République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle Bouras Fatma Zohra

Intitulé

Sur quelques inégalités intégrales pour les fonctions h-convexes via Riemann-Liouville fractionnaire intégration

Dirigé par : Lakhal Fahim

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Hitta Amara	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Lakhal Fahim	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Bendjazia Nassima	MCB	Univ-Guelma

Session septembre 2020

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a aidé et m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Ensuite, je tiens à exprimer vivement ma profonde gratitude à mon encadreur **Dr**. **Lakhal Fahim** pour sa confiance, ses encouragements, son suivi et Pour les conseils qu'il a apporté pour l'achèvement de ce mémoire.

Je tiens également à remercie l'ensemble des membres du jury qui m'au fait l'honneur de juger mon mémoire.

Je remercie du fond de mon cœur, **mes parents** et mes sœurs **Amel** et **Yasmine** qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de mes études.

De même remercie ma famille et mes amies.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Merci.

Abstract

In this thesis, we have studied some extensions and refinements of Hermite-Hadamard-type integral inequalities for h-convex functions as well as functions whose first or second derivative is h-convex and this for the normal case and the fractional case in using the Riemann-Liouville fractional integral and certain identities.

Keywords: Convex function, h-convex function, Hermite-Hadamard inequality, Riemann-Liouville fractional integral.

الملخص

في هاته المذكرة قمنا بدراسة توسيعية و تحسينية لمتراجحة هارميت- هدامار بالنسبة للتوابع المحدبة و التوابع التي مشتقاتها الاولى او الثانية H- محدبة و ذلك باستعمال بعض المتطابقات و التكامل الكسري لريمان- ليوفيل .

الكلمات المفتاحية

تابع محدب، تابع H- محدب، متراجحة هارميت – هدامار، التكامل الكسري لريمان- ليوفيل.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié quelques extensions et raffinement des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions h-convexe ainsi que les fonctions dont la première ou la seconde dérivée est h-convexe et ceci pour le cas normal et le cas fractionnaire en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et certaines identités.

Mots clés : Fonction convexe, Fonction h-convexe, Inégalité d'Hermite-Hadamard, Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Table des matières

Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches mathématiques modernes telle que la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique. Une inégalité très intéressante qui est largement étudiée dans la littérature est due à Hermite et Hadamard qui l'ont découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893), voir [1, 5, 19]. Maintenant elle est connue comme l'inégalité d'Hermite-Hadamard, on peut dire qu'elle est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications. Elle nous génère une estimation de la valeur moyenne de la fonction convexe sur un intervalle borné. Ce célèbre résultat est défini comme suit :

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont accordé beaucoup d'attention à la théorie de la convexité en raison de sa grande utilité dans divers domaines des sciences pures et appliquées. La théorie des fonctions convexes et les inégalités sont étroitement liées. Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans les mathématiques modernes, comme on peut le voir dans de grand nombre d'articles de recherche et des livres consacrés au domaine de nos jours.

Beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser et raffiner cette inégalité et l'étendre à différentes classes de fonctions : fonction s-convexes, fonctions p-convexes, etc. Et l'appliquer à des moyennes spéciales (la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, etc.).

L'objet de ce travail est d'étudier et généraliser quelques inégalités intégrales pour les fonctions h-convexes en utilisant l'approche fractionnaire au sens de Riemann-Liouville en passant par quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant les différents types de convexité .Dans le deuxième chapitre nous présentons certains Théorèmes concernant les fonctions h-convexes. Dans le troisième chapitre on donne certains théorèmes concernant les fonctions h-convexes pour le cas fractionnaire et on termine notre mémoire par quelques applications.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Certains types de convexité

Définition 1.1 *La fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.

Exemple 1.1 1) *$f(x) = x^2$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$.*

2) *$f(x) = e^x$ est convexe dans $\mathbb{R}$.*

3) *$f(x) = |x|$ est convexe dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 *On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Godunova-Levin ou que f appartienne à la classe $Q(I)$, si f est positive et pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \tfrac{f(x)}{t} + \tfrac{f(y)}{1-t}.$$

Définition 1.3 *Soit $s \in (0,1]$ un nombre réel fixé. Une fonction $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est dite s-convexe au second sens, ou que f appartienne à la classe K_s^2, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

pour tout $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 *On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une P-fonction, ou que f appartienne à la classe $P(I)$, si f est positive et pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y).$$

Définition 1.5 *Soit $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive. On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe ou que f appartienne à la classe $SX(h, I)$, si f est positive et pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \tag{1.1}$$

Si l'inégalité (1.1) est inversée, alors f est dite h-concave, i.e. $f \in SV(h, I)$. Évidemment, si $h(t) = t$, alors toute fonction convexe positive appartienne à $SX(h, I)$ et toute fonction concave positive appartienne à $SV(h, I)$. Si $h(t) = \dfrac{1}{t}$, alors $SX(h, I) = Q(I)$. Si $h(t) = 1$, alors $SX(h, I) \supset P(I)$, et si $h(t) = t^s$, où $s \in (0,1)$, alors $SX(h, I) \supset K_s^2$.

Remarque 1.1 *Soit h une fonction positive telle que*

$$h(t) \geq t \quad \text{pour tout } t \in (0,1).$$

Par exemple, la fonction $h_k(x) = x^k$ où $k \leq 1$ et $x > 0$ a cette propriété : si f est une fonction convexe positive sur I, alors pour $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

Donc $f \in SX(h, I)$. De même, si cette fonction h a la propriété : $h(t) \leq t$ pour tout $t \in (0,1)$, alors toute fonction concave positive f appartienne à la classe $SV(h, I)$.

Exemple 1.2 *Soit h_k, $k < 0$, une fonction définie comme dans la Remarque 1.1 et soit f définie comme suit :*

$$f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{a+b}{2} \\ 2^{1-k}, & x = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Alors f est une fonction non-convexe, mais elle est h_k-convexe.

Définition 1.6 *Une fonction $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite superadditive si*

$$h(x+y) \geq h(x) + h(y) \text{ pour tout } x, y \in J.$$

Définition 1.7 *Une fonction $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite supermultiplicative si*

$$h(xy) \geq h(x)h(y) \text{ pour tout } x, y \in J.$$

1.2 Quelques propriétés pour les fonctions h-convexes

Proposition 1.1 ([18]) *Soient h_1, h_2 deux fonctions positives définies sur un intervalle J, avec la propriété*

$$h_2(t) \leq h_1(t), \qquad t \in (0,1)\,.$$

Si $f \in SX(h_2, I)$, alors $f \in SX(h_1, I)$. Si $f \in SV(h_1, I)$, alors $f \in SV(h_2, I)$.

