République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse Numérique**

Par :

M$^{\text{elle}}$. FADLIA Besma

Intitulé

Existence de solutions pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire non linéaire de type Euler-Lagrange

Dirigé par : Prof. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Y. BOUATIA	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. F. ELLAGGOUNE	PROF	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. M. CHAOUI	PROF	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord à mon encadreur : **Mr. Ellaggoune Fateh** qui m'a proposé le sujet.

Je le remercie pour son aide, sa patience, son soutien, ses conseils et pour tout l'attention qu'il a portée à ce travail.

Je tiens à remercier aussi les membres de jury d'avoir accepté l'évaluation de ce travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père, ma mère et ma grand mère.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في دراسة وجود حلول لمعادلة تفاضلية غير خطية ذات رتبة كسرية من صنف معادلة أويلر- لاغرانج تحت شرط غير محلي وذلك باستخدام طريقة الحلول السفلية والعلوية و نظرية النقطة الصامدة لشودر.

الكلمات المفتاحية : معادلة أويلر- لاغرانج الكسرية، طريقة الحلول السفلية والعلوية، وجود الحل ، تحويل لابلاس ، دالة ميتاج- لافر المعممة.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions d'une équation fractionnaire non linéaire de type Euler–Lagrange avec une condition non locale en utilisant la méthode de sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder

Mots clés : Équation fractionnaire d'Euler-Lagrange, méthode sous et sur solutions, existence de la solution, transformation de Laplace, fonction Mittag-Laffer généralisée.

Abstract

The purpose of this memory is to study the existence of solutions of a nonlinear fractional Euler–Lagrange type equation with a nonlocal condition by using the lower and upper solutions method and the Schauder fixed point theorem.

Keywords : Fractional Euler–Lagrange equation, upper and lower solutions method, existence of solution, Laplace transform, generalized Mittag Leffler function.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaire à un ordre arbitraire réel ou même complexe.

L'histoire de la dérivée fractionnaire s'étale de la fin du $17^{ème}$ siècle jusqu'à nos jours [15]. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$.

Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles".

Depuis cette époque, la dérivation d'ordre non entier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, tels Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville(1832-1873), Riemann (1847), et Laurent (1884).
C'est seulement lors de ces dernières décennies que cette théorie commence a toucher un nombre important de domaines mathématiques et autres garce à une explosion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire touchant la physique, la mécanique, la diffusion fractale, la biologie, l'électrotechnique, l'électrochimie, . . .

On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires à la base des fonctions spéciales (voire par exemple [1, 2]).

Récemment, d'autres résultat traitant l'existence de solutions du problèmes fractionnaires non linéaire par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes du point fixe et la méthode de sous et sur solutions (voire [3, 5, 9]).

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

• **Premier chapitre :** nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions de base (la fonction Gamma, la fonction Bêta et La fonction Mittag-Leffer), nous introduisant aussi la transformation de Laplace et l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les définitions des dérivées fractionnaires les plus pratique, l'approche de Riemann Liouville et celle de Caputo et leurs propriétés.

• **Deuxième chapitre :** on présente quelques résultats de la théorie du point fixe.

• **Troisième chapitre :** nous présentons les résultats obtenus dans [10], c'est à dire l'étude de solutions du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} -{}^C D^p_{1-}(D^q_{0+}u(t) + u(t)) + (D^q_{0+}u(t) + u(t)) + f(t, u(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = 0, \\ D^q_{0+}u(1) + u(1) = 0, \end{cases} \tag{P1}$$

où $0 < p, q < 1$, ${}^C D^p_{1^-}$ et D^q_{0+} désignent la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à droite et de Riemann-Liouville à gauche respectivement.

Enfin, on termine ce mémoire par une bibliographie.

CHAPITRE 1

Outils de base et calcul fractionnaire

Dans ce chapitre nous avons énoncé tous les outils de base du calcul fractionnaire qui nous seront utiles par la suite.

1.1 Fonctions Spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonction spéciales, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, elle prolonge le factoriel aux nombres réels et même aux nombres complexes.

Définition 1.1. *[14]*
On définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0. \tag{1.1}$$

Propriétés de la fonction Gamma

Proposition 1.1. *[14]*

1. *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ Re(z) > 0. \tag{1.2}$$

2. *La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel :*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

Preuve :

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégral d'Euler et intégrons par parties :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} s^z e^{-s} ds = \Big[- s^z e^{-s} \Big]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-s} s^{z-1} ds = z\Gamma(z).$$

■

2. On utilise la démonstration par récurrence :
   - Pour n=1, nous avons :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-s} ds = 1.$$

   - Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$ est vraie.
   - Montrons que la propriété reste vraie pour l'ordre $(n+1)$, d'après (**1.2**) nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)! \\ &= n!. \end{aligned}$$

■

Cas Particulier : Pour $z = n + \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.$$

Proposition 1.2. *([12], p4)*
La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \ Re(z) > 0. \tag{1.4}$$

1.1.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta est une fonction également connu sous le nom d'intégrale d'Euler de premier type.

Définition 1.2. *[14]*
On définit la fonction Bêta par :

$$B(x,y)=\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds, \quad \forall x,y\in\mathbb{C},\ Re(x)>0,\ Re(y)>0. \tag{1.5}$$

Propriétés de la fonction Bêta [14]

Proposition 1.3.

