République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l’obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

Melle Mekalfa Khawla

Intitulé

Les inégalités des trapèzes pondérées

Dirigé par : Badreddine Meftah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Lakhal Fahim	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah Badreddine	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Aissaoui Fatima	MCA	Univ-Guelma

Session septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes parents en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance, le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite.

A toutes mes sœurs« Ahlem et Fourkane » mon frère «ala» qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles,

A tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur savoir et de nous l'inculquer sans relâche.

A tous mes amis

A Tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon cœur, je dis grand merci

De la part de Khawla

REMERCIEMENTS

*Mes remerciements vont en premier lieu, à « **ALLAH** » Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

En second lieu, Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon Encadreur Dr. **Badreddine Meftah** *directeur de ce mémoire de fin d'étude master 2 en mathématique, pour sa disponibilité la confiance qu'il m'a accordé, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Merci énormément.*

Je tiens à remercier Dr. **Lakhal Fahim**, *qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

J'adresse mes remerciements à Dr. **Aissaoui Fatima**, *d'avoir accepté d'examiner, évaluer et juger mon travail.*

Veuillez accepter ce travail, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance.

Abstract

In this thesis, we will focus on the study of Hermite-Hadamard type integral inequalities, more precisely that of weighted trapezoids

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexities, as well as of the integral identities that we will invoke in the following chapter.

In the second chapter, we quote some results already known in the literature.

While the last chapter will be entirely devoted to the new integral inequalities of the weighted trapezoid type.

We mention that three papers have been appeared among the five submitted for possible publication.

Keywords: Weighted trapezium inequality, Hölder inequality, log-convex functions, s-preinvex functions, h-preinvex functions

ملخص

في هذه الأطروحة ، سوف نركّز على دراسة عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار و بشكل أدق عدم المساواة التكاملية من نوع شبه المنحرف المرجحة.

في الفصل الأول، نذكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي والمعمم، بالإضافة إلى بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكّر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول عدم المساواة التكاملية من نوع شبه المنحرف العادية و المرجحة.

في حين أن الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة لعدم المساواة التكاملية من نوع شبه المنحرف المرجحة.

.

كلمات مفتاحية

عدم مساواة هولدر، الدوال المحدبة، عدم مساواة من نوع شبه المنحرف المرجحة، دوال ذات تحدب معمم.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard, plus précisément celle des trapèzes pondérées
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexités classiques et généralisées, ainsi que des identités intégrales que nous invoquerons dans le chapitre qui suit.
Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.
Tandis que le dernier chapitre sera entièrement dévoué aux nouvelles inégalités intégrales de type trapèzes pondérées.
Nous mentionnons que trois articles ont été publiés parmi les cinq soumis pour une éventuelle publication.

Mots clés: Inégalité des trapèzes pondérées, inégalité de Hölder, fonctions log-convexes, fonctions s-préinvexes, fonctions h-préinvexes.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink $[19, 20, 21]$.

Cette théorie évolue constamment dans plusieurs directions et de différentes manières. De nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, des extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de cette thèse est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales des trapèzes pondérées dont les dérivées d'ordre un ou deux jouissent d'un certain type de convexité classique où généralisée et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques types de convexités classiques et généralisés pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre, nous traiterons quelques résultats concernant les inégalités intégrales des trapèzes pondérés et non pondérés dont la première ou la deuxième dérivée sont convexes, s-convexes au second sens, quasi-convexes, préinvexes, préquasiinvexes et

s-préinvexes.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités des trapèzes pondérés dont ces nouveaux résultats ont fait l'objet des publications suivantes :

B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapedoidal inequalities for differentiable log**-convex functions. Journal of Interdisciplinary Mathematics. 23 (2020), 1-13. DOI : 10.1080/09720502.2020.1783808.**

B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal type inequalities via h**-preinvexity. Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 24 (2020), 81-97.**

B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal inequalities for prequasiinvex functions. Commun. Optim. Theory 2020(2020), Article ID20. https ://doi.org/10.23952/cot.2020.20.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [25].

1.1 Convexité classique et généralisée

1.1.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([14]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1-t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([25]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1-t)\, y) \leq tf\,(x) + (1-t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([6]) *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite* P*-convexe, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq f\left(x\right) + f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 ([3]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *est dite* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$, *si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$.

Définition 1.5 ([25]) *Une fonction strictement positive* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite* log*-convexe si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq \left[f(x)\right]^t \left[f(y)\right]^{1-t}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.6 ([11]) *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite quasi-convexe si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq \max\left\{f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.7 ([30]) *Soit* $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction positive, où* $(0,1) \subseteq J$. *Une fonction positive* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite* h*-convexe dans* I, *si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in (0,1)$.

1.1.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de convexité classique, cette dernière a été introduite par Hanson [8].

Dans tous ce qui suit on considère que le sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^n$ et les fonctions $f : K \to \mathbb{R}^n$ et $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$.

Définition 1.8 ([31]) *Un ensemble K est dit invexe au point x par rapport à η, si*

$$x + t\eta(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.1 *K est dit un ensemble invexe par rapport à η, si K est invexe en chaque points $x \in K$.*

Définition 1.9 ([31]) *Une fonction f sur l'ensemble invexe K est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t) f(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.10 ([23]) *Une fonction positive $f : K \to \mathbb{R}$ est dite P-préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq f(x) + f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.11 ([13]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe $K \subseteq [0, \infty)$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^s f(x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.12 ([15]) *Soit* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive* $h \neq 0$*. Une fonction positive* f *sur l'ensemble invexe* K *est dite* h*-préinvexe par rapport à* η*, si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et* $t \in (0,1)$*.*

Définition 1.13 ([26]) *Une fonction* $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite préquasiinvexe par rapport à* η*, si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq \max\{f(y), f(x)\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et* $t \in [0,1]$*.*

1.2 Quelques fonctions spéciales

1.2.1 Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.14 ([5]) *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$*, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Remarque 1.2 *Pour* $z \in \mathbb{N}$*, on a* $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z-1)$*.*

1.2.2 Fonction bêta

Définition 1.15 ([28]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par*

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Remarque 1.3 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante*

$$B(x,y)=\tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([7]) *Soit $f : I^{\circ}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, $a,b\in I^{\circ}$ avec $a<b$. Si $f^{'}\in L^1[a,b]$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\tfrac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f^{'}(ta+(1-t)\,b)\,dt. \tag{1.1}$$

Lemme 1.2 ([2]) *Soit $A\subseteq\mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A\times A\to\mathbb{R}$ et $a,b\in A$ avec $\theta(a,b)\neq 0$. On suppose que $f : A\to\mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si $f^{'}$ est intégrable sur le chemin θ P_{bc}, $c=b+\theta(a,b)$ alors, l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\,dx-\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2}\\ =\;&\tfrac{\theta(a,b)}{2}\int_0^1(1-2t)\,f^{'}(b+t\theta(a,b))\,dt.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Lemme 1.3 ([2]) *Soit $A\subseteq\mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A\times A\to\mathbb{R}$ et $a,b\in A$ avec $\theta(a,b)\neq 0$. On suppose que $f : A\to\mathbb{R}$ est une fonction différentiable.*

Si f'' est intégrable sur le chemin θ P_{bc}, $c = b+\theta(a,b)$ alors, l'égalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}
&\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)} \int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\,dx \\
= &\tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(b+t\theta(a,b))\,dt. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Lemme 1.4 ([10]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable sur I° et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1([a,b])$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right] \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x) g(x)\,dx \\
= &\tfrac{b-a}{4} \left\{ \int_0^1 \left[\int_{L(t)}^{U(t)} g(x)\,dx \right] \left[f'(U(t)) - f'(L(t)) \right] dt \right\}, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

où L et U sont définis par

$$L(t) = \tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b \text{ et } U(t) = \tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \\
\leq &\tfrac{(b-a)^2}{4} \|g\|_\infty \int_0^1 t \left[\left| f'(L(t)) \right| + \left| f'(U(t)) \right| \right] dt, \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

où $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} g(t)$.

