

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

**Et analyse numérique**

Par :

**M<sup>elle</sup>. Rayane Hamouda**

## **Intitulé**

**Théorie de l'indice et ses applications dans les  
systèmes dynamiques.**

**Dirigé par : Yassine Bouattia**

**Devant le jury**

**PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Dr. Sabrina Badi  
Dr. Yassine Bouattia  
Dr. Nabil Sellami**

**Prof  
MCB  
MCB**

**Univ-Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma**

**Session Septembre 2020**

# Remerciements

**Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur monsieur Bouattia Yacine. Je tiens à le remercier pour son dévouement, son aide, sa patience ainsi que sa disponibilité et sa sympathie, merci infiniment.**

**Mes remerciements les plus respectueux vont au professeur Badi Sabrina d'avoir accepté d'être président de jury et professeur sellami Nabil qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de ce mémoire.**

**Je remercie mon papa et ma maman pour l'énergie positive qu'elle m'a donnée tout au long de ma carrière, mes frères et sœurs , ma famille et toutes mes amies qui ont toujours là pour moi.**

## **Dédicaces**

**Je dédie ce travail à ma famille, elle qui m'a adopté d'une éducation digne, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui :**

**Particulièrement à mes chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.**

**A mes frères.**

**A mes amies et mes camarades.**

**Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.**

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Notions préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1	Systèmes dynamiques, points critiques . . . . .	2
1.2	Classification des points d'équilibre . . . . .	3
1.3	Portrait de phase et cycles limites . . . . .	6
1.4	Stabilité . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Théorie de l'indice</b>	<b>8</b>
2.1	Indice des points critiques . . . . .	8
2.2	Représentation de l'indice . . . . .	9
2.3	Autre façon du théorie de l'indice . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Applications de la théorie de l'indice dans les systèmes dy-</b>	
	<b>namiques</b>	<b>21</b>
3.1	Indice à l'infini . . . . .	22
3.2	Indice des points d'équilibres . . . . .	24

---

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la théorie de l'indice et ses applications dans les systèmes dynamiques. Nous avons étudié le portrait de phase et les cycles limites, l'indice des points critiques et la stabilité. Nous avons fait une représentation de l'indice. Nous avons illustré cette étude par des applications dans les systèmes dynamiques.

**Mots clé :** Cycle limite, la théorie de l'indice, système dynamique.

---

## **Abstract**

This memory is concerned with the study of index theory and its applications in dynamical systems. We have studied the phase portrait and limit cycles, the critical point index and stability. We made a representation of the index. We have illustrated this study by applications in dynamical systems.

**Keywords :** Limit cycle, index theory, dynamical system.



## 0.1 Introduction

Le développement des mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur. L'une des théories qui peuvent être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales, la physique et en ingénierie et celle des systèmes dynamique, c'est la théorie de l'indice. L'importance de la théorie de l'indice est qu'elle unifie plusieurs résultats géométriques qui sont de naissance très différents. Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibre et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Puis nous présentons la définition de la stabilité. Dans le chapitre deux nous donnons quelques définitions, théorèmes, remarques et exemples qui soit la base de la théorie de l'indice. Le dernier chapitre est basé sur des applications sur les systèmes dynamiques.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires

### 1.1 Systèmes dynamiques, points critiques

**Définition 1.1.** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que :

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(0, x) = x$ .
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1.**

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$  associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

## 1.2. CLASSIFICATION DES POINTS D'ÉQUILIBRE

---

vérifie les quatre propriétés précédentes.

**Définition 1.2.** Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(x_0) = 0$$

**Définition 1.3.** Considérons le système (1.2)

Le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.2) en  $x_0$ .

**Définition 1.4.** On appelle point critique hyperbolique de (1.2), le point  $x_0$  telle que  $A$  n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

## 1.2 Classification des points d'équilibre

### Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $A$  une matrice constante inversible. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

**Définition 1.5.**

· Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles et du même signe, la solution  $x = 0$  est appelée *noeud*.

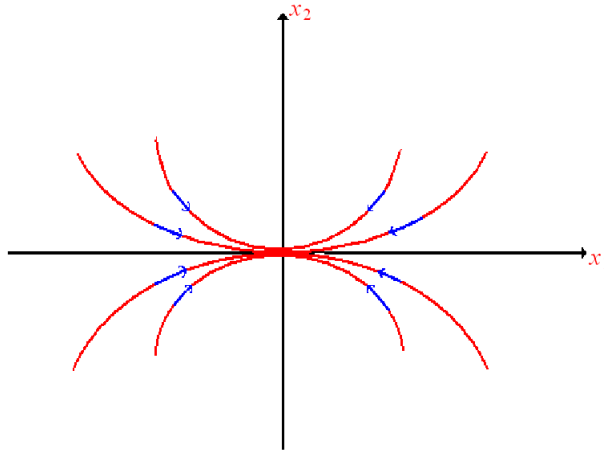


Fig 1.1 Noeud stable ( $n=2$ ).

· Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = 0$  est appelée *selle*.

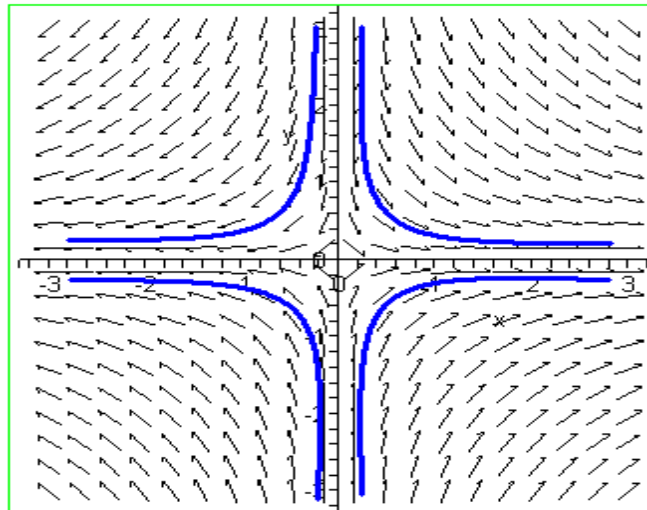


Fig 1.2- point selle ( $n=2$ ).

· Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ .

## 1.2. CLASSIFICATION DES POINTS D'ÉQUILIBRE

La solution  $x = 0$  est appelée *foyer*.

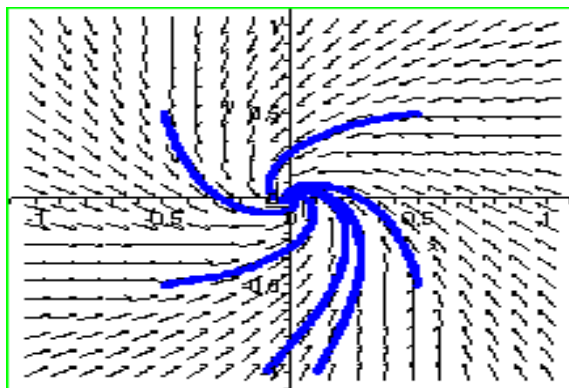


Fig 1.3- Foyer stable ( $n=2$ ).

· Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  et  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La solution  $x = 0$  est appelée *centre*.

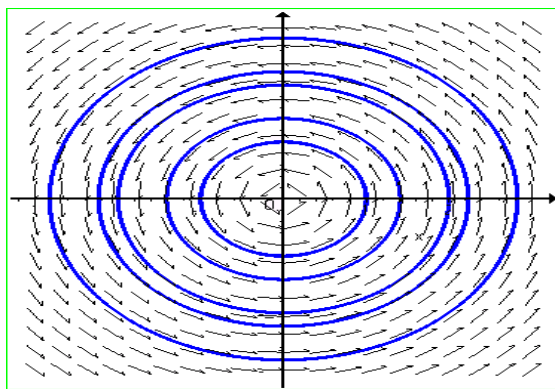


Fig 1.4- Centre ( $n=2$ ).

### Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n)$$

**Définition 1.6.** Un point critique  $x_0$  de (1.4) est appelé *puits* si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives ; Il est appelé *source* si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives ; Il est appelé *selle* s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

**Définition 1.7.** Deux systèmes planaires :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.6}$$

définis sur deux ouverts  $U$  et  $V$  respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme  $h : U \rightarrow V$  tel que  $h$  transforme les orbites de (1.5) en celles de (1.6) et préserve le sens du mouvement.

**Théorème 1.1.** Si  $x_0$  est un point d'équilibre hyperbolique de (1.4), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système  $\dot{x} = f(x)$  est *topologiquement équivalent* à son linéarisé  $\dot{x} = Ax$ .

### 1.3 Portrait de phase et cycles limites

**Définition 1.8.** Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.7}$$

où  $P, Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.7) sont représentées dans le plan  $(x, y)$  par des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

**Définition 1.9.** Une solution périodique du système (1.7) est une solution telle que :

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

**Définition 1.10.** Un cycle limite du système (1.7) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

**Définition 1.11.** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  sur le cycle limite.

## 1.4 Stabilité

Soit le système des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

On suppose que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

**Définition 1.12.** Une solution  $\Phi(t)$  du système (1.8) telle que  $\Phi(t_0) = \Phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que toute solution  $x(t)$  de (1.8) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si en plus de cette définition on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand  $\Phi(t) = 0$  la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que toute solution  $x(t)$  de (1.8) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si en plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

alors  $\Phi(t) = 0$  est asymptotiquement stable.

L'étude de la stabilité de la solution  $\Phi(t)$  peut être ramenée à celle de la solution nulle  $y = 0$  d'un système (Analogie) au système (1.8).

En effet : posons  $y(t) = x(t) - \Phi(t)$  où  $y(t)$  est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\ &= g(t, y) \end{aligned}$$

On voit bien que  $y \equiv 0$  est une solution de ce système.

# Chapitre 2

## Théorie de l'indice

### 2.1 Indice des points critiques

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

Soit  $\Gamma$  une courbe qui ne contient pas de points d'équilibres de **(2.1)** en chaque point  $(x, y)$ , le champ de vecteurs  $(X, Y)$  définit une direction.

Soit  $\phi$  l'angle que fait le vecteur  $(X, Y)$  avec l'axe des  $x$ .

**Définition 2.1.** L'indice de la courbe  $\Gamma$  relativement au champ de vecteurs  $(X, Y)$  est  $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$  où  $\Delta\phi$  est la variation de l'angle  $\phi$  quand le point  $(x, y)$  parcourt  $\Gamma$  une seule fois dans le sens positif :

$$\tan \phi = \frac{Y}{X}$$

**Exemple 2.1.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \quad (2.2)$$

et  $\Gamma$  : le cercle unité centré en  $(0, 0)$  donc

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} X = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos(2\theta) \\ Y = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) \end{cases}$$

Si  $\theta = 0$  alors

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$  donc

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  d'où

$$\begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \\ \phi = \pi \end{cases}$$

Si  $\theta = \pi$  alors

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \\ \phi = 2\pi \end{cases}$$

Si  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  donc

$$\begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \\ \phi = 3\pi \end{cases}$$

Si  $\theta = 2\pi$  d'où

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \\ \phi = 4\pi \end{cases}$$

L'indice est un entier relatif, il peut être nul.

## 2.2 Représentation de l'indice

Posons  $\Gamma = \{(x(s), y(s)) / s_0 \leq s \leq s_1\}$

$$\tan \phi = \frac{Y}{X}$$

$$\frac{d(\tan \phi)}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{Y}{X} \right)$$



$$\frac{1}{\cos^2(\phi)} \times \frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{Y}{X} \right) \implies (1 + \tan^2 \phi) \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{dY}{ds} \times X - \frac{dX}{ds} \times Y}{X^2}$$

$$1 + \tan^2 \phi = 1 + \frac{Y^2}{X^2} = \frac{X^2 + Y^2}{X^2}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{X^2}{X^2 + Y^2} \times \frac{X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds}}{X^2} = \frac{X \frac{dY}{ds} - Y \frac{dX}{ds}}{X^2 + Y^2}$$

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\phi}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{X^2 + Y^2} ds$$

ou

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_R} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

quand  $r(s) = (x(s), y(s))$  décrit  $\Gamma$  :  $R(s) = (X, Y)$  décrit une autre courbe  $\Gamma_R$  fermée car  $R$  retourne à sa position initiale.

