République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

Melle Boumazza Nebras

Intitulé

Quelques inégalités intégrales de type Simpson

Dirigé par : Chiheb Tarek

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Meftah Badreddine	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Chiheb Tarek	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Aissaoui Fatima	MCA	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Dédicace

Je dédie ce travail à …

À ma chère mère

À mon cher père

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous mon instruction et mon bien être.

Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longe vie.

À mon adorable grand-mère

À ma chère sœur « Hasna » et son mari

À mes frères « Nasreddine, Abdenour »

À la petite ange, ma nièce « Yasmine »

À mes tantes, mes cousins et mes cousines

À tous les membres de ma famille petits et grands

À ma chère amie de toujours, ma deuxième sœur « Chaima »

À toute personne qui a participé de près ou de loin à

La réalisation de ce travail

« Dr. Meftah » et mes chers collègues « Chaima et Khawla »

À tous les étudiants de promotion 2^{éme} année Master en Mathématique.

Nébras

Remerciement

Avant tous je tiens à remercier vivement le bon DIEU, le tout puissant qui a éclairé mon chemin et pour m'avoir donné la force et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier le membre de jury :

*Monsieur **MEFTAH badreddine**, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.*

*Madame **AISSAOUI Fatima**, pour avoir bien voulu examiner ce travail.*

*Je tiens à remercier plus particulièrement mon encadreur, Monsieur **CHIHEB Tarek**, pour avoir accepté de m'encadrer et pour l'aide qu'il m'a apportée.*

Mes sincères remerciement à tous les enseignants du département Mathématique sans oublier ceux que nous avons perdus cette année.

Et pour la famille, merci infiniment pour votre présence, vos conseils ainsi que votre aide morale.

Je remercie également tous mes amies et touts ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin tout au long de ce travail.

Abstract

In this thesis, we will study some integral inequalities of the Simpson type.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity, as well as some integral identities which we will invoke in the sequel.

In the second chapter, we cite some results already known in the literature.

Therefore, the last chapter will be entirely devoted to the new inequalities of the Simpson type. We mention that we have submitted tow papers for possible publications in international journals, knowing that one of them has been accepted for publication in the journal Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics.

Keywords: Simpson inequality, Hölder inequality, s-preinvex functions, prequasiinvex functions.

ملخص

في هذه الأطروحة، سوف نركّز على دراسة عدم المساواة التكاملية من نوع سمبسون.

في الفصل الأول، نذكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي والمعمم، بالإضافة إلى بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكّر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول هذا النوع من المساواة.

في حين أن الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة لعدم المساواة التكاملية من نوع سمبسون شبه تحدب معمم، نذكر أننا قدمنا عملين لإمكانية النشر الدولي، أحد هذه النتائج تم نشرها.

كلمات مفتاحية

عدم مساواة من نوع سمبسون، عدم مساواة هولدر، الدوال محدبة، تحدب معمم.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des inégalités intégrales de type Simpson. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique et généralisée, ainsi que des identités intégrales que nous invoquerons dans le chapitre qui suit. Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature. Tandis que le dernier chapitre sera entièrement dévoué aux nouvelles inégalités de type Simpson.
Nous mentionnons que nous avons soumis deux papiers pour une éventuelle publication dans des revues internationales sachant que l'un d'eux a été accepté pour la publication dans la revue Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics.

Mots clés : Inégalité de type Simpson, inégalité de Hölder, fonctions s-préinvexes, fonctions préquasi invexe.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [15, 16, 17].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de cette thèse est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Simpson et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et de convexité généralisée pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type Simpson dans ces nouveaux résultats on fait l'objet de la publication suivante :

T. Chiheb, N. Boumazza and B. Meftah, Some new Simpson-like type inequalities via preqausiinvexity. Transylv. J. Math. Mech. 12 (2020), no. 1, 1–10.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [18].

1.1 Convexité classique et convexité généralisée

1.1.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([12]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([18]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1 - t)\, y) \leq tf\,(x) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([20]) *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite fortement convexe avec module* c *avec* $c > 0$*, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 ([2]) *Une fonction positive* $f : I \to \mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ *est dite* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$*, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.5 ([1], [8]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *est dite fortement* s*-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$ *et* $c > 0$*, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.6 ([9]) *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite quasi-convexe sur* I*, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

1.1.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de la convexité classique introduite par Hanson [7].

Définition 1.7 ([24]) *Un ensemble* $K \subseteq \mathbb{R}$ *est dit invexe au point* x *par rapport à* $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$, *si*

$$x + t\eta\,(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

Définition 1.8 ([24]) *Une fonction* $f : K \subset (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *est dite préinvexe par rapport à* η, *si*

$$f\,(x + t\eta\,(y, x)) \leq (1 - t)\, f\,(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

Définition 1.9 ([19]) *Une fonction positive* $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite préquasiinvexe par rapport à* η, *si*

$$f\,(x + t\eta\,(y, x)) \leq \max\left\{f\,(y)\,, f\,(x)\right\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

1.2 Quelques fonctions spéciales

1.2.1 Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.10 ([6]) *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.1 *Pour* $z \in \mathbb{N}$, *on a* $\Gamma(z) = (z - 1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z - 1)$.

