République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

BOUAZIZ Rania

Intitulé

Etude de l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de quelques problèmes fractionnaires non linéaires

Dirigé par : Dr. DEBBAR Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. A. BERHAIL**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. R. DEBBAR**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. A. FRIOUI**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2020

Etude de l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de quelques problèmes fractionnaires non linéaires

Bouaziz. Rania
Master en Mathématiques
deuxième année
Université 08 mai 1945-Guelma

31 août 2020

Dédicaces

Je voudrais dédier ce modeste travail à mes parents, ma soeur et mes frères, ettous ceux qui ont toujours été là pour moi.

Remerciments

J’aimerais exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadreur Mr. Debbar pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils, grâce auxquels ce modeste travail a été accompli.

Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire aux équations différentielles fractionnaires non linéaires, ce type des équations décrit de nombreux phénomènes. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de deux problèmes avec des conditions aux limites, présentant deux types du théorème de point fixe : le premier est de Banach pour démontrer l'existence et l'unicité, le deuxième est de Krasnoselski pour démontrer l'existence.

Mots-clés : équation différentielle fractionnaire- équation non linéaire- point fixe- stabilité au sens d'Ulam.

Abstracts

We are interested in this memory in nonlinear fractional differential equations, this type of equations describes many phenomena. The objective of this memory is to study the existence, the uniqueness and the stability in the sense of Ulam of the solutions of two problems with boundary conditions, presenting two types of the fixed point theorem : the first is of Banach to demonstrate the existence and the uniqueness, the second is of Krasnoselski to demonstrate the existence.

Keywords : fractional differential equation- nonlinear equation- fixed point- stability in the sense of Ulam

ملخص

في هذه المذكرة، نحن مهتمون بالمعادلات التفاضلية غير الخطية ذات الرتب الكسرية، هذا النوع من المعادلات يصف العديد من الظواهر.
الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية واستقرارالحل حسب أولام لمعادلتين مع شروط حدية، وتقديم نوعين من نظريات النقطة الثابتة: الأول لبناخ لإثبات وجود ووحدانية الحل والثاني لكراسنوسلسكي لإثبات وجود الحل.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية- المعادلات غير الخطية- النقطة الثابتة- الاستقرار حسب أولام.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différentiation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire, réel ou complexe. Ce terme peut-être considéré comme mal approprié, car une meilleure description pourrait être "La différenciation et l'intégration à un ordre arbitraire", mais alors pour quoi lui avoir attribué le nom de "Calcul fractionnaire" ?

A la fin du 17ème siècle, époque à laquelle Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. Leibniz a notamment introduit le symbole : $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ pour désigner la nième dérivée d'une fonction f. Quand il a rapporté cela dans une lettre à l'Hô-pital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : "Que signife $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ si $n = \frac{1}{2}$"

Le fait que de l'Hopital ait spécifiquement demandé pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction , a en réalité donné le nom à cette partie des mathématiques. Après la question initiale qui a conduit au nom "Calcul fractionnaire" , la question est devenue : n peut être n'importe quel nombre : Fractionnel, irrationnel ou complexe ?, parce que la réponse était affirmative [30] que le calcul fractionnaire est devenu un terme peu approprié , mais est tout de même rester en usage.

Au cours des dernières années, de nombreuses recherches ont montré que les équations différentielles fractionnaires (EDFs) décrivent de nombreux phénomènes de la physique, la mécanique, la chimie, la viscoélasticité, l'ingénierie et d'autres domaines des sciences. Pour plus de détails, voir les monographies de Kilbas [26], Miller- Ross [30], Podlubny [31] et Samko [34]. De nombreux résultats ont été établis concernant l'existence et l'unicité de la solution des EDFs sur l'intervalle fini $[0; T]$ où T est une constante positive utilisant la théorie du point fixe (voir [[5] ; [6] ; [13] ; [3] ; [4] ; [11] ; [20] ; [27] ; [37]]). Cependant, il existe des résultats concernant l'existence globale et l'unicité de la solution EDFs on $[0;+\infty)$ ([[7] ; [14] ; [28]]) et ceci du fait que les théorèmes de continuation pour les EDFs n'ont pas été dérivés. Une fois que l'existence de la solution est établie, une question sur la stabilité de la solution va être posée. En 1940, Ulam [36] est le premier qui a proposé la notion de stabilité des EDFs. Par la suite, ce concept a été développé par Hyers [24]. Plus loin en 1978, Rassias [33] a généralisé les résultats de Hyers et depuis lors, de nombreux chercheurs ont étudié la stabilité des équations fonctionnelles. En outre, de nombreux articles pa- raissent sur ce type de stabilité sous divers aspects (pour plus de détails voir [[1] ; [9] ; [23] ; [25]]).

Chapitre 1

Preliminaries

Dans le présent chapitre, on va énnoncer les préliminaires et les notions de base qu'on va les exploiter par la suite dans le deuxième pour établir l'existence, l'unicité de la solution basé sur le théorème de point fixe de Banach-Krasnoselkii et l'étude de la stabilité de la solution au sens d'Ulam et dans le troixième chapitre Nous étudions la même chose avec le deuxième problème

1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendantes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, les séries hypergéométriques, la fonction zêta de Riemann, la théorie des nombres.Pour plus de détails sur cette fonction (voir [8] ; [21]).

a) Définition de la fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t)\,dt, \quad Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!. \tag{1.2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(-n+\frac{1}{2}) &= \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Aucune expression de base est connue pour $\Gamma(\frac{1}{3})$ ou $\Gamma(\frac{1}{4})$ mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Le Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

Corollaire 1.1.1. *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ la fonction Gamma satisfait*

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1), \quad \int_0^1 (1-\theta)^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

b) Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \tag{1.3}$$

où on suppose que $Re(z) > 0$

Pour prouver (1.3), on introduit la fonction auxiliaire suivante

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt. \tag{1.4}$$

Effectuant maintenant la substitution $\tau = \dfrac{t}{n}$, puis en répétant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

En exploitant la limite connue,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp(-t) \tag{1.6}$$

on arrive à

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1}dt, \tag{1.7}$$

ce qui termine la preuve de la représentation (1.3) de la fonction Gamma, si la relation (1.7) est justifiée. Pour ce faire, on estime la différence

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt - f_n(z) \\ &= \int_0^n \left[\exp(-t) - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt + \int_n^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Prenons un $\epsilon > 0$ arbitraire En raison de la convergence de l'intégrale (1.1), il existe un N tel que pour $n \geq N$ on a

$$\left|\int_{n}^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt\right| \leq \int_{n}^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3}, (x = Re(z)). \tag{1.9}$$

On fixe maintenant N et considére $n > N$, on peut écrire comme une somme de trois intégrales

$$\Delta = \left(\int_{0}^{N} + \int_{N}^{n}\right)\left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right] t^{z-1} dt + \int_{n}^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt. \tag{1.10}$$

Le dernier terme est inférieur à $\frac{\epsilon}{3}$.Pour la seconde intégrale, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{N}^{n}\left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right] t^{z-1} dt\right| &\leq \int_{N}^{n}\left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right] t^{x-1} dt \\ &< \int_{N}^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3},\end{aligned} \tag{1.11}$$

où, comme ci-dessus, $(x = Re(z))$

Pour l'estimation de la première intégrale dans (1.10) on a besoin de l'inégalité auxiliaire suivante

$$0 < \exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} < \frac{t^2}{2n}, (0 < t < n), \tag{1.12}$$

qui découle, des relations

$$1 - \exp\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} = \int_{0}^{t} \exp(\tau)\left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{n} \frac{\tau}{n} d\tau \tag{1.13}$$

et

$$0 < \int_{0}^{t} \exp(\tau)\left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{n} \frac{\tau}{n} d\tau < \int_{0}^{t} \exp(\tau) \frac{\tau}{n} d\tau = \exp(t) \frac{t^2}{2n.} \tag{1.14}$$

(La relation (1.13) peut être verifiée en différenciant les deux cotés).

