

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière  
Département de mathématiques  
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT EN 3<sup>ème</sup> CYCLE**

Domaine : Mathématiques et informatique. Filière : Mathématiques  
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

**SALAH Selma**

*Intitulée*

*Equations de la dynamique avec une approche numérique*

Soutenue le : 03/01/ 2021

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

Mr ABDERRAZEK Chaoui	Prof.	Univ. de Guelma	Président
Mr AISSAOUI Mohamed Zine	Prof.	Univ. de Guelma	Encadreur
Mr GUEBBAI Hamza	Prof.	Univ. de Geulma	Co-encadreur
Mr GUESMIA Amar	Prof.	Univ. de Skikda	Examinateur
Mr NOUREDDINE Benrabia	MCA	Univ. de Souk-ahras	Examinateur
Mr KERBOUA Mourad	MCA	Univ. de Guelma	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

---

## Remerciements

---

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon achèvement de cette thèse.

Je voudrais d'abord exprimer ma grande gratitude et mes remerciements distingués à mes directeurs de thèse Prof.**AISSAOUI Mohamed Zine** et Prof.**GUEBBAI Hamza** pour le sujet passionnant qu'ils m'ont permis d'entreprendre. Je les remercie également pour le temps et la patience qu'ils m'ont accordés tout au long de ces années. Leurs conseils pertinents et leurs interventions toujours claires et avisées m'ont guidé en permanence tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier vivement Prof. **ABDERRAZEK Chaoui** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de mon doctorat, ainsi que Prof. **GUESMIA Amar**, Dr. **NOUREDDINE Benrabia**, et Dr. **KERBOUA Mourad** pour avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie du jury.

Un très grand merci à tous mes collègues membres du laboratoire LMAM, pour leur soutien durant ce parcours doctoral.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à toute ma famille et en particulier mes parents, pour leur confiance, leur soutien et leur amour.

---

## Résumé

---

Dans la présente thèse, on étudie un nouveau type de modélisation du phénomène de séisme. Plus précisément, nous présentons un modèle mécanique du processus sismique en une dimension utilisant des fonctions mathématiques usuelles. Ce dernier se concrétise à travers une équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra. Notre étude consiste à montrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation. Une approche numérique de la solution est réalisée en se basant sur la méthode de Nyström, où les tests numériques montrent l'efficacité de ce type de modélisation.

---

**Mots clés :** Equations intégral-différentielles non linéaires, Equations de Volterra , Modèle sismique, Point fixe, Méthode Nyström.

---

**Classification Mathématique des Sujets (2010)** 45D05, 45G15, 65R20.

---

## Abstract

---

In this thesis, we study a new type of modeling of the earthquake phenomenon. More precisely, we present a mechanical model of the seismic process in one dimension using usual mathematical functions, the latter is concretized through a non-linear integro-differential equation of Volterra. Our study consists of proving the existence and the uniqueness of the solution of this equation. A numerical approach to the solution is realized based on the Nyström method, where numerical tests show the efficiency of this type of modeling.

---

**Key words :** Non-linear integro-differential equations, Volterra equations, Earthquake Machine, Fix point, Nyström method.

---

**Mathematics Subject Classification (2010)** 45D05, 45G15, 65R20.

---

## ملخص

---

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة نموذج جديد من نماذج ظاهرة الزلزال. بتعبير أدق، نقدم نموذجًا ميكانيكيًا أحادي البعد للعملية الزلزالية باستخدام الدوال الرياضية المعتادة. هذا الأخير يتم تلخيصه من خلال معادلة تفاضلية متكاملة غير خطية من نوع "فولتيرا". تتمحور دراستنا على إثبات وجود و وحدانية الحل لهذه المعادلة. يتم تحقيق مقارنة عددية للحل استنادًا إلى طريقة نيشتروم، حيث تُظهر الاختبارات العددية كفاءة هذا النوع من النماذج.

---

### كلمات مفتاحية:

معادلة تفاضلية متكاملة غير خطية، معادلة فولتيرا، نموذج زلزالي، نقطة ثابتة، طريقة نيشتروم.

---

تصنيف مواد الرياضيات (2010) : 45D05, 45G15, 65R20 .

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation d'un séisme et équations associées</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction au modèle physique . . . . .	5
1.2 Généralités sur les séismes . . . . .	6
1.2.1 Définition d'un séisme . . . . .	6
1.2.2 Classifications des séismes . . . . .	7
1.2.3 Notions de failles . . . . .	7
1.3 Motivation du modèle et équations associées . . . . .	9
<b>2 Concepts fondamentaux et Etudes théoriques</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 Concepts préliminaires et historiques de l'équation intégrale . . . . .	16
2.3 Clasification des équations intégrales . . . . .	17
2.3.1 Equations intégrales de Volterra . . . . .	18
2.3.2 Equations intégrales de Fredholm . . . . .	19
2.3.3 Equations intégrales singulières . . . . .	20
2.3.4 Equations intégro-différentielles . . . . .	21

---

2.4	Théorie d'existence pour les équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra . . . . .	21
2.5	Existence et unicité de la solution de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre. . . . .	27
<b>3</b>	<b>Approximations numériques des équations de Volterra</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Étude numérique de l'équation de Volterra de deuxième espèce . . . . .	40
3.3	Étude numérique de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra	48
3.4	Étude numérique de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre. . . . .	58
<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>69</b>
4.1	introduction . . . . .	69
4.2	Les paramètres physiques intervenant dans l'équation découlant du modèle de tremblement de terre. . . . .	70
4.3	Tests numériques . . . . .	72
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

## Notes historiques sur l'étude de séisme

La plupart du temps, les tremblements de terre ne provoquent pas de rupture en surface et peuvent être ressentis loin de leur hypocentre. Pour ces raisons, depuis des millénaires, l'homme a connu des tremblements de terre, sans vraiment comprendre l'origine de ces événements destructeurs. Au cours des premiers siècles, l'origine d'un séisme est considéré comme un message divin. Les Chinois le considèrent comme un signe de la mauvaise politique de l'empereur. Dans la culture animiste des Grecs, c'est Poséidon qui était responsable de ces événements. Cela n'a pas empêché les Grecs comme Thales (*VI<sup>ième</sup>* siècle av. J.-C.) et Aristote (*IV<sup>ième</sup>* siècle av. J.-C.), de croire que les tremblements de terre ont une origine naturelle. Au cours du temps, l'origine naturelle devient plus convaincante, plusieurs théories émergent. Le séisme de Lisbonne (1755) au Portugal est parmi les premiers séismes à étudier. En 1850, Robert Mallet a créé le terme sismologie et a publié la première carte sismique du monde. L'étude extensive des séismes commence précisément au début du *XX<sup>ième</sup>* siècle, avec le recensement à l'échelle de la planète des séismes par Fernand Bernard, ou encore la détermination des différentes ondes sismiques par Richard Dixon Oldham. Dès la fin du *XX<sup>ième</sup>* siècle, l'origine des failles sismiques est apparue grâce aux progrès de la mécanique des roches, associées à des observations de nouvelles escarpements concomitants à des tremblements de terre

(Gilbert, 1884, Koto, 1893). Après l'observation du déplacement de la surface du sol qui a accompagné le séisme de San Francisco en 1906, le sismologue Henry Fielding Reid a considéré dans sa «théorie du rebond élastique» (Reid, 1910), que les séismes résultent d'un relâchement de contraintes, causé par la rupture soudaine de la plaque le long d'une faille. La théorie de Reid a jeté les bases de notre compréhension moderne de l'origine des failles des tremblements de terre. Cependant, elle n'a pas été en mesure d'expliquer la chute de contrainte, relativement faible, observée pour les grands tremblements de terre, qui sont 10 à 100 fois plus petits que la chute de contrainte induite en laboratoire, par la fracturation des roches (Chinnery, 1964). Brace et Byerlee (1966) ont expliqué cet écart par le fait que les tremblements de terre n'impliquent pas la fracture de la croûte, mais le glissement sur des failles préexistantes. Cette idée semblait tout à fait raisonnable, en particulier dans les régions sismiquement actives, où la croûte est probablement déjà affaiblie par des failles créées par les tremblements de terre précédents. Voir [6]

Résoudre analytiquement les problèmes de séismes, en particulier les mouvements des plaques tectoniques et les ruptures dynamiques, n'est pas facile. Dans les années 60 et 70, Kostrov [16], Burridge [10], Richards [28,29] ont étudié le cas d'une faille auto-similaire se diffusant à une vitesse préétablie. Kostrov [17] a trouvé une solution analytique à la diffusion spontanée d'une faille semi-infinie. Quelques travaux récents [19,22,27] ont été effectués autour du mouvements des plaques tectoniques, mais la solution générale pour ce type de problème, reste difficile à étudier.

Un substitut compte sur la résolution numérique de ce type de problème, ainsi, la modélisation de la rupture dynamique pour un tremblement de terre, peut faire appel à des méthodes numériques très diverses . Comme par exemple, différences finies, méthodes intégrales, méthodes d'éléments finis, méthodes d'éléments spectraux. Les méthodes de différences finies sont généralement faciles à appliquer et elles permettent de produire des schémas numériques efficaces (Voir, [1,2,12]). Malheureusement, ces méthodes sont insuffisantes pour simuler des géométries complexes (Voir [37]). Les méthodes intégrales

sont très utilisées, car elles permettent de réduire le nombre de dimensions du domaine à discrétiser. L'intégration s'effectue uniquement sur les surfaces, où les propriétés du milieu nous permettent de construire analytiquement les fonctions de Green [5]. Enfin, la méthode des éléments spectraux, a été alors introduite par [15]. Elle est basée sur des interpolations locales d'ordre supérieur et la flexibilité géométrique de la précision spectrale.

## L'objectif de la thèse

L'objectif de notre thèse est de proposer un nouveau type de modélisation du phénomène de séisme, qui se présente par un modèle mécanique en une dimension. Ce dernier nous a amené à l'étude d'une équation intégrale différentielle non linéaire de Volterra du second type, donnée par la formule

$$u(t) = \int_0^t (t-s) \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (.1)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds + f(t).$$

Ce travail représente une base physique pour les travaux récents ([14], [13] et [32]) sur ce type d'équations et une généralisation des hypothèses mathématiques, requises dans ces travaux pour assurer l'existence et l'unicité de la solution. En outre, nous construisons une méthode numérique basée sur la vision de Nyström (voir [20] et [33]), pour approcher la solution unique de cette équation. Nous montrerons la convergence sous les hypothèses locales de Lipschitz, qui représente en soi une généralisation de celles requises dans ([14], [13], [32]). Finalement, les tests numériques développés dans ce travail montrent notre bonne vision sur la modélisation mathématique, sur les plans analytiques et numériques.

## **Contenu de la thèse**

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres, de la présente introduction et d'une conclusion générale. Le premier chapitre contient des généralités sur les tremblements de terre, où on a abordé à la présentation du mécanisme du mouvement des plaques tectoniques, sous forme d'un modèle mécanique et à la reformulation des équations dynamiques obtenus de cette modélisation en équation de type intégro différentielle non linéaire de Volterra.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions cette équation au sens analytique, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution, en utilisant la méthode de Picard.

Une procédure numérique efficace et rigoureuse est présentée dans le troisième chapitre, où nous construisons une méthode, basée sur la vision de Nyström, pour aborder la solution de cette équation et montrer la convergence sous les hypothèses locales de Lipschitz.

Le quatrième chapitre est consacré à la méthode de calcul utilisée pour les simulations numériques et à la présentation de quelques tests expérimentaux, qui montrent l'efficacité de notre modèle.

## Modélisation d'un séisme et équations associées

---

### Sommaire

---

<b>1.1 Introduction au modèle physique . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.2 Généralités sur les séismes . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Motivation du modèle et équations associées . . . . .</b>	<b>9</b>

---

### 1.1 Introduction au modèle physique

La plupart des tremblements de terre se situent le long des limites des plaques tectoniques, à travers les surfaces des roches, nommées failles. Ces roches sont trop durs pour se déformer facilement comme les fluides, s'accrochent au chargement tectonique pendant quelques années à plusieurs milliers d'années, entassent de l'énergie élastique, en la cédant à des lieux plus fragiles. Des cassures se forment à ces endroits de faiblesse, ainsi, c'est la rupture à grande échelle. Les failles se déplacent l'une par rapport à l'autre tangentiellement, pour libérer l'énergie élastique stockée excédentaire. Ces phénomènes (rupture, fracture de faille) sont étroitement associés à des problèmes des ondes mécaniques, de chaleur, ... C'est le déclenchement d'un tremblement de Terre. Voir [8].

la modélisation de ce phénomène, n'est pas du tout facile, pour cela, dans notre étude, nous allons nous focaliser sur l'aspect de frottement entre les deux blocs de la faille. En outre, nous commençons ce chapitre par des généralités sur les séismes en donnant la définition et les différents classifications du séisme et le mouvement des plaques tectoniques, où nous allons représenter le mouvement de cette dernière, sous forme d'un modèle mécanique qui nous a conduit finalement, à l'étude d'une équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra.

## 1.2 Généralités sur les séismes

### 1.2.1 Définition d'un séisme

Un séisme est un mouvement naturel du terre qui débute affreusement d'une durée de quelques secondes à quelques minutes. Les séismes sont dus aux ruptures lents de la couche externe de la Terre, nommée lithosphère. Cette dernière est composée de grandes plaques solides, stimulées de mouvements relatives très lents. A la frontière de ces plaques, les roches se déforment jusqu'au point de rupture a cause des restrictions accumulées , où elles se cassent brutalement à travers une ou plusieurs failles, en diffusant une énergie influente.