1.2.2 Fonction bêta

Définition 1.11 ([21]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt.$$

Remarque 1.2 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.3 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe ...". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières conséquences utiles. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est due à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc. Cette théorie n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs vu l'ampleur de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil et on mécanique.

1.3.1 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.12 ([4, 14]) *Soit $f \in L^1([a,b])$, les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ et $I_{b^-}^{\alpha} f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a \geq 0$ sont définis par*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ est la fonction gamma d'Euler.

1.4 Quelques identités et inégalités intégrales importantes

1.4.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 ([15]) *Soit $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont des fonctions réelles définies sur $[a,b]$, et si de plus $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.4.2 Inégalité des moyens d'ordre q

Théorème 1.2 ([3]) *Soient $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et $p = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ deux strictement positives n-uplet et soit $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par p*

est définie par

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & pour\ q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & pour\ q = 0, \\ \min\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & pour\ q = -\infty, \\ \max\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) & pour\ q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$*, on a*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.3 *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a,b]$*, alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.5 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 **(**[8]**)** *Soit* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* f' *est absolument continue et* $f'' \in L^1([a,b])$*. Alors*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ = \ & \tfrac{(b-a)^2}{54} \times \int_0^1 t(1-t)\left[f''\left(\tfrac{2+t}{3}a + \tfrac{1-t}{3}b\right) + f''\left(\tfrac{1+t}{3}a + \tfrac{2-t}{3}b\right) + f''\left(\tfrac{t}{3}a + \tfrac{3-t}{3}b\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Preuve. Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t\,(1-t)\,f''\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)dt\\
= &-\tfrac{3}{b-a}\left[t\,(1-t)\,f'\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)\Big|_0^1-\int_0^1(1-2t)\,f'\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)dt\right]\\
= &-\tfrac{9}{(b-a)^2}\left[(1-2t)\,f\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)\Big|_0^1+2\int_0^1 f\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)dt\right]\\
= &\tfrac{9}{(b-a)^2}\left[f\,(a)+f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right]-\tfrac{54}{(b-a)^3}\int_a^{\frac{(2a+b)}{3}} f\,(x)\,dx.
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t\,(1-t)\,f''\left(\tfrac{1+t}{3}a+\tfrac{2-t}{3}b\right)dt\\
= &\tfrac{9}{(b-a)^2}\left[f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right]-\tfrac{54}{(b-a)^3}\int_{\frac{(2a+b)}{3}}^{\frac{(a+2b)}{3}} f\,(x)\,dx,
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 t\,(1-t)\,f''\left(\tfrac{t}{3}a+\tfrac{3-t}{3}b\right)dt=\tfrac{9}{(b-a)^2}\left[f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f\,(b)\right]-\tfrac{54}{(b-a)^3}\int_{\frac{(a+2b)}{3}}^{b} f\,(x)\,dx.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Lemme 1.2 ([4]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f' \in L^1([a,b])$, où $a, b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$. Alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6}\left[f\,(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f\,(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\\
= &\tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left(\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]dt. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left[\left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^\alpha}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right] dt \\
&= \underbrace{\int_0^1 \left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right) dt}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^\alpha}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right) dt}_{I_2} \\
&= I_1+I_2. \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Intégrons par partie

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right) dt \\
&= \tfrac{2}{b-a}\int_0^1 \left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right) d\left(f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right) \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left\{\left[\left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right) f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right) d\left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right)\right\} \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right) d\left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right)\right] \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\alpha}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right) dt\right] \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\alpha}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\tfrac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^{\alpha-1} f(x)\,\tfrac{1}{\frac{b-a}{2}}dx\right] \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\alpha}{2}\left(\tfrac{2}{b-a}\right)^\alpha\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(x)\,dx\right] \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\tfrac{2}{b-a}\right)^\alpha\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(x)\,dx\right] \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}J_{b-}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right], \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

D'une manière analogue, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^\alpha}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right) dt \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left[\tfrac{1}{6}f(b)+\tfrac{1}{3}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}J_{a+}^\alpha f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Substituons (1.3) et (1.4) dans (1.2) on obtient l'identité donnée par (1.1). Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Simpson

Dans l'analyse classique, l'inégalité intégrale de Simpson peut être formulée comme suit

$$\left| \tfrac{1}{6} \left[f\left(a\right) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f\left(b\right) \right] - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x\right) dx \right| \leq \tfrac{1}{2880} \left(b-a\right)^4 \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty},$$

où f est une fonction 4 fois continument différentiable sur (a, b) dont la dérivée quatrième est bornée. Cette dernière permet d'estimer l'erreur de la quadrature dite de Simpson $1/3$. Cette inégalité a suscité l'intérêt des chercheurs au cours des trois dernières décennies. La littérature dans ce contexte est vaste et variée. On ce propose d'examiné les travaux de Hua et al. ainsi que Chen et Huang.

