

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département Génie Mécanique

# THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Génie Mécanique

Présentée par

**FISLI Youcef**

*Intitulée*

**Analyse du comportement dynamique des dalles  
de roulement des ponts routiers sous la  
sollicitation des camions**

Soutenue le : 19/11/2020

Devant le Jury composé de :

Abdelkrim HADDAD	Professeur	Université de Guelma	Président
Salah GUENFOUD	Professeur	Université de Guelma	Rapporteur
Mohamed Nadhir AMRANE	Professeur	Université de Biskra	Examineur
Ridha KELAIAIA	M C A	Université de Skikda	Examineur
Abdelouahab REZAIGUIA	M C A	Université de Guelma	Invité

**Année Universitaire : 2020**

## **Remerciements**

*Tout d'abord, je remercie Allah qui m'a donné la puissance, le courage et la détermination nécessaire pour finaliser ce travail de thèse.*

*Je tiens à remercier Pr. Salah GUENFOUD d'avoir accepté d'être mon encadreur et qui m'a donné la possibilité d'élaborer ce mémoire dans le domaine de la dynamique des structures sous chargement mobile.*

*Je tiens à exprimer à Dr. Abdelouahab REZAIGUIA, toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son bureau et de m'avoir permis de mener à bien cette étude. Je le remercie vivement pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que pour les conseils utiles et le soutien qu'il m'a apporté tout au long de cette étude. Grâce à son expérience, cette étude m'a apporté beaucoup de savoir.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements à Pr. Abdelkrim HADDAD, qui malgré ses multiples occupations a accepté d'examiner ce travail et de présider le Jury de cette thèse.*

*Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance au Pr. Mohamed Nadhir AMRANE et Dr. Ridha KELAIAIA pour avoir accepté d'être examinateurs de cette étude. Je les remercie également de faire partie du jury de cette thèse.*

*Je tiens également à remercier très sincèrement ma mère, mon père, ma femme, mes frères et ma sœur, qui m'ont beaucoup soutenu durant la réalisation de cette thèse.*

*Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

## Résumé

L'objectif de ce travail, est de développer un modèle numérique de simulation du comportement dynamique d'une dalle de roulement d'un pont routier lors de passage d'un camion. C'est un complément approfondi du travail réalisé pendant la préparation du diplôme de magister, par le développement de nouveaux modèles de camion tridimensionnels à essieux tandem en conservant le modèle de la dalle de roulement et du profil de la chaussée. Un grand effort est fourni pour l'élaboration de plusieurs programmes numériques en langage FORTRAN est implantations des modèles de camions ainsi développés dans les programmes conçus.

Dans cette étude, la dalle de roulement est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées à supports rigides. Le profil de la chaussée est modélisé par un processus aléatoire stationnaire gaussien de moyenne nulle. Le camion est modélisé par deux modèles dynamiques discrets tridimensionnels à essieux tandem.

La méthode modale est utilisée pour résoudre l'équation du mouvement de la dalle de roulement en bénéficiant des propriétés d'orthogonalité des modes propres pour obtenir un système d'équations modales découplées. Les équations du mouvement des modèles de camion sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels en dynamique. Les équations du mouvement couplées dalle/camion sont intégrées numériquement par la méthode de Newmark. Un processus de calcul itératif qui cherche l'équilibre dynamique entre la dalle et le véhicule à chaque pas du temps est utilisé.

Sur la base des développements mathématiques et numériques présentés dans les chapitres deux, trois et quatre, nous avons élaboré deux principaux programmes en langage FORTRAN. Des résultats concernant les fréquences et les modes propres de trois cas des dalles de roulement, sont présentés et

comparés avec le code de calcul ANSYS. D'autres résultats de plusieurs simulations numériques de passage d'un camion à neuf degrés de liberté sur une dalle de roulement à trois travées sont présentés et interprétés.

**Mots clés :** amplification dynamique, dalle orthotrope, véhicule mobile, essieux tandem, fréquences et modes propres.

## **Abstract**

The objective of this work is to develop a numerical model for simulating the dynamic behavior of a bridge deck during the passage of a truck. It is an in-depth addition to the work carried out during the preparation of the magister degree, by the development of new models of three-dimensional trucks with tandem axles keeping the model of the bridge deck and the road surface. A great effort is made to develop several digital programs in FORTAN language and implementations of the truck models well developed in the designed programs.

In this study, the bridge deck is modeled by a thin multi-span orthotropic plate with rigid supports. The highway profile is modeled by a stationary Gaussian random process with zero mean. The truck is modeled by two discrete dynamic three-dimensional models with tandem axles.

The modal method is used to solve the equation of movement of the bridge deck by taking advantage of the orthogonality properties of the mode shapes to obtain a decoupled system of modal equations. The equations of movement of the truck models are obtained by applying the virtual work principle in dynamic. The coupled equations of motions bridge/truck are numerically integrated by the Newmark method. An iterative calculation process which search the dynamic equilibrium between the slab and the vehicle at each time step is used.

Based on the mathematical and numerical developments presented in previous chapters two, three and four, we have developed two main programs in FORTRAN language. Results concerning the natural frequencies and the modes shapes of three cases of bridge decks are presented and compared with the ANSYS software. Other results from several numerical simulations of the passage of a truck with nine degrees of freedom on a three-span bridge deck are presented and interpreted.

**Keywords:** dynamic amplification, bridge deck orthotropic, moving vehicle, tandem axles, natural frequencies and mode shapes.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطوير نموذج رقمي لمحاكاة السلوك الديناميكي لسطح جسر طريق أثناء مرور شاحنة. هي استكمال للعمل المنجز أثناء إعداد شهادة الماجستير ، من خلال تطوير نماذج جديدة من الشاحنات ثلاثية الأبعاد ذات المحاور الترادفية. مع الاحتفاظ بنموذج سطح الجسر وحالة الطريق. تم بذل جهد كبير لتطوير العديد من البرامج (FORTAN) وتنفيذ نماذج الشاحنات التي تم تطويرها في البرامج المصممة.

في هذه الدراسة، تم تمثيل سطح الجسر بصفيحة رقيقة غير متجانسة ذات دعائم صلبة. تم تمثيل الطريق من خلال عملية عشوائية غوسية ثابتة بمتوسط معدوم. تم تصميم الشاحنة من خلال نموذجين ديناميكين ثلاثي الأبعاد مع محاور ترادفية.

تم استخدام طريقة الأنماط لحل معادلة حركة سطح الجسر و الاستفادة من خصائص تعامد الأنماط للحصول على جملة من المعادلات المنفصلة. تم الحصول على معادلات حركة الشاحنات من خلال تطبيق مبدأ العمل الافتراضي. معادلات الحركة الزوجية جسر / شاحنة يتم مكاملتها رقمياً باستخدام طريقة نيومارك. يتم استخدام عملية حسابية تكرارية تبحث عن التوازن الديناميكي بين سطح الجسر والعربة في كل خطوة زمنية.

اعتماداً على التطورات الرياضية والعديدية المقدمة في الفصل الثاني والثالث والرابع، قمنا بتطوير برنامجين رئيسيين باستخدام برنامج FORTRAN. تم عرض النتائج المتعلقة بالترددات والأنماط لثلاث حالات من سطوح الجسور والتحقق منها باستخدام برنامج ANSYS. يتم عرض وتفسير النتائج الأخرى للعديد من المحاكاة الرقمية لممرور شاحنة ذات تسع درجات حرية على سطح الجسر.

كلمات مفتاح : تضخيم ديناميكي ، جسر غير متجانس ، عربة متنقلة ، محاور ترادفية ، ترددات أنماط و طبيعية.

## Table des matières

Résumé en français.....	i
Résumé en anglais.....	iii
Résumé en arabe.....	iv
Table des matières.....	v
Principales notations et symboles.....	viii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xiii
<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Recherche bibliographique.....</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction.....	3
1.2 Facteur d'amplification dynamique et leur importance .....	3
1.3 Historique des modèles de véhicules .....	6
1.4 Dalles de roulement d'un pont routier.....	8
1.5 Fréquences propres d'un pont .....	10
1.6 Méthodes des éléments finis en interaction dynamique.....	11
1.7 Synthèse bibliographique.....	13
<b>Chapitre 2 : Développement de deux modèles de camion tridimensionnels à essieux tandem.....</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction.....	18
2.2 Hypothèses de modélisation .....	18
2.3 Mise en équations de mouvement des modèles tridimensionnels de véhicule....	19
2.3.1 Modèle de véhicule à 9 degrés de liberté.....	20
2.3.1.1 Schémas du modèle de véhicule.....	20
2.3.1.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces et des moments.....	21
2.3.1.3 Equations du mouvement.....	22
2.3.2 Modèle de véhicule à 11 degrés de liberté .....	24
2.3.2.1 Schémas du modèle de véhicule .....	24
2.3.2.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces et des moments.....	26

2.3.2. 3 Equations du mouvement.....	26
2.4 Conclusion .....	29
<b>Chapitre 3 : Modélisation de la dalle de roulement et du profil de la chaussée..</b>	<b>30</b>
3.1 Introduction.....	30
3.2 Hypothèses de modélisation.....	30
3.3 Equation du mouvement de la dalle de roulement.....	30
3.4 Fréquences et modes propres de la dalle de roulement .....	31
3.4.1 Détermination des paramètres de fréquences propres $k_i$ et des modes propres $\varphi_i(x)$ d'une poutre continue.....	33
3.4.2 Détermination des fréquences propres $\omega_{ij}$ et des fonctions $h_{ij}(y)$ .....	35
3.5 Projection de l'équation du mouvement de la dalle dans la basse modale.....	38
3.6 Modélisation du profil de la chaussée.....	39
3.7 Conclusion.....	41
<b>Chapitre 4 : Résolution numérique des équations couplées dalle de roulement/camion .....</b>	<b>42</b>
4.1 Introduction.....	42
4.2 Méthodes de résolution des équations de mouvement.....	42
4.3 Intégration numérique des équations de mouvement.....	43
4.3.1 Intégration numérique des équations de mouvement du camion.....	43
4.3.2 Intégration numérique des équations de mouvement de la dalle de Roulement.....	44
4.4 Méthodes de résolutions de problèmes d'interaction dynamique.....	44
4.5 Algorithme de résolution.....	47
4.6 Conclusion.....	47
<b>Chapitre 5 : Analyse des réponses dynamiques.....</b>	<b>50</b>
5.1 Introduction.....	50
5.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement multi-travées.....	50
5.3 Calcul des réponses dynamiques.....	59
5.3.1 Influence du mode de chargement.....	61
5.3.2 Influence de la vitesse de roulement.....	64
5.3.3 Influence du profil de la chaussée.....	66