En utilisant l'inéquation auxiliaire (1.12), on obtient pour n assez grand et N fixé

$$\left|\int_{0}^{N}\left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right] t^{z-1} dt\right| < \frac{1}{2n}\int_{0}^{N} t^{x+1} dt < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.15}$$

En tenant compte des inégalités (1.9), (1.11) et (1.15) et que est arbitraire, on conclut que (1.7) est justifiée. Ceci termine certainement la preuve de la formule (1.3) pour $Re(z) > 0$.

À l'aide de (1.2), la condition $Re(z) > 0$. peut être affaiblie pour $z \neq 0, -1, -2, ..$de la manière suivante.

Si $-m < Re(z) < +m$ où m est un nombre entier positif, alors

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)...(z+m-1)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)...(z+m+n)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)^{z+m}(n-m)!}{(z+m)(z+m+1)...(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Par conséquent, la représentation (1.3) est vraie pour tout z, $z \neq 0, -1, -2...$

1.2 La fonction Bêta

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\, d\tau, \ (Re(z) > 0, \ Re(w) > 0). \tag{1.17}$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta on vas utiliser la transformée de Laplace.

On considére l'intégrale suivante

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\, d\tau. \tag{1.18}$$

évidemment, $h_{z,w}(t)$ est une convolution des fonctions τ^{z-1} et τ^{w-1} et on a $h_{z,w}(1) = B(z,w)$.

Puisque la transformée de Laplace de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}, \tag{1.19}$$

où $H_{z,w}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $h_{z,w}(t)$.

D'autre part, puisque $\Gamma(z)\Gamma(w)$ est une constante, il est possible de reconstituer la fonction originale $h_{z,w}(t)$ par la transformée de Laplace inverse, du côté droit de (1.19). En raison de l'unicité de la transformée de Laplace, on obtient donc

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}, \tag{1.20}$$

si on prend $t = 1$, on obtient l'expresion suivante

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \tag{1.21}$$

qui nous donne

$$B(z,w) = B(w,z). \tag{1.22}$$

1.3 Dérivées et intégrales fractionnaires

a) Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f au point t est donnée par

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{1.23}$$

Par dérivation successive de la fonction f, on obtient une généralisation de la formule (1.23) à l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme

$$f^{n}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}f(t-kh) \tag{1.24}$$

où

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule (1.24) représente la dérivée d'ordre entier n, si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1)=n!$, $\forall n\in\mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul

$$(-1)^{k}\binom{n}{k}=\frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!}=\frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par

$$\begin{aligned}{}_{a}^{G}D_{t}^{\alpha}f(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-\alpha)}f(t-kh)\\&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{1.25}$$

et

$$\begin{aligned}{}_{a}^{G}D_{t}^{-\alpha}f(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha)}f(t-kh)\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{1.26}$$

Les formules (1.25) et (1.26) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f, où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;t]$.

Si f est de classe C^m, des intégrations par parties de (1.25) et (1.26) nous permit d'écrire

$$ {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \tag{1.27} $$

et

$$ {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \tag{1.28} $$

La formule (1.27) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, ..., m)$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$.La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante

$$ m-1 < \alpha < m. $$

Dérivée fractionnaire de $(t-a)^{\alpha}$

On calcule la dérivée fractionnaire ${}_a^G D_t^p f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale

$$ f(t) = (t-a)^{\alpha}, $$

où α est un nombre réel.

On va commencer par considérer des valeurs négatives de p, c'est-à-dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-p)$.

On utilise la formule (1.25)

$$ {}_a^G D_t^p (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma\left(-p\right)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^{\alpha}\, d\tau, \tag{1.29} $$

et supposons $\alpha > -1$ pour la convergence de l'intégrale. En effectuant dans (1.29), le changement de variable $\tau = a + \xi(t-a)$ et en utilisant la définition (1.17) de la fonction Bêta on obtient

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}\xi^{\alpha}(1-\xi)^{-p-1}d\xi \tag{1.30} $$
$$ = \frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,\alpha+1)(t-a)^{\alpha-p} $$
$$ = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},\ (p<0,\ \alpha>-1). $$

On considère maintenant le cas : $0 \leq m \leq p < m+1$. Pour appliquer la formule

$$ \int_{QT} v_{0}(x)D_{t\backslash T}^{\delta}\varphi_{2}(x,t)\,dxdt + \int_{QT}|u|^{q}\varphi_{2}(x,t)\,dxdt + \int_{QT} g(x,t)\varphi_{2}(x,t)\,dxdt \tag{1.31} $$
$$ = \int_{QT} v^{m}(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\varphi_{2}(x,t)\,dxdt + \int_{QT} vD_{t\backslash T}^{\delta}\varphi_{2}(x,t)\,dxdt $$

on a besoin d'imposer $\alpha > m$ pour la convergence de l'intégrale dans (1.31). Alors on a

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^{\alpha}}{d\tau^{m+1}}d\tau. \tag{1.32} $$

En tenant compte de

$$ \frac{d^{m+1}(\tau-a)^{\alpha}}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)}(\tau-a)^{\alpha-m-1}. $$

et en effectuant le changement de variable $\tau = a + \xi(t-a)$ on arrive à

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p}(\tau-a)^{\alpha-m-1}d\tau \tag{1.33} $$
$$ = \frac{\Gamma(\alpha+1)B(-p+m+1,\alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\alpha-p} $$
$$ = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-p}. $$

On note que l'expression (1.33) est formellement identique à l'expression (1.30), on peut donc conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ est donnée par la formule

$$ {}_{a}^{G}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \tag{1.34} $$

avec $(p<0, \alpha>-1)$ ou bien $(0 \leq m \leq p < m+1, \alpha > m)$.

Dérivée fractionnaire d'une constante

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante est en général ni nulle ni constante, en effet

Si $f(t) = C$ et α non entier, on a $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots m$ et donc,

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_{0} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau}_{0} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 1.3.1. *Soient m un entier strictement positif et p non entier. Alors :*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \tag{1.35}$$

et

$${}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma\left(k-p-m+1\right)} \tag{1.36}$$

Démonstration. Pour $n-1 < p < n$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = &\sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma\left(k-(p+m)+1\right)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma\left(n+m-(p+m)\right)} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau,
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma\left(k-p+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma\left(k-\left(p+m\right)+1\right)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma\left(n+m-\left(p+m\right)\right)} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau \\
&- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma\left(k-p-m+1\right)},
\end{aligned}$$

alors,

$$ {}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma\left(k-p-m+1\right)}.$$

Ce qui veut dire que, la dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-1$. □

Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 1.3.2. *Trois cas sont à distinguer :*
1. Pour $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, on a

$$ {}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q \left(f(t) \right) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t) $$

2. Si $0 \le m < q < m+1$, $p < 0$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-1$
alors,

$$ {}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q \left(f(t) \right) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t) $$

3. Si $0 \le m < q < m+1$, $0 \le n < p < n+1$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, 2, ..., r-1$ où $r = max(m; n)$
alors,

$$ {}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q \left(f(t) \right) \right) = {}_a^G D_t^q \left({}_a^G D_t^p \left(f(t) \right) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t) $$

Démonstration. Pour la preuve de cette proposition, on pourra consulter [32]. □

b) Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, on cite quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. On va commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. b peut être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$ \left(I_a^1 f \right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau. $$

Pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)\,dt\right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

en itérant, on arrive à

$$\left(I_a^n f\right)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.$$

Définition 1.3.1. *Soit $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante*

$$\left(I_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.37}$$

où α est un nombre réel positif ou complexe de réel positif et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D_{0^+}^\alpha$ est donnée comme suit

$$D_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds = D^n I_{0^+}^{n-\alpha} f(t) \ \ pour\ t > 0.$$

Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta}ds \qquad (1.38)\\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\times\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\,ds = D^n I_{0^+}^{n-\alpha}f(t) \text{ pour } t>0.$$

La relation (1.38) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par

$$ {}_a^R D_t^{-\alpha}C = I_a^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}.$$

Proposition 1.3.3. *Soient α et β deux nombres complexes et $f\in C^0([a,b])$.*

$$i)\quad I_a^{\alpha}(I_a^{\beta}f)=I_a^{\alpha+\beta},\ \left(Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)\right)>0 \qquad (1.39)$$

$$ii)\quad \frac{d}{dt}(I_a^{\alpha}f)(t)=(I_a^{\alpha-1}f)(t),\ Re(\alpha)>1 \qquad (1.40)$$

$$iii)\quad \lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^{\alpha}f)(t)=f(t),\ Re(\alpha)>0 \qquad (1.41)$$

Démonstration. i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{\alpha}(I_a^{\beta}f)\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(I_a^{\beta}f)(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau ds,
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient

$$\left[I_a^\alpha (I_a^\beta f)\right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\in_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds\right] d\tau.$$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$ nous donne

$$\begin{aligned}\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\left[I_a^\alpha (I_a^\beta f)\right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t)$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b])$, on a

$$\left(I_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De l'exemple (1.38), on peut écrire $\left(I_a^\alpha 1\right)(t) = \dfrac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \to 1$ quand $\alpha \to 0^+$.

Donc

$$\begin{aligned}\left|\left(I_a^\alpha f\right)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau\right| \quad (1.42)\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left|f(\tau) - f(t)\right| d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} \left|f(\tau) - f(t)\right| d\tau \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left|f(\tau) - f(t)\right| d\tau.\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b)$ qui nous permet d'écrire

$$\forall t,\tau \in [a,b)\,,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists\delta>0 : |\tau-t|<\delta \Longrightarrow \left|f(\tau)-f(t)\right|<\varepsilon,$$

ce qui entraine

$$\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau \leq \varepsilon\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau=\frac{\varepsilon\delta^{\alpha}}{\alpha}. \tag{1.43}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left(\left|f(\tau)\right|+\left|f(t)\right|\right)d\tau\\ &\leq 2\sup_{\xi\in[a,t]}\left|f(\xi)\right|\int_{a}^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau,\ \forall t\in[a,b)\\ &= 2M\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}\right),\end{aligned} \tag{1.44}$$

où $M=\sup_{\xi\in[a,t]}\left|f(\xi)\right|$.

Une combinaison de (1.42), (1.43) et (1.44) donne

$$\begin{aligned}\left|\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\varepsilon\delta^{\alpha}+2M\left((t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right)\right]\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\varepsilon\delta^{\alpha}+2M\left((t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right)\right],\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^{+}, on obtient

$$\lim_{\alpha\to0^{+}}\left|\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right|\leq\varepsilon$$

autrement dit

$$\left|\lim_{\alpha\to0^{+}}\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{\alpha\to0^{+}}\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t)$$

□

Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 1.3.2. *Soit $\alpha \in]m-1, m[$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[(I_a^{m-\alpha} f)(t)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

On calcule la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ Par la formule (1.38) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta+m-\alpha}\right], \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha},
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

on sait que

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.47}
$$

Par substitution de (1.47) dans (1.46), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant

$$
{}_a^R D_t^\alpha (1) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. $$

Définition 1.3.3. *(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)*

$$ \forall t > a,\ {}_{a}^{R}D_{t}^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau $$

Définition 1.3.4. *(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)*

$$ \forall t > a,\ {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau $$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. On peut définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f, c'est-àdire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants

Définition 1.3.5. *(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)*

$$ \forall t < b,\ {}_{b}^{R}D_{t}^{-\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{t}^{b}(\tau-t)^{\beta-1}f(\tau)d\tau $$

Définition 1.3.6. *(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)*

$$ \forall t < b,\ {}_{b}^{R}D_{t}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\int_{t}^{b}(\tau-t)^{m-\beta-1}f(\tau)d\tau. $$

On note bien que f est une fonction telle que ${}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}f(t)$ et ${}_{b}^{R}D_{t}^{\beta}f(t)$ sont définies.

La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo pour une fonction donnée $f(t)$ sur $[0,T]$ est défini par

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}f(t) = D_{0^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right], \tag{1.49} $$

où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ signifie la partie entière de α et $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α définie par

$$D_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds = D^n I_{0^+}^{n-\alpha} f(t) \text{ pour } t > 0.$$

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha} f$ existe pour f appartenir à $AC^n[0,T]$ l'espace des fonctions qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n-1)$ on $[0,T]$ tel que $f^{(n-1)} \in AC^1([0,T],\mathbb{R})$. $AC^1([0,T],\mathbb{R})$ également noté $AC[0,T]$ est l'espace des fonctions absolument continues. Dans ce cas, la dérivée fractionnaire de Caputo est défini par

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds = I_{0^+}^{n-\alpha} D^n f(t) \text{ pour } t > 0. \tag{1.50}$$

remarquant que dans le cas où $\alpha = n$, on a ${}^{C}D_{0^+}^{n} f(t) = D^n f(t)$.

Lemme 1.3.1. *L'opérateur d'intégration fractionnaire est borné sur $C([0,T],\mathbb{R})$, dans le sens où pour chaque $f \in C([0,T],\mathbb{R})$ il existe une constante positive a tel que*

$$\left\| I_{0^+}^{\alpha} f \right\|_{\infty} \leq a \left\| f \right\|_{\infty}.$$

en outre,

$$I_{0^+}^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu},\ \mu > -1,\ \alpha > 0. \tag{1.51}$$

Lemme 1.3.2. *Soit $f \in AC^n[0,T]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre de Caputo $\alpha > 0$ tel que $n = [\alpha] + 1$ est continu sur $[0,T]$ et*

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} I_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t),\ I_{0^+}^{\alpha C} D_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.52}$$

En particulier, quand $0 < \alpha \leq 1$ on a $I_{0^+}^{\alpha C} D_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0)$.

Pour étudier la stabilité de la solution, on doit considérer l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)),\ 0 < \alpha \leq 1,\ t \in [0,T]. \tag{1.53}$$

On obtient les conditions suffisantes pour la stabilité de la solution pour IVP (2.1). En particulier, quatre types des résultats de stabilité de type Ulam sont discutés. C'est la stabilité d'Ulam-Hyers, la stabilité généralisée d'Ulam-Hyers, la stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias et la stabilité généralisée d'Ulam-Hyers-Rassias.

