République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques, d'Informatique
et des Sciences de la Matière.
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'Obtention du Diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Rayen BOUDABOUZE

Intitulé

Sur la Résolubilité des Opérateurs Différentiels Linéaires

Dirigé par : Dr. Benarioua

Devant le jury :

PRESIDENT	**:**	**Dr. N. BOUSSETILA**	**Pr**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**:**	**Dr. K .BENARIOUA**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**:**	**Dr. A. HITTA**	**Pr**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2020

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur monsieur Benarioua Khadir. Je tiens à le remercier pour son dévouement, son aide, sa patience ainsi que sa disponibilité et sa sympathie, merci infiniment.

Mes remerciements les plus respectueux vont au professeur Boussetila Nadjib d'avoir accepté d'être président de jury et professeur Hitta Amara qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de ce mémoire.

Enfin, je remercie mon papa, et ma maman pour l'énergie positive qu'elle m'a donnée tout au long de mon cursus, mes frères et sœurs , ma famille et toutes mes amies qui ont toujours été là pour moi.

Sur la résolubilité des opérateurs différentiels linéaires*

Rayen BOUDABOUZE
Mémoire de Master en Mathématiques.
Université 08 mai 1945, Guelma.
Septembre 2020.

Résumé On sait, d'après le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, que tout opérateur différentiel linéaire non nul sur $\mathbb{R}^n$ et à cœfficients constants P admet une solution élémentaire $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que pour un tel opérateur, il existe une distribution tempérée E telle que $PE = \delta$, et cela implique que, pour toute distribution à support compact f, la distribution $u = E * f$ est solution de l'équation $Pu = f$, et on connait depuis longtemps des solutions élémentaires pour les opérateurs les plus classiques (Laplacien, Chaleur, Schrödinger et Ondes). On sait également, d'après le théorème de Cauchy-Kovalevski, que si f est une fonction analytique au voisinage d'un point x_0, et si P est un opérateur différentiel linéaire à cœfficients analytiques au voisinage de ce point, alors le problème de Cauchy à données analytiques associé à l'équation $Pu = f$ admet une et une seule solution, et on connait aussi des opérateurs différentiels linéaires P et des fonctions f tels que l'équation $Pu = f$ n'ait aucune solution.

Dans ce mémoire, je détaille au maximum :
• les calculs des solutions élémentaires des opérateurs classiques sus cités,
• la démonstration due à Lars Hörmander [] du théorème de Malgrange-Ehrenpreis, et qui est basée sur la transformée de Fourier,
• la démonstration due à Sofia Kovalevskaya du théorème de Cauchy-Kovalevski, et qui utilise les séries majorantes de Louis Cauchy.

Je termine enfin par l'exemple de Hans Lewy, d'un opérateur différentiel linéaire P et d'une fonction f tels que l'équation $Pu = f$ n'ait aucune solution au voisinage de zéro.

مُلَخَّصٌ : نَعْلَمُ جَيِّدًا، مِنْ خِلَالِ نَظَرِيَّةِ مَالْگْرَانْجْ - إِيرَنْپْرَايَسْ، أَنَّ لِأَيِّ مُؤَثِّرٍ تَفَاضُلِيٍّ خَطِّيٍ ذُو آلْمُعَامَلَاتِ آلثَّابِتَةِ P عَلَى $\mathbb{R}^n$ ، هُنَاكَ حَلٌّ أَسَاسِيٌّ مُتَمَثِّلٌ فِي تَوْزِيعٍ مُعْتَدِلٍ، أَيْ أَنَّهُ يُوجَدُ تَوْزِيعٌ مُعْتَدِلٌ E حَيْثُ أَنَّ $PE = \delta$ ، اَلشَّيْءُ آلَّذِي يَسْتَلْزِمُ بِأَنَّ، مَهْمَا كَانَ آلتَّوْزِيعُ f ،

*Document saisi à l'aide du logiciel de traitement de texte TEX, aux formats LATEX 2_ε et ArabTEX.

ذُو ٱلْحَامِلِ ٱلْمُتَرَاصّ، فَإِنَّ ٱلتَّوْزِيعَ $u=E*f$ حَلٌّ لِلْمُعَادَلَةِ $Pu=f$ ، وَنَعْرَفُ مُنْذُ مُدَّةٍ حُلُولًا أَسَاسِيَّةً لِبَعْضِ ٱلْمُؤَثِّرَاتِ ٱلْكْلَاسِيكِيَّةِ، مِنْهَا مُؤَثِّرْ لَابْلَاصْ، اَلْحْرَارَةْ، شْرُودِنْگَارْ وَٱلْأَمْوَاجِ.

نَعْلَمُ أَيْضًا، مِنْ خِلَالِ نَظَرِيَّةِ كُوشِي-كُوڤَلَڤْسْكِي، أَنَّهُ إِذَا كَانَ P مُؤَثِّرًا تَفَاضُلِيًّا خَطِّيًا ذُو ٱلْمُعَامَلَاتِ ٱلتَّحْلِيلِيَّةِ بِجِوَارِ نُقْطَةٍ x_0 ، وَكَانَتْ f دَالَّةً تَحْلِيلِيَّةً بِجِوَارِ تِلْكَ ٱلنُّقْطَةِ x_0 ، فَهُنَاكَ حَلًّا وَحِيدًا لِمَسْأَلَةِ كُوشِي ٱلْمُرْتَبِطَةِ بِٱلْمُعَادَلَةِ $Pu=f$ وَ ٱلَّتِي كُلُّ مُعْطَيَاتِهَا تَحْلِيلِيَّةٌ عِنْدَ x_0 ، وَبِٱلْمُقَابِلِ، تُوجَدُ دَوَالٌّ f وَمُؤَثِّرَاتٌ تَفَاضُلِيَّةٌ خَطِّيَةٌ P حَيْثُ آنَّ ٱلْمُعَادَلَةُ $Pu=f$ لَا تَقْبَلُ آيِّ حَلٍّ بِجِوَارِ x_0 ، مَهْمَا كَانَتِ ٱلنُّقْطَةُ x_0 .

وَفِي هٰذِهِ ٱلْمُذَكِّرَةِ، سَأُعِيدُ بِٱلتَّفْصِيلِ :

- حِسَابَ ٱلْحُلُولَ ٱلْأَسَاسِيَّةَ لِلْمُؤَثِّرَاتِ ٱلْكْلَاسِيكِيَّةِ ٱلْمَذْكُورَةِ أَعْلَاهُ،
- بُرْهَانَ لَارَسْ هُرْمَانْدَارْ لِنَظَرِيَّةِ مَالْگْرَانْجْ - إِيرَنْپْرَايَسْ، وَٱلَّذِي هُوَّ مَبْنِي عَلَى تَحْوِيلِ فُورْيِي،
- بُرْهَانَ صُوفِيَا كُوڤَلَڤْسْكَايَا لِنَظَرِيَّةِ كُوشِي - كُوڤَلَڤْسْكِي، وَٱلَّذِي تَسْتَعْمَلُ فِيهِ ٱلْمُتَسَلْسِلَاتِ ٱلْحَادَّةِ مِنَ ٱلْأَعْلَى لِ اَلْوِيسْ كُوشِي،

وَسَأَخْتِمُ بِمِثَالِ هَانَسْ لُڤِي لِمُؤَثِّرٍ خَطِّيٍّ P وَدَالَّةٍ f حَيْثُ أَنَّ ٱلْمُعَادَلَةَ $Pu=f$ لَا تَقْبَلُ أَيِّ حَلًّا بِجِوَارِ ٱلصِّفْرِ.

Mots clés Opérateurs de Laplace, des ondes, de la Chaleur et de Schrödinger. Opérateurs différentiels linéaires à coéfficients constants et à coéfficients analytiques. Solution élémentaire et résolubilité, théorème de Malgrange-Ehrenpreis. Séries majorantes et théorème de Cauchy-Kovalevski. Opérateurs sans solution : Levy, Mizohata, Grushin.

Table des matières

1 Rappels, Notations et Conventions 3
1.1 Multi-indices et dérivations 3
1.2 Fonctions test et distributions 4
1.3 Changement de variable dans une distribution 6
1.4 Produit de convolution et produit tensoriel 7
1.5 Transformée de Fourier 8
1.6 Coordonnées polaires 9
2 Introduction 9
3 Opérateurs linéaires à cœfficients constants 10

3.1 Equation de Laplace 11
3.1.1 Préliminaires 11
3.1.2 Solution élémentaire 14
3.2 Équation des Ondes 19
3.2.1 Cordes Vibrantes (Ondes en dimention $1+1$) 19
3.2.2 Problème de Cauchy 21
3.2.3 Solution élémentaire 21
3.3 Équation de La Chaleur et Équation de Schrödinger 23
3.3.1 Equation de la chaleur 24
3.3.2 Équation de Schrödinger 25
3.4 Théorème de Malgrange-Ehrenpreis 26
3.4.1 Solution du problème 33
4 Opérateurs linéaires à cœfficients analytiques 34
4.1 Position du problème 34
4.2 Théorème de Cauchy-Kovalevski 35
4.3 Démonstration du Théorème 36
4.3.1 Réduction du problème 37
4.3.2 Solution formelle 39
4.3.3 Séries majorantes 41
4.3.4 Suite et fin de la démonstration du théorème 43
5 Opérateur sans solution - Conditions suffisantes à l'existence et l'inexistence 46
6 Conclusion 47

1 Rappels, Notations et Conventions

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles, et nous ne rappelons que celles de multi-indice et de dérivation, de différents espaces fonctionnels et espaces de distributions, du produit de convolution et de la transformée de Fourier.

1.1 Multi-indices et dérivations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \tag{1}$$

$$||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \tag{2}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! \tag{3}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{4}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

$$\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n) \tag{6}$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \tag{7}$$

$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, n, \text{ et } i^2 = -1) \tag{8}$$

$$D = \frac{1}{i}\partial \tag{9}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \tag{10}$$

1.2 Fonctions test et distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, K une partie compacte de Ω, k un entier naturel, et rappelons que :

• $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, continues sur $\mathbb{R}^n$ et tendant vers zéro à l'infini (*i.e* quand $|x| \to \infty$).

• $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω. C'est un espace de Fréchet [1] pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_K$ où K décrit les compacts de Ω et,

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(\Omega), \quad N_{K,k}(f) = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{11}$$

• $\mathscr{C}_b^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, bornées ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$||f||_{\mathscr{C}_b^k} \equiv \sup_{\substack{x\in \Omega\\ |\alpha|\leq k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{12}$$

• $\mathscr{C}_K^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, à supports [2] dans K. C'est un espace de Banach pour la norme $N_{K,k}$.

• $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ $\big($parfois noté $\mathscr{E}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω $\big(\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^{\infty} \mathscr{C}^k(\Omega)\big)$. C'est un espace de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ K\Subset\Omega}}$.

1. Un espace de Fréchet est un espace **localement convexe** (*i.e* dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui sépare les points, c-à-d. telle que si $p_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha \in I$, alors $x = 0$), **métrisable** (*i.e* de topologie définie par une famille dénombrable de semi-normes) et **complet**.
2. Le support Supp f d'une fonction f est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est nulle.

• $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ $\big($également noté $\mathscr{D}(\Omega)\big)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact. Une application sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \Subset \Omega$.