Lemme 1.5 ([9]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable sur I° et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si*

$f' \in L^1([a,b])$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\\
=\;&\tfrac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left[\int_{M(t)}^{V(t)} g(x)\,dx\right]\left[f'(V(t))-f'(M(t))\right]dt\right\},
\end{aligned}\tag{1.6}$$

où

$$M(t)=ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\qquad et\qquad V(t)=tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}. \tag{1.7}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\\
\le\;&\tfrac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left[\int_{M(t)}^{V(t)} g(x)\,dx\right]\left[\left|f'(M(t))\right|+\left|f'(V(t))\right|\right]dt\right\},
\end{aligned}\tag{1.8}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\\
\le\;&\tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|g\right\|_\infty\int_0^1 t\left[\left|f'(M(t))\right|+\left|f'(V(t))\right|\right]dt.
\end{aligned}\tag{1.9}$$

1.4 Inégalité de Hölder et inégalité des moyens d'ordre q

Théorème 1.1 **(**[19]**)** *Soit $p>0$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\le\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.2 **(**[4]**)** *Soient $x=(x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et $p=(p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ deux strictement posi-*

tives n-uplet et soit $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, l'inégalité des moyens d'ordre* q *pondérés par* p *est définie par*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \textit{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \textit{pour } q = 0, \\ \min\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & \textit{pour } q = -\infty, \\ \max\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & \textit{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$*, on a*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Théorème 1.3 ([4]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$*, alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales trapézoïdales

2.1 Inégalités intégrales de type trapèzes non pondérées

2.1.1 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions convexes

Dans cette sous-section nous verrons quelques résultats concernant les inégalités des trapèzes pour les fonctions dont les premières dérivées sont convexes établies par Dragomir et Agarwal ainsi que les améliorations de ces dernières qui ont été données par Pearce et Pečarić.

Parmi les résultats fournis par Dragomir et Agarwal, nous notons les suivants voir [7].

Théorème 2.1 ([7]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $\left|f'\right|$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{8}. \tag{2.1}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme

1.1, puis en utilisant le fait que $\left|f'\right|$ est convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
=\ &\left|\tfrac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)\,b)\,dt\right| \\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'(ta+(1-t)\,b)\right| dt \\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt \\
=\ &\tfrac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{2}\int_0^1 |1-2t|\,tdt \\
=\ &\tfrac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)}{8}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2 ([7]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, et soit $p > 1$. Si $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\tfrac{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (2.2)$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'(ta+(1-t)\,b)\right| dt \\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'(ta+(1-t)\,b)\right|^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Comme $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|f'\left(ta+(1-t)\,b\right)\right|^{\frac{p}{p-1}} dt \\
\leq\ &\int_0^1 \left[t\left|f'\left(a\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}+(1-t)\left|f'\left(b\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right] dt = \frac{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

En outre, comme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |1-2t|^p\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\,dt = \tfrac{1}{p+1}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

La substitution de (2.4) et (2.5) dans (2.3), donne immédiatement l'inégalité requise (2.2). ■

Pearce et Pečarić [24], ont établi un raffinement du Théorème 2.2, basé sur la même identité donnée par le Lemme 1.1, dont le résultat est le suivant

Théorème 2.3 ([24]) *Sous les conditions du Théorème 2.1 et si* $\left|f'\right|^q$ *est convexe sur* $[a,b]$*, alors*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left[\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.6)$$

Preuve. Du Lemme 1.1, on a

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(ta+(1-t)\,b\right)\right| dt.$$

Et d'après l'inégalité des moyens d'ordre q

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(ta+(1-t)\,b\right)\right| dt \\
\leq\ &\left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(ta+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Puisque $\left|f'\right|^q$ est convexe, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t| \left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t| \left[t\left|f'(a)\right|^q + (1-t)\left|f'(b)\right|^q\right] dt \\ &= \frac{\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{4}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Un calcul direct donne

$$\int_0^1 |1-2t|\, dt = \tfrac{1}{2}. \tag{2.9}$$

La substitution de (2.8) et (2.9) dans (2.7), donne immédiatement l'inégalité suivante

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}},$$

qui est par conséquent, le résultat souhaité. ■

2.1.2 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions s-convexes

Le résultat suivant représente une généralisation du Théorème 2.2.

Dans tout ce que suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par $\overset{\circ}{I}$, $a, b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$, $L^1([a,b])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$, s un nombre fixé dans $(0,1]$.

Théorème 2.4 **(**[12]**)** *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$.*
1/ Si $\left|f'\right|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $q \geq 1$ et un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{s+\frac{1}{2^s}}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

2/ Si $\left|f'\right|^q$ *est s-convexe sur* $[a,b]$ *pour* $q>1$ *et un certain nombre fixé* $s\in(0,1]$*, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\tfrac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\left[\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Preuve. La preuve est similaire à ceux-ci-dessus il suffit uniquement de remplacer la convexité par la s-convexité. ■

2.1.3 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions dont les dérivées premières sont préinvexes

Théorème 2.5 ([2]) *Soit* $A\subseteq\mathbb{R}$ *un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à* $\theta: A\times A\to\mathbb{R}$*. Supposons que* $f: A\to\mathbb{R}$ *est une fonction différentiable. Si* $\left|f'\right|$ *est préinvexe sur* A *alors, pour tout* $a,b\in A$ *avec* $\theta(a,b)\neq 0$ *l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2}-\tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{8}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.2, puis en utilisant la préinvexité de $\left|f'\right|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2}-\tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2}\left\{\int_0^1 |1-2t|\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt\right\} \\
=\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{8}\left\{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right\}, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

où
$$\int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt = \int_0^1 |1-2t|\,tdt = \frac{1}{4}.$$

■

Théorème 2.6 ([2]) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A \times A \to \mathbb{R}$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Supposons que $p \in \mathbb{R}$ avec $p > 1$. Si $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$ est préinvexe sur A alors, pour tout $a, b \in A$ avec $\theta(a,b) \neq 0$ l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\left|f'\left(a\right)\right|^{\frac{p}{(p-1)}} + \left|f'\left(b\right)\right|^{\frac{p}{(p-1)}}}{2}\right]^{\frac{(p-1)}{p}}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'égalité du Lemme 1.2, puis en utilisant l'inégalité de Hölder et la préinvexité de $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'\left(b+t\theta(a,b)\right)\right|dt \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(b+t\theta(a,b)\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
=\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(b+t\theta(a,b)\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
\leq\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left[t\left|f'\left(a\right)\right|^{\frac{p}{p-1}} + (1-t)\left|f'\left(b\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
=\ & \tfrac{|\theta(a,b)|}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\left|f'\left(a\right)\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|f'\left(b\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 2.1 *Notez que si $A = [a, b]$ et $\theta(x, y) = x - y$ pour chaque $x, y \in A$ alors, on peut déduire les Théorèmes* 2.1 *et* 2.2*, des Théorèmes* 2.5 *et* 2.6*, respectivement.*

2.1.4 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions dont les dérivées secondes sont préinvexes

Dans cette sous-section, nous verrons quelques résultats concernant les inégalités intégrales des trapèzes pour des fonctions dont la dérivée seconde jouit d'une convexité généralisée, voir Barani et al. [2].

Théorème 2.7 ([2]) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $\theta(a, b) \neq 0$ pour tout $a \neq b$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois différentiable. Si $\left|f''\right|$ est préinvexe sur A et f'' est intégrable sur le chemin θ P_{bc}, $c = b + \theta(a, b)$ alors, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)} \int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\, dx\right| \\ = \; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{24} \left[\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3, la valeur absolue et la préinvexité de $\left|f''\right|$, on a

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)} \int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\, dx\right| \\ = \; & \left|\tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(b + t\theta(a,b))\, dt\right| \\ \leq \; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \left[\int_0^1 t(1-t)\left(t\left|f''(a)\right| + (1-t)\left|f''(b)\right|\right) dt\right] \\ = \; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{24} \left[\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Les résultats ci-dessous concernent le cas où la valeur absolue de la dérivée seconde à une certaine puissance est préinvexe.