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont fortement s-convexes

Dans tout ce que suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par $\overset{\circ}{I}$, $a, b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$, $L^1([a, b])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a, b]$, s un nombre fixé dans $(0, 1]$.

Théorème 2.1 ([8]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et $f''\in L^1([a,b])$. Si $|f''|^q$ est fortement s-convexe sur $[a,b]$ pour $q\geq 1$ et $s\in(0,1]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{6^{\frac{1}{q}}(b-a)^2}{324}\left\{\left[\tfrac{(s-3)3^{s+2}+(s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}|f''(a)|^q+\tfrac{1}{(s+2)(s+3)3^s}|f''(b)|^q\right.\right. \\
&\left.-\tfrac{c(b-a)^2}{45}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\tfrac{(s-1)2^{s+2}+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right)-\tfrac{11c(b-a)^2}{270}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left[\tfrac{1}{(s+2)(s+3)3^s}|f''(a)|^q+\tfrac{(s-3)3^{s+2}+(s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}|f''(b)|^q-\tfrac{c(b-a)^2}{45}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1, ensuite en faisant appel à l'inégalité des moyens d'ordre q et la s-convexité forte de $|f''|^q$ sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)dt\right|\right. \\
&\left.+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{1+t}{3}a+\tfrac{2-t}{3}b\right)dt\right|+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{t}{3}a+\tfrac{3-t}{3}\right)dt\right|\right] \\
\leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\int_0^1 t(1-t)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1 t(1-t)\left(\left(\tfrac{2+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right.\right.\right. \\
&\left.\left.+\left(\tfrac{1-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t(1-t)^2(2+t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1 t(1-t)\left(\left(\tfrac{1+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\tfrac{2-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt\right. \\
&\left.-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t\left(1-t^2\right)(2-t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\int_0^1 t(1-t)\left(\left(\tfrac{t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right.\right. \\
&\left.\left.\left.+\left(\tfrac{3-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t^2(1-t)(3-t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \ \frac{6^{\frac{1}{q}}(b-a)^2}{324}\left\{\left[\frac{(s-3)3^{s+2}+(s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}\left|f''(a)\right|^q+\frac{1}{(s+2)(s+3)3^s}\left|f''(b)\right|^q\right.\right. \\
& \left.-\frac{c(b-a)^2}{45}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{(s-1)2^{s+2}+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)-\frac{11c(b-a)^2}{270}\right]^{\frac{1}{q}} \\
& \left.+\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)3^s}\left|f''(a)\right|^q+\frac{(s-3)3^{s+2}+(s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}\left|f''(b)\right|^q-\frac{c(b-a)^2}{45}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.1 ([8]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.1*

1/ si $q=1$, alors on a

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq & \ \frac{(b-a)^2}{54}\left[\frac{(s-3)3^{s+2}+(2s+6)\left(2^{s+2}+1\right)}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s}\left(\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right)-\frac{23c(b-a)^2}{270}\right],
\end{aligned}
$$

2/ si $q=1$ et $s=1$, alors on a

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq & \ \frac{(b-a)^2}{54}\left[\frac{\left(\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right)}{4}-\frac{23c(b-a)^2}{270}\right].
\end{aligned}
$$

Théorème 2.2 ([8]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et $f''\in L^1([a,b])$. Si $|f''|^q$ est fortement s-convexe sur $[a,b]$ pour $q>1$ et $s\in(0,1]$, alors*

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq & \ \frac{(b-a)^2}{54}\left[B\left(\frac{2q-1}{q-1},\frac{2q-1}{q-1}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{3^s(s+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \\
& \times\left\{\left[\left(3^{s+1}-2^{s+1}\right)\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)-\frac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
& +\left[\left(2^{s+1}-1\right)\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)-\frac{13c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$+\left[\left|f''(a)\right|^q+\left(3^{s+1}-2^{s+1}\right)\left|f''(b)\right|^q-\tfrac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\},$$

où $B(.,.)$ est la fonction bêta.