• $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$ $\big($ou $\mathscr{D}'(\Omega)\big)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω. Sur $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, on dispose de plusieurs topologies : la topologie faible, qui est la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, et la topologie forte, qui est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ $\big($ une partie B de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est bornée s'il existe un compact $K \Subset \Omega$ tel que $B \subset \mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $N_{K,k}(B) = \sup_{\varphi\in B} N_{K,k}(\varphi) < \infty\big)$. La topologie faible (resp. forte) est définie par la famille de semi-normes $(p_F)_F$ telle que :

$$\forall T \in \mathscr{C}^{-\infty}(\Omega), \quad p_F(T) = \sup_{\varphi\in F} |\langle T, \varphi\rangle| \tag{13}$$

où F parcourt l'ensemble des parties finies (resp. bornées) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La topologie forte est, comme son nom l'indique, (vraiment) plus fine que la topologie faible : Une **famille** qui converge faiblement ne converge pas toujours fortement. Cependant on a le résultat :

> Si $(T_n)_n$ est une **suite** de distributions qui converge simplement vers une limite T, alors T est une distribution, et T_n tend fortement vers T. (14)

• $\mathscr{C}\big(]a,b[, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\big)$ $\Big($noté également $\mathscr{C}\big(a,b;\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\big)\Big)$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n\times]a,b[$, continues en la variable de $]a,b[$: A toute U continue de $]a,b[$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, on associe injectivement la distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times]a,b[)$ en posant :

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_a^b \langle U(t), \varphi(.,t)\rangle dt \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n\times]a,b[). \tag{15}$$

Pour tout $t_0 \in]a,b[$, la « trace sectionnelle » de u sur $\mathbb{R}^n \times \{t_0\}$ est définie par $u(.,t = t_0) = U(t_0)$.

• $\mathscr{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions à supports compacts sur Ω.

• $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et}, \forall N \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (1+|x|)^N \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

ce qui équivaut à

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

La topologie naturelle de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et qui en fait un espace de fréchet, est celle définie par l'une des familles équivalentes de semi-normes :

$$p_N(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N\\ x\in\mathbb{R}^n}} (1+|x|)^N |\partial^\beta f(x)|, \tag{18}$$

$$p_{N,\beta}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N\\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{19}$$

$$p_{\alpha,N}(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N\\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{20}$$

$$p_{N,k}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq k\\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{21}$$

Enfin, de (15) on déduit que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \tag{22}$$

et de (16) et de la formule de Leibniz, il découle que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La dérivation et la multiplication par un monôme sont} \\ \text{des applications continues de } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \end{array} \right. \tag{23}$$

• $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: C'est l'espace des distributions tempérées. Il est muni, soit de la topologie duale faible, soit de la topologie duale forte.

• $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que l'application $T \mapsto \alpha T$ soit continue de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des multiplicateurs de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta \alpha$ est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire une fonction qui ne croît pas plus vite qu'un polynôme lorsque $|x| \to \infty$.

1.3 Changement de variable dans une distribution

Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par définition, L'image inverse d'une distribution T sur Ω_2 par le difféomorphisme χ est la distribution $T \circ \chi$ sur Ω_1 définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1),\ \langle T\circ\chi, \varphi\rangle = \langle T, \chi_*(\varphi)\rangle \tag{24}$$

où $\chi_*(\varphi)$ est l'image directe de φ par χ, donnée par la formule :

$$\forall y \in \Omega_2,\ [\chi_*(\varphi)](y) = \varphi\big[\chi^{-1}(y)\big] \cdot \Big|\text{dét}\Big(J_\chi\big[\chi^{-1}(y)\big]\Big)\Big| \tag{25}$$

où, pour tout $x \in \Omega_1, J_\chi(x)$ est la matrice jacobienne de χ au point x.

1.4 Produit de convolution et produit tensoriel

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$, leur produit de convolution est la fonction sur $\mathbb{R}^n$, notée $f * g$, et définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \left(= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = (g * f)(x) \right), \tag{26}$$

et leur produit externe (ou produit tensoriel) est la fonction $f \otimes g$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, définie par :

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y). \tag{27}$$

Si h, φ et ψ sont des fonctions continues (ou mesurables) bornées sur $\mathbb{R}^n$, on a d'après le théorème de Fubini :

$$\langle f * g, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x+y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{28}$$

$$\langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x,y)(\varphi \otimes \psi)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle f, \varphi \rangle \langle g, \psi \rangle. \tag{29}$$

La dernière formule caractérise le produit externe et permet de le définir pour deux distributions : On démontre en effet que si T et S sont deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, il existe une unique distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ notée $T \otimes S$ et appelée produit externe (ou produit tensoriel) de T et S, telle que : $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle S, \psi \rangle. \tag{30}$$

On définit alors le produit de convolution de deux distributions à support compact S et T, comme étant la distribution à support compact notée $T * S$, telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle. \tag{31}$$

Les principales propriétés de la convolution sont :

$$u * v = v * u \tag{32}$$

$$\delta * v = v * \delta = v \tag{33}$$

$$\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v) \tag{34}$$

$$\operatorname{Supp}(u * v) \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} v \tag{35}$$

et si $u \in \mathscr{C}^{-\infty}$, $v \in \mathscr{C}^\infty$, u ou v est à support compact, et $\tau_x \check{v}(t) = v(x-t)$, alors :

$$u * v \in \mathscr{C}^\infty \text{ et } (u * v)(x) = \langle u, \tau_x \check{v} \rangle. \tag{36}$$

1.5 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ (notée aussi $\mathscr{F}f$) d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{37}$$

On démontre aisément que

$$\mathscr{F} \text{ est linéaire,} \tag{38}$$

que

$$\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n),\quad \widehat{f}\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \text{ (lemme de Riemann-Lebesgue),} \tag{39}$$

et que quelles que soient f et g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{g}(x)dx \text{ (théorème du transfert),} \tag{40}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g}(x)dx \text{ (th. de Plancherel-Parseval).} \tag{41}$$

On démontre également que

$$\mathscr{F} \text{ est continue de } L^1\longrightarrow L^\infty, \tag{42}$$

et que

$$\mathscr{F} \text{ induit un isomorphisme de } \mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{S} \tag{43}$$

$$\text{qui se prolonge en un isomorphisme de } \mathscr{S}'\longrightarrow\mathscr{S}' \tag{44}$$

$$\text{et en une isométrie de } L^2\longrightarrow L^2. \tag{45}$$

Par définition, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la distribution tempérée $\widehat{u}$ telle que

$$\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\quad \langle\widehat{u},\varphi\rangle=\langle u,\widehat{\varphi}\rangle. \tag{46}$$

L'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ est la cotransformée de Fourier notée aussi $\overline{\mathscr{F}}$:

$$[\mathscr{F}^{-1}f](x)=[\overline{\mathscr{F}}f](x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}f(\xi)d\xi. \tag{47}$$

Enfin, la transformation de Fourier jouit des propriétés (dites d'échange) suivantes :

$$\forall f,g\in L^1(\mathbb{R}^n),\quad \mathscr{F}(f*g)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g), \tag{48}$$

$$\forall f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\forall g\in L^1(\mathbb{R}^n),\quad \mathscr{F}(fg)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}[(\mathscr{F}f)*(\mathscr{F}g)], \tag{49}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}^{-1}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[(\mathscr{F}^{-1}f) * (\mathscr{F}^{-1}g)], \tag{50}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F} u, \tag{51}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}[P(D)u] = P(\xi)\mathscr{F}u \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}[P(-D)u] = P(x)\mathscr{F}^{-1}u, \tag{52}$$

$$\mathscr{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta. \tag{53}$$

1.6 Coordonnées polaires

Tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = ry$ où r $(= ||x||)$ est un réel > 0, et y $(= x/||x||)$ est un élément de la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. La formule

$$x = ry \quad (\text{avec } r > 0 \text{ et } y \in S^{n-1}) \tag{54}$$

s'appelle représentation de x en coordonnées polaires, et la mesure de Lebesgue dans ces coordonnées est :

$$dx = r^{n-1} dr\, d\sigma_{1,0}(y) \tag{55}$$

où $d\sigma_{1,0}$ est la mesure sur S^{n-1} (*cf.* Folland [3], Théorème (2.49)).

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et si $B_r(x_0)$ (resp. $\partial B_r(x_0)$) est la boule (resp. sphère) de $\mathbb{R}^n$ de centre x_0 et de rayon r, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f(y) d\sigma_{r,x_0}(y) \right) dr \tag{56}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et en particulier, pour tout $r > 0$,

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B_r(x_0)} f(x)dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f(y) d\sigma_{r,x_0}(y) \tag{57}$$

2 Introduction

Dans ce mémoire, j'étudie la résolubilité locale d'équations aux dérivées partielles (EDP) :

$$Pu = f \tag{58}$$

où :

$$P = P(x,D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{59}$$

est un opérateur différentiel linéaire sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$.

Une formulation bien précise du problème est la suivante :

Etant donné un point quelconque x_0 dans Ω, existe-t-il un voisinage ouvert V de x_0 dans Ω tel que, pour toute distribution $f \in \mathscr{D}'(V)$, on puisse trouver une distribution $u \in \mathscr{D}'(V)$ qui vérifie $Pu = f$ sur V ?

Si c'est le cas, l'opérateur (59) et l'équation (58) sont dits ***localement résolubles*** sur Ω. C'est précisément le cas si P est à cœfficients constants, d'après le théorème de Malgrange-Ehrenpreis qui garantit l'existence d'une solution élémentaire E pour P, c'est-à-dire d'une distribution E telle $PE = \delta$, et assure donc l'existence d'une solution pour l'équation $Pu = f$, car il suffit alors de prendre $u = E * f$, et c'est aussi le cas si f et les cœfficients de P sont analytiques, d'après le théorème de Cauchy-Kovalevski.

On connaît depuis longtemps les solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques :

Opérateur P	**Une solution élémentaire E**
∂_n	$1_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \otimes Y(x_n)$
$\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)$ (Cauchy-Riemann)	$\dfrac{1}{\pi(x+iy)}$
$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$ (Laplacien)	$\begin{cases} \dfrac{\lVert x\rVert}{2} & \text{si} \quad n=1 \\ \dfrac{\ln\lVert x\rVert}{2\pi} & \text{si} \quad n=2 \\ \dfrac{\lVert x\rVert^{2-n}}{(2-n)\lvert S^{n-1}\rvert} & \text{si} \quad n \geq 3 \end{cases}$
$\partial_t - \Delta$ (La chaleur)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\Big(-\dfrac{\lVert x\rVert^2}{4t}\Big)$
$D_t + \Delta$ (Schrödinger)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\Big(-\dfrac{\lVert x\rVert^2}{4t} - in\dfrac{\pi}{4}\Big)$
$\partial_{tt}^2 - \Delta$ (Ondes)	$< E, \varphi >= \displaystyle\int \dfrac{\hat{\varphi}(\xi, \tau - i\gamma)}{\lVert\xi\rVert^2 - (\tau - i\gamma)^2}\, d\xi\, d\tau$ Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1}), \gamma$ constante > 0

3 Opérateurs linéaires à cœfficients constants

Selon Malgrange [6] et Ehrenpreis [2], tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants est localement résoluble sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce chapitre je refais en détail la démonstration due à L.Hörmander [4] de ce résultat, ainsi que les calculs des solutions élémentaires des opérateurs de Laplace, des Ondes, de Schrödinger et de la Chaleur.