Alors, un tremblement de terre n'est que la libération brutale de l'énergie mécanique diffusée par les ruptures, qui apparaissent sous la forme de déformations antérieures résultant des contraintes préexistantes, cette énergie peut joindre jusqu'à 1017 Joules, sur des grandes surfaces qui peut atteindre des centaines de kilomètres carrés ( $100K m^2$ ). Elle se diffuse dans toutes les directions sous forme d'ondes sismiques, générant une série de mouvements oscillatoires à la surface de la terre.

De manière générale, l'état initial de ces contraintes est le reflet de la combinaison d'une charge liée au système tectonique local et d'un champ résiduaire, globalement non homogène, correspondant à une sismicité préalable dans l'environnement. Voir [4].

## 1.2.2 Classifications des séismes

Les séismes sont classés selon leur hypocentre, qui est l'endroit où l'énergie provient de la secousse des roches. d'après la profondeur du leur hypocentre, les tremblements de terre sont classés en trois types,

### Les séismes superficiels

Ils se situent à de faibles profondeurs, dans les premières dizaines de kilomètres, on les trouve également à des frontières divergentes. Les séismes superficiels comptent pour environ 70% de tous les tremblements de terre et occupent 70% de l'énergie sismique totale diffusée.

### Les séismes intermédiaires

Ils se manifestent à partir de quelques dizaines jusqu'à quelques centaines de kilomètres de profondeur, et se focalisent uniquement au niveau des limites convergentes. Les séismes intermédiaires représentent environ 25% de l'ensemble des séismes, ils sont ressentis à la surface de la terre avec une intensité plus faible que les séismes superficiels.

### Les séismes profonds

Ils comptent approximativement 5% de la totalité des séismes. La profondeur de leurs hypocentres est comprise entre 70 et 150 km. Les séismes profonds se concentrent uniquement le long des plaques convergentes à la base de l'asthénosphère.

## 1.2.3 Notions de failles

Une faille est le résultat de la rupture d'un couche terrestre qui est accompagné d'un mouvement de deux compartiments ainsi formés. L'apparition de failles indique la pré-

sence de restrictions tectoniques dans un endroit précis, ce qui est le résultat direct du mouvement des plaques tectoniques .

Les trois types de failles sont,

### Les failles normales

Elles se produisent lorsque les deux compartiments sont tirés dans des sens inverses. Les roches qui se trouvent en haut de la faille tendent alors à baisser, elles sont rarement verticales.

### Les failles inverses (chevauchements)

Elles se manifestent dans la position opposée à celle des failles normales, plus précisément, lorsque les deux compartiments sont comprimés mutuellement, l'un contre l'autre. Dans ce cas, la masse rocheuse recouvrant la faille s'élève.

### Les failles décrochantes (coulissantes)

Les failles décrochantes sont la conséquence d'un glissement dans le plan horizontal d'un compartiment par rapport à l'autre. Dans cette situation, les failles sont essentiellement verticales.

La figure 1.1 montre les différents types de failles

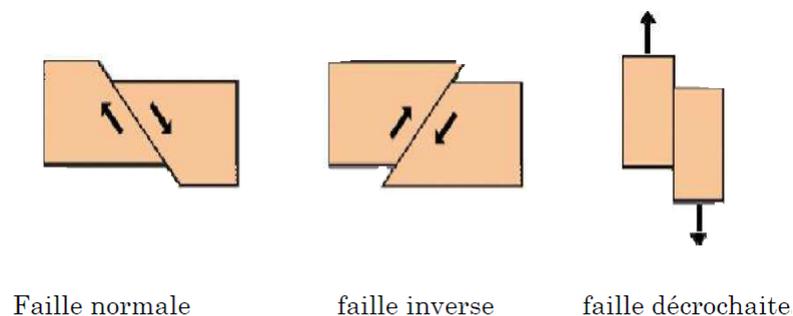


FIGURE 1.1 – Différents types de failles

### 1.3 Motivation du modèle et équations associées

Nous nous intéressons à la modélisation du phénomène sismique, résultant du mouvement des plaques tectoniques. Lors de leurs mouvements, les plaques tectoniques peuvent entrer en collision le long des failles. Pendant qu'ils poursuivent leur mouvement, la pression augmente. Lorsque cette pression atteint un degré significatif, un glissement soudain de la plaque se produit. Les trains de choc résultants libèrent de l'énergie sous forme d'ondes sismiques, qui provoquent la sensation de tremblement. Voir ([24, 35]).

Les instituts de recherche en sismologie incorporés (The Incorporated Research Institutions for Seismology (IRIS)), ont présenté une démonstration ("Machine à tremblement de terre : un bloc simple et un simple graphe animé"), pour expliquer le modèle de tremblement de terre. Cette démonstration est présentée à la figure 1.2

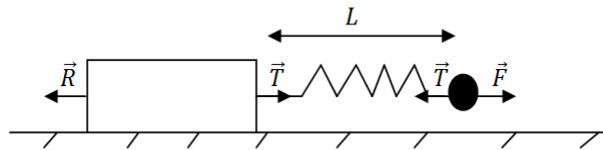


FIGURE 1.2 – Animation de tremblement de terre en dimension 1

Dans ce travail, nous allons présenter un modèle qui fournit un frottement constant. Ce choix est construit en prenant en considération les difficultés théoriques et numériques. Cependant, avec ce choix, on espère atteindre une certaine performance théorique et numérique.

En se basant sur cette expérience physique, nous allons proposer un modèle mathématique, décrivant le mouvement de la machine sismique, à travers une équation intégrale différentielle non linéaire de Volterra du second type, donnée par la formule

$$u(t) = \int_0^t (t-s) \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (1.3.1)$$

$$+ \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \left( |u(s)| - u(s) \right) ds + f(t).$$

Ce travail représente un fondement physique pour les travaux récents ([14], [13] et [32]), sur cette équation et une généralisation des hypothèses mathématiques requises dans ces travaux, pour garantir l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le sens d'établir un système cohérent, conservant les aspects fondamentaux de notre phénomène et de présenter correctement le mécanisme de la machine sismique, nous considérons un modèle d'oscillateur à masse couplée, composé de deux masses  $M$  et  $m$ , reliées entre elles par un ressort de longueur  $L$  au repos, les deux masses sont libres de se déplacer.

Les mouvements qui en résultent peuvent être très intéressants, cependant pour des raisons de simplicité, nous allons négliger les effets des frottements et des forces externes (ces derniers étant dus à la difficulté des études théoriques et numériques). Le système est placé sur une surface horizontale lisse.

On note par  $F$  la force appliquée sur la masse  $m$ , et par  $R$  la résistance de la masse  $M$ .

Comme chaque masse est libre de se déplacer, nous appliquons la deuxième loi de Newton (voir [21]) à chaque masse.

Soit  $x(t)$  le déplacement de la masse  $M$  par rapport à sa position d'équilibre,  $y(t)$  est le déplacement correspondant pour la masse  $m$ , qui a une force  $F$  agissant sur son côté droit.

Soit la loi de Hooke (voir [21]),

$$T(t) = \rho l(t),$$

où  $T$  est la tension du ressort,  $\rho$  est la constante de rigidité et  $l(t)$  est la variation de la longueur entre les deux masses à un instant  $t$  tel que

$$l(t) = (y(t) - x(t)) - L.$$

En appliquant la seconde loi de Newton à ces masses, on obtient le système à l'état de repos

$$\begin{cases} H(\varrho l(t) - R)(\varrho l(t) - R) = Mx''(t), \\ F - \varrho l(t) = my''(t), \\ l(t) = (y(t) - x(t)) - L, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

et le système a l'état de mouvement

$$\begin{cases} \varrho l(t) - R = Mx''(t), \\ F - \varrho l(t) = my''(t), \\ l(t) = (y(t) - x(t)) - L, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

où  $x''(t)$  et  $y''(t)$  sont les accélérations des masses  $M$  et  $m$  respectivement,  $H$  est la fonction de Heaviside, définie par

$$H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

En utilisant la fonction  $\delta$  définie par

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases}$$

les systèmes (1.3.2) et (1.3.3), peuvent être réunis dans un système sous la forme suivante

$$\begin{cases} (1 - \delta(x'(t)))(\varrho l(t) - R) + \delta(x'(t))H(\varrho l(t) - R)(\varrho l(t) - R) = Mx''(t), \\ F - \varrho l(t) = my''(t), \\ l(t) = (y(t) - x(t)) - L, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

où  $x'(t)$  et  $y'(t)$  sont les vitesses des masses  $M$  et  $m$  respectivement.

Comme le modèle représente une simulation d'une machine à tremblement de terre, et pour être bien posé, nous définissons la fonction sismique  $u$  par

$$u(\tau) = \varrho l(\tau) - R. \quad (1.3.6)$$

Par conséquent, le système précédent (1.3.5) peut être écrit sous la forme

$$u(t) + \frac{1}{2}\delta(x'(t))(|u(t)| - u(t)) = Mx''(t), \quad (1.3.7)$$

$$F - R - u(t) = my''(t), \quad (1.3.8)$$

$$u(t) = \varrho(y(t) - x(t) - L) - R, \quad (1.3.9)$$

où

$$H(\tau)\tau = \frac{1}{2}(|\tau| + \tau). \quad (1.3.10)$$

En intégrant les équations (1.3.7) et (1.3.8), et en remplaçant les résultats dans (1.3.9), nous obtenons, sous les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \\ y(0) = L, \end{cases} \quad (1.3.11)$$

l'équation

$$\begin{aligned} u(t) + \varrho \int_0^t \int_0^s \left( \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(\theta) + \frac{1}{2M} \delta \left( -\frac{1}{\varrho} u'(\theta) + \right. \right. & (1.3.12) \\ \left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^\theta (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(\theta)| - u(\theta)) \right) d\theta ds = -R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t \int_0^s (F(\theta) - R) d\theta ds. \end{aligned}$$

L'équation (1.3.12) présente une discontinuité donnée par la fonction  $\delta$ . Par conséquent, pour dépasser cette contrainte et pour résoudre l'équation (1.3.12) nous allons approcher la fonction  $\delta$  par  $\delta_\xi$  de classe  $C^1(\mathbb{R})$  définie comme

$$\delta_\xi(\tau) = \begin{cases} (1 - (\frac{\tau}{\xi})^2)^2, & \text{si } \tau \in [-\xi, \xi], \\ 0, & \text{si } \tau \in ]-\infty, -\xi[ \cup ]\xi, +\infty[, \end{cases} \quad (1.3.13)$$

tel que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \lim_{\xi \rightarrow 0} \delta_\xi(\tau) = \delta(\tau).$$

Ainsi, l'équation (1.3.12) devient

$$u(t) = \int_0^t (t-s) \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (1.3.14)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds - R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s) (F(s) - R) ds,$$

de même sa dérivée s'écrit,

$$u'(t) = \int_0^t \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (1.3.15)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (F(s) - R) ds.$$

Pour  $T > 0$ , l'équation (1.3.14), qui est une équation non linéaire intégral-différentielle de Volterra, peut être écrite sous la forme simple

$$u(t) = \int_0^t (t-s) K(s, u(s), u'(s)) ds + f(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.3.16)$$

dont sa dérivée

$$u'(t) = \int_0^t K(s, u(s), u'(s)) ds + f'(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.3.17)$$

où

$$K(s, u(s), u'(s)) = -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right.$$

$$+\frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha (|u(s)| - u(s)),$$

et

$$f(t) = -R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s)(F(s) - R) ds.$$

## Concepts fondamentaux et Etudes théoriques

---

### Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2 Concepts préliminaires et historiques de l'équation intégrale</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2.3 Clasification des équations intégrales</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.4 Théorie d'existence pour les équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.5 Existence et unicité de la solution de l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre.</b> . . . . .	<b>27</b>

---

### 2.1 Introduction

Le but visé dans ce chapitre est d'adapter le lecteur de cette thèse avec le concept d'équation intégrale, nous allons donc présenter les différentes formes et classifications des équations intégrales. Aussi dans l'objectif d'évoquer l'origine et l'utilité de telles équations, nous exposons brièvement quelques modèles, représentatifs d'une classe plus

générale. Dans ce qui suit, nous allons rappeler d'une manière systématique le cadre fonctionnel des équations intégrales ainsi que la méthode de résolution des équations de type intégral-différentielle non linéaire de Volterra. Finalement, nous allons exposer cette théorie du point de vue des applications physiques, nous avons pour cette raison énoncé au premier chapitre un problème mécanique qui conduit à une équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra. Ce problème revient en général à représenter le modèle de séisme.

## 2.2 Concepts préliminaires et historiques de l'équation intégrale

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, se présente sous le signe intégral. Cette définition générale tient compte des différentes formes. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'engager dans des situations inadéquates, nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non linéaires.

Les équations intégrales sont utilisées dans plusieurs domaines des mathématiques, de la physique mathématique, des problèmes de contacts et de l'astrophysique.

La théorie des équations intégrales est la théorie la plus répandue en mathématiques pures et appliquées, elle apparaît dans l'étude de nombreux problèmes physiques. Ainsi, la théorie des équations intégrales représente un domaine de recherche intéressant en mathématiques appliquées et en physique mathématique. L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science nous amène à traiter certaines de ces équations et les étudier théoriquement. Beaucoup de modèles mathématiques engendrés par des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, peuvent être transformés en problèmes de résolution de certaines équations intégrales approximatives. Voir ([23], [25] et [36]).

On exposera brièvement quelques modèles, représentatives d'une classe plus exhaustive.