Théorème 2.8 ([2]) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $\theta(a,b) \neq 0$ pour tout $a \neq b$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois différentiable sur A et $\left|f''\right|^{\frac{p}{p-1}}$ est préinvexe sur A, pour $p > 1$. Si f'' est intégrable sur le chemin θ P_{bc}, $c = b + \theta(a,b)$ alors, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)} \int_b^{b+\theta(a,b)} f\left(x\right) dx \right| \\ \leq\; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{16} \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\tfrac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left| f''\left(a\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} + \left| f''\left(b\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la préinvexité de $\left|f''\right|$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)} \int_b^{b+\theta(a,b)} f\left(x\right) dx \right| \\ \leq\; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \int_0^1 t\left(1-t\right) \left| f''\left(b+\theta(a,b)\right) \right| dt \\ \leq\; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \left(\int_0^1 \left(t-t^2\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f''\left(b+\theta(a,b)\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ \leq\; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{2} \left(\tfrac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(t\left| f''\left(a\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} + \left(1-t\right) \left| f''\left(b\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ =\; & \tfrac{\theta(a,b)^2}{16} \left(\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\tfrac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left| f''\left(a\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} + \left| f''\left(b\right) \right|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.9 ([2]) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $\theta(a,b) \neq 0$ pour tout $a \neq b$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois différentiable sur A et $\left|f''\right|^q$ est préinvexe sur A, pour $q > 1$. Si f'' est intégrable sur* *le chemin θ P_{bc}, $c=b+\theta(a,b)$ alors, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2}-\tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_{b}^{b+\theta(a,b)}f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{12}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f''\left(a\right)\right|^{q}+\left|f''\left(b\right)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3, la valeur absolue, l'inégalité des moyens d'ordre q et la préinvexité de $\left|f''\right|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2}-\tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_{b}^{b+\theta(a,b)}f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{2}\int_{0}^{1}t\left(1-t\right)\left|f''\left(b+\theta(a,b)\right)\right|dt \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{2}\left(\int_{0}^{1}\left(t-t^{2}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{0}^{1}\left(t-t^{2}\right)\left|f''\left(b+\theta(a,b)\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{0}^{1}\left(t-t^{2}\right)\left[t\left|f''\left(a\right)\right|^{q}+\left(1-t\right)\left|f''\left(b\right)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{12}\left(\left|f''\left(a\right)\right|^{q}+\left|f''\left(b\right)\right|^{q}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{\theta(a,b)^{2}}{12}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left|f''\left(a\right)\right|^{q}+\left|f''\left(b\right)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

■

2.2 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées

Dans cette section, nous verrons les inégalités intégrales des trapèzes pondérés qui représentent également une autre généralisation des résultats de certains théorèmes vus ci-dessus.

2.2.1 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont convexes

Théorème 2.10 ([10]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$, où $a, b \in I$ avec $a < b$, et soit $g : [a,b] \to [0,\infty)$ une fonction positive, continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si l'application $\left|f'\right|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve. Soit $h(t) = \int_a^t g(x)\,dx$ pour tout $t \in [a,b]$ dans le Lemme 1.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1 \left|2h\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right) - h(b)\right| . \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right| dt\right. \\ & \left. + \int_0^1 \left|2h\left(\tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b\right) - h(b)\right| . \left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b\right)\right| dt\right\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Comme $g(x)$ est symétrique par rapport à $x = \frac{a+b}{2}$, on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\left|2h\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right) - h(b)\right| = \int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx, \tag{2.21}$$

et

$$\left|2h\left(\tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b\right) - h(b)\right| = \int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx. \tag{2.22}$$

Substituons (2.21) et (2.22) dans (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|dt\right\}. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de $\left|f'\right|$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|dt \\
&+\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|dt \\
\leq\ & \int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right) \\
&\times\left(\tfrac{1+t}{2}\left|f'(a)\right|+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(b)\right|+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(a)\right|+\tfrac{1+t}{2}\left|f'(b)\right|\right)dt \\
=\ & \left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

En combinant (2.23) et (2.20) on abouti au résultat désiré. Ceci complète la preuve. ■

Théorème 2.11 ([10]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.10 et si pour $q\geq 1$, l'application $\left|f'\right|^q$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{2}\left[\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Preuve. Du Lemme 1.4 et de l'inégalité des moyens d'ordre q, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\right. \\
&\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\left.\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant inégalité discrète des moyens d'ordre q i.e ($a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ pour $a>0$, $b>0$ et $r<1$), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & 2^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\right. \\
&\left.\times\left[\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q\right]dt\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Comme $\left|f'\right|^q$ est convexe sur $[a,b]$, on en déduit

$$\begin{aligned}
& \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q \\
\leq\ & \tfrac{1+t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(b)\right|^q+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1+t}{2}\left|f'(b)\right|^q \\
=\ & \left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

En combinant (2.26)-(2.28), on obtient le résultat souhaité. ■

2.2.2 Inégalités intégrales des trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont quasi-convexes

Théorème 2.12 ([10]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$, où $a,b \in I$ avec $a<b$, et soit $g:[a,b]\to[0,\infty)$ une fonction positive, continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si l'application $\left|f'\right|$ est quasi-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
& \left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\max\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right\}\right. \\
& \left.+\max\left\{\left|f'(b)\right|,\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right\}\right]\times\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Preuve. D'une manière analogue à celle de la preuve du Théorème 2.10, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right. \\
& \left.+\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|dt\right\}. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Maintenant, par la quasi-convexité de $\left|f'\right|$, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right| = \max\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right\}, \tag{2.31}$$

et

$$\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right| = \max\left\{\left|f'(b)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right\}. \tag{2.32}$$

En substituant (2.31) et (2.32) dans (2.30), on trouve le résultat désiré. ∎

Corollaire 2.1 ([10]) *Si* $\left|f'\right|$ *est croissante le Théorème 2.12, devient*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\left|f'(b)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Si $\left|f'\right|$ *est décroissante le Théorème 2.12, devient*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right]\int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Théorème 2.13 ([10]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.12, et si l'application* $\left|f'\right|^q$ *est quasi-convexe sur* $[a,b]$ *où* $q \geq 1$*, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\left(\max\left\{\left|f'(a)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\max\left\{\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \times \int_0^1\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Preuve. Du Lemme 1.4 et de l'inégalité des moyens d'ordre q, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\right. \\
&\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\left.\times\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4}\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1\left(\int_{L(a,b,t)}^{U(a,b,t)} g(x)\,dx\right)\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Par la quasi-convexité de $\left|f'\right|^q$, on a pour tout $t\in[0,1]$

$$\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q=\max\left\{\left|f'(a)\right|^q,\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}, \tag{2.37}$$

et

$$\left|f'\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q=\max\left\{\left|f'(b)\right|^q,\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}. \tag{2.38}$$

En combinant (2.36)-(2.38), on obtient le résultat souhaité. ■

2.2.3 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont s-convexes

Théorème 2.14 ([9]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable sur I° et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ où $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^{1}([a, b])$. Si $\left|f'\right|^{q}$ est s-convexe sur $[a, b]$ pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ et $q \geq 1$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_{a}^{b} g(x)\,dx-\int_{a}^{b} f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{8}\|g\|_{\infty}\left[\tfrac{2^{1-s}}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(1+s2^{s+1}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\left|f'(a)\right|^{q}+\left(1+s2^{s+1}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.4, la valeur absolue, l'inégalité des moyens d'ordre q et la s-convexité $\left|f'\right|^{q}$ sur $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_{a}^{b} g(x)\,dx-\int_{a}^{b} f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{4}\|g\|_{\infty}\int_{0}^{1} t\left[\left|f'(L(t))\right|+\left|f'(U(t))\right|\right]dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{4}\|g\|_{\infty}\left(\int_{0}^{1} t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_{0}^{1} t\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_{0}^{1} t\left(\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^{2}}{8}\|g\|_{\infty}\left[\tfrac{2^{1-s}}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(1+s2^{s+1}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\left|f'(a)\right|^{q}+\left(1+s2^{s+1}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Le théorème est prouvé. ∎

Corollaire 2.2 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.14, on a*

1/ Si $q = 1$, *alors*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g\left(x\right)dx - \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{2}\left\|g\right\|_\infty\left[\tfrac{1}{2^s(s+1)(s+2)}\right]\left(1+s2^s\right)\left[\left|f'\left(a\right)\right| + \left|f'\left(b\right)\right|\right].\end{aligned}$$

2/ Si $q = 1$ *et* $s = 1$, *on a*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g\left(x\right)dx - \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{8}\left\|g\right\|_\infty\left[\left|f'\left(a\right)\right| + \left|f'\left(b\right)\right|\right].$$

Corollaire 2.3 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.14, on a*

1/ Si $q = 1$ *et* $g\left(x\right) = 1$ *pour* $x \in [a,b]$, *alors*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \leq \tfrac{(b-a)(1+s2^s)}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}\left[\left|f'\left(a\right)\right| + \left|f'\left(b\right)\right|\right].$$

2/ Si $q = 1$ *et* $g\left(x\right) = 1$ *pour* $x \in [a,b]$, *et* $s = 1$, *on a*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(a\right)\right| + \left|f'\left(b\right)\right|\right].$$

Théorème 2.15 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.14, on a*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g\left(x\right)dx - \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{8}\left\|g\right\|_\infty\left[\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\left[\left(s+1\right)\left|f'\left(a\right)\right|^q + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left. + \left[\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left(s+1\right)\left|f'\left(b\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.5, la valeur absolue, l'inégalité des moyens d'ordre q et la s-convexité $\left|f'\right|^q$ sur $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|g\right\|_\infty\int_0^1 t\left[\left|f'(M(t))\right|+\left|f'(V(t))\right|\right]dt \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|g\right\|_\infty\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1 t\left(t^s\left|f'(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1 t\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\;& \tfrac{(b-a)^2}{8}\left\|g\right\|_\infty\left[\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\left[(s+1)\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+(s+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Le théorème est prouvé.