3.1 Equation de Laplace

3.1.1 Préliminaires

Définition 3.1. *On appelle rotation de $\mathbb{R}^n$ toute application $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, en ce sens que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \big(r(x) \mid r(y)\big) = (x \mid y), \tag{60}$$

ce qui équivaut à :

$$r \text{ est linéaire, et, } \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|r(x)\| = ||x||, \tag{61}$$

et également à :

$$\begin{cases} r \text{ est linéaire, et sa matrice } A \text{ dans une (et donc dans toute) base} \\ \text{orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ est orthogonale au sens où } AA^t = A^tA = I. \end{cases}, \tag{62}$$

et telle que :

$$\text{son déterminant (c'est-à-dire celui de sa matrice } A\text{) est positif (donc égal à 1).} \tag{63}$$

Définition 3.2. *Pour toute rotation r de $\mathbb{R}^n$, on désigne par R l'opérateur de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, tel que,*

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \ Rf = f \circ r, \text{ et } \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \ RT = T \circ r,$$

et :

• On dit qu'un opérateur $P : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est invariant par rotation si et seulement si :

$$R^{-1}PR = P, \tag{64}$$

• On dit qu'une fonction f (resp. une distribution T) sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par rotation, ou qu'elle est radiale, si et seulement si, pour toute rotation r de $\mathbb{R}^n$, on a : $f \circ r = f$ (resp. $T \circ r = T$).

Proposition 3.1.

1. *Le Laplacien de $\mathbb{R}^n$ est invariant par rotation.*
2. *La distribution de Dirac en 0 est invariante par rotation.*

3. *Pour qu'une fonction* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *soit radiale, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme* $\varphi(x) = \Phi(||x||)$ *où* Φ *est une fonction de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$.
4. *Pour que deux distributions invariantes par rotation soient égales, il faut et il suffit qu'elles coïncident sur les fonctions test qui sont radiales.*

Démonstration :

1. Soit r une rotation quelconque de $\mathbb{R}^n$, et R l'opérateur de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$) dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$) tel que, pour toute f dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$), on ait : $Rf = f \circ r$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \widehat{R\Delta\varphi}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} (R\Delta\varphi)(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} \big[(\Delta\varphi)\circ r\big](x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} (\Delta\varphi)\big(r(x)\big)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{r_A(\mathbb{R}^n)} e^{-i(r^t(y)|\xi)} (\Delta\varphi)(y) |J_{r^t}(y)| dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y|r(\xi))} (\Delta\varphi)(y)dy \\
&= (\widehat{\Delta\varphi})\big(r(\xi)\big) \\
&= -||r(\xi)||^2 \widehat{\varphi}\big(r(\xi)\big) \\
&= -||\xi||^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y|r(\xi))} \varphi(y)dy \\
&= -||\xi||^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(r^t(y)|\xi)} (\varphi\circ r)\big(r^t(y)\big)dy \\
&= -||\xi||^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} (\varphi\circ r)(x) |J_r(x)| dx \\
&= -||\xi||^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\xi)} (R\varphi)(x)dx \\
&= -||\xi||^2 \widehat{R\varphi}(\xi) \\
&= \widehat{\Delta R\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \widehat{\Delta R\varphi}(\xi) = \widehat{R\Delta\varphi}(\xi)$$

c'est-à-dire que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \widehat{\Delta R\varphi} = \widehat{R\Delta\varphi}$$

et, de la transformée de Fourier inverse, on déduit que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ (\Delta R)\varphi = (R\Delta)\varphi,$$

autrement dit :

$$\Delta R = R\Delta \text{ sur } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Comme R et Δ sont continus de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, et que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, on conclut que :

$$\Delta R = R\Delta \text{ sur } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

2. Pour toute rotation r de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \langle \delta \circ r, \varphi\rangle &= \langle \delta, r_*(\varphi)\rangle \ \big(\text{d'après (24)}\big) \\
&= [r_*(\varphi)](0) \\
&= \varphi[r^{-1}(0)] \cdot \Big|\text{dét}\Big(J_r\big[r^{-1}(0)\big]\Big)\Big| \ \big(\text{d'après (25)}\big) \\
&= \varphi(0) \cdot \big|\text{dét}\big[J_r(0)\big]\big| \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

et cela prouve donc que :

$$\text{Pour toute rotation } r \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ on a } \delta \circ r = \delta,$$

c'est-à-dire que :

$$\delta \text{ est invariante par les rotations de } \mathbb{R}^n.$$

3. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et Φ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\big(\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = \Phi(||x||)\big) &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Pour toute rotation } r \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi\big(r(x)\big) = \Phi\big(||r(x)||\big) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Pour toute rotation } r \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi\big(r(x)\big) = \Phi(||x||) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \text{Pour toute rotation } r \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi\big(r(x)\big) = \varphi(x) \end{cases} \\
&\Rightarrow (\varphi \text{ est invariante par rotation})
\end{aligned}$$

Réciproquement,

4.

Proposition 3.2. *Soit f et Φ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}_+$, et supposons que, quel que soit x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x)=\Phi(r)$, où $r=||x||$, alors :*

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ \Delta f(x)=\Phi''(r)+\frac{n-1}{r}\Phi'(r).$$

Démonstration : Tout d'abord, pour toute fonction Ψ dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Psi(r)\big] &= \frac{\partial r}{\partial x_j}\cdot\Psi'(r)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\big[(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}\big]\cdot\Psi'(r)\\ &= \frac{x_j}{r}\Psi'(r),\end{aligned}$$

et maintenant

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\big[\Phi(r)\big]\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi(r)\big]\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{x_j}{r}\Phi'(r)\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r}\right)\right]\Phi'(r)+\frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\Phi'(r)\big]\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{r-x_j\frac{\partial r}{\partial x_j}}{r^2}\Phi'(r)+\frac{x_j^2}{r^2}\Phi''(r)\right]\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{r^2-x_j^2}{r^3}\Phi'(r)+\frac{x_j^2}{r^2}\Phi''(r)\right]\\ &= \frac{n}{r}\Phi'(r)-\frac{1}{r}\Phi'(r)+\Phi''(r)\\ &= \Phi''(r)+\frac{n-1}{r}\Phi'(r)\end{aligned}$$

3.1.2 Solution élémentaire

Comme Δ et δ sont invariants par rotation, on cherche une solution élémentaire E pour Δ qui soit invariante par rotation, c'est-à-dire de la forme $E(x)=\Phi(||x||)$ où Φ est une fonction (généralisée) sur $\mathbb{R}_+$.

On se place donc en dehors de l'origine et, d'un côté, on a :

$$\Delta E(x) = \Phi''(||x||) + \frac{n-1}{||x||}\Phi'(||x||),$$

d'un autre côté :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0),\ \langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0,$$

ce qui veut dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ \ \Delta E(x) = 0,$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0,\ \Phi''(||x||) + \frac{(n-1)}{||x||}\Phi'(||x||) = 0.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la solution générale Φ de l'équation différentielle :

$$\Phi''(t) + \frac{(n-1)}{t}\Phi'(t) = 0$$

est telle que :

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \Psi(t) \\ \Psi'(t) + \frac{(n-1)}{t}\Psi(t) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \Phi(t) = \int \Psi(t)dt \\ \Psi(t) = ae^{-\int \frac{(n-1)}{t}dt}, \quad a \text{ étant une constante arbitraire,} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Phi(t) = \int \Psi(t)dt \\ \Psi(t) = \frac{a}{t^{n-1}}, \quad \text{où } a \text{ est une constante arbitraire,} \end{cases}$$

et par suite :

$$\Phi(t) = \int \frac{a}{t^{n-1}}dt = \begin{cases} at + b & \text{si } n = 1 \\ a\ln t + b & \text{si } n = 2 \\ \frac{a}{(2-n)} \cdot \frac{1}{t^{n-2}} + b & \text{si } n \geq 3 \end{cases}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des cstes arbitraires.}$$

Par conséquent, pour $x \neq 0$, E est de la forme :

$$E(x) = \begin{cases} a||x|| + b & \text{si } n = 1 \\ a\ln||x|| + b & \text{si } n = 2 \\ \frac{a}{(2-n)} \cdot \frac{1}{||x||^{n-2}} + b & \text{si } n \geq 3 \end{cases}, \text{ où } a, \text{ et } b \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

On se propose alors de chercher E telle que :

$$E(x) = \begin{cases} c_1 ||x|| & \text{si } n = 1 \\ c_2 \ln ||x|| & \text{si } n = 2 \\ c_3 ||x||^{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Proposition 3.3. *la distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par la fonction localement intégrable :*

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{||x||}{2} & \text{si } n = 1, \\ \dfrac{\ln ||x||}{2\pi} & \text{si } n = 2, \\ \dfrac{c}{||x||^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \left(\text{avec } \dfrac{1}{c} = (2-n) \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right). \end{cases}$$

est solution élémentaire du Laplacien.

Démonstration.

• <u>Cas où $n = 1$</u> : $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta E, \varphi \rangle &= \langle E, \varphi'' \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x) \varphi''(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{2} \varphi''(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x \varphi''(x)\, dx \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta E = \delta,$$

et la fonction

$$E = \frac{|x|}{2}$$

est bel et bien solution élémentaire de Δ.

• <u>Cas où $n=2$</u> : Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\varphi(x)=\Phi(||x||)$ où $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi \rangle &= \langle E, \Delta\varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} E(x)\Delta\varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln||x||}{2\pi}\Delta[\Phi(||x||)]\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln||x||}{2\pi}\Big[\Phi''(||x||)+\frac{1}{||x||}\Phi'(||x||)\Big]\, dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln r}{2\pi}\Big[\Phi''(r)+\frac{1}{r}\Phi'(r)\Big] r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\infty} r(\ln r)\Big[\Phi''(r)+\frac{1}{r}\Phi'(r)\Big]\, dr \\
&= \int_0^{\infty} r(\ln r)\Phi''(r)\, dr + \int_0^{\infty} (\ln r)\Phi'(r)\, dr \\
&= -\int_0^{\infty} \Phi'(r)\, dr - \int_0^{\infty} (\ln r)\Phi'(r)\, dr + \int_0^{\infty} (\ln r)\Phi'(r)\, dr \\
&= \Phi(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

et cela implique donc que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2),\ \langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

c'est-à-dire que

$$\Delta E = \delta,$$

et que la fonction E telle que

$$E(x)=\frac{\ln|x|}{2\pi}$$

est solution élémentaire de Δ.

• <u>Cas où $n \geq 3$</u> : $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x)=\Phi(||x||)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi \rangle &= \langle E, \Delta\varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{||x||^{n-2}}\Delta[\Phi(||x||)]\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{||x||^{n-2}}\Big[\Phi''(||x||)+\frac{n-1}{||x||}\Phi'(||x||)\Big]\, dx
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi \rangle &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \frac{c}{r^{n-2}} \Big[\Phi''(r) + \frac{n-1}{r} \Phi'(r) \Big] r^{n-1}\, dr d\sigma \\
&= |S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty \frac{c}{r^{n-2}} \Big[\Phi''(r) + \frac{n-1}{r} \Phi'(r) \Big] r^{n-1}\, dr \\
&= c|S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty r\Phi''(r)\, dr + c(n-1) \cdot |S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty \Phi'(r)\, dr \\
&= -c|S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty \Phi'(r)\, dr + c(n-1) \cdot |S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty \Phi'(r)\, dr \\
&= c(n-2) \cdot |S^{n-1}| \cdot \int_0^\infty \Phi'(r)\, dr \\
&= \frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{2\pi^{n/2}} \cdot |S^{n-1}| \cdot \Phi(0) \\
&= \frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{2\pi^{n/2}} \cdot |S^{n-1}| \cdot \varphi(0) \\
&= \frac{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{2\pi^{n/2}} \cdot |S^{n-1}| \cdot \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|S^{n-1}| &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx}{\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 \ldots dx_n}{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\, dt} \\
&= \frac{\Big[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)}\, dt ds \Big]^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\, dt} \\
&= \frac{\Big[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2}\, d\rho d\theta \Big]^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)} \\
&= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}
\end{aligned}$$

et il en découle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \varphi(x) = \Phi(||x||), \text{ où } \Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+), \text{ on a : } \langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

ce qui implique que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \ \langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire que :

$$\Delta E = \delta$$

et que E est une solution élémentaire de Δ. ■

3.2 Équation des Ondes

L'opérateur des ondes (D'alembertien) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est l'opérateur

