République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle. Bensalem Ahlem

Intitulé

Existence des solutions périodiques pour des systèmes différentiels à coefficients périodiques

Dirigé par : Prof. Mme. Badi Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	**Mme. Zenkoufi Lilia**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Mme. Badi Sabrina**	**Prof**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Mr. Menaceur Amor**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Septembre 2020

Existence des solutions périodiques pour des systèmes différentiels à coefficients périodiques

Bensalem Ahlem
Mémoire de Master en Mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

1er octobre 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à tous ceux que j'aime du fond de mon cœur :

À mes chères parents, qui ont sacrifié leurs vie pour ma réussite et qui ont éclairé mon chemin par leurs conseils judicieux. J'espère qu'un jour, je pourrais leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi.

À mon mari je le remercie pour ses conseils et encouragements.

À mes beaux frères Khaireddine et Tarek.

Merci d'être toujours là pour moi.

test

Remerciements

Voici l'occasion de remercier et de saluer ceux qui ont contribué au bon déroulement de ce travail.
Je tiens tout d'abord à remercier **Dieu** le tout puissant et miséricordieux, qui ma donné la force d'accomplir ce modeste travail.
Ensuite, j'adresse toute ma gratitude au Professeur Mme. **Badi Sabrina** ma directrice de ce mémoire, pour son encadrement exceptionnel en toute circonstance, elle a toujours été disponible et à l'écoute de mes questions.
Mes vifs remerciements vont également aux membre de jury d'avoir accepter examiner et d' évaluer mon travail.
Je remercie Mr.**Ameur Chinini** et Mr.**Oussama Akmoum** de m'avoir aider à la compréhension du langage latex.
Enfin, les mots ne sauraient remercier les membres de ma famille pour tout ce qu'ils font pour ma réussite, en particuliers mes parents qui m'ont toujours soutenu.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire s'intéresse à l'étude des systèmes différentiels périodiques de la forme

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

où $A(t)$ est une matrice à coefficients périodiques, c'est à dire

$$A(t+T) = A(t),$$

Nous exposons des théorèmes importants qui permettent de transformer un système différentiel à coefficients périodiques à un système différentiel à coefficients constants, grâce à une certaine transformation.

Nous abordons la notion de multiplicateur caractéristique qui permet de montrer l'existence des solutions périodiques pour une certaine valeur du multiplicateur et de déterminer aussi la stabilité des solutions.

Abstract

This memory is interested with the study of periodic differential systems of the form

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

where $A(t)$ is a matrix with periodic coefficients, that is to say

$$A(t+T) = A(t),$$

We expose important theorems which allow to transform a differential system with periodic coefficients to a differential system with constant coefficients using a certain transformation .

We illustrate the concept of characteristic multiplier which makes it possible to show the existence of periodic solutions for a certain value of the multiplier and also to determine the stability of the solutions.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة الجمل التفاضلية الدورية من الشكل :

$$\dot{x} = A(t)x, \ x \in \mathbb{R}^n$$

مع $A(t)$ مصفوفة ذات معاملات دورية يعني

$$A(t+T) = A(t),$$

سوف نكشف النظريات الهامة التي تسمح بتحويل جمل تفاضلية ذات معاملات دورية إلى جمل تفاضلية ذات معاملات ثابتة بفضل تحويل معين.

نطرح مفهوم المضاعف المميز الذي يجعل من الممكن إظهار وجود حلول دورية لقيمة معينة للمضاعف و أيضا لتحديد استقرار الحلول.

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est très vaste et très active en terme de recherche. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite l'évolution temporelle des systèmes physiques ; économiques ; chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous-jacente qui détermine leurs équations d'évolution. On représente cette évolution par des équations différentielles où des applications.

La notion des équations différentielles est apparu à la fin du 17 ème siècle, à cette époque, les équations différentielles s'introduisaient par le biais de problème d'origine mécanique ou géométrique comme par exemple : le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de gravitation newtonienne ,...etc.

La résolution directe d'un système différentiel est en général difficile ou impossible. Les méthodes numériques permettent seulement de calculer sur un intervalle de temps fini, une solution approchée correspondante à des conditions initiales données en discrétisant l'intervalle.

Cependant, un autre issue est possible. L'étude qualitative des systèmes différentiels introduite par **Poincaré** permet de fournir des informations sur le comportement des solutions d'un système différentiel sans la nécessité de le résoudre explicitement, et elle consiste à examiner les propriétés et les caractéristiques des solutions de ce système, et de justifier, parmi ces solutions, l'existence ou la non existence des solutions périodiques.

La théorie de **Floquet** est une branche de la théorie des systèmes différentiels ordinaires. Elle est reliée à une classe d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

$$\text{où } A(t+T) = A(t),$$

Le théorème fondamentale de cette théorie qui est dû à **Gaston Floquet (1883)**, permet de transformer un système différentiel à coefficients périodiques à un système différentiel à coefficients constants grâce à une certaine transformation.

Cette théorie est très importante dans l'étude des systèmes différentiels périodiques. Grâce à la notion de multiplicateur caractéristique, elle permet de montrer l'existence d'une solution périodique pour une certaine valeur du multiplicateur et de déterminer aussi la stabilité. Cependant pour déterminer les multiplicateurs caractéristiques, on a besoin d'une matrice fondamentale c'est à dire on a besoin de connaître toutes les solutions pour trouver la transformation qui réduit le système périodique à un système à coefficients constants, ceci qui n'est pas facile. A savoir, il existe une méthode numérique qui donne des approximations des multiplicateurs caractéristiques.

Ce mémoire comporte 3 chapitres :

- **Le premier chapitre** regroupe quelques notions de base, introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de ce mémoire.

- **Le deuxième chapitre** est consacré à l'études des systèmes différentiels à coefficients périodiques, nous introduisons le théorème de **Floquet** et celui de **Lyapunov**, nous définissons la notion de multiplicateur et nous présentons sa relation avec l'existence des solutions périodiques.

- **Le troisième chapitre** étudie la stabilité des solutions des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques.

Chapitre 1

Notions préliminaires et généralités

Nous abordons dans ce chapitre quelques définitions sur les systèmes différentiels, ceux autonomes et non autonomes, nous exposons aussi leur méthode de résolution. Nous introduisons les systèmes différentiels non linéaires et explicitons la notion de stabilité.

1.1 Systèmes différentiels

Définition 1.1.1 *Un système d'équations différentielles ordinaire :*

$$F_k(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé $y^{(k_1)}, y^{(k_2)}, ..., y^{(k_n)}$, *s'appelle système canonique, il s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ...y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}), \\ y_2^{(k_2)} = f_2(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ...y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}), \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(k_n)} = f_n(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ...y_n, ..., y_n^{(k_n-1)}). \end{cases} \qquad (1.2)$$

On appelle ordre du système (1.2) *le nombre* $P = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Exemple 1.1.1 *Ramenons à la forme canonique le système d'équations :*

$$\begin{cases} y_2 y_1' - ln(y_1'' - y_1) = 0, ...(a) \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0. \qquad ....(b) \end{cases}$$

En effet :
de (a) : $y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}$,

de (b) : $y_2' = \ln(y_1 + y_2)$.

Donc le système canonique est :

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}, \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2). \end{cases}$$

Ce système est d'ordre 3 *:* $P = k_1 + k_2 = 2 + 1 = 3.$

Définition 1.1.2 *Un système d'équations différentielles du* 1^{er} *ordre :*

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y_1, y_2, ..., y_n), \ t \in \mathbb{R}, \ k = \overline{1, n} \tag{1.3}$$

où t la variable indépendante et $y_1, y_2, ...y_n$ sont des fonctions inconnues de t s'appelle système normale. L'ordre du système (1.3) *est n.*

Remarque 1.1.1 *:*
1/On dit que deux systèmes sont équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.
2/Tout système canonique (1.2) *peut se ramener au système normale* (1.3) *(équivalent) et l'ordre de ces deux systèmes sera le même.*

Exemple 1.1.2 *Ramenons à la forme normale le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'' - y = 0, \\ t^3 y' - 2x = 0. \end{cases}$$

En effet, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x'' = y, \\ y' = \dfrac{2x}{t^3}. \end{cases}$$

L'ordre de ce système est : $2 + 1 = 3$.

D'autre part, posons :

$$\begin{cases} y_1 = x, \\ y_2 = x', \\ y_3 = y. \end{cases}$$

On obtient le système normale équivalent qui est :

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = \dfrac{2y_1}{t^3}. \end{cases}$$

Ce système est aussi d'ordre 3.

Remarque 1.1.2 *Toute équation différentielle et tout système canonique peut se transformer à la forme normale.*

Exemple 1.1.3 *Ramenons à la forme normale le système différentiel suivant :* $y'' = g(t, y, y')$.

