République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

Melle Merrouche Chayma

Intitulé

Quelques inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions n-fois différentiables

Dirigé par : Badreddine Meftah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Merad Meriem	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah Badreddine	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Aries Med Salah	MCB	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Dédicace

Je commence mes dédicaces au nom de Dieu et puis de son prophète Mohamed.

Je tiens à dédier ce modeste travail

Aux êtres les plus chers à mes yeux qui m'ont soutenu durant toutes mes études à savoir : À mon très cher père « Que dieu aie son âme »

Et particulièrement à ma très chère maman qui a toujours été là pour moi

À ma chère sœur « Ilhem », Et mon frère « Med.Nadir »

À mes tantes et mes oncles, et spécialement mon oncle « Noureddine » et sa femme « Nabila »

À mes cousins et mes cousines

À toute personne qui a participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail « Dr.Meftah » et mes chers collègues « Nébras et Khawla »

À tous mes amis de promotion de 2 éme année Master en Mathématiques

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

Spécialement « Nébras »

A tous ceux qui me sont chers je dédie ce modeste travail.

Remerciement

Au nom de Dieu, le plus gracieux, le plus miséricordieux.

Qui m'a donné la force, le courage, et la déterminationNécessaire pour terminer ce travail.

*J'exprime toute ma gratitude à.**Dr.Meftah Badreddine.** Pour m'avoir proposé ce sujet et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée, à.**Dr. Merad Meriem** Pour avoir accepté de présider le jury, et à **Dr. Aries Med Salah .**Pour avoir accepté d'en faire partie.*

Mes sincères remerciment à tous les enseignants du département de Mathématique sans oublier ceux que nous avons perdus cette année

Mes collègues, ma famille et tout le monde Ceux qui m'ont aidé et soutenu de près ou de loin tout au long de ce travail.

Chayma.

Abstract

In this thesis, we will focus on the study of integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for n-times differentiable functions.

In the first chapter, we recall some definitions of classical convexity, as well as some integral identities which we will invoke in the sequel.

In the second chapter, we cite some results already known in the literature on these types of inequalities.

The last chapter will be entirely devoted to the new results of the type of inequality previously mentioned. We note that we have submitted three papers for possible publication in international journals.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, log-convex functions, s-convex functions, m-convexe functions

ملخص

في هذه الأطروحة ، سوف نركّز على دراسة عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

في الفصل الأول، نذكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، بالإضافة إلى بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكّر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

في حين أن الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة لعدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

.

كلمات مفتاحية

عدم مساواة هولدر، الدوال المحدبة، عدم مساواة من نوع هرميت هدامار

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions n-fois différentiables.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la convexité classique ainsi que quelques identités intégrales que nous utiliserons ci-dessous.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement dévoué aux nouvelles inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard.

Nous mentionnons que nous avons soumis trois papiers pour d'éventuelles publications dans des revues internationales.

Mots clés: Inégalité intégrales de type Hermite-Hadamard, inégalité de Hölder, fonctions log-convexes, fonctions s-convexes, fonctions m- convexes.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [11, 12, 13].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard dont les dérivées d'ordre supérieur jouissent d'un certain type de convexité et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales et inégalités utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard dont les dérivées d'ordre n sont s-convexes au second sens, convexes et m-convexes.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard n-fois différentiables dans ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication internationale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [14].

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([8]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([14]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq tf\left(x\right) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([14]) *Une fonction strictement positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite logarithmique convexe, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq \left[f\left(x\right)\right]^t \left[f\left(y\right)\right]^{1-t}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.4 ([5]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *est dite* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0, 1]$, *si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

Définition 1.5 ([16]) *Une fonction* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, *est dite* m*-convexe où* $m \in (0, 1]$, *si*

$$f\left(tx + m\left(1-t\right)y\right) \leq tf(x) + m(1-t)\ f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

1.1 Quelques fonctions spéciales

1.1.1 Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.6 ([3]) *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.1 *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Remarque 1.2 *Pour* $z \in \mathbb{N}$, *on a* $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z-1)$.

1.1.2 Fonction bêta

Définition 1.7 ([15]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par*

$$B\left(x,y\right)=\int\limits_{0}^{1}t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}dt.$$

Remarque 1.3 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante*

$$B\left(x,y\right)=\tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.2 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([7]) *Soit $\mu>0,\mu\neq1$ et $n\in\mathbb{N}$, alors*

$$\int_{0}^{1}t^{n}\mu^{t}dt=\tfrac{(-1)^{n+1}n!}{(\ln\mu)^{n+1}}+n!\mu\sum_{k=0}^{n}\tfrac{(-1)^{k}}{(n-k)!(\ln\mu)^{k+1}}.$$

Lemme 1.2 ([6]) *Si $f^{(n)}\left(x\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$, existe et intégrable sur $[a,b]$, alors*

$$\begin{aligned}&\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\tfrac{(k-1)(b-a)^{k}}{2(k+1)!}f^{(k)}\left(a\right)\\=&\tfrac{(b-a)^{n}}{2n!}\int_{0}^{1}t^{n-1}\left(n-2t\right)f^{(n)}\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt,\end{aligned}\tag{1.1}$$

où la somme est considérée nulle si elle est vide.

Lemme 1.3 ([2]) *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable telle que $f^{(n-1)}\left(t\right)$ est absolument continue sur $[a,b]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors l'identité*

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx&=\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(b-t)^{k+1}+(-1)^{k}(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}\left(t\right)\\&\quad+\left(-1\right)^{n}\int_{a}^{b}K_{n}\left(t,x\right)f^{(n)}\left(x\right)dx\end{aligned}\tag{1.2}$$

est satisfaite pour tout $t \in [a,b]$, *où* $K_n : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est le noyau de Peano et défini par*

$$K_n(t,x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^n}{n!}, x \in [a,t], \\ \frac{(b-x)^n}{n!}, x \in (t,b]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Lemme 1.4 ([9]) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que la dérivé* $f^{(n-1)}$ $(n \geq 1)$ *est absolument continue sur* $[a,b]$, $a < b$. *Alors pour tous* $x \in [a,b]$ *et* $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *on a*

$$C(f,x,n,\lambda) = \int_a^b k_n(x,t) f^{(n)}(t)\, dt, \tag{1.4}$$

où

$$\begin{aligned} C(f,x,n,\lambda) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(n-p)!(b-a)^p} \left(\left(\left(\lambda - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-p} - (-1)^{n-p}(1-\lambda)^{n-p} \right) \right. \\ &\quad \times f^{(n-1-p)}((1-\lambda)a + \lambda b) - \left(\left(\frac{b-x}{b-a} - \lambda\right)^{n-p} - (1-\lambda)^{n-p} \right) \\ &\quad \left. \times\, f^{(n-1-p)}(\lambda a + (1-\lambda)b) \right) + \frac{(-1)^n}{(b-a)^n} \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $k_n(x,t) : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est donné par*

$$k_n(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n & si\ t \in [a, \lambda a + (1-\lambda)b), \\ \frac{1}{n!}\left(\frac{t-x}{b-a}\right)^n & si\ t \in [\lambda a + (1-\lambda)b, (1-\lambda)a + \lambda b), \\ \frac{1}{n!}\left(\frac{t-b}{b-a}\right)^n & si\ t \in [(1-\lambda)a + \lambda b, b]. \end{cases}$$

Lemme 1.5 ([17]) *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction n-fois différenciable. Si* $a, b \in I$ *avec* $a < b$ *et* $f^{(n)}(x) \in L^1[a,b]$, *alors*

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b) \\ = &\frac{(-1)^n (b-a)^n}{2n!} \int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2) f^{(n)}(ta+(1-t)b)\, dt, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où une somme vide est considérée comme nulle.