<b>5.3.4</b> Influence de la masse du véhicule.....	70
<b>5.4</b> Conclusion.....	72
<b>Conclusion générale</b> .....	73
<b>Références bibliographiques</b> .....	75
<b>Annexe 1 : Equations du mouvement de différents modèles de véhicules</b> .....	81
<b>Annexe 2 : Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis     simples</b> .....	88
<b>Annexe 3 : Calcul d'une dalle orthotrope équivalente au tablier</b> .....	96

## Principales notations et symboles

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$	Excentricités
$a_{ij}$	Amplitudes modales
$b$	Largeur de la dalles de roulement du pont
$M_{ij}$	Masses modales
$K_{ij}$	Rigidités modales
$C_{ij}$	Amortissements modaux
$F_{ij}$	Forces modales
$c_{pi}$	Amortissement dans le pneu $i$ du véhicule
$c_{si}$	Amortissement dans la suspension $i$ du véhicule
$k_{pi}$	Rigidité dans le pneu $i$ du véhicule
$k_{si}$	Rigidité dans la suspension $i$ du véhicule
$[M_v]$	Matrice de masse du véhicule
$[C_v]$	Matrice d'amortissement du véhicule
$[K_v]$	Matrice de rigidité du véhicule
$D_x, D_y$	Rigidités de flexion du pont selon $x$ et $y$ respectivement
$D_{xy}$	Rigidité de torsion du pont
$E$	Module d'élasticité
$E_x, E_y$	Modules d'élasticité selon $x$ et $y$ respectivement
$\nu, \nu_{xy}, \nu_{yx}$	Coefficients de Poisson
$FAD$	Facteur d'Amplification Dynamique
$G_{xy}$	Module de cisaillement
$\alpha, \beta$	Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark
$\Delta t$	Pas du temps
$\phi_{ij}$	Modes propres de la dalle de roulement du pont
$\varphi_i$	Modes propres du pont selon $x$
$g$	Accélération de la pesanteur
$h$	Epaisseur de la dalle de roulement du pont
$H$	Rigidité équivalente la dalle de roulement du pont
$W$	Travail virtuel
$\varepsilon$	Tolérance de convergence

$m_j$	Masses des roues $i$ avec essieux
$m_v, I_{\theta_v}$	Masse et moment d'inertie du bloc du véhicule respectivement
$m_L, I_{\theta_L}$	Masse et moment d'inertie de la barre pivotante
$\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$	Déplacements relatifs et déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus respectivement
$z_j, \delta z_j$	Déplacements et déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical respectivement
$x_v, \delta x_v, z_v, \delta z_v$	Déplacements et déplacements virtuels du bloc rigide du véhicule selon l'axe horizontal et vertical respectivement
$\theta_v, \delta \theta_v$	Rotation et rotation virtuelle du corps du véhicule respectivement (tangage)
$I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$	Moments d'inertie de tangage et de roulis du bloc rigide du véhicule respectivement
$w$	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont
$w_i$	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont au point de contact $i$
$A_r$	Coefficient de rugosité spectrale
$r_i$	Rugosité du profil statique au point de contact $i$
$\{Z_v\}$	Vecteur des degrés de liberté du véhicule
$\{F_g\}$	Vecteur des forces de pesanteur
$\{F^{int}\}$	Vecteur des forces d'interaction en chaque point de contact $i$
$F_{pk}^{int}$	Force d'interaction entre la $k^{ème}$ roue du véhicule et la dalle de roulement du pont
$\omega_{ij}$	Pulsations propres de la dalle de roulement du pont
$\omega_{sk}$	Nombre d'ondes
$\omega_{s0}$	Fréquence de discontinuité
$\theta_k$	Variable aléatoire
$\Omega_i$	Fréquences de passage
$q_{ij}$	Déplacements généralisés (coordonnées modales)
$k_i$	Paramètre de fréquence
$l$	Longueur du pont

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Types de sections transversales des structures ponts.....	9
<b>Figure 1.2</b> : Facteur d'Amplification Dynamique en fonction de la fréquence propre pour différents pays (Chaallal et Shahawy 1998).....	10
<b>Figure 1.3</b> : Variation de la fréquence propre en fonction de la longueur du travée (Chaallal et Shahawy 1998).....	11
<b>Figure 2.1</b> : Position du centre de gravité du véhicule.....	19
<b>Figure 2.2</b> : Modèle tridimensionnel de véhicule à trois axes avec essieux tandem à 9 DDL.....	21
<b>Figure 2.3</b> : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 9 DDL.....	22
<b>Figure 2.4</b> : Modèle de véhicule tridimensionnel à trois axes avec essieux tandem à 11 DDL.....	25
<b>Figure 2.5</b> : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 11 DDL.....	26
<b>Figure 3.1</b> : Dalle de roulement modélisée par une plaque orthotrope multi-travées ....	31
<b>Figure 3.2</b> : Modèle mathématique de la poutre multi- travées .....	33
<b>Figure 4.1</b> : Différentes procédures pour la résolution des problèmes d'interaction dynamique dalle de roulement/véhicule.....	46
<b>Figure 4.2</b> : Algorithme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule.....	48
<b>Figure 4.3</b> : Organigramme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule..	49
<b>Figure 5.1</b> : Dalle de roulement multi-travées : (a) trois travées, (b) quatre travées, (c) cinq travées.....	53
<b>Figure 5.2</b> : Les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à trois travées obtenus par la présente approche. Modes : (a) 1, $f_1 = 4.129$ Hz; (b) 2, $f_2 = 5.456$ Hz; (c) 3, $f_3 = 6.299$ Hz; (d) 4, $f_4 = 7.588$ Hz.....	56
<b>Figure 5.3</b> : Les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à trois travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1, $f_1 = 4.129$ Hz; (b) 2, $f_2 = 5.446$ Hz; (c) 3, $f_3 = 6.301$ Hz; (d) 4, $f_4 = 7.586$ Hz.....	56
<b>Figure 5.4</b> : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à quatre travées obtenus par la présente approche. Modes: (a) 1, $f_1 = 3.772$ Hz; (b) 2, $f_2 = 5.090$ ; (c) 3, $f_3 = 5.092$ Hz; (d) 4, $f_4 = 6.450$ Hz.....	57

**Figure 5.5** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à quatre travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1,  $f_1 = 3.773$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 5.089$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 5.097$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 6.329$  Hz.....57

**Figure 5.6** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à cinq travées obtenus par la présente approche. Modes: (a) 1,  $f_1 = 3.593$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 4.494$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 4.918$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 5.745$  Hz.....58

**Figure 5.7** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à cinq travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1,  $f_1 = 3.599$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 4.500$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 4.922$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 5.743$  Hz.....58

**Figure 5.8** : Dalle de roulement du pont à trois travées.....59

**Figure 5.9** : Géométrie et masse du camion chargé.....59

**Figure 5.10** : Différentes trajectoires utilisées pour le calcul des réponses dynamiques de la dalle du pont.....61

**Figure 5.11** : Distribution du facteur d'amplification dynamique dans la section transversale de la dalle de roulement, chargement cas 1.....62

**Figure 5.12** : Distribution du facteur d'amplification dynamique dans la section transversale de la dalle de roulement, chargement cas 3.....63

**Figure 5.13** : Influence du mode de chargement sur le déplacement vertical au milieu de la travée 2, raidisseur 3 (milieu de la dalle du pont),  $v_x = 100$  km/h.....64

**Figure 5.14** : Variation du facteur d'amplification dynamique au milieu de raidisseur 1 et 3 de la travée 2 en fonction de la vitesse de roulement du camion, chargement cas 1.....65

**Figure 5.15** : Variation du facteur d'amplification dynamique au milieu de raidisseur 1 et 3 de la travée 2 en fonction de la vitesse de roulement du camion, chargement cas 3.....65

**Figure 5.16** : Influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique du centre de la dalle de roulement du pont, chargement cas 3.....66

**Figure 5.17** : Profil aléatoire de la voie de roulement sous la roue droite de l'essieu avant pour différentes valeurs du coefficient de rugosité  $A_r$ .....67

**Figure 5.18** : Force d'interaction exercée par une roue avant droite du véhicule,  $v_x = 100$  km/h, chargement cas 3.....68

**Figure 5.19** : Force d'interaction exercée par une roue arrière droite du véhicule,  $v_x = 100$  km/h, chargement cas 3 .....69

**Figure 5.20** : Influence de l'état de la voie de roulement sur le facteur d'amplification dynamique au milieu de la dalle du pont pour le chargement cas 3.....70

**Figure 5.21** : Influence de la masse du véhicule sur le déplacement vertical au milieu de la travée 2, raidisseur 3 (centre du pont),  $v_x = 80$  km/h, chargement cas 3.....71

**Figure 5.22** : Influence de la masse du véhicule sur le facteur d'amplification dynamique au milieu de la dalle du pont pour le chargement cas 3.....72

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1.1</b> : Sommaire des travaux relatifs aux charges mobiles.....	7
<b>Tableau 5.1</b> : Paramètres de la dalle de roulement à trois travées.....	51
<b>Tableau 5.2</b> : Paramètres de la dalle de roulement à quatre travées.....	51
<b>Tableau 5.3</b> : Paramètres de la dalle de roulement à cinq travées.....	52
<b>Tableau 5.4</b> : La convergence en fonction de la densité de maillage.....	54
<b>Tableau 5.5</b> : comparaison des fréquences propres des dalles multi-travées orthotropes.....	55
<b>Tableau 5.6</b> : paramètres des modèles de véhicule.....	60
<b>Tableau 5.7</b> : Distribution du facteur d'amplification dynamique sur la dalle du pont....	62
<b>Tableau 5.8</b> : Valeurs expérimentales de $A_r$ , selon l'état de la voie de roulement.....	67

## **Introduction générale**

Lors de l'étude du comportement dynamique des dalles de roulements sous la sollicitation des véhicules mobiles, trois facteurs importants intervenant dans la modélisation que nous devons les tenir en compte à savoir : la dalle de roulement du pont, le véhicule mobile comme une source de vibration à cause de la vitesse et le profil de la chaussée comme interface entre le véhicule mobile et dalle de roulement.