**Théorème 2.1.** Si  $\Gamma$  est une courbe fermée qui ne contient pas de points critiques de même son intérieur alors l'indice  $I_\Gamma = 0$ .

**Preuve.**

On a

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_R} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

appliquons la formule de Green

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_R} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{X}{X^2 + Y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right) \right] dXdY = 0$$

où  $S_R$  est l'intérieur de  $\Gamma_R$ .

**Corollaire 2.1.**

Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux courbes fermées,  $\Gamma'$  est à l'intérieur de  $\Gamma$ . Si sur  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  et sur la région comprise entre  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  il n'ya pas de points d'équilibre alors  $I_\Gamma = I_{\Gamma'}$ .

**Preuve.**

Soit  $AA'$  une ligne liant  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  et soit le chemin  $\varphi$  définie par  $ABAB'A'A$  puisque  $\varphi$  ne contient pas de points critiques.

On a :  $I_\varphi = 0$  c.à.d.

$$0 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\varphi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \left( \oint_{\Gamma} d\phi + \oint_{AA'} d\phi - \oint_{\Gamma'} d\phi + \oint_{A'A} d\phi \right)$$

or

$$\oint_{AA'} d\phi = - \oint_{A'A} d\phi$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \left( \oint_{\Gamma} d\phi - \oint_{\Gamma'} d\phi \right) = 0$$

c.à.d.  $I_\Gamma = I_{\Gamma'}$ .

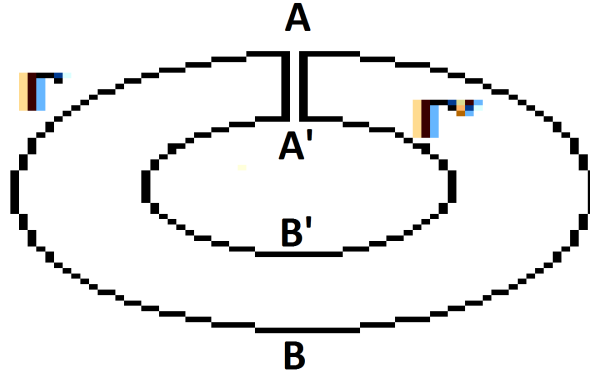


Fig 2.1.

**Remarque 2.1.**

On voit que l'indice  $I_\Gamma$  du champ de vecteurs  $(X, Y)$  ne dépend pas de la courbe  $\Gamma$  mais il dépend des points d'équilibre. Si on a un point d'équilibre à l'intérieur de  $\Gamma$  n'importe quelle courbe  $\Gamma$  contenant ce point donne le même indice pour cela on dit que  $I$  est l'indice du point d'équilibre .

**Théorème 2.2.**

Si  $\Gamma$  contient  $n$  points d'équilibres  $P_1, P_2, \dots, P_n$  alors  $I_\Gamma = I_1 + I_2 + \dots + I_n$  où  $I_i$  est l'indice du point  $P_i : i = 1, \dots, n$ .

**Preuve.**

Illustrons la preuve par deux points d'équilibre. Construisons une courbe  $C$ .

$C : \Gamma$  liée aux deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ; l'intérieur de  $\varphi$  ne contient pas de point d'équilibre  $\implies I_C = 0$ .

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_C d\phi - \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} d\phi - \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_2} d\phi$$

$\implies$

$$I_\Gamma = I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2}$$

Si on connaît la nature du point d'équilibre, on peut en déduire l'indice en traçant la figure et en suivant l'angle.

### 2.3 Autre façon du théorème de l'indice

Nous définissons l'indice d'un point critique d'un champ de vecteur  $F$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ou d'un champ de vecteur  $F$  de classe  $C^1$  sur une surface bidimensionnelle. Par deux surface dimensionnelle, nous entendons une différence bidimensionnelle compacte collecteur tiable de classe  $C^2$ . Pour un champ vectoriel donné  $F$  sur un champ bidimensionnel surface  $S$ , Si  $F$  a un nombre fini de points critiques  $P_1, \dots, P_m$ , l'indice de la surface  $S$  par rapport au champ vectoriel  $F$ ,  $I_F(S)$ , est définie comme la somme des indices à chacun des points critiques,  $P_1, \dots, P_m$  en  $S$ . C'est l'un des faits les plus intéressants de la théorie de l'indice que l'indice de la surface  $S$ ,  $I_F(S)$ , est indépendant du champ vectoriel  $F$  et, comme nous le verrons, ne dépend que sur la topologie de la surface  $S$ ; en particulier,  $I_F(S)$  est égal à Euler-poincaré caractéristique de la surface  $S$ . Ce résultat est le fameux de théorème de l'indice de Poincaré.

nous commençons cette section par la définition de Poincaré de l'indice d'une courbe de Jordan  $C$  (c'est-à-dire une courbe  $C$  fermée simple par morceaux) par rapport à un champ vectoriel  $F$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2.2.** L'indice  $I_F(C)$  d'une courbe de Jordan  $C$  par rapport à un champ de vecteur  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , ou n'a pas de point critique sur  $C$  est défini comme le entier

$$I_F(C) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

où  $\Delta\theta$  est la variation totale de l'angle  $\theta$  que le vecteur  $F = (P, Q)^T$  fait par rapport à l'axe des  $x$ , c'est-à-dire que  $\Delta\theta$  est le changement de