Définition 1.3.7. *L'équation* (1.53) *est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel* $K_f > 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $y \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'inéquation*

$$\left|{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t)\right)\right| \leq \epsilon,\ t \in [0,T], \tag{1.54}$$

il existe une solution $u \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'équation* (1.53) *avec*

$$\left|y(t) - u(t)\right| \leq \epsilon K_f,\ t \in [0,T].$$

Définition 1.3.8. *L'équation* (1.53) *est stable au sens de Ulam-Hyers généralisée s'il existe* $\psi \in C([0,T],\mathbb{R}_+)$, $\psi(0) = 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $y \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'inéquation*

$$\left|{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t)\right)\right| \leq \epsilon,\ t \in [0,T],$$

il existe une solution $u \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'équation* (1.53) *avec*

$$\left|y(t) - u(t)\right| \leq \psi(\epsilon),\ t \in [0,T].$$

Définition 1.3.9. *L'équation* (1.53) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $\psi \in C([0,T],\mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $J_{f,\psi} > 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $\mathbf{y} \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'inéquation*

$$\left|{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t)\right)\right| \leq \epsilon\psi(t),\ t \in [0,T],$$

il existe une solution $u \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'équation* (1.53) *avec*

$$\left|y(t) - u(t)\right| \leq \epsilon J_{f,\psi}\psi(t),\ t \in [0,T].$$

Définition 1.3.10. *L'équation* (1.53) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à* $\psi \in C([0,T],\mathbb{R}_+)$ *s'il existe* $J_{f,\psi} > 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $y \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'inéquation*

$$\left|{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t)\right)\right| \le \epsilon\psi(t),\ t \in [0,T],$$

il existe une solution $u \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *de l'équation* (1.53) *avec*

$$\left|y(t) - u(t)\right| \le J_{f,\psi}\psi(t),\ t \in [0,T].$$

Définition 1.3.11. *Une fonction* $y \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *est une solution de l'inéquation* (1.54) *si et seulement s'il existe une fonction* $\varphi \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *tel que pour chaque* $t \in [0,T]$, $\left|\varphi(t)\right| \le \epsilon$ *et* $D_{0^+}^{\alpha} y(t) = f\left(t, y(t)\right) + \varphi(t)$.

Lemme 1.3.3. *[22](Lemme de Gronwall) Soient* $v : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ *une fonction réelle et* $w(.)$ *une fonction non négative, localement intégrable sur* $[0;T]$. *Supposons qu'il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 < \alpha \le 1$ *telles que :*

$$v(t) \le w(t) + a\int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s)ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(\alpha)$ *telle que :*

$$v(t) \le w(t) + Ka\int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.3.4. *[Théorème de point fixe de Krasnoselkii] Soit* K *un sous-ensemble convexe et non vide fermé d'un espace de Banach* X. *Soient* T *et* S, *deux opérateurs tels que*

- $Tx + Sy \in K$ *pour chaque* $x, y \in K$,
- T *est compact et continu,*
- S *est une application contractante. Alors il existe* $z_1 \in K$ *tel que* $z_1 = Tz_1 + Sz_1$.

Nous sommes prêts à présenter nos résultats. Nous adoptons quelques idées de [15]

Théorème 1.3.1. *(principe de contraction de Banach, [39]). Soit (X,d) un espace métrique complet, alors chaque application contractante $T : X \to X$ a un unique point fixe x de T dans X, c'est-à-dire que $Tx = x$.*

c) Théoreme d'Ascoli (d'Arzelà-Ascoli)

Soient K un espace compact et (E,d) un espace métrique. L'espace $C(K,E)$ des fonctions continues de K dans E, muni de la distance uniforme, est un espace métrique.

Une partie A de $C(K,E)$ est relativement compacte (c'est-à-dire incluse dans un compact) si et seulement si, pour tout point x de K

A est équicontinue en x, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall f \in A \, \forall y \in V \; d\left(f(x), f(y)\right) < \epsilon,$$

l'ensemble $A(x) = \left\{f(x) \setminus f \in A\right\}$ est relativement compacte.

Chapitre 2

Existence, unicité et stabilité au sens d'Ulam de la solution de premier problème

Ce chapitre a été consacré à l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante

$$^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(u(t)-g(t,u(t))\right)=f(t,u(t)),\ t\in[0,T], \tag{2.1}$$

muni de la condition aux limites suivante

$$u(t)\mid_{t=0}=u_0,\ u_0\in\mathbb{R},$$

où $^{C}D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $0<\alpha<1$, g et f sont spécifiés dans les préliminaires

2.1 Existence et unicité

Dans cette partie, on a étudié l'existence des solutions locales pour (2.1). Pour cela, on introduit des hypothèses nécessaires pour prouver nos résultats

(H1) Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(H2) Il existe des constantes positives L_1, L_2 tels que pour chaque $t \in [0,T]$ et $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| f(t,u_1) - f(t,v_1) \right| \leq L_1 \left| u_1 - v_1 \right|,$$

et

$$\left| g(t,u_1) - g(t,v_1) \right| \leq L_2 \left| u_1 - v_1 \right|, \ 0 < L_2 < 1.$$

Maintenant, on considère le sous-ensemble suivant

$$B_R = \left\{ u : u \in C([0,h]) : \|u\|_{C([0,h])} = \sup_{0 \leq t \leq h} |u| \leq R \right\},$$

avec R, h sont des constantes positives telles que

$$h < \min \left\{ T, \left(\frac{(1-L_2)\Gamma(\alpha+1)}{L_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \tag{2.2}$$

et

$$R \geq \frac{1}{1-k} \left(q^* + c_g + \frac{(1-L_2)\, c_f}{L_1} \right), \tag{2.3}$$

où $c_f = \sup_{t \in [0,h]} \left| f(t,0) \right|$, $c_g = \sup_{t \in [0,h]} \left| g(t,0) \right|$, $q^* = \left| u_0 - g(0,u_0) \right|$ et

$$k = L_2 + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\alpha}.$$

Maintenant, on transforme le problème aux limites initial sous forme d'une équation intégrale qui est également utilisée dans l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité.

Lemme 2.1.1. *Une fonction $u \in C([0,h], \mathbb{R})$ est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante*

$$u(t) = r_0 + g(t,u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\, ds,$$

avec $r_0 = u_0 - g_0$, $g_0 = g(0,u_0)$, si et seulement si u est une solution du problème aux limites initial fractionnaire d'ordre α (2.1).

Démonstration. On applique l'intégrale fractionnaire $I_{0^+}^{\alpha}$ à l'équation (2.1) et en introduisant le lemme (1.3.2), puisque $0 < \alpha < 1$

alors

$$\begin{aligned}
& u(t) - g(t, u(t)) - u(0) + g(0, u(0)) \\
= \; & I_{0^+}^{\alpha}\left(f(t, u(t))\right) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds
\end{aligned}$$

d'oû

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(0) - g(0, u(0)) + g(t, u(t)) + I_{0^+}^{\alpha}\left(f(t, u(t))\right) \\
&= r_0 + g(t, u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.1. *Suppose que (H1),(H2) sont vérifiées. Alors, l'équation* (2.1) *admet une solution unique* $u \in C([0, h], \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $X = C([0, h], \mathbb{R})$ (l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0, h]$ dans $\mathbb{R}$) et on définit l'opérateur $\Lambda : X \longrightarrow X$ pour toute $t \in [0, T]$

$$(\Lambda u)(t) = (Au)(t) + (Bu)(t),$$

où

$$(Au)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds,$$

et

$$(Bu)(t) = r_0 + g(t, u(t)).$$

Pour chaque $u, v \in X$ et $t \in [0, h]$, on a

$$\begin{aligned}
&|(\Lambda u)(t) - (\Lambda v)(t)| \\
&\leq \left| g(t, u(t)) - g(t, v(t)) \right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right| ds,
\end{aligned}$$

utilisant (H1),(H2) et (1.51), on obtient

$$\begin{aligned}
&|(\Lambda u)(t) - (\Lambda v)(t)| \\
&\leq L_2 \|u - v\|_{C([0,h])} + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \|u - v\|_{C([0,h])} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&= L_2 \|u - v\|_{C([0,h])} + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \|u - v\|_{C([0,h])} \\
&\leq \left(L_2 + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\alpha} \right) \|u - v\|_{C([0,h])}.
\end{aligned}$$

De (2.2), il s'ensuit que Λ a un point fixe unique qui est la solution du problème (2.1). □

Maintenant, on donne le résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 2.1.2. *Suppose que (H1),(H2) sont satisfait. Alors le problème* (2.1) *a au moins un point fixe sur* $C([0, h], \mathbb{R})$.