■

Corollaire 2.4 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.15, on a*

1/ Si $q=1$, alors

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|g\right\|_\infty\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\
&\times\left\{(s+1)\left|f'(a)\right|+2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+(s+1)\left|f'(b)\right|\right\}.
\end{aligned}$$

2/ Si $q=1$ et $s=1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{12}\left\|g\right\|_\infty\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'(b)\right|\right].
\end{aligned}$$

Corollaire 2.5 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.15, on a*

1/ Si $q = 1$ et $g(x) = 1$ pour $x \in [a, b]$, alors

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{4} \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ & \times \left\{ (s+1) \left| f'(a) \right| + 2 \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| + (s+1) \left| f'(b) \right| \right\}. \end{aligned}$$

2/ Si $q = 1$ et $g(x) = 1$ pour $x \in [a, b]$, et $s = 1$, on a

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \tfrac{b-a}{12} \left[\left| f'(a) \right| + \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f'(b) \right| \right].$$

Théorème 2.16 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.15, si $\left| f' \right|^q$ est s-convexe sur $[a, b]$ pour $q > 1$, alors*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \\ \leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\| g \right\|_\infty \left(\tfrac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\tfrac{1}{2^s (s+1)} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \left[\left(2^{s+1} - 1\right) \left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left| f'(a) \right|^q + \left(2^{s+1} - 1\right) \left| f'(b) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.4 et la s-convexité de $\left| f' \right|^q$sur $[a, b]$ et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \\ \leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\| g \right\|_\infty \int_0^1 t \left[\left| f'(L(t)) \right| + \left| f'(U(t)) \right| \right] dt \\ \leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\| g \right\|_\infty \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{(q-1)}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \left[\int_0^1 \left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s \left| f'(a) \right|^q + \left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s \left| f'(b) \right|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\int_0^1 \left(\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s \left|f'(a)\right|^q + \left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s \left|f'(b)\right|^q\right) dt\right]^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
= \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \|g\|_\infty \left(\tfrac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\tfrac{1}{2^s(s+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left\{ \left[\left(2^{s+1}-1\right)\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left|f'(a)\right|^q + \left(2^{s+1}-1\right)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}
$$

La preuve du théorème est complète. ■

Corollaire 2.6 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.16, si $s=1$, alors*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \|g\|_\infty \left(\tfrac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \frac{1}{4^{\frac{1}{q}}} \left\{ \left[3\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left|f'(a)\right|^q + 3\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Théorème 2.17 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.16, on a*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4(s+1)^{\frac{1}{q}}} \|g\|_\infty \left(\tfrac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left\{ \left[\left|f'(a)\right|^q + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\}. \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5, l'inégalité de Hölder et la s-convexité de $\left|f'\right|^q$sur $[a,b]$, on a

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \|g\|_\infty \int_0^1 t\left[\left|f'(M(t))\right| + \left|f'(V(t))\right|\right] dt \\
\leq \; & \tfrac{(b-a)^2}{4} \|g\|_\infty \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{(q-1)}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$\times \left\{ \left[\int_0^1 \left(t^s \left| f'\left(a\right) \right|^q + (1-t)^s \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + \left[\int_0^1 \left((1-t)^s \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q + t^s \left| f'\left(b\right) \right|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\| g \right\|_\infty \left(\tfrac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\tfrac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times \left\{ \left[\left| f'\left(a\right) \right|^q + \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q + \left| f'\left(b\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Le Théorème 2.17 est ainsi prouvé. ■

Corollaire 2.7 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.17, on a, si $s = 1$, alors*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g\left(x\right) dx - \int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx \right|$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^2}{2^{2+\frac{1}{q}}} \left(\tfrac{q-1}{2q-1} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times \left\{ \left[\left| f'\left(a\right) \right|^q + \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q + \left| f'\left(b\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Dans ce chapitre nous commencerons par discuter les résultats concernant les inégalités intégrales des trapèzes pondérées pour les fonctions dont la première dérivée est log-convexe, en s'appuyant sur l'identité donnée par le Lemme 1.5, ses résultats ont fait l'objet de la publication : **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapedoidal inequalities for differentiable** log**-convex functions. Journal of Interdisciplinary Mathematics. 23 (2020), 1-13. DOI : 10.1080/09720502.2020.1783808.**

3.0.4 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont log-convexes

Théorème 3.1 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ et $w : [a,b] \to \mathbb{R}_0$ continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ pour $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $\left|f'\right|$ est log-convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty \\
&\times\begin{cases}
\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
2\zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right), si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(a)\right|}{2} + \zeta\left(\left|f'(b)\right|, \left|f'(a)\right|\right)\right), si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{2} + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right)\right), si\ \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|, \\
\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right) + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)\right), \\
si\ \left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|,
\end{cases}
\end{aligned}$$

où

$$\zeta(u,v) = \frac{u(\log u - \log v - 1) + v}{(\log u - \log v)^2}. \tag{3.1}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5, les propriétés du module et le *log*-convexité du $\left|f'\right|$, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)\right)\left(\left|f'(\Psi(t))\right| - \left|f'(\varphi(t))\right|\right)dt\right\} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty\left[\int_0^1 t\left|f'(\Psi(t))\right|dt + \int_0^1 t\left|f'(\varphi(t))\right|dt\right] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty\left(\int_0^1 t\left|f'(b)\right|^t\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{1-t}dt\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \quad + \int_0^1 t \left|f'(a)\right|^t \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^{1-t} dt \Bigg) \\
= & \quad \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_\infty \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
& \quad \times \left(\int_0^1 t \left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|} \right)^t dt + \int_0^1 t \left(\frac{\left|f'(a)\right|}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|} \right)^t dt \right). \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Maintenant, discutons des cas possibles :

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, alors (3.2) donne

$$
\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_\infty \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|. \qquad (3.3)
$$

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, donc (3.2) devient

$$
\begin{aligned}
& \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \right| \\
\leq & \quad \tfrac{(b-a)^2}{2} \|w\|_\infty \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \left(\int_0^1 t \left(\frac{\left|f'(b)\right|}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|} \right)^t dt \right) \\
= & \quad \tfrac{(b-a)^2}{2} \|w\|_\infty \zeta \left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \right). \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.2) devient

$$
\begin{aligned}
& \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \right| \\
\leq & \quad \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_\infty |f'(a)| \left(\int_0^1 t \left(\tfrac{|f'(b)|}{|f'(a)|} \right)^t dt + \int_0^1 t dt \right) \\
= & \quad \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_\infty \left(\tfrac{1}{2} |f'(a)| + \zeta \left(|f'(b)|, |f'(a)| \right) \right). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Si $|f'(b)| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq |f'(a)|$, donc (3.2) devient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty \left|f'(b)\right| \left(\int_0^1 t dt + \int_0^1 t\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|}{\left|f'(b)\right|}\right)^t dt\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\left|f'(b)\right| + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right)\right). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Si $\left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.2) devient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty \\
&\times \left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right) + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)\right), \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

où $\zeta(.,.)$ est définie par (3.1), et nous avons utilisé le fait

$$\int_0^1 t y^t dt = \tfrac{y}{\log y} - \tfrac{y-1}{(\log y)^2}, y > 0 \text{ et } y \neq 1.$$

Le résultat désiré découle de (3.3)-(3.7). ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si en prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq &\begin{cases}
\tfrac{b-a}{4}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \textit{si } \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\tfrac{b-a}{2}\zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right), \textit{si } \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|}{2} + \zeta\left(\left|f'(b)\right|, \left|f'(a)\right|\right)\right), \textit{si } \left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|, \\
\tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{\left|f'(b)\right|}{2} + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right)\right), \textit{si } \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|, \\
\tfrac{b-a}{4}\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right) + \zeta\left(\left|f'(a)\right|, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)\right), \\
\textit{si } \left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|,
\end{cases}
\end{aligned}$$

où $\zeta(.,.)$ est défini comme dans (3.1).