$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

### 2.3. AUTRE FAÇON DU THÉORIE DE L'INDICE

lorsque le point  $(x, y)$  parcourt  $C$  exactement une fois dans le sens positif. l'index  $I_F(C)$  peut être informatique en utilisant la formule

$$I_F(C) = \frac{1}{2\pi} \int_C d \tan^{-1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_C d \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}$$

**Exemple 2.2.** Soit  $C$  le cercle de rayon un, centré à l'origine, et calculons l'indice de  $C$  par rapport aux champs de vecteurs

$$F(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad H(X) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad K(X) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Ces champs vectoriels définissent des flux ayant des noeuds instables et stables, un centre et une selle à l'origine respectivement ; les portraits de phase des flux générés par ces quatre champs de vecteurs sont présentés dans la **figure 2.2.**

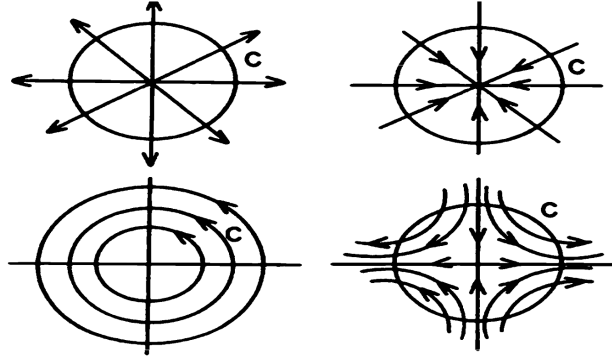


Fig 2.2.

Selon la définition ci-dessus, nous avons

$$I_F(C) = 1, \quad I_G(C) = 1, \quad I_H(C) = 1 \quad \text{et} \quad I_K(C) = -1$$

Ces indices peuvent également être calculés en utilisant la formule ci-dessus ; cF problème 1. Nous décrivons maintenant certaines des idées de base de la théorie des indices. Nous devons d'abord prouver un lemme fondamental

**Lemme 2.1.** Si la courbe de Jordan  $C$  est décomposée en deux courbes de Jordan,  $C = C_1 + C_2$ , comme sur la **figure 2.3**, alors

$$I_F(C) = I_F(C_1) + I_F(C_2)$$

par rapport à tout champ de vecteurs  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

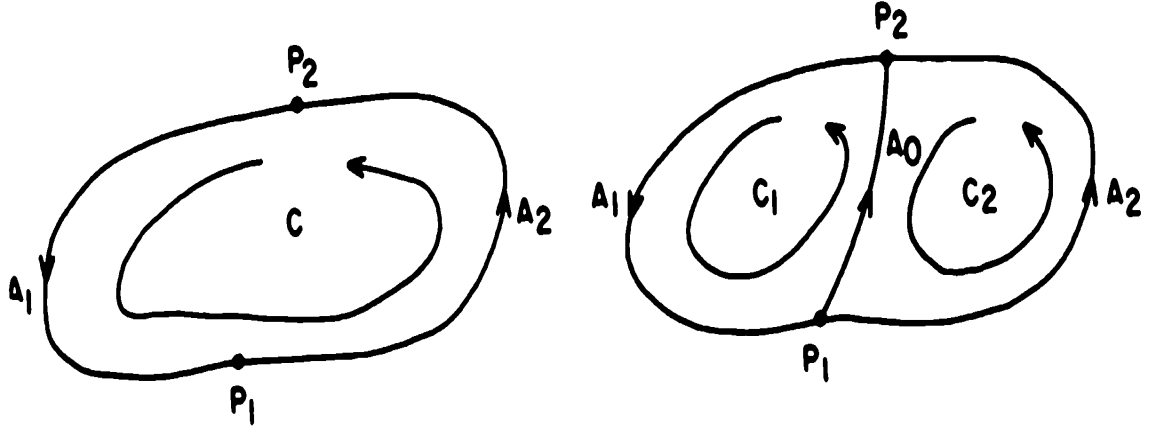


Fig 2.3

**Preuve** Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points distincts sur  $C$  qui partitionnent  $C$  en deux arc  $A_1$  et  $A_2$  comme le montre la **figure 2.3**. Soit  $A_0$  un arc à l'intérieur de  $C$  de  $P_1$  à  $P_2$  et soit  $-A_0$  désigne l'arc de  $p_2$  à  $p_1$  parcouru en la direction opposée. Soit  $C_1 = A_1 + A_0$  et soit  $C_2 = A_2 - A_0$ . il s'ensuit alors que si  $\Delta\theta_A$  désigne le changement de l'angle  $\theta(x, y)$  défini par le vecteur  $F(X)$  comme le point  $X = (x, y)^T$  se déplace le long de l'arc  $A$  dans une direction bien définie, alors

$$\begin{aligned}
 I_F(C) &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\theta|_{A_1} + \Delta\theta|_{A_2}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\theta|_{A_1} + \Delta\theta|_{A_0} + \Delta\theta|_{-A_0} + \Delta\theta|_{A_2}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\theta|_{A_1+A_0} + \Delta\theta|_{A_2-A_0}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\Delta\theta|_{C_1} + \Delta\theta|_{C_2}] \\
 &= I_F(C_1) + I_F(C_2)
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.** Supposons que  $F \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  qui contient une courbe de Jordan  $C$  et qu'il n'y a pas de points critiques de  $F$  sur  $C$  ou dans son intérieur. il s'ensuit alors que  $I_F(C) = 0$ .