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $B_R \subset C([0, h])$ est un sous-ensemble non vide, borné fermé et convexe.

Notez que $u, v \in B_R$ alors $Au + Bv \in B_R$. En effet, il est facile de vérifier l'inéquation

$$\begin{aligned}
|(Au + Bv)(t)| &= \left| r_0 + g(t, v(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
&\leq |r_0| + \left| g(t, v(t)) \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s, u(s)) \right| ds. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|f(t,u(t))\right| &\leq \left|f(t,u(t))-f(t,0)\right|+\left|f(t,0)\right| \\ &\leq L_1\left|u(t)\right|+\left|f(t,0)\right| \\ &\leq L_1\left\|u\right\|_\infty+c_f \\ &\leq L_1R+c_f.\end{aligned}$$

Par la même technique, on obtient l'estimation suivante

$$\left|g(t,v(t))\right| \leq L_2R+c_g.$$

Ensuite, l'estimation (2.5) devient

$$\begin{aligned}\left|(Au+Bv)(t)\right| &\leq q^*+L_2R+c_g+\frac{L_1R+c_f}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha \\ &\leq \left(L_2+\frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}h^\alpha\right)R+q^*+c_g+\frac{c_f}{\Gamma(\alpha+1)}h^\alpha \leq R.\end{aligned}$$

On conclue de (2.2) et (2.3) que

$$\left\|Au+Bv\right\|_{C([0,h])} \leq R,$$

ainsi,

$$Au+Bv \in B_R.$$

En utilisant, (H2), il est également clair que l'opérateur B est une application contractante. De la continuité de u, on peut affirmer que l'opérateur Au est uniformément continu et en exploitant (H1)et(H2) , ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\left|(Au)(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,u(s))\right|ds \\ &\leq \frac{L_1R+c_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{L_1R+c_f}{\Gamma(\alpha+1)}h^\alpha.\end{aligned}$$

Alors

$$\| Au\|_{C([0,h])} \leq \frac{L_1 R + c_f}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\alpha},$$

et A est uniformément borné dans B_R.

Maintenant on prouve que $(Au)(t)$ est équicontinu. Soit $t_1, t_2 \in [0,h]$, $t_2 \leq t_1$ et $u \in B_R$. En utilisant le fait que f est borné sur l'ensemble compact $[0,h] \times B_R$.

On obtient

$$\begin{aligned}
&|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s))\, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \left| (t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right| \left| f(s, u(s)) \right| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} |t_1 - s|^{\alpha-1} \left| f(s, u(s)) \right| ds \\
&\leq \frac{L_1 R + c_f}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \left| (t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right| ds \\
&+ \frac{L_1 R + c_f}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} |t_1 - s|^{\alpha-1} ds, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Puisque $0 < \alpha < 1$, alors $(t_1 - s)^{\alpha-1} \leq (t_2 - s)^{\alpha-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_2} \left| (t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right| ds &= \int_0^{t_2} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds \\
&= \frac{t_2^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t_1^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_1 - t_2)^{\alpha}}{\alpha}, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

et

$$\int_{t_2}^{t_1} |t_1 - s|^{\alpha-1} ds = \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} ds = \frac{(t_1 - t_2)^{\alpha}}{\alpha}. \qquad (2.8)$$

Insertant (2.7) et (2.8) dans (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
|(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| &\leq \left(t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} + 2(t_1 - t_2)^{\alpha} \right) \frac{L_1 R + c_f}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq 2(t_1 - t_2)^{\alpha} \frac{L_1 R + c_f}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

qui est indépendante de u et tend vers zéro lorsque $t_1 - t_2 \longrightarrow 0$. Par conséquent, l'opérateur A est équicontinu. Ainsi, AB_R est relativement compact sur B_R. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, A est compact.il reste à vérifier que A est continu.

Soit (u_n) une suite d'élément de $C([0,h])$ telle que $u_n \to u$ dans $C([0,h])$. Alors pour chaque u_n, $u \in C([0,h])$ et pour tout $t \in [0,h]$

$$\begin{aligned}
&|(Au_n)(t) - (Au)(t)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u_n(s))\,ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \right] ds \right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \right| ds
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (H2)

$$\begin{aligned}
&\le \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |u_n(s) - u(s)|\,ds \\
&\le -\frac{L_1 \|u_n - u\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-s)^{\alpha-1}\,ds \\
&= -\frac{L_1 \|u_n - u\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^t \\
&= \frac{L_1 \|u_n - u\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \\
|(Au_n)(t) - (Au)(t)| &\le \frac{L_1 \|u_n - u\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha
\end{aligned}$$

d'où

$\|Au_n - Au\|_\infty \le \dfrac{L_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u_n - u\|_\infty$

comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$

$Au_n \to Au$ si $n \to \infty$ alors A est continu dans $C([0,h])$

On conclue maintenant les résultats du théorème basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii que le probléme(2.1) a au moins un point fixe sur $[0,h]$. Ceci complète la preuve. □

2.2 Stabilité de Ulam

Dans cette partie on étudie quatre types de stabilité d'Ulam de l'équation différentielle fractionnaire d'ordre α (2.1) qui sont d'Ulam-Hyers, Ulam-Hyers généralisée, Ulam-Hyers-Rassias et Ulam-Hyers-Rassias généralisée.

Lemme 2.2.1. *Si $y \in AC\left([0,h],\mathbb{R}\right)$ est une solution de l'inéquation différentielle fractionnaire pour chaque $\epsilon > 0$*

$$\left|{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(u(t) - g(t,u(t))\right) - f(t,u(t))\right| \leq \epsilon, \tag{2.9}$$

alors y est une solution de l'inégalité intégrale suivante

$$\left|y(t) - r_0 - g\left(t,y(t)\right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s,y(s)\right)ds\right| \leq \frac{\epsilon h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Démonstration. Soit $y \in AC\left([0,h],\mathbb{R}\right)$ une solution de l'inéquation (2.9) pour chaque $\epsilon > 0$. Ensuite, à partir des définitions (1.3.11) et du Lemme (2.1.1) pour une fonction continue $\varphi(t)$ telle que $\left|\varphi(t)\right| \leq \epsilon$, $t \in [0,h]$, on a

$$y(t) = r_0 + g\left(t,y(t)\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[f\left(s,y(s)\right) + \varphi(s)\right]ds.$$

On utilise les propriétés de $I_{0^+}^{\alpha}$, ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned}\left|I_{0^+}^{\alpha}\left(\varphi(t)\right)\right| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|\varphi(s)\right|ds \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\ &\leq \frac{\epsilon h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

Théorème 2.2.1. *On suppose que les hypothèses (H1),(H2) soient vérifiées. Alors le problème* (2.1) *est stable au sens de Ulam-Hyers.*

Démonstration. Sous (H1),(H2), le problème (2.1) a une solution unique dans $AC([0,h],\mathbb{R}) \cap C([0,h],\mathbb{R})$. Soit $y \in (AC[0,h],\mathbb{R})$ une solution de l'inéquation (2.9), alors pour chaque $t \in [0,h]$

$$\begin{aligned}
&\left|y(t)-u(t)\right| \\
&\leq \left|y(t)-r_0-g\left(t,y(t)\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s,y(s)\right)ds\right| \\
&+\left|g\left(t,y(t)\right)-g\left(t,u(t)\right)\right| \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,y(s)\right)-f\left(s,u(s)\right)\right|ds \\
&\leq \frac{\epsilon h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\left(L_2+\frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}h^\alpha\right)\left\|y-u\right\|_{C([0,h])}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\|y-u\right\|_{C([0,h])} \leq \frac{\epsilon h^\alpha}{(1-k)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Ensuite, il existe un nombre réel $K_f = \dfrac{h^\alpha}{(1-k)\Gamma(\alpha+1)} > 0$, tel que

$$\left|y(t)-u(t)\right| \leq \epsilon K_f. \tag{2.10}$$

Ainsi (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers est établit, ce qui complète la preuve. □