Preuve. Si $f \in SX(h_2, I)$, alors pour tout $x, y \in I$, $t \in (0,1)$. On a

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &\leq h_2(t)f(x) + h_2(1-t)f(y) \\ &\leq h_1(t)f(x) + h_1(1-t)f(y). \end{aligned}$$

Donc $f \in SX(h_1, I)$. De même pour le cas concave. D'où le résultat. ■

Proposition 1.2 ([18]) *Si f, $g \in SX(h, I)$ et $\lambda > 0$, alors $f+g$, $\lambda f \in SX(h, I)$. Si f, $g \in SV(h, I)$ et $\lambda > 0$, alors $f+g$, $\lambda f \in SV(h, I)$.*

Preuve. Si $f, g \in SX(h, I)$, alors on a

$$f(tx+(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

et

$$g(tx+(1-t)y) \leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} (f+g)(tx+(1-t)y) &\leq h(t)(f(x)+g(x)) + h(1-t)(f(y)+g(y)) \\ &\leq h(t)(f+g)(x) + h(1-t)(f+g)(y). \end{aligned}$$

D'où $(f+g) \in SX(h, I)$.

Si $f \in SX(h, I)$, alors Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \lambda f(tx+(1-t)y) &\leq h(t)\lambda f(x) + h(1-t)\lambda f(y) \\ &\leq h(t)(\lambda f)(x) + h(1-t)(\lambda f)(y). \end{aligned}$$

De même pour le cas concave. D'où le résultat. ■

Proposition 1.3 ([18]) *Soit f et g deux fonctions synchrones sur I, i.e.*

$$(f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y)) \geq 0 \quad \textit{pour tout } x,y \in I. \tag{1.2}$$

i) Si $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$ et $h(t)+h(1-t) \leq c$ pour tout $t \in (0,1)$, où $h(t) = \max\{h_1(t), h_2(t)\}$ et c est un nombre positif fixé, alors le produit fg appartient à $SX(ch, I)$.

ii) Si f et g sont opposées, $f \in SV(h_1, I)$, $g \in SV(h_2, I)$ et $h(t)+h(1-t) \geq c$ pour tout $t \in (0,1)$, où $h(t) = \min\{h_1(t), h_2(t)\}$ et $c > 0$, alors le produit fg appartient à $SV(ch, I)$.

Preuve. *i). De (1.2) on a*

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geq f(x)g(y)+f(y)g(x).$$

Soit α et β deux nombres positifs telles que $\alpha+\beta=1$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
& fg(\alpha x+\beta y) \\
\leq\ & (h_1(\alpha)f(x)+h_1(\beta)f(y))\,.\,(h_2(\alpha)g(x)+h_2(\beta)g(y)) \\
\leq\ & h(\alpha)^2(fg)(x)+h(\alpha)h(\beta)f(x)g(y)+h(\alpha)h(\beta)f(y)g(x)+h(\beta)^2(fg)(y) \\
\leq\ & h(\alpha)^2(fg)(x)+h(\alpha)h(\beta)f(x)g(x)+h(\alpha)h(\beta)f(y)g(y)+h(\beta)^2(fg)(y) \\
=\ & (h(\alpha)+h(\beta))\,h(\alpha)(fg)(x)+(h(\alpha)+h(\beta))\,h(\beta)(fg)(y) \\
\leq\ & ch(\alpha)(fg)(x)+ch(\beta)(fg)(y).
\end{aligned}$$

ii) Même démonstration que i). ■

Chapitre 2

Inégalités pour les fonctions h-convexes

Au cours des dernières années il y a eu de nombreuses extensions, des généralisations et des résultats similaires à l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les différents types de convexités.

Dans ce chapitre on va donner certains théorèmes concernant cette inégalité pour les fonctions h-convexes.

2.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard

Dans [15], Sarikaya et al., on établi l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour une fonction h-convexe comme suit

Théorème 2.1 *Soit $f \in SX(h, I)$, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $f \in L_1[a, b]$. Alors on a*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\alpha)d\alpha. \tag{2.1}$$

Preuve. On suppose que $f \in SX(h, I)$, c'est à dire

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y). \tag{2.2}$$

En utilisant (2.2), avec $x = ta + (1-t)b$ et $y = (1-t)a + tb$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(ta + (1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f((1-t)a + tb) \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right) [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]. \end{aligned}$$

Puis, on intègre par rapport à t sur $[0, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) &\leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right] \\ &\leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

D'où la première inégalité de (2.1) est prouvée.

D'autre part, en utilisant (2.2), avec $x = a$ et $y = b$, puis on intègre l'inégalité par rapport à α sur $[0, 1]$, on obtient

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)]\int_0^1 h(\alpha)d\alpha.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.2 *Soient $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$, $a, b \in I$, avec $a < b$, telle que $fg \in L_1[a, b]$ et $h_1h_2 \in L_1[a, b]$. Alors on a*

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt, \tag{2.3}$$

où

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b) \text{ et } N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Preuve. Comme $f \in SX(h_1, I)$ et $g \in SX(h_2, I)$, on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq h_1(t)f(a) + h_1(1-t)f(b),$$

et

$$g(ta + (1-t)b) \leq h_2(t)g(a) + h_2(1-t)g(b),$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Comme f et g sont positives, donc

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) &\leq h_1(t)h_2(t)f(a)g(a) + h_1(t)h_2(1-t)f(a)g(b) \\ &\quad + h_2(t)h_1(1-t)f(b)g(a) + h_1(1-t)h_2(1-t)f(b)g(b). \end{aligned}$$

Puis on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)]\, dt \\
\leq\ & f(a)g(a)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + f(a)g(b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\
& + f(b)g(a)\int_0^1 h_2(t)h_1(1-t)dt + f(b)g(b)\int_0^1 h_1(1-t)h_2(1-t)dt \\
=\ & [f(a)g(a)+f(b)g(b)]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\
& + [f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.3 *Soient $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$, $a, b \in I$, $a < b$, telle que $fg \in L_1[a,b]$ et $h_1h_2 \in L_1[a,b]$. Alors on a*

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) g\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
\leq\ & M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\tfrac{a+b}{2} = \tfrac{ta+(1-t)b}{2} + \tfrac{(1-t)a+tb}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
& f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) g\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
= \; & f\left(\tfrac{ta+(1-t)b}{2}+\tfrac{(1-t)a+tb}{2}\right) g\left(\tfrac{ta+(1-t)b}{2}+\tfrac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
\leq \; & h_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f((1-t)a+tb)\right] \\
& \times h_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[g\left(ta+(1-t)b\right)+g((1-t)a+tb)\right] \\
= \; & h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
& \times\left\{f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f((1-t)a+tb)\, g\left((1-t)a+tb\right)\right. \\
& \left.+f\left(ta+(1-t)b\right) g\left((1-t)a+tb\right)+f\left((1-t)a+tb\right) g\left(ta+(1-t)b\right)\right\} \\
\leq \; & h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
& \times\left\{f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f((1-t)a+tb)\, g\left((1-t)a+tb\right)\right\} \\
& +h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{\left[h_1(t)f(a)+h_1(1-t)f(b)\right]\left[h_2(1-t)g(a)+h_2(t)g(b)\right]\right. \\
& \left.+\left[h_1(1-t)f(a)+h_1(t)f(b)\right]\left[h_2(t)g(a)+h_2(1-t)g(b)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
& f\left(\;\right) g\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
\leq \; & h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f((1-t)a+tb)\, g\left((1-t)a+tb\right)\right\} \\
& +h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{\left(h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)\right) M(a,b)\right. \\
& \left.+\left(h_1(t)h_2(t)+h_1(1-t)h_2(1-t)\right) N(a,b)\right\}.
\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
& f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) g\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
\leq \; & 2h_1\left(\tfrac{1}{2}\right) h_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt\right\}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard-Fejér

Dans [7], L. Fejér (1906) à démontré le théorème suivant:

Théorème 2.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, et $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Alors on a*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx. \tag{2.5}$$

Si f est une fonction concave, alors l'inégalité (2.5) est inversée.