J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a introduit ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de leurs transformations. En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié un article sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles, dans le quel, il a montré qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire, est obtenue en résolvant une équation intégrale. En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégrales singulières et aux équations intégrales singulières. Fredholm (1866-1927) a proposé des méthodes pour résoudre les équations intégrales de deuxième espèce.

Le développement de la science a conduit à l'apparition de nombreuses lois physiques qui, une fois reformulées sous forme mathématiques, apparaissent souvent sous la forme d'équations intégrales.

Une forme typique d'une équation intégrale en  $u(t)$  est donnée par,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t, s)u(s)ds, \quad (2.2.1)$$

où  $K(t, s)$  est appelé le noyau de l'équation intégrale (2.2.1),  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  sont les limites de l'intégration. On peut facilement constater que la fonction inconnue  $u(t)$  apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau  $K(t, s)$  ainsi que  $f(t)$  dans l'équation (2.2.1), sont des fonctions, et  $\lambda$  est un paramètre constant. L'objectif est de déterminer la fonction inconnue  $u(t)$  qui satisfera l'équation (2.2.1), en utilisant différentes techniques adéquates de résolution.

### 2.3 Clasification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme une équation intégrale linéaire ou non linéaire, Les équations intégrales les plus fréquemment rencontrées relèvent de deux grandes classes, à savoir les équations intégrales de Volterra et de Fredholm. Bien sûr,

nous devons les classer comme homogènes ou non homogènes, ainsi que linéaires ou non linéaires. Dans certains problèmes pratiques, nous rencontrons également des équations singulières.

De cela nous pouvons conclure que la classification des équations intégrales se présente sous trois caractéristiques de base décrivent leur structure globale à savoir,

i) L'espèce d'une équation est relatif à l'emplacement de la fonction inconnue. En effet, pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement sous le signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

ii) La description historique Fredholm et Volterra, concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégration sont fixées, tandis-que dans l'équation de Volterra elles sont indéfinies.

iii) Le caractère singulière : Une équation intégrale est dite singulière si l'intervalle d'intégration est impropre, ou si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies, de même si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, ainsi que si le noyau est singulier ou bien discontinu.

Nous distinguerons quatre types d'équations intégrales, à savoir

Equations intégrales de Volterra

Equations intégrales de Fredholm

Equations intégro-différentielles

Equations intégrales singulières

Nous allons décrire ces équations en utilisant les définitions de base et les propriétés de chaque type.

Pour une étude plus complète, voir ([11], [26], [30] et [34]).

### 2.3.1 Equations intégrales de Volterra

La forme standard des équations intégrales linéaires de Volterra est la suivante :

$$\varphi(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.2)$$

où les limites d'intégration sont fonction de  $t$  et la fonction inconnue  $u(t)$  apparaît linéairement sous le signe de l'intégrale,  $K(t, s)$  est le noyau de l'équation intégrale (2.3.2),  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$  sont des fonctions connus et  $\lambda$  est un paramètre constant.

Si la fonction  $\varphi(t) = 1$ , alors l'équation (2.3.2) devient

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.3)$$

cette équation est connue sous le nom d'équation intégrale de Volterra du second espèce.

Si  $\varphi(t) = 0$ , l'équation (2.3.2) devient

$$f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.4)$$

qui est nommée équation de Volterra du premier espèce.

### 2.3.2 Equations intégrales de Fredholm

La forme standard des équations intégrales linéaires de Fredholm est donnée sous la forme,

$$\varphi(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.5)$$

où les bornes d'intégration  $a$  et  $b$  sont des constantes de plus la fonction inconnue  $u(t)$  est linéaire et apparaît sous le signe de l'intégrale.  $K(t, s)$  est le noyau de l'équation intégrale,  $\varphi(t)$  et  $f(t)$  sont des fonctions connus, et  $\lambda$  est un paramètre constant.

Si la fonction  $\varphi(t) = 1$ , alors (2.3.5) devient

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.6)$$

cette équation s'appelle équation intégrale de Fredholm du second espèce.

Enfin, si  $\varphi(t) = 0$ , alors l'équation (2.3.5) s'écrit

$$f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.7)$$

et sera nommée équation de Fredholm du premier espèce.

**Remarque 2.3.1.** *Si la fonction inconnue  $u(t)$ , apparaissant sous le signe de l'intégrale, est donnée sous la forme fonctionnelle  $F(u(t))$ , telle que  $F$  est une fonction non linéaire, alors les équations intégrales de Volterra et Fredholm sont classées comme des équations intégrales non linéaires.*

*En général l'équation intégrale non linéaire et s'écrit sous la forme standard suivante,*

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_E K(t, s)F(u(s))ds, \quad t \in E. \quad (2.3.8)$$

*Enfin, si nous fixons  $f(t) = 0$  dans les équations intégrales de Volterra ou de Fredholm, l'équation résultante est appelée équation intégrale homogène, sinon elle est appelée équation intégrale non homogène.*

### 2.3.3 Equations intégrales singulières

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale, avec l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies, de même lorsque le noyau est non borné sur l'intervalle donné.

Les exemples suivants :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} u(s)ds, \quad (2.3.9)$$

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} u(s)ds, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2.3.10)$$

représentent des équations intégrales singulières.

### 2.3.4 Equations intégrro-différentielles

Une équation intégrro-différentielle est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles, dont la fonction inconnue est  $u$ , voir ([7] et [18]).

La forme générale d'une équation intégrro-différentielle non linéaire d'ordre  $n$  est donnée par

$$u^{(n)}(t) = f(t) + \lambda \int_E K(t, s, u(s), u'(s), \dots, u^{n-1}(s)) ds, \quad t \in E, \quad (2.3.11)$$

où  $u$  l'inconnu à chercher dans  $\mathbb{C}^n([0, T])$  et  $f$  est définie dans le même espace.

Si les limites de l'intégration sont fixées, alors l'équation intégrro-différentielle est dite de Fredholm et s'écrit

$$u^{(n)}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s, u(s), u'(s), \dots, u^{n-1}(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (2.3.12)$$

Si  $b = t$ , l'équation intégrro-différentielle est de Volterra et sera donnée par,

$$u^{(n)}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s), \dots, u^{n-1}(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (2.3.13)$$

## 2.4 Théorie d'existence pour les équations intégrro-différentielles non linéaires de Volterra

Dans cette section, nous sommes intéressés par l'étude d'une équation intégrro-différentielle non linéaire de Volterra. Ce type d'équation est très important en physique et en mathématiques, voir ([3], [9], [20] et [33]). Les équations intégrro-différentielles qui ont été étudiées dans les références indiquées ci-dessus, concernent le cas où la dérivée de l'inconnu est en dehors de l'intégrale.

Dans ce qui suit, nous étudions le cas où la dérivée est à l'intérieure de l'intégrale, par conséquent, notre étude concerne l'équation suivante :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (2.4.14)$$

où  $u$  est l'inconnu que nous recherchons dans  $\mathbb{C}^1([a, b])$ , et  $f$  est définie dans le même espace. Cette équation est similaire à celle étudiée dans ([9] et [14]).

Tout d'abord, nous étudions cette équation du point de vue analytique, où nous allons montrer l'existence et l'unicité de sa solution, en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans ([14], [20] et [33]), basées sur le théorème de point fixe de Schauder .

Soit  $K$  une fonction définie par,

$$K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, s, u, v) \rightarrow K(t, s, u, v)$$

où  $v = u'(t)$  dans l'équation (2.4.14)

Nous supposons que  $K$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \\ \max(|K(t, s, u, v)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v)|) \leq M. \end{array} \right.$$

Nous définissons la fonctionnelle  $\psi_f$  par,

$$\forall u \in \mathbb{C}^1([a, b]), \forall t \in [a, b],$$

$$\psi_f(u)(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds. \quad (2.4.15)$$

**Proposition 2.4.1.** *Sous les hypothèses  $(H_1)$  et pour tout  $f \in \mathbb{C}^1([a, b])$ ,  $\psi_f$  est continue sur  $\mathbb{C}^1([a, b])$ .*

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{C}^1(a, b)$ , de manière similaire à [20], nous allons montrer que  $\psi_f$  est continue dans  $]a, b[$ , pour tout  $t \in ]a, b[$ , en effet

$$\psi_f(u)'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds,$$

qui est continue sur  $]a, b[$  et borné par  $(b - a + 1)M + \|f\|_{\mathbb{C}^1(a,b)}$ , alors,  $\psi_f(u) \in \mathbb{C}^1(a, b)$ .

Soit  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{C}^1(a, b)$  qui converge vers  $u \in \mathbb{C}^1(a, b)$ . On a,  $\forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_f(u_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^t K(t, s, u_n(s), u_n'(s))ds + f(t) \right) = \int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} K(t, s, u_n(s), u_n'(s))ds + f(t) \\ &= \int_a^t K(t, s, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s), \lim_{n \rightarrow \infty} u_n'(s))ds + f(t) = \psi_f(u)(t). \end{aligned}$$

□

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire suivante :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s))ds, \quad a < t < b, \quad (2.4.16)$$

où  $f \in \mathbb{C}^1([a, b])$ , et  $u$  est l'inconnu à chercher dans le même espace. La dérivé de cette équation est définie par la formule

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (2.4.17)$$

Notre but est de trouver les conditions permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.4.16).

**Théorème 2.4.1.** *L'équation (2.4.16) admet une solution dans  $C^1(a, b)$ .*

*Démonstration.* Nous définissons l'ensemble suivant :

$$F = \{u \in C(a, b) : u(a) = f(a), \forall t \in [a, b], |u(t) - f(t)| \leq M(b-a), |u'(t) - f'(t)| \leq M(b-a+1)\}$$

Il est clair que l'ensemble  $F$  est fermé et convexe, pour tout  $u \in F$  et  $t \in [a, b]$ .

Soit  $\psi$  comme définie dans (2.4.15), on remarque que

$$\psi(u)(a) = f(a).$$

Selon les hypothèses  $(H_1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\psi_f(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds \right|, \\ &\leq M(b-a), \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} |\psi_f(u)'(t) - f'(t)| &= \left| K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds \right|, \\ &\leq M(b-a+1), \end{aligned}$$

alors,  $\psi_f(F) \subset F$ .

Comme  $\psi_f$  est continue sur  $C^1(a, b)$  et pour tout  $t, t' \in [a, b]$  on a,

$$|\psi_f(u)(t) - \psi_f(u)(t')| \leq \left( M(b - a + 1) + \max_{s \in [a, b]} |f'(s)| \right) |t - t'|.$$

En utilisant le théorème de Schauder, nous obtenons que  $\psi_f$  a un point fixe dans  $C^1(a, b)$ . Ce qui signifie que (2.4.16) a une solution dans  $C^1(a, b)$ .  $\square$

### Unicité de la solution

Les hypothèses  $(H_1)$  ne sont pas suffisant pour assurer l'unicité de la solution, pour cela on ajoute d'autres conditions, à savoir

$$(H_2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \exists \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}_+, \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \\ \quad |K(t, s, u, v) - K(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq \alpha |u - \bar{u}| + \beta |v - \bar{v}|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v}) \right| \leq \bar{\alpha} |u - \bar{u}| + \bar{\beta} |v - \bar{v}|, \\ (2) \quad \beta < 1. \end{array} \right.$$

Pour montrer l'unicité, nous avons besoin du lemme suivant ( Un résultat similaire est présenté dans [20]).

**Lemme 2.4.1.** Soit  $\psi(t)$  une fonction positive continue dans  $[a, b]$  et qui satisfait

$$\exists L > 0, \quad \psi(t) \leq L \int_a^t \psi(s) ds.$$

alors

$$\forall t \in [a, b], \quad \psi(t) = 0.$$

*Démonstration.* Puisque  $\psi(t)$  est continue dans  $[a, b]$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que

$$\psi(t) \leq \eta, \quad \forall t \in [a, b],$$

alors,

$$\psi(t) \leq L\eta \int_a^t ds = L\eta(t - a).$$

D'autre part, nous avons

$$\psi(t) \leq L \int_a^t \psi(s) ds,$$

donc

$$\psi(t) \leq L^2\eta \int_a^t (s - a) ds = L^2\eta \frac{(t - a)^2}{2},$$

en répétant cette opération  $n$  fois, on trouve

$$\psi(t) \leq L^n \eta \frac{(t - a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Pour montrer l'unicité de la solution de l'équation (2.4.16), on a le théorème suivant

**Théorème 2.4.2.** *Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , la solution de l'équation (2.4.16) est unique.*

*Démonstration.* soient  $u, v \in C^1[a, b]$  deux solutions de l'équation (2.4.16), soit

$$\gamma(t) = |u(t) - v(t)| + |u'(t) - v'(t)|,$$

Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , on a

$$|u(t) - v(t)| \leq \max(\alpha, \beta) \int_a^t \gamma(s) ds,$$

aussi,

$$(1 - \beta)|u'(t) - v'(t)| \leq \alpha|u(t) - v(t)| + \max(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \int_a^t \gamma(s) ds,$$

alors, il existe  $d$  positif tel que

$$\gamma(t) \leq d \int_a^t \gamma(s) ds.$$

En appliquant le lemme 2.4.1, on obtient

$$u(t) = v(t).$$

□

## 2.5 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrodifférentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre.