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x,$$

où la variable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est notée (t, x) avec $t \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3.2.1 Cordes Vibrantes (Ondes en dimention $1+1$)

L'Équation des Cordes Vibrantes (dimention $1+1$) est :

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = g$$

où v est la vitesse de propagation.
En posant :

$$X = x - vt, \quad Y = x + vt, \quad F(X,Y) = f(t,x), \quad \text{et} \quad G(X,Y) = -\frac{1}{4}g(t,x),$$

on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) & = & \frac{\partial}{\partial x}[F(X,Y)] \\ & = & \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y) \\ & = & \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y), \end{array}$$

donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X,Y) + \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial X}(X,Y) + \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(X,Y) + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(X,Y).$$

De même :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) & = & \frac{\partial}{\partial t}[F(X,Y)] \\ & = & \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y) \\ & = & -v\frac{\partial F}{\partial X}(X,Y) + v\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y), \end{array}$$

et il en découle que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = v^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X,Y) - v^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial X}(X,Y) - v^2\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(X,Y) + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(X,Y).$$

Si l'on suppose maintenant que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, cette équation des cordes vibrantes devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(X,Y) = G(X,Y),$$

donc :

$$F = E * G,$$

où :

$$E(X,Y) = H(X)\otimes H(Y),$$

et où $H(X)$ et $H(Y)$ sont les fonctions d'Heaviside :

$$H(X) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X<0 \\ 1 & \text{si} \quad X\geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Y<0 \\ 1 & \text{si} \quad Y\geq 0 \end{cases}$$

puisque :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2\big[H(X)\otimes H(Y)\big]}{\partial X\partial Y}, \varphi \right\rangle &= \left\langle H(X)\otimes H(Y), \frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right\rangle \\
&= \left\langle H(X), \left\langle H(Y), \frac{\partial^2\varphi}{\partial X\partial Y}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle H(X), \left\langle -\frac{\partial H}{\partial Y}(Y), \frac{\partial\varphi}{\partial X}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle H(X), \left\langle -\delta_Y, \frac{\partial\varphi}{\partial X}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle H(X), -\frac{\partial\varphi}{\partial X}(X,0)\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial H}{\partial X}(X), \varphi(X,0)\right\rangle \\
&= \left\langle \delta_X, \varphi(X,0)\right\rangle \\
&= \varphi(0,0) \\
&= \langle \delta, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

3.2.2 Problème de Cauchy

Si f est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, on note $\mathscr{F}_x f$ sa transformée de Fourier partielle par rapport à x, et si (par exemple) φ est une fonction test sur $\mathbb{R}^{n+1}$, alors :

$$\mathscr{F}_x\varphi(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(t,x)\,dx.$$

Si f vérifie le problème de Cauchy pour l'équation des Ondes,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta_x f \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \\ f\Big/_{t=0} = f_0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}\Big/_{t=0} = f_1, \end{cases}$$

où f_0 et f_1 sont des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n_x$, sa transformée de Fourier partielle par rapport à x vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2(\mathscr{F}_x f)}{\partial t^2} = -||\xi||^2\mathscr{F}_x f \text{ sur } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\xi \\ \mathscr{F}_x f\Big/_{t=0} = \widehat{f_0}, \\ \dfrac{\partial(\mathscr{F}_x f)}{\partial t}\Big/_{t=0} = \widehat{f_1}, \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$\mathscr{F}_x f = (\cos||\xi||t)\widehat{f_0} + \frac{\sin||\xi||t}{||\xi||}\widehat{f_1}.$$

3.2.3 Solution élémentaire

Soit E_+ la distribution tempérée dont la transformée de Fourier partielle par rapport à x est :

$$\mathscr{F}_x E_+(t,\xi) = (2\pi)^{-n/2}H(t,\xi)\frac{\sin t||\xi||}{||\xi||},$$

sachant que H est la fonction de Heaveside :

$$H(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0, \\ 1 & \text{si} \quad t\geq 0. \end{cases} = Y(t)\otimes 1_\xi, \text{ où } Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0, \\ 1 & \text{si} \quad t\geq 0. \end{cases}, \text{ et}, \forall\xi,\ 1_\xi(\xi) = 1.$$

Pour toute fonction φ de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big\langle\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\|\xi\|^2\Big)(\mathscr{F}_x E_+),\varphi\Big\rangle &= \Big\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathscr{F}_x E_+)+\|\xi\|^2(\mathscr{F}_x E_+),\varphi\Big\rangle\\
&= (2\pi)^{-n/2}\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|}\Big)\\
&\qquad +\|\xi\|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|},\varphi\Big\rangle\\
&= (2\pi)^{-n/2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}\Big(\delta_t\otimes 1_\xi\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|}+H(t,\xi)\cos t\|\xi\|\Big)\\
&\qquad +\|\xi\|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|},\varphi\Big\rangle\\
&= (2\pi)^{-n/2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}\Big(H(t,\xi)\cos t\|\xi\|\Big)\\
&\qquad +\|\xi\|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|},\varphi\Big\rangle\\
&= (2\pi)^{-n/2}\Big\langle(\cos t\|\xi\|)(\delta_t\otimes 1_\xi)-\|\xi\|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|}\\
&\qquad +\|\xi\|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|},\varphi\Big\rangle\\
&= (2\pi)^{-n/2}\Big\langle\delta_t\otimes 1_\xi,\varphi\Big\rangle\\
&= \langle\delta_t\otimes[(2\pi)^{-n/2}1_\xi],\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\|\xi\|^2\Big)\mathscr{F}_x E_+=\delta_t\otimes\mathscr{F}_x(\delta_x),$$

et à l'aide de la transformation de Fourier inverse on obtient :

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\Big)E_+=\delta_t\otimes\delta_x,$$

c'est-à-dire :

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\Big)E_+=\delta,$$

ce qui montre que E_+ est une solution élémenaire (portée par le demi-espace $t\geq 0$) pour l'opérateur des ondes.

3.3 Équation de La Chaleur et Équation de Schrödinger

Les opérateurs de la chaleur et de Schrödinger sont respectivement :

$$C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta.$$

Proposition 3.4. *La transformée de Fourier inverse de la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \exp(-\omega\|\xi\|^2) \end{array}$$

est la fonction :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4\omega}\right) \end{array}$$

Démonstration.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathscr{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}f(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi-\omega\|\xi\|^2}d\xi.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathscr{F}^{-1}f)(ix) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\xi-\omega\|\xi\|^2}d\xi,$$

et comme :

$$-x\xi - \omega\|\xi\|^2 = \frac{\|x\|^2}{4\omega} - \left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega}\xi\right|^2,$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathscr{F}^{-1}f)(ix) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{\|x\|^2}{4\omega}}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-\left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi\right|^2}d\xi.$$

En posant maintenant :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega}\xi,$$

on arrive à :

$$d\xi = \frac{1}{\omega^{\frac{n}{2}}}d\eta,$$

et il s'ensuit alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathscr{F}^{-1}f)(ix) = \frac{1}{(2\pi\omega)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\|x\|^2}{4\omega}} \int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} d\eta = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\|x\|^2}{4\omega}}$$

Ce qui implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathscr{F}^{-1}f)(x) = g(x). \quad \square$$

3.3.1 Equation de la chaleur

le problème bien posé associé est le problème initial :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f = \Delta f \\ f\big/_{t=0} = f_0 \end{cases}$$

où f_0 est tempérée.

Si f est une solution tempérée de ce problème, et $\mathscr{F}_x f$ est sa transformée de Fourier partielle par rapport à x, alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathscr{F}_x f) = -\|\xi\|^2 \mathscr{F}_x f \\ \mathscr{F}_x f\big/_{t=0} = \widehat{f_0} \end{cases}$$

ce qui implique que :

$$\mathscr{F}_x f = e^{-t\|\xi\|^2} \widehat{f_0}$$

et que :

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} [\mathscr{F}_x^{-1}(e^{-t\|\xi\|^2})] *_x f_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \Big(\frac{1}{2t}\Big)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} *_x f_0 \\ &= \Big[\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\Big] *_x f_0. \end{aligned}$$

• **<u>Solution élémentaire</u> :** Soit : $(\mathscr{F}_x E_+)(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-t\|\xi\|^2}$. Alors, pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\begin{aligned} \Big\langle \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \|\xi\|^2\Big)(\mathscr{F}_x E_+), \varphi \Big\rangle &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{F}_x E_+) + \|\xi\|^2 (\mathscr{F}_x E_+), \varphi \Big\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big[H(t,\xi) e^{-t\|\xi\|^2}\Big] + \|\xi\|^2 \Big[H(t,\xi) e^{-t\|\xi\|^2}\Big], \varphi \Big\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle e^{-t\|\xi\|^2}(\delta_t \otimes 1_\xi) - \|\xi\|^2 H(t,\xi) e^{-t\|\xi\|^2} \\ &\qquad + \|\xi\|^2 H(t,\xi) e^{-t\|\xi\|^2}, \varphi \Big\rangle \\ &= \langle \delta_t \otimes \big[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi\big], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\|\xi\|^2\right)(\mathscr{F}_x E_+)=\delta_t\otimes\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}1_\xi\right]$$

ou encore :

$$\mathscr{F}_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)E_+\right]=\mathscr{F}_x[\delta_t\otimes\delta_x]$$

autrement dit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)E_+=\delta$$

et ainsi, l'équation de la chaleur admet pour solution élémentaire la fonction E_+ telle que :

$$\begin{aligned} E_+(t,x) &= \mathscr{F}_x^{-1}(\mathscr{F}_x E_+) \\ &= \mathscr{F}_x^{-1}\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}H(t,\xi)e^{-t\|\xi\|^2}\right] \\ &= \begin{cases}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathscr{F}_x^{-1}\left[e^{-t\|\xi\|^2}\right] & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$E_+(t,x)=H(t,x)(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

3.3.2 Équation de Schrödinger

Le problème initial pour l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^n$ est :

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\right]f=0\\[2ex] f\Big/_{t=0}=f_0\end{cases}$$

où f_0 est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}_x^n$. Il équivaut au problème :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\mathscr{F}_x f)}{\partial t}=-i\|\xi\|^2\mathscr{F}_x f\\[2ex] \mathscr{F}_x f\Big/_{t=0}=\widehat{f_0}\end{cases}$$

dont la solution est telle que :

$$\mathscr{F}_x f=e^{-it\|\xi\|^2}\widehat{f_0},$$

donc

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\mathscr{F}_x^{-1}(e^{-it\|\xi\|^2})]*_x f_0(x)\\ &= [(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4it}}]*_x f_0(x)\\ &= [(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4it}-in\frac{\pi}{4}}]*_x f_0(x)\end{aligned}$$

• **Solution élémentaire :** On pose $(\mathscr{F}_x E)(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-it\|\xi\|^2}$ et, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\|\xi\|^2\right)(\mathscr{F}_x E), \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{F}_x E) + i\|\xi\|^2 (\mathscr{F}_x E), \varphi \right\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\left[H(t,\xi)e^{-it\|\xi\|^2}\right] \\
&\qquad + i\|\xi\|^2 \left[H(t,\xi)e^{-it\|\xi\|^2}\right], \varphi \Big\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle e^{-it\|\xi\|^2}[\delta_t \otimes 1_\xi] - i\|\xi\|^2 H(t,\xi) e^{-it\|\xi\|^2} \\
&\qquad + i\|\xi\|^2 H(t,\xi) e^{-it\|\xi\|^2}, \varphi \Big\rangle \\
&= \langle \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi], \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\|\xi\|^2\right)(\mathscr{F}_x E) = \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi],$$

de sorte que :

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) E = \delta.$$

En fait, E est la fonction localement intégrable :

$$\begin{aligned}
E(t,x) &= \mathscr{F}_x^{-1}(\mathscr{F}_x E) = \mathscr{F}_x^{-1}\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}\right] \\
&= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathscr{F}_x^{-1}\left[e^{-it|\xi|^2}\right] & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
&= H(t,x)(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}} \\
&= H(t,x)(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - in\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

3.4 Théorème de Malgrange-Ehrenpreis

Théorème 3.5. *(Malgrange-Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants admet une solution élémentaire dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration du théorème 3.5. :

Ce théorème général a été démontré par Ehrenpreiss [2] et Malgrange [6]. La démonstration que je fournis ici est due à L. Hörmander [4]. Elle est très brièvement décrite dans

[1] et [4] et je me propose ici de la détailler au maximum. L'équation $P(D)E = \delta$ est équivalente au problème de division $P(\xi)\widehat{E} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$, et l'idée principale est de définir E en tant que transformée de Fourier inverse de $\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)}$, c'est-à-dire par une formule du type :

$$\langle E, \varphi\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi, \ \ \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{65}$$

• Si, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) \neq 0$, c'est bel et bien la formule (61) qui définit E. En effet, la fonction $\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)}$ est $\mathscr{C}^\infty$ à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées :

$$\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{P(\xi)} \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$$

Donc, E (ainsi définie) est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. De plus, $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi\rangle &= \langle E, P(-D)\varphi\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}[P(-D)\varphi](\xi)}{P(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)\, d\xi \\
&= \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle \mathscr{F}(\delta), \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle \delta, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$P(D)E = \delta,$$

et que E est solution élémentaire de $P(D)$.