**Preuve.** Puisque  $F = (P, Q)^T$  est continue sur  $E$ , elle est uniformément continue sur tout sous-ensemble compact de  $E$ . Ainsi, étant donné  $\epsilon = 1$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que sur toute courbe de Jordan  $C_\alpha$  qui est contenue à

### 2.3. AUTRE FAÇON DU THÉORÈME DE L'INDICE

---

l'intérieur d'un carré de côté  $\delta$  dans  $E$ . Nous avons  $0 \leq I_F(C_\alpha) < \epsilon$ . Alors puisque  $I_F(C_\alpha)$  est un positif entier, il s'ensuit que  $I_F(C_\alpha) = 0$  pour toute courbe de Jordan  $C_\alpha$  contenue à l'intérieur un carré de côté  $\delta$ . Nous pouvons couvrir l'intérieur de  $C$ ,  $Int(C)$ , ainsi que  $C$  avec une grille carrée où les carrés  $S_\alpha$ , dans la grille ont des côtés de longueur  $\delta/2$ . Choisissez  $\delta > 0$  suffisamment petit pour que tout carré  $S_\alpha$  avec  $S_\alpha \cap Int(C) \neq \emptyset$  se trouve entièrement dans  $E$  et que  $I_F(C_\alpha) = 0$  où  $C_\alpha$  est la frontière de  $S_\alpha \cap Int(C)$ . Puisque la fermeture de  $Int(C)$  est un ensemble compact, un nombre fini de carrés  $S_\alpha$ . Couvrir  $\overline{Int(C)}$ , disons  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et par le **Lemme 3.1.** nous avons

$$I_F(C) = \sum_{j=1}^N I_F(C_j) = 0.$$

**Corollaire 2.2.** Sous les hypothèses du **Théorème 2.2**, si  $C_1$  et  $C_2$  sont des courbes de Jordan contenues dans  $E$  avec  $C_1 \subset Int(C_2)$ , et s'il n'y a pas de points critiques de  $F$  dans  $Int(C_2) \cap Ext(C_1)$ , alors  $I_F(C_1) = I_F(C_2)$ .

**Définition 2.3.** Soit  $F \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $X_0 \in E$  être un point critique isolé de  $F$ . Soit  $C$  une courbe de Jordan contenue en  $E$  et contenant  $X_0$  et aucun autre point critique de  $F$  sur son intérieur. Alors l'indice du point critique  $X_0$  par rapport à  $F$

$$I_F(X_0) = I_F(C).$$

**Théorème 2.3.** Supposons que  $F \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant une courbe de Jordan  $C$ . Alors s'il n'y a qu'un nombre fini de points critiques,  $X_1, \dots, X_n$  de  $F$  à l'intérieur de  $C$ , il s'ensuit que

$$I_F(C) = \sum_{j=1}^n I_F(X_j).$$

Ce théorème est prouvé en enfermant chacun des points critiques  $X_j$  par un

petit cercle  $C_j$  se trouvant à l'intérieur de  $C$  comme sur la **figure 2.4**.

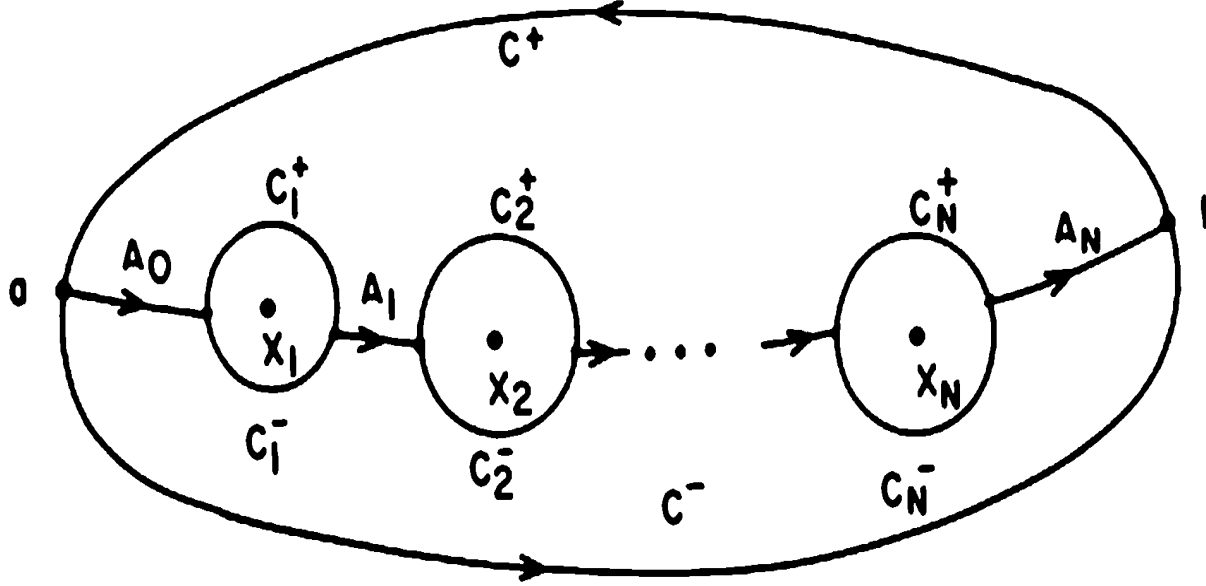


Fig 2.4

Soit  $a$  et  $b$  être deux points distincts sur  $C$ . Puisque l'intérieur de  $C$ ,  $\text{Int}(C)$ , est en arc de cercle connectés, nous pouvons construire des arcs  $a\overline{X_1}$ ,  $\overline{X_1X_2}, \dots, \overline{X_Nb}$  à l'intérieur de  $C$ . Soit  $A_0, A_1, \dots, A_N$  désignent la partie de ces arcs à l'extérieur de la cercles  $C_1, \dots, C_N$  comme sur la **figure 2.4**. Les courbes  $C, C_1, \dots, C_N$  sont alors dédoublées en deux parties,  $C^+, C^-, C_1^+, C_1^-, \dots, C_N^+, C_N^-$  par les arcs  $A_0, \dots, A_N$  comme dans **Figure 2.4**. Définir les courbes de Jordan  $J_1 = C^+ + A_0 - C_1^+ - \dots - C_N^+ + A_N$  et  $J_2 = C^- - A_N - C_N^- - \dots - C_1^- - A_0$ . Alors par le **Théorème 2.2**,  $I_F(J_1) = I_F(J_2) = 0$  mais

$$\begin{aligned} I_F(J_1) + I_F(J_2) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \begin{array}{l} \Delta\theta|_{C^+} + \Delta\theta|_{A_0} - \Delta\theta|_{C_1^+} - \dots - \Delta\theta|_{C_N^+} + \Delta\theta|_{A_N} + \Delta\theta|_{C^-} - \Delta\theta|_{A_0} \\ -\Delta\theta|_{C_1^-} - \dots - \Delta\theta|_{C_N^-} - \Delta\theta|_{A_N} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \Delta\theta|_{C^-} - \sum_{j=1}^N \Delta\theta|_{C_j} \right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$I_F(C) = \sum_{j=1}^N I_F(C_j) = \sum_{j=1}^N I_F(X_j).$$

### 2.3. AUTRE FAÇON DU THÉORIE DE L'INDICE

**Théorème 2.4.** Supposons que  $F \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et que  $E$  contient un cycle  $\Gamma$  du système

$$\dot{X} = F(X) \tag{2.3}$$

il s'ensuit que  $I_F(\Gamma) = 1$ .