Remarque 2.1 *Si on pose $w(x) = 1$ dans (2.5) on retrouve l'inégalité d'Hermite-Hadamard*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Théorème 2.5 ([3]) *(La première inégalité d'Hermite-Hadamard-Fejér pour la fonction h-convexe). Soit h une fonction définie sur $[0, \max\{1, b-a\}]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-convexe, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$, symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ et $\int_a^b w(t)dt > 0$. Alors on a*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq C\int_a^b f(t)w(t)dt, \tag{2.6}$$

où

$$C = \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_a^b w(t)dt}.$$

De plus, si

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b h(y-x)w(y)dydx \neq 0, \ h(x) \neq 0 \quad \text{pour} \ \ x \neq 0,$$

avec

1) *h est multiplicative ou 2) h est supermultiplicative et f est positive.*

Si f est une fonction h-convexe, alors on a l'inégalité (2.6) pour

$$C = \min\left\{\frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_a^b w(t)dt}, \frac{\int_0^{\frac{b-a}{2}} h(x)w\left(x+\frac{a+b}{2}\right)dx}{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b h(y-x)w(y)dydx}\right\}. \tag{2.7}$$

Preuve. Soit f une fonction h-convexe. Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x = ta + (1-t)b$ et $y = (1-t)a + tb$, d'après la définition de la fonction h-convexe, on a

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[f\left(ta + (1-t)b\right) + f\left((1-t)a + tb\right)\right]. \tag{2.8}$$

En multipliant les deux côtés de (2.8) par $w\left(ta+(1-t)b\right)$, avec $w\left(ta+(1-t)b\right)=w\left((1-t)a+tb\right)$, puis on intègre l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{\int_a^b w(t)dt}\int_a^b f(t)w(t)dt, \tag{2.9}$$

qui est satisfaite dans le cas général.

Soit h est supermultiplicative $h(x)\neq 0$ pour $x\neq 0$. Alors $h(x)>0$ pour $x>0$. Pour $x,y\in[a,b]$ telle que $a\leq x<\frac{a+b}{2}<y\leq b$, on a

$$\tfrac{a+b}{2}=\left(\frac{y-\frac{a+b}{2}}{y-x}\right)x+\left(\frac{\frac{a+b}{2}-x}{y-x}\right)y.$$

On pose $\alpha=\frac{y-\frac{a+b}{2}}{y-x}>0$. Puis $\bar{\alpha}=1-\alpha=\frac{\frac{a+b}{2}-x}{y-x}$ et $\frac{a+b}{2}=\alpha x+\bar{\alpha}y$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\alpha x+\bar{\alpha}y\right)\leq h(\alpha)f(x)+h(\bar{\alpha})f(y)$. Comme h est supermultiplicative, on a

$$h(\alpha)=h\left(\frac{y-\frac{a+b}{2}}{y-x}\right)\leq\frac{h\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{h(y-x)}\quad\text{et}\quad h(\bar{\alpha})\leq\frac{h\left(\frac{a+b}{2}-x\right)}{h(y-x)}.$$

Donc, lorsque $f>0$, on obtient

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\leq\frac{h\left(y-\frac{a+b}{2}\right)}{h(y-x)}f(x)+\frac{h\left(\frac{a+b}{2}-x\right)}{h(y-x)}f(y),$$

et

$$h\left(y-x\right)f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\leq h\left(y-\tfrac{a+b}{2}\right)f(x)+h\left(\tfrac{a+b}{2}-x\right)f(y). \tag{2.10}$$

L'inégalité (2.10) est aussi satisfaite si h est multiplicative, quelle que soit la positivité de f. En multipliant (2.10) par $w(x)$ et on intègre par rapport à x sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, et puis en multipliant par $w(y)$ et on intègre par rapport à y sur $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, on obtient

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}h(y-x)w(x)dx\right)w(y)dy \qquad (2.11)\\ \leq\ & \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}h\left(y-\tfrac{a+b}{2}\right)w(y)dy\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)w(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(y)w(y)dy\int_a^{\frac{a+b}{2}}h\left(\tfrac{a+b}{2}-x\right)w(x)dx.\end{aligned}$$

Ensuite, en substituant $y - \frac{a+b}{2} = t$ dans la première intégrale pour le côté droit de (2.11) et en substituant $\frac{a+b}{2} - x = t$ dans la deuxième intégrale pour le côté droit de (2.11), on a

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} h(y-x)w(x)w(y)dxdy \\ \leq \; & \int_{0}^{\frac{b-a}{2}} h(t)w\left(t+\tfrac{a+b}{2}\right)dt \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)w(x)dx + \int_{0}^{\frac{b-a}{2}} h(t)w\left(\tfrac{a+b}{2}-t\right)dt \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(y)w(y)dy \\ = \; & \int_{0}^{\frac{b-a}{2}} h(t)w\left(t+\tfrac{a+b}{2}\right)dt \int_{a}^{b} f(x)w(x)dx, \end{aligned}$$

où, dans la première inégalité en utilisant que la fonction w est symétrique sur $[a,b]$, i.e. $w\left(\frac{a+b}{2} - t\right) = w\left(t + \frac{a+b}{2}\right)$ pour $t \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$. ■

Remarque 2.2 *Sous les conditions du Théorème 2.5 :*

a) Si f est une fonction h-concave, alors l'inégalité de (2.6) est inversée.

b) Si h est subermultiplicative, $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h(y-x)w(x)dydx \neq 0$, $h \geq 0$, et si f est une fonction h-concave, alors l'inégalité (2.6) est inversée avec la constante C comme dans (2.7) et le changement min $\to$ max.

Remarque 2.3 *a) Si f est convexe, i.e. $h(t) = t$, alors l'inégalité (2.6) devient le côté droit de l'inégalité (2.5).*

b) Soit $w = 1$. On suppose que est f une fonction s-convexe au second sens, (i.e. f est une fonction h-convexe et multiplicative avec $h(t) = t^s$, $s \in (0,1)$). Alors la constante C du Théorème 2.5 a la forme :

$$C = \min\left\{ \frac{2^{1-s}}{b-a}, \frac{\int_0^{\frac{b-a}{2}} t^s dt}{\int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (y-x)^s dydx} \right\} = \min\left\{ \frac{2^{1-s}}{b-a}, \frac{s+2}{(b-a)(2^{s+1}-1)} \right\}.$$

Dans [10], *Jagers montre que*

$$2^{s-1} < \frac{2^{s+2}-1}{s+2} \quad \textit{pour } s \in (0,1).$$

Donc, La première inégalité d'Hermite-Hadamard pour la fonction s-convexe au second sens est :

$$\frac{2^{s+1}-1}{s+2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt. \tag{2.12}$$

L'inégalité (2.12) trouvée dans [10] *est une amélioration du résultat de Dragomir-Fitzpatrick dans* [6], *où ils ont utilisé la constante 2^{s-1} au lieu de $\frac{2^{s+1}-1}{s+2}$.*

Théorème 2.6 ([3]) *(La seconde inégalité d'Hermite-Hadamard-Fejér pour la fonction h-convexe). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$, symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Alors on a*

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)w\left(ta+(1-t)\,b\right)dt. \tag{2.13}$$

Si f est une fonction h-concave, alors l'inégalité de (2.13) est inversée.