1.3 Inégalité d'Hermite-Hadamard

Nous rappelons la fameuse inégalité dite d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes puis nous exposerons sa généralisation pour les fonctions s-convexes

Théorème 1.1 ([12]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction convexe, alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Théorème 1.2 ([4]) *Supposons que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction s-convexe au second sens, où $s \in (0, 1)$ et $a, b \in [0, \infty)$ tel que $a < b$. Si $f \in L^1([a, b])$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{1.6}$$

1.4 Inégalité de Hölder et Inégalité des moyens d'ordre q

Théorème 1.3 ([11]) *Soit $p > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.4 ([1]) *Soient $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et $p = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ deux strictement positives n-uplet et soit $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par p*

est définie par

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \textit{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \textit{pour } q = 0, \\ \min\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & \textit{pour } q = -\infty, \\ \max\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & \textit{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$*, on a*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Théorème 1.5 ([1]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$*, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard

Dans ce chapitre, nous verrons en détail certains résultats provenant des articles [6, 9, 17].

2.1 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les dérivées d'ordre n sont s-convexe au second sens

Théorème 2.1 ([6]) *Soit f une fonction n-fois différentiable sur $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ telle que $\left|f^{(n)}\right|^p$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $n \geq 2$ et $p \geq 1$, alors*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx - \sum_{k=2}^{n-1} \tfrac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!} f^{(k)}\left(a\right)\right| \\ \leq \;& \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[P\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^p + Q\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec

$$P=\tfrac{n(n-1)+s(n-2)}{(n+s)(n+s+1)},\quad Q=nB\left(n,s+1\right)-2B\left(n+1,s+1\right), \tag{2.2}$$

où $B\left(.,.\right)$ est la fonction de bêta.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.2, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx-\sum_{k=2}^{n-1}\tfrac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}\left(a\right)\right|\\
\leq\ &\tfrac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 t^{n-1}\left(n-2t\right)\left|f^{(n)}\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\right|dt. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Si $p=1$, puisque $\left|f^{(n)}\right|$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f^{(n)}\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\right|\leq t^s\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\left(1-t\right)^s\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|. \tag{2.4}$$

En multipliant les deux côtés de (2.4) par le facteur $t^{n-1}\left(n-2t\right)$, puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à $t\in(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{n-1}\left(n-2t\right)\left|f^{(n)}\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\right|dt\\
\leq\ &\int_0^1 t^{n-1}\left(n-2t\right)\left[t^s\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\left(1-t\right)^s\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\right]dt\\
=\ &\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|\int_0^1 t^{s+n-1}\left(n-2t\right)dt+\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\int_0^1 t^{n-1}\left(n-2t\right)\left(1-t\right)^s dt\\
=\ &\tfrac{n(n-1)+s(n-2)}{(n+s)(n+s+1)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left[n\int_0^1 t^{n-1}\left(1-t\right)^s dt-2\int_0^1 t^n\left(1-t\right)^s dt\right]\\
=\ &\tfrac{n(n-1)+s(n-2)}{(n+s)(n+s+1)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\left[nB\left(n,s+1\right)-2B\left(n+1,s+1\right)\right]\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|.
\end{aligned}$$

La preuve pour le cas $p=1$ est complète.

Lorsque $p > 1$, par le biais de l'inégalité des moyens d'ordre q, (2.3) donne

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt \\
\leq\ & \left[\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\,dt\right]^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times\left[\int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

En utilisant la s-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^p$, de (2.5) on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^p dt \\
\leq\ & \int_0^1 t^{n-1}(n-2t)\left[t^s\left|f^{(n)}(a)\right|^p+(1-t)^s\left|f^{(n)}(b)\right|^p\right]dt \qquad (2.6)\\
=\ & P\left|f^{(n)}(a)\right|^p+Q\left|f^{(n)}(b)\right|^p.
\end{aligned}$$

Où P et Q sont définis dans (2.2).

Combinant (2.3), (2.5) et (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{k=2}^{n-1}\tfrac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[P\left|f^{(n)}(a)\right|^p+Q\left|f^{(n)}(b)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.1 ([6]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, et si* $\left|f^{(n)}\right|^p$ *est convexe sur* $[a,b]$ *et* $n \geq 2$, *on a*

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{k=2}^{n-1}\tfrac{(k-1)(b-a)^k}{2(k+1)!}f^{(k)}(a)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(n-1)^{1-\frac{1}{p}}(b-a)^n}{2(n+1)!}\left[\tfrac{\left(n^2-2\right)\left|f^{(n)}(a)\right|^p+n\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{n+2}\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

De plus, si on prend $n = 2$, on obtient

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{|f''(a)|^p + |f''(b)|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 2.2 ([6]) *Soit f une fonction n-fois différentiable sur $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ telle que $\left|f^{(n)}\right|^p$ est s-convexe sur $[a, b]$ pour $p \geq 1$, alors*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\ \leq\ & M \left[N \left|f^{(n)}(a)\right|^p + \frac{2}{n+s+1} \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p + N \left|f^{(n)}(b)\right|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$M = \frac{1}{2n!} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \quad et \quad N = B(n+1, s+1). \tag{2.8}$$

Preuve. On choisit $t = \frac{a+b}{2}$ dans le Lemme 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ =\ & \frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)n!} \int_a^b S(x) f^{(n)}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$S(x) = \begin{cases} (x-a)^n, x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ (b-x)^n, x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

En appliquant la valeur absolue aux deux membres de (2.9), on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\ \leq\ & \frac{1}{(b-a)n!} \int_a^b |S(x)| \left|f^{(n)}(x)\right| dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Lorsque $p > 1$, l'application de l'inégalité des moyens d'ordre q à (2.10) donne

$$\int_a^b |S(x)| \left|f^{(n)}(x)\right| dx \leq \left[\int_a^b |S(x)|\, dx\right]^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |S(x)| \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned}\int_a^b |S(x)| \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx &= \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx \\ &\quad + \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx.\end{aligned}$$