**Preuve.** En tout point  $X \in \Gamma$ , définissez le vecteur unitaire  $u(X) = F(X) / |F(X)|$ . Alors  $I_u(\Gamma) = I_F(\Gamma)$  et nous montrerons que  $I_u(\Gamma) = 1$ . Nous pouvons tourner et translater les axes de sorte que  $\Gamma$  soit dans le premier quadrant et soit tangent à l'axe des  $x$  à un certain point  $X_0$  comme dans la **figure 2.5**.

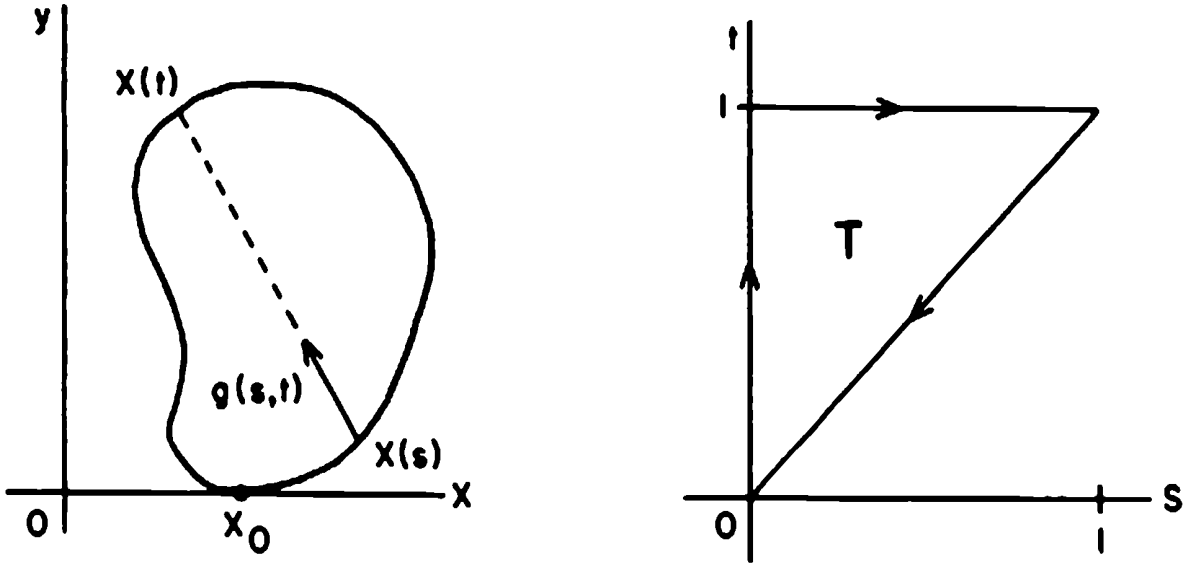


Fig 2.5

Soit  $X(t) = (x(t), y(t))^T$  la solution de (2.3) passant par le point  $X_0 = (x_0, y_0)^T$  au temps  $t = 0$ . Puis en normalisant le temps, nous pouvons supposer que la période de  $\Gamma$  est égal à 1 ; c'est à dire,

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = X(t), 0 \leq t \leq 1\}$$

tenant pour les points  $(s,t)$  dans la région triangulaire

$$\Gamma = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\},$$

on définit le champ vectoriel  $g$  par

$$\begin{aligned} g(s,s) &= u(X(s)), \quad 0 \leq s \leq 1 \\ g(0,1) &= -u(X_0) \end{aligned}$$



et

$$g(s, t) = \frac{X(t) - X(s)}{|X(t) - X(s)|}$$

Pour  $0 \leq s < t \leq 1$  et  $(s, t) \neq (0, 1)$ ; cF. **Figure 2.5**. Il s'ensuit alors que  $g$  est continue sur  $T$  et que  $g \neq 0$  sur  $T$ . Soit  $\tilde{\Theta}(s, t)$  l'angle que le vecteur  $g(s, t)$  fait avec l'axe des  $x$ . Ensuite, en supposant que le cycle  $\Gamma$  est orienté positivement,  $\tilde{\Theta}(0, 0) = 0$  et puisque  $\Gamma$  est dans le premier quadrant,  $\tilde{\Theta}(0, t) \in [0, \pi]$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et donc  $\tilde{\Theta}(0, t)$  varie de 0 à  $\pi$  comme  $t$  varie de 0 à 1. De même, il découle de la définition de  $g(s, t)$  que  $\tilde{\Theta}(s, 1)$  varie de lui  $\pi$  à  $2\pi$  lorsque  $s$  varie de 0 à 1. Soit  $B$  la frontière de la région  $T$ . Il découle alors du **Théorème 2.2** que  $I_g(B) = 0$ . Ainsi, la variation de  $\tilde{\Theta}(s, s)$  lorsque  $s$  varie de 0 à 1 est  $2\pi$ . Mais c'est exactement la variation de l'angle que fait le vecteur  $u(X(s))$  avec le l'axe des  $x$  lorsque  $s$  varie de 0 à 1. Ainsi  $I_F(\Gamma) = I_u(\Gamma) = 1$ . Un argument similaire donne le même résultat lorsque  $\Gamma$  est orienté négativement. Ceci complète la preuve du **Théorème 2.4**.