Théorème 3.2 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ et $w : [a,b] \to \mathbb{R}_0$ continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ pour $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$. si $|f'|^q$ où $q > 1$ est* log-*convexe sur $[a,b]$, alors*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\begin{cases}
2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \text{ si } |f'(a)| = |f'(b)| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
2\left(\eta\left(|f'(b)|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ si } |f'(a)| = |f'(b)| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\left\{|f'(a)| + \left(\eta\left(|f'(b)|^q, |f'(a)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \text{ si } |f'(a)| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq |f'(b)|, \\
\left\{|f'(b)| + \left(\eta\left(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \text{ si } |f'(b)| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq |f'(a)|, \\
\left\{\left(\eta\left(|f'(b)|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\eta\left(|f'(a)|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \\
\text{si } |f'(a)| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq |f'(b)|,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

où

$$\eta(y,z) = \frac{y-z}{\log y - \log z}. \tag{3.8}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5, les propriétés du module et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left(\int_0^1 \left|f'(\Psi(t))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \left|f'(\varphi(t))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

comme $\left|f'\right|^q$ est log-convexe (3.8) devient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{\left(\int_0^1\left|f'(\Psi(t))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|f'(\varphi(t))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\times\left\{\left(\int_0^1\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue à celle du Théorème 3.1, on en déduit

Si $\left|f'(a)\right|=\left|f'(b)\right|=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, alors (3.10) donne

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \qquad (3.11)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Si $\left|f'(a)\right|=\left|f'(b)\right|\neq\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, donc (3.10) devient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \qquad (3.12)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q,\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.10) devient

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \qquad (3.13)\\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|f'(a)\right| + \left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned}$$

Si $\left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|$, donc (3.10) devient

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \qquad (3.14)\\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|f'(b)\right| + \left(\eta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned}$$

Si $\left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.10) devient

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \qquad (3.15)\\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ & \times\left\{\left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\eta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \end{aligned}$$

où $\eta(.,.)$ est définie comme dans (3.8). Le résultat désiré découle de (3.11)-(3.15). ■

Corollaire 3.2 *Dans Le Théorème 3.2, si on choisit* $w(x) = \frac{1}{b-a}$, *on obtient*

$$
\begin{aligned}
& \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \begin{cases}
2\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
2\left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\left\{\left|f'(a)\right| + \left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|, \\
\left\{\left|f'(b)\right| + \left(\eta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, si\ \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|, \\
\left\{\left(\eta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\eta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \\
si\ \left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

où $\eta(.,.)$ *est définie comme dans (3.8).*

Théorème 3.3 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $\overset{\circ}{I}$ *et* $w : [a,b] \to \mathbb{R}_0$ *continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$ *pour* $a, b \in I$ *avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L^1([a,b])$. *Si* $\left|f'\right|^q$ *où* $q \geq 1$ *est* log-*convexe sur* $[a,b]$, *alors*

$$
\begin{aligned}
& \left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\|w\right\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \begin{cases}
2^{1-\frac{1}{q}}\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
2\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}, si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(a)\right|}{2^{\frac{1}{q}}} + \left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right), si\ \left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{2^{\frac{1}{q}}} + \left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right), si\ \left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|, \\
\left(\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right), \\
si\ \left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

où $\zeta(.,.)$ *est définie comme dans (3.1).*

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5, les propriétés du module, l'inégalité des moyens d'ordre q et le log-convexité du $|f'|^q$, nous pouvons obtenir

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} w(x)\,dx\right)\left(\left|f'(\Psi(t))\right|+\left|f'(\varphi(t))\right|\right)dt\right\} \\
\leq\;& \tfrac{b-a}{4}\|w\|_\infty\left\{\int_0^1\left(\int_{\varphi(t)}^{\Psi(t)} 1dx\right)\left(\left|f'(\Psi(t))\right|+\left|f'(\varphi(t))\right|\right)dt\right\} \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty\left\{\int_0^1 t\left|f'(\Psi(t))\right|dt+\int_0^1 t\left|f'(\varphi(t))\right|dt\right\} \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty\left\{\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'(\Psi(t))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'(\varphi(t))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\int_0^1 t\left|f'(\Psi(t))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 t\left|f'(\varphi(t))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\left\{\left(\int_0^1 t\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 t\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q}{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Comme dans les théorèmes ci-dessus, les mêmes cas apparaissent, et donc la même discussion aura lieu.

Si $\left|f'(a)\right|=\left|f'(b)\right|=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, alors (3.16) donne

$$
\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right|\leq\tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_\infty\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|. \tag{3.17}
$$

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'(b)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$, donc (3.16) devient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{2}\left\|w\right\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Si $\left|f'(a)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.16) devient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Si $\left|f'(b)\right| = \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(a)\right|$, donc (3.16) devient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

Si $\left|f'(a)\right| \neq \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \neq \left|f'(b)\right|$, donc (3.16) devient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ & \left. + \left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q, \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\zeta(.,.)$ est définie comme dans (3.1). Le résultat désiré découle de (3.17)-(3.20). ■

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.3 choisissant* $w(x)=\frac{1}{b-a}$*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\begin{array}{c}
2^{1-\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\ si\ \left|f'(a)\right|=\left|f'(b)\right|=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
2\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}},\ si\ \left|f'(a)\right|=\left|f'(b)\right|\neq\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(a)\right|}{2^{\frac{1}{q}}}+\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right),\ si\ \left|f'(a)\right|=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\neq\left|f'(b)\right|, \\
\left(\frac{\left|f'(b)\right|}{2^{\frac{1}{q}}}+\left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right),\ si\ \left|f'(b)\right|=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\neq\left|f'(a)\right|, \\
\left(\left(\zeta\left(\left|f'(b)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\zeta\left(\left|f'(a)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right), \\
si\ \left|f'(a)\right|\neq\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\neq\left|f'(b)\right|.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

3.0.5 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont h-préinvexe

Ces nouveaux résultats reposent sur une nouvelle identité donnée par le lemme ci-dessous et font l'objet de la publication suivante : **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal type inequalities via h-preinvexity. Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 24 (2020), 81-97.**

Lemme 3.1 *Soit* $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ *différentiable sur* $(a,a+\eta(b,a))$ *avec* $\eta(b,a)>0$*, et soit* $w:[a,a+\eta(b,a)]\to[0,+\infty)$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{2a+\eta(b,a)}{2}$*. Si* $f'\in L^1([a,a+\eta(b,a)])$*, alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)f(x)\,dx \\
=\ &\tfrac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1\left(\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right)f'(a+t\eta(b,a))\,dt. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Preuve. En intégrant par parties le côté droit de (3.21), en utilisant un changement de variable et la symétrie de w, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 \left(\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx \right) f'(a+t\eta(b,a))\,dt \\
= \; & \tfrac{1}{2} \left(\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx \right) f(a+t\eta(b,a)) \Bigg|_{t=0}^{t=1} \\
& -\tfrac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 \left(w(a+t\eta(b,a)) + w(a+(1-t)\eta(b,a)) \right) f(a+t\eta(b,a))\,dt \\
= \; & \tfrac{1}{2} \left(\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx \right) f(a+\eta(b,a)) - \tfrac{1}{2} \left(\int_{a+\eta(b,a)}^{a} w(x)\,dx \right) f(a) \\
& -\tfrac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 \left(w(a+t\eta(b,a)) + w(a+(1-t)\eta(b,a)) \right) f(a+t\eta(b,a))\,dt \\
= \; & \tfrac{1}{2} \left(\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx \right) \left(f(a+\eta(b,a)) + f(a) \right) \\
& -\tfrac{1}{2} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left(w(x) + w(2a+\eta(b,a)-x) \right) f(x)\,dx \\
= \; & \tfrac{f(a+\eta(b,a))+f(a)}{2} \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Qui est le résultat souhaité. ■

Dans ce qui suit, on suppose que $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction non négative et $h \neq 0$, $\eta(b,a) > 0$, et $K = [a, a+\eta(b,a)] \subset [0, +\infty)$.