En effet : Posant : $\begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y', \end{cases}$

on obtient : $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = g(t, y_1, y_2), \end{cases}$ *qui est sous forme normale.*

Définition 1.1.3 *Le système*

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

est dit non autonome lorsque la variable indépendante t apparait explicitement dans l'expression de f, dans le cas contraire il est dit autonome.

Théorème 1.1.1 ***(Existence)***
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Si* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue alors pour*

tout $(t_0, x_0) \in U$*, le problème*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

admet au moins une solution.

Définition 1.1.4 *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $f = f(t,x) : U \to \mathbb{R}^n$*.*

f *est localement lipschitzienne en* x*, si pour tout fermé et borné (compact)*

K *dans* U*, il existe une constante* $L > 0$ *telle que*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

pour tout (t, x_1) *et* (t, x_2) *dans* K*.*

Théorème 1.1.2 ***(Unicité)*** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*,*

$f = f(t,x) : U \to \mathbb{R}^n$ *est continue et localement lipschitzienne en* x*, alors*

pour tout $(t_0, x_0) \in U$*, le problème* (1.4) *admet une solution unique.*

1.2 Systèmes différentiels linéaires non autonomes

Définition 1.2.1 *Un système différentiel non autonome est dit linéaire s'il est de la forme :*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{1.5}$$

telle que $A(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une matrice carrée d'ordre* n *et* $t \in \mathbb{R}$*.*

- *Si* $B(t) \neq 0$*, le système* (1.5) *est dit linéaire non autonome non homogène.*
- *Si* $B(t) = 0$*, le système* (1.5) *est dit linéaire non autonome homogène.*

Théorème 1.2.1 *(Existence et unicité de la solution)*
Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad (P)$$

Où A(t) et B(t) sont continues sur un intervalle $\mathbf{I}$ *de* $\mathbb{R}$*. Alors pour tout* $t_0 \in \mathbf{I}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$*, le problème (P) admet une unique solution* $x(t)$ *dans* $\mathbf{I}$*.*

1.2.1 Notion de matrice fondamentale

Définition 1.2.2 *Si* $\phi(t)$ *est une matrice carrée ayant pour tout* $t \in \mathbf{I}$ *un déterminant non nulle et si* $\phi(t)$ *est solution de* $\dot{x} = A(t)x$
(ie $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$*) alors* $\phi(t)$ *est appelée matrice fondamentale du système* $\dot{x} = A(t)x$*.*

Exemple 1.2.1 *Soit le système :*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x,\ t \in \mathbb{R}^*.$$

Vérifions que :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

est bien une matrice fondamentale de ce système.

En effet :
On a : $\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$*, d'autre part*

$$A(t)\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t).$$

De plus

$$\det(\phi(t)) = -t^2 \neq 0, \, \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Donc $\phi(t)$ est une matrice fondamentale pour le système précédent.

Définition 1.2.3 *Considérons une matrice fondamentale de $\dot{x} = A(t)x$: $\phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)]$, alors*

$$w(t) = det(\phi(t)) = det[\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)]$$

est appelé le wronskien de la matrice fondamentale $\phi(t)$. Le wronskien satisfait une simple équation différentielle d'ordre 1.

Théorème 1.2.2 *(Théorème de Liouville)*

Considérons le système :

$$\dot{x} = A(t)x$$

où $A(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une matrice carrée d'ordre n et soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale de ce système, alors :

$$w(t) = \det(\phi(t))$$

satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{w} = (trace(A(t)))w(t)...........(*).$$

Par conséquent :

$$w(t) = \det(\phi(t)) = e^{\int trace(A(t)dt)}.$$

<u>**Preuve :**</u> L'équation $(*)$ est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt}\frac{1}{w(t)} = trace(A(t)) &\Longrightarrow \int \frac{dw(t)}{w(t)} = \int traceA(t)dt \\ &\Longrightarrow \ln(w(t)) = \int traceA(t)dt \\ &\Longrightarrow w(t) = exp(\int traceA(t)dt) = \det(\phi(t)). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 1.2.1 *On voit qu'on peut toujours calculer le déterminant de la matrice fondamentale même lorsque la matrice fondamentale n'est pas connue.*

1.2.2 Méthode de résolution

a) *Solution générale du système linéaire homogène :*

Théorème 1.2.3 *Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale du système linéaire homogène*

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.6}$$

La solution générale de (1.6) *est $x(t) = \phi(t)C$ où C est un vecteur constant. Si on considère de plus la condition initiale $x(t_0) = x_0$, l'unique solution de* (1.6) *vérifiant $x(t_0) = x_0$ est :*

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

b) *Solution générale du système linéaire non homogène :*

Considérons le système

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{1.7}$$

avec A(t) et B(t) sont continues sur **I** de $\mathbb{R}$, la solution générale de (1.7) est donnée par :

$$x(t) = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

où $\phi(t)$ est une matrice fondamentale du système homogène associé :

$$\dot{x} = A(t)x, \text{ et C un vecteur constant.}$$

Si on considère de plus la condition initiale $x(t_0) = x_0$, l'unique solution de (1.7) sera :

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

Preuve :

La solution générale du système (1.7) est :

$$x(t) = x_{GH}(t) + x_p(t),$$

où $x_{GH}(t) = \phi(t)C$ est la solution générale du système homogène associé

$$\dot{x} = A(t)x,$$

et $x_p(t)$ est la solution particulière du système

$$\dot{x} = A(t)x + B(t),$$

qu'on trouve par variation de la constante.

Substituons $x_p(t) = \phi(t)C(t)$ dans (1.7) , on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) &= A(t)x_p(t) + B(t)\\ &= A(t)\phi(t)C(t) + B(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\phi(t)C(t) + B(t)\\ &\Rightarrow \dot{\phi}(t)C(t) + \phi(t)\dot{C}(t) = \dot{\phi}(t)C(t) + B(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds\\ &\Rightarrow x_p(t) = \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds.\end{aligned}$$

Donc :

$$x(t) = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)ds,\ C = constant$$

1.3 Systèmes différentiels linéaires autonomes

Définition 1.3.1 *On appelle système différentiel linéaire autonome le système*

$$\dot{x} = Ax + B \tag{1.8}$$

telle que $A : \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$ est une matrice constante et B un vecteur constant.

• *Si $B \neq 0$, le système (1.8) est dit linéaire autonome non homogène.*
• *Si $B = 0$, le système (1.8) est dit linéaire autonome homogène.*

Définition 1.3.2 *On appelle exponentielle de la matrice $A(n \times n)$, la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{A^n}{n!}$ et on note e^A ou $\exp A$.*
• *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax,\ A \in M_n(\mathbb{R}). \tag{1.9}$$

$\phi(t) = e^{At}$ *est une matrice fondamentale de* (1.9) *vérifiant* $\phi(0) = \mathbf{I}$.
On a $e^{At} = \sum_{\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$. *Cherchons les solutions de* (1.9) *sous la forme*

$$x = e^{\lambda t} w, \tag{1.10}$$

où w est un vecteur non nul.

En substituant (1.10) *dans* (1.9), *on trouve :*

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} w = A e^{\lambda t} w &\Longrightarrow e^{\lambda t}(A - \lambda I) w = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de } A. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 *Le système* (1.9) *admet une solution (non identiquement nul)* $x = e^{\lambda t} w$ *si et seulement si* λ *est une valeur propre de* A *et* w *le vecteur propre correspondant.*

1.3.1 Méthode de résolution

a) Résolution d'un système différentiel linéaire autonome homogène :

Soit le système

$$\dot{x} = Ax, \;\; A \in M_n(\mathbb{R}).$$

- <u>1^{er} cas :</u> Les valeurs propres de A sont réelles et distinctes.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ les valeurs propres de A réelles et distinctes et $w_1, w_2, ...w_n$ les vecteurs propres correspondants, alors une matrice fondamentale est donnée par :

$$\phi(t) = [e^{\lambda_1 t} w_1, ..., e^{\lambda_n t} w_n],$$

et la solution générale de (1.9) est :

$$x(t) = \phi(t) C, \;\; \text{où C est un vecteur constant.}$$

Si on rajoute la condition initiale $x(t_0) = x_0$, alors l'unique solution du problème sera :

$$x(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}x_0.$$

Exemple 1.3.1 *Résolvons le système :*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad \text{où } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

En effet :

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ (réelles distinctes).

Les vecteurs propres correspondant sont respectivement : $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$,

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{-5}{2}e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ -5e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale de système est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ -5e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ *= vecteur constant.*

- <u>$2^{ème}$ cas :</u> Les valeurs propres de A sont réelles multiples.