**Remarque 2.2.** Pour un cycle séparateur  $S$  de (2.3) tel que la carte de poincaré est défini à l'intérieur ou à l'extérieur de  $S$ , on peut prendre une séquence des courbes de Jordan  $C_n$ . Se rapprochant de  $S$  et, en utilisant le fait que nous n'avons que secteurs hyperboliques à l'intérieur ou à l'extérieur de  $S$ , on peut montres que  $l_F(C_n) = 1$ . Mais pour  $n$  suffisamment grande,  $l_F(S) = l_F(C_n)$ . Ainsi,  $l_F(S) = 1$ . Il convient de noter que si la carte Poincaré n'est définie sur aucun des côtés de  $S$ , alors  $l_F(S)$  peut ne pas être égal à un.

**Corollaire 2.3.** Sous les hypothèses du **Théorème 2.4**,  $\Gamma$  contient au moins un point critique de (2.3) sur son intérieur. Et, en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points critiques de (2.3) à l'intérieur de  $\Gamma$ , la somme des indices à ces points critiques est égal à un.

Nous considérons ensuite la relation entre l'indice d'un point critique  $X_0$  de (2.3) par rapport au champ vectoriel  $F$  et par rapport à sa linéarisation  $DF(X_0)X$  en  $X_0$ .

**Lemme 2.2.** Si  $V$  et  $W$  sont deux champs de vecteurs continus définis sur une courbe de Jordan  $C$  qui n'ont jamais de sens opposés ou sont nulles sur  $C$ , alors  $I_V(C) = I_W(C)$ . En prouvant le théorème suivant nous écrivons  $X = (x, y)^T$  et

$$F(X) = DF(0)X + g(X) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

### 2.3. AUTRE FAÇON DU THÉORÈME DE L'INDICE

---

On dit que 0 est un point critique non dégénéré de (2.3) si

$$\det DF(0) \neq 0,$$

c'est -à-dire, si  $ad - bc \neq 0$ ; et on dit que  $|g(X)| = o(r)$  comme  $r \rightarrow 0$  si  $|g(X)|/r \rightarrow 0$  comme  $r \rightarrow 0$ .

**Théorème 2.5.** Supposons que  $F \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant l'origine. Si 0 est un point critique non dégénéré de (2.3) et  $|g(X)| = o(r)$  comme  $r \rightarrow 0$  alors  $I_F(0) = I_V(0)$  où  $V(X) = DF(0)X$ , la linéarisation désactivée à 0. Ce théorème est prouvé en montrant que sur un cercle suffisamment petit  $C$  centrés à l'origine les champs de vecteurs  $V$  et  $F$  ne sont jamais en opposition et puis appliquant le **Lemme 2.2**. Supposons que  $V(X)$  et  $F(X)$  soient en opposition en un point  $X \in C$  puis au point  $X \in C$ ,  $F + sV$  pour certains  $s > 0$ . Mais  $F = V + g$  où  $g = F - V$  donc  $(1 + s)V = -g$  au point  $X \in C$ ; c'est-à-dire  $(1 + s)^2 |V|^2 = |g|^2$  au point  $X \in C$ . Maintenant

$$|V^2| = r^2[(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (c \cos \theta + d \sin \theta)^2]$$

Et puisque  $ad - bc \neq 0$ ,  $V = 0$  seulement à  $X = 0$ . Ainsi,  $V$  est continu et non nul sur le cercle  $r = 1$ . Soit

$$m = \min_{r=1} |V|.$$

Alors  $m > 0$  et comme  $|V|$  est homogène dans  $r$  on a  $|V| \geq mr$  pour  $r \geq 0$ . Il s'ensuit alors qu'au point  $X \in C$

$$(1 + s)^2 m^2 r^2 \leq |g|^2.$$

Mais si le cercle  $C$  est choisi suffisamment petit, cela conduit une contradiction puisque nous avons alors

$$0 < m^2 \leq (1 + s)^2 m^2 \leq |g|^2 / r^2$$

et  $|g|^2 / r^2 \rightarrow 0$  comme  $r \rightarrow 0$ . Ainsi, les champs vectoriels  $V$  et  $F$  ne sont jamais dans opposition sur un cercle  $C$  suffisamment petit centré à l'origine. Alors découle du **Lemme 2.2** que  $I_F(0) = I_V(0)$ . Puisque l'indice d'un champ vectoriel linéaire est invariant sous un transformation linéaire, le théorème suivant est une conséquence immédiate du **Théorème 2.5** et calcul des indices de champs de vecteurs linéaires génériques tels que ceux de l'**exemple 2.1**;

**Théorème 2.6.** Sous les hypothèses du **Théorème 2.5**,  $I_F(0)$  est  $-1$  ou  $+1$  selon que l'origine est ou non selle topologique pour (2.3) ou de manière équivalente selon que l'origine est ou non une selle linéarisation à l'origine. Selon le **Théorème 2.5**, l'indice de tout point critique non dégénéré de (2.3) est soit  $\pm 1$ . Que dire de l'indice d'un point critique  $X_0$  de (2.3) quand  $\det DF(X_0) = 0$ ? le théorème suivant, dû à Bendixson [B], répond à cette question pour les systèmes analytiques. Dans le **Théorème 2.7**,  $e$  désigne le nombre de secteurs elliptiques et  $h$  désigne le nombre de secteurs hyperboliques de (2.3) à l'origine.

**Théorème 2.7.** Soit l'origine un point critique isolé de le système analytique planaire (2.3). Il s'ensuit que

$$I_F(0) = 1 + \left( \frac{e - h}{2} \right)$$

On voit que pour les systèmes analytiques planaires, ce théorème implique les résultats du **Théorème 2.6**. Cela implique également que le nombre de secteurs elliptiques,  $e$ , et le nombre de secteurs hyperboliques,  $h$ , ont la même parité ; c'est-à-dire  $e \equiv h \pmod{2}$ . Notez que l'indice d'un noeud de selle est nul selon ce théorème.