En utilisant la s-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^p$, on a

$$\begin{aligned}&\int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx \\ &= \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left|f^{(n)}\left(\left[\frac{\frac{(a+b)}{2}-x}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right] a + \left[\frac{x-a}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right] \frac{a+b}{2}\right)\right|^p dx \\ &\leq \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left\{\left[\frac{\frac{(a+b)}{2}-x}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right]^s \left|f^{(n)}(a)\right|^p \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{x-a}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right]^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p\right\} dx \\ &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^s \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left\{\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^s \left|f^{(n)}(a)\right|^p \right. \\ &\quad \left. + (x-a)^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p\right\} dx\end{aligned} \tag{2.12}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left|f^{(n)}(x)\right|^p dx \\ &\leq \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left\{\left[\frac{b-x}{b-\frac{(a+b)}{2}}\right]^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p + \left[\frac{x-\frac{(a+b)}{2}}{b-\frac{(a+b)}{2}}\right]^s \left|f^{(n)}(b)\right|^p\right\} dx \\ &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^s \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left\{(b-x)^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^s \left|f^{(n)}(b)\right|^p\right\} dx.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{aligned}
& \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^{s} \int_{a}^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^{n} \left(\tfrac{a+b}{2}-x\right)^{s} dx \\
= & \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^{s} \int_{0}^{\frac{(b-a)}{2}} t^{n} \left(\tfrac{b-a}{2}-t\right)^{s} dt \\
= & \int_{0}^{\frac{(b-a)}{2}} t^{n} \left(1-\tfrac{2t}{b-a}\right)^{s} dt \\
= & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} \int_{0}^{1} u^{n} (1-u)^{s} du \\
= & \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} B(n+1, s+1).
\end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\left(\tfrac{2}{b-a}\right)^{s} \int_{\frac{(a+b)}{2}}^{b} (b-x)^{n} \left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^{s} dx = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} B(n+1, s+1).$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
& \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^{s} \left[\int_{a}^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^{n} (x-a)^{s} dx + \int_{\frac{(a+b)}{2}}^{b} (b-x)^{n} (b-x)^{s} dx\right] \\
= & \tfrac{2}{n+s+1} \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

et

$$\int_{a}^{b} |S(x)| \, dx = \tfrac{2}{n+1} \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Une combinaison des arguments ci-dessus en déduit l'inégalité (2.7) pour $p > 1$.

Lorsque $p = 1$, de (2.10), on a

$$\begin{aligned}
& \int_{a}^{b} |S(x)| \left|f^{(n)}(x)\right| dx \\
= & \int_{a}^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^{n} \left|f^{(n)}(x)\right| dx + \int_{\frac{(a+b)}{2}}^{b} (b-x)^{n} \left|f^{(n)}(x)\right| dx.
\end{aligned}$$

Par la s-convexité de $\left|f^{(n)}\right|$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left|f^{(n)}(x)\right| dx \\
\leq & \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left\{ \left[\frac{\frac{(a+b)}{2}-x}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right]^s \left|f^{(n)}(a)\right| + \left[\frac{x-a}{\frac{(a+b)}{2}-a}\right]^s \left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \right\} dx \\
= & \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^s \int_a^{\frac{(a+b)}{2}} (x-a)^n \left[\left(\tfrac{a+b}{2}-x\right)^s \left|f^{(n)}(a)\right| + (x-a)^s \left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right] dx,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left|f^{(n)}(x)\right| dx \\
\leq & \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left\{ \left[\frac{b-x}{b-\frac{(a+b)}{2}}\right]^s \left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \left[\frac{x-\frac{(a+b)}{2}}{b-\frac{(a+b)}{2}}\right]^s \left|f^{(n)}(b)\right| \right\} dx \\
= & \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^s \int_{\frac{(a+b)}{2}}^b (b-x)^n \left[(b-x)^s \left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^s \left|f^{(n)}(b)\right|\right] dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant les mêmes méthodes dans la démonstration pour le cas de $p > 1$, on obtient l'inégalité (2.7) pour $p = 1$. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.2 ([6]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, et si* $\left|f^{(n)}\right|^p$ *est convexe sur* $[a,b]$ *et* $n \geq 2$, *on a*

$$\begin{aligned}
& \left| \tfrac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} f^{(k)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \\
\leq & \frac{M}{(n+2)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{n+1} + 2\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^p + \frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{n+1} \right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

où

$$M = \tfrac{1}{2n!} \left(\tfrac{2}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^n.$$

De plus, si en prend $n = 1$, on obtient

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{b-a}{4} \left[\tfrac{|f'(a)|^p + 4\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^p + |f'(b)|^p}{6} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Corollaire 2.3 ([6]) *Sous les hypothèses du Corollaire 2.2, et tenant compte du fait que*

$$\left| f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^p \leq \tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p + \left|f^{(n)}(b)\right|^p}{2},$$

on a

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} f^{(k)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2^n(n+1)!} \left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p + \left|f^{(n)}(b)\right|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De plus si en prend $n = 2$, on trouve

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{24} \left[\tfrac{|f''(a)|^p + |f''(b)|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

2.2 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les dérivées d'ordre n sont convexes

Théorème 2.3 ([9]) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f^{(n-1)}$ soit absolument continue sur $[a,b]$, où $a<b$. Si $\left|f^{(n)}\right|$ est convexe, alors l'inégalité*

$$\begin{aligned}
|C(f,x,n,\lambda)| \leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{(n+2)!}\left|f^{(n)}(a)\right| + \tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)^{n+1}+(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(n+2)(b-a)^{n}} \\
& \times\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right| + \tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}+((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{(n+2)!(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}(x)\right| \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}+(1-\lambda)^{n+1}(b-a)^{n+1}}{n!(n+2)(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right| \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{(n+2)!}\left|f^{(n)}(b)\right|
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [\lambda a+(1-\lambda)b, (1-\lambda)a+\lambda b]$ et tout $\lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Preuve. En utilisant le Lemme 1.4, et la valeur absolue, on a

$$\begin{aligned}
& |C(f,x,n,\lambda)| \\
\leq\ & \int_a^b |k_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt \\
=\ & \tfrac{1}{(b-a)^n}\int_a^{\lambda a+(1-\lambda)b}\tfrac{(t-a)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\tfrac{1}{(b-a)^n}\int_{\lambda a+(1-\lambda)b}^{x}\tfrac{(x-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt \\
& +\tfrac{1}{(b-a)^n}\int_x^{(1-\lambda)a+\lambda b}\tfrac{(t-x)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\tfrac{1}{(b-a)^n}\int_{(1-\lambda)a+\lambda b}^{b}\tfrac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt \\
=\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\int_0^1\alpha^n\left|f^{(n)}((1-\alpha)a+\alpha(\lambda a+(1-\lambda)b))\right|d\alpha \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n}\int_0^1(1-\alpha)^n\left|f^{(n)}((1-\alpha)(\lambda a+(1-\lambda)b)+\alpha x)\right|d\alpha \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n}\int_0^1\alpha^n\left|f^{(n)}((1-\alpha)x+\alpha((1-\lambda)a+\lambda b))\right|d\alpha \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!}\int_0^1(1-\alpha)^n\left|f^{(n)}((1-\alpha)((1-\lambda)a+\lambda b)+\alpha b)\right|d\alpha.
\end{aligned}$$