1. *La fonction Bêta est symétrique :*

$$B(x,y)=B(y,x), \quad Re(x)>0,\ Re(y)>0. \tag{1.6}$$

2. *La fonction Bêta peut être donnée par :*

$$B(x,y)=B(x+1,y)+B(x,y+1), \quad Re(x)>0,\ Re(y)>0. \tag{1.7}$$

Preuve

1. Nous avons

$$B(x,y)=\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds.$$

En utilisant le changement de variable $s=1-t$

$$B(x,y)=\int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1}dt=B(y,x).$$

■

2. En effet

$$\begin{aligned}B(x,y)&=\int_0^1[s+(1-s)]s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds\\&=\int_0^1 s^{x}(1-s)^{y-1}ds+\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y}ds\\&=B(x+1,y)+B(x,y+1).\end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.
La fonction Bêta est liée a la fonction Gamma par la relation suivant :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad Re(x) > 0, \ Re(y) > 0. \tag{1.8}$$

Preuve
Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-s} s^{x-1} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1} ds dt.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $t = u - s$, pour $0 \leq s \leq u$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-u} s^{x-1} (u-s)^{y-1} ds du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \int_0^u s^{x-1} (u-s)^{y-1} ds du.\end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale relative à ds, on pose le changement de variable $s = vu$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^u s^{x-1}(u-s)^{y-1} ds &= \int_0^1 (vu)^{x-1}(u-vu)^{y-1} u dv \\ &= u^{x+y-1} \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1} dv \\ &= u^{x+y-1} B(x,y).\end{aligned}$$

Par la suite :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= B(x,y) \int_0^\infty e^{-u} u^{x+y-1} du \\ &= B(x,y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

■

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffer

La fonction de Mittag-Leffer représentent une généralisation de la fonction exponentielle et jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires linéaire à coefficients constants.

Définition 1.3. *[12]*
On définit la fonction de Mittag-Leffer par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0, \tag{1.9}$$

et la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suite :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.10}$$

Exemple 1. ([4, 16])
Pour des valeurs de α et β on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$\bullet E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ $\qquad\bullet E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z$ $\qquad\bullet E_{1,2}(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$

Proposition 1.5. *[12]*

1. $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^n z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n) = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}.$
2. $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^n z^{n-\beta} E_{n,\beta}\left(\dfrac{\lambda}{z^n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{z^{n+\beta}} E_{n,\beta}\left(\dfrac{\lambda}{z^n}\right), \quad z \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}.$

Proposition 1.6. *[7]*
Pour $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\beta \geq \alpha$, la fonction $E_{\alpha,\beta}(-x)$ est complètement monotone c-à-d :

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,\beta}(-x) \geq 0, \quad x \geq 0,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{1.11}$$

1.2 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est une transformation mathématique qui permet de transformer une équation différentielle en une fraction polynomiale. Cela simplifie considérablement la résolution des équations.

Définition 1.4. *([13, 18])*
Soit f une fonction continue par morceaux de la variable $t \in \mathbb{R}_+$. La transformée de Laplace de f de la variable complexe ou réelle p est définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \tag{1.12}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(p)$.

*La transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (**1.12**) est convergente.*

L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace $F(p)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(p). \tag{1.13}$$

Propriétés 1.1. *[18]*

1. ***Linéarité*** *: Si a et b sont deux constantes réelles quelconque et f, g sont deux fonctions dont les transformées de Laplace existent, alors*
$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$
2. ***Translation*** *: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :*
$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))(p) = F(p-\alpha), \;\; Re(p) > \alpha.$$
3. ***Convolution*** *: Soient f, g deux fonctions causales et convolables en tout point $t \geq 0$ tels que $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(f * g)$ existent. Alors :*
$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}f(p).\mathcal{L}g(p).$$
4. ***Dérivation*** *: Soit $f \in C^n[0, \infty[,\; n \geq 1$ tels que $f^{(n)}$ d'ordre exponentiel, on a :*
$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = p^n\mathcal{L}f(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-k)}(0), \;\; Re(p) > 0.$$
5. ***Intégration***
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s)ds\right) = \frac{\mathcal{L}f(p)}{p}, \;\; Re(p) > 0.$$
6. ***La transformée de Laplace de quelques fonctions usuelle :***

$f(t), t \geq 0$	$t^\alpha, \alpha > -1$	$E_\alpha(\lambda t^\alpha), \lambda \in \mathbb{R}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)$
$F(p)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \;\; Re(p) > 0$	$\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda}$	$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha-\lambda}$

Remarque 1.

☞ Si f n'est pas continue en $t_0 = 0$ alors on remplace $f(0)$ par $f(0^+)$ surtout lorsqu'on utilise une intégration par parties dans une démonstration.

1.3 Intégration fractionnaire

1.3.1 Intégration Fractionnaires de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois.

$$\begin{aligned} \left(I_a^n f\right)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad x > a, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Définition 1.5. *[12]*
Soit $f \in L^1[a,b]$, $Re(\alpha) > 0$, l'intégrale

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad -\infty < a < +\infty, \tag{1.15}$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad -\infty < b < +\infty, \tag{1.16}$$

est appelée intégrale fractionnaire à droit de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 2.

☞ Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche.

Théorème 1.1. *[12]*
Si $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$, l'intégrale $(I^{\alpha} f)(x)$ existe pour tout $x \in [a;b]$ et l'on a $I^{\alpha} \in L^1[a,b]$.

Exemple 2.
Soit la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$ alors :

$$I^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta} dt$$

On pose $t = a + (x-a)\nu$, et on obtient :

$$I^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\nu)^{\alpha-1} \nu^{\beta} d\nu.$$

En utilisant la formule (**1.5**) et **la proposition 1.4**, on arrive à :

$$I^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (x)^{1.5} = \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}$$

Proposition 1.7. *[4]*
Soit $f \in C^n([a,b])$, pour x fixé, l'application $\alpha \to (I^{\alpha} f)(x)$ définie pour $Re(\alpha) > 0$ est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine $Re(\alpha) > -n$.