Soit λ une valeur propre de A de multiplicité $k \leq n$, alors pour chaque $k = \overline{1;n}$, chaque solution non nulle w de $(A - \lambda I)^k w = 0$ s'appelle vecteur propre généralisé de A.

Théorème 1.3.2 *Soit A une matrice réelle d'ordre n qui possède des valeurs propres réelles $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ répétées selon leurs multiplicités, alors il existe une base de vecteurs propres généralisés $(w_1, w_2, ..., w_n)$ et une matrice inversible $P = [w_1, w_2, ..., w_n]$ telle que $A = S + N$ où*

$$P^{-1}SP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et $N = A - S$ est une matrice nilpotente d'ordre $k \leq n$ (avec S et N commutative : $SN = NS$).

Corollaire 1.3.1 *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, le problème :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

possède une solution de la forme :

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & . \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}[I + Nt + ... + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}]x_0.$$

Exemple 1.3.2 *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :
Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -1$ (*double*), $\lambda_2 = 2$ (*simple*).
Les vecteurs propres de A sont respectivement : $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}(comP)^t = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Maintenant de :

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow S = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient : $S = A$ *et* $N = A - S = 0$.

La solution du problème est alors :

$$x(t) = P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}[I + 0 + 0 + ... + 0]x_0$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}x_0, \text{ où } x_0 = \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ x_{0_2} \\ x_{0_3} \end{pmatrix} = \text{vecteur constant.}$$

- $3^{ème}$ cas : Les valeurs propres de A sont complexes distinctes.

Théorème 1.3.3 *Si la matrice* $A(2n \times 2n)$ *possède* $2n$ *valeurs propres complexes distinctes* $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$, $\overline{\lambda_j} = a_j - \mathrm{i}b_j$, $j = \overline{1;n}$ *dont les vecteurs propres correspondants* $w_j = u_j + \mathrm{i}v_j$, $\overline{w_j} = u_j - \mathrm{i}v_j$, *alors* $\{u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^{2n}$ *; la matrice* $P = [v_1u_1, v_2u_2, ..., v_nu_n]$ *est inversible et vérifie :*

$$P^{-1}AP = diag \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix},\ j = \overline{1;n}.$$

Cette matrice diagonale est une matrice réelle avec des blocs 2×2 *le long de la matrice diagonale.*

Remarque 1.3.1 *Notons que si à la place de la matrice* P*, nous utilisons la matrice inversible* $Q = \left[u_1 v_1, u_2 v_2, ..., u_n v_n\right]$ *alors* Q *vérifie :*

$$Q^{-1}AQ = diag \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix},\ j = \overline{1;n}.$$

Corollaire 1.3.2 *Sous les hypothèses du théorème ci dessus, la solution du problème :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est donnée par :

$$x(t) = P diag \left[e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix} \right] P^{-1} x_0.$$

Exemple 1.3.3 *Soit le système :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Les valeurs propres de la matrice A *sont :* $\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$,
$\lambda_3 = 2 - \mathrm{i}$, $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$.

Les vecteurs propres de A *sont respectivement :*

$$w_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } w_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

d'où La solution générale de ce système est :

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1}C$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t & 0 & 0 \\ -e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}(\cos t - \sin t) & 2e^{2t} \cos t \\ 0 & 0 & -e^{2t} \sin t & e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

sachant que : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\underline{4^{ème} \text{ cas :}}$ Les valeurs propres de A sont complexes multiples.

Théorème 1.3.4 *Soit A une matrice réelle* $(2n \times 2n)$ *avec des valeurs propres complexes multiples* $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ *et* $\overline{\lambda_j} = a_j - \mathrm{i}b_j$, $j = \overline{1;n}$.

Il existe une base de vecteur propre généralisé : $w_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ *et* $\overline{w_j} = u_j - \mathrm{i}v_j$, $j = \overline{1;n}$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$: $[u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n]$. *Pour une telle base, la matrice* $P = [v_1u_1, v_2u_2, ..., v_nu_n]$ *est inversible et vérifie :* $A = S + N$,
$P^{-1}SP = diag \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$ *et* N *est nilpotente d'ordre* $k \leqslant 2n$.

Corollaire 1.3.3 *Sous les hypothèses du théorème précèdent, la solution du problème* $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$ *est donnée par :*

$$x(t) = P\ diag\left[e^{a_j t}\begin{pmatrix}\cos(b_j t) & -\sin(b_j t)\\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t)\end{pmatrix}\right]\ P^{-1}[I + Nt + ...\frac{N^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}]x_0.$$

Exemple 1.3.4 *Considérons le système :* $\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t),\\ x(0) = x_0,\end{cases}$

$$avec\ A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = \mathrm{i}$ *(double),* $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ *(double).*
Les vecteurs propres de A sont respectivement :

$$w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ d\text{'où}\ P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$On\ a : P^{-1}SP = diag\begin{bmatrix}a_j & -b_j\\ b_j & a_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow S = P\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}P^{-1}\ ,\ sachant\ que : P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow S = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$par\ suite : N = A - S = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Notons que N est nilpotente d'ordre 2.
Alors la solution est :

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} P^{-1}[I + Nt]x_0.$$

- $\underline{5^{\grave{e}me}\text{ cas :}}$ Les valeurs propres de A sont réelles et complexes distinctes.

Théorème 1.3.5 *Si A admet des valeurs propres réelles distinctes λ_j dont les vecteurs propres v_j, $j = \overline{1;k}$ et elle possède aussi des valeurs propres complexes distinctes $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ et $\overline{\lambda_j} = a_j - \mathrm{i}b_j$ dont les vecteurs propres associés sont $w_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ et $\overline{w_j} = u_j - \mathrm{i}v_j$, alors :*

$$P = [v_1, v_2, ..., v_k, v_1u_1, ..., v_nu_n]$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \beta_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

où le bloc : $\beta_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$ *et* $j = \overline{k+1;n}$.

Alors la solution générale du système est donnée par :

$$x(t) = PMP^{-1}C, \text{ où } C \text{ est un vecteur constant}$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \cdots & & 0 & & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_k t} & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & e^{a_{k+1}t}\begin{pmatrix} \cos(b_{k+1}t) & -\sin(b_{k+1}t) \\ \sin(b_{k+1}t) & \cos(b_{k+1}t) \end{pmatrix} & & \\ & & 0 & & & e^{a_n t}\begin{pmatrix} \cos(b_nt) & -\sin(b_nt) \\ \sin(b_nt) & \cos(b_nt) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.5 *Soit le système :*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t),$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2 - \mathrm{i},\ \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$.

Les vecteurs propres de A sont respectivement :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d'où

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale est :

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} P^{-1}C,\ C\text{=vecteur constant.}$$

b) Résolution d'un système différentiel linéaire autonome non homogène :

La solution générale du système

$$\dot{x} = Ax + B \tag{1.11}$$

est $x_G(t) = x_{GH}(t) + x_p(t)$, où $x_{GH}(t)$ est la solution générale du système homogène associé

$$\dot{x} = Ax,$$

c'est à dire $x_{GH}(t) = \phi(t)C$ avec C= vecteur constant et $x_p(t)$ est une solution particulière de (1.11), qu'on trouve par la méthode de variation de constante comme dans la partie précédente. On obtient alors l'expression de la solution générale du système (1.11) :

$$x_G(t) = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)Bds.$$

1.4 Systèmes différentiels non linéaires

Il n'y a pas de méthode générale pour la résolution des systèmes différentiels non linéaires, c'est pour cela qu'on s'intéresse au comportement des solutions sans avoir à chercher leur expression explicite. Cette théorie appelée étude qualitative des équations différentielles est dû à **Poincaré** au dix-neuvième siècle.