Preuve. Pour tous $x \in (a,b)$ il existe $\alpha \in (a,b)$ telle que $x = \alpha a + \bar{\alpha} b$, $\bar{\alpha} = 1-\alpha$.

D'après la définition de la fonction h-convexe, on a

$$f\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right) \leq \left(h\left(\alpha\right)f\left(a\right)+h(\bar{\alpha})f(b)\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right) \tag{2.14}$$

$$f\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right) \leq \left(h\left(\bar{\alpha}\right)f\left(a\right)+h(\alpha)f(b)\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right). \tag{2.15}$$

Ensuite, en ajoutant (2.14) et (2.15), et on intègre par rapport à α sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)d\alpha+\int_0^1 f\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)d\alpha \\
\leq\ & \int_0^1 \left[h\left(\alpha\right)f\left(a\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)+h(\bar{\alpha})f(b)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)\right]d\alpha \\
& +\int_0^1 \left[h\left(\bar{\alpha}\right)f\left(a\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)+h\left(\alpha\right)f(b)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)\right]d\alpha \\
=\ & \int_0^1 f(a)\left[h\left(\alpha\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)+h\left(\bar{\alpha}\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)\right]d\alpha \\
& +\int_0^1 f(b)\left[h\left(\bar{\alpha}\right)w\left(\alpha a+\bar{\alpha}b\right)+h\left(\alpha\right)w\left(\bar{\alpha}a+\alpha b\right)\right]d\alpha \\
=\ & 2f(a)\int_0^1 h(t)w\left(ta+(1-t)b\right)dt+2f(b)\int_0^1 h(t)w\left((1-t)\,a+tb\right)dt \\
=\ & 2\left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 h(t)w\left(ta+(1-t)b\right)dt,
\end{aligned}$$

où en utilisant la symétrie du poids w. Aprés des substitutions appropriées, on obtient que les deux intégrales de la première ligne sont égales à $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt$, et le théorème a été établi.

■

Remarque 2.4 *a) Si $h(t) = t$ dans Théorème 2.6, i.e., si f est une fonction convexe on obtient le côté droit de l'inégalité (2.5).*

b) Pour $h(t) = t^s, s \in (0,1)$, *i.e., si* f *est une fonction* s*-convexe au second sens, alors on a le résultat du Théorème 2.1 dans* [6]

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Chapitre 3

Fonctions convexes et h-convexes dans le cas fractionnaire

Avec la naissance de l'intégrale fractionnaire, d'autres variantes de l'inégalité d'Hermite-Hadamard ont été obtenues pour différentes classes de fonctions, voir $[12, 13, 16, 17]$.

Dans ce chapitre, il sera question de l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes et h-convexes.

Définition 3.1 *Soit $f \in L_1[a,b]$. L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $J_{a^+}^{\alpha} f$ et $J_{b^-}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha > 0$, avec $a \geq 0$ est définie par :*

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a$$

et

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x < b,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$. est la fonction gamma d'Euler. De plus $J_{a^+}^0 f(x) = J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$.

Un premier résultat concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour le cas fractionnaire est donné par M. Z. Sarıkaya et al. [16], dans le théorème suivant:

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive avec $0 \leq a < b$ et $f \in L_1[a,b]$. Si f est une fonction convexe sur $[a,b]$. Alors on a les inégalités suivantes pour les* *intégrales fractionnaires*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}(b) + J_{b-}^{\alpha}(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3.1}$$

avec $\alpha > 0$.

Preuve. Comme f est une fonction convexe sur $[a,b]$, on a pour $x, y \in [a,b]$ avec $t = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

En posant

$$x = ta + (1-t)b \quad \text{et} \quad y = (1-t)a + tb,$$

on obtient

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(ta + (1-t)b\right) + f\left((1-t)a + tb\right). \tag{3.2}$$

En multipliant les deux côtés de (3.2) par $t^{\alpha-1}$, puis on intègre l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(ta + (1-t)b\right) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left((1-t)a + tb\right) dt \\
&= \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v) \frac{dv}{b-a} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]
\end{aligned}$$

i.e.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right].$$

D'où la première inégalité de (3.1) est prouvée. D'autre part, si f est une fonction convexe, alors pour $t \in [0,1]$, on a

$$f\left(ta + (1-t)b\right) \leq t f(a) + (1-t) f(b) \tag{3.3}$$

et

$$f\left((1-t)a + tb\right) \leq (1-t) f(a) + t f(b). \tag{3.4}$$

En ajoutant (3.3) et (3.4), on obtient

$$f\left(ta + (1-t)b\right) + f\left((1-t)a + tb\right) \leq t f(a) + (1-t) f(b) + (1-t) f(a) + t f(b). \tag{3.5}$$

Ensuite, en multipliant les deux côtés de (3.5) par $t^{\alpha-1}$, et on intègre l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on aura

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb) \leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt.$$

i.e.

$$\tfrac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{\alpha}.$$

D'où le résultat. ■

3.1 Inégalités fractionnaires pour les fonctions dont la première dérivée en valeur absolue est h-convexe

Lemme 3.1 ([16]) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$. Alors on a l'égalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] = \tfrac{b-a}{2} \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{3.6}$$

Preuve. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt\right] + \left[-\int_0^1 t\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right] \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= (1-t)^{\alpha} \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \alpha \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \tfrac{f(b)}{b-a} - \tfrac{\alpha}{b-a} \int_a^b \left(\tfrac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \tfrac{f(x)}{a-b} dx \\ &= \tfrac{f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b^-}^{\alpha} f(a), \end{aligned} \tag{3.8}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^1 t\alpha f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= -\left.\tfrac{t^\alpha f(ta+(1-t)b)}{a-b}\right|_0^1 + \alpha\int_0^1 t^{\alpha-1}\tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\
&= \tfrac{f(a)}{a-b} - \tfrac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1}\tfrac{f(x)}{a-b}dx \\
&= \tfrac{f(a)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{a^+}^\alpha f(b). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.8) et (3.9) dans (3.7), il s'ensuit que

$$I = \tfrac{f(a)+f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]. \qquad (3.10)$$

Ainsi, en multipliant les deux côtés de (3.10) par $\frac{b-a}{2}$, on obtient (3.6). ■

Théorème 3.2 ([16]) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $\left|f'\right|$ est convexe sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \leq \tfrac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\tfrac{1}{2^\alpha}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right]. \qquad (3.11)$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1 et la convexité de $\left|f'\right|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^\alpha - t^\alpha\right| \left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^\alpha - t^\alpha\right| \left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right]\left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt\right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[t^\alpha - (1-t)^\alpha\right]\left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt\right\} \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\left(K_1+K_2\right). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

En calculant K_1 et K_2, on a

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left|f'(a)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^\alpha dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+1}dt\right] + \left|f'(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt - \int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)t^\alpha dt\right] \\
&= \left|f'(a)\right|\left[\tfrac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \tfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right|\left[\tfrac{1}{\alpha+2} - \tfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &= \left|f'(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1}dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^{\alpha}dt\right] + \left|f'(b)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)t^{\alpha}dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt\right] \\ &= \left|f'(a)\right|\left[\tfrac{1}{\alpha+2} - \tfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right|\left[\tfrac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \tfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ainsi, en substituant (3.13) et (3.14) dans (3.12), on obtient l'inégalité (3.11). D'où le résultat.