Par la convexité de $\left|f^{(n)}\right|$, on en déduit

$$\begin{aligned}
& \left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!} \\
& \times\left(\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|\int_0^1\left(1-\alpha\right)\alpha^n d\alpha+\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|\int_0^1\alpha^{n+1}d\alpha\right) \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n} \\
& \times\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|\int_0^1\left(1-\alpha\right)^{n+1}d\alpha+\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\int_0^1\alpha\left(1-\alpha\right)^n d\alpha\right) \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n} \\
& \times\left(\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\int_0^1\left(1-\alpha\right)\alpha^n d\alpha+\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|\int_0^1\alpha^{n+1}d\alpha\right) \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!} \\
& \times\left(\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|\int_0^1\left(1-\alpha\right)^{n+1}d\alpha+\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\int_0^1\alpha\left(1-\alpha\right)^n d\alpha\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{(n+2)!}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{(n+2)!}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right| \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)^{n+1}+(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(n+2)(b-a)^n}\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right| \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}+((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{(n+2)!(b-a)^n}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right| \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}+(1-\lambda)^{n+1}(b-a)^{n+1}}{n!(n+2)(b-a)^n}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.4 ([9]) *Si on pose $\lambda = 1$ dans le Théorème 2.3, on obtient l'inégalité des trapèzes généralisée pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
& \left|\sum_{p=0}^{n-1}\tfrac{(b-x)^{n-p}f^{(n-1-p)}(b)}{(n-p)!}-\left(-1\right)^{n-p}\tfrac{(x-a)^{n-p}f^{(n-1-p)}(a)}{(n-p)!}+\left(-1\right)^n\int_a^b f\left(t\right)dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{n+1}}{n!(n+2)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|+\tfrac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{(n+2)!}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|+\tfrac{(b-x)^{n+1}}{n!(n+2)}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|.
\end{aligned}$$

De plus, si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{p=0}^{n-1} \tfrac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!2^{n-p}} \left(f^{(n-1-p)}(b) - (-1)^{n-p} f^{(n-1-p)}(a)\right) + (-1)^n \int_a^b f(t)\, dt\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^{n+1}}{n!(n+2)2^{n+1}} \left|f^{(n)}(a)\right| + \tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+2)!2^n} \left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \tfrac{(b-a)^{n+1}}{n!(n+2)2^{n+1}} \left|f^{(n)}(b)\right|. \end{aligned}$$

Corollaire 2.5 ([9]) *Si on choisit* $\lambda = \frac{1}{2}$ *dans le Théorème 2.3, on obtient l'inégalité du point milieu pour les fonctions dont la dérivée d'ordre* n *est convexe :*

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{p=0}^{n-1} \tfrac{1-(-1)^{n-p}}{(n-p)!(b-a)^p 2^{n-p}} f^{(n-1-p)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{(-1)^n}{(b-a)^n} \int_a^b f(t)\, dt\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{(n+2)!2^{n+1}} \left(\left|f^{(n)}(a)\right| + 2(n+1)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right). \end{aligned}$$

Corollaire 2.6 ([9]) *Si on pose* $x = \frac{a+b}{2}$ *et* $\lambda = \frac{2}{3}$ *dans le Théorème 2.3, on obtient l'inégalité de Newton-cotes ouverte à deux points pour les fonctions dont la dérivée d'ordre* n *est convexe :*

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{p=0}^{n-1} \tfrac{\left(1-(-1)^{n-p}2^{n-p}\right)}{(n-p)!(b-a)^p 6^{n-p}} \left(f^{(n-1-p)}\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) - (-1)^{n-p} f^{(n-1-p)}\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right) + \tfrac{(-1)^n}{(b-a)^n} \int_a^b f(t)\, dt\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{(n+2)!6^{n+1}} \left(2^{n+1}\left|f^{(n)}(a)\right| + (n+1)\left(2^{n+1}+1\right)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|\right. \\ & \left. + 2\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| (n+1)\left(2^{n+1}+1\right)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right| + 2^{n+1}\left|f^{(n)}(b)\right|\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.4 ([9]) *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $f^{(n-1)}$ *soit absolument continue sur* $[a, b]$*, où* $a < b$*. Si* $\left|f^{(n)}\right|^q$ *est convexe où* $q > 1$*, alors*

$$\begin{aligned} |C(f, x, n, \lambda)| \leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left(\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(\lambda a + (1-\lambda) b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n (np+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left(\left|f^{(n)}(\lambda a + (1-\lambda) b)\right|^q + \left|f^{(n)}(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n (np+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left(\left|f^{(n)}(x)\right|^q + \left|f^{(n)}((1-\lambda) a + \lambda b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \left(\left|f^{(n)}((1-\lambda) a + \lambda b)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tous $x \in [\lambda a+(1-\lambda)b,(1-\lambda)a+\lambda b]$, $\lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ *et* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.4 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left|C(f,x,n,\lambda)\right| \\
\leq\; & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 \alpha^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)a+\alpha(\lambda a+(1-\lambda)b)\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left(\int_0^1(1-\alpha)^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)(\lambda a+(1-\lambda)b)+\alpha x\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left(\int_0^1 \alpha^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)x+\alpha((1-\lambda)a+\lambda b)\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!}\left(\int_0^1(1-\alpha)^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)((1-\lambda)a+\lambda b)+\alpha b\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\; & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)a+\alpha(\lambda a+(1-\lambda)b)\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)(\lambda a+(1-\lambda)b)+\alpha x\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)x+\alpha((1-\lambda)a+\lambda b)\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left((1-\alpha)((1-\lambda)a+\lambda b)+\alpha b\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\left|f^{(n)}\right|^q$est convexe, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
& \left|C(f,x,n,\lambda)\right| \\
\leq\; & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^q\int_0^1(1-\alpha)d\alpha+\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q\int_0^1\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q\int_0^1(1-\alpha)d\alpha+\left|f^{(n)}(x)\right|^q\int_0^1\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}(x)\right|^q\int_0^1(1-\alpha)d\alpha+\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q\int_0^1\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\right|^{q}\int_0^1(1-\alpha)\,d\alpha+\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\int_0^1\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui donne le résultat souhaité après de simples calculs. ■

Corollaire 2.7 ([9]) *Si on pose $\lambda = 1$ dans le Théorème 2.4, on obtient l'inégalité des trapèzes généralisée pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-p}f^{(n-1-p)}(b)-(-1)^{n-p}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-p}f^{(n-1-p)}(a)}{(n-p)!(b-a)^{p}}+\frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(np+1)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(x)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(np+1)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}}}\left(\left|f^{(n)}(x)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.8 ([9]) *Si on pose $\lambda = \frac{1}{2}$ dans le Théorème 2.4, on obtient l'inégalité du point milieu pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\left(1-(-1)^{n-p}\right)}{(n-p)!(b-a)^{p}2^{n-p}}f^{(n-1-p)}\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}2^{n+1+\frac{1}{q}}}\left(\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.9 ([9]) *Si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, et $\lambda = \frac{2}{3}$ dans le Théorème 2.4, on obtient l'inégalité de Newton-Cotes ouverte à deux points pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}-(-1)^{n-p}\right)\left(f^{(n-1-p)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)-(-1)^{n-p}f^{(n-1-p)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right)}{(n-p)!(b-a)^{p}3^{n-p}}+\frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2^{\frac{1}{q}}\times 3^{n+1}n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\left|f^{(n)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{2^{\frac{1}{q}}\times 6^{n+1}n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{2^{\frac{1}{q}}\times 6^{n+1}n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{2^{\frac{1}{q}}\times 3^{n+1}n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.5 ([9]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.4, l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^{q}+\tfrac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\tfrac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|^{q}+\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}+\tfrac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\tfrac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|^{q}+\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tous $x\in\left[\lambda a+\left(1-\lambda\right)b,\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right]$ *avec* $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Preuve. En utilisant le Lemme 1.4 et l'inégalité des moyens d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\alpha\right)a+\alpha\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right)\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left(\int_{0}^{1}\left(1-\alpha\right)^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_{0}^{1}\left(1-\alpha\right)^{n}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\alpha\right)\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)+\alpha x\right)\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\alpha\right)x+\alpha\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right)\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!}\left(\int_{0}^{1}\left(1-\alpha\right)^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_{0}^{1}\left(1-\alpha\right)^{n}\left|f^{(n)}\left(\left(1-\alpha\right)\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)+\alpha b\right)\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \\
& \times \left(\int_0^1 \alpha^n \left| f^{(n)} \left((1-\alpha) a + \alpha \left(\lambda a + (1-\lambda) b \right) \right) \right|^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.16) \\
& + \tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n (n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \\
& \times \left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \left| f^{(n)} \left((1-\alpha) \left(\lambda a + (1-\lambda) b \right) + \alpha x \right) \right|^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n (n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\int_0^1 \alpha^n \left| f^{(n)} \left((1-\alpha) x + \alpha \left((1-\lambda) a + \lambda b \right) \right) \right|^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \\
& \times \left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \left| f^{(n)} \left((1-\alpha) \left((1-\lambda) a + \lambda b \right) + \alpha b \right) \right|^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} . \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