Soit le système différentiel non linéaire et non autonome

$$\dot{x} = f(t,x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

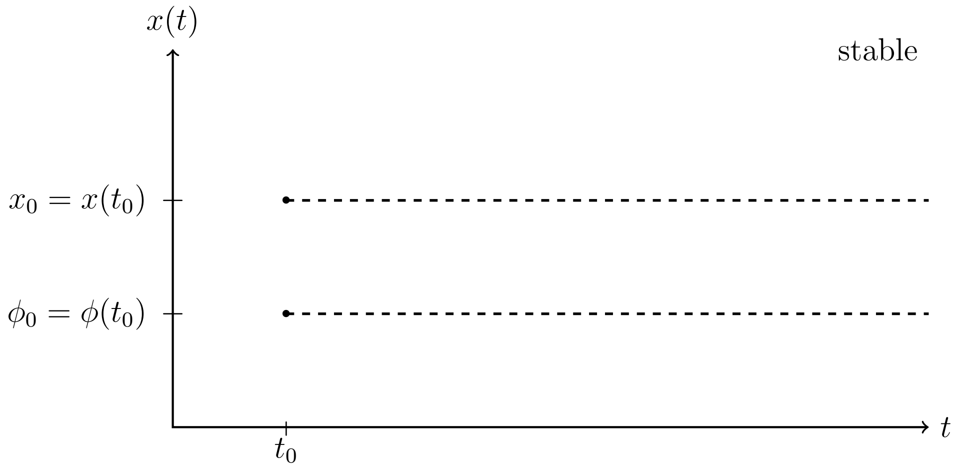
1.4.1 Notion de stabilité

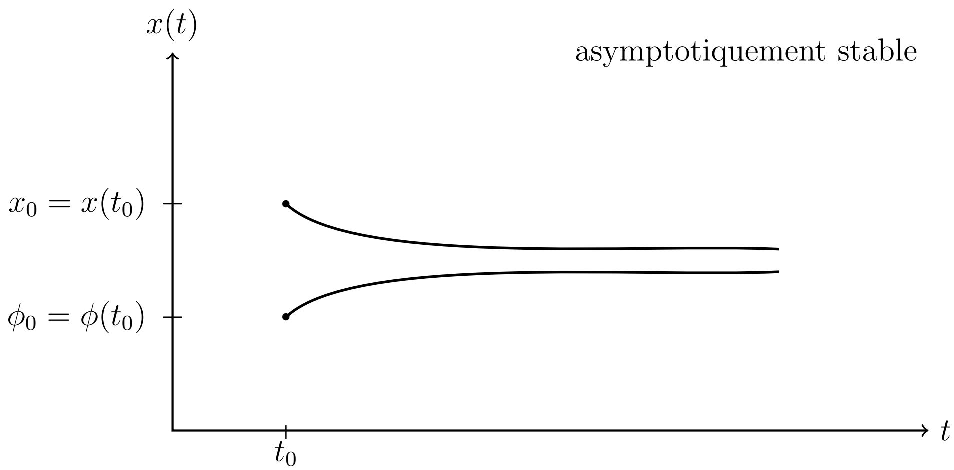
Définition 1.4.1 *:*
• *Une solution $\phi(t)$ du système* (1.12) *vérifiant la condition initiale $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable si : $\forall \epsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de* (1.12) *vérifiant $x(t_0) = x_0$, on a*

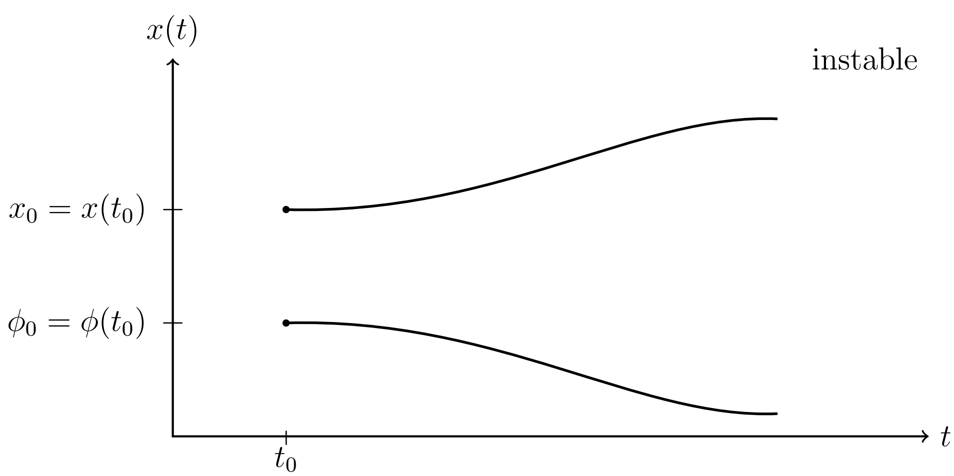
$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 \ ....(*)$$

Si de plus $\lim_{t\to+\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

• *La solution $\phi(t)$ est instable si pour $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, l'inégalité $(*)$ n'est pas vérifiée pour au moins une solution $x(t)$.*


$x(t)$
stable
$x_0 = x(t_0)$
$\phi_0 = \phi(t_0)$
t_0
t


$x(t)$
asymptotiquement stable
$x_0 = x(t_0)$
$\phi_0 = \phi(t_0)$
t_0
t


$x(t)$
instable
$x_0 = x(t_0)$
$\phi_0 = \phi(t_0)$
t_0
t

Exemple 1.4.1 *Montrons que la solution du problème est stable.*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \qquad \textit{avec : } x(0) = y(0) = 0.$$

En effet :

Cherchons d'abord $\phi(t)$ qui vérifie

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ensuite $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, *telle que* $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Notre système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{X} = AX,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -\mathrm{i}$.
Les vecteurs propres de la matrice A sont respectivement : $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
d'où :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Alors la solution générale de $\dot{X} = AX$ est :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Pdiag \left[e^{0t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \right] P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où c_1, c_2 deux constantes,

donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos(t) - c_2\sin(t) \\ c_1\sin(t) + c_2\cos(t) \end{pmatrix}$$

est la solution générale de $\dot{X} = AX$.

Maintenant : $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 = c_1, \\ y(0) = 0 = c_2, \end{cases}$

donc $c_1 = c_2 = 0$, *on obtient alors la solution :*

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ *la solution nulle est la solution de notre problème dont on cherche la stabilité.*
Or pour $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = c_1, \\ y(0) = y_0 = c_2, \end{cases}$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est la solution de $\dot{X} = AX$ *qui vérifie* $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

D'après la définition de la stabilité, $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est stable si et seulement si :*

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *pour tout* $X(t)$ *telle que* $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ y_0 - 0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) - 0 \\ y(t) - 0 \end{pmatrix} \right\| < \epsilon,\ \forall t > t_0$$

on a :

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) \end{matrix} \right\|,$$

On choisit la norme suivante : $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|$, *par suite :*

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| \\
&= |x_0 \cos(t) - y_0 sin(t)| + |x_0 \sin(t) + y_0 cos(t)| \\
&< |x_0 \cos(t)| + |y_0 \sin(t)| + |x_0 \sin(t)| + |y_0 \cos(t)| \\
&< |x_0| |\cos(t)| + |y_0| |\sin(t)| + |x_0| |\sin(t)| + |y_0| |\cos(t)| \\
&< |x_0| + |y_0| + |x_0| + |y_0| \\
&< 2(|x_0| + |y_0|) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, *d'où la solution* $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est stable.*

Est-ce-que cette stabilité est asymptotique ?

La réponse est non car :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|^2 &= \lim_{t\to+\infty} [x^2(t) + y^2(t)] \\
&= \lim_{t\to+\infty} [(x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t))^2 + (x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t))^2] \\
&= \lim_{t\to+\infty} x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Stabilité des solutions pour les systèmes $\dot{x} = Ax$.

Théorème 1.4.1 *Soit le système* $\dot{x} = Ax$ *où* A *une matrice inversible et soit* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres de* A.

(i) *Si* $\mathbf{Re}(\lambda_k) < 0$, $k = \overline{1;n}$, *alors pour chaque* $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$, *il existe deux constantes positives* ξ *et* μ *telle que :*

$$\| x(t) \| < \xi \| x_0 \| \exp(-\mu t)$$

$$et \quad \lim_{t\to+\infty} \| x(t) \| = 0,$$

d'où $x(t) = 0$ *est asymptotiquement stable.*

(ii) *Si* $\mathbf{Re}(\lambda_k) \leq 0,\ k = \overline{1;n}$ *avec les valeurs propres dont* $\mathbf{Re}(\lambda_k) = 0$ *sont distinctes, alors* $x(t)$ *est bornée pour* $t \geq t_0$*, et on a*

$$\parallel x(t) \parallel \leq \xi \parallel x_0 \parallel,\ \xi = \textit{constante positive}$$

et $x(t) = 0$ *est stable.*

(iii) *S'il existe* λ *une valeur propre de* A*, avec* $\mathbf{Re}(\lambda) > 0$*, alors dans chaque voisinage de* $x = 0$ *il y a des valeurs initiales telles que pour les solutions correspondantes on a :* $\lim_{t\to+\infty} \parallel x(t) \parallel = \infty$ *et* $x(t) = 0$ *est instable.*

Exemple 1.4.2 *On considère le système de l'exemple précédent*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice A *associée à ce système sont :*

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i.$$

On remarque que $\mathbf{Re}(\lambda_k) = 0,\ i = 1, 2$*, donc d'après le théorème précédent, toutes les solutions sont stables.*

1.4.2 Point d'équilibre et linéarisation

Soit le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \tag{1.13}$$

Définition 1.4.2 *Le point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *est dit point critique (ou singulier, ou point d'équilibre) pour le système*

$$\dot{x} = f(x)$$

s'il vérifie $f(x_0) = 0$.