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.1, ensuite en faisant appel à l'inégalité de Hölder et la s-convexité forte de $|f''|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{2+t}{3}a+\tfrac{1-t}{3}b\right)dt\right|\right. \\
&+\left.\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{1+t}{3}a+\tfrac{2-t}{3}b\right)dt\right|+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{t}{3}a+\tfrac{3-t}{3}b\right)dt\right|\right] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left(\int_0^1 [t(1-t)]^{\frac{q}{(q-1)}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1\left(\left(\tfrac{2+t}{3}\right)^s\left|f''(a)\right|^q\right.\right.\right. \\
&+\left.\left.\left(\tfrac{1-t}{3}\right)^s\left|f''(b)\right|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1(1-t)(2+t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1\left(\left(\tfrac{1+t}{3}\right)^s\left|f''(a)\right|^q+\left(\tfrac{2-t}{3}\right)^s\left|f''(b)\right|^q\right)dt\right. \\
&-\left.\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1(1+t)(2-t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\int_0^1\left(\left(\tfrac{t}{3}\right)^s\left|f''(a)\right|^q\right.\right. \\
&+\left.\left.\left.\left(\tfrac{3-t}{3}\right)^s\left|f''(b)\right|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t(3-t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[B\left(\tfrac{2q-1}{q-1},\tfrac{2q-1}{q-1}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{1}{3^s(s+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\left(3^{s+1}-2^{s+1}\right)\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)-\tfrac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left[\left(2^{s+1}-1\right)\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)-\tfrac{13c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left.\left[\left|f''(a)\right|^q+\left(3^{s+1}-2^{s+1}\right)\left|f''(b)\right|^q-\tfrac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.3 ([8]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et $f'' \in L^1([a,b])$. Si $|f''|^q$ est fortement s-convexe sur $[a,b]$ pour $q > 1$ et $s \in (0,1]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\tfrac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{1}{(s+1)(s+2)3^s}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\left((s-1)\,3^{s+1} + 2^{s+2}\right)\left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right) - \tfrac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left[\left(2^{s+1}s + 1\right)|f''(a)|^q + \left(2^{s+2} - s - 3\right)|f''(b)|^q - \tfrac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left[(s+1)\,|f''(a)|^q + \left(3^{s+2} - 2^{s+1}(s+4)\right)|f''(b)|^q - \tfrac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.1, ensuite en faisant appel à l'inégalité de Hölder et la s-convexité forte de $|f''|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{2+t}{3}a + \tfrac{1-t}{3}b\right)dt\right|\right. \\
&\left.+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{1+t}{3}a + \tfrac{2-t}{3}b\right)dt\right| + \int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{t}{3}a + \tfrac{3-t}{3}b\right)dt\right|\right] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left(\int_0^1 t(1-t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1 t\left(\left(\tfrac{2+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right.\right.\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{1-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt - \tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t(2+t)(1-t)\,dt\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1 t\left(\left(\tfrac{1+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q + \left(\tfrac{2-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt\right. \\
&\left.\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t(1+t)(2-t)\,dt\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_0^1 t\left(\left(\tfrac{t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\tfrac{3-t}{3}\right)^s \left|f''(b)\right|^q\right) dt - \tfrac{c(b-a)^2}{9} \int_0^1 t^2 (3-t)\, dt\Bigg]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

$$\begin{aligned} = {} & \tfrac{(b-a)^2}{54} \left[\tfrac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\tfrac{1}{(s+1)(s+2)3^s}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & \times \Bigg\{ \left[\left((s-1)\,3^{s+1} + 2^{s+2}\right)\left(\left|f''(a)\right|^q + \left|f''(b)\right|^q\right) - \tfrac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left[\left(2^{s+1}s+1\right)\left|f''(a)\right|^q + \left(2^{s+2} - s - 3\right)\left|f''(b)\right|^q - \tfrac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left[(s+1)\left|f''(a)\right|^q + \left(3^{s+2} - (s+4)\,2^{s+1}\right)\left|f''(b)\right|^q - \tfrac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.4 ([8]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et $f'' \in L^1([a,b])$. Si $|f''|^q$ est fortement s-convexe sur $[a,b]$ pour $q > 1$ et $s \in (0,1]$, alors*

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq {} & \tfrac{(b-a)^2}{54} \left[\tfrac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\tfrac{1}{(s+1)(s+2)3^s}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & \times \Bigg\{ \left[\left(3^{s+1} - (s+4)\,2^{s+1}\right)\left|f''(a)\right|^q + (s+1)\left|f''(b)\right|^q - \tfrac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left[\left(2^{s+2} - s - 3\right)\left|f''(a)\right|^q + \left(2^{s+1}s+1\right)\left|f''(b)\right|^q - \tfrac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \left[\left|f''(a)\right|^q + \left((s-1)\,3^{s+1} + 2^{s+2}\right)\left|f''(b)\right|^q - \tfrac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.1, ensuite en faisant appel à l'inégalité de Hölder et la s-convexité forte de $|f''|^q$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq {} & \tfrac{(b-a)^2}{54} \left[\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{2+t}{3}a + \tfrac{1-t}{3}b\right) dt\right|\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{1+t}{3}a+\tfrac{2-t}{3}b\right)dt\right|+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(\tfrac{t}{3}a+\tfrac{3-t}{3}b\right)dt\right|\Bigg] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left(\int_0^1 (1-t)\,t^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{\Bigg[\int_0^1 (1-t)\left(\left(\tfrac{2+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{1-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 (1-t)^2(2+t)\,dt\Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
&+\Bigg[\int_0^1 (1-t)\left(\left(\tfrac{1+t}{3}\right)^s|f''(a)|^q+\left(\tfrac{2-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt \\
&-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1\left(1-t^2\right)(2-t)\,dt\Bigg]^{\frac{1}{q}}+\Bigg[\int_0^1 (1-t)\left(\left(\tfrac{t}{3}\right)^s|f''(a)|^q\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{3-t}{3}\right)^s|f''(b)|^q\right)dt-\tfrac{c(b-a)^2}{9}\int_0^1 t(1-t)(3-t)\,dt\Bigg]^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{54}\left[\tfrac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{1}{(s+1)(s+2)3^s}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\times\Bigg\{\left[\left(3^{s+1}-(s+4)\,2^{s+1}\right)|f''(a)|^q+(s+1)\,|f''(b)|^q-\tfrac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\left(2^{s+2}-s-3\right)|f''(a)|^q+\left(2^{s+1}s+1\right)|f''(b)|^q-\tfrac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[|f''(a)|^q+\left((s-1)\,3^{s+1}+2^{s+2}\right)|f''(b)|^q-\tfrac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108}\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Inégalités intégrales fractionnaires de type Simpson pour les fonctions s-convexes