Dans cette section nous étudions un autre type d'équations intégrodifférentielle non linéaire de Volterra qui représente la modélisation de tremblement de terre à travers un modèle mécanique présenté dans le chapitre 1, cette équation se présente sous la forme,

$$\begin{aligned} u(t) = & \int_0^t (t-s) \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. & (2.5.18) \\ & \left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds - R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s) (F(s) - R) ds. \end{aligned}$$

Sa dérivée est donnée par,

$$\begin{aligned} u'(t) = & \int_0^t \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (F(s) - R) ds. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Cette dernière est due à notre considération du modèle d'oscillateur à masse couplée composé de deux masses  $M$  et  $m$ , reliées entre elles par un ressort de longueur  $L$  et de tension  $T$  donnée par,

$$T(t) = \varrho l(t),$$

où,

$\varrho$  est la constante de rigidité et  $l(t)$  la variation de la longueur entre les deux masses à un instant  $t$ .

$F$  la force appliquée sur la masse  $m$ ,  $R$  la résistance de la masse  $M$ .

$\delta_\xi$  est une fonction de classe  $C^1(\mathbb{R})$  définie dans (1.3.13).

Pour  $T > 0$ , l'équation (2.5.18) qui est une équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra, peut être écrite sous la forme simple suivante

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) = \int_0^t (t-s)K(s, u(s), u'(s))ds + f(t), \quad (2.5.20)$$

sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in [0, T], \quad u'(t) = \int_0^t K(s, u(s), u'(s))ds + f'(t), \quad (2.5.21)$$

où

$$\begin{aligned} K(s, u(s), u'(s)) = & -\varrho\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)u(s) - \frac{\varrho}{2M}\delta_\xi\left(-\frac{1}{\varrho}u'(s) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha))d\alpha\right)(|u(s)| - u(s)), \end{aligned}$$

et

$$f(t) = -R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s)(F(s) - R)ds.$$

Dans cette partie, nous présentons une étude analytique de notre équation, en montrant l'existence et l'unicité de la solution en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans ([14], [32], [13] et [20]).

On considère l'équation précédente

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) = \int_0^t (t-s)K(s, u(s), u'(s))ds + f(t). \quad (2.5.22)$$

Il est clair que  $f$  et  $K$  vérifient les propriétés suivantes

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} 1. f \in C^1([0, T]), \\ 2. \exists \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T], \alpha < f(t) < \beta, \bar{\alpha} < f'(t) < \bar{\beta}, \\ 3. \forall t, s \in [0, T], \forall u, \bar{u} \in [\alpha, \beta], \forall v, \bar{v} \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \exists M \in \mathbb{R}_+^*, |K(s, u, v)| \leq M. \\ 4. \forall t, s \in [0, T], \forall u, \bar{u} \in [\alpha, \beta], \forall v, \bar{v} \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \exists L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \in \mathbb{R}_+^*, \\ \\ |K(s, u, v) - K(s, \bar{u}, \bar{v})| \leq L_{\alpha, \beta} |u - \bar{u}| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |v - \bar{v}|. \end{array} \right.$$

Afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.5.22), sous les hypothèses (H), nous allons utiliser la méthode de Picard qui consiste à la construction de deux suites successives  $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , données par

$$\begin{cases} u_0(t) = f(t), \\ u_n(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)K(s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.5.23)$$

et

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = f(t), \\ \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.5.24)$$

de même

$$\begin{cases} u'_0(t) = f'(t), \\ u'_n(t) = f'(t) + \int_0^t K(s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.5.25)$$

et

$$\begin{cases} \varphi'_0(t) = f'(t), \\ \varphi'_n(t) = u'_n(t) - u'_{n-1}(t). \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.5.26)$$

Aussi, de (2.5.24) et (2.5.26) on obtient

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t), \\ \sum_{i=0}^n \varphi'_i(t) = u'_n(t). \end{cases} \quad (2.5.27)$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.5.22)

**Théorème 2.5.1.** *Selon les propriétés (H), et sachant qu'il existe une famille des points  $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n = T$  de l'intervalle  $[0, T]$  tel que, pour  $0 \leq i \leq n$ , et pour  $t \in [\delta_i, \delta_{i+1}]$ , l'équation (2.5.22) a une solution continue unique dans  $C^1(0, T)$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle  $[0, \delta_1]$ , puis on démontre que cette solution peut être continue à des intervalles successives  $[\delta_1, \delta_2]$ ,  $[\delta_2, \delta_3]$  et ainsi de suite. Sous des conditions appropriées, nous couvrons finalement tout l'intervalle  $[0, T]$ .

Soit  $t \in [0, \delta_1]$ . D'après les hypothèses 1., 2. et 3. de (H), on peut trouver une constante  $C$  telle que

$$\int_0^t |K(s, f(s), f'(s))| ds \leq Ct, \quad \forall t \in [0, \delta_1], \quad (2.5.28)$$

D'après l'hypothèse 1. de (H), On peut choisir un nombre positif  $d$  tel que

$$\forall t \in [0, \delta_1], \quad \alpha \leq f(t) - Cde^{Ld} \leq f(t) \leq f(t) + Cde^{Ld} \leq \beta, \quad (2.5.29)$$

et

$$\forall t \in [0, \delta_1], \quad \bar{\alpha} \leq f'(t) - Cde^{Ld} \leq f'(t) \leq f'(t) + Cde^{Ld} \leq \bar{\beta}, \quad (2.5.30)$$

Soit

$$\delta_1 = \min(d, T).$$

On définit les suites  $u_n$ ,  $\varphi_n$ ,  $u'_n$  et  $\varphi'_n$  comme dans (2.5.23)-(2.5.26), nous allons maintenant montrer par récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  que

$$(P_n) \left\{ \begin{array}{l} (a_n) \quad \alpha \leq u_n(t) \leq \beta, \\ (b_n) \quad \bar{\alpha} \leq u'_n(t) \leq \bar{\beta}, \\ (c_n) \quad |\varphi_n(t)| + |\varphi'_n(t)| \leq C \frac{\gamma^{n-1} t^n}{n!}, \\ (d_n) \quad |u_n(t) - f(t)| + |u'_n(t) - f'(t)| \leq C \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^{i-1} t^i}{i!}. \end{array} \right.$$

En effet, pour  $n = 1$ , on a  $u_1(t) = f(t)$  et  $u'_1(t) = f'(t)$ , alors d'après les hypothèses (H) on a

$$\begin{aligned} \alpha &\leq u_1(t) \leq \beta, \\ \bar{\alpha} &\leq u'_1(t) \leq \bar{\beta}, \end{aligned}$$

Donc  $(a_1)$  et  $(b_1)$  dans  $(P_n)$  sont satisfaits.

Reste à démontrer  $(c_1)$  et  $(d_1)$  dans  $(P_n)$ . De (2.5.24) et (2.5.26) on a

$$|\varphi_1(t)| + |\varphi'_1(t)| = |u_1(t) - f(t)| + |u'_1(t) - f'(t)|, \quad (2.5.31)$$

aussi, de (2.5.23) et (2.5.25) on a

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t)| + |\varphi'_1(t)| &\leq \int_0^t |(t-s)K(s, f(s), f'(s))| ds + \int_0^t |K(s, f(s), f'(s))| ds, \\ &\leq |(\delta_1 + 1)| \int_0^t |K(s, f(s), f'(s))| ds, \\ &\leq Ct, \quad \forall t \in [0, \delta_1]. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

D'où,  $(c_1)$  et  $(d_1)$  dans  $(P_n)$  sont réalisés.

La propriété  $(P_1)$  est satisfaite. Maintenant, on suppose que  $(P_n)$  est satisfaite, et on démontre la propriété  $(P_{n+1})$ .

Pour montrer la propriété  $(P_{n+1})$ , nous devons démontrer d'abord  $(c_{n+1})$  et  $(d_{n+1})$  puis on démontre  $(a_{n+1})$  et  $(b_{n+1})$

En effet, pour montrer la propriété  $(c_{n+1})$  donnée par

$$|\varphi_{n+1}(t)| + |\varphi'_{n+1}(t)| \leq C \frac{\gamma^n t^{n+1}}{(n+1)n!}. \quad (2.5.33)$$

il faut tout d'abord montrer que

$$|\varphi_n(t)| + |\varphi'_n(t)| \leq \gamma \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds \leq C \frac{\gamma^{n-1} t^n}{n!}. \quad (2.5.34)$$

Alors, d'après (2.5.23) on a

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| &= \left| \int_0^t (t-s) K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - K(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s)) ds \right|, \\ &\leq \int_0^t |(t-s)| |K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - K(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))| ds, \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

selon l'hypothèse 4. de  $(H)$  on a

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| &\leq T \int_0^t [L_{\alpha, \beta} |u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |u'_{n-1}(s) - u'_{n-2}(s)|] ds, \\ &\leq T \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| + |u'_{n-1}(s) - u'_{n-2}(s)| ds, \\ &\leq T \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds. \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

De même, de (2.5.25), on a

$$\begin{aligned} |u'_n(t) - u'_{n-1}(t)| &= \left| \int_0^t K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - K(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s)) ds \right|, \\ &\leq \int_0^t |K(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - K(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))| ds, \end{aligned}$$

(2.5.37)

en utilisant l'hypothèse 4. de (H), on trouve

$$\begin{aligned} |u'_n(t) - u'_{n-1}(t)| &\leq \int_0^t [L_{\alpha, \beta} |u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |u'_{n-1}(s) - u'_{n-2}(s)|] ds, \\ &\leq \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| + |u'_{n-1}(s) - u'_{n-2}(s)| ds, \\ &\leq \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds. \end{aligned}$$

(2.5.38)

De (2.5.36) et (2.5.38) on trouve

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| + |\varphi'_n(t)| &\leq T \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds \\ &\quad + \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds, \\ &\leq (T + 1) \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds, \\ &\leq \gamma \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds. \end{aligned}$$

(2.5.39)

D'où

$$|\varphi_n(t)| + |\varphi'_n(t)| \leq \gamma \int_0^t |\varphi_{n-1}(s)| + |\varphi'_{n-1}(s)| ds, \quad (2.5.40)$$

ce qui donne,

$$|\varphi_{n+1}(t)| + |\varphi'_{n+1}(t)| \leq \gamma \int_0^t |\varphi_n(s)| + |\varphi'_n(s)| ds, \quad (2.5.41)$$

mais, d'après la propriété  $(P_n)$ , on a

$$|\varphi_n(t)| + |\varphi'_n(t)| \leq C \frac{\gamma^{n-1} s^n}{n!}, \quad (2.5.42)$$

alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| + |\varphi'_{n+1}(t)| &\leq \gamma \int_0^t C \frac{\gamma^{n-1} s^n}{n!} ds, \\ &\leq C \frac{\gamma^n}{n!} \int_0^t s^n ds, \\ &\leq C \frac{\gamma^n t^{n+1}}{(n+1)n!}. \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

Donc,  $(c_{n+1})$  est satisfaite également.

Maintenant, nous allons démontrer la propriété  $(d_{n+1})$ , en effet, d'après (2.5.24) et (2.5.26) on a,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - f(t)| + |u'_{n+1}(t) - f'(t)| &= |u_n(t) - f(t) + \varphi_{n+1}(t)| + |u'_n(t) - f'(t) + \varphi'_{n+1}(t)| \\ &\leq |u_n(t) - f(t)| + |u'_n(t) - f'(t)| + |\varphi_{n+1}(t)| + |\varphi'_{n+1}(t)|, \end{aligned}$$

mais, d'après (2.5.43) on a,

$$|\varphi_{n+1}(t)| + |\varphi'_{n+1}(t)| \leq C \frac{\gamma^n t^{n+1}}{(n+1)n!}. \quad (2.5.44)$$

Alors,

$$|u_{n+1}(t) - f(t)| + |u'_{n+1}(t) - f'(t)| \leq C \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^{i-1} t^i}{i!} + C \frac{\gamma^n t^{n+1}}{(n+1)!},$$

ainsi,  $(d_{n+1})$  est vérifié.

Finalement, nous allons démontrer les propriétés  $(a_{n+1})$  et  $(b_{n+1})$ .

Pour  $0 < t < \delta_1$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma^{i-1} t^i}{i!} < de^{Ld}, \quad (2.5.45)$$

D'autre part, on a

$$|u_{n+1}(t) - f(t)| \leq C \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^{i-1} t^i}{i!}, \quad (2.5.46)$$

et

$$|u'_{n+1}(t) - f'(t)| \leq C \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^{i-1} t^i}{i!}, \quad (2.5.47)$$

Alors de (2.5.29), (2.5.45) et (2.5.46) on a

$$\alpha \leq u_{n+1}(t) \leq \beta. \quad (2.5.48)$$

Aussi, de (2.5.30), (2.5.45) et (2.5.47) on obtient

$$\bar{\alpha} \leq u'_{n+1}(t) \leq \bar{\beta}, \quad (2.5.49)$$

Ceci complète l'argument inductif.

Puisque  $(P_n)$  est évidemment vrai pour tous  $n$ , cette limite rend évident que la suite  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $u \in C^1(0, \delta_1)$ , et on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t).$$

Pour prouver que  $u$  satisfait à l'équation originale (2.5.22), on pose

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t),$$

alors

$$u'(t) = u'_n(t) + \Delta'_n(t).$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \left| u(t) - f(t) - \int_0^t (t-s)K(s, u(s), u'(s))ds \right| = \\ & = \left| u_n(t) + \Delta_n(t) - f(t) - \int_0^t (t-s)K(s, u(s), u'(s))ds \right|, \\ & \leq |\Delta_n(t)| + \left| \int_0^t (t-s)(K(s, u_{n-1}, u'_{n-1}) - K(s, u(s), u'(s)))ds \right|, \\ & \leq |\Delta_n(t)| + \delta_1 \int_0^t L_{\alpha, \beta} |u_{n-1}(s) - u(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |u'_{n-1}(s) - u'(s)| ds, \\ & \leq |\Delta_n(t)| + \delta_1 \int_0^t L_{\alpha, \beta} |\Delta_{n-1}(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |\Delta'_{n-1}(s)| ds, \\ & \leq |\Delta_n(t)| + \delta_1 \max\{L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}\} \|\Delta_{n-1}(s)\|_{C^1([0, \delta_1])}, \\ & \leq \|\Delta_n\|_{C^1([0, \delta_1])} + \|\Delta_{n-1}\|_{C^1([0, \delta_1])}. \end{aligned}$$

Mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta_n\|_{C^1([0, \delta_1])} = 0,$$

ainsi  $u$  est la solution de (2.5.22).