■

Dans [17], M. Tunç à démontré les théorèmes suivants pour les fonctions h-convexes

Théorème 3.3 *Soit $f \in SX(h,I)$, $a,b \in I$ avec $a < b$ et $f \in L_1[a,b]$. Alors on a l'inégalité pour les fonctions h-convexes via les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned} \tfrac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b) + J_{b^-}^{\alpha}(a)\right] &\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h(t)+h(1-t)\right]dt \\ &\leq \tfrac{2[f(a)+f(b)]}{(\alpha p-p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (h(t))^q\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec $p^{-1}+q^{-1}=1.$

Preuve. Comme $f \in SX(h,I)$, on a

$$f(tx+(1-t)y) \leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{3.16}$$

et

$$f((t-1)x+ty) \leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y). \tag{3.17}$$

En ajoutant (3.16) et (3.17), on a

$$f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right) \leq \left[h(t)+h(1-t)\right]\left[f(x)+f(y)\right]. \tag{3.18}$$

En utilisant (3.18) avec $x=a$ et $y=b$, on obtient

$$f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right) \leq \left[h(t)+h(1-t)\right]\left[f(a)+f(b)\right]. \tag{3.19}$$

En multipliant les deux côtés de (3.19) par $t^{\alpha-1}$, puis en intègrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h(t)+h(1-t)\right]\left[f(a)+f(b)\right]dt,$$

et

$$\tfrac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(a)\right]\leq\left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h(t)+h(1-t)\right]dt,$$

d'où la première inégalité de (3.15) est prouvée. D'autre part, en utilisant l' inégalité de Hölder et de Minkowski respectivement pour le côté droit de (3.20), on obteint

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h(t)+h(1-t)\right]dt &\leq \left(\int_0^1\left(t^{\alpha-1}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(h(t)+h(1-t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{t^{\alpha p-p+1}}{\alpha p-p+1}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(h(t)+h(1-t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{1}{\alpha p-p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(h(t)+h(1-t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha p-p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 (h(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 (h(1-t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&= \frac{2}{(\alpha p-p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (h(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.4 *Soit $f\in SX(h,I)$, $a,b\in I$ avec $a<b$, h superadditive sur I et $f\in L_1[a,b]$, $h\in L_1[0,1]$. Alors on a l'inégalité pour les fonctions h-convexes via les intégrales fractionnaires*

$$\tfrac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(a)\right]\leq\tfrac{h(1)}{\alpha}\left[f(a)+f(b)\right]. \tag{3.21}$$

Preuve. Comme $f\in SX(h,I)$, on a

$$f(tx+(1-t)y)\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{3.22}$$

et

$$f((1-t)x+ty)\leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y). \tag{3.23}$$

En ajoutant (3.22) et (3.23), on obtient

$$f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right)\leq\left[h(t)+h(1-t)\right]\left[f(x)+f(y)\right]. \tag{3.24}$$

On pose $x=a$ et $y=b$ dans (3.24) sachant que h est superadditive, ce qui donne

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\leq h(1)[f(a)+f(b)]. \tag{3.25}$$

En multipliant les deux côtés de (3.25) par $t^{\alpha-1}$, puis en intègrant l'inégalité par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^{\alpha-1}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]dt\\ \leq\ &\int_0^1 t^{\alpha-1}h(1)[f(a)+f(b)]dt,\end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(a)\right]\leq h(1)[f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.5 *Soit $h: J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction srtictement positive avec $0\leq a<b$ et $h^q\in L_1[a,b]$, $f\in L_1[a,b]$. Si $\left|f'\right|$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\\ \leq\ &\tfrac{(b-a)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]}{2}\left[\left(\tfrac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\tfrac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\ &\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(h(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(h(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right],\end{aligned}\qquad (3.26)$$

où $\alpha>0$, $p>1$ et $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Preuve. D'après le Lemme 3.1 et en utilisant les propriétés du module, on a

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt.$$

Comme $\left|f'\right|$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b)+J_{b^-}^{\alpha}(a)\right]\right|\\ \leq\ &\tfrac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[h(t)\left|f'(a)\right|+h(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right.\\ &\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left[\left[h(t)\left|f'(a)\right|+h(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{2}\Bigg\{\left|f'(a)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha h(t)dt-\left|f'(a)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}t^\alpha h(t)dt\\
&\quad+\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha h(1-t)dt-\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}t^\alpha h(1-t)dt\\
&\quad+\left|f'(a)\right|\int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha h(t)dt-\left|f'(a)\right|\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^\alpha h(t)dt\\
&\quad+\left|f'(b)\right|\int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha h(1-t)dt-\left|f'(b)\right|\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^\alpha h(1-t)dt\Bigg\}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour le côté droit de(3.27) avec $p^{-1}+q^{-1}=1$ et $p>1$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha h(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha h(1-t)dt\le\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.28)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha h(1-t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha h(t)dt\le\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.29)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^\alpha h(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^\alpha h(1-t)dt\le\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.30)$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^\alpha h(1-t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^\alpha h(t)dt\le\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.31)$$

Ensuite employons (3.28)-(3.31) dans le côté droit de (3.27), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha(b)+J_{b^-}^\alpha(a)\right]\right|\\
&\le \frac{b-a}{2}\Bigg\{\left|f'(a)\right|\Bigg\{\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\\
&\quad+\left|f'(b)\right|\Bigg\{\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{b-a}{2}\Bigg\{\left|f'(a)\right|\left(\left[\tfrac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\tfrac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&\quad+\left|f'(b)\right|\left(\left[\tfrac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\tfrac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\Bigg\}\\
&= \frac{(b-a)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]}{2}\left[\left(\tfrac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\tfrac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&\quad\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

3.2 Inégalités fractionnaires pour les fonctions dont la seconde dérivée en valeur absolue est h-convexe

Lemme 3.2 ([12]) *Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur I° où $a, b \in I$, avec $a < b$. Si $f'' \in L_1[a,b]$. Alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned}
&(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)\left[J^\alpha_{\frac{a+b}{2}^-}f(a)+J^\alpha_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)\right]-2\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^\alpha(\alpha+1)\,f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \qquad (3.32)\\
&= \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1}f''\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt+\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}f''\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right].
\end{aligned}$$