Théorème 2.5 ([4]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f' \in L^1([a,b])$, où $a,b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{2^{s+1}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left\{I_3(\alpha,s)+I_4(\alpha,s)\right\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\begin{aligned} I_3(\alpha,s) &= \int_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{2}\right)\left[(1+t)^s+(1-t)^s\right]dt, \\ I_4(\alpha,s) &= \int_{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^{1}\left(\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right)\left[(1+t)^s+(1-t)^s\right]dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.2, ensuite en faisant appel à la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)a\right)\right|\right. \\ & \left.+\left|\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{3}\right)\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)b\right)\right|\right]dt \\ =\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\int_0^1\left[\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)a\right)\right|\right]dt\right. \\ & \left.+\int_0^1\left[\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{2}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)b\right)\right|\right]dt\right\} \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\int_0^1\left[\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|\right|\right]dt\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\left[\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^\alpha}{2}\right|\left|\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|+\left(1-\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|\right|\right]dt\Bigg\}\\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2^{s+1}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left\{\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left[(1+t)^s+(1-t)^s\right]dt\right\}\\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2^{s+1}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\Bigg\{\int_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^\alpha}{2}\right)\left[(1+t)^s+(1-t)^s\right]dt\\
&+\int_{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1\left(\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right)\left[(1+t)^s+(1-t)^s\right]dt\Bigg\}\\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2^{s+1}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left\{I_3(\alpha,s)+I_4(\alpha,s)\right\},
\end{aligned}
$$

où $I_3(\alpha,s)$ et $I_4(\alpha,s)$ sont définis dans (2.2). Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.2 ([4]) *Soit $f : I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f'\in L^1([a,b])$, où $a,b\in\overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{b-}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J^\alpha_{a+}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\tfrac{b-a}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left\{I_3(\alpha,1)+I_4(\alpha,1)\right\}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Théorème 2.6 ([4]) *Soit $f : I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f'\in L^1([a,b])$, où $a,b\in\overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour certain nombre fixé $s\in(0,1]$ et $q>1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{b-}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J^\alpha_{a+}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \qquad (2.4)\\
\leq\ &\tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\tfrac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}
$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.2 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left[f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
=\ &\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left|\frac{t^\alpha}{2}-\frac{1}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt \\
\leq\ &\frac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on en déduit

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\leq\frac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}$$

et

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\leq\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left[f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.3 ([4]) *Soit $f : I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f'\in L^1([a,b])$, où $a,b\in\overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ et $q>1$, alors* *l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \tag{2.5}$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{t^{\alpha}}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 2.7 ([4]) *Soit $f : I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f'\in L^1([a,b])$, où $a,b\in\overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, pour certain nombre fixé $s\in(0,1]$ et $q>1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \tag{2.6}$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{t^{\alpha}}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 1.2 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
&= \frac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left|\frac{t^{\alpha}}{2}-\frac{1}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{t^{\alpha}}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt \qquad (2.7)\\
&\leq \frac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{t^{\alpha}}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.\quad+\left(\int_0^1\left|\frac{t^{\alpha}}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q\leq\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q. \tag{2.8}$$

D'après (2.7) et (2.8), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\tfrac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.4 ([4]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f' \in L^1([a,b])$, où $a,b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ et $q>1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \qquad (2.9)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^\alpha}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\tfrac{3|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}
$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 2.8 ([4]) *Soit $f : I \subset [0,\infty \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f' \in L^1([a,b])$, où $a,b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, pour certain*

nombre fixé $s \in (0,1]$ *et* $q > 1$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}I_5(\alpha,s)\times\left\{I_6(\alpha,s)^{\frac{1}{q}}+I_7(\alpha,s)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *et*

$$\begin{aligned}
I_5(\alpha,s) &= \left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}=\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}, \\
I_6(\alpha,s) &= \int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q\right)dt, \\
I_7(\alpha,s) &= \int_0^1\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{2}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 2.1 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t^{\alpha}}{3}\right|\left|f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q\leq\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q. \tag{2.13}$$