Preuve

Montrons l'existence du prolongement analytique. Dans (**1.15**) procédons par une intégration par partie,

$$\left(I^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha} f(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt.$$

Donc

$$\left(I^{\alpha} f\right)(x) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \left(I^{\alpha+1} f'\right)(x). \tag{1.17}$$

Il est clair que le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine $Re(\alpha) > -1$.
A présent le résultat final découle d'une simple itération de (**1.17**) :

$$(I^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + (I^{\alpha+n} f^{(n)})(x), \tag{1.18}$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique.

■

Théorème 1.2. *[4]*
Pour $f \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)(x) = I^{\alpha+\beta}f(x), \text{ pour } Re(\alpha) > 0, \ Re(\beta) > 0. \tag{1.19}$$

Preuve

La preuve s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d'Euler.
En effet :

$$\begin{aligned}
\left[I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(I^{\beta}f\right)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}f(t)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt,
\end{aligned}$$

et par le changement de variable $s = t + (x-t)\mu$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu\right]dt \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt \\
&= I^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

■

1.4 Dérivation fractionnaire

De nombreux mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier et différentes définitions de cet opérateur ont vu le jour. Dans cette section, nous allons présenter les définitions les plus familières : celle de Riemann- Liouville et de Caputo.

1.4.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.6. *[12]*
Soit $f \in L^1[a,b]$ et $n-1 < p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^p_{a+}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-p}_{a+}f(x)\right) \qquad (1.20)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}f(t)dt, \ \forall x \in [a,b], \end{aligned}$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f, et la dérivée

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^p_{b-}f(x) &= \left(\frac{-d}{dx}\right)^n \left(I^{n-p}_{b-}f(x)\right) \qquad (1.21)\\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t-x)^{n-p-1}f(t)dt, \quad \forall x \in [a,b], \end{aligned}$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville à droit de la fonction f.

Remarque 3.

☞ Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche.

Exemple 3.

1. **La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville**
   Si $p > 0$, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, sa valeur est :
   $$ {}^{RL}D^p c = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(x-a)^{-p}. $$
2. **La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.**
   Soit $p > 0$ tel que $n-1 < p < n$ et $\beta > -1$ alors on a :
   $$ {}^{RL}D^p f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-p}(x-a)^\beta\right), $$

d'après le résultat de **l'exemple** 2, on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^p f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}(x-a)^{\beta+n-p}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{\beta+n-p}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}\frac{\Gamma(\beta+n-p+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(x-a)^{\beta-p}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(x-a)^{\beta-p}
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé la formule

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^m &= m(m-1)...(m-n+1)(x-a)^{m-n}\\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(x-a)^{m-n}. \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

En particulier, lorsque $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$$
{}^{RL}D^{0.5}x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
$$

Propriétés 1.2. *[12, 4]*

1. ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***
   Soit $p > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors on a :

$$
I^p\ {}^{RL}D^p f(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b], \qquad (1.23)
$$

   Donc l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse à droite de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier***
   Si les dérivées fractionnaires ${}^{RL}D^p f$ et ${}^{RL}D^{p+n} f$ existent pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$
\frac{d^n}{dx^n}\left[{}^{RL}D^p f(x)\right] = {}^{RL}D^{n+p} f(x), \quad \forall x \in [a,b], \qquad (1.24)
$$

mais, on a :

$$^{RL}D^p\left[\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right] = ^{RL}D^{n+p}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}f^{(k)}(a). \quad (1.25)$$

On déduit alors que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad \text{pour tout } k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

3. ***Composition avec les dérivées fractionnaires***

Pour $f \in L^1[a,b]$, $n-1 < p < n$ *et* $m-1 < q < m$ *alors :*

$$^{RL}D^p\left[^{RL}D^q f(x)\right] = ^{RL}D^{p+q}f(x) - \sum_{k=1}^{m}\left[^{RL}D^{q-k}f(a)\right]\frac{(x-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)}, \quad (1.26)$$

et

$$^{RL}D^q\left[^{RL}D^p f(x)\right] = ^{RL}D^{p+q}f(x) - \sum_{k=1}^{n}\left[^{RL}D^{p-k}f(a)\right]\frac{(x-a)^{-q-k}}{\Gamma(1-q-k)}. \quad (1.27)$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires $^{RL}D^p$ *et* $^{RL}D^q$ *ne commutent que si :*

- $p = q$.
- $\left[^{RL}D^{q-k}f(a)\right] = 0$, *pour tout* $k = 1, 2..., m$.
- $\left[^{RL}D^{p-k}f(a)\right] = 0$, *pour tout* $p = 1, 2..., n$.

4. ***La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est :***

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[^{RL}D^q f](z) &= z^n\mathcal{L}[I^{n-q}f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(I^{n-q}f\right)\right](0^+)\\ &= z^q\mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(I^{n-q}f\right)\right](0^+), \quad (1.28)\end{aligned}$$

où $n-1 < q < n$.

1.4.2 Approche de Caputo

Nous allons maintenant présenter une définition modifiée de la dérivation fractionnaire et qui a été développée pour surmonter les limitations de la définition de Riemann-Liouville liées à la modélisation des phénomènes réels par des équations fractionnaires.