### Unicité de la solution

Pour montrer que  $u(t)$  est une solution continue unique, On suppose qu'il existe une autre solution  $\tilde{u}(t) \in C^1(0, \delta_1)$  de (2.5.22). Alors, pour tout  $t \in [0, \delta_1]$

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)| + |u'(t) - \tilde{u}'(t)| &= \left| \int_0^t (t-s)(K(s, u(s), u'(s)) - K(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)))ds \right| + \\ &+ \left| \int_0^t (K(s, u(s), u'(s)) - K(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)))ds \right|, \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned}
|u(t) - \tilde{u}(t)| + |u'(t) - \tilde{u}'(t)| &\leq \delta_1 \int_0^t L_{\alpha,\beta} |u(s) - \tilde{u}(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} |u'(s) - \tilde{u}'(s)| ds \\
&+ \int_0^t L_{\alpha,\beta} |u(s) - \tilde{u}(s)| + \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} |u'(s) - \tilde{u}'(s)| ds, \\
&\leq \gamma \int_0^t |u(s) - \tilde{u}(s)| + |u'(s) - \tilde{u}'(s)| ds.
\end{aligned}
\tag{2.5.50}$$

Puisque  $u(t)$  et  $\tilde{u}(t)$  sont les deux continus dans  $[0, \delta_1]$ ,  $\exists C > 0$  tel que,

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| + |u'(t) - \tilde{u}'(t)| \leq C, \quad \forall t \in [0, \delta_1].$$

substituant ceci dans (2.5.50)

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| + |u'(t) - \tilde{u}'(t)| \leq C\gamma t.$$

En répétant l'argument  $n$  fois, nous avons

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| + |u'(t) - \tilde{u}'(t)| \leq C \frac{\gamma^n t^n}{n!},$$

pour tout  $n$ , nous concluons que  $u(t) = \tilde{u}(t)$  pour tout  $t \in [0, \delta_1]$ .

Maintenant, pour  $t \in [\delta_1, \delta_2]$ , on écrit l'équation sous la forme

$$u_1(t) = F(t) + \int_{\delta_1}^t (t-s)K(s, u_1(s), u_1'(s))ds, \quad \forall t \in [\delta_1, \delta_2], \tag{2.5.51}$$

où

$$F(t) = f(t) + \int_0^{\delta_1} (t-s)K(s, u_0(s), u_0'(s))ds,$$

et  $u_0(s)$  est la solution obtenu dans la première étape, mais (2.5.51) est exactement la même équation de Volterra avec une origine décalée de 0 à  $\delta_1$ . Alors, nous pouvons donc

appliquer les mêmes étapes de base. On définit

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in [0, \delta_1], \\ u_1(t), & t \in [\delta_1, \delta_2]. \end{cases} \quad (2.5.52)$$

Il est clair que  $u \in C^1(0, \delta_2)$  est unique solution de (2.5.22) sur  $[0, \delta_2]$ .

Cet argument peut être répété et comme il n'y a qu'un nombre fini de sous-intervalles dans  $[0, T]$ , nous construisons ainsi la solution unique dans  $C^1(0, T)$ .  $\square$

## Approximations numériques des équations de Volterra

---

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.2 Étude numérique de l'équation de Volterra de deuxième espèce</b> . . .	<b>40</b>
<b>3.3 Étude numérique de l'équation intégr-différentielle non linéaire de Volterra</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>3.4 Étude numérique de l'équation intégr-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre.</b> . . . . .	<b>58</b>

---

### 3.1 Introduction

Étant donné que peu d'équations de Volterra, rencontrées dans la pratique, peuvent être résolues de manière explicite, alors il est souvent nécessaire de recourir à des techniques numériques. Puisque de nombreuses alternatives sont disponibles, nous allons nous intéresser aux idées sous-jacentes sur lesquelles ces méthodes sont basées. Afin d'identifier clairement les idées essentielles et d'éviter des complications inutiles, nous utilisons l'ajustement le plus simple.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler les méthodes de résolution approchées de l'équation intégrale de Volterra, ainsi que l'équation de type intégral-différentielle non linéaire de ce dernier. Finalement, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre, en utilisant une méthode de Nyström.

Nous commençons notre approche dans ce chapitre en présentant une méthode assez simple et intuitivement raisonnable, basée sur la règle d'intégration trapézoïdale.

Les résultats suggèrent la possibilité d'utiliser diverses techniques d'intégration numérique standard pour la solution approchée des équations de Volterra.

## 3.2 Étude numérique de l'équation de Volterra de deuxième espèce

Une équation non linéaire de Volterra de deuxième espèce est une équation de la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (3.2.1)$$

où,  $u$  l'inconnu à chercher dans  $C^0(a, b)$ ,  $f$  supposée appartenir au même espace et  $K$  une fonction définie par

$$K : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, s, u) \rightarrow K(t, s, u),$$

vérifiant l'hypothèse  $(H_4)$  suivante :

$$(H_4) \left\{ \begin{array}{l} i) \quad f(t) \in C(a, b), \\ ii) \quad K \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}), \\ iii) \quad \forall t, s \in [a, b], \forall u, \bar{u} \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \\ \quad |K(t, s, u) - K(t, s, \bar{u})| \leq A|u - \bar{u}| \end{array} \right.$$

La méthode que nous allons utiliser est celle de Nyström. Elle consiste à remplacer l'intégrale qui apparaît dans l'équation par une formule d'intégration

Soit la subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ ,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b,$$

$$h = \frac{b - a}{N}, \quad t_j = a + jh, .$$

Nous remplaçons l'intégrale

$$I = \int_a^{t_i} K(t, s, u(s)) ds,$$

par la formule de quadrature suivante

$$I_i = h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)),$$

nous choisissons la méthode de Trapèze, pour obtenir

$$I_i = \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i),$$

en remplaçant dans l'équation (3.2.1), on obtient l'approximation  $U_i$  de  $u(t_i)$  vérifiant

$$\begin{cases} U_0 = f(t_0), \\ U_i = f(t_i) + \frac{h}{2}K(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2}K(t_i, t_i, U_i). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) est une équation non linéaire dont l'inconnu est  $U_i$ , elle est équivalente à

$$\begin{cases} U_0 = f(t_0), \\ X = S + \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X), \\ S = f(t_i) + \frac{h}{2}K(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j). \end{cases}$$

Le théorème suivant nous permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (3.2.2)

**Théorème 3.2.1.** *Si  $h$  est suffisamment petite, le système (3.2.2) admet une unique solution.*

*Démonstration.* Pour tout  $i \geq 1$ , nous définissons

$$\phi_i(X) = S + \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X),$$

où

$$S = f(t_i) + \frac{h}{2}K(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j).$$

Nous avons, d'après *iii*) de  $(H_4)$

$$\begin{aligned} \phi_i(X) - \phi_i(X') &= \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X) - \frac{h}{2}K(t_i, t_i, X'), \\ &\leq \frac{h}{2}A|X - X'|, \end{aligned}$$

(3.2.3)

Pour  $h$  suffisamment petite et d'après le théorème du point fixe de Banach, alors  $\phi_i$  est contraction qui admet un unique point fixe. □

### Etude de l'erreur

Dans cette partie nous allons démontrer que la méthode numérique, construite dans la partie précédente, converge vers la solution exacte de l'équation.

Pour cela, nous définissons

$$\varepsilon_i = U_i - u(t_i), \quad 0 \leq i \leq N,$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|) = 0.$$

**Définition 3.2.1.** Soit  $u$  une solution de (3.2.1), alors la fonction

$$\delta_n(h, t_i) = \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s)) ds - h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)),$$

est appelée l'erreur de la consistance locale pour (3.2.1), par conséquent la méthode d'approximation est dite consistante si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|) = 0.$$

Le théorème suivant nous permet de montrer que la méthode numérique construite dans la partie précédente, converge vers la solution exacte de l'équation (3.2.2)

**Théorème 3.2.2.** *Si la méthode d'approximation est consistante, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|) = 0.$$

*Démonstration.* Nous avons, pour  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\varepsilon_i = h \sum_{j=0}^i w_j (K(t_i, t_j, U_j) - K(t_i, t_j, u(t_j))) - \delta_n(h, t_i),$$

d'après  $(H_4)$ , on a

$$|\varepsilon_i| = |h \sum_{j=0}^i w_j A (U_j - u(t_j)) - \delta_n(h, t_i)|,$$

alors

$$|\varepsilon_i| \leq hWA \sum_{j=0}^i |\varepsilon_j| + |\delta_n(h, t_i)|,$$

ce qui donne

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hWA}{1 - hWA} \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \frac{|\delta_n(h, t_i)|}{1 - hWA}.$$

De manière analogue au théorème 7.1 dans [20], on trouve

$$|\varepsilon_i| \leq \left(1 + \frac{hWA}{1 - hWA}\right)^{i-1} \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|}{1 - hWA}\right),$$

s'écrit aussi

$$|\varepsilon_i| \leq \exp\left(\frac{WAt_i}{1 - hWA}\right) \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|}{1 - hWA}\right)$$

mais

$$\left(1 + \frac{hWA}{1 - hWA}\right)^{i-1} \leq \left(1 + \frac{(b-a)WA}{N(1 - hWA)}\right)^N,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{(b-a)WA}{N(1-hWA)} \right)^N < +\infty$$

Alors,  $\exists \theta > 0$  telque

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \left( 1 + \frac{hWA}{1-hWA} \right)^{i-1} \leq \theta$$

□

### Résultats Numériques

Dans cette partie, nous allons donner deux exemples différents afin de souligner l'efficacité de la méthode des Trapèzes, qui donne une grande précision pour approcher l'intégrale. Le premier exemple traite le cas linéaire, et le deuxième le cas non linéaire.

**Exemple 3.2.1.** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra définie comme suit*

$$u(t) = 6t - 6 \sin(t) + \int_0^t \sin(t-s)u(s)ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

où

$$K(t, s) = \sin(t-s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

$$K \in C^0([0, 1] \times \mathbb{R}),$$

et

$$f(t) = 6t - 6 \sin(t), 0 \leq t \leq T = 1,$$

$$f \in C^0([0, 1]),$$

en se référant au théorème 3.2.1, on vérifie que l'équation admet la solution exacte donnée par

$$u(t) = t^3.$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et celle approchée  $|U_n - u(t_n)|$ , de l'équation précédente.

$t$	$ U_n - u(t_n)  \quad h = 0.1$	$ U_n - u(t_n)  \quad h = 0.01$
00	00	4.6585e-005
0.1	4.9988e-007	8.3040e-008
0.2	6.0064e-006	6.6732e-008
0.3	2.1576e-005	2.2590e-007
0.4	5.2365e-005	5.3746e-007
0.5	1.03680e-004	1.0545e-006
0.6	1.8102e-004	1.8321e-006
0.7	2.90162e-004	2.9280e-006
0.8	4.3713e-004	4.4028e-006
0.9	6.2836e-004	6.3206e-006
1	8.70636e-004	8.74956e-006

TABLE 3.1 – Equation linéaire de Volterra

**Exemple 3.2.2.** On considère dans l'exemple suivant, un noyau non linéaire et l'équation proposée est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1} \right) + \int_0^t \frac{s}{(t^2 + s^2 + u(s)^2 + 1)} ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

on pose

$$K(t, s, u) = \frac{s}{(t^2 + s^2 + u^2 + 1)} ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1, \quad u \in \mathbb{R},$$

et

$$f(t) = t - \frac{1}{4} \log \left( \frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1} \right), \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

On vérifie facilement que  $f$  et  $K$  sont continues, pour  $0 \leq s \leq t \leq T$  le noyau  $K$  est Lipschitzien par rapport à la troisième variable  $u$ , en appliquant le théorème 3.2.1, on vérifie que l'équation admet la solution exacte  $u \in C^0([0, 1])$  donnée par,

$$u(t) = t.$$

Le tableau suivant, donne une estimation de l'erreur, entre les solutions exacte et approchée  $|U_n - u(t_n)|$

$t$	$ U_n - u(t_n)  \quad h = 0.1$	$ U_n - u(t_n)  \quad h = 0.01$
0.0	0.0	0.0
0.1	4.7748e-005	4.7433e-007
0.2	1.6384e-004	1.6317e-006
0.3	2.9306e-004	2.9225e-006
0.4	3.9357e-004	3.9287e-006
0.5	4.51781e-004	4.5126e-006
0.6	4.7280e-004	4.7244e-006
0.7	4.6784e-004	4.6758e-006
0.8	4.4729e-004	4.4709e-006
0.9	4.1874e-004	4.1860e-006
1.0	3.8709e-004	3.86981e-006

TABLE 3.2 – Equation non linéaire de Volterra

### Conclusion

Nous remarquons dans les deux exemples précédents que lorsque  $n$  prend des valeurs assez grandes, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, de l'équation de Volterra, tend vers zéro, ce qui prouve la convergence de la méthode de Nyström.