D'après (2.12) et (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t^{\alpha}}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}I_5(\alpha,s)\times\left\{I_6(\alpha,s)^{\frac{1}{q}}+I_7(\alpha,s)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}$$

où $I_5(\alpha,s), I_6(\alpha,s)$ et $I_7(\alpha,s)$ sont définis dans (2.11). Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.5 ([4]) *Soit $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\overset{\circ}{I}$ telle que $f'\in L^1([a,b])$, où $a,b\in\overset{\circ}{I}$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ et $q>1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b-}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}I_5(\alpha,1)\times\left\{I_6(\alpha,1)^{\frac{1}{q}}+I_7(\alpha,1)^{\frac{1}{q}}\right\}, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Dans ce chapitre, nous allons d'abord démontrer une nouvelle identité, en s'appuyant sur cette dernière nous prouverons de nouvelles inégalités similaires à celle de Simpson pour des fonctions dont la dérivée seconde est préquasiinvexe. Cette étude a fait l'objet de la publication [5]. Ces résultats représentent une généralisation de ceux établis par Hua, Xi et Qi.

Lemme 3.1 *Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} F(a, b, f) &= \tfrac{\eta^2(b,a)}{54} \int_0^1 t(1-t)\left\{ f''\left(a + \tfrac{1-t}{3}\eta(b, a)\right)\right. \\ &\quad \left. + f''\left(a + \tfrac{2-t}{3}\eta(b, a)\right) + f''\left(a + \tfrac{3-t}{3}\eta(b, a)\right)\right\} dt, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned} F(a, b, f) &= \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 2f\left(a + \tfrac{\eta(b,a)}{3}\right) + 2f\left(a + \tfrac{2\eta(b,a)}{3}\right) + f(a + \eta(b, a))\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t(1-t)\, f''\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right) dt, && (3.3)\\
I_2 &= \int_0^1 t(1-t)\, f''\left(a+\tfrac{2-t}{3}\eta(b,a)\right) dt, && (3.4)\\
I_3 &= \int_0^1 t(1-t)\, f''\left(a+\tfrac{3-t}{3}\eta(b,a)\right) dt. && (3.5)
\end{aligned}$$

L'intégration par partie du côté droit de (3.3), donne

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\tfrac{3}{\eta(b,a)}\left(t(1-t)\, f'\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right)\Big|_0^1 \right.\\
&\quad \left. - \int_0^1 (1-2t)\, f'\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right) dt \right)\\
&= -\tfrac{9}{\eta^2(b,a)}(1-2t)\, f\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right)\Big|_0^1 - \tfrac{18}{\eta^2(b,a)}\int_0^1 f\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right) dt\\
&= \tfrac{9}{\eta^2(b,a)}\left(f(a)+f\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right) - \tfrac{54}{\eta^3(b,a)}\int_a^{a+\frac{1}{3}\eta(b,a)} f(u)\, du. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

De la même façon, nous pouvons facilement obtenir

$$I_2 = \tfrac{9}{\eta^2(b,a)}\left(f\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)+f\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right) - \tfrac{54}{\eta^3(b,a)}\int_{a+\frac{1}{3}\eta(b,a)}^{a+\frac{2}{3}\eta(b,a)} f(u)\, du, \qquad (3.7)$$

et

$$I_3 = \tfrac{9}{\eta^2(b,a)}\left(f\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)+f\left(a+\eta(b,a)\right)\right) - \tfrac{54}{\eta^3(b,a)}\int_{a+\frac{2}{3}\eta(b,a)}^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du. \qquad (3.8)$$

En additionnant (3.6)-(3.8), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{\eta^2(b,a)}{54}$, on obtient le résultat désiré.

Remarque 3.1 *Le Lemme 3.1 sera réduit au Lemme 2.1 de* [8], *si l'on prend* $\eta(b,a) = b-a$.

■

Théorème 3.1 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* f' *est absolument continue et* f'' *est intégrable sur* $[a, a+\eta(b,a)]$. *Si* $|f''|$ *est préquasiinvexe, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
|F(a,b,f)| \leq \; & \tfrac{\eta^2(b,a)}{324}\Big(\Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, |f''(a)|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{|f''(b)|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

où $F(a,b,f)$ *est définie dans (3.2).*

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 3.1, ensuite en faisant appel à la préquasiinvexité de $|f''|$, on obtient

$$\begin{aligned}
& |F(a,b,f)| \\
\leq \; & \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\Big(\int_0^1 t(1-t)\Big|f''\Big(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\,dt \\
& + \int_0^1 t(1-t)\Big|f''\Big(a+\tfrac{2-t}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\,dt \\
& + \int_0^1 t(1-t)\Big|f''\Big(a+\tfrac{3-t}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\,dt\Big) \\
\leq \; & \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\Big(\int_0^1 t(1-t)\,dt\Big)\Big(\Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, |f''(a)|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{|f''(b)|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big)\Big) \\
= \; & \tfrac{\eta^2(b,a)}{324}\Big(\Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, |f''(a)|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{\Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big) \\
& + \Big(\max\Big\{|f''(b)|, \Big|f''\Big(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\Big)\Big|\Big\}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1*

