$$+\frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)}\left(\int_0^\eta (1-\eta)\,s y(s)\,ds + \int_\eta^1 (1-s)\,\eta y(s)\,ds\right).$$

Par conséquent,

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds + \frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)}\int_0^1 G^*(\eta,s)\,y(s)\,ds.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Afin de discuter de l'existence et l'unicité de la solution du problème, nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.2. *Supposons que $t,s\in[0,1]$, alors la fonction G et sa première et deuxième dérivée vérifient*

$$(i)\quad 0 \le G(t,s) \le 2G_1(s),$$
$$(ii)\quad 0 \le \frac{\partial}{\partial t}G(t,s) \le G_1(s),$$
$$(iii)\quad 0 \le G^*(t,s) \le 2G_1(s),$$

où $G_1(s) = \frac{1}{2}(1-s)\,s$.

Preuve. (i) Soit $t, s \in [0,1]$.

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, il découle de (3.4) que

$$G(t,s) = \frac{1}{6}\left[(1-s)t^3 - (t-s)^3\right],$$

$$G(t,s) \leq \frac{1}{6}s\left[t^2 - t^3 + 3t(t-s)\right],$$

$$G(t,s) \leq \frac{1}{6}s\left[t^2(1-s) + 3t(t-s)\right],$$

$$G(t,s) \leq s(1-s) = 2G_1(s).$$

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors

$$G(t,s) = \frac{1}{6}(1-s)t^3 \leq \frac{1}{6}(1-s)s^3,$$

$$G(t,s) \leq (1-s)s = 2G_1(s).$$

Par conséquent,

$$0 \leq G(t,s) \leq 2G_1(s), \quad \forall (t,s) \in [0,1][0,1].$$

(ii) Soit $t, s \in [0,1]$.

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, il découle de (3.5) que

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{1}{2}\left[(1-s)t^2 - (t-s)^2\right] = \frac{1}{2}\left(2t - t^2 - s\right)s = \frac{1}{2}\left[1 - s - (1-t)^2\right]s \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) \leq \frac{1}{2}(1-s)s = G_1(s).$$

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{1}{2}t^2(1-s) \leq \frac{1}{2}(1-s)s = G_1(s).$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial t}G(t,s) \leq G_1(s), \quad \forall (t,s) \in [0,1][0,1].$$

(iii) Soit $t, s \in [0,1]$.

Si $t \leq s$,

$$G^{*}(t,s) = (1-s)\,t \leq (1-s)\,s = G_1(s)\,.$$

Et si $s \leq t \Rightarrow -t \leq -s$,

$$G^{*}(t,s) = (1-t)\,s \leq (1-s)\,s = 2G_1(s)\,.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Définition 3.1. *Définissons l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ par*

$$\begin{aligned} Tu(t) = &\int_0^1 G(t,s)\, f(s,u(s))\, ds \\ &+ \frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)} \int_0^1 G^{*}(\eta,s)\, f(s,u(s))\, ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

La fonction $u \in X$ est une solution du problème (3.1) *si et seulement si*

$$Tu(t) = u(t),$$

(u est un point fixe de T).

3.2 Existence et unicité de la solution non triviale

En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, nous allons prouver les résultats d'existence et d'unicité de la solution non triviale du problème (3.1), nous démontrons aussi que l'opérateur intégral est complètement continu, par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli.

Lemme 3.3. *Supposons que $\beta\eta \neq 1$ et qu'il existe une fonction positive $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que :*

$$|f(t,x) - f(t,u)| \leq k(t)\,|x-u|\,, \tag{3.7}$$

$$\forall x,u \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]\,,$$

et

$$C = \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s)\, k(s)\, ds < 1,$$

alors le problème aux limites (3.1) *admet une solution unique dans X.*

Preuve. De (3.6) nous avons :

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\,ds + \frac{\beta t^3}{6(1-\beta\eta)} \int_0^1 G^*(\eta,s) f(s,u(s))\,ds.$$

Nous allons prouver que T est une contraction.
Soient $u, v \in X$ alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq 2\int_0^1 G_1(s) |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\,ds$$
$$+\frac{\beta}{3|1-\beta\eta|} \int_0^1 G_1(s) |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|,$$

donc, d'après (3.7) nous avons :

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \left(2 + \frac{\beta}{3|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) [k(s) |u(s) - v(s)|]\,ds,$$

alors

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \left(2 + \frac{\beta}{3|1-\beta\eta|}\right) \max_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)| \int_0^1 G_1(s) k(s)\,ds.$$

Donc

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \|u - v\|_X \left(2 + \frac{\beta}{3|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) k(s)\,ds,$$

donc

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \|u - v\|_X \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) k(s)\,ds.$$

donc

$$\max_{t\in[0,1]} |Tu(t) - Tv(t)| \leq C \|u - v\|_X.$$

Par conséquent,

$$\|Tu - Tv\|_X \leq C \|u - v\|_X.$$

Alors, T est une contraction. D'après le principe de contraction de Banach, l'opérateur Tadmet un unique point fixe, qui est l'unique solution du problème (3.1) . □

Théorème 3.1. (*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*) *[2].*
Soit F un epsace de Banach et soit Ω un sous ensemble ouvert et borné de F, $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to F$ un opérateur complètement continu. Alors, il existe un $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $T(x) = \lambda x$, ou il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$.