Théorème 3.4 *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ différentiable sur K° avec $f' \in L^1(K)$ où $a, b \in K^\circ$, et soit $w : K \to [0, +\infty)$ une fonction continue et symétrique par rapport à $a + \frac{1}{2}\eta(b,a)$. Si*

$\left|f'\right|$ *est h-préinvexe, alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{(\eta(b,a))^2}{2}\left\|w\right\|_\infty\left(\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)\,h(t)\,dt\right.$$
$$\left.+2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2t)\,h(t)\,dt\right).$$

Preuve. A partir du Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue et la h-préinvexité de $\left|f'\right|$, on a

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\int_{0}^{1}\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt$$
$$=\frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{a+t\eta(b,a)}^{a+(1-t)\eta(b,a)} w(x)\,dx\right)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right)$$
$$\leq \frac{(\eta(b,a))^2}{2}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left\|w(x)\right\|_{[a+t\eta(b,a),a+(1-t)\eta(b,a)],\infty}(1-2t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\|w(x)\right\|_{[a+(1-t)\eta(b,a),a+t\eta(b,a)],\infty}(2t-1)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right)$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^2}{2}\|w\|_\infty \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t-1)\left|f'(a+t\eta(b,a))\right| dt \right)$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^2}{2}\|w\|_\infty \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\left(h(1-t)\left|f'(a)\right| + h(t)\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|\right) dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t-1)\left(h(1-t)\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| + h(t)\left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right) dt \right)$$

$$= \frac{(\eta(b,a))^2}{2}\|w\|_\infty \left(\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t-1)\,h(t)\,dt \right.$$

$$\left. + 2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,h(t)\,dt \right).$$

■

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.4, si on choisit* $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$*, on obtient*

$$\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \left(\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t-1)\,h(t)\,dt \right.$$

$$\left. + 2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,h(t)\,dt \right).$$

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.4, en prenant $\eta(b,a) = b-a$, on obtient*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b w(x) f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\|w\|_\infty$$
$$\times\left(\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)\,h(t)\,dt + 2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)\,h(t)\,dt\right).$$

De plus, si on choisit $w(x) = \frac{1}{b-a}$, on obtient

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}$$
$$\times\left(\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)\,h(t)\,dt + 2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)\,h(t)\,dt\right).$$

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.4, si on suppose que $\left|f'\right|$ est une fonction P-préinvexe, on obtient*

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{(\eta(b,a))^2}{8}\|w\|_\infty\left(\left|f'(a)\right| + 2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| + \left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right).$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{8}\left(\left|f'(a)\right| + 2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| + \left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right).$$

Corollaire 3.7 *Dans le Corollaire 3.6, si l'on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx-\int_a^b w(x)f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^2}{8}\|w\|_\infty\left(\left|f'(a)\right|+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'(b)\right|\right).\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x)=\frac{1}{b-a}$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left(\left|f'(a)\right|+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'(b)\right|\right).$$

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.4, si on suppose que $\left|f'\right|$ est une fonction préinvexe*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{(\eta(b,a))^2}{48}\|w\|_\infty\left(5\left|f'(a)\right|+2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|+5\left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right).\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x)=\frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{\eta(b,a)}{48}\left(5\left|f'(a)\right|+2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|+5\left|f'(a+\eta(b,a))\right|\right). \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *Dans l'inégalité (3.22), en utilisant le fait que $2\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|\leq\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|$ et $\left|f'(a+\eta(b,a))\right|\leq\left|f'(b)\right|$, on obtient le Théorème 2.1 de* [2].

Corollaire 3.9 *Dans le Corollaire 3.8, si l'on prend $\eta(b,a) = b - a$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b w(x) f(x)\,dx \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{48} \|w\|_\infty \left(5\left|f'(a)\right| + 2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + 5\left|f'(b)\right| \right). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{b-a}{48} \left(5\left|f'(a)\right| + 2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + 5\left|f'(b)\right| \right). \qquad (3.24)$$

Remarque 3.2 *Dans l'inégalité (3.23), en utilisant la convexité de $\left|f'\right|$, on obtient l'inégalité (2) du Corollaire 3.1.1 à partir de* [9]. *Aussi Corollaire 8 de* [29].

Remarque 3.3 *Dans l'inégalité (3.24), en utilisant la convexité de $\left|f'\right|$, on obtient le Théorème 2.2 de* [7].

Corollaire 3.10 *Dans le Théorème 3.4, si on suppose que $\left|f'\right|$ est une fonction s-préinvexe*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\,dx \right| \\
\leq\ & \frac{(\eta(b,a))^2}{2(s+1)(s+2)} \|w\|_\infty \left(\frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}} \left|f'(a)\right| + \frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}} \left|f'(a+\eta(b,a))\right| \right. \\
&\left. + \frac{1}{2^s} \left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| \right).
\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx \right| \qquad (3.25) \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2(s+1)(s+2)} \left(\frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}} \left|f'(a)\right| + \frac{1}{2^s} \left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right| + \frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}} \left|f'(a+\eta(b,a))\right| \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.4 *Dans l'inégalité (3.25), en utilisant la préinvexité de* $\left|f'\right|$*, on obtient le résultat correct du Théorème 2 à partir de* [27].

Corollaire 3.11 *Dans le Corollaire 3.10, si l'on prend* $\eta(b,a) = b-a$*, on obtient*

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b w(x)f(x)\,dx\right| \qquad (3.26) \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2(s+1)(s+2)}\|w\|_\infty\left(\frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}}\left|f'(a)\right| + \frac{1}{2^s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}}\left|f'(b)\right|\right). \end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (3.27) \\ \leq\ & \frac{b-a}{2(s+1)(s+2)}\left(\frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}}\left|f'(a)\right| + \frac{1}{2^s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{s2^{1+s}+1}{2^{1+s}}\left|f'(b)\right|\right). \end{aligned}$$

Remarque 3.5 *Dans l'inégalité (3.26), en utilisant la convexité de* $\left|f'\right|$*, on obtient l'inégalité (1) du Corollaire 3.1.1 à partir de* [9].

Remarque 3.6 *Dans l'inégalité (3.27), en utilisant la convexité de* $\left|f'\right|$*, on obtient l'inégalité (1) du Corollaire 3.1.2 de* [9] *et du Théorème 2 de* [22].

Théorème 3.5 *Soit* $f : K \to \mathbb{R}$ *différentiable sur* K° *avec* $f' \in L^1(K)$*, et soit* $w : K \to [0,+\infty)$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $a + \frac{1}{2}\eta(b,a)$*. Si* $\left|f'\right|^q$ *est h-préinvexe, où* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times\left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés du module, l'inégalité de Hölder et la h-préinvexité de $\left|f'\right|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_0^1\left(h(1-t)\left|f'(a)\right|^q+h(t)\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Qui est le résultat souhaité. ■

Corollaire 3.12 *Dans le Théorème 3.5, si on choisit* $w(x)=\frac{1}{\eta(b,a)}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.13 *Dans le Théorème 3.5, en prenant $\eta(b,a) = b-a$, on obtient*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b w(x) f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{at+(1-t)b}^{a(1-t)+tb} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on choisit $w(x) = \frac{1}{b-a}$, on obtient

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.14 *Dans le Théorème 3.5, si on suppose que $\left|f'\right|^q$ est une fonction P-préinvexe*

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx\right| \leq \frac{\eta(b,a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.15 *Dans le Corollaire 3.14, si l'on prend $\eta(b,a) = b-a$, on obtient*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int\limits_a^b w(x)\,dx - \int\limits_a^b w(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{2}\left(\int\limits_0^1\left(\left|\int\limits_{at+(1-t)b}^{a(1-t)+tb} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.16 *Dans le Théorème 3.5, si on suppose que $\left|f'\right|^q$ est une fonction préinvexe*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int\limits_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\int\limits_0^1\left(\left|\int\limits_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$, on obtient le Théorème 2.2 de [2].

Corollaire 3.17 *Dans le Corollaire 3.16, si l'on prend $\eta(b,a) = b-a$, on obtient*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int\limits_a^b w(x)\,dx - \int\limits_a^b w(x)\,f(x)\,dx\right| \tag{3.28}$$
$$\leq \tfrac{b-a}{2}\left(\int\limits_0^1\left(\left|\int\limits_{at+(1-t)b}^{a(1-t)+tb} w(x)\,dx\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$, *on obtient le Théorème 2.3 de* [7].