Définition 1.7. *[12]*
Soit f une fonction telle que $\frac{d^n}{dx^n}f \in L^1[a,b]$ et $n-1 < p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, alors la dérivée

$$\begin{aligned} {}^C D^p_{a^+} f(x) &= I^{n-p}_{a^+}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f^{(n)}(t)dt, \ \forall x \in [a,b], \end{aligned} \tag{1.29}$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo à gauche de la fonction f, et la dérivée

$$\begin{aligned} {}^C D^p_{b^-} f(x) &= (-1)^n I^{n-p}_{b^-}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \int_x^b (t-x)^{n-p-1} f^{(n)}(t)dt, \ \forall x \in [a,b], \end{aligned} \tag{1.30}$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo à droit de la fonction f.

Remarque 4.

- ☞ Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche.

Exemple 4.

1. **La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo.**
   La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :
   $$ {}^C D^p c = 0. $$
2. **La dérivée $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Caputo.**
   Soit $p > 0$ tel que $n-1 < p < n$ avec $\beta > n-1$.
   On a d'abord, d'après (**1.22**) :
   $$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}.$$

Alors

$$\begin{aligned} {}^C D^p (x-a)^\beta &= I^{(n-p)} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^\beta \right] \\ &= I^{n-p} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I^{(n-p)} [(x-a)^{\beta-n}], \end{aligned}$$

d'après le résultat de **l'exemple 2**, on obtient :

$$ {}^C D^p (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-p)} (x-a)^{\beta-p}. $$

En particulier, lorsque $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$$ {}^C D^{0.5} x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5). $$

Propriétés 1.3. *[12, 4]*

1. ***Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire***
   Si f est continue sur $[a,b]$ on a :

$$ {}^C D^p I^p f(x) = f(x), \tag{1.31} $$

   et

$$ I^p\, {}^C D^p f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \tag{1.32} $$

   Alors l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire du même ordre, mais il n'est pas un inverse à droite.

2. ***La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est :***

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D^q f](z) &= z^{q-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](z) \\ &= z^{q-n} \left[z^n \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} f^{(j)} \left(0^+\right) \right] \\ &= z^q \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{q-1-j} f^{(j)} \left(0^+\right), \end{aligned} \tag{1.33}$$

   où $n-1 < q < n$.

3. ***Composition avec les dérivées fractionnaires***
   Si $0 < p,\, q \leq 1$ avec $p+q \leq 1$ et f de classe C^1, alors :

$$ \left({}^C D^p \circ {}^C D^q\right) f = {}^C D^{p+q} f = \left({}^C D^q \circ {}^C D^p\right) f. \tag{1.34} $$

1.4.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Théorème 1.3.
Soit $n-1<p<n$ et $n\in\mathbb{N}^*$, soit f une fonction telle que ${}^{C}D^{p}f$ et ${}^{RL}D^{p}f$ existent, alors :

$$ {}^{C}D^{p}f(x) = {}^{RL}D^{p}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}f^{(k)}(a). \tag{1.35}$$

Preuve

On considère le D.L en série de Taylor de la fonction f au point $x=a$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+R_{n-1}, \end{aligned}$$

avec

$$R_{n-1}=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt,$$

et d'après la formule (**1.14**), on a :

$$R_{n-1}=I^n f^{(n)}(x),$$

d'où en utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{p}f(x) &= {}^{RL}D^{p}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+R_{n-1}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}^{RL}D^{\alpha}(x-a)^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+{}^{RL}D^{\alpha}R_{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k+1)(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)\Gamma(k+1)}f^{(k)}(a)+{}^{RL}D^{p}I^n f^{(n)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}f^{(k)}(a)+I^{n-p}f^{(n)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}f^{(k)}(a)+{}^{C}D^{p}f(x). \end{aligned}$$

■

Remarque 5.

☞ Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo coïncident, *i.e* :

$$^{C}D^p f(x) =^{RL} D^p f(x).$$

1.4.4 Comparaison entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

▶ L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

▶ Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Lioville elle est :

$$\frac{c}{\Gamma(1-p)}(x-a)^{-p}.$$

1.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.5.1 Linéarité (voir [12], p90)

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^p f(x) + \mu D^p g(x), \tag{1.36}$$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

1.5.2 La règle de Leibniz (voir [12], p91)

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

La généralisation de cette formule, nous donne :

$$D^p(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{p}{k} f^{(k)}(x) D^{(p-k)} g(x) + R_n^p(x), \tag{1.37}$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^x (x-t)^{-p-1} g(t) dt \int_t^x f^{(n+1)}(\mu)(t-\mu)^n d\mu$$

avec $\lim_{n\to+\infty} R_n^p(x) = 0$.

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a.x]$, alors la formule (**1.37**) devient :

$$D^p(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) D^{(p-k)} g(x). \tag{1.38}$$

Où D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

CHAPITRE 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. On commencera par le théorème du point fixe de Banach, ensuite de Brouwer et enfin le théorème du point fixe de Schauder.

2.1 Théorème du point fixe de type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple a prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Définition 2.1. *[19]*
Soit (E,d) un espace métrique complet et l'application $f : E \to E$, on dit que f est une application Lipschitzienne sur E, s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in E. \tag{2.1}$$

- *Si $k \leq 1$, l'application f est appelée non expansive.*
- *Si $k < 1$, l'application f est appelée contraction.*

Théorème 2.1. ***(Théorème du point fixe de Banach (1922)) [17]***
Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors il existe un unique point fixe $x \in E$ de f dans E(i.e. une unique solution de $f(x) = x$). De plus on a :

$$\begin{cases} si \ x_0 \in E \ et \ x_n = f(x_{n-1}), \\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \ et \ d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \ n \geq 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Preuve

• **L'existence :**
Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E. Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1. \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E. Pour $p < q$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque f est une contraction, on a :

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(f(x_{m-1}), f(x_m)) \leq kd(x_{m-1}, x_m),\ \forall m \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p(1 + k + ... + k^{q-p-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p(\frac{1-k^{q-p}}{1-k})d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k}d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k}d(x_0, x_1) < \epsilon.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est complet, on déduit qu'elle est converge dans E, **ie :** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x).$$

Donc x est un point fixe de f.
• **L'unicité**
Supposons qu'il existe deux points fixes $x, y \in E$. On a alors :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

ce qui implique que $d(x, y) = 0$, i.e $x = y$ (puisque $k < 1$).