Corollaire 2.2.1. *On suppose que toutes les hypothèses du théorème* (2.2.1) *sont satisfait. Alors le problème* (2.1) *est stable au sens de Ulam-Hyers.généralisée.*

Démonstration. Soit $\psi(\epsilon) = \epsilon K_f = \epsilon \dfrac{h^\alpha}{(1-k)\Gamma(\alpha+1)}$ dans (2.10) alors $\psi(0) = 0$ et le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.généralisée. □

Dans la prochaine section, on introduit l'hypothèse suivante

– (H3) soit $\psi \in C([0,h],\mathbb{R})$ une fonction croissante qui satisfait la propriété $I_{0^+}^{\gamma}\psi(t) \leq \lambda_{\psi,\gamma}\psi(t)$, $0<\gamma<1$ pour une constante $\lambda_{\psi,\gamma}>0$.

Lemme 2.2.2. *On suppose que ψ satisfait (H3). Si $y \in AC([0,h],\mathbb{R})$ est une solution de l'inéquation*

$$\left| {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(u(t)-g(t,u(t))\right)-f(t,u(t))\right| \leq \epsilon\psi(t),\ \forall\epsilon>0, \tag{2.11}$$

alors y est une solution de l'inéquation intégrale suivante

$$\left| y(t)-r_0-g\left(t,y(t)\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s,y(s)\right)ds\right| \leq \epsilon\lambda_{\psi,\alpha}\psi(t). \tag{2.12}$$

Démonstration. Soit $y \in AC([0,h],\mathbb{R})$ une solution de l'inéquation (2.11) pour chaque $\epsilon>0$. De la définition (1.3.11) et du lemme (2.1.1), pour une fonction continue $\varphi(t)$ tel que $\left|\varphi(t)\right| \leq \epsilon\psi(t)$ et pour chaque $\epsilon>0$, $t\in[0,h]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| y(t)-r_0-g\left(t,y(t)\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s,y(s)\right)ds\right| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|\varphi(s)\right|ds \leq \epsilon\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\psi(s)\,ds \leq \epsilon I_{0^+}^{\alpha}\left(\psi(t)\right) \\
&\leq \epsilon\lambda_{\psi,\alpha}\psi(t).
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Théorème 2.2.2. *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) soient vérifier, alors le problème* (2.1) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à ψ.*

Démonstration. Sous (H1),(H2) le problème (2.1) a une solution unique en $AC([0,h],\mathbb{R}) \cap C([0,h],\mathbb{R})$. Soit $y \in AC([0,h],\mathbb{R})$ une solution de l'inéquation (2.11), alors pour chaque

$t \in [0, h]$

$$\begin{aligned}
&\left|y(t)-u(t)\right| \\
&\leq \left|y(t)-r_0-g(t,u(t))-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\, ds\right| \\
&\leq \epsilon\lambda_{\psi,\alpha}\psi(t)+\left|g\left(t,y(t)\right)-g(t,u(t))\right| \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,y(s)\right)-f(s,u(s))\right| ds \\
&\leq \epsilon\lambda_{\psi,\alpha}\psi(t)+\left(L_2+\frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha}\right)\left\|y-u\right\|_{C([0,h])}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe un nombre réel $J_{f,\psi} = \dfrac{\lambda_{\psi,\alpha}}{1-k} > 0$ tel que

$$\left|y(t)-u(t)\right| \leq \epsilon\frac{\lambda_{\psi,\alpha}}{1-k}\psi(t) = \epsilon J_{f,\psi}\psi(t),\ t\in[0,h].$$

Cela donne le résultat souhaité et complète la preuve. □

Corollaire 2.2.2. *Sous l'hypothèse de théorème* (2.2.2)*, le problème* (2.1) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias gènèralisé par rapport à* $\Psi \in C([0,h],\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\epsilon = 1$ et $J_{f,\psi} = \dfrac{\lambda_{\psi,\alpha}}{1-k}$, ceci nous permit de déduire que le problème (2.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias gènèralisé. □

2.3 Exemple

On considére le problème fractionaire non linéaire suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\left(u(t)-\dfrac{t}{10}\sin(u(t))\right) = \dfrac{17t}{20(t+1)}\cos(u(t)),\ t\in[0,1], \\ u_0 = e, \end{cases} \tag{2.13}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2},\ g(t,u(t)) = \frac{t}{10}\sin(u(t)),\ f(t,u(t)) = \frac{17t}{20(t+1)}\cos(u(t)).$$

La solution unique existe pour

$$L_1 = \frac{17}{20},\ L_2 = \frac{1}{10}.$$

Maintenant, pour choisir h qui vérifie (2.2) on doit calculer

$$\left(\frac{(1-L_2)\,\Gamma(\alpha+1)}{L_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{0.9\times 0.8862}{0.85}\right)^2 = 0.8804,$$

alors, on peut prendre $h = 0.75$ pour que la condition suivante soit vérifier

$$k = L_2 + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha} = 0.9306 < 1.$$

Il s'ensuit du théorème (2.2.1) que le problème (2.13) est stable au sens de Ulam-Hyers sur $[0,1]$.

Aussi, on choisit $\psi(t) = t$ qui satisfait (H3) et grâce à (1.51) on a

$$I_{0^+}^{\gamma}\psi(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\gamma+2)}t^{\gamma+1} \le \frac{1}{(\gamma+1)\,\Gamma(\gamma+1)}t,\ 0<\gamma<1.$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on a

$$\lambda_{\psi,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = 0.7447,$$

ensuite, on prend $\lambda_{\psi,\alpha} = 0.7447$ pour que (2.12) est satisfiaite. D'où la stabilité de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à ψ.

Chapitre 3

Existence, unicité et stabilité au sens d'Ulam de la solution de deuxième problème

Ce chapitre a été consacré à l'existence, l'unicité et la stabilité au sens d'Ulam des solutions de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J := [0, T], \quad T > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.1}$$

muni de la condition aux limites suivante

$$au(0) + bu(T) = c \tag{3.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et a,b,c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

3.1 Existence et unicité

Pour l'existence de solutions du problème (3.1)-(3.2), on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1.1. *Soient* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $h : J \longrightarrow R$ *une fonction continue, alors le problème linéaire :*

$$^{C}D^{\alpha}_{0^+} u(t) = h(t), \quad \forall t \in J \tag{3.3}$$
$$au(0) + bu(T) = c \tag{3.4}$$

a une unique solution qui est donnée par :

$$u(t) = I^{\alpha}_{0^+} h(t) - \frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}_{0^+} h(T) - c\right]. \tag{3.5}$$

Démonstration. En appliquant l'opérateur $I^{\alpha}_{0^+}$ au deux membres de l'égalité (3.3) et en utilisant la formule (1.52)du lemme (1.3.2), on obtient :

$$u(t) = u(0) + I^{\alpha}_{0^+} h(t)$$

pour $t = T$, on a :

$$u(T) = u(0) + I^{\alpha}_{0^+} h(T)$$

On utilise la condition (3.4) pour calculer la constante $u(0)$, on trouve :

$$u(0) = -\frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}_{0^+} h(T) - c\right].$$

En remplaçant u_0 par sa valeur dans l'équation (**??**), on obtient la solution du problème ((3.3)-(3.4)

$$u(t) = I^{\alpha}_{0^+} h(t) - \frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}_{0^+} h(T) - c\right].$$

□

Lemme 3.1.2. *Soit $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème* (3.1)-(3.2) *est équivalent au problème :*

$$u(t) = u(0) + I_{0^+}^{\alpha} h(t) \tag{3.6}$$

où

$$u(0) = -\frac{1}{a+b}\left[bI_{0^+}^{\alpha} h(T) - c\right]$$

et

$$h(t) = f(t, u(t))$$

Démonstration. Soit u la solution du problème (3.6), montrons que u est aussi une solution du problème (3.1)-(3.2).