Théorème 3.2. *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$, $\beta\eta \neq 1$ *et qu'il existe deux fonctions positives* k *et* $m \in (L^1[0,1], \mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$|f(t,u)| \leq k(t)|u| + m(t), \ \forall u \in \mathbb{R}, \ t \in [0,1], \tag{3.8}$$

et

$$\left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) k(s) \, ds < 1.$$

Alors, le problème aux limites (3.1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in X$.

Preuve. Posons

$$F = \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) k(s) \, ds,$$

$$G = \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) m(s) \, ds.$$

Pour obtenir les résultats de ce théorème, nous démontrons d'abord que l'opérateur T donné par (3.6) est complètement continu.

1) T est continu.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans X. En appliquant la $formule$ (3.6), nous obtenons

$$|Tu_k(t) - Tu(t)| \leq \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) |f(s, u_k(s)) - f(s, u(s))| \, ds.$$

Et comme $G_1(s) \leq \frac{1}{8}$, alors

$$\|Tu_k - Tu\|_X \leq \frac{1}{8}\left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 |f(s, u_k(s)) - f(s, u(s))| \, ds.$$

Appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous déduisons que $\|Tu_k - Tu\|_X \underset{k\to\infty}{\to} 0$.
Ce qui implique que T est continu.

2) Soit $B_r = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$ un sous ensemble borné. nous allons prouver que $T(B_r)$ est relativement compact :

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in B_r$, nous utilisons la formule (3.6), nous obtiendrons

$$|Tu(t)| \leq \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) |f(s,u(s))| \, ds,$$

et de la formule (3.8), nous avons

$$|Tu(t)| \leq \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) [k(s)|u(s)| + m(s)] \, ds,$$

donc

$$\begin{aligned} |Tu(t)| \leq & \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \|u\|_X \int_0^1 G_1(s) k(s) \, ds \\ & + \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s) m(s) \, ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Tu\|_X \leq F \|u\|_X + G,$$

donc

$$\|Tu\|_X \leq Fr + G.$$

Alors, $T(B_r)$ est unifomément borné.

(ii) $T(B_r)$ est équicontinu.

Soit t_1, $t_2 \in [0,1]$, $u \in B_r$ nous avons :

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| = & \left| \int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s)) f(s,u(s)) \, ds \right. \\ & \left. + \frac{(t_1^3 - t_2^3)\beta}{6(1-\beta\eta)} \int_0^1 G^*(\eta,s) f(s,u(s)) \, ds \right|, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq L & \left[\int_0^{t_1} |G(t_1,s) - G(t_2,s)| \, ds + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_1,s) - G(t_2,s)| \, ds \right. \\ & \left. + \int_{t_2}^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)| \, ds \right] + \frac{L|t_1^3 - t_2^3|\beta}{6|1-\beta\eta|} \int_0^1 |G^*(\eta,s)| \, ds, \end{aligned}$$

où

$$L = \max\{|f(s,u)|, \; s \in [0,1], \; \|u\|_X \leq r\}.$$

Alors,

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq L|t_2 - t_1| \left[\int_0^{t_1} |(3+s)(t_1+t_2)|\, ds + \int_{t_2}^1 \left|(1-s)\left(t_1^2+t_2^2+t_1t_2\right)\right| ds\right.$$

$$\left.+\frac{\left(t_1^2+t_2^2+t_1t_2\right)\beta}{6|1-\beta\eta|}\int_0^1 |G^*(\eta,s)|\, ds\right] + L\int_{t_1}^{t_2} \left|s\left(t_2^3-t_1^3\right)+\left(t_1^3+3t_2^2s+3t_2s^2-s^3\right)\right| ds\ ,$$

donc

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq L|t_2 - t_1| \left[\left|t_1\left(3+\frac{t_1}{2}\right)(t_1+t_2)+\frac{t_1}{2}\left(t_1^2+t_2^2+t_1t_2\right)\right| ds\right.$$

$$\left.+\frac{\left(t_1^2+t_2^2+t_1t_2\right)\beta}{6|1-\beta\eta|}\int_0^1 |G^*(\eta,s)|\, ds\right].$$

Alors, $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0.$
Par conséquent, $T(B_r)$ est équicontinu.