En utilisant la convexité de $\left| f^{(n)} \right|^q$, (2.16) donne

$$
\begin{aligned}
& \left| C \left(f, x, n, \lambda \right) \right| \\
\leq \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \\
& \times \left(\left| f^{(n)} (a) \right|^q \int_0^1 (1-\alpha) \alpha^n d\alpha + \left| f^{(n)} \left(\lambda a + (1-\lambda) b \right) \right|^q \int_0^1 \alpha^{n+1} d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n (n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\left| f^{(n)} \left(\lambda a + (1-\lambda) b \right) \right|^q \int_0^1 (1-\alpha)^{n+1} d\alpha \right. \\
& \left. + \left| f^{(n)} (x) \right|^q \int_0^1 (1-\alpha)^n \alpha d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} + \tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n (n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \\
& \times \left(\left| f^{(n)} (x) \right|^q \int_0^1 (1-\alpha) \alpha^n d\alpha + \left| f^{(n)} \left((1-\lambda) a + \lambda b \right) \right|^q \int_0^1 \alpha^{n+1} d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\left| f^{(n)} \left((1-\lambda) a + \lambda b \right) \right|^q \int_0^1 (1-\alpha)^{n+1} d\alpha \right. \\
& \left. + \left| f^{(n)} (b) \right|^q \int_0^1 \alpha (1-\alpha)^n d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} ,
\end{aligned}
$$

qui donne le résultat final après une simple transformation. ■

Corollaire 2.10 ([9]) *Si on pose $\lambda = 1$ dans le Théorème 2.5, on obtient l'inégalité des trapèzes généralisée pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-p} f^{(n-1-p)}(b)-(-1)^{n-p}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-p} f^{(n-1-p)}(a)}{(n-p)!(b-a)^{p}} + \frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}}\int_{a}^{b} f\left(t\right)dt\right| \\
\leq\; & \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^{q}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.11 ([9]) *Si on pose $\lambda = \frac{1}{2}$ dans le Théorème 2.5, alors on obtient l'inégalité du point milieu pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(1-(-1)^{n-p}\right)}{(n-p)!(b-a)^{p}2^{n-p}} f^{(n-1-p)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}} n\int_{a}^{b} f\left(t\right)dt\right| \\
\leq\; & \frac{b-a}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}2^{n+1}}\left(\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.12 ([9]) *Si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, et $\lambda = \frac{2}{3}$ dans le Théorème 2.5, on obtient l'inégalité de Newton-Cotes ouverte à deux points pour les fonctions dont la dérivée d'ordre n est convexe :*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}-(-1)^{n-p}\right)\left(f^{(n-1-p)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)-(-1)^{n-p} f^{(n-1-p)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right)}{(n-p)!(b-a)^{p}3^{n-p}} + \frac{(-1)^{n}}{(b-a)^{n}}\int_{a}^{b} f\left(t\right)dt\right| \\
\leq\; & \frac{b-a}{3^{n+1}n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{6^{n+1}n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^{q}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{6^{n+1}n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{b-a}{3^{n+1}n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{n+2}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^{q}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

2.3 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les dérivées d'ordre n sont m-convexes

Théorème 2.6 ([17]) *Pour $n \geq 2$, soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable, $m \in (0,1]$, et $0 \leq a < b < \infty$. Si $f^{(n)}(x) \in L^1 \in \left[a, \frac{b}{m}\right]$ et $\left|f^{(n)}(x)\right|^q$ pour $q \geq 1$ est m-convexe sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n(n-1)}{2(n+1)!}\left[\tfrac{n\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m\left(n^2-2\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(n-1)(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à la m-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$ sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$ pour $q \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta + \tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right| dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta + \tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left(t\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right.\right. \\
& \left.\left. + m(1-t)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right) dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^n(n-1)}{2(n+1)!}\left[\tfrac{n\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m\left(n^2-2\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(n-1)(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.13 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.6,*

1/ Si $q=1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n\left[n\left|f^{(n)}(a)\right|+m\left(n^2-2\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]}{2(n+2)!}.
\end{aligned}$$

2/ Si $q=1$ et $n=2$, on a

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\tfrac{(b-a)^2\left[f''(a)+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]}{24}.$$

Corollaire 2.14 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.6, si $m=1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n(n-1)}{2(n+1)!}\left[\tfrac{n\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\left(n^2-2\right)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(n-1)(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.15 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.6, si $n=2$, on a*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\tfrac{(b-a)^2}{12}\left[\tfrac{|f''(a)|^q+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 2.7 ([17]) *Pour $n\geq 2$, soit $f:\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable, $m\in(0,1]$, et $0\leq a<b<\infty$. Si $f^{(n)}(x)\in L^1\in\left[a,\frac{b}{m}\right]$ et $\left|f^{(n)}(x)\right|^q$ pour $q\geq 1$ est m-convexe sur $\left[a,\frac{b}{m}\right]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{q-1}{nq-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\tfrac{1}{4(q+1)(q+2)}\left[\left(n^{q+1}(2q+4-n)+(n-2)^{q+2}\right)\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right.\right. \\
&\left.\left.+\ m\left(n^{q+2}-(n-2)^{q+1}(2q+2+n)\right)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right]\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à la m-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$ sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$ pour $q \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta+\tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right| dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (1-t)^{\frac{q(n-1)}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\int_0^1 (2t+n-2)^q \left|f^{(n)}\left(ta+\tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{q-1}{nq-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\int_0^1 (2t+n-2)^q\right. \\
& \times \left.\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(1-t)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right] dt\right\}^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{q-1}{nq-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\tfrac{1}{4(q+1)(q+2)}\left[\left(n^{q+1}(2q+4-n)+(n-2)^{q+2}\right)\right.\right. \\
& \times \left.\left.\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m\left(n^{q+2}-(n-2)^{q+1}(2q+2+n)\right)\left|f^{(n)}\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right]\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.16 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.7, si $m = 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left(\tfrac{q-1}{nq-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\tfrac{1}{4(q+1)(q+2)}\left[\left(n^{q+1}(2q+4-n)+(n-2)^{q+2}\right)\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right.\right. \\
+\ & \left.\left.\left(n^{q+2}-(n-2)^{q+1}(2q+2+n)\right)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.17 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.7, si $n = 2$, on a*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{2}\left(\tfrac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{(q+1)|f''(a)|^q + m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 2.8 ([17]) *Pour $n \geq 2$, soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable, $m \in (0,1]$, et $0 \leq a < b < \infty$. Si $f^{(n)}(x) \in L^1 \in \left[a, \frac{b}{m}\right]$ et $\left|f^{(n)}(x)\right|^q$ pour $q \geq 1$ est*