On a :

$$u(t) = u(0) + I_{0^+}^{\alpha} h(t).$$

et

$$u(T) = u(0) + I_{0^+}^{\alpha} h(T).$$

Alors,

$$\begin{aligned} au(0) + bu(T) &= -\frac{a}{a+b}\left[bI_{0^+}^{\alpha} h(T) - c\right] + b\left[u(0) + I_{0^+}^{\alpha} h(T)\right] \\ &= -\frac{a}{a+b}\left[bI_{0^+}^{\alpha} h(T) - c\right] + b\left[-\frac{1}{a+b}(bI_{0^+}^{\alpha} h(T) - c) + I_{0^+}^{\alpha} h(T)\right] \\ &= c \end{aligned}$$

donc,

$$au(0) + bu(T) = c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha}_{0^+} u(t) &= {}^C D^{\alpha}_{0^+} (u(0) + I^{\alpha} h(t)) \\ &= h(t) \\ &= f(t, u(t)). \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant nous donne l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.2), et cela en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.1.1. *Supposons que :* $(H1)$ *il existe* $K > 0$ *telles que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u - v| quad \quad \forall t \in J \quad et \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{KT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1 \tag{3.7}$$

le problème (3.1)-(3.2) *a une unique solution.*

Démonstration. Nous allons transformer le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur

$$N : C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow C(J, \mathbb{R}) \tag{3.8}$$

défini par :

$$Nu(t) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_u(s) ds$$

où

$$h_u(t) = f(t, u(0) + I^{\alpha} h_u(t))$$

et

$$u(0) = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h_u(s)ds\right].$$

Par les lemmes (3.1.1) et (3.1.2), il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.1)-(3.2).

L'opérateur N est bien défini. En effet, si $u \in C(J,\mathbb{R})$ alors $(Nu) \in C(J,\mathbb{R})$.

Pour montrer que N admet un point fixe, il suffit de montrer que N est un opérateur contractant. Soient $u, v \in C(J,\mathbb{R})$, et $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned} |Nu(t) - Nv(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|h_u(s) - h_v(s)|ds \\ & + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|h_u(s) - h_v(s)|ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

et,

$$|h_u(t) - h_v(t)| = |f(t,u(t)) - f(t,v(t))|$$

Ainsi,

$$|h_u(t) - h_v(t)| \leq K|u(t) - v(t)|. \tag{3.10}$$

En remplaçant (3.10) dans l'inégalité (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} |Nu(t) - Nv(t)| \leq & \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|u(s) - v(s)|ds \\ & + \frac{|b|K}{(|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|u(s) - v(s)|ds \\ \leq & \frac{KT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u-v\|_\infty + \frac{|b|KT^\alpha}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)}\|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

Donc,

$$\| N_u - N_v \| \leq \left[\frac{KT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (1 + \frac{|b|}{|a+b|}) \right] \| u - v \|_\infty$$

D'après (3.7), N est un opérateur contractant, et par le théorème de point fixe de Banach (1.3.1), N admet un unique point fixe, ainsi le problème (3.1)-(3.2) a une unique solution.

□

3.2 Stabilité de Ulam

Théorème 3.2.1. *Supposons que (H1) et* (3.7) *sont satisfaites, alors le problème* (3.1)-(3.2) *est stable au sens de Ulam- Hyers.*

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $y \in C^1(J;\mathbb{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$\left| {}^C D_{0^+}^\alpha y(t) - f\left(t, y(t)\right) \right| \leq \epsilon, \quad t \in J \tag{3.11}$$

et soit $u \in C^1(J;\mathbb{R})$ la solution du problème (3.1)-(3.2) ainsi que l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^\alpha y(t) = f\left(t, y(t)\right) & t \in J, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0) = y(0) \\ u(T) = y(T) \end{cases}$$

Par intégration de l'inégalité (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s) ds \right| &\leq \frac{\epsilon t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

avec

$$h_y(t) = f(t, y(0) + I^\alpha h_y(t))$$

alors pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}
|y(t)-u(t)| &= \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (h_y(s) - h_u(s)) ds \right| \\
&\leq \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s) ds \right| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |h_y(s) - h_u(s)| ds
\end{aligned}$$

en utilisant (3.10), on trouve :

$$|y(t)-u(t)| \leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s) - u(s)| ds$$

et en appliquant le lemme de Gronwall (1.3.3), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
|y(t)-u(t)| &\leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ds \\
&\leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left| 1 + \frac{\gamma K T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| := c\epsilon
\end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma(\alpha)$ une constante. □

Remarque 3.2.1. *Si on pose* $\psi(\epsilon) = c\epsilon$ *alors* $\psi(0) = 0$, *et donc le problème* (3.1)-(3.2) *devient stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.*

Théorème 3.2.2. *Supposons que (H1),* (3.7) *et :*

► $(H2)$ *il existe une fonction croissante* $\varphi \in C(J,\mathbb{R})$ *et il existe* $\lambda_\varphi > 0$ *telles que :*

$$I^\alpha \varphi(t) \leq \lambda_\varphi \varphi(t), \quad \forall t \in J$$

sont satisfaites, alors le problème (3.1)-(3.2) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.*

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$ et $y \in C^1(J;\mathbb{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$\left| {}^C D_{0^+}^\alpha y(t) - f\left(t, y(t)\right) \right| \leq \epsilon \varphi(t), \quad t \in J \tag{3.12}$$

et soit $u \in C^1(J;\mathbb{R})$ la solution du problème (3.1)-(3.2) ainsi que l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) = f\left(t, y(t)\right) \quad t \in J, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0) = y(0) \\ u(T) = y(T) \end{cases}$$

Par intégration de l'inégalité (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s)ds \right| &\leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s)ds \\ &\leq \epsilon \lambda_\varphi \varphi(t). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |y(t) - u(t)| &= \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s)ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (h_y(s) - h_u(s))ds \right| \\ &\leq \left| y(t) - y(0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h_y(s)ds \right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |h_y(s) - h_u(s)|ds \end{aligned}$$

par (3.10), il s'ensuit que :

$$|y(t) - u(t)| \leq \epsilon \lambda_\varphi \varphi(t) + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s) - u(s)|ds$$

et nous obtenons par le lemme de Gronwall (1.3.3) :

$$|y(t) - u(t)| \leq \epsilon \lambda_\varphi \varphi(t) + \frac{\gamma_1 \epsilon K \lambda_\varphi}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s)ds$$

où $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha)$ une constante.