Dans ce contexte, nous proposons d'étudier le comportement dynamique d'une dalle de roulement d'un pont routier multi-travées lors du passage des camions avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicules et des irrégularités du profil de la chaussée. L'étude proposée constitue donc une étape vers une meilleure connaissance du phénomène de l'interaction dynamique entre les poids lourds et les dalles de roulement des ponts routiers.

Cette thèse est présentée sous forme de cinq chapitres. Suite à la revue de littérature exposée dans le **chapitre 1**, les chapitres subséquents présentent les étapes importantes de la recherche. Ces étapes sont la modélisation du système étudié, la méthode de résolution du problème d'interaction pont-véhicule, les résultats obtenus et l'analyse de ces résultats ainsi que la conclusion générale.

Dans le **deuxième chapitre** nous avons développé deux modèles de véhicules **tridimensionnels** à trois axes avec essieux tandem à l'arrière, c'est une extension des deux modèles à deux dimensions déjà développés dans la mémoire de magistère. La différence entre les deux modèles réside dans la configuration des essieux. Ce qui permet d'avoir deux modèles différents, l'un à neuf degrés de liberté et l'autre à onze degrés de liberté. Les équations du mouvement des différents modèles de véhicule sont établies en appliquant le principe des travaux virtuels en dynamique.

Au **troisième chapitre**, nous présentons la résolution de l'équation du mouvement qui régit les vibrations libres et forcés d'une dalle de roulement en utilisant la méthode de superposition modale. Cette dernière est modélisée par une



plaque mince orthotrope multi-travées. Le profil de la chaussée est modélisé par un processus aléatoire stationnaire Gaussien de moyenne nulle.

Dans le **quatrième chapitre**, nous intégrons numériquement les équations de mouvement couplées dalle/véhicule, Les systèmes d'équations différentielles découplés représentant le mouvement de la dalle de roulement et de véhicule, sont résolus par une intégration numérique directe basée sur le schéma implicite de Newmark avec un calcul itératif.

Le **cinquième chapitre** est consacré à l'interprétation des résultats. Nous avons présenté deux parties de résultats. La première partie concerne la comparaison des fréquences et des modes propres des dalles de roulement orthotrope multi-travées. La deuxième partie concerne le calcul et l'analyse de la réponse dynamique d'une dalle de roulement orthotrope à trois travées, sous la sollicitation d'un modèle de véhicule à neuf degrés de liberté. Les fréquences et les modes propres de la dalle de roulement du pont sont calculés par l'approche modale et le logiciel des éléments finis ANSYS. Une analyse paramétrique est réalisée sur le Facteur d'Amplification Dynamique en fonction du mode de chargement, de la vitesse de roulement et du profil de la chaussée ainsi que la masse du véhicule.

Une conclusion générale qui résume les résultats de cette étude est présentée à la fin de cette thèse.

# Chapitre 1

## Recherche bibliographique

### 1.1 Introduction

Le phénomène de l'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile est très complexe dans la réalité car plusieurs facteurs entre en jeu. Les facteurs les plus importants intervenant dans cette interaction dynamique sont : la dalle de roulement du pont, le véhicule comme source d'excitation à cause de la vitesse de roulement et le profil de la chaussée comme interface entre le véhicule et la dalle de roulement du pont. Ce dernier perturbe le mouvement vertical du véhicule et de la dalle de roulement en augmentant sensiblement les forces d'interaction et le facteur d'amplification dynamique.

### 1.2 Facteur d'amplification dynamique et leur importance

Le Facteur d'Amplification Dynamique (FAD) est un paramètre très important dans l'analyse et la conception des dalles de roulement des ponts routiers. C'est une valeur qui majore les effets statiques d'une dalle de roulement causés par la charge statique d'un véhicule mobile, pour tenir compte des effets dynamiques provoqués par le passage de ce même véhicule. Cette définition est quelque peu différente selon les auteurs et les pays. L'Amplification Dynamique (AD) résultant du passage d'un véhicule sur une dalle de roulement est donnée par :

$$AD = \frac{R_{dyn} - R_{sta}}{R_{sta}} \quad (1.1)$$

Où  $R_{dyn}$  est la réponse dynamique maximale (déplacement, effort tranchant, moment fléchissant, ...),  $R_{sta}$  est la réponse statique maximale.

Le facteur  $1+AD$  représente le FAD qui est le rapport entre la réponse dynamique sur la réponse statique :

$$FAD = \frac{R_{dyn}}{R_{sta}} \quad (1.2)$$

La notion du facteur d'Impact ou d'incrément dynamique exprimé en pour-cent est également utilisée dans la littérature :

$$I(\%) = \left( \frac{R_{dyn}}{R_{sta}} - 1 \right) \times 100\% \quad (1.3)$$

Lors de la conception et l'analyse des ponts, on tient compte de l'amplification dynamique en établissant une action statique équivalente qui est calculée à partir FAD. Ce dernier est fonction d'abaques ou de formules empiriques simples basées sur la longueur et les fréquences naturelles de vibration du pont. Plusieurs études ont démontré que le FAD empirique considéré n'est pas toujours représentatif de la réalité et qu'il sous-évalué, dans plusieurs cas, le FAD réel tiré d'une analyse dynamique rigoureuse. Dans le contexte de la conception d'un nouveau pont où les caractéristiques dynamiques ne sont pas connues a priori, il est correct d'adopter des FAD spécifiés par les normes car ils sont simples à estimer. Cependant, dans le contexte de l'évaluation d'un pont existant, il est important d'accorder plus d'effort afin d'estimer le ou les FAD les plus réalistes parce que ce facteur peut atteindre des valeurs relativement importantes (typiquement de 20 à 50% de la charge statique de conception actuelle). Ce facteur est donc déterminant dans la prise de décision de nature économique d'un ingénieur. En effet, la valeur de ce facteur peut faire la différence entre un renforcement ou non d'un pont ou encore entre un renforcement et son remplacement. L'importance du FAD dans le calcul des sollicitations d'un pont est résumée dans les points suivants :

- Présenter les effets dynamiques dans les dalles de roulement qui sont provoqués par le passage des véhicules. Ces effets sont déterminés par rapport à une référence statique,
- Déterminer la sensibilité des dalles de roulement aux sollicitations dynamiques provoquées par le trafic routier,
- Définir les endroits jugés important sur les dalles de roulement selon un chargement donné.

- Déterminer quelles sont les types des dalles de roulement les plus sensibles aux sollicitations dynamiques.

Les effets dynamiques importants dus aux charges du trafic mobiles ne peuvent être négligés ni lors de l'évaluation des ponts existants ni lors de la conception d'un nouveau pont. Le facteur d'impact (appelé tolérance dynamique) est couramment utilisé pour tenir compte des effets dynamiques des charges des roues sur les ponts. Ce facteur unique comprend des phénomènes physiques et mécaniques complexes impliquant les caractéristiques du pont et du véhicule. Diverses spécifications de conception de ponts sont utilisées dans le monde, ce qui donne des facteurs radicalement différents (Paultre et Chaallal 1992).

Dans le code AASHTO 1989 (American Association of State Highway and Transportation) spécifique pour les ponts routiers, le facteur d'impact est exprimé comme l'augmentation de la réponse statique de la charge des roues et est déterminé par la formule suivante:

$$I = \frac{50}{L + 125} \quad (1.4)$$

Où,  $I$  est le facteur d'impact qui n'est pas supérieur à 0.3,  $L$  est la longueur de la travée chargée pour produire la contrainte maximale dans l'élément.

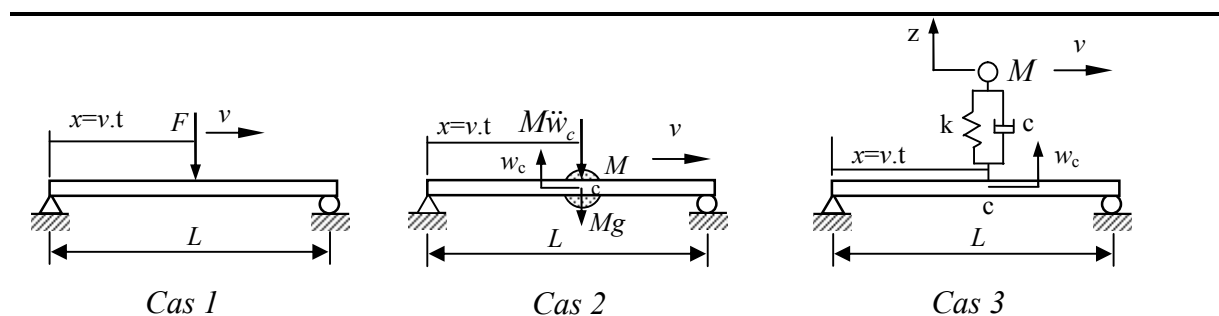
Dans d'autres codes, comme le code de conception du pont de l'Ontario (OHBDC 1983), la norme Suisse (SIA 160 1989), la norme britannique (BS 5400 1978), et la norme canadienne (CAN/CSA-S6 1988), le facteur d'impact est défini en fonction de la première fréquence de flexion du pont (figure 1.1).