m-convexe sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$, alors

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \tag{2.20}$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\tfrac{(q-1)\left(n^{\frac{2q-1}{q-1}}-(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right)}{2(2q-1)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q+m(nq-q+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(nq-q+1)(nq-q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à la m-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$ sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta+\tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right| dt \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (2t+n-2)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 (1-t)^{q(n-1)}\left|f^{(n)}\left(ta+\tfrac{m(1-t)b}{m}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (2t+n-2)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\int_0^1 (1-t)^{q(n-1)}\left(t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+m(1-t)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\tfrac{(q-1)\left(n^{\frac{2q-1}{q-1}}-(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right)}{2(2q-1)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q+m(nq-q+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(nq-q+1)(nq-q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.18 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.8, si $m=1$, on a*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\tfrac{(q-1)\left(n^{\frac{2q-1}{q-1}}-(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right)}{2(2q-1)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(nq-q+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(nq-q+1)(nq-q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 2.19 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.8, si $n = 2$, on a*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{|f''(a)|^q + m(q+1)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 2.9 ([17]) *Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable pour $n > 1$, $m \in (0,1]$, et $0 \leq a < b < \infty$. Si $f^{(n)}(x) \in L^1 \in \left[a, \frac{b}{m}\right]$ et $\left|f^{(n)}(x)\right|^q$ pour $q \geq 1$ est m-convexe sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \qquad (2.21)\\
\leq\ & \frac{(b-a)^n(n-1)}{2n!}\left[\frac{(q-1)(nq-2)}{(nq-1)(nq+q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{(3n-2)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(3n-4)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{6(n-1)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à la m-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$ sur $\left[a, \frac{b}{m}\right]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|\\
\leq\ & \frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta + \frac{m(1-t)b}{m}\right)\right| dt\\
\leq\ & \frac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (1-t)^{\frac{q(n-1)}{q-1}}(2t+n-2)\,dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left[\int_0^1 (2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta + \frac{m(1-t)b}{m}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\\
\leq\ & \frac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (1-t)^{\frac{q(n-1)}{q-1}}(2t+n-2)\,dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left[\int_0^1 (2t+n-2)\left(t\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(1-t)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right) dt\right]^{\frac{1}{q}}\\
=\ & \frac{(b-a)^n(n-1)}{2n!}\left[\frac{(q-1)(nq-2)}{(nq-1)(nq+q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{(3n-2)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(3n-4)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{6(n-1)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.20 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.9, si $m=1$, on a*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n(n-1)}{2n!}\left[\frac{(q-1)(nq-2)}{(nq-1)(nq+q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{(3n-2)\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(3n-4)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{6(n-1)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 2.21 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.9, si $n=2$, on a*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{2(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{2|f''(a)|^q+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{3}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 2.10 ([17]) *Soit $f:\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}$ une fonction n-fois différentiable pour $n>1$, $m\in(0,1]$, et $0\leq a<b<\infty$. Si $f^{(n)}(x)\in L^1\in\left[a,\frac{b}{m}\right]$ et $\left|f^{(n)}(x)\right|^q$ pour $q\geq 1$ est m-convexe sur $\left[a,\frac{b}{m}\right]$, alors*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left\{\frac{(q-1)\left[(q-1)n^{\frac{3q-2}{q-1}}-((q-1)n+2(2q-1))(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right]}{4(2q-1)(3q-2)}\right\}^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{1}{nq-2q+2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q+m(nq-2q+2)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{nq-2q+3}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.22}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.5 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à la m-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$ sur $\left[a,\frac{b}{m}\right]$ pour $q\geq 1$, on a

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1(1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}\left(ta+\frac{m(1-t)b}{m}\right)\right|dt$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1(1-t)(2t+n-2)^{\frac{q}{(q-1)}}dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1(1-t)^{nq-2q+1}\left|f^{(n)}\left(ta+\frac{m(1-t)b}{m}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left[\int_0^1 (1-t)\,(2t+n-2)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left[\int_0^1 (1-t)^{nq-2q+1}\left(t\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(1-t)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left\{\tfrac{q-1}{4(2q-1)(3q-2)}\left[(q-1)\,n^{\frac{3q-2}{q-1}} - ((q-1)\,n\right.\right. \\
&\quad\left.\left. +\ 2\,(2q-1))\,(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right]\right\}^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left(\tfrac{1}{nq-2q+2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + m(nq-2q+2)\left|f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{nq-2q+3}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.22 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.10, si $m = 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right| \\
&\leq \tfrac{(b-a)^n}{2n!}\left\{\tfrac{(q-1)\left[(q-1)n^{\frac{3q-2}{q-1}} - ((q-1)n+2(2q-1))(n-2)^{\frac{2q-1}{q-1}}\right]}{4(2q-1)(3q-2)}\right\}^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left(\tfrac{1}{nq-2q+2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (nq-2q+2)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{nq-2q+3}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.23 ([17]) *Sous les conditions du Théorème 2.10, si $n = 2$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&\leq \tfrac{(b-a)^2}{2}\left[\tfrac{(3q-2)(q-1)^2}{2q-1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{|f''(a)|^q + 2m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{6}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Dans ce chapitre, nous exposerons de nouveaux résultats basés sur l'identité établie par Meftah et al. noter que ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication

3.1 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont la dérivée $n^{ième}$ est log-convexe

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f^{(n-1)}$ est absolument continue sur $[a,b]$, $a < b$. Si $\left|f^{(n)}\right|$ est log-convexe, alors pour tous $x \in [\lambda a + (1-\lambda) b, (1-\lambda) a + \lambda b]$ et $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ les inégalités suivantes sont satisfaites*

pour $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left|C\left(f, x, n, \tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}} \left(\left|f^{(n)}(a)\right| \varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \left|f^{(n)}(a)\right|\right)\right.$$
$$\left.+ \left|f^{(n)}(b)\right| \varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \left|f^{(n)}(b)\right|\right)\right),$$

pour $\lambda = 1$

$$\left|C\left(f,x,n,1\right)\right| \leq \tfrac{(x-a)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\varphi\left(\left|f^{(n)}(a)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right)$$
$$+\tfrac{(b-x)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\varphi\left(\left|f^{(n)}(b)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right),$$

pour $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right|,\left|f^{(n)}(a)\right|\right) \\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}(x)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right) \\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}(x)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right) \\
&+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(b)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\right|,\left|f^{(n)}(b)\right|\right),
\end{aligned}$$

où

$$\varphi\left(y,z\right)=\tfrac{(-1)^{n+1}n!}{\left(\ln\left|f^{(n)}(y)\right|-\ln\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^{n+1}}+n!\tfrac{\left|f^{(n)}(y)\right|}{\left|f^{(n)}(z)\right|}\sum_{k=0}^{n}\tfrac{(-1)^{k}}{(n-k)!\left(\ln\left|f^{(n)}(y)\right|-\ln\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^{k+1}}. \tag{3.1}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.4 et la valeur absolue, on a