■

Remarque 6.

☞ Si f est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées f^p est une contraction, alors f a un seul point fixe. En effet, soit x l'unique point fixe de f^p on a :

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x),$$

ce qui convient à dire que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p et grâce à l'unicité $f(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

2.2 Le théorème du point fixe de type Brouwer [20]

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique.
Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

• **Dans le plan** : Toute application f continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

• **Dans un espace euclidien** : Toute application f continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe. Il peut encore être un peu plus général :

Convexe compact : Toute application f continue d'un convexe compact X d'un espace euclidien à valeur dans X admet un point fixe.

a) Théorème de Brouwer en dimension un : On note $[a, b]$ le domaine de définition de f. L'application f est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette application admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui a x associe x : Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons l'application continue

$$T(x) = f(x) - x, \tag{2.3}$$

elle est positive en a, négative en b. Le théorème de Bolzano, qui est un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application T possède un zéro dans $[a, b]$, ce zéro de T est un point fixe de f. En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate.

b) Théorème de Brouwer en dimension deux : Si X le domaine de définition de f est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, X est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers X, L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire :

Si $h = f \circ \phi,\ h(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que X est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque.
Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact X, ensemble $[-1,1][-1,1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction T comme suit : $T : [-1,1][-1,1] \to [-1,1][-1,1]$

$$x \mapsto T(x) = h(x) - x. \tag{2.4}$$

Cela revient à montrer que la fonction T atteint le vecteur nul sur $[-1,1][-1,1]$.

Si T_k, pour $k = 1,2$, sont les deux fonctions coordonnées de T, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, telles que T_1 et T_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.

La fonction T_1 est une fonction de $[-1,1][-1,1]$ dans $[-1,1]$. Sur $\{-1\}[-1,1]$, elle est positive en revanche sur $\{1\}[-1,1]$, elle est négative.
Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1,1]\{1\}$ pour finir sur un point de $[-1,1]\{-1\}$.

Le même raisonnement appliquée à T_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\}[-1,1]$ pour terminer sur un point de $\{1\}[-1,1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \phi$.

■

Remarque 7.

- ☞ Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de X est un point fixe de l'application identité.

Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder :

Définition 2.2.
On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $f : X \to X$ possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de X^n.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.
La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Le théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.3. *[20]*
Soit E un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et supposons $f : E \to E$ une application continue et compact. Alors f admet un point fixe.

Preuve

Soit $f : E \to E$ une application continue. Comme E est compact, f est uniformément continue donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x,\ y \in E$, on a :

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset E$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent E, i.e.$f \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$.

Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1\leq j\leq p}$, alors L est de dimension finie, et $E^* := E \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : X \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases},$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur E les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in E$.
Posant, pour $x \in E$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans E^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/E^*} : E^* \to E^*$, (d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in E^*$. De plus :

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left[f(y) - f(x_j) \right]. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|f(y) - f(x_j)\| < \epsilon$.

Donc pour tout j :

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)[f(y) - f(x_j)]\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Alors, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in E$ tel que

$$\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}.$$

Et puisque E est compact, de la suite (y_m) on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in E$. Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$.

■

2.4 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 2.4. *[11]*
Soit $A \subset C(X, Y)$ tel que X est un espace métrique compact et Y est un espace normée, alors A est relativement compact si et seulement si :

- *A est uniformément borné, i.e.*

$$\exists r > 0, \ \| f(x) \| \leq r, \quad \forall x \in X, \ \forall f \in A$$

- *A est équicontinu, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall t_1, t_2 \in X, \ |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \forall f \in A, \ \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

CHAPITRE 3

Existence de solutions pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire non linéaire de type Euler-Lagrange

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire non linéaire de type Euler-Lagrange. Les principaux outils de cette étude sont la méthode de sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder.

3.1 Position du problème

On considère le problème fractionnaire $(P1)$ suivant :

$$(P1)\begin{cases} -^{C}D^{p}_{1-}(D^{q}_{0+}u(t)+u(t))+(D^{q}_{0+}u(t)+u(t))+f(t,u(t))=0,\ 0\leq t\leq 1, & (3.1)\\ u(0)=0, & (3.2)\\ D^{q}_{0+}u(1)+u(1)=0, & (3.3)\end{cases}$$

où $0<p,q<1$, ${}^{C}D^{p}_{1-}$ et D^{q}_{0+} désignent la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à droite et de Riemann-Liouville à gauche respectivement.