• Dans le cas général, on utilise le lemme suivant (dont une démonstration se trouve dans [1]) :

Lemme 3.1. *Si $P(D) \neq 0$, il existe une suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}^n$ et $|\theta_k| \leq 1$, une partition*[3] *différentielle de l'unité $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et une constante $c > 0$ telles que $|P(\xi + z\theta_k)| \geq c$ pour $\xi \in \operatorname{supp}\rho_k$, $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$.*

3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(V_j)_j$ un de ses recouvrements par des ouverts. Une partition différentielle de l'unité sur Ω subordonnée à $(V_j)_j$ est une famille de fonctions $(\varphi_j)_j$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telles que : $\operatorname{supp}\varphi_j \subset V_j$, la famille $(\operatorname{supp}\varphi_j)_j$ est localement finie (c'est-à-dire : Pour tout compact K de Ω, l'ensemble des indices j tels que $\operatorname{supp}\varphi_j \cap K \neq \emptyset$ est fini), $\sum \varphi_j = 1$, et $\varphi_j \geq 0$.

L'idée maintenant est d'intégrer dans le champ complexe pour éviter les zéros de $P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, ce qui nous donne la formule :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle E, \varphi\rangle &= \left\langle E, \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)\right\rangle \\
&= \langle \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \rho_k \widehat{E}, \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \widehat{E}, \rho_k \mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho_k(\xi)\mathscr{F}^{-1}\varphi(\xi)}{P(\xi)} d\xi. \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho_k(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi.
\end{aligned}$$

Comme supp(φ) est compact, il est inclus dans une boule centrée à l'origine et de rayon R et, d'après le théorème de Paley-Wiener [4], $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ que l'on note $\widetilde{\widehat{\varphi}}$.

La fonction

$$\begin{aligned}
\psi \ :\ & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
& z \mapsto \psi(z) = \widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)
\end{aligned}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car :

$$\left\{\begin{array}{l}
\bullet\ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n \text{ telle que } h(z) = -\xi - z\theta_k \text{ est holomorphe (puisque toutes ses composantes le sont),} \\
\bullet\ \widetilde{\widehat{\varphi}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ est holomorphe,} \\
\bullet\ \psi = \widetilde{\widehat{\varphi}} \circ h.
\end{array}\right.$$

De même, la fonction $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $p(z) = P(\xi + z\theta_k)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ puisque :

$$\left\{\begin{array}{l}
\bullet\ (-h) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n \text{ est holomorphe,} \\
\bullet\ P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ est holomorphe (car c'est un polynôme),} \\
\bullet\ p = P \circ (-h),
\end{array}\right.$$

4. Théorème de Paley-Wiener : Soit f une distribution tempérée, $\mathscr{F}f$ sa transformée de Fourier. Alors f est une distribution (resp. fonction test) à support dans la boule de rayon R si et seulement si :
(i) $\mathscr{F}f$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\zeta = \xi + i\eta$, dans $\mathbb{C}^n$ tout entier.
(ii) Il existe N tel que $|\mathscr{F}f(\zeta)| \leq C^{ste}(1+|\zeta|)^N e^{R|\eta|}$ (resp. (ii-bis) Pour tout N on a $|\mathscr{F}f(\zeta)| \leq C^{ste}(1+|\zeta|)^{-N} e^{R|\eta|}$)

et comme :

$$[P \circ (-h)](z) = P(\xi + z\theta_k) \neq 0 \text{ (car } |P(\xi + z\theta_k)| \geq c > 0),$$

on conclut alors que la fonction

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \end{aligned}$$

est à son tour holomorphe sur $\mathbb{C}$.

D'après la formule de Cauchy, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < 1$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

et en particulier :

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz,$$

ce qui implique que :

$$\frac{\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \times \frac{dz}{z},$$

et par voie de conséquence :

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \times \frac{dz}{z} \right) d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{66}$$

Proposition 3.6. *E est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve de la proposition 3.6 : Il est clair que E est linéaire de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'elle est continue, on choisit une suite $(\varphi_j)_j$ qui converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et on démontre que $(< E, \varphi_j >)_j$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

En effet, si $(\varphi_j)_j$ est une telle suite, alors :

$$
\begin{aligned}
|<E,\varphi_j>| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left|\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)}{P(\xi+z\theta_k)}\times\frac{dz}{z}\right)d\xi\right| \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{|P(\xi+z\theta_k)|}\times\frac{dz}{|z|}\right)d\xi \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{|P(\xi+z\theta_k)|}\times dz\right)d\xi \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{|\widetilde{\widehat{\varphi}}_j(-\xi-z\theta_k)|}{c}\times dz\right)d\xi \ (\textit{cf.}\ \text{lem. } 3.1)
\end{aligned}
$$

Lemme 3.2. *Il existe une constante $C>0$ telle que, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n, \forall\varphi\in\mathscr{C}_K^\infty$,*

$$
\sup_{|z|=1,\,k\in\mathbb{N}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi-z\theta_k)|\le CN_{K,n+1}(\varphi)(1+|\xi|)^{-n-1}
$$

Démonstration du lemme 3.2. : on sait :

$$
\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}D^\alpha\varphi(x)\ dx
$$

donc :

$$
\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K e^{-ix\xi}D^\alpha\varphi(x)\ dx
$$

et la fonction $\xi\longrightarrow\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$ se prolonge en une fonction holomorphe de la variable $\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n$ telle que :

$$
\zeta\longrightarrow\zeta^\alpha\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K e^{-ix\zeta}D^\alpha\varphi(x)\ dx
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
|\zeta^\alpha|\cdot|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left|\int_K e^{-ix\zeta}D^\alpha\varphi(x)\ dx\right| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_K|D^\alpha\varphi(x)|\cdot|e^{-ix\zeta}|\ dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\int_K|e^{-ix\zeta}|\ dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\int_K e^{x\eta}\ dx \\
&\le \frac{\int_K e^{x\eta}\ dx}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|
\end{aligned}
$$

Autrement dit : $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n$,

$$|\zeta^\alpha|.|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Donc :

$$(\sup_{|\alpha|\leq n+1} |\zeta^\alpha|)|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq n+1}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Mais :

$$c_2(1+|\zeta|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq \sup_{|\alpha|\leq n+1} |\zeta^\alpha|$$

et il s'ensuit alors que :

$$c_2(1+|\zeta|^2)^{\frac{n+1}{2}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(\zeta)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

En particulier pour $\zeta = -\xi - z\theta_k$, on a :

$$c_2(1+|-\xi - z\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

D'où :

$$c_2 \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}(1+|-\xi - z\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et cela implique que :

$$c_2(1+|-\xi - i\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

Donc :

$$c_2(1+|\xi|^2+|\theta_k|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

Par conséquant :

$$c_2(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et comme :

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|)^2 \leq 1+|\xi|^2$$

On arrive à :

$$\frac{c_2}{2}(1+|\xi|)^{n+1} \sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq c_1 N_{K,n+1}(\varphi)$$

et finalement :

$$\sup_{\substack{|z|=1\\ k\in\mathbb{N}}}|\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)| \leq C N_{K,n+1}(\varphi)(1+|\xi|)^{-n-1},$$

où :

$$C = \frac{2c_1}{c_2}$$ □

<u>Retour à la démostration de la proposition 3.6.</u> :

De ce qui a précédé et du lemme 3.2. il découle que :

$$\begin{aligned}
|<E,\varphi_j>| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{CN_{K,n+1}(\varphi_j)(1+|\xi|)^{-n-1}}{c} dz\Big)\, d\xi, \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{CN_{K,n+1}(\varphi_j)(1+|\xi|)^{-n-1}}{c}\, d\xi\Big)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} dz\Big), \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{C}{c}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}\, d\xi\Big] N_{K,n+1}(\varphi_j),
\end{aligned}$$

à noter que l'intégrale :

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}\, d\xi$$

est convergente pour les raisons que voici :

- Le passage en coordonées polaires nous donne :

$$\mathbf{I} = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau\, d\theta = \Big(\int_0^\infty \frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau\Big)\Big(\int_{S^{n-1}} d\theta\Big)$$

- L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau$$

  est convergente puisqu'elle est de même nature que $\int_1^\infty \frac{\tau^{n-1}}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau$, c'est-à-dire de même nature que $\int_1^\infty \frac{1}{\tau^2} d\tau$.
- L'intégrale $\int_{S^{n-1}} d\theta$ est finie vu qu'elle désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (que l'on calculera un peu plus loin).

Par conséquent, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |<E,\varphi_j>| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{C\mathbf{I}}{c} N_{K,n+1}(\varphi_j),$$

et cela prouve que si :

$$\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} 0,$$

alors :

$$\langle E,\varphi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}} 0,$$

et que E est une distribution sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 3.5. :

Pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi\rangle &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{[P(-D)\varphi]}}(-\xi - z\theta_k)}{P(\xi + z\theta_k)} \times \frac{dz}{z}\right) d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{\widetilde{\widehat{\varphi}}(-\xi - z\theta_k)}{z}\, dz\right) d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle \rho_k, \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \left\langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho_k, \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle \\
&= \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle \mathscr{F}(\delta), \mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que, $P(D)E = \delta$, et que E est solution élémentaire de $P(D)$. $\blacksquare$

3.4.1 Solution du problème

L'importance d'une solution élémentaire E pour un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants $P(D)$ réside dans le fait que, si $L_E : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}'$ est l'opérateur de convolution défini par :

$$\forall u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),\ L_E u = E * u,$$

on a :

$$L_E \circ P(D) = P(D) \circ L_E = Id,$$

car :

$$[L_E \circ P(D)]u = L_E[P(D)u] = E * [P(D)u] = [P(D)E] * u = \delta * u = u,$$

et

$$[P(D) \circ L_E]u = P(D)(L_E u) = P(D)(E * u) = [P(D)E] * u = \delta * u = u.$$

Donc, la connaissance d'une solution fondamentale de $P(D)$ permet de construire une inverse bilatère L_E pour $P(D)$, de résoudre l'équation $P(D)u = f$, et de décrire la régularité de cette solution. En effet :

$$(P(D)u = f) \Leftrightarrow (u = L_E f) \Leftrightarrow (u = E * f)$$

et si f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, la solution u l'est également.