De nombreux codes de conception de ponts, y compris AASHTO, sont basés sur la circulation des véhicules d'environ 40 ans. Pendant cette période, la fréquence de passage du trafic a considérablement augmenté et les configurations des véhicules ont également changé. Par exemple, certains ingénieurs de ponts se demandent si l'équation (1.4) peut être utilisée pour des ponts soumis à des véhicules surdimensionnés et en surpoids tels que des grues. Certains chercheurs ont suggéré des révisions nécessaires pour les codes de conception des ponts.

### **1.3 Historique des modèles de véhicules**

Depuis environ un siècle, plusieurs recherches ont été menées pour étudier la dynamique des ponts et pour modéliser, d'une façon réaliste, la force d'interaction pont-véhicule. Les premières recherches se sont concentrées sur le développement de solutions analytiques pour des cas simples de forces mobiles. Plus tard, le développement rapide de l'informatique a permis aux chercheurs d'atteindre un nouveau niveau de précision sur la modélisation de la force d'interaction. Ainsi, Biggs et al. (1959) ont modélisé le système dynamique pont-véhicule par une poutre sur appuis simples traversée par un modèle simple de véhicule à un seul degré de liberté. Puis, d'autres modèles de véhicules plus complexes ont été développés, soit des modèles à 2 et 4 degrés de liberté en deux dimensions (Huang 1960, Hutton et Cheung 1979, Veletsos et Huang 1970, Hwang et Nowak 1991), ainsi que des modèles à 7 et 11 degrés de liberté en trois dimensions (Wang et al. 1992, Henchi et al. 1998 et Fafard et al. 1998) (voir tableau 1.1).

**Tableau 1.1** : Sommaire des travaux relatifs aux charges mobiles.



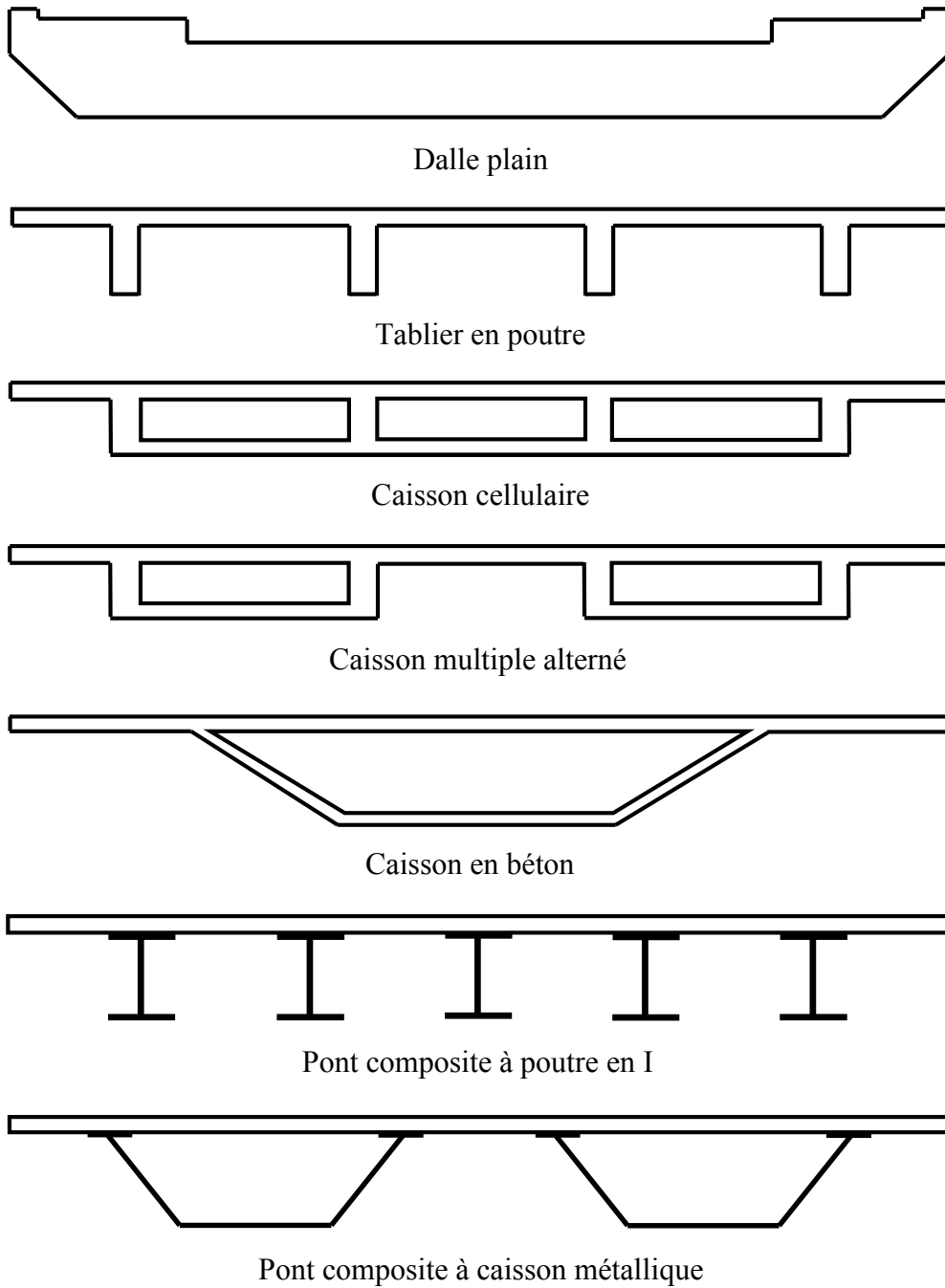
Auteur	Année	Problème étudié
Willis	1849	Cas 2 expérimental
Stokes	1883	Cas 2 expérimental
Krylov	1905	Cas 1
Timoshenko	1908	Cas 1 avec $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$
Inglis	1934	Cas 3
Biggs et al.	1956	Cas 2 expérimental
Fryba	1972	Cas 1 + cas 2 + cas théorique
Résolutions numériques et éléments finis :		
Huang	1960	Cas 3 + véhicules à 2 et 4 D.D.L
Fenves et al	1962	Cas 3 + véhicules à 2 et 4 D.D.L
Veletsos et Huang	1970	Cas 3 + véhicules à 7 D.D.L 1
Ting	1974	Cas 2
Hutton et cheung	1979	Cas 3 + véhicules à 7 D.D.L
Hwang et Nowak	1991	Cas 3 + véhicules à 7 D.D.L + rugosité
Wang et al	1992	Cas 3 + véhicules à 11 D.D.L + rugosité
Chompooming et Yener	1995	Cas 3 + véhicules à 3 et 6 D.D.L
Henchi et al	1998	Cas 3 en 3D + véhicules à 7 D.D.L
Fafard et al	1998	Cas 3 en 3D + véhicules à 11 D.D.L
Dongzhou et al	1998	Cas 3 en 3D + véhicules à 11 D.D.L HS20-44
Broquet et al	2004	Cas 3 en 3D + véhicules à 7 D.D.L
Chul et al	2005	Cas 3 en 3D + véhicules à 7 et 8 D.D.L
Kwasniewski et al	2006	Cas 3 en 3D + véhicule HS20-44
Yin et al	2007	Cas 3 en 3D + véhicules à 20 D.D.L HS20-44
Cai et al	2007	Cas 3 en 3D + véhicules à 11 D.D.L HS20-44
Asnachinda et al	2008	Cas 3 en 2D + véhicules à 4 D.D.L
Wei et al	2013	Cas 3 en 3D + véhicules à 11 D.D.L HS20-44
Javier et al	2013	Cas 3 en 3D + véhicules à 7 D.D.L HS20-44
Arturo et al	2018	Cas 3 en 2D + véhicules à 4 et 9 D.D.L
Maa et al	2019	Cas 3 en 3D + véhicules à 11 D.D.L HS20-44

#### **1.4 Dalles de roulement d'un pont routier**

L'évaluation d'une dalle de roulement d'un pont existant implique une vérification des états limites. Outre la capacité portante, les actions agissant sur la structure doivent être évaluées avec précision afin de considérer toutes les potentialités de la structure. L'action du trafic qui est souvent la plus importante parmi les actions variables, doit être déterminée en considérant son caractère dynamique influencé par le mouvement du véhicule en interaction avec celui du pont. Les vérifications doivent donc être effectuées par une analyse dynamique ou, dans certaines conditions, par une analyse statique dans laquelle les actions dynamiques sont substituées par des charges de remplacement définies par des charges statiques majorées par un Facteur d'Amplification Dynamique.

Traditionnellement, les tabliers des ponts ont été modélisés comme des poutres ou des plaques orthotropes pour résoudre les problèmes dynamiques. Pour les ponts à moyenne et longue portée, la modélisation en poutre est efficace pour représenter le comportement global. Dans les autres situations et pour l'étude des effets dynamiques locaux, un modèle avec des plaques orthotropes représente la flexibilité transversale de manière plus réaliste. Le choix entre des modèles de type "poutre" ou "plaque" est dicté par le modèle de véhicule disponible, en particulier si ce dernier permet ou non de représenter l'effet de roulis.