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \int_{a}^{b}\left|k_{n}\left(x,t\right)\right|\left|f^{(n)}(t)\right|dt \\
=\ & \tfrac{1}{(b-a)^{n}}\int_{a}^{\lambda a+(1-\lambda)b}\tfrac{(t-a)^{n}}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\tfrac{1}{(b-a)^{n}}\int_{\lambda a+(1-\lambda)b}^{x}\tfrac{(x-t)^{n}}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt \\
&+\tfrac{1}{(b-a)^{n}}\int_{x}^{(1-\lambda)a+\lambda b}\tfrac{(t-x)^{n}}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\tfrac{1}{(b-a)^{n}}\int_{(1-\lambda)a+\lambda b}^{b}\tfrac{(b-t)^{n}}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\int_0^1 \alpha^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,a+\alpha\,(\lambda a+(1-\lambda)\,b))\right| d\alpha \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n}\int_0^1 (1-\alpha)^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,(\lambda a+(1-\lambda)\,b)+\alpha x)\right| d\alpha \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n}\int_0^1 \alpha^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,x+\alpha\,((1-\lambda)\,a+\lambda b))\right| d\alpha \\
& +\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\alpha)^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,((1-\lambda)\,a+\lambda b)+\alpha b)\right| d\alpha. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

En utilisant la log-convexité de $\left|f^{(n)}\right|$, (3.2) donne

$$
\begin{aligned}
& |C\,(f,x,n,\lambda)| \\
\leq \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|}{\left|f^{(n)}(a)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left|f^{(n)}(x)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|}{\left|f^{(n)}(x)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left|f^{(n)}(x)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|}{\left|f^{(n)}(x)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha \\
& +\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(b)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|}{\left|f^{(n)}(b)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors (3.3) devient

$$
\begin{aligned}
\left|C\left(f,x,n,\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}}\left|f^{(n)}(a)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\left|f^{(n)}(a)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha \\
+\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}}\left|f^{(n)}(b)\right|\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\left|f^{(n)}(b)\right|}\right)^{\alpha} d\alpha.
\end{aligned}
$$

En utilisant le Lemme 1.1, l'inégalité ci-dessus donne

$$\begin{aligned}\left|C\left(f,x,n,\tfrac{1}{2}\right)\right| &\leq \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|\right)\right. \\ &\left.+\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\right)\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\varphi\left(.,.\right)$ est définie dans (3.1).

Si $\lambda=1$, alors de (3.3) on a

$$\begin{aligned}\left|C\left(f,x,n,1\right)\right| &\leq \tfrac{(x-a)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{\left|f^{(n)}(x)\right|}\right)^{\alpha}d\alpha \\ &+\tfrac{(b-x)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(b)\right|}{\left|f^{(n)}(x)\right|}\right)^{\alpha}d\alpha. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En utilisant le Lemme 1.1, on obtient

$$\begin{aligned}\left|C\left(f,x,n,1\right)\right| &\leq \tfrac{(x-a)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\varphi\left(\left|f^{(n)}(a)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right) \\ &+\tfrac{(b-x)^{n+1}\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!(b-a)^{n}}\varphi\left(\left|f^{(n)}(b)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dans le cas $\lambda\neq 1$ et $\lambda\neq\frac{1}{2}$ de (3.3) et le Lemme 1.1, on obtient

$$\begin{aligned} &\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|,\left|f^{(n)}(a)\right|\right) \\ &+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}(x)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right) \\ &+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left|f^{(n)}(x)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|,\left|f^{(n)}(x)\right|\right) \\ &+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}(b)\right|\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|,\left|f^{(n)}(b)\right|\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le résultat final découle de (3.4), (3.6) et (3.7). ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $n = \lambda = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{b-x}{b-a} f(b) + \tfrac{x-a}{b-a} f(a) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left(\tfrac{|f'(a)|}{\ln|f'(a)| - \ln|f'(x)|} + \tfrac{|f'(x)| - |f'(a)|}{(\ln|f'(a)| - \ln|f'(x)|)^2} \right) \\ & + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left(\tfrac{|f'(b)|}{\ln|f'(b)| - \ln|f'(x)|} + \tfrac{|f'(x)| - |f'(b)|}{(\ln|f'(b)| - \ln|f'(x)|)^2} \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $n = \lambda = 1$, et $x = \frac{a+b}{2}$ on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{f(b)+f(a)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4} \left(\left(\tfrac{|f'(a)|}{\ln|f'(a)| - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|} + \tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - |f'(a)|}{\left(\ln|f'(a)| - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\tfrac{|f'(b)|}{\ln|f'(b)| - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|} + \tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - |f'(b)|}{\left(\ln|f'(b)| - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $n = 2\lambda = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4} \left(\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - \ln|f'(a)|} + \tfrac{|f'(a)| - \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\left(\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - \ln|f'(a)|\right)^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - \ln|f'(b)|} + \tfrac{|f'(b)| - \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{\left(\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - \ln|f'(b)|\right)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f^{(n-1)}$ est absolument continue sur $[a,b]$. Si $\left|f^{(n)}\right|^q$ telle que $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ est* log*–convexe, alors pour tous $x \in [\lambda a + (1-\lambda) b, (1-\lambda) a + \lambda b]$ et $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ les inégalités suivantes sont satisfaites* *pour* $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\left|C\left(f,x,n,\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

pour $\lambda = 1$

$$\left|C\left(f,x,n,1\right)\right| \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

pour $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q-\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du Lemme 1.4 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 \alpha^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,a+\alpha\left(\lambda a+(1-\lambda)\,b\right))\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left(\int_0^1 (1-\alpha)^{np}\,d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left(\lambda a+(1-\lambda)\,b\right)+\alpha x)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n}\left(\int_0^1 \alpha^{np}d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}\left((1-\alpha)\,x+\alpha\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!}\left(\int_0^1 (1-\alpha)^{np}\,d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}\left((1-\alpha)\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)+\alpha b\right)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
= \; & \frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,a+\alpha\left(\lambda a+(1-\lambda)\,b\right))\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left(\lambda a+(1-\lambda)\,b\right)+\alpha x)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\,x+\alpha\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right))\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)+\alpha b)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\left|f^{(n)}\right|^q$est log-convexe, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \qquad (3.8)\\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)\,b)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{(1-\lambda)^{n+1}(b-a)}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda=\frac{1}{2}$ alors de (3.8) on a

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right|\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\left(\int_0^1\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\ & \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\tfrac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$ alors de (3.8) on a

$$\begin{aligned}
& \left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\int_0^1\left(\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\int_0^1\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\alpha}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$ de (3.8), on a

$$\begin{aligned}
& \left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q-\left|f^{(n)}(a)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q-\left|f^{(n)}(x)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}{\ln\left|f^{(n)}(b)\right|^q-\ln\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Le résultat final découle de (3.9), (3.10) et (3.11). ■