Remarque 3.7 *Dans l'inégalité (3.28), en utilisant le fait que* $w(x) \leq \|w\|_{\infty}$, *on obtient le Corollaire 13 à partir de* [29].

Corollaire 3.18 *Dans le Théorème 3.5, si on suppose que* $|f'|^q$ *est une fonction s-préinvexe*

$$\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx \right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2} \left(\int_0^1 \left(\left| \int_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx \right| \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(a+\eta(b,a))|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(a+\eta(b,a))|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.29}$$

Remarque 3.8 *Dans l'inégalité (3.29), en utilisant le fait que* $|f'(a+\eta(b,a))| \leq |f'(b)|$, *on obtient le Théorème 4 de* [27].

Corollaire 3.19 *Dans le Corollaire 3.18, si l'on prend* $\eta(b,a) = b-a$, *on obtient*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b w(x)\,f(x)\,dx \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 \left(\left| \int_{at+(1-t)b}^{a(1-t)+tb} w(x)\,dx \right| \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$, *on obtient le Théorème 4 de* [22].

Théorème 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^2}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left\|w\right\|_{\infty}\left(\left|f^{'}(a)\right|^q+\left|f^{'}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|2t-1\right|h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés du module, de l'inégalité des moyens d'ordre q et de la h-préinvexité de $\left|f^{'}\right|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\int\limits_0^1\left|\int\limits_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\left|f^{'}(a+t\eta(b,a))\right|dt \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_{a+(1-t)\eta(b,a)}^{a+t\eta(b,a)} w(x)\,dx\right|\left|f^{'}(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^2}{2}\left\|w\right\|_{\infty}\left(\int\limits_0^1\left|2t-1\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1\left|2t-1\right|\left|f^{'}(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^2}{2}\left\|w\right\|_{\infty}\left(\int\limits_0^1\left|2t-1\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int\limits_0^1\left|2t-1\right|\left[h(1-t)\left|f^{'}(a)\right|^q+h(t)\left|f^{'}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(\eta(b,a))^2}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left\|w\right\|_{\infty}\left(\left|f^{'}(a)\right|^q+\left|f^{'}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|2t-1\right|h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corollaire 3.20 *Dans le Théorème 3.6, si on choisit* $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\left| f'(a) \right|^{q} + \left| f'(b) \right|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{0}^{1} |2t-1|\, h(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.21 *Dans le Théorème 3.6, en prenant* $\eta(b,a) = b-a$*, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int\limits_{a}^{b} w(x)\,dx - \int\limits_{a}^{b} w(x) f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{2}}{2^{2-\frac{1}{q}}} \|w\|_{\infty} \left(\left| f'(a) \right|^{q} + \left| f'(b) \right|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{0}^{1} |2t-1|\, h(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

De plus, si on choisit $w(x) = \frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \right| \leq \frac{b-a}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\left| f'(a) \right|^{q} + \left| f'(b) \right|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{0}^{1} |2t-1|\, h(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.22 *Dans le Théorème 3.6, si on suppose que* $\left| f' \right|^{q}$ *est une fonction P-préinvexe*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} \int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & \frac{(\eta(b,a))^{2}}{4} \|w\|_{\infty} \left(\left| f'(a) \right|^{q} + \left| f'(b) \right|^{q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\, dx \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.23 *Dans le Corollaire 3.22, si l'on prend* $\eta(b,a) = b - a$, *on obtient*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx - \int_a^b w(x) f(x)\, dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \|w\|_\infty \left(\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{b-a}$

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.24 *Dans le Théorème 3.6, si on suppose que* $\left| f' \right|^q$ *est une fonction préinvexe*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\, dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} w(x) f(x)\, dx \right| \\ \leq\ & \frac{(\eta(b,a))^2}{4} \|w\|_\infty \left(\frac{\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x) = \frac{1}{\eta(b,a)}$

$$\left| \frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\, dx \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\frac{\left| f'(a) \right|^q + \left| f'(b) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.25 *Dans le Corollaire 3.24, si l'on prend* $\eta(b,a)=b-a$*, on obtient*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int\limits_a^b w(x)\,dx-\int\limits_a^b w(x)\,f(x)\,dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_\infty\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, si on prend $w(x)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient le Théorème 1 de* [24].

Corollaire 3.26 *Dans le Théorème 3.6, si on suppose que* $\left|f'\right|^q$ *est une fonction s-préinvexe*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx\right|\\ \leq\;&\frac{(\eta(b,a))^2}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left\|w\right\|_\infty\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1+s2^s}{(1+s)(2+s)2^s}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x)=\frac{1}{\eta(b,a)}$*, on obtient le résultat correct du Théorème 7 de* [27].

Corollaire 3.27 *Dans le Corollaire 3.26, si l'on prend* $\eta(b,a)=b-a$*, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int\limits_a^b w(x)\,dx-\int\limits_a^b w(x)\,f(x)\,dx\right|\\ \leq\;&\frac{(b-a)^2}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left\|w\right\|_\infty\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1+s2^s}{(1+s)(2+s)2^s}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

De plus, si on prend $w(x)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient le Théorème 1 de* [12].

3.0.6 Inégalités intégrales de type trapèzes pondérées pour les fonctions dont les premières dérivées sont préquasiinvexe

Ces nouveaux résultats reposent sur une nouvelle identité donnée par le lemme cidessous et font l'objet de la publication suivante : **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal inequalities for prequasiinvex functions. Commun. Optim. Theory 2020 (2020), Article ID20. https ://doi.org/10.23952/cot.2020.20.**

Lemme 3.2 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *différentiable sur* I° *où* $a, b \in I^{\circ}$ *avec* $\eta(b,a) > 0$, *et soit* $w : [a, a+\eta(b,a)] \to [0, +\infty)$ *continue et symétrique par rapport à* $\frac{2a+\eta(b,a)}{2}$. *Si* $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$, *alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx - \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,w(x)\,dx \\
= {}& \tfrac{\eta(b,a)}{4}\int_0^1 \left[\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right]\left[f'(\varphi(t)) - f'(\psi(t))\right]dt, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(t) = a + \tfrac{1+t}{2}\eta(b,a) \quad \textit{et} \quad \psi(t) = a + \tfrac{1-t}{2}\eta(b,a). \qquad (3.31)$$

Preuve. En intégrant par parties le côté droit de (3.30), et en utilisant un changement de variable et la symétrie de w, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\eta(b,a)}{4}\int_0^1 \left[\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right]\left[f'(\varphi(t)) - f'(\psi(t))\right]dt \\
= {}& \tfrac{\eta(b,a)}{4}\left\{\tfrac{2}{\eta(b,a)}\left[\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right][f(\varphi(t)) + f(\psi(t))]\Big|_0^1\right. \\
&\left. - \int_0^1 [w(\varphi(t)) + w(\psi(t))][f(\varphi(t)) + f(\psi(t))]\,dt\right\} \\
= {}& \left[\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx\right]\tfrac{f(a+\eta(b,a))+f(a)}{2} - \tfrac{\eta(b,a)}{4}\int_0^1 [w(\varphi(t)) + w(\psi(t))]\,f(\varphi(t))\,dt \\
&-\tfrac{\eta(b,a)}{4}\int_0^1 [w(\varphi(t)) + w(\psi(t))]\,f(\psi(t))\,dt. \\
= {}& \tfrac{f(a+\eta(b,a))+f(a)}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx \\
&-\left(\tfrac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1 w(\varphi(t))\,f(\varphi(t))\,dt + \tfrac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1 w(\psi(t))\,f(\psi(t))\,dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{f(a+\eta(b,a))+f(a)}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx \\
&\quad -\left(\int_{a+\frac{\eta(b,a)}{2}}^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx+\int_a^{a+\frac{\eta(b,a)}{2}} w(x)\,f(x)\,dx\right) \\
&= \tfrac{f(a+\eta(b,a))+f(a)}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 3.7 *Soit $f : K = [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ différentiable sur K° avec $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ où $a, b \in K^\circ$ et $\eta(b,a) > 0$, et soit $w : K \to [0, +\infty)$ continue et symétrique par rapport à $a + \frac{1}{2}\eta(b,a)$. Si $\left|f'\right|^q$ où $q \geq 1$, est préquasiinvexe, alors on a l'inégalité suivante*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right)dt\right) \\
&\quad\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(a+\tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f'\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad\left.+\left(\max\left\{\left|f'\left(a+\tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, les propriétés du module, l'inégalité des moyens d'ordre q et la préquasiinvexité de $\left|f'\right|^q$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\int_a^{a+\eta(b,a)} w(x)\,dx-\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\,w(x)\,dx\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{4}\left(\int_0^1\left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left(\left(\int_0^1\left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\,dx\right)\left|f'(\varphi(t))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 \left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\, dx \right) \left| f'(\psi(t)) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg) \\
\leq \; & \tfrac{\eta(b,a)}{4} \left(\int_0^1 \left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\, dx \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \Bigg(\Bigg(\left(\int_0^1 \left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\, dx \right) dt \right. \\
& \times \max \left\{ \left| f'\left(a + \tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right) \right|^q, \left| f'(a + \eta(b,a)) \right|^q \right\} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& + \Bigg(\left(\int_0^1 \left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\, dx \right) dt \right. \\
& \times \max \left\{ \left| f'\left(a + \tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right) \right|^q, \left| f'(a) \right|^q \right\} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg) \\
= \; & \tfrac{\eta(b,a)}{4} \left(\int_0^1 \left(\int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} w(x)\, dx \right) dt \right) \\
& \times \left(\left(\max \left\{ \left| f'\left(a + \tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right) \right|^q, \left| f'(a + \eta(b,a)) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\max \left\{ \left| f'\left(a + \tfrac{1}{2}\eta(b,a)\right) \right|^q, \left| f'(a) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la preuve. ■