Le type de la section transversale dépendant de la portée des ponts. Les ponts de courtes portées tels que pont cadre de portée inférieur à 25 m est caractérisé par la section pleine. Les ponts en caisson à hauteur constante bien adaptés pour les travées entre 30 et 70 m. Les différents types de section transversale sont présentés au-dessous (Figure 1.1):



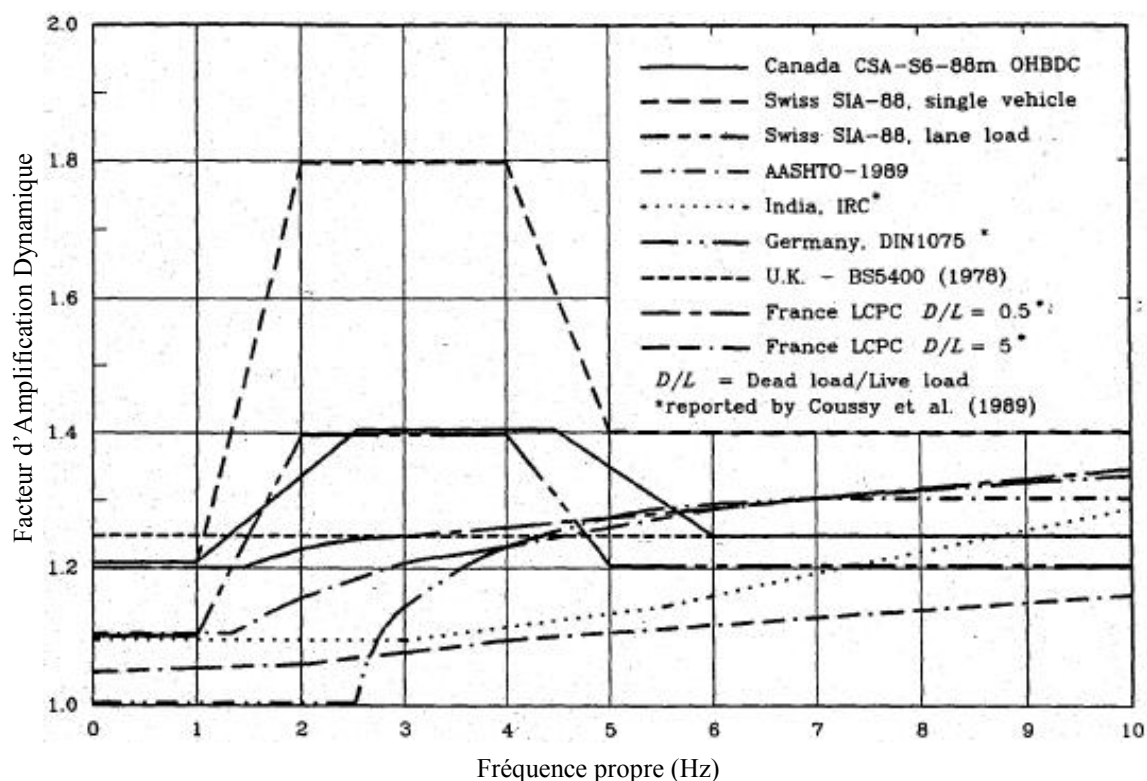
**Figure 1.1** : Types de sections transversales des structures ponts.



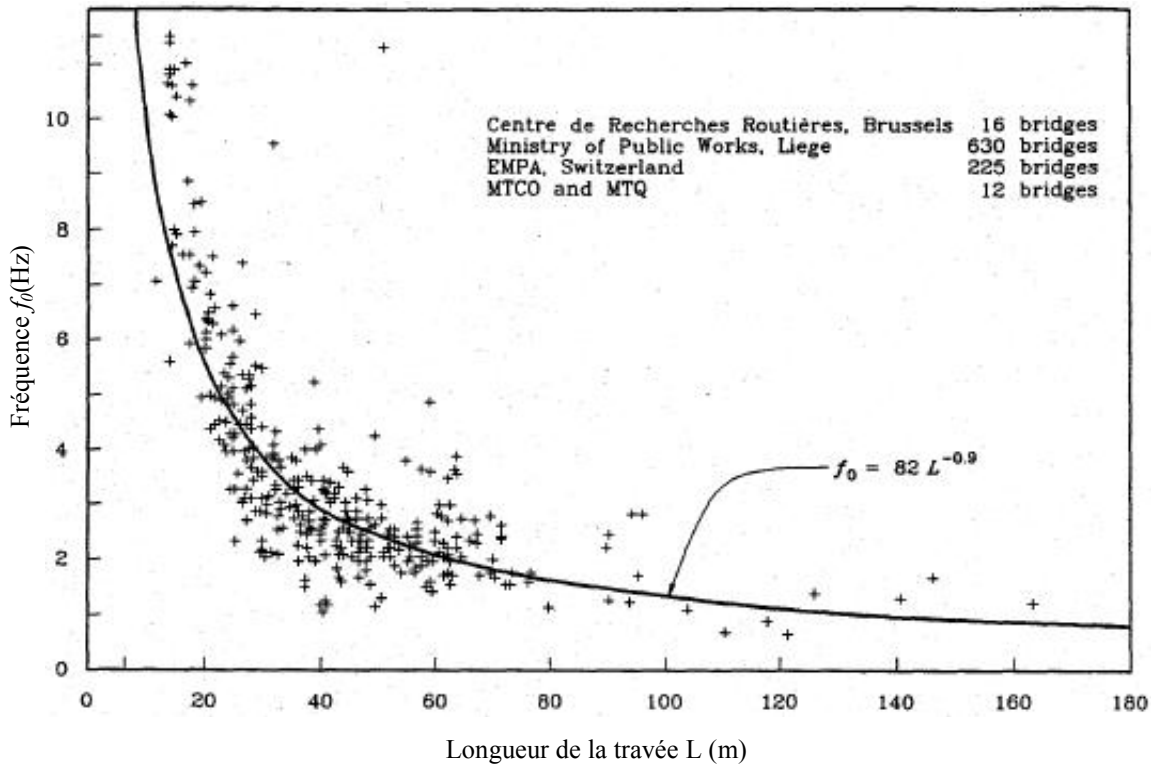
## 1.5 Fréquences propres d'un pont

La fréquence propre de vibration du pont a une influence considérable sur la réponse dynamique. Actuellement, la majorité des ponts modernes possèdent des fréquences propres comprises entre 2 à 5 Hz (voir Figure 1.2). Or, ceci correspond aux fréquences de résonance des véhicules commerciaux (Chaallal et Shahawy 1998).

Ces fréquences peuvent provoquer une amplification importante de la réponse dynamique. Un bon accord a été trouvé entre les fréquences de vibration évaluées par modélisation informatique et celles obtenues par test dynamique. Des relations entre la portée du pont et les fréquences propres ont été proposées. Une relation typique est affichée sur la Figure 1.3 (Chaallal et Shahawy 1998).



**Figure 1.2 :** Facteur d'Amplification Dynamique en fonction de la fréquence propre pour différents pays (Chaallal et Shahawy 1998).



**Figure 1.3 :** Variation de la fréquence propre en fonction de la longueur du travée (Chaallal et Shahawy 1998).

### 1.6 Méthodes des éléments finis en interaction dynamique

L'application de la méthode des éléments finis à une grande influence sur l'étude de l'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules qui les travers. La méthode des éléments finis permet de tenir compte toutes les détails de la structure notamment la dalle de roulement. Plusieurs code de calcul récents, spécifiques à l'interaction dynamique utilisent la méthode des éléments finis, Ces codes commerciaux ont permis de modéliser en détail et avec précision des structures civiles complexes avec tous les composants représentés par un grand nombre d'éléments finis de coque et de solide. Les caractéristiques du pont comme la masse, l'inertie, le centre de gravité et la rigidité des composants structurels pourraient être modélisées de façon plus réaliste. Parmi ces codes on trouve ABAQUS, ANSYS, DYTRAN, NASTRAN, ADINA et LS-DYNA.

Plusieurs auteurs utilisent la méthode des éléments finis en interaction dynamique, par exemple, Marzougui et al. (2001) ont développé un modèle éléments

finis LS-DYNA d'un pont routier pour étudier la dynamique du pont. La charge de trafic mobile a été incorporée en utilisant des forces nodales concentrées avec des courbes de charge appropriées. La courbe de charge d'impulsion triangulaire a été choisie pour garantir que la charge a été transférée en douceur d'un nœud au nœud suivant.

Un modèle élément fini a été développé dans MSC/NASTRAN par Brady et al. (2002) pour calculer les facteurs d'amplification dynamique pour différents scénarios de croisement.

L'examen de la littérature a permis de résumer plusieurs points concernant les modèles de ponts, les modèles de véhicules et les méthodes d'investigation. Les ponts ont été modélisés comme poutre, grillage ou de plaque. Les modèles tridimensionnels étaient généralement utilisés avec une méthode discrète telle que la méthode des éléments finis. La représentation de la poutre est simple et efficace pour les cas hautement idéalisés, mais elle ne peut pas capturer le mode de torsion qui est déclenché par les conditions de trafic routier réelles. La représentation de la plaque fournit une simulation plus précise et indique l'importance du mode de torsion qui est généralement négligé dans le modèle de poutre. Les modèles tridimensionnels sont plus détaillés et tiennent compte de la répartition de la masse et de la rigidité proche des structures réelles. Plusieurs modèles de véhicules simples et compliqués ont été utilisés. Les premiers modèles étaient la force et la masse mobiles. Ensuite, un système masse-ressort-amortisseur a été utilisé par les chercheurs. Plus tard, des modèles de semi-remorques avec différents nombres d'essieux ont été développés pour tenir compte du tangage et du roulis. Enfin, les modèles les plus compliqués ont été développés dans les logiciels commerciaux.