### 3.3 Étude numérique de l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra, dans le sens analytique, sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. (Voir [14])

Dans cette section, nous allons proposer une approximation numérique de cette équation. Tout d'abord, nous allons approcher la solution de cette équation, en utilisant la Méthode de Nyström, cette méthode est basée sur l'intégration numérique. (Voir [14])

Rappelons notre équation

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (3.3.4)$$

où sa dérivée est donnée par la formule

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a < t < b, \quad (3.3.5)$$

où  $f \in C^1([a, b])$ , et  $K$  une fonction définie par,

$$K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, s, u, v) \rightarrow K(t, s, u, v),$$

où  $v = u'(t)$

$K$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \\ \quad \max(|K(t, s, u, v)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v)|) \leq M. \end{array} \right.$$

et

$$(H_2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \exists \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}_+, \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \\ \quad |K(t, s, u, v) - K(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq \alpha|u - \bar{u}| + \beta|v - \bar{v}|, \\ \quad |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq \bar{\alpha}|u - \bar{u}| + \bar{\beta}|v - \bar{v}|, \\ (2) \quad \beta < 1. \end{array} \right.$$

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on définit une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ , tel que

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Soit la formule des intégrations numériques

$$\int_a^b \xi(t) dt \approx h \sum_{i=0}^N w_i \xi(t_i),$$

où,  $w_i$  est une famille de réels, vérifiant,  $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists W > 0, \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$ .

En appliquant cette quadrature sur les équations (3.3.4) et (3.3.5), on obtient le système suivant

$$U_0 = f(a), \tag{3.3.6}$$

$$V_0 = f'(a) + K(a, a, U_0, V_0), \tag{3.3.7}$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.3.8}$$

$$V_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.3.9}$$

Où les approximation  $U_n$  et  $V_n$  sont données par

$$U_n \approx u(t_n),$$

et

$$V_n \approx u'(t_n).$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (3.3.6)-(3.3.9), nous allons supposer une nouvelle hypothèse ( $H_3$ ) donnée par

$$(H_3) \quad \alpha < 1.$$

**Théorème 3.3.1.** *Sous les hypothèses ( $H_1$ ), ( $H_2$ ) et ( $H_3$ ), et pour  $h$  suffisamment petite, le système (3.3.6)-(3.3.9) admet une unique solution sur  $[a, b]$*

*Démonstration.* Soit la norme suivante dans  $\mathbb{R}^2$

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , nous définissons

$$\psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_n) + hw_n K(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ f'(t_n) + K(t_n, t_n, X, Y) + hw_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\left\| \psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

Où

$$\begin{aligned}\beta_1 &= hw_n(K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y')) \\ \beta_2 &= K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y') + hw_n\left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y')\right)\end{aligned}$$

Cependant

$$\begin{aligned}|\beta_1| &\leq hW(\alpha|X - Y| + \beta|X' - Y'|), \\ |\beta_2| &\leq (\alpha + hW\bar{\alpha})|X - Y| + (\beta + hW\bar{\beta})|X' - Y'|.\end{aligned}$$

Alors

$$\left\| \psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(hW\alpha, hW\beta, (\alpha + hW\bar{\alpha}), (\beta + hW\bar{\beta})) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1$$

Comme  $\alpha < 1$ , en appliquant le théorème de Banach, nous obtenons le résultat.  $\square$

### Etude de l'erreur

Nous allons montrer que la méthode numérique construite dans la section précédente converge vers la solution exacte de l'équation. Pour cela, nous définissons :

$$\varepsilon_n = |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \quad 0 \leq n \leq N$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \varepsilon_n) = 0$$

Pour  $0 \leq n \leq N$  et  $u \in C^1(a, b)$ , nous définissons l'erreur de consistance par,

$$\begin{aligned}\delta(h, t_n) &= \left| \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| + \\ &+ \left| \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|.\end{aligned}$$

la méthode d'approximation du système (3.3.6)-(3.3.9) est consistente avec l'équation (3.3.4), si

$$\forall u \in C^1(a, b), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq n \leq N} \delta(h, t_n) \right) = 0.$$

Le théorème suivant nous permet de montrer que la méthode numérique construite, converge vers la solution exacte de l'équation (3.3.4)

**Théorème 3.3.2.** *Si la méthode d'approximation du système (3.3.6)-(3.3.9) est consistante avec l'équation (3.3.4), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq n \leq N} \varepsilon_n \right) = 0$$

*Démonstration.* pour  $n \geq 1$ , on a par définition

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \\ &= \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\ &+ \left| K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \right. \\ &\quad \left. - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \end{aligned}$$

ainsi, en ajoutant et retranchant dans cette égalité les termes

$$h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))$$

et

$$h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &= \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right. \\
 &+ \left. h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
 &+ \left| K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right. \\
 &+ \left. h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right|
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &\leq \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right| \\
 &+ \left| K(t_n, t_n, U_n, V_n) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) \right| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right|
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &\leq \left| h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right| \\
 &+ |hw_i K(t_n, t_n, U_n, V_n) - hw_i K(t_n, t_n, u(t_n), v(t_n))| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \right| \\
 &+ \left| hw_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, U_n, V_n) - hw_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, u(t_n), v(t_n)) \right| \\
 &+ |K(t_n, t_n, U_n, V_n) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n))| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right|
 \end{aligned}$$

d'après les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et la définition de  $\delta(h, t_n)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &\leq (\alpha + \alpha hW + \bar{\alpha} hW) |U_n - u(t_n)| + (\beta + \beta hW + \bar{\beta} hW) |V_n - u'(t_n)| \\
 &+ hW \sum_{i=0}^{n-1} \left( (\alpha + \bar{\alpha}) |U_i - u(t_i)| + (\beta + \bar{\beta}) |V_i - u'(t_i)| \right) + \delta(h, t_n).
 \end{aligned}$$

pour  $h$  assez petit, on a

$$\kappa = \min \left( 1 - (\alpha + \alpha hW + \bar{\alpha} hW), 1 - (\beta + \beta hW + \bar{\beta} hW) \right) > 0,$$

et

$$\varepsilon_n \leq \frac{hW \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{\kappa} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{1}{\kappa} \delta(h, t_n),$$

de manière analogue au théorème 7.1 dans [20], on obtient

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{\kappa} \left( 1 + \frac{hW \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{\kappa} \right)^{n-1} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \delta(h, t_i) + hW \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta}) \varepsilon_0 \right),$$

mais

$$\left(1 + \frac{hW \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{\kappa}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{(b-a)W \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{N\kappa}\right)^N,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(b-a)W \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{N\kappa}\right)^N < +\infty.$$

Alors,  $\exists \theta > 0$  tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}; \quad \max_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{hW \max(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{\kappa}\right)^{n-1} \leq \theta.$$

### Résultats numériques

Les exemples qu'on va choisir dans cette partie ne représentent aucun intérêt physique, nous allons les choisir pour bien illustrer l'efficacité de notre méthode, donc ils ont un grand avantage mathématique dans nos applications.

Nous utilisons la méthode trapézoïdale, car elle garantit la compatibilité de la méthode d'approximation du système (3.3.6)-(3.3.9) avec l'équation (3.3.4), sans ajouter de nouvelles conditions de régularité.

Les termes  $U_n$  et  $V_n$  ne seront pas calculés exactement, ils seront abordés à l'aide de la méthode d'itération de Banach, avec une condition d'arrêt de type

$$\|X_{new} - X_{old}\| \leq \frac{1}{10N}$$

Nous proposons les exemples suivants, pour illustrer l'efficacité de notre méthode

**Exemple 3.3.1.** Soit l'équation donnée par,

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{K(t)(s+1)}{5 + (u(s) + u'(s))^2} ds, \quad t \in [0, 1], \quad (3.3.10)$$

où,

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - t^2), & t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(t^2 - t), & t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Le noyau  $K(t, s, x, y) = \frac{K(t)(s+1)}{5+(x+y)^2}$  satisfait à  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  avec

$$M = \frac{1}{10}, \quad \alpha < \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{1}{2}, \quad \bar{\alpha} < 1, \quad \bar{\beta} < 1.$$

et la fonction  $f(t)$  notée par

$$f(t) = t - \frac{K(t)}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \ln(\sqrt{6})K(t),$$

on vérifie que la solution exacte est donnée par,

$$u(t) = t.$$

Le tableau 3.3 montre le résultat numérique obtenu pour l'équation (3.3.10)

N	$\max_{1 \leq j \leq N} ( U_j - u(t_j)  +  V_j + u'(t_j) )$
10	6.52e-3
50	1.47e-3
100	7.46e-4
200	3.75e-4
300	2.51e-4
500	1.51e-4
1000	7.55e-5
1500	5.04e-5

TABLE 3.3 – Résultat numérique obtenu pour Eq(3.3.10)

**Exemple 3.3.2.** Soit l'équation donnée par,

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \cos(|t - 2s|(t - 2s) + e^s - u(s) + u'(s)) ds, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (3.3.11)$$

Le noyau  $K(t, s, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \cos(|t - 2s|(t - 2s) + \exp(s) - x + y)$  satisfait au hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  avec

$$M = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2\pi}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \frac{1}{2}.$$

et la fonction  $f(t)$  donnée par,

$$f(t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \left( \text{FerS}\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - \text{FerS}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right) \right) - \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \left( \text{FerC}\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - \text{FerC}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right) \right) \right) + \frac{\sin(t^2)}{4\pi t} + te^t - 4t^2 - 8t - 8,$$

tel que  $\text{FerC}$  la fonction intégrale de Fresnel Cosine et  $\text{FerS}$  la fonction intégrale de Fresnel Sine, avec la formule de Fresnel donnée par,

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

on vérifie que la solution exacte de notre équation est donnée par,

$$u(t) = 4t^2 + 8t + 8 - te^t$$

Le tableau 3.4 montre le résultat numérique obtenu pour l'équation (3.3.11)

N	$\max_{1 \leq j \leq N} ( U_j - u(t_j)  +  V_j + u'(t_j) )$
10	1.01e-2
50	8.33e-3
100	4.26e-3
200	7.55e-4
300	3.21e-4
500	1.09e-4
1000	9.62e-5
1500	6.15e-5

TABLE 3.4 – Résultat numérique obtenu pour Eq (3.3.11)

□

### 3.4 Étude numérique de l'équation intégró-différentielle non linéaire de Volterra découlant du modèle de tremblement de terre.

Dans cette section nous étudions l'équation intégró-différentielle non linéaire de Volterra issu de la modélisation du phénomène de tremblement de terre présenté dans le

chapitre 1, cette équation se présente sous la forme,

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) = \int_0^t (t-s)K(s, u(s), u'(s))ds + f(t), \quad (3.4.12)$$

sa dérivée est donnée par,

$$\forall t \in [0, T], \quad u'(t) = \int_0^t K(s, u(s), u'(s))ds + f'(t), \quad (3.4.13)$$

où le noyau  $K$  donné par,

$$K(s, u(s), u'(s)) = -\varrho\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)u(s) - \frac{\varrho}{2M}\delta_\xi\left(-\frac{1}{\varrho}u'(s) + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha))d\alpha\right)(|u(s)| - u(s)),$$

et

$$f(t) = -R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s)(F(s) - R)ds.$$

où  $M$  et  $m$  sont deux masses, reliées entre elles par un ressort de longueur  $L$  et de tension  $T$  donnée par,

$$T(t) = \varrho l(t),$$

$\varrho$  est la constante de rigidité et  $l(t)$  la variation de la longueur entre les deux masses à un instant  $t$ .

$F$  la force appliquée sur la masse  $m$ ,  $R$  la résistance de la masse  $M$ .

Ces dernières sont dues à notre considération du modèle d'oscillateur indiqué par la figure 1.2 dans le premier chapitre.

$\delta_\xi$  est une fonction de classe  $C^1(\mathbb{R})$  définie dans (1.3.13).

Rapplons que  $K$  et  $f$  vérifient les propriétés suivantes

$$(H) \left\{ \begin{array}{l}
 1. f \in C^1([0, T]), \\
 2. \exists \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \alpha < f(t) < \beta, \quad \bar{\alpha} < f'(t) < \bar{\beta}, \\
 3. \forall t, s \in [0, T], \quad \forall u, \bar{u} \in [\alpha, \beta], \quad \forall v, \bar{v} \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad |K(s, u, v)| \leq M. \\
 4. \forall t, s \in [0, T], \quad \forall u, \bar{u} \in [\alpha, \beta], \quad \forall v, \bar{v} \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \quad \exists L_{\alpha, \beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \in \mathbb{R}_+^*, \\
 \\
 |K(s, u, v) - K(s, \bar{u}, \bar{v})| \leq L_{\alpha, \beta} |u - \bar{u}| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |v - \bar{v}|.
 \end{array} \right.$$

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que l'équation (3.4.12) admet une unique solution dans  $C^1[0, T]$ .

En effet, dans cette section, on va utiliser une méthode numérique basée sur l'intégration numérique pour approximer la solution de l'équation, cette méthode est appelé *la méthode de Nyström*.

Pour illustrer la méthode proposée, on construit une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ , telle que

$$h = \frac{T}{N}, \quad t_i = ih, \quad 0 \leq i \leq N.$$

On note par  $U_n \approx u(t_n)$  et  $V_n \approx u'(t_n)$ , en appliquant la méthode de Nyström pour l'approximation des intégrales qui apparaissent dans notre équation (3.4.12), en utilisant la formule quadratique sur les équations (3.4.12) et (3.4.13) donnée par,

$$\int_a^b \xi(t) dt \approx h \sum_{i=0}^N w_i \xi(t_i),$$

où,  $w_i$  sont des réels, tel que il existe  $W > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$ .