Preuve. Par intégration par parties et le changement des variables $u = t\frac{a+b}{2}+(1-t)a$ et $v = tb+(1-t)\frac{a+b}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha+1}f''\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\\
&= \tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2(\alpha+1)}{b-a}\int_0^1 t^\alpha f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\\
&= \tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{4\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^2}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\\
&= \tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{2^{\alpha+2}\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+2}}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(u-a)^{\alpha-1}f(u)\,du\\
&= \tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{2^{\alpha+2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+2}}J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a). \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f''\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
= \quad & -\tfrac{2}{b-a} f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2(\alpha+1)}{b-a}\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
= \quad & -\tfrac{2}{b-a} f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2} + f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\tfrac{4\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
= \quad & -\tfrac{2}{b-a} f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2^{\alpha+2}\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)^{\alpha-1} f(u)\,du \\
= \quad & -\tfrac{2}{b-a} f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{4(\alpha+1)}{(b-a)^2} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{2^{\alpha+2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+2}} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

D'après (3.33) et (3.34), on trouve (3.32). D'où le résultat. ■

Théorème 3.6 **([12])** *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur I°, telle que $f'' \in L_1[a,b]$, où $a,b \in I$, avec $a<b$. Si $\left|f''\right|$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-} f(a) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+} f(b)\right] - 2\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha}(\alpha+1) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq \quad & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2}\left[2\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^{\alpha+1}h(t)dt + \left(\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right)\int_0^1 (1-t)^{\alpha} h(t)dt\right].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.2, et en utilisant la h-convexité de $\left|f''\right|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-} f(a) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+} f(b)\right] - 2\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha}(\alpha+1) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq \quad & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1}\left|f''\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt \right.\\
&\left. + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\left|f''\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right] \\
\leq \quad & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1}\left(h(t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + h(1-t)\left|f''(a)\right|\right)dt \right.\\
&\left. + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\left(h(t)\left|f''(b)\right| + h(1-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right] \\
= \quad & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2}\left[2\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^{\alpha+1}h(t)dt \right.\\
&\left. + \left(\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right)\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}h(t)dt\right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

D'où le résultat. ■

On peut utiliser l'inégalité de Hölder pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.7 ([12]) *Soit $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur I°, telle que $f'' \in L_1[a,b]$, où $a, b \in I$, avec $a < b$. Si $\left|f''\right|^q$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$ et $q > 1$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left|(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\left[J^\alpha_{\frac{a+b}{2}^-} f(a) + J^\alpha_{\frac{a+b}{2}^+} f(b)\right] - 2\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^\alpha (\alpha+1) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\ & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{\alpha+2} \left(\tfrac{1}{\alpha p + p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left[\left(\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f''(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Lemme 3.3 ([13]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$, avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$. Alors on a*

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b)\right] \\ =\ & \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 \left[t^\alpha f'\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right) - (1-t)^\alpha f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right)\right] dt \end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\begin{aligned} & \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + J^\alpha_{b^-} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right] \\ =\ & \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 \left[t^\alpha f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right) - (1-t)^\alpha f'\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Preuve. Par intégration par parties et les changements de variables $x = (1-t)\frac{a+b}{2} + tb$ et $y = (1-t)a + t\frac{a+b}{2}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[t^\alpha f'\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right) - (1-t)^\alpha f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right)\right] dt \\ =\ & \tfrac{2}{b-a}\left[t^\alpha f\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_0^1 - \alpha\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt\right] \\ & -\tfrac{2}{b-a}\left[(1-t)^\alpha f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right)\Big|_0^1 + \alpha\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right) dt\right] \\ =\ & \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b)\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[t^\alpha f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)-(1-t)^\alpha f'\left((1-t)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right]dt \\
=\ & \tfrac{2}{b-a}\left[t^\alpha f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)\Big|_0^1-\alpha\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)dt\right] \\
&-\tfrac{2}{b-a}\left[(1-t)^\alpha f\left((1-t)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_0^1+\alpha\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}f\left((1-t)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right] \\
=\ & \tfrac{2}{b-a}\left[f(a)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{b^-}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.8 ([13]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$, avec $a < b$ et $f' \in L_1[a,b]$. Si $\left|f'\right|$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$. Alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\right|\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^\alpha h(t)dt+\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_0^1 t^\alpha h(1-t)dt\right]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{b^-}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^\alpha h(1-t)dt+\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_0^1 t^\alpha h(t)dt\right].
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.3 et comme $\left|f'\right|$ est une fonction h-convexe, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t^\alpha\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt+\int_0^1 (1-t)^\alpha\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t^\alpha\left(h(1-t)\left|f'(a)\right|+h(t)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 (1-t)^\alpha\left(h(1-t)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+h(t)\left|f'(b)\right|\right)dt\right] \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^\alpha h(t)dt+\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_0^1 t^\alpha h(1-t)dt\right].
\end{aligned}$$

De la même façons, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{b^{-}}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha}\left(h(1-t)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+h(t)\left|f'(b)\right|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left(h(1-t)\left|f'(a)\right|+h(t)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right] \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^{\alpha}h(1-t)dt+\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\int_0^1 t^{\alpha}h(t)dt\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

On peut utiliser l'inégalité de Hölder pour démontrer le théorème suivant

Théorème 3.9 ([13]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I$, avec $a < b$ et $f' \in L_1[a,b]$. Si $\left|f'\right|^q$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$, $p, q > 1$. Alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}^{\alpha}f(a)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}^{\alpha}f(b)\right]\right| \qquad (3.42)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'(b)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{b^{-}}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \qquad (3.43)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'(b)\right|^q+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

Lemme 3.4 ([4]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur $I^{\circ}, a, b \in I$, avec $a < b$. Si $f'' \in L_1[a,b]$. Alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\int_0^1\left(1-t^2\right)\left[f''\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)+f''\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right]dt. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(1-t^2\right) f''\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= \left[\tfrac{2}{a-b}(1-t^2)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]_0^1+\tfrac{4}{a-b}\int_0^1 tf'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= -\tfrac{2}{a-b}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{4}{a-b}\int_0^1 tf'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= -\tfrac{2}{a-b}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{4}{a-b}\Bigg(\left[\tfrac{2}{a-b}tf\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]_0^1 \\
&\quad -\tfrac{2}{a-b}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt\Bigg) \\
&= -\tfrac{2}{a-b}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{8}{(a-b)^2}f(a)-\tfrac{8}{(a-b)^2}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt.
\end{aligned}$$

Soit $x=\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b$, par conséquent $dx=\frac{a-b}{2}dt$ et on obtient

$$I_1=\tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{8}{(b-a)^2}f(a)-\tfrac{16}{(b-a)^3}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(1-t^2\right) f''\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)dt \\
&= -\tfrac{2}{b-a}f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{8}{(b-a)^2}f(b)-\tfrac{16}{(b-a)^3}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(b-a)^2}{16}\left[I_1+I_2\right] \\
&= \tfrac{(b-a)^2}{16}\left[\tfrac{8}{(a-b)^2}\left(f(a)+f(b)\right)-\tfrac{16}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx\right] \\
&= \tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.10 ([9]) *Soit $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur I° tel que $f''\in L_1[a,b]$, où $a,b\in I$, avec $a<b$. Si $\left|f''\right|^q$ pour $q>1$, avec $p=\frac{q}{q-1}$ est une fonction*

h-convexe sur $[a,b]$. Alors pour certains $t \in (0,1)$ fixé, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ &\tfrac{(b-a)^2}{16\times 2^{\frac{1}{p}}}\beta^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{1}{2},p+1\right)\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\left|f''(b)\right|^q+\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Preuve. En utilisant le Lemme (3.4) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ &\tfrac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left\{\left|f''\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|+\left|f''\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|\right\}dt \\ \leq\ &\tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\int_0^1\left(1-t^2\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\times\left[\left(\int_0^1\left|f''\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\int_0^1\left|f''\left(\tfrac{1-t}{2}a+\tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \end{aligned}$$