Les méthodes utilisées pourraient être continues ou discrètes. Les méthodes continues on peut citer, l'analyse harmonique et la méthode de superposition modale. Parmi les méthodes discrètes, il y a la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des bandes finies. Les méthodes continues n'incluent pas les détails des ponts et des véhicules, alors qu'elles pourraient clairement indiquer l'effet de chaque paramètre et donner la solution sous forme générale à un groupe de

ponts. Les méthodes discrètes permettaient une représentation détaillée des ponts et des véhicules et elles étaient pratiques pour obtenir des solutions pour des cas individuels.

## **1.7 Synthèse bibliographique**

L'étude de l'interaction dynamique pont-véhicule a été menée théoriquement et expérimentalement au cours des 150 dernières années en raison de son importance et de sa difficulté. L'existence d'une masse en mouvement rend le problème très difficile en raison du fait que la force d'interaction varie dans le temps et dans l'espace. La recherche dans ce problème a donné lieu à un grand nombre de publications.

Willis (1849), qui a formulé pour la première fois les équations du mouvement d'un pont ferroviaire, soumis à une masse mobile à vitesse constante. Les équations de Willis ont été résolues par Stokes (1896) en utilisant le développement en séries de puissance des séries de puissance.

Au cours des 60 années suivantes, grands efforts ont été fournis pour résoudre analytiquement les équations de mouvement. Notons ici les contributions de Timoshenko (1908) qui a examiné une poutre simplement appuyée sous une force mobile constante en utilisant la méthode modale. Timoshenko (1922) a étendu le problème à une force harmonique mobile. Un problème plus compliqué impliquant à la fois la masse mobile et la masse du pont a été étudié par Jeefcot (1929) en utilisant une méthode itérative. Une analyse approfondie sur la réponse dynamique des ponts ferroviaires traversés par un convoi a été présentée par Inglis (1934) à l'aide d'une analyse harmonique. Le thème de la dynamique des ponts a été revu en détail par Timoshenko (1953).

Après les années 1950, les études se sont concentrées sur les vibrations des ponts dues au chargement des véhicules mobiles. Wen (1960) a résolu le problème d'un chargement mobile à deux essieux sur une poutre en considérant le pont comme une poutre de masse uniforme et le véhicule comme une masse deux dimensions supporté par deux ressorts. Il a estimé que la flèche dynamique de la poutre à tout moment était proportionnelle à sa flèche statique instantanée due à la charge mobile.

Fleming et Romualdi (1961) ont présenté une étude analytique de la réponse dynamique des ponts continus à une seule travée et à trois travées sous charges transitoires. Un modèle de poutre a été construit pour évaluer la validité du modèle mathématique proposé pour le pont et le véhicule. Les effets de nombreux paramètres sur le facteur d'amplification dynamique ont ensuite été étudiés et les résultats comparés aux recommandations de l'AASHTO. Il a été constaté que pour les petites portées (moins de 13 m), le DAF était supérieur à celui prévu par l'AASHTO, tandis que pour les portées moyennes (supérieures à 13 m), le DAF était conforme aux recommandations de l'AASHTO.

Sundara et Jagadish (1970) ont modélisé le pont par une plaque orthotrope sous un modèle de véhicule masse ressort. Fryba (1972) a étudié de manière approfondie les vibrations d'une poutre simplement appuyée soumise à diverses charges mobiles.

À partir des années 1970, avec le développement de l'informatique et la percée dans l'analyse théorique, des méthodes discrètes, en particulier la méthode des éléments finis, ont été introduites dans l'analyse des structures et sont devenues un outil puissant et majeur pour l'étude de la dynamique des ponts. En éliminant la difficulté de résoudre analytiquement les équations différentielles du mouvement, les études pourraient être plus complètes et réalistes. Les ponts ont été modélisés comme des structures 2D ou 3D, y compris l'effet de torsion qui n'a pas été pris en compte dans la simplification des poutres. La modélisation de véhicules avec plusieurs degrés de liberté pourrait enfin être envisagée. L'influence des irrégularités de la route pourrait être incluse dans l'analyse. Un grand nombre de modèles de véhicules, avec différents niveaux de complexité, ont été utilisés récemment pour étudier les effets dynamiques des ponts. Dans ces modèles de véhicules on trouve les éléments essentiels tels que le bloc rigide, les roues et les systèmes de suspension. Dans les recherches de Tan et Brameld (1998), la superstructure du pont était modélisée comme un grillage bidimensionnel, tandis que le modèle de véhicule tridimensionnel avait sept degrés de liberté, capable de supporter à la fois les effets de roulis et de tangage. Les pneus et le système de suspension étaient représentés par une série de ressorts et d'amortisseurs.

Green et Cebon (1997), ont étudié l'interaction dynamique pont-véhicule d'un véhicule modélisé par des masses ponctuelles supportées par des ressorts et des amortisseurs en utilisant une méthode itérative. Zaman et al. (1996) ont développé une procédure d'analyse basée sur la méthode d'impédance. Pour l'analyse du comportement dynamique des ponts à haubans sous chargement mobile. Un concept de pseudo-temps a été utilisé dans lequel le temps d'intégration dépend de la position et de la vitesse du véhicule. Guo et Xu (2001) ont également mené des recherches sur les ponts à haubans.

Un modèle de véhicule HS20-44 à 11 degrés de liberté a été développé par Wang et al. (1996). Le modèle de véhicule non linéaire est composé cinq bloc rigides, représentant le tracteur, la semi-remorque, le groupe d'essieux-roues directrices, le groupe d'essieux-roues du tracteur et le groupe d'essieux-roues du remorque. Il a attribué au tracteur et à la semi-remorque chacun 3 degrés de liberté correspondant au déplacement vertical, au tangage et au roulis. Deux degrés de liberté de roulis et de déplacement vertical ont été attribués à chaque train de roues. Le tracteur et la semi-remorque étaient reliés par un pivot. Le système de suspension a été modélisé avec des ressorts et des amortisseurs. Avec ce modèle de véhicule détaillé et le modèle de grillage du pont, Huang et Wang (1993) ont mené des recherches approfondies sur la variation de la charge dynamique des ponts à poutres avec un nombre de poutres et une longueur de travée différents en raison des véhicules se déplaçant à travers les ponts. Ils ont également étudié la réponse dynamique des ponts poutres à caissons courbes soumis aux camions (Huang et al. 1998).

Les irrégularités de la chaussée est une grande influence sur le comportement dynamique des ponts. Parfois, les irrégularités de la chaussée peuvent amener les fréquences des véhicules à s'approcher aux fréquences propres de la superstructure du pont en augmentant considérablement les forces d'interactions. Dodds et Bobson (1973) ont proposé que les revêtements de la route typiques puissent être considérés comme un processus gaussiens bidimensionnels homogènes et isotropes qui pourrait être décrits par une fonction de Densité de Spectrale de Puissance (DSP). La modélisation du profil de la route a été incluse dans Chompooming et Yener (1995),

Wang et Huang (1993). Das et al. (2003) ont pris en compte la rugosité de la route dans leurs recherches sur un pont à haubans.

Cheng et al. (1999) ont étudié le problème de séparation entre le véhicule et le pont et le retour du contact.

Yang et al. (1995, 1999) ont développé un élément d'interaction pont –véhicule pour résoudre le problème de couplage dynamique. Les équations de mouvement ont été écrites pour le véhicule et pour le pont. Les équations du modèle véhicule ont d'abord été réduites à des équations de rigidité équivalentes en utilisant le schéma de Newmark. Ensuite, les degrés de liberté du véhicule ont été condensés à ceux de l'élément de poutre en contact. Les effets de certains paramètres, tels que la longueur du pont, la vitesse de roulement ont été discutés en utilisant des modèles masse-ressort-amortisseur-poutre (Yong et al. 1995).

Law et al. (2000) ont étudié le comportement dynamique d'un tablier en utilisant la méthode de superposition modale. Le tablier était modélisé par une plaque orthotrope simplement appuyée sous charge roulante. La charge était modélisée par un convoi de forces ponctuelles. Les résultats ont été comparés avec d'autres travaux et validés par des essais en laboratoire. La même étude sur une plaque orthotrope a fait l'objet d'une étude par Zhu et Law (2007). Ils ont utilisé le calcul par matrice inverse et la technique de régularisation de Tikhonov. Zhu et Law (2002a) ont étudié la force dynamique due à un véhicule roulant à une vitesse constante sur un tablier de pont à plusieurs travées modélisé par une plaque orthotrope. Le véhicule est de type H20-44. Il est assimilé à un modèle tridimensionnel à deux essieux.

Le comportement dynamique est étudié par le principe de superposition modale et la charge dynamique est obtenue en termes de facteur d'amplification dynamique. Sur la base des méthodes d'indentification des charges roulantes sur les ponts à poutres continues. Zhu et Law (2002b) ont étudié l'influence de la variation de la vitesse et la rugosité de la surface de contact par expérimentation et simulation numérique.

Wu (2003) a effectué une analyse dynamique par la méthode des éléments finis d'un tablier de pont dalle assimilé à un modèle unidimensionnel de type poutre-plaque

soumis à un groupe de charges ponctuelles réparties transversalement. Le groupe de charges ponctuelles réparties a été transféré à une seule charge ponctuelle. Partant du fait que les méthodes utilisant l'analyse modale pour l'identification des charges peuvent induire des erreurs dues à la troncature du signal, Law et al. (2004) ont utilisé la méthode des éléments finis avec une technique de condensation. Ils ont étudié l'identification des forces de contact d'un véhicule modélisé par deux charges ponctuelles sur une poutre de Bernoulli, avec la prise en compte de la rugosité de surface de contact.