On obtient le système suivant

$$U_0 = f(0), \quad (3.4.14)$$

$$V_0 = f'(0), \quad (3.4.15)$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t_n - t_i)K(t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.4.16)$$

$$V_n = f'(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.4.17)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (3.4.14)-(3.4.17), on a besoin du lemme suivant

**Lemme 3.4.1.** *On considère le système (3.4.14)-(3.4.17).*

*Pour  $N \in \mathbb{N}^*$  fixé,  $\exists \alpha_1, \beta_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1 \in \mathbb{R}$ , pour tout  $0 \leq n \leq N$  on a*

$$\alpha_1 \leq U_n \leq \beta_1, \quad (3.4.18)$$

$$\bar{\alpha}_1 \leq V_n \leq \bar{\beta}_1, \quad (3.4.19)$$

*où  $\alpha_1, \beta_1, \bar{\alpha}_1$  et  $\bar{\beta}_1$  sont indépendant de  $N$ .*

*Démonstration.* Pour  $1 \leq n \leq N$ , on a

$$U_n = h \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t_n - t_i)K(t_i, U_i, V_i) + f(t_n).$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |U_n - f(t_n)| &= \left| h \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t_n - t_i) K(t_i, U_i, V_i) \right|, \\ &\leq h \sum_{i=0}^{n-1} w_i(t_n - t_i) |K(t_i, U_i, V_i)|, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse 3. de (H), on trouve

$$|U_n - f(t_n)| \leq T^2WM,$$

d'où

$$f(t_n) - T^2WM \leq U_n \leq T^2WM + f(t_n),$$

de l'hypothèse 2. de (H), on a

$$\alpha \leq f(t_n) \leq \beta,$$

alors

$$\alpha - T^2WM \leq U_n \leq T^2WM + \beta,$$

d'où

$$\alpha_1 \leq U_n \leq \beta_1,$$

d'autre part on a

$$V_n = h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i) + f'(t_n),$$

calculons

$$\begin{aligned} |V_n - f'(t_n)| &= \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i) \right|, \\ &\leq h \sum_{i=0}^n w_i |K(t_i, U_i, V_i)|, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse 3. de (H), on trouve

$$|V_n - f'(t_n)| \leq TWM,$$

d'où

$$f'(t_n) - TWM \leq V_n \leq TWM + f'(t_n),$$

mais

$$\bar{\alpha} \leq f'(t_n) \leq \bar{\beta},$$

alors

$$\bar{\alpha} - TWM \leq V_n \leq TWM + \bar{\beta},$$

enfin

$$\bar{\alpha}_1 \leq V_n \leq \bar{\beta}_1,$$

par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1 \leq U_0 &= f(t_0) \leq \beta_1, \\ \bar{\alpha}_1 \leq V_0 &= f'(t_0) \leq \bar{\beta}_1. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution du système (3.4.14)-(3.4.17), sous les propriétés (H)

**Théorème 3.4.1.** *Sous les propriétés (H), et pour  $h$  suffisamment petit, le système (3.4.14)-(3.4.17) avec les conditions (3.4.18) et (3.4.19) dans le lemme 3.4.1, admet une unique solution.*

*Démonstration.* L'existence de la solution de l'équation (3.4.16) est assurée par la formule de recurence. Par conséquent, il suffit de résoudre l'équation (3.4.17)

Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ , on définit

$$\begin{aligned} \psi_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \psi_n(X) \end{aligned}$$

tel que

$$\psi_n(X) = f'(t_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_i, U_i, V_i) + h w_n K(t_n, U_n, X).$$

Pour tout  $X, Y \in \mathbb{R}$ , on a

$$|\psi_n(X) - \psi_n(Y)| = |h w_n K(t_n, U_n, X) - h w_n K(t_n, U_n, Y)|,$$

D'après la condition de lipschitz mentionnée dans l'hypothèse 4. de (H) et le lemme 3.4.1, on trouve

$$|\psi_n(X) - \psi_n(Y)| \leq h W \bar{L}_{\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1} |X - Y|.$$

$\psi_n$  est contractante pour  $h$  suffisamment petite, en utilisant le théorème de Banach, on obtient le résultat. □

### Etude de l'erreur

Dans cette section, nous montrerons que la méthode numérique construite dans la section précédente converge vers la solution exacte de l'équation.

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on définit,

$$\varepsilon_n = |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \quad n \geq 0.$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \varepsilon_n) = 0.$$

nous définissons l'erreur de consistance par,

$$\begin{aligned} \delta(h, t_n) &= \left| \int_0^{t_n} (t_n - s)K(s, u(s), u'(s))ds - h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i)w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| + \\ &+ \left| \int_0^{t_n} K(s, u(s), u'(s))ds - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|. \end{aligned}$$

On dit que la méthode d'approximation du système (3.4.14)-(3.4.17) est consistente avec l'équation (1.3.16), si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \delta(h, t_n)) = 0.$$

Le théorème suivant montre la convergence de notre méthode numérique construite.

**Théorème 3.4.2.** *Si la méthode d'approximation du système (3.4.14)-(3.4.17) est consistente avec l'équation (1.3.16), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \varepsilon_n) = 0$$

*Démonstration.* pour  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &= |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \\
 &= \left| h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, U_i, V_i) - \int_0^{t_n} (t_n - s) K(s, u(s), u'(s)) ds \right| + \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i) - \int_0^{t_n} K(s, u(s), u'(s)) ds \right|,
 \end{aligned}$$

ainsi, en ajoutant et retranchant dans cette égalité les termes

$$h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)),$$

et

$$h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &= \left| h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_0^{t_n} (t_n - s) K(s, u(s), u'(s)) ds \right. \\
 &+ \left. h \sum_{i=1}^n (t_n - t_i) w_i K(t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| \\
 &+ \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_0^{t_n} K(s, u(s), u'(s)) ds \right. \\
 &+ \left. h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|,
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \leq & \left| h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_0^{t_n} (t_n - s) K(s, u(s), u'(s)) ds \right| + \\
 & + \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_0^{t_n} K(s, u(s), u'(s)) ds \right| + \\
 & + \left| h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| + \\
 & + \left| h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|,
 \end{aligned}$$

on se referant à la définition de  $\delta(h, t_n)$  et à l'aide des hypothèses (H), on obtient

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \leq & \delta(h, t_n) + hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i) \left[ L_{\alpha, \beta} |U_i - u(t_i)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_i - u'(t_i)| \right] + \\
 & + hW \sum_{i=0}^{n-1} \left[ L_{\alpha, \beta} |U_i - u(t_i)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_i - u'(t_i)| \right] + hW \left[ L_{\alpha, \beta} |U_n - u(t_n)| + \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_n - u'(t_n)| \right].
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \leq & \delta(h, t_n) + hW L_{\alpha, \beta} |U_n - u(t_n)| + hW \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_n - u'(t_n)| \\
 & + hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i + 1) L_{\alpha, \beta} |U_i - u(t_i)| + hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i + 1) \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_i - u'(t_i)|.
 \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \leq & \delta(h, t_n) + hW L_{\alpha, \beta} |U_n - u(t_n)| + hW \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_n - u'(t_n)| \\
 & + hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i + 1) L_{\alpha, \beta} |U_i - u(t_i)| + hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i + 1) \bar{L}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} |V_i - u'(t_i)|.
 \end{aligned}$$

Cependant pour  $h$  assez petite, on a

$$\kappa = \min((1 - hW L_{\alpha,\beta}), (1 - hW \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})) > 0,$$

donc

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{\kappa} \delta(h, t_n) + \frac{1}{\kappa} hW \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_i + 1) (L_{\alpha,\beta} |U_i - u(t_i)| + \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} |V_i - u'(t_i)|),$$

ce qui s'écrit encore

$$\varepsilon_n \leq \frac{hW \max((t_n - t_i + 1) L_{\alpha,\beta}, (t_n - t_i + 1) \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{\kappa} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{1}{\kappa} \delta(h, t_n).$$

de manière analogue au théorème 7.1 dans [20], on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \frac{1}{\kappa} \left( 1 + \frac{hW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{\kappa} \right)^{n-1} \times \\ &\times \left( \max_{1 \leq i \leq n} \delta(h, t_i) + hW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) \varepsilon_0 \right), \end{aligned}$$

d'autre part

$$\left( 1 + \frac{hW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{\kappa} \right)^{n-1} \leq \left( 1 + \frac{TW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{N\kappa} \right)^N,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{TW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{N\kappa} \right)^N < +\infty.$$

Alors,  $\exists \theta > 0$  tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}; \quad \max \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{hW(t_n - t_i + 1) \max(L_{\alpha,\beta}, \bar{L}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})}{\alpha} \right)^{n-1} \leq \theta.$$

le résultat est obtenu. □

## Résultats numériques

---

### Sommaire

---

<b>4.1 introduction</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>4.2 Les paramètres physiques intervenant dans l'équation découlant du modèle de tremblement de terre.</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>4.3 Tests numériques</b> . . . . .	<b>72</b>

---

### 4.1 introduction

Le tremblement de terre est un phénomène à ondes progressives qui arrive à la base de la terre à travers le rocher de fondation. Comme la fondation n'est pas rigide, une partie de l'énergie qui fait vibrer la terre est perdue à travers la fondation, ce qui provoque un amortissement des radiations. La solution analytique et numérique à un tel problème n'est pas encore facile à obtenir. Cependant, il est souvent nécessaire de disposer des solutions approximatives, permettant de comprendre le comportement du tremblements de terre. Ainsi, dans cet étude, des approximations sont effectuées pour montrer l'efficacité de notre modèle mathématique.

Dans ce chapitre, nous étudions une approche numérique du modèle sismique dans une dimension. Dans une situation réelle, le problème sismique est de nature tridimensionnelle. Cependant, vue la complexité du phénomène, nous allons étudier le problème en le considérant en une seule dimension. Les résultats obtenus dans cette section doivent être considérés comme préliminaires pour obtenir une information préalable sur le problème réel.

## 4.2 Les paramètres physiques intervenant dans l'équation découlant du modèle de tremblement de terre.

Nous rappelons l'équation qui modélise le phénomène de tremblement de terre, développée dans le chapitre 1 à savoir

$$u(t) = \int_0^t (t-s) \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (4.2.1)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds - R + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (t-s) (F(s) - R) ds.$$

Sa dérivée donnée par

$$u'(t) = \int_0^t \left( -\varrho \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) u(s) - \frac{\varrho}{2M} \delta_\xi \left( -\frac{1}{\varrho} u'(s) + \right. \right. \quad (4.2.2)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{m} \int_0^s (F(\alpha) - R - u(\alpha)) d\alpha \right) (|u(s)| - u(s)) \right) ds + \frac{\varrho}{m} \int_0^t (F(s) - R) ds.$$

Cette dernière est due à notre considération du modèle d'oscillateur à masse couplée composé de deux masses reliées entre elles par un ressort de longueur  $L$ .

où les paramètres intervenant dans les équations (4.2.1) et (4.2.2) sont

$M$  : la grande masse,

$m$  : la petite masse,  
 $F$  : la force appliquée sur la masse  $m$ ,  
 $R$  : la résistance de la masse  $M$ ,  
 $x(t)$  : le déplacement de la masse  $M$  par rapport à sa position d'équilibre,  
 $y(t)$  : est le déplacement correspondant pour la masse  $m$  qui a une force  $F$  agissant sur son côté droit ,  
 $T$  : est la tension du ressort,  
 $\varrho$  : est la constante de rigidité,  
 $l(t)$  : la variation de la longueur entre les deux masses à un instant  $t$  tel que

$$T(t) = \varrho l(t),$$

et

$$l(t) = (y(t) - x(t)) - L.$$

$x'(t)$  : la vitesse du masse  $M$  ,

$y'(t)$  : la vitesse du masse  $m$ .

la fonction sismique  $u$  est donné par

$$u(\tau) = \varrho l(\tau) - R.$$

Notre étude consiste à résoudre un problème assez compliqué et à prouver que les résultats numériques sont assez efficace et performantes. Pour montrer cette efficacité et la précision de la méthode proposée dans notre travail, et pour illustrer la performance de l'approximation du modèle mécanique engendrée par l'équation intégrale différentielle non-linéaire de volterra, nous allons établir les résultats par une simulation expérimentale de phénomène de séisme, en utilisant la méthode de l'approximation de Nyström appliquée dans le chapitre précédent.