Théorème 3.1. *[8]*
On suppose que $g\in C^{1}[0,1]$ tel que pour tout $t\in[0,1]$ et tout $k\in(p,1)$ avec quelques $p\in(0,1)$ on a :
- *Si ${}^{C}D^{k}_{1-}g(t)\geq 0$, alors g est décroissante.*
- *Si ${}^{C}D^{k}_{1-}g(t)\leq 0$, alors g est croissante.*

Maintenant, nous donnons la définition de sous et sur solutions du problème $(P1)$:

Définition 3.1.
Les fonctions $\alpha, \beta \in AC^2[0,1]$ sont appelées sous et sur solutions du problème $(P1)$, respectivement, si pour tout $t \in [0,1]$ et $k \in [p,1)$:

- $-^C D^k_{1^-}\left(D^q_{0+}\alpha(t)+\alpha(t)\right)+\left(D^q_{0+}\alpha(t)+\alpha(t)\right)+f\left(t,\alpha(t)\right)\leq 0,$
$$et \quad \alpha(0)\geq 0, \left(D^q_{0+}\alpha+\alpha\right)(1)\geq 0.$$
- $-^C D^k_{1^-}\left(D^q_{0+}\beta(t)+\beta(t)\right)+\left(D^q_{0+}\beta(t)+\beta(t)\right)+f\left(t,\beta(t)\right)\geq 0,$
$$et \quad \beta(0)\leq 0, \left(D^q_{0+}\beta+\beta\right)(1)\leq 0.$$

Où
$$AC^2[0,1]=\left\{u\in C^1[0,1], u' fonction\ absolument\ continue\ sur[0,1]\right\}.$$

Les fonctions α, β sont appelées sous et sur solutions dans l'ordre inverse si :
$$\alpha(t)\geq\beta(t),\ 0\leq t\leq 1.$$

3.2 Existence de solutions

Nous commençons par résoudre le problème $(P2)$ suivant :
$$\begin{cases} D^q_{0+}u(t)+u(t)=v(t),\ 0\leq t\leq 1, \\ u(0)=0, \end{cases} \tag{P2}$$

Lemme 3.1.
Pour $0<q<1$, la solution du problème $(P2)$ est donné par :
$$u(t)=\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)v(s)ds. \tag{3.4}$$

Preuve

On applique la transformation de Laplace sur l'équation différentielle dans $(P2)$, en fait :
$$\mathcal{L}(D^q_{0+}u)(z)+\mathcal{L}(u)(z)=\mathcal{L}(v)(z)$$
$$z^q\mathcal{L}(u)(z)-I^{1-q}_{0^+}u(0^+)+\mathcal{L}(u)(z)=\mathcal{L}(v)(z),$$
on a $u(0)=0$ donc $I^{1-q}_{0^+}u(0^+)=0$,
$$\mathcal{L}(u)(z)=\frac{1}{1+z^q}\mathcal{L}(v)(z).$$

Puis on utilise la transformation de Laplace inverse :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(u)(z)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+z^q}\mathcal{L}(v)(z)\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\underbrace{t^{q-1}E_{q,q}(-t^q)(z)}_{w(z)}).\mathcal{L}(v)(z)),\end{aligned}$$

d'après (3) de **la propriété1.1** on trouve :

$$\begin{aligned}u(t) &= (w * v)(t)\\ &= \int_0^t w(t-s)v(s)ds\\ &= \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)v(s)ds.\end{aligned}$$

■

Soit $E = C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ selon la norme $\|u\| = \max_{t\in[0,1]}|u(t)|$.
On définit l'opérateur T sur E par :

$$Tv(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)v(s)ds,\ t\in[0,1], \tag{3.5}$$

donc $u(t) = Tv(t),\ t\in[0,1]$.
En utilisant la condition aux limites (**3.3**), nous pouvons voir que le problème $(P1)$ est équivalent au problème de valeur aux limites de Caputo suivant :

$$\begin{cases}-{}^{C}D_{1^-}^{p}v(t) + v(t) + f\left(t, Tv(t)\right) = 0,\ 0\le t\le 1,\\ v(1) = 0.\end{cases} \tag{$P3$}$$

On pose les hypothèses suivant :

$(H1)$ Il existe une constante $A \ge 0$ telle que :

$$f(t,x) \le A\left((1-t)^{1-k} - (1-t)\right),$$

pour $0\le t\le 1$, pour tout $k\in[p,1), 0\le x\le \frac{A}{q}E_{q,q}(-1)$.

$(H2)$ Il existe une constante $B \le 0$ telle que $A \ge |B|$ et :

$$f(t,x) \ge B\left((1-t)^{1-k} - (1-t)\right),$$

pour $0\le t\le 1$, pour tout $k\in[p,1)$, $\frac{B}{q}E_{q,q}(-1)\le x\le 0$.

Lemme 3.2.
Sous les hypothèses (H1) et (H2), le problème (P1) a des sous et sur solutions dans l'ordre inverse.

Preuve

On pose $\varphi(t) = A(1-t)$ et en utilisant **la proposition 1.6** on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \leq T\varphi(t) &= A\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)(1-s)ds \\ &= AE_{q,q}(-1)\left[\frac{t^{qn+q+1}}{qn+q+1} - \frac{t^{qn+q+1}}{qn+q} + \frac{t^{qn+q}}{qn+q}\right] \leq \frac{A}{q}E_{q,q}(-1). \end{aligned}$$

Maintenant on montre que $\alpha(t) = T\varphi(t)$ est une sous solution du problème $(P1)$, d'après l'hypothèse $(H1)$, on a pour tout $t \in [0,1]$ et tout $k \in [p,1)$:

$$\begin{aligned} &-^C D_{1^-}^k \left(D_{0^+}^q \alpha(t) + \alpha(t)\right) + \left(D_{0^+}^q \alpha(t) + \alpha(t)\right) + f\left(t, \alpha(t)\right) \\ &= -^C D_{1^-}^k \varphi(t) + \varphi(t) + f\left(t, T\varphi(t)\right) \\ &= \frac{-A}{\Gamma(2-k)}(1-t)^{1-k} + A(1-t) + f\left(t, T\varphi(t)\right) \\ &\leq A\left(-(1-t)^{1-k} + (1-t)\right) + f\left(t, T\varphi(t)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Et $\alpha(0) = T\varphi(0) = 0$ et $\left(D_{0^+}^q \alpha + \alpha\right)(1) = \varphi(1) = 0$, donc $\alpha(t) = T\varphi(t)$ est une sous solution du problème $(P1)$.
Du même, si on pose $\psi(t) = B(1-t)$, alors, d'après l'hypothèse $(H2)$, $\beta(t) = T\psi(t)$ est une sur solution du problème $(P1)$.
D'après les expressions :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= A\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)(1-s)ds \geq 0, \\ \beta(t) &= B\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}\left(-(t-s)^q\right)(1-s)ds \leq 0, \end{aligned}$$