Yin et al. (2010) ont présenté une méthode pour analyser la réponse aléatoire non stationnaire des ponts en utilisant l'équivalence d'une technique de covariance. Pour cela, ils ont utilisé un modèle du véhicule à deux essieux et analysé trois modèles de ponts typiques. Les résultats numériques ont indiqué que l'amplitude de réponse aléatoire non stationnaire des roues était proportionnelle à la vitesse du véhicule. Ils ont également montré que l'utilisation d'un processus stationnaire pour modéliser la perturbation du profil de la route à différentes vitesses peut à la fois sous-estimer et sur-estimer les effets dynamiques.



## Chapitre 2

# Développement de deux modèles de camion tridimensionnels à essieux tandem

### 2.1 Introduction

Le calcul des effets dynamiques dans les dalles de roulement des ponts sollicités par des véhicules mobiles nécessite que la disposition des charges appliquées par le modèle du véhicule soit aussi réaliste que possible. Pour cela, deux modèles de véhicule à trois axes avec essieux tandem sont développés pour éliminer les inconvénients du modèle grossier à deux axes. Quatre types d'oscillations qui caractérisent le mouvement d'un véhicule sont pris en compte : Le bondissement qui correspond au mouvement vertical du bloc rigide du véhicule. Le tangage qui représente le mouvement du véhicule autour d'un axe perpendiculaire à son axe longitudinal. Le roulis qui représente le balancement du bloc rigide du véhicule autour de son axe longitudinal. Le sautellement qui caractérise le mouvement vertical des essieux. Les équations différentielles du mouvement pour chacun d'eux sont développées selon l'approche des travaux virtuels.

### 2.2 Hypothèses de modélisation

Les hypothèses suivantes constituent la base du développement mathématique des deux modèles de véhicule:

1. Les pneus du véhicule restent en contact permanent avec la chaussée.
2. Le contact entre les pneus et la dalle de roulement est considéré ponctuel. Les déplacements du point de contact  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$  s'exprime par:

$$w_i = w(x_i(t), y_i, t) + r(x_i(t), y_i) \quad (2.1)$$

Où  $w(x_i(t), y_i, t)$  est le déplacement vertical du pont au point de contact  $i$  de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  à l'instant  $t$  et  $r(x_i(t), y_i)$  represent le profil de la chaussée au même point.

3. Les rotations (tangage et roulis) du véhicule sont considérées petites (vibration linéaire):

$$\cos \theta_v \cong 1, \quad \cos \alpha_v \cong 1, \quad \sin \theta_v \cong \theta_v, \quad \sin \alpha_v \cong \alpha_v \quad (2.2)$$

4. Le glissement relatif du bloc rigide du véhicule par rapport aux essieux est négligé.

5. Le comportement des amortisseurs visqueux du véhicule est supposé linéaire.

6. Les axes 1-1' et 2-2' conservent leur orientation par rapport au véhicule (figure 2.1)

$$x_v = x_1 - a_1 s_1 + h \theta_v \quad (2.3)$$

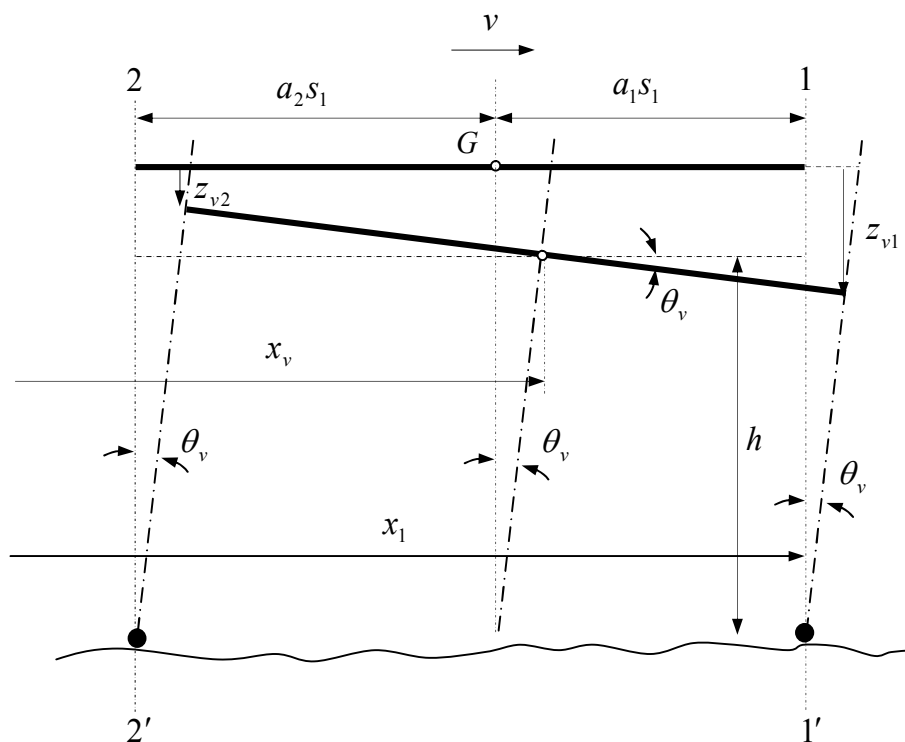


Figure 2.1 : Position du centre de gravité du véhicule

### 2.3 Mise en équations de mouvement des modèles tridimensionnels de véhicule

Les équations de mouvement des véhicules sont établies en appliquant le principe des travaux virtuels qui stipule que pour tout champ de déplacements admissibles, le travail effectué par les efforts internes et externes est nul. Dans le groupe des efforts internes, on compte les forces axiales générées dans les suspensions et les pneus ainsi que toutes les forces d'inerties. Le groupe des efforts externes comprend les forces de gravités.

La démarche conduisant aux équations de mouvement des deux modèles de véhicule avec essieux tandem est similaire. Les éléments essentiels du développement de ces modèles sont décrits pour aboutir finalement aux équations de mouvement du véhicule.

### **2.3.1 Modèle de véhicule à 9 degrés de liberté**

#### **2.3.1.1 Schémas du modèle de véhicule**

La figure 2.2 représente le premier modèle de véhicule **tridimensionnel** avec essieux tandem. Dans ce modèle, le pivot des essieux se déplace essentiellement verticalement par rapport au châssis du véhicule et ce mouvement dépend de la flexibilité de la suspension. Ce point est lié au corps du véhicule par un ressort représentant la suspension à laquelle un amortisseur visqueux est ajouté en parallèle. Les essieux du tandem de masse  $m_i$  sont attachés à chacune des extrémités de la poutre pivotante dont la masse est confondue à celle des essieux. Les pneus des roues de chaque essieu sont modélisés par un montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Dans la figure 2.2,  $k_{pi}$  et  $c_{pi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  sont respectivement les rigidités et les amortissements des pneus des roues,  $k_{si}$  et  $c_{si}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$  sont respectivement les rigidités et les amortissements des suspensions. Le champ de déplacements de ce modèle de véhicule est défini à l'instant  $t$  par neuf variables indépendantes:  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$ ,  $z_4(t)$ ,  $z_5(t)$ ,  $z_6(t)$ ,  $z_{v1}(t)$  et  $z_{v2}(t)$ ,  $z_{v4}(t)$ .

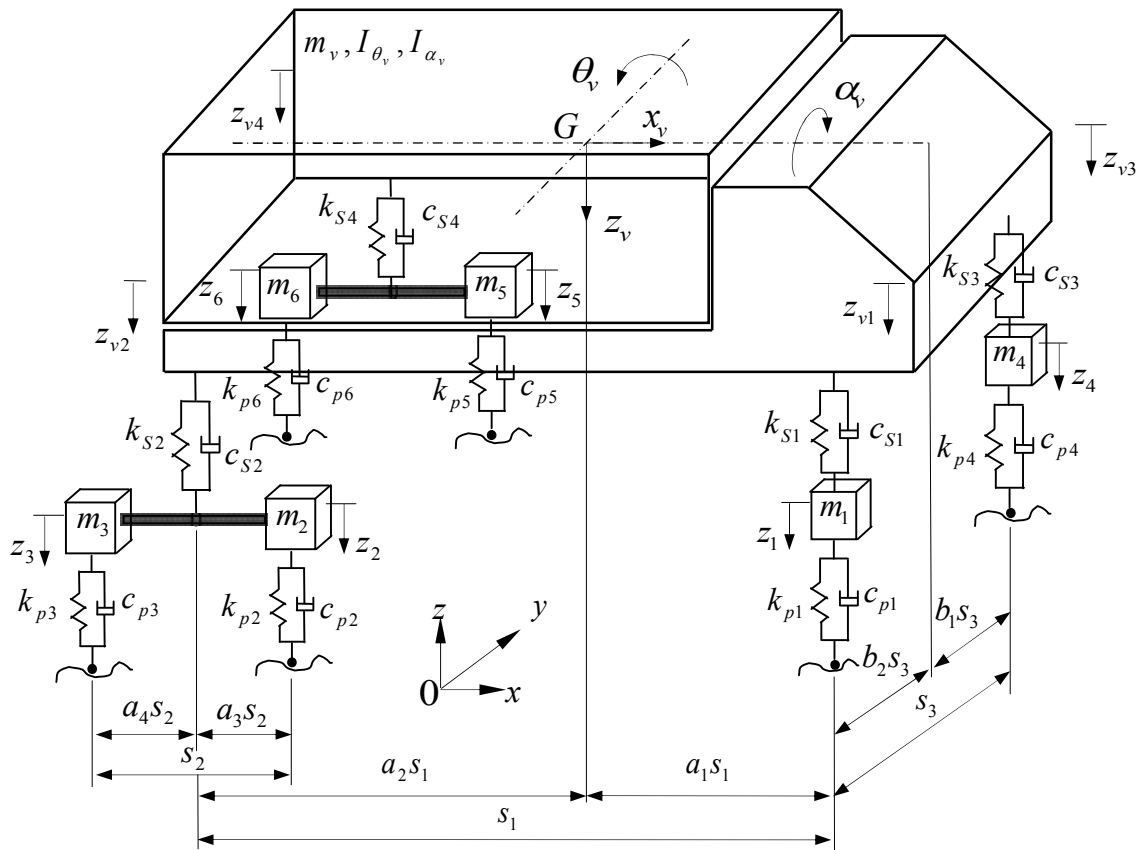


Figure 2.2 : Modèle tridimensionnel de véhicule à trois axes avec essieux tandem à 9 DDL.