Remarque 1.4.1 *Un point qui n'est pas critique est dit régulier.*

Définition 1.4.3 *Une solution périodique* $x(t)$ *pour le système* $\dot{x} = f(x)$ *est une solution qui n'est pas un point singulier, pour laquelle il existe un nombre* $T > 0$ *appelé période vérifiant* $x(t+T) = x(t)$.

Définition 1.4.4 *Considérons le système différentiel autonome* (1.13) *et soit* x_0 *un point singulier pour ce système.*

Le système $\dot{x} = Ax$ *où*

$$A = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)] = Df(x_0), \qquad i,j = \overline{1;n}.$$

est appelé le système linéarisé du système (1.13) *au point* x_0.

Exemple 1.4.3 *Soit le système non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = y^2 + x. \end{cases} \tag{1.14}$$

Il est clair que $f(x_0) = 0$, *entraine que* $x_0 = (0,0)$ *est le seul point d'équilibre de ce système. Déterminons le système linéarisé de ce système en* $(0,0)$.

On a :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le système linéarisé du système (1.14) *est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Définition 1.4.5 *On appelle point d'équilibre hyperbolique du système $\dot{x} = f(x)$, tout point d'équilibre x_0 telles que toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont une partie réelle non nulle.*

Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit non hyperbolique.

Exemple 1.4.4 *Le point d'équilibre $(0,0)$ du système (1.14) est non hyperbolique puisque les valeurs propres de la matrice $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont :*

$$\lambda_1 = \mathrm{i} \ \textit{et} \ \lambda_2 = -\mathrm{i}.$$

Exemple 1.4.5 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y^2 - y. \end{cases} \tag{1.15}$$

Les points d'équilibres de ce système sont : $(0,0)$ et $(-1,1)$.

- *Le système linéarisé du système (1.15) au voisinage du point $(0,0)$ est :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$, alors le point $(0,0)$ est hyperbolique.

- *Le système linéarisé du système (1.15) au voisinage du point $(-1,1)$ est :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est : $\lambda = 1$, alors ce point est aussi hyperbolique.

Remarque 1.4.2 *:*
1) *La linéarisation s'applique seulement lorsque le point critique est "hyperbolique".*

2) *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

1.4.3 Classification des points d'équilibre

Définition 1.4.6 *On considère le système :*

$$\dot{x} = Ax, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ *et* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice inversible .*

Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres de* A*,* x_0 *le point d'équilibre.*

• *Si les valeurs propres* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont réelles et de même signe, le point d'équilibre* x_0 *est appelé* ***noeud****.*

• *Si les valeurs propres* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont réelles, non nulles et de signe différent, le point d'équilibre* x_0 *est appelé* ***selle****.*

• *Si les valeurs propres* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont complexes avec* $\mathbf{Im}(\lambda_1) \neq 0$ *et* $\mathbf{Re}(\lambda_i) \neq 0$*,* $i = \overline{1; n}$ *le point d'équilibre* x_0 *est appelé* ***foyer****.*

• *Si les valeurs propres* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont complexes avec* $\mathbf{Im}(\lambda_1) \neq 0$ *et* $\mathbf{Re}(\lambda_i) = 0$*,* $i = \overline{1; n}$ *le point d'équilibre* x_0 *est appelé* ***centre****.*

Théorème 1.4.2 *Soit* x_0 *un point critique de* $\dot{x} = f(x)$*,* J *la matrice Jacobienne de* f *au point* x_0*.*

• *Si toutes les valeurs propres de la matrice* J *ont des parties réelles strictement négatives, alors* x_0 *est dit* ***puits****.*

• *Si l'une des valeurs propres de* J *a une partie réelle strictement positive alors* x_0 *est dit* ***source****.*

• *Si* $\mathbf{Re}(\lambda_k) \neq 0$ *"hyperbolique" et si les valeurs propres de la matrice* J *ont au moins une partie réelle positive et une partie réelle négative alors* x_0 *est dit* ***selle****.*

Exemple 1.4.6 *Soit le système non linéaire autonome :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = 3x^3 + y. \end{cases}$$

Ce système a un seul point d'équilibre qui est l'origine $(0,0)$*, le système linéarisé en ce point est :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles de même signe positif :

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 1.$$

Alors le point critique $(0,0)$ *est une source.*

1.4.4 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de **Hartman-Grobman** est un résultat important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point critique hyperbolique x_0 le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.16}$$

a la même structure qualitative du système linéarisé

$$\dot{x} = Df(x_0)x. \tag{1.17}$$

Autrement dit, si l'origine est un point selle ou foyer ou noeud pour le système (1.17) alors le point critique x_0 sera respectivement selle ou foyer ou noeud pour le système (1.16).

Cependant si l'origine est de type centre pour le système (1.17) alors on ne peut rien dire sur la nature du point critique x_0 de (1.16).

Exemple 1.4.7 *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y, \end{cases}$$

l'origine (0,0) est le seul point critique de ce système, le système linéarisé en ce point est :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles de signes différents :

$$\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -2.$$

Alors le point $(0,0)$ *est un point selle. Donc le point critique* $(0,0)$ *du système non linéaire est aussi du type selle.*

Exemple 1.4.8 *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3. \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ *est le seul point critique de ce système, le système linéarisé en ce point est :*

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il admet deux valeurs propres imaginaires pures : $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$.

Alors le point critique $(0,0)$ *est un centre, mais pour le système non linéaire on ne peut rien dire.*

Chapitre 2

Théorie de Floquet

Dans ce chapitre, on va définir certaines notions élémentaires liées aux systèmes différentiels à coefficients périodiques à savoir, la matrice de monodromie, les multiplicateurs caractéristiques, les exposants caractéristiques. On va montrer l'existence de solutions périodiques pour ce type de système pour certaines valeurs du multiplicateurs. Nous montrons à travers le théorème de **Floquet** et celui de **Lyapounov**, qu'un système différentiel à coefficients périodiques peut se transformer par une simple transformation à un système différentiel à coefficients constants.

La forme générale des systèmes linéaires à coefficients périodiques qu'on va étudier dans ce chapitre est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.1}$$

où

$$A(t+T) = A(t),$$

c'est à dire que A(t) est une matrice carrée, tous ses éléments sont périodiques.

Remarque 2.0.1 *les systèmes de type* (2.1) *peuvent avoir des solutions non périodiques. Montrons ceci à travers cet exemple.*

Exemple 2.0.1 *Considérons le système :*

$$\frac{dx}{dt} = (1 + \sin(t))x, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

où

$$A(t) = 1 + \sin(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} A(t+T) &= A(t+2\pi) \\ &= 1 + \sin(t+2\pi) \\ &= 1 + \sin(t) \\ &= A(t), \end{aligned}$$

donc A(t) est périodique de période $T = 2\pi$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \dot{x} = (1+\sin t)x \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= (1 + sin(t))x \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} &= (1+\sin(t))dt \\ &\Rightarrow \ln(x) = t - \cos(t) + C \\ &\Rightarrow x(t) = Ce^{t-\cos(t)},\ C = constant. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} x(t+2\pi) &= Ce^{t+2\pi-\cos(t+2\pi)} \\ &= Ce^{t+2\pi-\cos(t)} \\ &= Ce^{t-\cos(t)}e^{2\pi} \\ &= x(t)e^{2\pi}, \end{aligned}$$

d'où $x(t+2\pi) \neq x(t)$.

Ce qui signifie que $x(t)$ *n'est pas une solution périodique.*

Théorème 2.0.1 *Soit* $\phi(t)$ *une matrice fondamentale de* (2.1)*, alors* $\phi(t+T)$ *l'est aussi, et il existe une matrice constante* C *inversible telle que :*

$$\phi(t+T) = \phi(t)C.$$

Preuve :

Soit $\phi(t) = (\phi^{(1)}, ..., \phi^{(n)})$ une matrice fondamentale de (2.1) où $\phi^{(i)}$, i=1,...,n sont n vecteurs solutions linéairement indépendants.

On a :

$$\frac{\phi(t)}{dt} = A(t)\phi(t),$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\phi(t+T)}{dt} &= A(t+T)\phi(t+T)\\ &= A(t)\phi(t+T).\end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale (2.1).