D'après le théorème *d'Arzela-Ascoli*, nous déduisons que, T est un opérateur complètement continu.

Maintenant d'après la continuité de f et comme $f(t,0) \neq 0$, alors il existe un intervalle $[\sigma_1, \sigma_2] \subset [0,1]$ telle que :

$\min\limits_{\sigma_1\leq t\leq\sigma_2} |f(t,0)| > 0$ et du fait que $m(t) \geq |f(t,0)|$ sur $[\sigma_1,\sigma_2]$; alors, $G > 0$.

Soit $M = G(1-F)^{-1}$, $\Omega = \{u \in X : \|u\| < M\}$, supposons que, $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $Tu = \lambda u$, nous obtiendrons

$$\lambda M = \lambda\|u\| = \|Tu\|_X = \max_{t\in[0,1]} |Tu|\,.$$

nous avons

$$|Tu(t)| \leq 2\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)|u(s)| + m(s)\right) ds$$

$$+\frac{\beta}{3|1-\beta\eta|}\int_0^1 G_1(s)\left(k(s)|u(s)| + m(s)\right) ds.$$

donc

$$|Tu(t)| \leq \|u\|_X\left(2+\frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,k(s)\, ds$$

$$+\left(2+\frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right)\int_0^1 G_1(s)\,m(s)\, ds.$$

Ceci montre que,

$$\lambda M = \|Tu\|_X \leq F\,\|u\|_X + G = FM + G.$$

Alors, nous avons

$$\lambda \leq F + \frac{G}{M} = F + \frac{G}{G\,(1-F)^{-1}} = F + (1-F) = 1,$$

ceci contredit $\lambda > 1$.

En appliquant *le Théorème* (3.1), nous concluons que l'opérateur T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$.

Par conséquent le problème aux limites (3.1) a au moins une solution non triviale $u^* \in X$.

Ceci achève la démonstration. $\square$

3.3 Exemples

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats obtenus par des exemples.

Exemple 3.1. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} u'''' + tu = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u\,(0) = u'\,(0) = u''\,(0) = 0, \quad u''\,(1) = \beta u''\,(\eta)\,. \end{cases} \tag{T}$$

Posons

$$\beta = \frac{1}{3},\ \eta = \frac{1}{4},$$

et

$$f\,(t,u) = tu.$$

Choisissant

$$k\,(t) = t, \quad t \in [0,1]\,.$$

$k \in L^1\,[0,1]$ *une fonction positive et*

$$\begin{aligned} |f\,(t,x) - f\,(t,u)| &\leq t\,|x-u|\,, \\ &\leq k\,(t)\,|x-u|\,, \end{aligned}$$

avec

$$C = \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,k\,(s)\,ds < 1,$$

ainsi, d'après le Lemme (3.3)*, le problème aux limites* (T) *admet une unique solution non triviale,* $u^* \in X$.

Exemple 3.2. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} u'''' + 2tu + \sin 2t = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u''(1) = \beta u''(\eta). \end{cases} \tag{T1}$$

Posons

$$\beta = \frac{1}{2}, \ \eta = \frac{1}{4},$$

et

$$\begin{aligned} |f(t,u)| &\leq 2t|u| + \sin 2t, \\ &\leq k(t)|u| + m(t). \end{aligned}$$

Choisissant

$$\begin{cases} k(t) = 2t \\ m(t) = \sin 2t \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$

k *et* $m \in L^1[0,1]$ *deux fonctions positives, avec*

$$C = \left(2 + \frac{\beta}{|1-\beta\eta|}\right) \int_0^1 G_1(s)\, k(t)\, ds < 1,$$

Ainsi, d'après le Théorème (3.2), *le problème aux limites* $(T1)$ *a au moins une solution non triviale* $u^* \in X$.

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème aux limites du quatrième ordre. Après avoir démontré quelques préliminaires, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes de points fixes, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles une application $f : E \to E$, admet un point fixe dans E.

Ces théorèmes sont importants dans les mathémathiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles, ...

Bibliographie

[1] **H. Brézis,** Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983.

[2] **K. Deimling**, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[3] **Jean-Pierre DEMAILLY** , Analyse numérique et équation différentielle, Collection Grenoble Sciences, France, 2006.

[4] **R. G. Moorti and J. B. Garner,** Existence-uniqueness theorems for three point boundary value problmes for nth-order nonlinear differential equations, J. Differential Equations 29 (1978), 205-213.

[5] **L.Schwartz**, Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann,Paris 1970.

[6] **Y-P. Sun** ; Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, E.J.D.E, Vol. 2004(2004), No. 111, 1-10. J. Math.Anal. Appl. 168(1992), 540–551.

[7] **Zeidler, E.**, Nonlinear functional analysis and its applications, I.fixed-point theorems, Springer-Verlage, Berlin, 1993.