4 Opérateurs linéaires à cœfficients analytiques

4.1 Position du problème

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, et S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ passant par a, définie par :

$$S \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}, \tag{67}$$

où $g : U \to \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière, sans points critiques sur S :

$$\forall x \in S,\ d_x g \neq 0. \tag{68}$$

On considère un opérateur différentiel linéaire d'ordre m sur U,

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \partial^\alpha, \tag{69}$$

auquel on attache la fonction $\sigma_m(P)$ définie sur $T^*U \simeq U \times \mathbb{R}^n_\xi$ par,

$$\sigma_m(P)(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{|\alpha| = m} p_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \tag{70}$$

Le problème :

Etant données des fonctions assez régulières f sur U, et $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ sur $S \cap U$, peut-on trouver une fonction u sur U satisfaisant à l'équation

$$P(x, \partial)u = f \tag{71}$$

dans un voisinage U' de a contenu dans U, et aux conditions

$$u = u_0,\ D_{\vec{v}} u = u_1,\ \ldots,\ D_{\vec{v}}^{m-1} u = u_{m-1} \tag{72}$$

sur $S \cap U'$, où $\vec{v}$ est un champ de vecteurs normal à S, et $D_{\vec{v}}$ est la dérivation dans la direction de $\vec{v}$?

Définition 4.1. *Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ définie par (67) avec g suffisamment régulière (au moins, de classse $\mathscr{C}^m$) et satisfaisant à (68), soit $\sigma_m(P)$ la fonction définie par (70), et soit x un point de S.*

- *On dit que x est caractéristique pour l'équation (71) si $\sigma_m(P)(x, d_x g) = 0$;*
- *On dit que S est caractéristique pour l'équation (71) si tous ses points x le sont.*

4.2 Théorème de Cauchy-Kovalevski

Théorème 4.1. *(Cauchy-Kowalewsky) Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ définie par (67) dans un voisinage U de l'un de ses points a, avec g satisfaisant à la condition (68), et supposons que les fonctions g, p_α $(|\alpha| \leq m)$, f, u_j $(j = 0, \dots, m-1)$, qui figurent dans (67),(69),(71),(72), sont analytiques sur U. Si a n'est pas caractéristique pour (71) , alors il existe un voisinage U' de a contenu dans U dans lequel l'équation (71), accompagnée des conditions (72), admet une seule solution analytique u (i.e il existe une seule fonction analytique u qui vérifie l'équation (71) dans U' et les équations (72) sur $S \cap U'$).*

Ce théorème (dont on peut trouver une démonstration dans [7]) est l'un des premiers résultats sur l'existence de solutions, mais pour beaucoup de questions, en particulier pour des questions d'approximation utiles pour la physique, il n'est pas très utilisable. Il ne dit pas quel est le "rayon de convergence" de la série solution ; de la démonstration, on peut extraire une majoration, mais elle est en général mauvaise, en particulier ce "rayon de convergence" peut être très petit même si ceux des données ne le sont pas. Surtout ce théorème ne dit pas que le problème de Cauchy est bien posé, *i.e* que la solution a une limite en un sens raisonable (par exemple au sens des fonctions différentiables) si les données en ont, ni même qu'il a une solution si les données ne sont pas des fonctions analytiques. Si on essaie de résoudre le problème de Cauchy pour une donnée de Cauchy (u_j) diférentiable mais non analytique, la première idée qui serait d'approcher les u_j par des fonctions analytiques et de passer à la limite ne marche pas, parce qu'on ne sait pas si la limite des solutions existe (il faudrait justement pour cela que le problème de Cauchy soit bien posé). Le fait que le problème de Cauchy soit bien posé est une autre question, souvent beaucoup plus difficile.

Le théorème de Cauchy-Kovalevsky a été publié par Cauchy en 1842 dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences. Le travail de Sofia Kovalevskaïa est paru en 1874 ; apparemment elle ne connaissait pas celui de Cauchy (et son jury non plus puisqu'il s'agissait d'une thèse !). La démonstration de l'unicité est simple et instructive. Celle de l'existence consiste essentiellement à démontrer la convergence de la série ainsi calculée. Elle repose sur une technique de majoration établie par Cauchy à cette occasion (méthode des séries majorantes). Le théorème de Cauchy-Kovalevskaïa n'exclut pas l'existence de solutions non analytiques au problème de Cauchy. Cette lacune a été comblée, en 1901 par le théorème de Holmgren qui affirme l'unicité des solutions " classiques " (c'est-à-dire m fois différentiables). Très élégante, la démonstration de Holmgren est remarquable pour l'époque par la façon dont elle met en jeu des idées de l'analyse moderne : dualité et densité. Le résultat de Holmgren a été étendu par Hörmander aux solutions distributions. Il est nécessaire dans ce nouveau cadre de reformuler le problème, puisque la restriction d'une distribution à l'hyperplan $x_n = x_n^0$, qui intervient dans les données de Cauchy, n'a à priori pas de sens.

4.3 Démonstration du Théorème

En trois étapes :

• On démontre tout d'abord que le problème (71)-(72) se ramène à un problème de Cauchy où $a = 0$, où la fonction g qui définit S est la énième projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc $\vec{v} = \pm e_n$ où e_n est le énième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $D_{\vec{v}} = D_{\pm e_n} = \pm\partial_n$), où le cœfficient de ∂_n^m dans (69) est égal à 1, et où les conditions limites $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ sont nulles.
• On démontre ensuite qu'il existe une unique série formelle [5] (non nécessairement convergente) qui vérifie formellement le nouveau problème de Cauchy.
• On démontre enfin (par la technique des séries majorantes) que l'unique solution formelle est en fait une série convergente.

4.3.1 Réduction du problème

D'après l'hypothèse (68), il existe au moins une dérivée partielle $\partial_j g$ qui ne s'annule pas en a. Donc, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que

$$\partial_n g \neq 0 \tag{73}$$

dans un voisinage de a. Ceci étant, on peut aisément vérifier que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_x^n \ni x \longmapsto \varphi(x) = \widetilde{x} \in \mathbb{R}_{\widetilde{x}}^n \tag{74}$$

5. Série formelle signifie : série entière non nécessairement convergente. On peut effectuer sur les séries formelles les mêmes opérations, produit, dérivation, composition (en prenant garde à l'origine) que sur les fonctions - le résultat est une autre série formelle.

où

$$\widetilde{x}_1 = x_1, \ \dots \ , \ \widetilde{x}_{n-1} = x_{n-1}, \ \widetilde{x}_n = g(x), \tag{75}$$

est un difféomorphisme analytique qui transforme

$$S \ \text{en} \ \widetilde{S} = \{\widetilde{x}_n = 0\}, \tag{76}$$

$$\partial_j \ \text{en} \ \widetilde{\partial}_j + (\widetilde{\partial_j g})\widetilde{\partial}_n \ \ (j = 1, \dots, n-1), \tag{77}$$

$$\partial_n \ \text{en} \ (\widetilde{\partial_n g})\widetilde{\partial}_n, \tag{78}$$

l'équation aux dérivées partielles (71) en l'équation aux dérivées partielles :

$$\sigma_m(P)(x, d_x g)\widetilde{\partial}_n^m \widetilde{u} + \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_n \le m-1}} \widetilde{p}_\alpha \widetilde{\partial}^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{f}, \tag{79}$$

et les conditions aux limites (72) en les conditions :

$$\widetilde{u}|_{\widetilde{S} \cap \widetilde{U}} = \widetilde{u}_0, \ \widetilde{\partial}_n \widetilde{u}|_{\widetilde{S} \cap \widetilde{U}} = \widetilde{u}_1, \ \dots, \ \widetilde{\partial}_n^{m-1} \widetilde{u}|_{\widetilde{S} \cap \widetilde{U}} = \widetilde{u}_{m-1}, \tag{80}$$

où $\widetilde{u}, \widetilde{f}$, les $\widetilde{p}_\alpha$ (pour $|\alpha| \le m$), les $\widetilde{\partial_j g}$ (pour $j = 1, \dots, n$), et les $\widetilde{u}_i$ (pour $i = 0, \dots, m-1$) s'obtiennent à partir de $u, f, p_\alpha, \partial_j g$ et u_i par la transformation (74) :

$$\widetilde{u} = u \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{p}_\alpha = p_\alpha \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{\partial_j g} = (\partial_j g) \circ \varphi^{-1}, \ \ \text{et} \ \ \widetilde{u}_i = u_i \circ \varphi^{-1}, \tag{81}$$

et où l'on a noté

$$\widetilde{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j} \ \ \text{et} \ \ \widetilde{\partial} = (\widetilde{\partial}_1, \widetilde{\partial}_2, \dots, \widetilde{\partial}_n) \tag{82}$$

L'analyticité de g sur U implique sa continuité dessus, donc implique la continuité sur U de l'application $x \mapsto \sigma_m(P)(x, d_x g)$, et il s'en suit alors que si a n'est pas caractéristique pour (71), c'est-à-dire si

$$\sigma_m(P)(a, d_a g) \neq 0, \tag{83}$$

il existe un voisinage de a tel qu'aucun de ses point sur S ne le soit, et on peut donc mettre l'équation (71) sous la forme

$$[\widetilde{\partial}_n^m u](\widetilde{x}) + \sum_{\substack{|\alpha| \le m, \\ \alpha_n \le m-1}} p'_\alpha(\widetilde{x})[\widetilde{\partial}^\alpha u](\widetilde{x}) = f'(\widetilde{x}), \tag{84}$$

où $p'_\alpha = \widetilde{p}_\alpha / \sigma_m(P)$, $f' = \widetilde{f} / \sigma_m(P)$ et $\widetilde{x}$ est donné par (74) et (75). Il découle également de l'analyticité de g que les fonctions $\widetilde{x} \mapsto p'_\alpha(\widetilde{x})$ ($|\alpha| \le m, \alpha_n \le m-1$) et $\widetilde{x} \mapsto f'(\widetilde{x})$

qui figurent dans les nouvelles coordonnées $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)$ sont elles aussi des fonctions analytiques, et il suffit donc de démontrer le théorème pour l'équation

$$\partial_n^m u+\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_n\le m-1}} p_\alpha\partial^\alpha u=f, \quad \text{dans un voisinage } U \text{ de l'origine,} \tag{85}$$

avec les conditions

$$u\big|_{S\cap U}=u_0, \quad \partial_n u\big|_{S\cap U}=u_1, \quad \ldots \quad , \quad \partial_n^{m-1}u\big|_{S\cap U}=u_{m-1}, \tag{86}$$

et dans le cas où

$$S=\{x_n=0\}. \tag{87}$$

On suppose maintenant que $S=\{x_n=0\}$, que les fonctions p_α ($|\alpha|\le m$, $\alpha_n\le m-1$) et f sont analytiques dans U, que les fonctions u_0, u_1, … , u_{m-1} sont analytiques sur $U\cap S$, et on pose : $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, et

$$v(x)=u(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x_n^j}{j!}u_j(x'). \tag{88}$$

Comme

$$\partial_n^m\Big[\frac{x_n^j}{j!}u_j(x')\Big]=0, \;\; j=0,1,\ldots,m-1, \tag{89}$$

on obtient

$$[\partial_n^m v](x)+\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_n\le m-1}} p_\alpha(x)[\partial^\alpha v](x)=f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_n\le m-1}} p_\alpha(x)\partial^\alpha\Big[\frac{x_n^j}{j!}u_j(x')\Big]. \tag{90}$$

D'autre part, de (86), (87) et (88) il résulte immédiatement que

$$\partial_n^j v\big|_S=0, \;\; j=0,1,\ldots,m-1, \tag{91}$$

et comme le second membre de (90) est une fonction analytique, le problème se réduit au problème (85) - (86) dans le cas où les fonctions u_j sont identiquement nulles.