1/ Si $|f''|$ *est croissante, alors on a*

$$|F(a,b,f)| \leq \frac{\eta^2(b,a)}{324}\left(\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right| + \left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right| + |f''(b)|\right).$$

2/ Si $|f''|$ *est décroissante, alors on a*

$$|F(a,b,f)| \leq \frac{\eta^2(b,a)}{324}\left(|f''(a)| + \left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right| + \left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|\right).$$

Corollaire 3.2 *Pour* $\eta(b,a) = b-a$ *le Théorème 3.1, donne*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{324}\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|, |f''(a)|\right\}\right)\right. \\ & + \left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|, \left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|\right\}\right) \\ & \left. + \left(\max\left\{|f''(b)|, \left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|\right\}\right)\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.3 *Dans le Corollaire 3.1*

1/ Si $|f''|$ *est croissante, alors on a*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{324}\left(\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right| + \left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right| + |f''(b)|\right). \end{aligned}$$

2/ Si $|f''|$ *est décroissante, alors on a*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{324}\left(|f''(a)| + \left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right| + \left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* f' *est absolument continue* f''*est intégrable sur* $[a, a+\eta(b,a)]$. *Si* $|f''|^q$ *est préquasiinvexe où* $q > 1$ *avec*

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|F(a,b,f)\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta^{2}(b,a)}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q},\left|f''(a)\right|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q},\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^{q},\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}$$

où $F(a,b,f)$ est définie dans (3.2) et $B(.,.)$ est la fonction bêta.

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 3.1 et l'inégalité de Hölder, ensuite en faisant appel à préquasiinvexité de $|f''|^{q}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|F(a,b,f)\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta^{2}(b,a)}{54}\left(\int_{0}^{1}t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt\right. \\
&+\int_{0}^{1}t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{2-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt \\
&\left.+\int_{0}^{1}t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{3-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{\eta^{2}(b,a)}{54}\left(\int_{0}^{1}\left(t(1-t)\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q},\left|f''(a)\right|^{q}\right\}\int_{0}^{1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q},\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q}\right\}\int_{0}^{1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^{q},\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q}\right\}\int_{0}^{1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{\eta^{2}(b,a)}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^{q},\left|f''(a)\right|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.2*

1/ Si $|f''|$ est croissante, alors on a

$$|F(a,b,f)| \leq \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|+\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|+\left|f''(b)\right|\right).$$

2/ Si $|f''|$ est décroissante, alors on a

$$|F(a,b,f)| \leq \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\left|f''(a)\right|+\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|+\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|\right).$$

Corollaire 3.5 *Pour $\eta(b,a)=b-a$ le Théorème 3.2, donne*

$$\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|^q,\left|f''(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|^q,\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg).$$

Corollaire 3.6 *Dans le Corollaire 3.5*

1/ Si $|f''|$ est croissante, alors on a

$$\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^2}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|+\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|+\left|f''(b)\right|\right).$$

2/ Si $|f''|$ est décroissante, alors on a

$$\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \tfrac{(b-a)^2}{54}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|+\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|+\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|\right).$$

Théorème 3.3 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a,a+\eta(b,a)]$. Si $|f''|^q$ est préquasiinvexe pour $q\geq 1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}|F(a,b,f)| \leq\ & \tfrac{\eta^2(b,a)}{324}\Big(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,|f''(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\left(\max\left\{|f''(b)|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\Big),\end{aligned}$$

où $F(a,b,f)$ est définie dans (3.2).

Preuve. En appliquant la valeur absolue au Lemme 3.1 et l'inégalité des moyens d'ordre q, ensuite en faisant appel à la préquasiinvexité de $|f''|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}&|F(a,b,f)|\\ \leq\ & \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\Big(\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt\\ &+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{2-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt\\ &+\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{3-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|dt\Big)\\ \leq\ & \tfrac{\eta^2(b,a)}{54}\Bigg(\left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{1-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{2-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t(1-t)\left|f''\left(a+\tfrac{3-t}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\eta^2(b,a)}{54}\left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''(a)\right|^q\right\}\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{54}\left(\int_0^1 t(1-t)\,dt\right)\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{324}\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad+\left(\max\left\{\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{1}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(a+\tfrac{2}{3}\eta(b,a)\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

ce qui achève le résultat. ■

Corollaire 3.7 *Pour $\eta(b,a)=b-a$ le Théorème 3.3, donne*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+2f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{324}\left(\left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|^q,\left|f''(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad+\left(\max\left\{\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|^q,\left|f''\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\left.+\left(\max\left\{\left|f''(b)\right|^q,\left|f''\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

3.1 Applications à des moyens spéciaux

Nous considérerons les moyens des nombres réels arbitraires a, b

La moyenne arithmétique : $A(a,b)=\frac{a+b}{2}$.