on conclut que :

$$\beta(t) \leq \alpha(t),\ 0 \leq t \leq 1. \tag{3.6}$$

■

Considérons une suite des problèmes $((P4)_k)$ modifiée, pour $k \in [p,1)$:

$$\begin{cases} {}^C D_{1^-}^k v(t) = Fv(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ v(1) = 0, \end{cases} \tag{$(P4)_k$}$$

où l'opérateur $F : E \to E$, est définie par :

$$Fv(t) = \min\left(\varphi, \max(v,\psi)\right) + f\left(t, T(\min(\varphi, \max(v,\psi)))\right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Lemme 3.3.
Si v est une solution du problème $((P4)_p)$, alors $u = Tv$ est une solution du problème $(P1)$ vérifie :

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.7}$$

Preuve

Pour $k \in [p, 1)$, on montre que si v_k est une solution du problème $((P_4)_k)$, alors

$$\psi(t) \leq v_k(t) \leq \varphi(t), \; 0 \leq t \leq 1. \tag{3.8}$$

Soit $\epsilon(t) = v_k(t) - \varphi(t)$. De les conditions initiales $v_k(1) = \varphi(1) = 0$, on obtient $\epsilon(1) = 0$, on suppose qu'il existe $t_1 \in [0, 1[$, tel que $v_k(t_1) \geq \varphi(t_1)$. Puisque la fonction ϵ est continue, alors il existe $a \in [0, t_1]$ et $b \in [t_1, 1)$ tel que $\epsilon(b) = 0$ et $\epsilon(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a, b]$.
En appliquant la dérivée fractionnaire de Caputo à droit sur ϵ, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^k_{1^-} \epsilon(t) &= {}^C D^k_{1^-} v_k(t) - {}^C D^k_{1^-} \varphi(t) \\ &= \min[\varphi, \max(v_k, \psi)] + f(t, T(\min[\varphi, \max(v_k, \psi)])) - {}^C D^k_{1^-} \varphi(t) \\ &= \varphi(t) + f(t, T(\varphi(t))) - {}^C D^k_{1^-} \varphi(t) \\ &= D^q_{0^+}(\alpha(t) + \alpha(t)) + f(t, \alpha(t)) - {}^C D^k_{1^-}(D^q_{0^+}\alpha(t) + \alpha(t)) \\ &\leq 0 \;\; (\text{car } \alpha(t) \text{ est une sous solution}). \end{aligned}$$

Alors, d'après **le théorème 3.1**, la fonction $\epsilon(t)$ est croissante, pour tout $t \in [a, b]$. Puisque $\epsilon(b) = 0$, alors $v_k(t) \leq \varphi(t)$, pour tout $t \in [a, b]$, cela conduit à une contradiction.

Du même façon , on prouve que $\psi(t) \leq v_k(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$.
D'après (**3.8**), on remarque que si v est une solution du problème $((P4)_p)$, alors :

$${}^C D^p_{1^-} v(t) = Fv(t) = v(t) + f(t, Tv(t)),$$

ainsi v est une solution de $(P3)$ et donc $u = Tv$ est une solution de $(P1)$.
Enfin, la monotonie de l'opérateur T implique :

$$T\psi(t) \leq Tv(t) \leq T\varphi(t), \; 0 \leq t \leq 1. \tag{3.9}$$

■

Théorème 3.2.
On suppose que f est croissante par rapport à la deuxième variable et les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ sont vérifiés. Alors le problème $(P1)$ a au moins une solution u tel que :

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Preuve

On définit l'opérateur R sur E par :

$$\begin{aligned} Rv(t) &= I_{1^-}^p Fv(t) \\ &= I_{1^-}^p[\min(\varphi, \max(v,\psi)) + f(t, T(\min(\varphi, \max(v,\psi))))], \ 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Il est claire que si R a un point fixe v, alors $u = Tv$ est une solution de $(P1)$.

Soit :

$$\Omega = \{v \in C[0,1], \psi(t) \leq v(t) \leq \varphi(t), \ 0 \leq t \leq 1\}, \text{un sous-ensemble convexe.}$$

et on suppose

$$M = \max\{|x + f(t, Tx)|, \ \beta(t) \leq Tx \leq \alpha(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

La fonction f est croissante par rapport à la deuxième variable, et d'après (**3.9**), on montre que $R(\Omega) \subset \Omega$. Soit $v \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} Rv(t) &= I_{1^-}^p[\min(\varphi, \max(v,\psi)) + f(t, T(\min(\varphi, \max(v,\psi))))] \\ &= I_{1^-}^p v(t) - I_{1^-}^p f(t, Tv(t)) \\ &\leq I_{1^-}^p \varphi(t) + I_{1^-}^p f\,(t, \alpha(t)) \\ &\leq I_{1^-}^p \left({}^C D_{1^-}^p \varphi(t)\right) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Du même, on montre que $Rv(t) \geq \psi(t)$, donc $R(\Omega) \subset \Omega$.