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.2, si on prend $n = \lambda = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{b-x}{b-a}f\left(b\right)+\tfrac{x-a}{b-a}f\left(a\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t\right)dt\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(x)|^q-|f'(a)|^q}{\ln|f'(x)|^q-\ln|f'(a)|^q}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{(b-x)^2}{(b-a)(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(b)|^q-|f'(x)|^q}{\ln|f'(b)|^q-\ln|f'(x)|^q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.5 *Dans leThéorème 3.2, si on prend* $n = \lambda = 1$*, et* $x = \frac{a+b}{2}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(a)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q - |f'(a)|^q}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q - \ln|f'(a)|^q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(b)|^q - \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln|f'(b)|^q - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.2, si on prend* $n = 2\lambda = 1$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q - |f'(a)|^q}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q - \ln|f'(a)|^q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(b)|^q - \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln|f'(b)|^q - \ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.3 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $f^{(n-1)}$ *est absolument continue sur* $[a,b]$*. Si* $\left|f^{(n)}\right|^q$ *telle que* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *est* log-*convexe, alors pour tous* $x \in [\lambda a + (1-\lambda)b, (1-\lambda)a + \lambda b]$ *et* $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ *les inégalités suivantes sont satisfaites*

pour $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&|C(f,x,n,\lambda)| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f^{(n)}(a)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(b)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

pour $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
&|C(f,x,n,\lambda)| \leq \tfrac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^q, \left|f^{(n)}(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}(b)\right|^q, \left|f^{(n)}(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

pour $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned} &\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right|^{q},\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right|^{q},\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\right|^{q},\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)\right|^{q},\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

où $\varphi\left(.,.\right)$ *est définie par (3.1).*

Preuve. En appliquant la valeur absolue à l'identité du Lemme 1.4 et l'inégalité des moyens d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned} &\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left|f^{(n)}((1-\alpha)a+\alpha\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right))\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left(\int_{0}^{1}(1-\alpha)^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left(\int_{0}^{1}(1-\alpha)^{n}\left|f^{(n)}((1-\alpha)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+\alpha x)\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^{n}}\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left(\int_{0}^{1}\alpha^{n}\left|f^{(n)}((1-\alpha)x+\alpha\left((1-\lambda)a+\lambda b\right))\right|^{q}d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \, d\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)+\alpha b)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
= \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\int_0^1 \alpha^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)a+\alpha\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right))\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+\alpha x)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\int_0^1 \alpha^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)x+\alpha\left((1-\lambda)a+\lambda b\right))\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\int_0^1 (1-\alpha)^n \left|f^{(n)}((1-\alpha)\left((1-\lambda)a+\lambda b\right)+\alpha b)\right|^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la log-convexité de $\left|f^{(n)}\right|^q$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq \quad & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^{\alpha} d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\alpha} d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(x)\right|^q}\right)^{\alpha} d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n \left(\tfrac{\left|f^{(n)}((1-\lambda)a+\lambda b)\right|^q}{\left|f^{(n)}(b)\right|^q}\right)^{\alpha} d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors de (3.12) et le Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n\left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\left|f^{(n)}(a)\right|^q}\right)^\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left(\int_0^1 \alpha^n\left(\tfrac{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\left|f^{(n)}(b)\right|^q}\right)^\alpha d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{b-a}{n!2^{n+1}(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

où $\varphi\left(.,.\right)$ est défini dans (3.1).

Si $\lambda = 1$, alors de (3.12) et le Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \qquad (3.14) \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$ de (3.12) on a

$$\begin{aligned}
&\left|C\left(f,x,n,\lambda\right)\right| \qquad (3.15) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(a)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(a\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(x-(\lambda a+(1-\lambda)b))^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{((1-\lambda)a+\lambda b-x)^{n+1}}{n!(b-a)^n(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}(x)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\tfrac{(b-a)(1-\lambda)^{n+1}}{n!(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|\left(\varphi\left(\left|f^{(n)}\left(\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right)\right|^q,\left|f^{(n)}\left(b\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Le résultat final découle de (3.13), (3.14) et (3.15). ■

Corollaire 3.7 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $n = \lambda = 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{b-x}{b-a}f(b)+\tfrac{x-a}{b-a}f(a)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\tfrac{2|f'(a)|^q}{\ln|f'(a)|^q-\ln|f'(x)|^q}+\tfrac{2|f'(x)|^q-2|f'(a)|^q}{(\ln|f'(a)|^q-\ln|f'(x)|^q)^2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-x)^2}{2(b-a)}\left(\tfrac{2|f'(b)|^q}{\ln|f'(b)|^q-\ln|f'(x)|^q}+\tfrac{2|f'(x)|^q-2|f'(b)|^q}{(\ln|f'(b)|^q-\ln|f'(x)|^q)^2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $n = \lambda = 1$, *et* $x = \frac{a+b}{2}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f(b)+f(a)}{2}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\left(\tfrac{2|f'(a)|^q}{\ln|f'(a)|^q-\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}+\tfrac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-2|f'(a)|^q}{\left(\ln|f'(a)|^q-\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{2|f'(b)|^q}{\ln|f'(b)|^q-\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}+\tfrac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-2|f'(b)|^q}{\left(\ln|f'(b)|^q-\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.9 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $n = 2\lambda = 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln|f'(a)|^q}+\frac{2|f'(a)|^q-2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\left(\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln|f'(a)|^q\right)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln|f'(b)|^q}+\frac{2|f'(b)|^q-2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{\left(\ln\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q-\ln|f'(b)|^q\right)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaine inégalités de type Hermite-Hadamard et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques type de convexité classique ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Hermite-Hadamard n-fois différentiable et jouissant d'un certain type convexité.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouvelles inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions dont les dérivées $n^{ième}$ sont log-convexes.

Bibliographie

[1] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[2] P. Cerone, S. S. Dragomir, and J. Roumeliotis. Some Ostrowski type inequalities for n-time differentiable mappings and applications. RGMIA Res. Rep. Coll., 1(1998),Art. 6.

[3] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[4] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Math. 31 (1998), no. 3, 633–642.

[5] H. Hudzik and L. Maligranda, Some remarks on s-convex functions. Aequationes Math. 48 (1994), no. 1, 100–111.

[6] W.-D. Jiang, D.-W. Niu, Y. Hua and F. Qi, Generalizations of Hermite-Hadamard inequality to n-time differentiable functions which are s-convex in the second sense. Analysis (Munich) 32 (2012), no. 3, 209–220.

[7] M. A. Latif and S. S. Dragomir, New inequalities of Hermite-Hadamard type for n-times differentiable convex and concave functions with applications. Filomat 30 (2016), no. 10, 2609–2621.

[8] O. L. Mangasarian, Nonlinearprogramming. McGraw-HillBookCo.,NewYork-London-Sydney1969.

[9] B. Meftah, M. Merad, N. Ouanas and A. Souahi, Some new Hermite-Hadamard type inequalities whose n^{th} derivatives are convex. Acta Comment. Univ. Tartu. Math., 23 (2019), no 2, 163-178.

[10] **B. Meftah and C. Marrouche, Some new Hermite-Hadamard type inequalities for n-times $\log$-convex functions. Submitted.**

[11] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[12] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[13] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[14] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[15] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[16] G. Toader, Some generalizations of the convexity. Proceedings of the colloquium on approximation and optimization,Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329–338, 1985.248.

[17] S.-H. Wang, B.-Y. Xi, Bo-Yan and F. Qi, Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for n-time differentiable functions which are m-convex. Analysis (Munich) 32 (2012), no. 3, 247–262.