Comme $\left|f''\right|^q \in SX(h,I)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ &\tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\int_0^1\left(1-t^2\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1\left\{h(t)\left|f''(a)\right|^q+h(1-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\int_0^1\left\{h(t)\left|f''(b)\right|^q+h(1-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ =\ &\tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\tfrac{1}{2}\beta\left(\tfrac{1}{2},p+1\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\times\left[\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f''(b)\right|^q+\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right], \end{aligned}$$

où β est la fonction bêta définie par :

$$\beta(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt, \qquad u,v>0.$$

et

$$\int_0^1 h(t)dt=\int_0^1 h(1-t)dt.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.11 ([9]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur I° telle que $f'' \in L_1[a,b]$, où $a,b \in I$, avec $a<b$. Si $\left|f''\right|^q$ pour $q \geq 1$, est une fonction h-convexe sur $[a,b]$. Alors pour certains $t \in (0,1)$ fixé, on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \left\{\left(1-t^2\right)\left|f''(a)\right|^q + t(2-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left\{\left(1-t^2\right)\left|f''(b)\right|^q + t(2-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.4 et l'inégalité des moyens d'ordre q

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left\{\left|f''\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right| + \left|f''\left(\tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b\right)\right|\right\} dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left|f''\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left|f''\left(\tfrac{1-t}{2}a + \tfrac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

Comme $\left|f''\right|^q \in SX(h,I)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left\{h(t)\left|f''(a)\right|^q + h(1-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)\left\{h(t)\left|f''(b)\right|^q + h(1-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{16}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \left\{\left(1-t^2\right)\left|f''(a)\right|^q + t(2-t)\left|f''\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left\{\left(1-t^2\right)\left|f''(b)\right|^q + t(2-t)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.5 ([19]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^{\circ}, a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} & \tfrac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2} + \tfrac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (3.47) \\ = & \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 \left[(1-\lambda-t) f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) + (\mu-t) f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Preuve. Par intégration par parties et le changement des variables $x = ta + (1-t)\frac{a+b}{2}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-\lambda-t) f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\ = & -\tfrac{2}{b-a}\left[(1-\lambda-t) f\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt\right] \\ = & \tfrac{2}{b-a}\left[\lambda f(a) + (1-\lambda) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right] - \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx. \qquad (3.48) \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\mu-t) f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right) dt \\ = & -\tfrac{2}{b-a}\left[(\mu-t) f\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right) dt\right] \\ = & \tfrac{2}{b-a}\left[(1-\mu) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \mu f(b)\right] - \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx. \qquad (3.49) \end{aligned}$$

En ajoutant (3.48) et (3.49), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{4}$, on obtient (3.47).

■

Lemme 3.6 ([19]) *Pour $s > 0$ et $0 \leq \xi \leq 1$, on a*

$$\int_0^1 |\xi - t|^s dt = \tfrac{\xi^{s+1}+(1-\xi)^{s+1}}{s+1}$$

et

$$\int_0^1 t|\xi - t|^s dt = \tfrac{\xi^{s+2}+(s+1+\xi)(1-\xi)^{s+1}}{(s+1)(s+2)}.$$

Théorème 3.12 ([19]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^{\circ}, a, b \in I$, avec $a < b, 0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ et $f' \in L_1[a,b]$. Si $\left|f'(x)\right|^q$ pour $q \geq 1$ est une fonction convexe sur $[a,b]$.*

Alors on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\tfrac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(1-2\lambda+2\lambda^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\right. \\
&\times\left[\left(4-9\lambda+12\lambda^2-2\lambda^3\right)\left|f'(a)\right|^q+\left(2-3\lambda+2\lambda^3\right)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(1-2\mu+2\mu^2\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\left.\times\left[\left(2-3\mu+2\mu^3\right)\left|f'(a)\right|^q+\left(4-9\mu+12\mu^2-2\mu^3\right)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Preuve. Pour $q>1$, d'après le Lemme 3.5 et la convexité de $\left|f'(x)\right|^q$ sur $[a,b]$, et en utilisant l'inégalité des moyens d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2}+\tfrac{2-\lambda-\mu}{2}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1|1-\lambda-t|\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt+\int_0^1|\mu-t|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1|1-\lambda-t|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1|1-\lambda-t|\left(\tfrac{1+t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1|\mu-t|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1|\mu-t|\left(\tfrac{t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{2-t}{2}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.6, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1|1-\lambda-t|\left(\tfrac{1+t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1-t}{2}\left|f'(b)\right|^q\right)dt \\
=\ & \tfrac{1}{2}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\int_0^1|1-\lambda-t|\,dt+\tfrac{1}{2}\left(\left|f'(a)\right|^q-\left|f'(b)\right|^q\right)\int_0^1 t\,|1-\lambda-t|\,dt \\
=\ & \tfrac{1}{2}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\tfrac{1}{2}-\lambda+\lambda^2\right)+\tfrac{1}{12}\left(\left|f'(a)\right|^q-\left|f'(b)\right|^q\right)\left[(1-\lambda)^3+(3-\lambda)\lambda^2\right] \\
=\ & \tfrac{1}{12}\left(4-9\lambda+12\lambda^2-2\lambda^3\right)\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1}{12}\left(2-3\lambda+2\lambda^3\right)\left|f'(b)\right|^q, \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1|\mu-t|\left(\tfrac{t}{2}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{2-t}{2}\left|f'(b)\right|^q\right)dt \\
=\ & \tfrac{1}{2}\left(\left|f'(a)\right|^q-\left|f'(b)\right|^q\right)\int_0^1 t\,|\mu-t|\,dt+\left|f'(b)\right|^q\int_0^1|\mu-t|\,dt \\
=\ & \tfrac{1}{12}\left[\mu^3+(1-\mu)^2(2+\mu)\right]\left(\left|f'(a)\right|^q-\left|f'(b)\right|^q\right)+\left(\frac{1}{2}-\mu+\mu^2\right)\left|f'(b)\right|^q \\
=\ & \tfrac{1}{12}\left(2-3\mu+2\mu^3\right)\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1}{12}\left(4-9\mu+12\mu^2-2\mu^3\right)\left|f'(b)\right|^q. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

En substituant (3.52) et (3.53) dans (3.51) et en utilisant le Lemme 3.6, on obtient (3.50) pour $q > 1$.