En utilisant $(H2)$, on obtient :

$$|y(t) - u(t)| \leq \epsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \gamma_1\epsilon K\lambda_\varphi^2\varphi(t) = \Big(1 + \gamma_1 K\lambda_\varphi\Big)\epsilon\lambda_\varphi\varphi(t)$$

Ainsi pour tout $t \in J$:

$$|y(t) - u(t)| \leq \left[\Big(1 + \gamma_1 K\lambda_\varphi\Big)\lambda_\varphi\right]\epsilon\varphi(t) := c\epsilon\varphi(t).$$

□

Remarque 3.2.2. *Les résultats pour le problème aux limites* (3.1)-(3.2) *conviennent aux problèmes suivants :*

•*Problème à valeur initiale : a = 1, b = 0, c = 0 :*

• *Problème à valeur finale : a = 0, b = 1, c arbitraire.*

• *Problème anti-périodique : a = 1, b = 1, c = 0 :*

Mais, ils ne conviennent pas pour le problème périodique : a = 1 ; b = -1 ; c = 0 :

3.3 Exemple illustratif

Considérons le problème aux limites suivant :

$$ {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t) = \frac{1}{10e^{t+2}(1+|u(t)|)}, \quad \forall t \in [0,1] \tag{3.13}$$

$$u(0) + u(1) = 0. \tag{3.14}$$

Posons :

$$f(t,u) = \frac{1}{10e^{t+2}(1+|u|)}, \quad \forall t \in [0,1], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Il est clair que la fonction f est continue.

Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t,u) - f(t,v| &= \frac{1}{10e^{t+2}} \left| \frac{(|v| - |u|)}{(1+|u|)(1+|v|)} \right| \\ &\leq \frac{1}{10e^{t+2}} \left| u - v \right| \end{aligned}$$

d'autre part, pour $t \in [0;1]$ on a :

$$\frac{1}{10e^3} \leq \frac{1}{10e^{t+2}} \leq \frac{1}{10e^2}$$

finalement,

$$|f(t,u) - f(t,v| \leq \frac{1}{10e^2} |u - v|$$

comme $0 < K = \dfrac{1}{10e^2}$, alors (H1) est satisfaite.

De plus,

$$\frac{KT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) = \frac{\frac{1}{10e^2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} (1 + \frac{1}{2})$$

en utilisant (1.2), on trouve :

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

ainsi,

$$\frac{KT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) = \frac{3}{(10e^2 - 1)\sqrt{\pi}} < 1$$

alors la condition (3.7) est satisfaite

D'après le théorème (3.1.1) le problème (3.13)-(3.14) a une unique solution, et par le théorème(3.2.1), le problème (3.13)-(3.14) est stable au sens de Ulam-Hyers .

Conclusions

Dans cette étude, on a présenté deux types du théorème de point fixe, le premier est de Banach pour démontrer l'existance et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaires non linéaire.

La deuxiéme type est de Krasnoselskii pour démontrer l'existance.

D'après ce qu'on a vu, pour étudier la stabilité au sens de Ulam-Hyers d'un problème avec des conditions aux limites pour une équation différentielle fractionnaire implicite avec la dérivée fractionnaire de Caputo et d'ordre compris entre 0 et 1 dans un espace de banach, il suit d'étudier l'existence et l'unicité de solution de ce problème. Puis, si on arrive à démontrer cela, on conclut que le problème est stable au sens de Ulam-Hyers, par contre, pour la stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias, cette conditions ne suit plus, il faut imposer une condition de plus.

Bibliographie

[1] M. S. Abdo and S. K. Panchal, Uniqueness and stability results of fractional neutral differential equations with infinite delay, Int. J. Math. And Appl., 6(2-A) (2018), 403-410.

[2] N. Abel, Solution de quelques problemes a laide dintegrales de nites, Christiania Grondahl,Norway (1881) 16-18.

[3] R. P. Agarwal, Benchohra M. and Hamani S., A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, Acta. Appl. Math. 109 (2010), 973-1033.

[4] R. P. Agarwal, D. O'Regan , Existence theory for singular initial and boundary value problems : A fixed point approach, Appl. Anal. 81 (2002), 391-434.

[5] B. Ahmad, V. Otero-Espinar, Existence of solutions for fractional differential inclusions with antiperiodic boundary conditions. Bound Value Probl 2009 ; 2009 : 625347.

[6] G. A. Anastassiou, Advances on Fractional Inequalities. Berlin, Germany : Springer, 2011.

[7] A. Arara, M. Benchohra, N. Hamidi, J. J. Nieto, Fractional order differential equations on an unbounded domain, Nonlin. Anal., : TMA 72 (2010), 580-586.

[8] E. Artin, The Gamma Function, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)(1.1)

[9] R. Atmania, S. Bouzitouna, Existence and Ulam stability result for two-orders fractional differential equation, Acta Math. Univ. Comenianae, LXXXVIII(1) (2019), 1-12.

[10] A. Babakhani, Existence and uniqueness of solution for class of fractional order differential equations on an unbounded domain, Advances in Difference Equations, 2012 (2012) :41, doi :10.1186/1687-1847-2012-41

[11] A. Babakhani, V. D. Gejji, Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 278 (2003), 434-442.

[12] Z. B. Bai, T. T. Qiu, Existence of positive solution for singular fractional differential equation, Appl.Math. Comput., 215 (2009), 2761-2767.

[13] K. Balachandran, JY. Park, Nonlocal Cauchy problem for abstract fractional semilinear evolution equations, Nonlinear Anal-Theor., 71 (2009), 4471-4475.

[14] D. Baleanu, O. G. Mustafa, On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations, Comput. Math. Appl., 59 (2010), 1835-1841.

[15] A. Bashir, S. Sivasundaram, Some existence results for fractional integro-differential equations with nonlocal conditions, Communications in Applied Analysis, 12 (2008) 107-112.

[16] M. Benchohra, J.E. Lazreg, Nonlinear fractional implicit differential equations, Commun. Appl. Anal. 17 (2013), 471-482.

[17] M. Benchohra and F. Ouaar, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Bullten Of Mathematical analysis and Applications,Vol. 2 issue4, pp. 7-15, (2010).

[18] E. Buckwar, Y. Luchko, Invariance of a partial differential equation of fractional order under lie group of scaling trabsformations, J. Math. Anal. Appl., 227 (1998), 81-97.

[19] L. Changpin, S. Shahzad, Existence and continuation of solutions for Caputo type fractional differential equations, Electronic Journal of Differential Equations, 2016 (2016), 207, 1-14.

[20] D. Delbosco, L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl., 204 (1996), 609-625.

[21] M. Godefroy, La fonction Gamma ; Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, Paris,(1901)(1.1)

[22] Ye, H., Gao, J., and Ding, Y. A generalized gronwall inequality and its application to a fractional differential equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications 328, 2 (2007), 1075-1081.(1.3.3)

[23] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias, Stability of functional equations in several variables, Birkhauser, 1998.

[24] D.H. Hyers, On the stability of the linear functinal equation, Natl. Acad. Sci. U.S.A., 27 (1941), 222-224.

[25] S. M. Jung, Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in mathematical analysis, Hadronic Press, Palm Harbor, 2001.

[26] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, the Netherlands, NorthHolland, 2006.

[27] C. H. Kou, J. Liu, Y. Yan, Existence and uniqueness of solutions for the Cauchy-type problems of fractional differential equations, Discr. Dyn. Nat. Soc., 2010, 142-175.

[28] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlin. Anal., : TMA 69 (2008), 2677-2682.

[29] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, Nonlinear Anal.69 (2008), no. 10, 3337-3343.

[30] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, 1993.

[31] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. San Diego, CA, USA, Academic Press, 1999.

[32] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol.198. New York/London : Springer ;1999.

[33] Th. M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978) 297-300.

[34] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, fractional integrals and derivatives. Theory and Applications. Yverdon, Switzerland, Gordon and Breach Science, 1993.

[35] S. Samko, A. Kilbas, O.Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[36] S.M.Ulam, Problems in Moderm mathematics, John Wiley and Sons, New York, U.S.A., 1940.

[37] C. Yu, G. Gao, Existence of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 310 (2005), 26-29.

[38] S. Zhang, The existence of a positive solution for a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl., 252 (2000), 804-812.

[39] Y. Zhou, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore, 2014.