Nous considérons donc l'équation (85) accompagnée des conditions (86) où $u_j\equiv 0$, pour $j=0,1,\ldots,m-1$, que l'on peut écrire sous la forme

$$[\partial_n^m u](x)=\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j u(x)+f(x). \tag{92}$$

avec

$$\partial_n^j u\big|_S = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{93}$$

où

$$b_j(x, \partial') = -\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_n = j}} p_\alpha(x) \partial'^{\alpha'}. \tag{94}$$

(La fonction $b_j(x, \xi')$, $j \leq m-1$, ainsi définie est analytique en x et polynomiale de degré inférieur ou égal à $m-j$ en $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$)

4.3.2 Solution formelle

A présent, on cherche une série formelle

$$u(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu x^\nu \tag{95}$$

qui soit solution du problème (92)-(93). En particulier, u doit vérifier :

$$\partial_n^j u\big|_S = j! \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n \\ \nu_n = j}} c_\nu x'^{\nu'}, \;\; j \in \mathbb{N}, \tag{96}$$

et en vertu de (93), pour tout $j = 0, 1, \ldots, m-1$, le premier membre de cette égalité est nul. Il en découle alors que

$$c_\nu = 0 \;\text{ pour }\; \nu_n \leq m-1. \tag{97}$$

et que

$$u(x) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n \\ \nu_n \geq m}} c_\nu x^\nu. \tag{98}$$

Pour déterminer les cœfficients c_ν (lorsque $\nu_n \geq m$), nous substituons formellement l'expression $\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n \\ \nu_n \geq m}} c_\nu x^\nu$ à $u(x)$ dans l'équation (92) et procédons de la manière suivante :

i) On commence par chercher les c_ν pour les $\nu \in \mathbb{N}^n$ tels que $\nu_n = m$:

$$\partial_n^j [c_\nu x^\nu]\big|_{x_n = 0} = 0 \;\text{ pour }\; \nu_n \geq m, \; j \leq m-1, \tag{99}$$

on calcule les valeurs des deux membres de (92) sur $\{x_n = 0\}$, et on obtient

$$\partial_n^m u(x', 0) = m! \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n, \\ \nu_n = m}} c_\nu x'^{\nu'} = f(x', 0). \tag{100}$$

Comme $x' \mapsto f(x',0)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{R}^{n-1}$, un développement en série de Taylor à l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ $(x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0)$, conduit à

$$f(x',0) = \sum_{\nu' \in \mathbb{N}^{n-1}} d_{\nu'} x'^{\nu'}. \tag{101}$$

Donc on peut déterminer c_ν pour les ν tels que $\nu_n = m$, c'est-à-dire

$$c_\nu = d_{\nu'} \quad \text{pour} \quad \nu_1 = \nu'_1, \ldots, \nu_{n-1} = \nu'_{n-1}, \quad \nu_n = m. \tag{102}$$

ii) On suppose que les cœfficients c_ν avec $\nu_n \leq k-1$ $(k \geq m)$ sont connus. En dérivant les deux membres de (92), $(k-m)$ fois par rapport à x_n, et en calculant leurs valeurs sur $\{x_n = 0\}$, on constate que

$$\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n\geq k} c_\nu x^\nu\Big)\Big]\Big|_{x_n=0} = 0, \tag{103}$$

donc la dérivée d'ordre $(k-m)$ du second membre de (92) par rapport à x_n, calculée sur $\{x_n = 0\}$, est déterminée par la fonction analytique connue

$$\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n\leq k-1} c_\nu x^\nu\Big)\Big]\Big|_{x_n=0} + \partial_n^{k-m} f(x)\Big|_{x_n=0}, \tag{104}$$

qui peut être développée en série de Taylor à l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ et l'on peut identifier les cœfficients de son développement à $k!c_\nu$, pour les multi-indices ν tels que $\nu_n = k$, car la dérivée d'ordre $(k-m)$ du premier membre de (92), calculée sur $\{x_n = 0\}$, est

$$\partial_n^k u(x',0) = k! \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n=k} c_\nu x'^{\nu'} \tag{105}$$

iii) en procédant par récurrence sur k (avec $\nu = (\nu',k), \nu' \in \mathbb{N}^{n-1}$), on obtient tous les cœfficients c_ν de la série (98). Une fois les cœfficients c_ν sont déterminés, on en déduit l'existence et l'unicité de la solution formelle, et il ne restera plus qu'à démontrer sa convergence (*i.e* la convergence de la série (98)).

4.3.3 Séries majorantes

Pour démontrer la convergence de la série (98), on utilise les séries majorantes, définies de la manière suivante : Une fonction $F(x)$ est dite série majorante de la fonction $f(x)$ si les cœfficients $C_\nu(F)$ de sa série de Taylor à l'origine, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} C_\nu(F)x^\nu$, sont supérieurs ou égaux aux valeurs absolues des cœfficients $C_\nu(f)$ de la série de Taylor à l'origine, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} C_\nu(f)x^\nu$, de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire que :

$$C_\nu(F) \geq |C_\nu(f)|, \forall \nu \in \mathbb{N}^n. \tag{106}$$

On définit également les séries majorantes pour les $b_j(x,\partial')$: une fonction

$$B_j(x,\xi') = \sum_{|\alpha|\leq m, \alpha_n = j} P_\alpha(x)\xi'^{\alpha'} \tag{107}$$

(où $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$) est dite série majorante à l'origine, de la fonction

$$b_j(x,\xi') = \sum_{|\alpha|\leq m, \alpha_n = j} p_\alpha(x)\xi'^{\alpha'} \tag{108}$$

si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$ et $\alpha_n \leq m-1$, la fonction $P_\alpha(x)$ est une série majorante pour $p_\alpha(x)$.

Les séries majorantes $F(x)$ et $B_j(x,\xi')$ étant introduites, on considère l'équation :

$$\partial_n^m w(x) = \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x,\partial')\partial_n^j w(x) + F(x). \tag{109}$$

Lemme 4.1. *Soit $w(x)$ une solution analytique de l'équation (109), et supposons que :*

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Tous les cœfficients des séries de Taylor à l'origine (de } \mathbb{R}^{n-1}) \textit{ de} \\ w(x)\big|_{x_n=0},\ \partial_n w(x)\big|_{x_n=0},\ \ldots,\ \partial_n^{m-1} w(x)\big|_{x_n=0} \\ \textit{sont non-négatifs.} \end{array}\right\} \tag{110}$$

Dans ce cas, $w(x)$ est une série majorante pour l'éventuelle solution analytique du problème (92)-(93).

Démonstration.
Pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$, posons

$$C_\nu(u) = \frac{1}{\nu!}\partial^\nu u(0), \tag{111}$$

$$C_\nu(w) = \frac{1}{\nu!}\partial^\nu w(0). \tag{112}$$

On a

$$w(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} C_\nu(w) x^\nu, \tag{113}$$

dans un voisinage de l'origine, et l'éventuelle solution analytique $u(x)$ du problème (92)-(93) est telle que

$$u(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} C_\nu(u) x^\nu, \tag{114}$$

dans un voisinage de zéro. On a donc $c_\nu = C_\nu(u)$, et comme nous l'avons vu dans (97),

$$c_\nu = C_\nu(u) = 0 \ \text{ pour } \ \nu_n = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{115}$$

Pour $w(x)$ on a

$$\partial_n^k w(x)\big|_{x_n=0} = \partial_n^k[\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} C_\nu(w)x^\nu]\big|_{x_n=0} = k! \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n=k} C_\nu(w)x'^{\nu'}. \qquad (116)$$

Cette dernière expression n'est autre que la série de Taylor à l'origine de $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\partial_n^k w(x)\big|_{x_n=0}$. Par conséquent, et compte tenu de notre hypothése (110), on a

$$C_\nu(w) \geq 0 \text{ pour } \nu_n \leq m-1. \qquad (117)$$

c'est-à-dire

$$C_\nu(w) \geq |C_\nu(u)| \text{ pour } \nu_n \leq m-1. \qquad (118)$$

Pour démontrer l'inégalité $C_\nu(w) \geq |C_\nu(u)|$ pour $\nu_n = k \geq m$, on suppose que

$$C_\nu(w) \geq |C_\nu(u)| \text{ pour } \nu_n \leq k-1. \qquad (119)$$

Maintenant, l'équation (92), et la série de Taylor à l'origine de la fonction $u(x)$, impliquent que, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$ tel que $\nu_n = k$, on a :

$$C_\nu(u) = \frac{1}{\nu!}\partial^\nu u(x)|_{x=0} \qquad (120)$$

$$= \frac{1}{\nu!}\partial'^{\nu'}\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j u(x) + f(x)\Big]\Big|_{x=0}, \qquad (121)$$

et on constate que dans le dernier membre de cette inégalité toutes les dérivées de $u(x)$ par rapport à x_n sont d'ordre inférieur ou égal à $k-1$. Par conséquent, et d'après la définition de $C_\nu(u)$, il existe des cœfficients $\beta_{\nu,\mu}$ tels que

$$C_\nu(u) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n,\mu_n\leq k-1} \beta_{\nu,\mu}C_\mu(u) + \frac{1}{m!}C_{\tilde\nu}(f). \qquad (122)$$

où $\tilde\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_{n-1},k-m)$.
De la même manière (et à l'aide du développement en série de Taylor de $w(x)$ à l'origine, et de l'équation (114)) on a, pour $\nu \in \mathbb{N}^n$ tel que $\nu_n = k$,

$$C_\nu(w) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^n,\mu_n\leq k-1} \gamma_{\nu,\mu}C_\mu(w) + \frac{1}{m!}C_{\tilde\nu}(F). \qquad (123)$$

Comme $F(x)$ et $B_j(x,\xi')$ sont des séries majorantes pour les fonctions $f(x)$ et $b_j(x,\xi')$ respectivement, les cœfficients $\beta_{\nu,\mu}$ et $\gamma_{\nu,\mu}$ sont déteminés respectivement par les opérateurs différentiels

$$\frac{1}{\nu!}\partial'^{\nu'}\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j\Big] \qquad (124)$$

et

$$\frac{1}{\nu!}\partial'^{\nu'}\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}B_j(x,\partial')\partial_n^j\Big]. \tag{125}$$

Il s'en suit alors que :

$$C_{\tilde{\nu}}(F) \geq |C_{\tilde{\nu}}(f)|, \gamma_{\nu,\mu} \geq |\beta_{\nu,\mu}|, \tag{126}$$

et en vertu de l'hypothèse de récurrence (119), il résulte de (122), (123) et (126) que :

$$C_\nu(w) \geq |C_\nu(u)|, \tag{127}$$

ce qui démontre que $w(x)$ est une série majorante de la fonction $u(x)$, et achève ainsi la démonstration du lemme.