Pour $q = 1$, d'après les Lemmes 3.5 et 3.6 il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\lambda f(a)+\mu f(b)}{2} + \tfrac{2-\lambda-\mu}{2} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left[\int_0^1 |1-\lambda-t|\left(\tfrac{1+t}{2}\left|f'(a)\right| + \tfrac{1-t}{2}\left|f'(b)\right|\right)dt \right. \\
&\left. + \int_0^1 |\mu-t|\left(\tfrac{t}{2}\left|f'(a)\right| + \tfrac{2-t}{2}\left|f'(b)\right|\right)dt\right] \\
=\ & \tfrac{b-a}{48}\left[\left(4-9\lambda+12\lambda^2-2\lambda^3\right)\left|f'(a)\right| + \left(2-3\lambda+2\lambda^2\right)\left|f'(b)\right| \right. \\
&\left. + \left(2-3\mu+2\mu^2\right)\left|f'(a)\right| + \left(4-9\mu+12\mu^2-2\mu^3\right)\left|f'(b)\right|\right].
\end{aligned}$$

qui est équivalente à (3.50) pour $q = 1$. D'où le résultat. ■

Chapitre 4

Applications

Dans cette section, nous présentons certaines applications des résultats ci-dessus

4.0.1 Application 1

Considérons les moyens spéciaux suivants :

a). La moyenne arithmétique :

$$A = A(a,b) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0.$$

b). La moyenne géométrique :

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab}, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0.$$

c). La moyenne harmonique :

$$H = H(a,b) = \tfrac{2ab}{a+b}, \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0.$$

d). La moyenne logarithmique :

$$L(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } \ a = b \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & \text{si } \ a \neq b, \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0.$$

e). La moyenne identrique :

$$I(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } \ a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & \text{si } \ a \neq b, \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0.$$

f). La moyenne logarithmique généralisée :

$$L_n(a,b)=\begin{cases} a & \text{si } a=b \qquad a,b\in\mathbb{R},\quad a,b>0,\\ \left[\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{n}}, & \text{si } a\neq b, \qquad n\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}.\end{cases}$$

Proposition 4.1 *Soit $q>1$, avec $q(p-1)=p$, $0<a<b$ et $h(t)=t$, alors*

$$\begin{aligned}&|L(a,b)-A(a,b)|\\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{16}\beta^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2},p+1\right)A\left(\left(a^q+G^q(a,b)\right)^{\frac{1}{q}},\left(b^q+G^q(a,b)\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Preuve. La preuve découle du Théorème 3.10, en prenant $f(x)=e^x$. ■

Proposition 4.2 *Soient $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ et $0<a<b$, alors*

$$\begin{aligned}&|A(a^n,b^n)-L_n^n(a,b)|\\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{12}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}A\left(\left(\frac{3a^{n-2}+5A^{n-2}(a,b)}{8}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{3b^{n-2}+5A^{n-2}(a,b)}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Preuve. La preuve découle du Théorème 3.11 en prenant $f(x)=x^n$ et $h(t)=t$. ■

4.0.2 Application 2

En appliquant le Théorème 3.12 pour $f(x)=x^s$ avec $s\neq 0$ et $x>0$, on obtient le théorème suivant

Théorème 4.1 *Soient $a,b>0, q\geq 1$, soit $s>1$ et $(s-1)q\geq 1$ où $s<0$, alors*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{A(a^s,b^s)+A^s(a,b)}{2}-L^s(a,b)\right|\\ \leq\ & \frac{b-a}{16}|s|^q\left[\frac{1}{4(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\\ &\times\left\{\left[(2q+5)a^{(s-1)q}+(2q+3)b^{(s-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\ &+\left[a^{(s-1)q}+(4q+7)b^{(s-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[(4q+5)a^{(s-1)q}+b^{(s-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\\ &\left.+\left[(2q+3)a^{(s-1)q}+(2q+5)b^{(s-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

En particulier, si $s\geq 2$ où $s<0$, alors

$$\left|\frac{A(a^s,b^s)+A^s(a,b)}{2}-L^s(a,b)\right|\leq\frac{b-a}{8}|s|A\left(a^{s-1},b^{s-1}\right).$$

En prenant $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$ dans le Théorème 3.11 on a le théorème suivant

Théorème 4.2 *Pour $a, b > 0$ et $q \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\ln G(a,b)+\ln A(a,b)}{2} - \ln I(a,b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left[\tfrac{1}{4(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left(\tfrac{2q+5}{a^q}+\tfrac{2q+3}{b^q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{1}{a^q}+\tfrac{4q+7}{b^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{4q+7}{a^q}+\tfrac{1}{b^q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{2q+3}{a^q}+\tfrac{2q+5}{b^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

En particulier

$$\left|\tfrac{\ln G(a,b)+\ln A(a,b)}{2} - \ln I(a,b)\right| \leq \tfrac{b-a}{8}\tfrac{1}{H(a,b)}.$$

Conclusion

Ce travail est basé sur des outils d'analyse mathématique pour étudier des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard qui nous donnent des estimations de la valeur moyenne pour les fonctions convexe et h-convexe via l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

Bibliographie

[1] H. Alzer, A superadditive property of Hadamard's gamma function. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 79 (2009), no. 1, 11–23.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23(37) (1978), 13–20.

[3] M. Bombardelli and S. Varošanec, Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities. Comput. Math. Appl. 58 (2009), no. 9, 1869–1877.

[4] A. Barani, S. Barani, and S. S. Dragomir, "Refinements of Hermite-Hadamard type inequality for functions whose second derivatives absolute values are quasiconvex," RGMIA Research Report Collection, vol. 14, article 69, 2011.

[5] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[6] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, The Hadamard inequalities for \$s\$-convex functions in the second sense. Demonstratio Math. 32 (1999), no. 4, 687–696.

[7] L. Fejer, Über die Fourierreihen II, Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss., 24 (1906), 369–390 (in Hungarian).

[8] E. K. Godunova, and V. I. Levin, Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžašcego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, in : Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 1985, pp. 138–142.

[9] M. Iqbal, M. Muddassar, and M. Iqbal Bhatti,On Hermite-Hadamrd Type Inequalities Via h-Convexity, arXiv preprint arXiv :1511.05281, 2015-arXiv.org.

[10] B. Jagers, On Hadamard-type inequality for s-convex functions, Online : http ://www3.cs.utwente.nl/~jagersaa/alphaframes/Alpha.pdf.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, heory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[12] M. Matloka, Some inequalities of Hadamard type for mappings whose second derivatives are h-convex via fractional integrals. J. Fract. Calc. Appl. 6 (2015), no. 1, 110–117.

[13] M. Matloka, Hermite-Hadamard type inequalities for fractipnal integrals, RGMIA Res.Rep.Coll.20 (2017),1-11.

[14] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[15] M. Z. Sarıkaya, A. Saglam and H. Yıldırım, On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions. J. Math. Inequal. 2 (2008), no. 3, 335–341.

[16] M. Z. Sarıkaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Başak, Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling. 57 (2013), no 9-10, 2403-2407.

[17] M. Tunç, On new inequalities for h-convex functions via Riemann-Liouville fractional integration. Filomat 27 (2013), no. 4, 559–565.

[18] S. Varošanec, On h-convexity. J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 303–311.

[19] B. Y. Xi, F. Qi, Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications to means. J. Funct. Spaces Appl. 2012, Art. ID 980438, 14 pp.