D'autre part, on sait qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(t+T) = C_{11}\phi^{(1)}(t) + ... + C_{n1}\phi^{(n)}(t) \\ . \\ . \\ . \\ \phi^{(n)}(t+T) = C_{1n}\phi^{(1)}(t) + ... + C_{nn}\phi^{(n)}(t) \end{cases}$$

d'où :

$$\phi(t+T) = (\phi^{(1)}(t+T)...\phi^{(n)}(t+T)) = (\phi^{(1)}(t)...\phi^{(n)}(t)) \begin{pmatrix} C_{11} & . & . & . & C_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ C_{n1} & . & . & . & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(t+T) = \phi(t)C. \tag{2.2}$$

D'où

$$C = \phi^{-1}(t).\phi(t+T).$$

Pour t=0, on obtient :

$$C = \phi^{-1}(0).\phi(T).$$

Si on suppose que $\phi(t)$ est telle que $\phi(0) = I$ et on note : $\phi(t) = \phi(t, 0)$,

on aura : $\phi^{-1}(0) = I$ et

$$C = \phi(T) = \phi(T, 0) \tag{2.3}$$

par suite (2.2) devient :

$$\phi(t + T, 0) = \phi(t, 0).\phi(T, 0) \tag{2.4}$$

La matrice inversible C définie par (2.3) s'appelle matrice principale ou matrice de monodromie du système (2.1).

Définition 2.0.1 *Les valeurs propres de la matrice de monodromie C définie par* (2.3) *sont appelées les multiplicateurs caractéristiques du système* (2.1)*.*

Proposition 2.0.1 *Les multiplicateurs caractéristiques ne dépendent pas du choix de la matrice fondamentale mais dépendent du système* (2.1)*.*

Preuve :

Étant $\phi(t)$ une matrice fondamentale, soit $\tilde{\phi}(t)$ une autre matrice fondamentale $\Rightarrow \exists$ une matrice $\tilde{C}$:

$$\tilde{\phi}(t + T) = \tilde{\phi}(t)\tilde{C}$$

d'autre part, il existe une matrice constante inversible B telle que :

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t)B$$

d'où :

$$\tilde{\phi}(t + T) = \phi(t)B\tilde{C}$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t + T) = \phi(t + T)B &\Rightarrow \tilde{\phi}(t + T) = \phi(t)CB \\ &\Rightarrow B\tilde{C} = CB \\ &\Rightarrow \tilde{C} = B^{-1}CB \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{C}$ est semblable à C (donc ils ont les mêmes valeurs propres). Donc $\tilde{C}$ et C ont les mêmes multiplicateurs caractéristiques.

D'où le spectre de toutes ces matrices de monodromies correspondant à des matrices fondamentales différentes est invariant.

Exemple 2.0.2 *Soit le système linéaire périodique :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où $h(t) = \dfrac{(\cos t + \sin t)}{(2 + \sin t - \cos t)}$.

Déterminons les multiplicateurs caractéristiques pour ce système.

En effet :

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = h(t)x_2. \end{cases}$$

Remarquons que $A(t)$ *est bien périodique de période* 2π.

De la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} = h(t)x_2 \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{x_2} &= h(t)dt \\ \Rightarrow \ln x_2 &= \int h(t)dt \\ \Rightarrow \ln x_2 &= \ln(2 + \sin t - \cos t) + c \\ \Rightarrow x_2 &= (2 + \sin t - \cos t)e^c \\ \Rightarrow x_2 &= b(2 + \sin t - \cos t), \text{ où } b = e^c \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

On remplace x_2 *par sa valeur dans la* $1^{\text{ère}}$ *équation :* $\dot{x}_1 - x_1 = x_2$, *dont la solution générale est :* $x_1 = x_{GH} + x_p$.

- *Calcule de la solution homogène x_{GH} de l'équation $\dot{x}_1 - x_1 = 0$*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 - x_1 = 0 &\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_1\\ &\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = dt\\ &\Rightarrow \int \frac{dx_1}{x} = \int dt\\ &\Rightarrow \ln x_1 = t + c\\ &\Rightarrow x_{GH} = ce^t,\ c = constante.\end{aligned}$$

- *Calcule de la solution particulière x_p par variation de constante :*

On pose : $x_p(t) = c(t)e^t$ dans l'équation $\dot{x}_1 - x_1 = x_2$ on trouve :

$$x_p(t) = -b(2 + \sin t),$$

d'où la solution générale du système est :

$$x_1 = ce^t - b(2 + \sin t),\ c,=cte.$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^t - b(2 + \sin t) \\ b(2 + \sin t - \cos t) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Cherchons une matrice fondamentale $\phi(t)$:

posons dans (2.5) *:*

$$c = 0,\ b = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \sin t \\ 2 + \sin t - \cos t \end{pmatrix},\ 1^{er}\ \textit{vecteur solution}\ .$$

Maintenant on considère :

$c = 1,\ b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, $2^{\text{ème}}$ *vecteur solution .*

$$Alors\ la\ matrice\ \phi(t) = (\phi^{(1)}(t), \phi^{(2)}(t))$$

$$= \begin{pmatrix} -2 - sint & e^t \\ 2 + \sin t - \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

est bien une matrice fondamentale.

D'après la définition la matrice de monodromie, C est définie par :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de C vérifient :

$$\det(C - I\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2\pi} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(e^{2\pi} - \lambda) = 0.$$

Donc les multiplicateurs caractéristiques sont :

$$\Leftrightarrow \lambda = 1\ ou\ \lambda = e^{2\pi}.$$

Remarque 2.0.2 *Puisque la matrice C est inversible elle n'admet pas zéro comme valeur propre.*

Théorème 2.0.2 *Si λ un multiplicateur caractéristique de (2.1), alors il existe une solution non triviale $\varphi(t)$ de (2.1) telle que :*

$$\varphi(t+T) = \lambda\varphi(t)$$

pour tout t.

Inversement : *Si pour une solution non triviale φ de (2.1) on a :*

$$\varphi(T) = \lambda\varphi(0),$$

alors λ est un multiplicateur caractéristique, et de plus $\varphi(0)$ est le vecteur propre correspondant.

Preuve :

Soit λ un multiplicateur caractéristique et $S \neq 0$ le vecteur propre correspondant.

Considérons la solution $\varphi(t)$ de (2.1) qui prend la valeur S pour $t = 0$: $\varphi(0) = S$.
On a :

$$\varphi(t) = \phi(t,0)S$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(t+T) &= \phi(t+T,0)S \\ &= \phi(t,0)CS \\ &= \phi(t,0)\lambda S \\ &= \lambda\phi(t,0)S \\ &= \lambda\varphi(t), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Inversement : Supposons qu'on a : $\varphi(T) = \lambda\varphi(0)$ pour une solution non triviale $\varphi(t)$.

Comme :

$$\varphi(T) = \phi(T,0)\varphi(0)$$

ceci signifie que :

$$\phi(T,0)\varphi(0) = \lambda\varphi(0),$$

c'est à dire :

$$\begin{gathered} C\varphi(0) = \lambda\varphi(0) \\ \Rightarrow (C-\lambda I)\varphi(0) = 0 \\ \Rightarrow \det(C-\lambda I) = 0 \end{gathered}$$

$\Rightarrow \lambda$ est un multiplicateur caractéristique et $\varphi(0)$ est bien le vecteur propre correspondant. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.0.1 *Le système* (2.1) *possède une solution T-périodique (resp* $2T$ *périodique) si et seulement si le nombre* 1 *(resp (-1)) est un multiplicateur caractéristique.*

<u>Preuve :</u>

Si 1 est un multiplicateur caractéristique $\Rightarrow \exists V \neq 0$ telle que : $CV = V$, c'est à dire $\phi(T, 0)V = V$.

Soit la solution $\varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = V$
on a :

$$\varphi(t) = \phi(t)V$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(t+T) &= \phi(t)CV \\ &= \phi(t)V \\ &= \varphi(t), \end{aligned}$$

donc $\varphi(t)$ est T-périodique.

De même :

Si (-1) est un multiplicateur caractéristique on a :

$$\exists V \neq 0 \text{ telle que : } CV = -V \Rightarrow \phi(T, 0)V = -V.$$

Soit la solution $\varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = V$,
on a :

$$\varphi(t) = \phi(t)V,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(t+2T) = \varphi(t+T+T) &= \phi(t+T)CV \\ &= -\phi(t+T)V \\ &= -\phi(t)CV \\ &= -\phi(t)(-V) \\ &= \phi(t)V \\ &= \varphi(t). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ est $2T$-périodique.

Réciproquement : Si $\varphi^1(t)$ est une solution T -périodique non nulle, alors :

$$\varphi^1(t+T) = \varphi^1(t)$$

d'où :

$$\varphi^1(T) = \varphi^1(0)$$

ceci implique

$$C\varphi^1(0) = \varphi^1(0)$$

donc 1 est un multiplicateur caractéristique car $\varphi^1(0) \neq 0$.