# Chapitre 3

## Applications de la théorie de l'indice dans les systèmes dynamiques

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

### Proposition 3.1

Soit  $\Gamma$  une orbite périodique du système (3.1) alors l'indice de cette orbite est 1.

**Preuve.** Le vecteur  $(X, Y)$  est tangente à l'orbite  $C$ .

En chaque point la variation de  $\phi$  est  $2\pi$  donc l'orbite est 1. On déduit que pour une orbite périodique où un cycle limite que la somme des indices des points d'équilibre à l'intérieur de  $\varphi$  est 1.

L'intérieur d'un cycle limite ne peut pas être une région qui n'a aucun point d'équilibre ou qui contient seulement un point selle.

### Exemple 3.1.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{(1-x^2)x}{1+x^2} \end{cases}$$

il y a trois points d'équilibre  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

\*  $(0, 0)$  est un point selle .

\*  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  sont des centres.

La somme des indices est  $-1 + 1 + 1 = 1$ .

On peut penser à un cycle limite qui contient ces 3 points.

On fait toutes les orbites qui contiennent ces 3 points sont fermées.

\* un cycle limite contient au moins un point d'équilibre .

\* pour une selle l'indice est  $-1$  et pour le centre, noeud et le foyer l'indice est  $+1$ .

### 3.1 Indice à l'infini

Soit le système (3.1),

**Indice du point à l'infini**  $I_\infty$ .

**Définition 3.1.**

Dans les nouvelles coordonnées  $(x_1, y_1)$  définies par la transformation :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x}{x^2+y^2} \\ y_1 = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

en coordonnées polaires

$$\theta_1 = -\theta, \quad r_1 = \frac{1}{r}.$$

**Définition 3.2.**

L'indice de l'origine  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  pour l'équation transformée s'appelle indice du point à l'infini du système (3.1).

La transformation (3.2) s'appelle inversion de l'origine :

Si  $z = x + iy$  alors

$$z_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = x_1 + iy_1.$$

posons  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$

le système (3.1) s'écrit

$$\frac{dz}{dt} = Z \quad (3.3)$$

posons

$$\begin{cases} \phi = \arg Z \\ \zeta = Z \end{cases}$$

on a

$$z_1 = \frac{1}{z}$$

(3.3) s'écrit

$$-\frac{1}{z_1^2} \times \frac{dz_1}{dt} = Z$$

où

$$\frac{dz_1}{dt} = -z_1^2 \times Z = Z_1 \quad (3.4)$$

on cherche l'indice de  $z_1 = 0$  de (3.4).

**Théorème 3.1.**

L'indice  $I_\infty$  du système (3.1) ayant un nombre fini "n" de point d'équilibre avec les indices  $I_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  est donné par :

$$I_\infty = 2 - \sum_{i=1}^n I_i$$

**Preuve.**

cherchons l'indice en  $z_1 = 0$ , traçons une courbe qui entoure  $z_1 = 0$  et qui ne contient pas d'autres points d'équilibre, la transformation  $z = \frac{1}{z_1}$ . On a l'image de ce plan.

$\varphi$  : contient les points d'équilibre du système (3.1). L'extérieur de  $\varphi_1$  devient l'intérieur de  $\varphi$ .

$\varphi_1$  devient  $\varphi$  avec l'autre sens.

$I_\infty = \frac{1}{2\pi} \Delta \phi_1$  de l'équation (3.4).

On a

$$Z_1 = \zeta_1 e^{i\phi_1} = -r_1^2 e^{2i\theta_1} \zeta e^{i\phi} = r_1^2 \zeta e^{i(2\theta_1 + \phi + \pi)}$$

$$\begin{aligned} I_\infty &= \frac{1}{2\pi} \Delta(2\theta_1 + \phi + \pi) = \frac{1}{2\pi} [\Delta(2\theta_1) - \Delta\phi] \\ &= \frac{1}{2\pi} [4\pi - 2\pi(I_1 + \dots + I_n)] \\ &= 2 - \sum_{i=1}^n I_i \end{aligned}$$

**Exemple 3.2.**

Cherche l'indice du point à l'infini du système

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$

\* Pour  $(0, 0)$  le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

qui est équivalent

$$\widehat{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \implies (0, 0)$  est un foyer  $\implies I_{(0,0)} = +1$ .

\* Pour  $(1, 1)$  le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases}$$

qui est équivalent

$$\widehat{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

donc  $(1, 1)$  est une point selle alors  $I_{(1,1)} = -1$ .

D'où  $I_\infty = 2 - (-1 + 1) = 2$ .

## 3.2 Indice des points d'équilibres

(i) **Point selle.**

**Exemple 3.3.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad (0, 0) \text{ point d'équilibre}$$

### 3.2. INDICE DES POINTS D'ÉQUILIBRES

---

$$\Delta\phi = -2\pi - 0 = -2\pi$$

$$I_{\Gamma} = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1$$

(ii) **Point centre.**

**Exemple 3.4.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = c$$

$$\Delta\phi = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$I_{\Gamma} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

(iii) **Noeud.**

**Exemple 3.5.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

$$\Delta\phi = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$$I_{\Gamma} = 1$$

(iv) **Foyer.**

**Exemple 3.6.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$\Delta\phi = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

$$I_{\Gamma} = 1$$



**Conclusion**

Pour un cycle limite, la somme des indices des points critiques à l'intérieur est égal à 1.

# Bibliographie

- [1] **BOUATTIA. YASSINE.** Mémoire de magister. "Cycles limites de l'équation de Liénard dans les régimes fort et faible". Université de Annaba. (2006).
- [2] **L. Perko.** "Differential equations and dynamical systems". Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).
- [3] **MAKHLOUF AMAR.** Cour de P.G de systèmes dynamiques et applications.
- [4] **Charles-Michel Marle.** "Systèmes dynamiques Une introduction". Ellipses Edition Marketing S.A., (2003) 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15.