Pour effectuer le calcul, nous devons clarifier certains paramètres qui interviennent dans notre équation (4.2.1), en effet les paramètres physiques  $\rho, m, M, R$  et  $F$  sont

$$\rho = 10N.m^{-1}, \quad m = 10g, \quad M = 50000g$$

et

$$R = 2N, \quad F = 3N$$

où  $t \in [0, 50]$  avec une discrétisation  $N = 1000$

Nous choisissons  $\{w_i\}_{0 \leq i \leq N}$  selon la règle trapézoïdale, ainsi pour  $1 \leq i \leq N - 1$ , on pose

$$w_i = 1,$$

et

$$w_0 = w_N = \frac{1}{2}.$$

Pour  $1 \leq n \leq N$ ,  $U_n$  est calculé directement à partir des termes précédents, mais  $V_n$  est approché en utilisant une suite de point fixe de Banach, avec la condition d'arrêt de la forme

$$|X_{old} - X_{new}| \leq 10^{-7}.$$

### 4.3 Tests numériques

les résultats de calculs numériques pour ces valeurs sont illustrés dans les figures Fig.4.1, Fig.4.2 et Fig.4.3

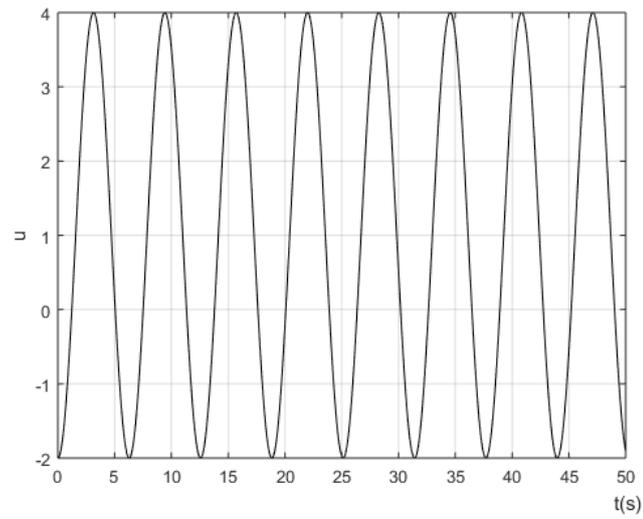


FIGURE 4.1 – La fonction sismique

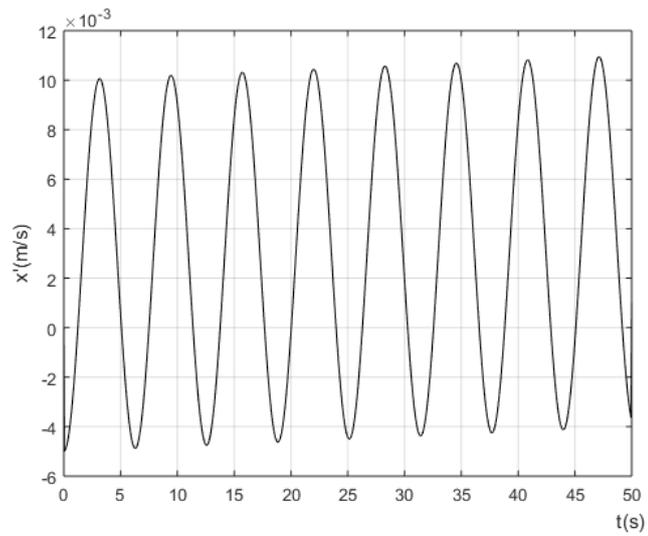


FIGURE 4.2 – La vitesse de la masse M

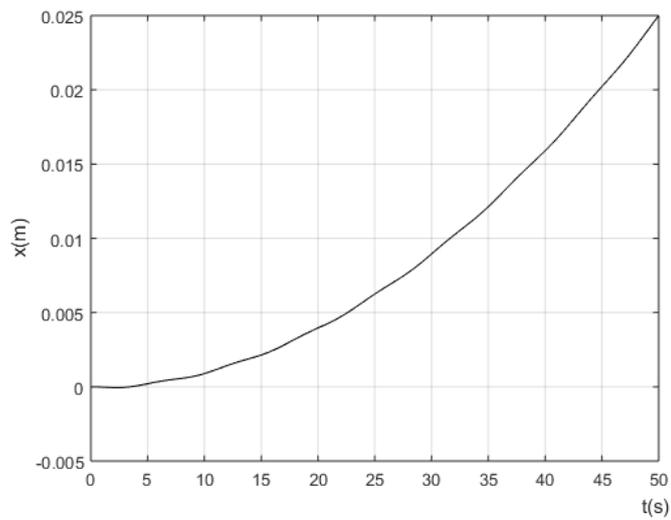


FIGURE 4.3 – La position de la masse M

Les résultats présentés dans ces graphiques sont compatibles avec le mécanisme de la machine à tremblement de terre et ils montrent l'efficacité de notre procédure et la bonne vision pour la modélisation de ce phénomène, comme le prouve les commentaires en dessous

Ainsi, à partir de différentes valeurs de paramètres que nous avons mises, on peut voir que la vitesse  $x'(t)$  peut prendre des valeurs négatives à certains moments. Cette dernière est due à l'approche théorique consistant à remplacer la fonction  $\delta$  par une autre fonction plus lisse  $\delta_\xi$  définie dans (1.3.13) par

$$\delta_\xi(\tau) = \begin{cases} (1 - (\frac{\tau}{\xi})^2)^2, & \text{si } \tau \in [-\xi, \xi], \\ 0, & \text{si } \tau \in ]-\infty, -\xi[ \cup ]\xi, +\infty[. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

En outre, à la propagation d'erreur de l'approximation numérique en utilisant la méthode de Nyström .

À ce stade, le lecteur peut poser la question suivante : que se passe-t-il lorsque  $\xi$  se rapproche des zéros ? La réponse est «aucune influence !», Car les courbes de  $u$ ,  $x$  et  $x'$  conservent la même forme si nous remplaçons  $\delta_\xi$  par  $\delta$  dans notre programme, ce qui est apparait dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3. Ainsi, la fonction  $\delta_\xi$  n'a aucun effet contribuant numériquement et elle n'a servi que pour l'étude théorique de notre problème.

Étant donné que l'équation étudiée reste bien construite et admet une solution unique, bien que théoriquement nous ne puissions pas traiter le cas  $\xi = 0$ . en utilisant la méthode successive de Picard, la méthode numérique est également convergente dans ce cas. En espérant d'explorer une autre approche analytique et numérique pour étudier notre équation lorsque  $\xi = 0$ .

Lors de son déplacement, et en se referant à l'expérience , on constate que la masse  $M$  effectuer des sauts en cours du temps, comme indiqué dans la figure 4.3. Ces sauts reflètent les valeurs de vitesse nulles enregistrées dans nos résultats, ce qui apprécie notre bonne vision de l'approximation du phénomène physique.

Le tableau suivant montre que chaque fois que la discrétisation  $N$  augmente, le minimum de la vitesse converge vers 0.

N	min(v)(m/s)
250	-0.0198
500	-0.0099
750	-0.0066
1000	-0.0050
1250	-0.0040
1500	-0.0033
1750	-0.0029
2000	-0.0025

TABLE 4.1 – Comparaison des différentes valeurs de vitesse selon  $N$ .

on constate au niveau du tableau 4.1, que les vitesses proches de zéro qui ont considérées comme nulles expliquent les sauts de la masse  $M$  qu'on a cité auparavant.

---

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Le travail présenté dans cette thèse s'est porté sur la résolution d'une équation intégrale différentielle non linéaire de Volterra, découlante de la construction d'un nouveau type de modélisation du phénomène de séisme.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit une étude du mouvement des plaques tectoniques, qui est le moteur principal du mécanisme sismique, nous avons représenté le mouvement de cette dernière à travers un modèle mécanique, en utilisant des fonctions mathématiques et des lois physiques usuelles, et tout en gardant les aspects fondamentaux de notre phénomène. Ce qui nous a conduit finalement à l'étude d'une équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra. La seconde partie, qui est traitée dans le deuxième chapitre de cette thèse, elle consiste à l'application des résultats du premier chapitre à savoir l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, en utilisant la méthode de Picard. En outre, dans le troisième chapitre nous avons utilisé une méthode numérique "méthode de Nyström" basée sur l'intégration numérique pour approximer la solution de l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra découlante du modèle de tremblement de terre. Les tests numériques développés dans le quatrième chapitre montrent l'efficacité de la méthode et la consistance de notre modèle.

De point de vue d'application, nous avons réussi à étudier le modèle physique où la résistance est constante. Nous pouvons donc croire que nos résultats ouvrent une voie vers l'étude du cas où la résistance n'est pas constante. Cette situation est assez naturelle re-

présente des nouveaux défis mathématiques. Cependant, on espère d'obtenir des résultats réalistes et convaincantes.

Les principaux résultats de cet étude ne sont pas nécessairement parfaits au sens strict du terme. mais les nouvelles techniques développées dans notre travail nous semble assez efficaces. Nous pouvons donc espérer qu'elles fournissent des subventions utiles pour les futurs recherches sur la modélisation et l'étude de ce type de phénomène.

---

## Bibliographie

---

- [1] Alford. R. M, Kelly. K. R et Boore. D. M, *Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation* , Geophysics. 39 (1974), p. 834-842.
- [2] Alterman. Z et Karal. F. C, *Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods*, Bull. Seism. Soc. Am. 58 (1968), p. 367-398.
- [3] Atkinson. A and Han. W, *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework* ( Springer-Verlag, New York, 2001).
- [4] Balandier. P, *Élément de sismologie appliqué à la construction à l'usage de Techniciens du bâtiment*, Volume1, Juillet 2001.
- [5] Becache. E, *A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack* , Int. J. for Numerical Meth. in Eng. 36(6) (1993), p. 969-984.
- [6] Benjemaa. M, *Etude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus* , Université Nice Sophia Antipolis, (2007)
- [7] Biazar. J, Eslami. M, *Differential transform method for systems of Volterra integral equations of the second kind and comparison with homotopy perturbation method*, Int. J. Phys. Sci. 6 (2011) 1207-1212.

- [8] Boulhaia. O, *Développement d'une méthode numérique apte à simuler efficacement la propagation d'une rupture sismique de type « pulse »*, Université FERHAT ABBAS-SÉTIF
- [9] Brunner. H, *The numerical treatment of Volterra integro-differential equations with unbounded delay*, J. Comput. Appl. Math. **28** (1989) 5–23.
- [10] Burridge. R et Willis. J. R, *The self similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid*, Proc. Camb. Phil. Soc. 66 (1969), p. 443-468.
- [11] Corduneanu. C, *Integral Equations and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [12] Day. S, Dalguer. L. A, Lapusta. N et Liu. Y, *Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture*, J. Geophys. Res. 110 (2005), p. B12307.
- [13] Ghiat. M and Guebbai. H, *Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation with weakly singular kernel*, Com. Appl. Math, Doi : <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0597-3> (2018)
- [14] Guebbai. H, Aissaoui. M. Z, Debbar. I and Khalla. B, *Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation*, Applied Mathematics and Computation **229**(2014) 367–373.
- [15] Komatitsch. D et Vilotte. J. P, *The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures*, Bull. Seism. Soc. Am. 88 (1998), p. 368-392.
- [16] Kostrov. B. V, *Self similar problems of propagation of shear cracks* J. Appl. Math. Mech. (PMM) 30 (1964), p. 1241-1248.
- [17] Kostrov. B. V, *Unsteady propagation of longitudinal shear cracks*, J. Appl. Math. Mech (PMM) 30 (1966), p. 1042-1049.

- 
- [18] Lakshmikanthan. V and Rama Mohana Rao. V, *Theory of Integro-differential Equations*, Gordon and Breach Science Publishers, Volume 1 1995.
- [19] Leise. T. L et Walton. J. R, *An analytical and numerical study of a dynamically accelerating semi-infinite crack in a linear viscoelastic material*, *Int. J. Frac.* 127(2) (2004), p. 101-117.
- [20] Linz. P, *Analytical and numerical methods for Volterra equations* (SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985).
- [21] Nagle. R. K, Saff. E. B and Snider. A. D, *Fundamentals of Differential Equations* (Pearson international edition, 2008)
- [22] Nielsen. S et Madariaga. R, *On the self-healing fracture mode* , *Bull. Seism. Soc. Am.* 93 (2003), p. 2375-2388.
- [23] Piaggio. H. T. H, *An Elementary Treatise on Differential Equations and their Applications*, G. Bell and Sons, Ltd. : London, 1920.
- [24] Pichon. X, Francheteau. J and Bonnin. J , *Plate Tectonics* (Elsevier Scientific Publishing Company Amsterdam, London, New York, 1973)
- [25] Rahman. M, *Applied Differential Equations for Scientists and Engineers, Vol. 1 : Ordinary Differential Equations*, WIT Press : Southampton, 1994.
- [26] Rahman. M, *Integral Equations and their Applications*, WIT Press : Southampton, Boston, Dalhousie University, Canada 2007.
- [27] Renard. Y, *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction*, *Siam J. Math. Anal.* 38(2) (2006), p. 452-467.
- [28] Richards. P. G, *Dynamic motions near an earthquake fault : a three dimensional solution* , *Bull. Seism. Soc. Am.* 66 (1976), p. 1-32.

- [29] Richards. P. G, *The dynamic field of a growing plane elliptical shear crack* , Int. J. Solid. Structures 9 (1973), p. 843-861.
- [30] Richardson. S, Integral equations. The Mathematica Journal 9. 2, Wolfram Media, Inc, 460-482 (2004)
- [31] Salah. S, Guebbai. H, Lemita. S and Aissaoui. M. Z, *Solution of an Integro-differential Nonlinear Equation of Volterra Arising of Earthquake Model* Bol. Soc. Paran. Mat, Doi : 10.5269/bspm.48018 (2019)
- [32] Segni. S, Ghiat. M and Guebbai. H, *New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 1, 1950016 Doi :10.1142/S1793557119500165 (2019)
- [33] Tokui. S, *Sur L'équation Intégrale non Linéaire de Volterra*, Compositio Mathematica. tome 11 (1953) 271–290.
- [34] Tricomi. F. G, Integral Equations. Wiley-InterScience, New York 1957.
- [35] Williams. G. D, Tectonics and seismic sequence stratigraphy : an introduction, *Tectonics and Seismic Sequence Stratigraphy. Geological Society Special Publication* No. 71 (1993) 1–13.
- [36] Wylie. C. R, Barrett. L. C, Advanced Engineering Mathematics, McGraw- Hill : NewYork, 1982.
- [37] Zhang. J, *Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach* , Geophysics 70 (2005), p. 75-85.