De même : Si $\varphi^2(t)$ est une solution $2T$ - périodique non nulle,
on a

$$\varphi^2(2T) = C^2\varphi^2(0) = \varphi^2(0)$$

avec $\varphi^2(0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (C^2 - I)\varphi^2(0) = 0 \\
&\Rightarrow 1 \textit{ est une valeur propre de } C^2,\ (\varphi^2(0) \neq 0) \\
&\Rightarrow (C^2 - I)\varphi^2(0) = (C+I)(C-I)\varphi^2(0) = 0,\ (\varphi^2(0) \neq 0) \\
&\Rightarrow \det(C+I)\det(C-I) = 0.
\end{aligned}$$

Si (-1) n'est pas un multiplicateur caractéristique alors :

$$\det(C+I) \neq 0$$

d'où :

$$\det(C-I) = 0$$

$\Rightarrow$ 1 est un multiplicateurs caractéristique c'est à dire

$$C\varphi^2(0) = \varphi^2(0)$$

donc $\varphi^2(t)$ est T-périodique, ce qui contredit le fait que $\varphi^2(t)$ est $2T$ - périodique ($2T$ est le période minimale), on conclut que $\det(C-I) \neq 0$ ce qui implique que $\det(C+I) = 0$,

$\Rightarrow (-1)$ est un multiplicateur caractéristique.

Corollaire 2.0.2 *Si le système* (2.1) *possède k solutions linéairement indépendantes T-périodique (respt $2T$-périodique), alors la multiplicité du multiplicateur caractéristique 1(repst (-1)) est au moins égale à k dans le polynôme caractéristique de la matrice de monodromie.*

Exemple 2.0.3 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin(2t)x_1 + (\cos(2t) - 1)x_2 \\ \dot{x}_2 = (\cos(2t) - 1)x_1 + \sin(2t)x_2 \end{cases}$$

2π *périodique.*

une matrice fondamentale est définie par :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \sin(t)) & e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) \\ e^t(\cos(t) + \sin(t)) & e^{-t}(-\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

Trouvons la matrice de monodromie et les multiplicateurs caractéristiques.

En effet :

On a : $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

d'où : $\phi^{-1}(0) = \dfrac{1}{\det(\phi(0))}[com\phi(0)]^t = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de monodromie est :

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de C sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ qui représentent les multiplicateurs caractéristiques. De ce résultat et d'après le corollaire précédent, on obtient deux solutions périodiques pour ce système.

2.1 Théorème de Floquet

Théorème 2.1.1 ***(Floquet*** 1883***)*** *La matrice fondamentale* $\phi(t,0)$ *du système* (2.1) *peut s'écrire sous la forme :*

$$\phi(t,0) = P(t)e^{Bt}$$

où P *est une matrice* T*-périodique :*

$$P(t+T) = P(t) \text{ et } P(0) = I$$

et B *est une matrice constante.*

<u>Preuve :</u>

Soit B une matrice qui satisfait :

$$e^{BT} = C = \phi(T,0).$$

on peut écrire :

$$\phi(t,0) = \phi(t,0)e^{-Bt}e^{Bt}.$$

Soit

$$P(t) = \phi(t,0)e^{-Bt},$$

on a :

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \phi(t+T,0)e^{-B(t+T)} \\ &= \phi(t,0)\phi(T,0)e^{-Bt}e^{-BT} \\ &= \phi(t,0)e^{BT}e^{-Bt}e^{-BT} \\ &= \phi(t,0)e^{-Bt} \\ &= P(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Définition 2.1.1 *Les valeurs propres de la matrice* B *définie par :*

$$e^{BT} = C = \phi(T,0)$$

sont appelées les exposants caractéristiques du système

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ A(t+T) = A(t).$$

Il est clair que :

(μ est un exposant caractéristique) $\Longleftrightarrow$ ($\lambda = e^{\mu T}$ est un multiplicateur).

Notons que les exposants caractéristiques ne sont pas uniques. C'est à dire : Si u_j est un exposant caractéristique alors $u_j + \mathrm{i}\dfrac{2\pi k}{T}$ l'est aussi.

Remarque 2.1.1 *A chaque exposant caractéristique μ, il lui correspond une solution $\varphi(t)$ du système (2.1) de la forme :*

$$\varphi(t) = exp(\mu t)P(t),$$

où $P(t+T) = P(t)$.

En effet : Soit S le vecteur propre associé à μ : $BS = \mu S$ est soit la solution $\varphi(t)$ telle que : $\varphi(0) = S$; on a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= P(t)e^{Bt}S\\ &= P(t)e^{\mu t}S\\ &= e^{\mu t}P(t)S\\ &= e^{\mu t}P(t)\end{aligned}$$

où : $P(t+T) = P(t)$.

Exemple 2.1.1 *Revenons à l'exemple (2.0.2), on a calculé les multiplicateurs du système considéré et on a trouvé :*

$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = e^{2\pi}.$$

Dans ce cas les exposants caractéristiques correspondants sont :

$$\mu_1 = 0,\ \ \mu_2 = 1.$$

2.2 Théorème de Lyapunov

Théorème 2.2.1 ***(Lyapunov** 1892**)*** *Si $A(t)$ est réelle, alors il existe une matrice $T-$ périodique P qui satisfait : $P(0) = I$ telle que la transformation*

$$x = P(t)z$$

transforme le système

$$\dot{x} = A(t)x$$

en un système linéaire homogène à coefficients constants.

Preuve :

Posons :

$$P(t) = \phi(t, 0)e^{-Bt}, \ (\dot{\phi} = A\phi).$$

Substituons $x = P(t)z$ dans $\dot{x} = A(t)x$ on trouve :

$$\dot{P}z + P\dot{z} = APz \Rightarrow \dot{z} = P^{-1}[AP - \dot{P}]z$$

où

$$\begin{aligned} P^{-1}[AP - \dot{P}] &= e^{Bt}\phi^{-1}[A\phi e^{-Bt} - \dot{\phi}e^{-Bt} + \phi Be^{-Bt}] \\ &= e^{Bt}\phi^{-1}\phi Be^{-Bt} \\ &= B, \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\dot{z} = Bz$$

où B est donnée par :

$$e^{BT} = C = \phi(T, 0).$$

Nous avons défini les exposants caractéristiques du système (2.1) :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

comme les valeurs propres de la matrice B du système :

$$\dot{z} = Bz.$$

Si nous considérons ce système comme un système périodique de période T, alors sa matrice de monodromie est e^{BT}. Donc le système :

$$\dot{z} = Bz$$

considéré comme un système à coefficients périodiques a les mêmes multiplicateurs caractéristiques que le système (2.1) :

$$\dot{x} = A(t)x,$$

ceci est un cas particulier d'une propriété générale.

Si nous transformons le système (2.1) en un autre système par une transformation périodique, alors les multiplicateurs de ce nouveau système seront les mêmes que ce du système (2.1).

Proposition 2.2.1 *Soit $S(t)$ une matrice périodique, $S(t+T) = S(t)$ telle que $S^{-1}(t)$ existe, alors : $S^{-1}(t)$ est aussi périodique.*

Preuve :

Supposons que :

$$S^{-1}(t+T) = S^{-1}(t)$$

multiplions par $S(t+T)$, on obtient :

$$\begin{aligned} S(t+T)S^{-1}(t+T) = S(t+T)S^{-1}(t) &\Longleftrightarrow I = S(t+T)S^{-1}(t) \\ &\Longleftrightarrow S(t)S^{-1}(t) = I \end{aligned}$$

d'où : $S^{-1}(t)$ est périodique.

Théorème 2.2.2 *Soit $S(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ une matrice $T-$ périodique. La transformation*

$$x = S(t)z$$

transforme le système $(*)$

$$\dot{x} = A(t)x.....(*)$$

où

$$A(t+T) = A(t)$$

en un système linéaire homogène à coefficients périodiques dont les multiplicateurs caractéristiques coïncident avec ceux du système $(*)$.

Preuve :

Mettons $x = S(t)z$ dans $(*)$, on obtient :

$$\dot{S}(t)z + S(t)\dot{z} = A(t)S(t)z$$

$z(t)$ satisfait donc le système :

$$\dot{z} = \underbrace{S^{-1}(t)[A(t)S(t) - \dot{S}(t)]}\, z.....(**)$$

cette matrice est continue et $T-$ périodique.