Maintenant on prouve que R est complètement continu :
-(i) $R(\Omega)$ est uniformément borné.
soit $v \in \Omega$. Du fait que $\beta(t) \leq T(\min(\varphi, \max(v,\psi))) \leq \alpha(t)$, alors

$$\begin{aligned} |Rv(t)| &= |I_{1^-}^p Fv(t)| \\ &\leq I_{1^-}^p |\min(\varphi, \max(v,\psi)) + f(t, T(\min(\varphi, \max(v,\psi))))| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(p+1)}. \end{aligned}$$

Donc $R(\Omega)$ est uniformément borné.
-(ii) $R(\Omega)$ est équicontinu.
On pose :

$$g(t) = \min(\varphi, \max(v,\psi)) + f(t, T(\min(\varphi, \max(v,\psi)))).$$

Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}|Rv(t_1) - Rv(t_2)| &\leq |I^p_{1-}g(t_1) - I^p_{1-}g(t_2)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)^{p-1}|g(s)|ds + \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{t_2}^{1}\left((s-t_1)^{p-1} - (s-t_2)^{p-1}\right)|g(s)|ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(p+1)}((1-t_1)^p - (1-t_2)^p) \to 0 \text{ lorsque } t_1 \to t_2.\end{aligned}$$

Par conséquent $R(\Omega)$ est équicontinu.
Par application du théorème d'Arzela-Ascoli en déduit que R est complètement continu.

Alors d'après le théorème du point fixe de Schauder, R a un point fixe $v \in \Omega$, et donc $u = Tv$ est une solution de $(P1)$.
Par **le lemme 3.3** on conclut que :

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

■

3.3 Exemple

Nous donnons un exemple numérique pour illustrer les résultats obtenus.

Exemple 5.
Considérons le problème $(P1)$ avec $p = 0.2$ et

$$f(t,x) = 2\left[(1-t)^{1-p} - (1-t)\right]\exp\left(x - \frac{2E_{q,q}(-1)}{q}\right), \ 0 \leq t \leq 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

On voit facilement que f est croissante par rapport à x. Si on choisit $A = 2$, alors :

$$\begin{aligned}f(t,x) &= 2\left[(1-t)^{1-p} - (1-t)\right]\exp\left(x - \frac{2E_{q,q}(-1)}{q}\right) \\ &\leq 2\left[(1-t)^{1-k} - (1-t)\right],\end{aligned}$$

pour tout $k \in [0.2, 1), 0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq x \leq \frac{A}{q}E_{q,q}(-1)$.
Maintenant si on choisit $B = 0$, alors on a : pour $x = 0$ et $0 \leq t \leq 1$,

$$f(t,0) = 2\left[(1-t)^{1-p} - (1-t)\right]\exp\left(-\frac{2E_{q,q}(-1)}{q}\right) \geq 0,$$

pour tout $k \in [0.2, 1), \ 0 \leq t \leq 1$ et $\frac{B}{q}E_{q,q}(-1) \leq x \leq 0$.
Donc les hypothèses du **théorème 3.2** sont satisfaites, par conséquent, le problème $(P1)$ a au moins une solution u tel que :

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une bref synthèse sur les équations différentielles fractionnaires.
Nous nous sommes concentrés sur la présentation de [10] en détail, dans lequel il a été démontré l'existence de solutions pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire non linéaire de type Euler-Lagrange impliquant des déviées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et de Caputo à droit en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

Bibliographie

[1] O. P. Agrawal. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. J. Math. Anal. Appl. 272 (2002), no. 1, 368–379.

[2] D. Baleanu, J.H. Asad, I. Petras. *Fractional order two electric pendulum. Rom. Rep. Phys.* 64(4), 907–914 (2012).

[3] A. Cabada. *An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions. Boundary Value Problems 2011*, 18 (2011) (Article ID 893753).

[4] H. Dib. *Equations Différentielles Fractionnaires EDA-EDO(4 ème Ecole)*. Université Aboubekr BELAKID Tlemcen (2009).

[5] D. Franco, Juan J. Nieto, D. O'Regan. *Upper and lower solutions for first order problems with nonlinear boundary conditions*. Extracta mathematicae 18, 153–160 (2003).

[6] A.Granas, J. Dugundji. *Fixed Point Theory. Springer monographs in mathematics*. Springer, 2003. ISBN : 9780387001739,0387001735.

[7] R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin. *Mittag-Leffler functions, Related topics and applications*. Springer Monographs in Mathematics, New York (2014).

[8] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, Torres, D.F.M. *On a fractional oscillator equationwith natural boundary conditions*. Progr. Fract. Differ. Appl. 3(4), 191–197 (2017).

[9] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi. *Upper and lower solutions method for higher order boundary value problems*. Progr. Fract. Differ. Appl. 3(1), 53–57 (2017).

[10] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi. *Solutions for a nonlinear fractional Euler-Lagrange type equation*. SeMA J. 76 (2019), no. 2, 195–202. https ://doi.org/10.1007/s40324-018-0170-4.

[11] J. K. Hale, L. Verduyn, M. Sjoerd. *Introduction to functional-differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York, 1993. x+447 pp. ISBN : 0-387-94076-6.

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[13] A. Lesfari. *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*, Ellipses Édition Marketing S.A., 2012 32, ISBN 978-2-7298-76296.

[14] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional differential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[15] B. Ross. *The development of fractional calculus 1695–1900*. Historia Math. 4 (1977), 75–89.

[16] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach. Yverdon, Switzerland (1993).

[17] D.R. Smart, *Fixed point theory*, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[18] M. R. Spiegel. *Theory and problems of Laplace transforms*. Schaum Publishing Co., New York 1965 vi+261 pp.

[19] K. Yosida, *Fonctional Analysis*, 6th edn Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[20] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.