La moyenne P-logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a,b > 0, a \neq b$ et $p \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

Proposition 3.1 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, alors on a*

$$\begin{aligned} & \left|A\left(a^5,b^5\right)+2A\left(\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)^5,\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)^5\right)-3L_5^5(a,b)\right| \\ \leq \; & \tfrac{5(b-a)^2}{27}\left(\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)^3+\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)^3+b^3\right). \end{aligned}$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.3 avec $\eta(b,a) = b-a$, appliqué à la fonction $f(x) = x^5$. ■

Proposition 3.2 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, alors on a*

$$\begin{aligned} & \left|A\left(a^3,(a+A(a,b))^3\right)+2A\left(\left(\tfrac{3a+A(a,b)}{3}\right)^3,\left(\tfrac{3a+2A(a,b)}{3}\right)^3\right)-3L_3^3(a,a+A(a,b))\right| \\ \leq \; & \tfrac{A^2(b,a)}{3}\left(B(p+1,p+1)\right)^{\frac{1}{p}}(a+3A(a,b)). \end{aligned}$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.4 avec $q \geq 1, \eta(b,a) = A(a,b)$, appliqué à la fonction $f(x) = x^3$. ■

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaine inégalités de type Simpson et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques type de convexité classique et généralisé ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Simpson classique et fractionnaire via certains genres de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons établi quelques nouveaux résultats concernant ce type d'inégalité dont ils ont fait l'objet de la publication [5].

Bibliographie

[1] H. Angulo, J. Gimenez, A. M. Moros and K. Nikodem, On strongly h-convex functions. Ann. Funct. Anal. 2 (2011), no. 2, 85–91.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] J. Chen and X. Huang, Some new inequalities of Simpson's type for s-convex functions via fractional integrals. Filomat 31 (2017), no. 15, 4989–4997.

[5] **T. Chiheb, N. Boumazza and B. Meftah, Some new Simpson-like type inequalities via preqausiinvexity. Transylv. J. Math. Mech. 12 (2020), no. 1, 1–10.**

[6] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[7] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[8] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions. Afr. Mat. 26 (2015), no. 5-6, 741–752.

[9] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 34 (2007), 83–88.

[10] M. A. Latif and M. Shoaib, Hermite-Hadamard type integral inequalities for differentiable m-preinvex and (α, m)-preinvex functions. J. Egyptian Math. Soc. 23 (2015), no. 2, 236–241.

[11] J.-Y. Li, On Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) 27(2010), no. 4, p. 003.

[12] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[13] B. Meftah, Hermite-Hadamard's inequalities for functions whose first derivatives are (s, m)-preinvex in the second sense, Journal of New Theory, 10 (2016), 54–65.

[14] S. K. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley \& Sons, Inc., New York, 1993.

[15] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[16] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[17] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[18] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[19] R. Pini, Invexity and generalized convexity. Optimization 22 (1991), no. 4, 513–525.

[20] B. T. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restictions, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 72-75.

[21] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[22] G. Toader, Some generalizations of the convexity. Proceedings of the colloquium on approximation and optimization (Cluj-Napoca, 1985), 329–338, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1985.

[23] B.-Y. Xi, Y. Wan and F. Qi, Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for extended (s, m)-convex functions. Transylv. J. Math. Mech. 5 (2013), no. 1, 69–84.

[24] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

TJMM
12 (2020), No. 1, 1-10

SOME NEW SIMPSON-LIKE TYPE INEQUALITIES VIA PREQAUSIINVEXITY

T. CHIHEB, N. BOUMAZZA, AND B. MEFTAH

Abstract. In this paper, we first establish a new integral identity which represent a partielle result, by using this identity we derive some new Simpson like type integral inequalities for functions whose second derivatives are prequasiinvex functions. we also discuss some special cases where the second derivatives are monotonous functions. At the end we give some applications to special means.

1. Introduction

The following inequality is well known in the literature as Simpson's inequality

$$\left|\frac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right|\leq\frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty}\left(b-a\right)^4,$$

where f be four times continuously differentiable function on (a,b), and $\|f\|_{\infty}=\sup\limits_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|$.

In recent years, many researchers have studied the error estimates of Simpson's inequality, in order to establish new refinements, generalizations as well as new Simpson-type inequalities for more details we refer readers [2, 3, 5, 7, 12, 13].

In [1] Alomari showed that for $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an absolutely continuous function on I° and $a,b\in I$ with $a<b$ such that $f''\in L\left([a,b]\right)$ with $|f''|$ a quasi-convex function

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du-\frac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\right|\\&\leq\frac{(b-a)^2}{162}\left\{\max\left\{\left|f''\left(a\right)\right|,\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}+\max\left\{\left|f''\left(b\right)\right|,\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}\right\}.\end{aligned}$$

In [9] Özdemir et al. gave the following Simpson's inequality for the function whose second derivative at certain power is quasi-convex

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du-\frac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\right|\\&\leq\frac{(b-a)^2}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\frac{q+3+2^{q+2}}{(q+1)(q+2)}\right)\left(\max\left\{\left|f''\left(a\right)\right|^q,\left|f''\left(b\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 26D10, 26D15, 26A51.
Key words and phrases. Simpson inequality, Hölder inequality, preqausiinvex functions quasi-convex functions.