Soit $\phi(t,0)$ la matrice fondamentale de $(*)$ telle que $\phi(0,0) = I$, alors :

$$\psi(t) = S^{-1}(t)\phi(t,0)$$

est aussi une matrice fondamentale de $(**)$. Les multiplicateurs caractéristiques de $(**)$ sont les valeurs propres de : $\psi^{-1}(0)\psi(T)$ mais :

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(0)\psi(T) &= \phi^{-1}(0,0)S(0)S^{-1}(T)\phi(T,0) \\ &= IS(0)S^{-1}(0)C \\ &= IC \\ &= C.\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *:*

1) *L'ensemble des multiplicateurs caractéristiques est un ensemble invariant d'un système linéaire homogène à coefficients périodiques dans le sens que cet ensemble est invariant par une transformation périodique.*

2) *Les propriétés de cet ensemble détermine le comportement des solutions, l'existence d'une solution périodique, et comme on le verra, la stabilité.*

3) *Pour déterminer les multiplicateurs caractéristiques, on a besoin d'une matrice fondamentale, c'est à dire on a besoin de connaitre toutes les solutions, ceci qui n'est pas facile.*

4)*Pour trouver la transformation qui réduit le système à coefficients périodiques, ce n'est pas facile non plus, cependant on peut appliquer une méthode qui donne des approximations des multiplicateurs caractéristiques.*

Théorème 2.2.3 *Si le système homogène :*

$$\dot{x} = Ax$$

associé au système non homogène :

$$\dot{x} = Ax + B(t);\ \ B(t+T) = B(t)$$

n'a aucune solution périodique de période T à part la solution nulle, alors le système non homogène a une seule solution périodique de période T.

<u>Preuve :</u>

La condition de périodicité

$$e^{AT}\varphi^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}B(s)ds = \varphi^0$$

s'écrit :

$$(e^{-AT} - I)\varphi^0 = \int_0^T e^{-As}B(s)ds.....(*)$$

φ^0 est l'unique solution, d'où

$$\det(e^{-AT} - I) \neq 0 \Leftrightarrow \det(I - e^{AT}) \neq 0$$
$$\det(I - e^{AT}) = 0 \Leftrightarrow 1 \textit{ est une valeur propre de } e^{AT}.$$

Ceci se produit si et seulement si $\dfrac{2k\pi \mathrm{i}}{T}$ est une valeur propre de A pour $k = 0, 1, 2, ...$

En effet,

• Si (α, υ) est un couple propre de A, alors $(e^{\alpha t}, \upsilon)$ est un couple propre de e^{At}.

• Si $e^{\alpha T} = 1$ est une valeur propre de e^{AT}, alors :

$$\alpha T = \ln(1) + 2k\pi \mathrm{i} \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi \mathrm{i}}{T}.$$

Le système homogène a une solution périodique de période T si et seulement si : $\dfrac{2k\pi \mathrm{i}}{T}$ est une valeur propre de A pour un certain k. (Si $k \geqslant 1$, alors la plus petite période positive est $\dfrac{T}{k}$. Si $k = 0$, alors A est singulière et le système homogène a des solutions constantes non nulles).

Ainsi, si le système homogène n'a pas de solutions périodiques sauf la solution nulle alors le système $(*)$ a une solution unique φ^0.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes linéaires à coefficients périodiques

Soit le système linéaire homogène :

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.1}$$

où $A(t+T) = A(t), \quad \mathrm{A} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+), \quad \forall \ \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+.$

Théorème 3.0.1 *:*

a) Le système (3.1) *est asymptotiquement stable si est seulement si les multiplicateurs caractéristiques sont de module inférieurs à un.*

b) Le système (3.1) *est stable au sens de* ***Lyapunov*** *si est seulement si tous les multiplicateurs caractéristiques sont de module inférieurs au égale à un et ceux de module un, sont simples dans le polynôme minimale.*

c) Le système (3.1) *est instable s'il a soit un multiplicateur caractéristique de module plus grand que un, soit un multiplicateur caractéristique multiple et de multiplicité plus grande que un dans le polynôme minimal.*

Remarque 3.0.1 *:*

a) Les conditions $(a), (b), (c)$ *peuvent s'exprimer en termes d'exposants caractéristiques.*

b) Le système (3.1) *est asymptotiquement stable, stable, instable si tous les exposants caractéristiques ont respectivement des parties réelles négatives, tous les exposants caractéristiques ont des parties réelles non positives et ceux avec des parties réelles nulles sont simples dans le polynôme minimale, il y a au moins un exposant avec une partie réelle positive ou avec une partie réelle nulle donc une multiplicité plus grande que "un" dans le polynôme minimale.*

Exemple 3.0.1 *Soit le système linéaire homogène de période* 5 *:*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dfrac{-13\pi}{30}y_2 + \dfrac{2\pi}{3}\cos^2(\dfrac{2\pi t}{5})y_3 + \dfrac{\pi}{5}\sin(\dfrac{4\pi t}{5})y_4, \\ \dot{y}_2 = \dfrac{13\pi}{30}y_1 + \dfrac{\pi}{5}\sin(\dfrac{4\pi t}{5})y_3 + \dfrac{2\pi}{5}\cos^2(\dfrac{2\pi t}{5})y_4, \\ \dot{y}_3 = \dfrac{-13\pi}{30}y_4, \\ \dot{y}_4 = \dfrac{13\pi}{30}y_3. \end{cases} \tag{3.2}$$

La transformation linéaire

$$y = P(t)z,$$

$$\text{où } p(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi t}{5}) & -\sin(\frac{2\pi t}{5}) & \sin(\frac{2\pi t}{5}) & 0 \\ \sin(\frac{2\pi t}{5}) & \cos(\frac{2\pi t}{5}) & 0 & \sin(\frac{2\pi t}{5}) \\ 0 & 0 & \cos(\frac{2\pi t}{5}) & -\sin(\frac{2\pi t}{5}) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{2\pi t}{5}) & \cos(\frac{2\pi t}{5}) \end{pmatrix}$$

transforme le système (3.2) *au système*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dfrac{-\pi}{30} z_2, \\ \\ \dot{z}_2 = \dfrac{\pi}{30} z_1, \\ \\ \dot{z}_3 = \dfrac{-13\pi}{30} z_4, \\ \\ \dot{z}_4 = \dfrac{13\pi}{30} z_3. \end{cases} \tag{3.3}$$

On a :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-\pi}{30} & 0 & 0 \\ \\ \dfrac{\pi}{30} & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-13\pi}{30} \\ \\ 0 & 0 & \dfrac{13\pi}{30} & 0 \end{pmatrix},$$

B possède les valeurs propres $\pm\dfrac{\mathrm{i}\pi}{30},\ \pm\dfrac{\mathrm{i}13\pi}{30}$.

Le système (3.2) *possède donc* 4 *exposants caractéristiques simples avec des parties réelles nulles, on conclut que* (3.2) *est un système stable.*

Une matrice fondamentale de (3.3) *est :*

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t}{30}) & -\sin(\frac{\pi t}{30}) & 0 & 0 \\ \sin(\frac{\pi t}{30}) & \cos(\frac{\pi t}{30}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{13\pi t}{30}) & -\sin(\frac{13\pi t}{30}) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{13\pi t}{30}) & \cos(\frac{13\pi t}{30}) \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale de (3.2) *est :*

$$\phi(t,0) = P(t)e^{Bt},$$

il est clair que $\phi(0,0) = I$.
La matrice de monodromie est :

$$C = \phi(5,0) = Ie^{5B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

alors le polynôme caractéristique est :

$$\det(C - \lambda I) = (\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1)^2.$$

Ainsi le système a deux multiplicateurs caractéristiques $e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$ *qui sont des racines doubles du polynôme caractéristique.*

On peut voir que le polynôme minimal est : $\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1$.

Les multiplicateurs caractéristiques sont de modules un et simples dans le polynôme minimal. Donc les solutions du système considéré sont stable.

Conclusion

Ce mémoire étudie une branche des systèmes différentiels ordinaires, à savoir la théorie de **Floquet** qui est consacrée à l'étude des systèmes différentiels à coefficients périodiques.

Cette théorie est très importante car d'une part le théorème fondamentale de **Floquet (1883)** permet de transformé un système différentiel à coefficients périodique à un système différentiel a coefficients constant, d'autre part, la notion du multiplicateur caractéristique permet de montrer l'existence de solutions périodiques pour une certaine valeur du multiplicateur .

Bibliographie

[1] Badi Sabrina , *cours d'équation différentielle* $1-2$ (Licence LMD **2010/2011**).

[2] Benyousef Saleh, *Thèse de Doctorat : Sur quelques classes de systèmes différentiels avec cycles limites explicites.*

[3] Chabane Roumayssa , *Mémoire de Master* 2 *: Sur le nombre de cycles limites via la méthode de moyennisation.*

[4] Demailly.J, analyse numérique et équation différentielle PUG **(1996)**.

[5] Makhlouf Amar , *cour de magister* **(2001-2002)**.

[6] Zaimen Aarabiya, *Mémoire de Master* 2 *: Sur la théorie de Floquet* **(2013)**.