4.3.4 Suite et fin de la démonstration du théorème

Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'existence des séries majorantes $B_j(x,\xi')$ pour $b_j(x,\xi')$, $j=0,1,\ldots,m-1$, et $F(x)$ pour $f(x)$, et que l'équation (109) avec ces $B_j(x,\xi')$ et ce $F(x)$ admet, dans un voisinage de l'origine, une solution analytique $w(x)$ telle que les cœfficients de la série de Taylor (à l'origine de $\mathbb{R}^n$) de

$$\partial_n^k w(x',0) \tag{128}$$

soient tous non-négatifs. Rappelons que, par hypothèse, le $f(x)$ et les $p_\alpha(x)$ ($|\alpha|\leq m$, $\alpha_n \leq m-1$) qui figurent dans (92)-(93) sont analytiqyes dans un voisinage de l'origine. Donc, dans un voisinage de l'oigine, on peut les développer en séries de Taylor. Par conséquent, il existe des constantes $r>0$ et $M>0$ telles que

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}|C_\nu(f)|r^{|\nu|}\leq M, \qquad \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}|C_\nu(p_\alpha)|r^{|\nu|}\leq M, \quad |\alpha|\leq m, \alpha_n\leq m-1, \tag{129}$$

où

$$C_\nu(f)=\frac{1}{\nu!}\partial^\nu f(x)\big|_{x=0}, \qquad C_\nu(p_\alpha)=\frac{1}{\nu!}\partial^\nu p_\alpha(x)\big|_{x=0}, \tag{130}$$

et la relation (129) implique que

$$|C_\nu(f)|r^{|\nu|}\leq M, \qquad |C_\nu(p_\alpha)|r^{|\nu|}\leq M, \quad \forall\nu\in\mathbb{N}^n \tag{131}$$

ou

$$\big|C_\nu(f)\big|\leq\frac{M}{r^{|\nu|}}, \ \big|C_\nu(p_\alpha)\big|\leq\frac{M}{r^{|\nu|}} \quad \forall\nu\in\mathbb{N}^n. \tag{132}$$

On considère maintenant la fonction

$$F(x)=\frac{M}{1-\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}+\varrho x_n}{r}}, \tag{133}$$

définie sur

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n| < r\right\}, \tag{134}$$

où ϱ est une constante convenable, à déterminer, et telle que $\varrho \geq 1$. Comme

$$\frac{M}{1-y} = M \sum_{k=0}^{\infty} y^k \text{ pour } |y| < 1,$$

on a :

$$F(x) = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n)^k}{r^k} \tag{135}$$

$$= M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} \frac{|\nu|!}{\nu!} \times \frac{x_1^{\nu_1} \times \cdots \times x_{n-1}^{\nu_{n-1}} \times (\varrho x_n)^{\nu_n}}{r^k}. \tag{136}$$

En dérivant les deux membres de (133), on obtient :

$$\partial^\nu F(x)\big|_{x=0} = M \frac{|\nu|!}{\nu!} \frac{\varrho^{\nu_n} \nu!}{r^{|\nu|}} = \frac{|\nu|! M \varrho^{\nu_n}}{r^{|\nu|}}. \tag{137}$$

Par conséquent, et compte tenu de l'inégalité $\varrho \geq 1$, on a

$$C_\nu(F) = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu F(x)\big|_{x=0} = \frac{|\nu|! M \varrho^{\nu_n}}{\nu! r^{|\nu|}} \geq \frac{M}{r^{|\nu|}} \tag{138}$$

Donc, en vertu de (132) on a

$$C_\nu(F) \geq |C_\nu(f)|, \quad C_\nu(F) \geq |C_\nu(p_\alpha)|, \tag{139}$$

c'est-à-dire que la fonction $F(x)$ définie par (133) est une série majorante de $f(x)$ et de $p_\alpha(x)$ ($|\alpha| \leq m$, $\alpha_n \leq m-1$). Par conséquent, si l'on pose $P_\alpha(x) = F(x)$ et qu'on la substitue à $P_\alpha(x)$ dans (107), la fonction $B_j(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ ainsi définie sera une série majorante de $b_j(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Considérons donc l'équation (109) avec $F(x)$ donnée par (133) et avec $B_j(x, \xi')$ donnée par (107) et $P_\alpha(x) = F(x)$. A l'aide de (133), l'équation (109) peut s'écrire sous la forme :

$$\partial_n^m w(x) = \frac{Q(\partial) W(x) + R(\partial) W(x) + M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r}}, \tag{140}$$

où $Q(\xi)$ est un polynôme en ξ de degré m et dont le coefficent de ξ_n^m est nul, tandis que $R(\xi)$ est un polynôme en ξ de degré inférieur ou égal à $m-1$.

En posant

$$s = \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r} \tag{141}$$

on obtient :
$$\partial_i = \frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{d}{ds} \text{ pour } i = 1,\dots,n-1, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial s}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}. \tag{142}$$
Par suite l'équation (140) se réduit à l'équation en $\widetilde{w}(s)$:
$$(\frac{\varrho}{r})^m \frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) = \frac{1}{1-s}\Big[\frac{q(\varrho)}{r^m}\frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) + R\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{ds},\dots,\frac{1}{r}\frac{d}{ds},\frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}\Big)\widetilde{w}(s) + M\Big], \tag{143}$$
où
$$q(\varrho) = Q(1,\dots,1,\varrho), \tag{144}$$
est un polynôme en ϱ de degré inférieur ou égal à $m-1$. Comme
$$\Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^m - \frac{1}{1-s}\times\frac{q(\varrho)}{r^m} = \Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^m \times \frac{1-s-q(\varrho)\varrho^{-m}}{1-s}, \tag{145}$$
en multipliant(143) par
$$\Big(\frac{r}{\varrho}\Big)^m \frac{1-s}{1-s-q(\varrho)\varrho^{-m}}, \tag{146}$$
on obtient :
$$\frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) = \Big(\frac{r}{\varrho}\Big)^m \frac{1}{1-s-q(\varrho)\varrho^{-m}}\Big[R\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{ds},\dots,\frac{1}{r}\frac{d}{ds},\frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}\Big)\widetilde{w}(s) + M\Big], \tag{147}$$
et vu que le degré du polynôme $q(\varrho)$ est inférieur ou égal à $m-1$, on peut choisir ϱ tel que
$$q(\varrho)\varrho^{-m} < 1. \tag{148}$$
En résolvant l'équation différentielle ordinaire (147) avec les conditions initiales
$$\frac{d^j}{ds^j}\widetilde{w}(s)\big|_{s=0} = 0, \quad j = 0,1,\dots,m-1, \tag{149}$$
on obtient la solution unique $\widetilde{w}(s)$ qui est analytique sur l'ensemble $\{s/|s| < 1-q(\varrho)\varrho^{-m}\}$. La solution $w(x)$ de l'équation (140) s'obtient, en posant
$$w(x) = \widetilde{w}\Big(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}+\varrho x_n}{r}\Big) \tag{150}$$
dans le voisinage de l'origine :
$$\big\{x \in \mathbb{R}^n \big| |x_1+\ldots+x_{n-1}+\varrho x_n| < r(1-q(\varrho)\varrho^{-m})\big\}. \tag{151}$$
Comme nous l'avons mentionné, l'existence et l'unicité de la solution analytique $w(x)$ dans un voisinage de l'origine, en vertu du lemme 5.3.1, implique l'existence de la solution analytique $u(x)$ du problème (92)-(93) dans un voisinage de l'origine; d'autre part, la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution analytique $u(x)$ du problème (92)-(93) dans un voisinage de l'origine est suffisante pour affirmer l'existence et l'unicité de la solution analytique du problème (71)-(72) dans un voisinage U' de x^0 . Le théorème est ainsi démontré. □

5 Opérateur sans solution - Conditions suffisantes à l'existence et l'inexistence

Dans ce paragraphe, nous donnons, sans démonstration, un exemple d'opérateur sans solution, une condition suffisante à l'existence, et une autre à la non-existence.

Théorème 5.1. (*cf.* [5]) *Soit sur* $\mathbb{R}^3$ *l'opérateur de Hans Lewy :*

$$L = -\partial_1 - i\partial_2 + 2i(x_1 + ix_2)\partial_3.$$

Alors, il existe une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, *qui est de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *et tellle que l'équation* $Lu = f$ *n'admette aucune solution distribution dans aucun ouvert de* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 5.2. (*cf.* [4]) *On suppose que, quelle que soit* f *dans* $\mathscr{D}(\Omega)$, *l'équation*

$$P(x,D)u = f$$

admet une solution $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *Dans ce cas, on a nécessairement l'implication :*

$$\Big[(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma_m(P)(x,\xi) = 0\Big] \Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\Big](x,\xi) = 0\Big).$$

Théorème 5.3. (*cf.* [4]) *Soit* $P(x,D)$ *un opérateur différentiel linéaire à cœfficients* $\mathscr{C}^\infty$, *et supposons qu'il existe un voisinage ouvert* V_{x_0} *d'un point* x_0 *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que, pour tous points* x *et* y *fixés dans* V_{x_0}, *il existe une constante réeelle* C_{xy} *pour laquelle :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \frac{P(x,\xi)}{P(y,\xi)} \leq C_{x,y}.$$

Alors, si Ω *est un voisinage ouvert suffisamment petit de* x_0, *on peut toujours trouver un opérateur linéaire* $E : \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *tel que :*

$$P(x,D)Ef = f \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),$$

$$EP(x,D)u = u \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } u \in \mathscr{E}'(\Omega).$$

6 Conclusion

L'équation $P(x,D)u = f$, où $P(x,D)$ est un opérateur différentiel linéaire, est résoluble si $P(x,D)$ est à cœfficients constants, et le problème de Cauchy à données analytiques qui lui est associé admet une unique solution dans un voisinage de chaque point x_0 (même si ce voisinage peut être très petit). En dehors des ces deux cas, tout peut arriver.

Références

[1] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU « *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires* » Gauthier-Villars, 1981.

[2] L. EHRENPREIS « *Solutions of some problems of division* » Amer. J. Math. 76(1954), 883-903 ; 78(1956), 685-715 ; 82(1960), 235-236.

[3] GERALD B. FOLLAND. « *INTRODUCTION TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS* » Princeton University Press (1995)

[4] LARS HÖRMANDER. « *Linear Partial Differential operators* » Springer-Verlag, 1976.

[5] HANS LEWY. « *An example of a smooth linear partial differential equation without solution* » Annals of Mathematics, Vol. 66, No. 1, July, 1957.

[6] B. MALGRANGE « *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* » Ann Inst. Fourier Grenoble 6, (1955 - 6), 271-355.

[7] SIGERU MIZOHATA. « *Te Theory of Partial Differential Equations* » Cambridge university Press, 1979.

Index

$\mathscr{E}(\Omega)$, 4
$\mathscr{C}'\big(]a,b[,\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\big)$, 5
$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, 4
$\mathscr{C}^k(\Omega)$, 4
$\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, 4
$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$, 4
$\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, 4
$\mathscr{C}_b^k(\Omega)$, 4
$\mathscr{D}'(\Omega)$, 4
$\mathscr{D}(\Omega)$, 4
$\mathscr{E}'(\Omega)$, 5
$\mathscr{F}$, 7
$\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$, 6
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 6
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 5

Caractéristique
 Hypersurface, 35
 Point, 35
Cauchy-Riemann, 10
Chaleur, 10
Coordonnées polaires, 9

Décroissance rapide (fonction), 5
Distribution, 4
 à support compact, 5
 tempérées, 6

Echange, 8

Formelle
 Série, 39
 Solution, 39
Fourier
 Cotransformée, 8
 Transformée, 7
Fréchet (espace de), 4

Invariance par rotation
 d'un opérateur, 11
invariance par rotation
 d'une distribution, 11

Laplacien, 10
 En coordonnées polaires, 13

Ondes, 10

Plancherel-Parseval, 8
Produit
 de convolution, 6
 externe (ou tensoriel), 6

Résolubilité locale, 9
Radiale
 Distribution, 11
 Fonction, 11
Riemann-Lebesgue (lemme de), 8
Rotation, 11

Séries majorantes, 41
Schrödinger, 10
Solution élémentaire, 9

Théorème
 de Cauchy-Kovalevski, 35
 de Malgrage-Ehrenpreis, 26
 de Paley-Wiener, 28
Transfert (Théorème du), 8