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaine inégalités de type Hermite-Hadamard pondérées plus précisément celles des trapèzes et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques type de convexités classiques ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités des trapèzes non pondérées puis celles avec poids dont la dérivée première ou la dérivée seconde satisfait à un certain type de convexités classiques ou généralisées.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant ce type d'inégalité dont ils ont fait l'objet des publications [16, 17, 18].

Bibliographie

[1] M. Alomari, M. Darus, U. S. Kirmaci, Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means. Comput. Math. Appl. 59 (2010), no. 1, 225–232.

[2] A. Barani, A. G. Ghazanfari and S. S. Dragomir, Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex. J. Inequal. Appl. 2012, 2012 :247, 9 pp.

[3] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23(37) (1978), 13–20.

[4] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[5] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[6] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić, and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[7] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[8] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[9] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type involving an s-convex function with applications. Appl. Math. Comput. 246 (2014), 752–760.

[10] D.-Y. Hwang,Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted trapezoidal formula and higher moments of random variables. Appl. Math. Comput. 217 (2011), no. 23, 9598–9605.

[11] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex func-tions. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 34 (2007), 83–88.

[12] U. S. Kirmaci, M. K. Bakula, M. E. Özdemir and J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for s-convex functions. Appl. Math. Comput. 193 (2007), no. 1, 26–35.

[13] J.-Y. Li, On Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) 27(2010), no. 4, p. 003.

[14] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[15] M. Matloka, Inequalities for h-preinvex functions. Appl. Math. Comput. 234 (2014), 52–57.

[16] **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapedoidal inequalities for differentiable** $\log$**-convex functions. Journal of Interdisciplinary Mathematics. 23 (2020), 1-13. DOI : 10.1080/09720502.2020.1783808.**

[17] **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal type inequalities via** h**-preinvexity. Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 24 (2020), 81-97.**

[18] **B. Meftah and K. Mekalfa, Some weighted trapezoidal inequalities for prequasiinvex functions. Commun. Optim. Theory 2020 (2020), Article ID20. https ://doi.org/10.23952/cot.2020.20.**

[19] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[20] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[21] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[22] M. Muddassar, M. I. Bhatti and M. Iqbal, Some new s-Hermite-Hadamard type inequalities for differentiable functions and their applications. Proc. Pakistan Acad. Sci. 49 (2012), no. 1, 9–17.

[23] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan and J. Li, On Hermite-Hadamard inequalities for h-preinvex functions, Filomat, 28 (2014), no. 7, 1463-1474.

[24] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[25] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[26] R. Pini, Invexity and generalized convexity. Optimization 22 (1991), no. 4, 513–525.

[27] S. Qaisar, M. Muddassar and M. Iqbal, New integral inequalities of the Hermite-Hadamard type through invexity. Proc. Pakistan Acad. Sci. 51 (2014), no. 2, 145–155.

[28] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[29] S.-L. Tseng, G.-K. Yang and K.-C. Hsu, Some inequalities for differentiable mappings and applications to Fejér inequality and weighted trapezoidal formula. Taiwanese J. Math. 15 (2011), no. 4, 1737–1747.

[30] S. Varošanec, On h-convexity. J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 303–311.

[31] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

Journal of Interdisciplinary Mathematics
ISSN: 0972-0502 (Print), ISSN: 2169-012X (Online)
DOI : 10.1080/09720502.2020.1783808

Some weighted trapezoidal inequalities for differentiable log-convex functions

B. Meftah *
Laboratoire des télécommunications
Faculté des Sciences et de la Technologie
University of 8 May 1945 Guelma
Guelma 24000
Algeria

and

Département des Mathématiques
Faculté des mathématiques
de l'informatique et des sciences de la matière
Université 8 mai 1945 Guelma
Algeria

K. Mekalfa †
Département des Mathématiques
Faculté des mathématiques
de l'informatique et des sciences de la matière
Université 8 mai 1945 Guelma
Algeria

Abstract

Some new weighted trapezoidal inequalities for log-convex functions are established.

Subject Classification: *(2010) 26D10, 26D15, 26A51.*

Keywords: *Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, Log-convex functions.*

**E-mail:* badrimeftah@yahoo.fr (Corresponding Author)
†*E-mail:* mekalfakhaoula@yahoo.com

Commun. Optim. Theory 2020 (2020), Article ID 20 https://doi.org/10.23952/cot.2020.20

Communications in Optimization Theory

Available online at http://cot.mathres.org

SOME WEIGHTED TRAPEZOIDAL INEQUALITIES FOR PREQUASIINVEX FUNCTIONS

B. MEFTAH[1,2,*], K. MEKALFA[2]

[1]Laboratoire des télécommunications, Faculté des Sciences et de la Technologie,
University of 8 May 1945 Guelma, P.O. Box 401, 24000 Guelma, Algeria
Département des Mathématiques, Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière,
Université 8 mai 1945 Guelma, Algeria

Abstract. A new identity and some weighted trapezoidal inequalities via prequasiinvexity are established. Several special cases are also derived.

Keywords. Hermite-Hadamard inequality; Hölder inequality; Prequasiinvex.

1. Introduction

The most prominently inequality for convex functions is the so-called Hermite-Hadamard inequality, which is stated as follows

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.1}$$

where f is a convex function on the finite interval $[a,b]$. If function f is concave, then (1.1) holds in the reverse direction (see [1]). Since the discovery of this double inequality, many authors have established several inequalities connected to inequality (1.1) and various variants, extensions, generalizations and improvements have been established.

In [2], Alomari, Darus and Kirmaci established the following Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex functions

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq &\tfrac{b-a}{8}\left(\sup\left\{\left|f'(a)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right\} + \sup\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f'(b)\right|\right\}\right),\end{aligned}$$

*Corresponding author.
E-mail addresses: badrimeftah@yahoo.fr (B. Meftah), mekalfakhaoula@yahoo.com (K. Mekalfa).
Received April 12, 2020; Accepted September 9, 2020.

RAD HAZU. MATEMATIČKE ZNANOSTI
Vol. 24 = 542 (2020): 81-97
DOI: https://doi.org/10.21857/9xn31cozny

SOME WEIGHTED TRAPEZOIDAL TYPE INEQUALITIES VIA h-PREINVEXITY

B. Meftah and K. Mekalfa

Abstract. In this paper, a new identity is given, some weighted trapezoidal type inequalities via h-preinvexity are established, and several known results are derived.

1. Introduction

Let f be a convex function on the finite interval $[a, b]$, then

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.1}$$

The inequality (1.1) is known in the literature as Hermite-Hadamard inequality.

The above inequality has never ceased to intrigue researchers, several variants, extensions, generalizations and improvements have been established.

In [4], Dragomir and Agarwal established the following Hermite-Hadamard type inequalities

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{b-a}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right),$$

and

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

In [6], Kirmaci et al. gave the following result connected with Hermite-Hadamard type inequalities

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{2^s s+1}{2^s(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 26D10, 26D15, 26A51.

Key words and phrases. Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, h-preinvex functions.