### 2.3.1.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces et des moments

La figure 2.3, représente les forces exercées sur le véhicule. Les déplacements verticaux du modèle de véhicule sont calculés à partir de sa position d'équilibre statique.

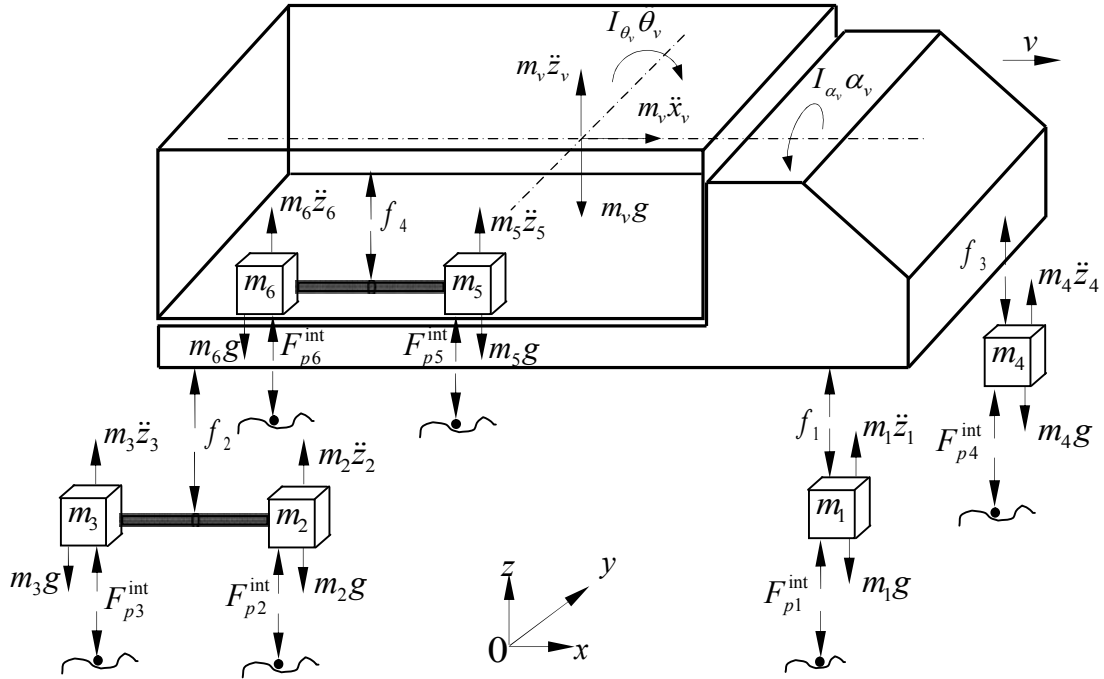


Figure 2.3 : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 9 DDL

### 2.3.1.3 Equations du mouvement

Le principe des travaux virtuels en dynamique appliqué au modèle à 9DDL est de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{i=1}^4 f_i \delta \Delta_{si} + \sum_{j=1}^6 [F_{pj}^{int} \delta \Delta_{pj} + m_j \ddot{z}_j \delta z_j + m_j g \delta z_j] \\ & + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où les différents termes sont définis comme suit :

- $\delta W$  est le travail virtuel total du véhicule
- $f_i, F_{pj}^{int}$  sont les forces dans les suspensions et dans les pneus
- $m_j$  sont les masses des roues avec essieux
- $m_v, I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$  sont respectivement la masse et le moment d'inertie de la masse du corps du véhicule
- $g$  est l'accélération de la gravité
- $\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$  sont respectivement les déplacements relatifs et les déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus

$z_j, \delta z_j$  sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical

$x_v, \delta x_v, z_v, \delta z_v$  sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels du corps du véhicule selon l'axe horizontal et vertical

$\theta_v, \delta\theta_v, \alpha_v, \delta\alpha_v$  sont respectivement la rotation et la rotation virtuelle du corps du véhicule

Les rotations  $\theta_v, \alpha_v$  et les déplacements  $x_v$  et  $z_v$  sont exprimés en fonction des variables cinématiques  $z_{vi}$  pour rendre l'ensemble des variables du modèle homogène :

$$\theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1}, \quad \alpha_v = \frac{z_{v4} - z_{v2}}{s_3}$$

$$x_v = x_1 + \frac{h}{s_1}(z_{v2} - z_{v1}) - a_1 s_1 \quad (2.5)$$

$$z_v = a_2 z_{v1} + (a_1 - b_2) z_{v2} + b_2 z_{v4}$$

Les déplacements relatifs des suspensions  $\Delta_{si}$  et des pneus  $\Delta_{pj}$  sont donnés par:

$$\Delta_{s1} = z_{v1} - z_1, \quad \Delta_{s2} = z_{v2} - (a_4 z_2 + a_3 z_3)$$

$$\Delta_{s3} = z_{v1} - z_{v2} + z_{v4} - z_4, \quad \Delta_{s4} = z_{v4} - (a_4 z_5 + a_3 z_6)$$

$$\Delta_{pj} = z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j) \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.6)$$

Les déplacements relatifs virtuels correspondants  $\delta \Delta_{si}$  et  $\delta \Delta_{pj}$  sont :

$$\delta \Delta_{s1} = \delta z_{v1} - \delta z_1, \quad \delta \Delta_{s2} = \delta z_{v2} - (a_4 \delta z_2 + a_3 \delta z_3)$$

$$\delta \Delta_{s3} = \delta z_{v1} - \delta z_{v2} + \delta z_{v4} - \delta z_4, \quad \delta \Delta_{s4} = \delta z_{v4} - (a_4 \delta z_5 + a_3 \delta z_6)$$

$$\delta \Delta_{pj} = \delta z_j - \delta w - \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \delta x_j \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.7)$$

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_1 = k_{s1}(z_{v1} - z_1) + c_{s1}(\dot{z}_{v1} - \dot{z}_1)$$

$$f_2 = k_{s2}(z_{v2} - a_4 z_2 - a_3 z_3) + c_{s2}(\dot{z}_{v2} - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3) \quad (2.8)$$

$$f_3 = k_{s3}(z_{v1} - z_{v2} + z_{v4} - z_4) + c_{s3}(\dot{z}_{v1} - \dot{z}_{v2} + \dot{z}_{v4} - \dot{z}_4)$$

$$f_4 = k_{s4}(z_{v4} - a_4 z_5 - a_3 z_6) + c_{s4}(\dot{z}_{v4} - a_4 \dot{z}_5 - a_3 \dot{z}_6)$$

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pj}^{\text{int}} = k_{pj} [z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j)] + c_{pj} \left[ \dot{z}_j - \frac{\partial w}{\partial t}(x_j, y_j, t) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=x_j, y=y_j} \dot{x}_j \right] \quad j=1,2..6 \quad (2.9)$$

Le principe des travaux virtuels permet d'obtenir les équations pour chaque degré de liberté du modèle à 9 D. D. L.

$$\text{Pour } z_1 : f_1 \delta \Delta_{s1} + F_{p1}^{\text{int}} \delta \Delta_{p1} + m_1 \ddot{z}_1 \delta z_1 + m_1 g \delta z_1 = 0 \quad (2.10.1)$$

$$\text{Pour } z_2 : f_2 \delta \Delta_{s2} + F_{p2}^{\text{int}} \delta \Delta_{p2} + m_2 \ddot{z}_2 \delta z_2 + m_2 g \delta z_2 = 0 \quad (2.10.2)$$

$$\text{Pour } z_3 : f_2 \delta \Delta_{s2} + F_{p3}^{\text{int}} \delta \Delta_{p3} + m_3 \ddot{z}_3 \delta z_3 + m_3 g \delta z_3 = 0 \quad (2.10.3)$$

$$\text{Pour } z_4 : f_3 \delta \Delta_{s3} + F_{p4}^{\text{int}} \delta \Delta_{p4} + m_4 \ddot{z}_4 \delta z_4 + m_4 g \delta z_4 = 0 \quad (2.10.4)$$

$$\text{Pour } z_5 : f_4 \delta \Delta_{s5} + F_{p5}^{\text{int}} \delta \Delta_{p5} + m_5 \ddot{z}_5 \delta z_5 + m_5 g \delta z_5 = 0 \quad (2.10.5)$$

$$\text{Pour } z_6 : f_4 \delta \Delta_{s4} + F_{p6}^{\text{int}} \delta \Delta_{p6} + m_6 \ddot{z}_6 \delta z_6 + m_6 g \delta z_6 = 0 \quad (2.10.6)$$

$$\text{Pour } z_{v1} : f_1 \delta \Delta_{s1} + f_3 \delta \Delta_{s3} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v = 0 \quad (2.10.7)$$

$$\text{Pour } z_{v2} : f_2 \delta \Delta_{s2} + f_3 \delta \Delta_{s3} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \quad (2.10.8)$$

$$\text{Pour } z_{v4} : f_3 \delta \Delta_{s3} + f_4 \delta \Delta_{s4} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \quad (2.10.9)$$

Remplaçant les expressions données (2.5 à 2.9) dans les équations (2.10.1 à 2.10.9), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{\text{int}}\} \quad (2.11)$$

Où  $\{F^{\text{int}}\}$  est le vecteur des forces d'interaction en chaque point de contact,  $\{F_g\}$  est le vecteur des forces dues aux effets de la gravité,  $[M_v]$ ,  $[C_v]$  et  $[K_v]$  sont respectivement les matrices des masses, des amortissements et des rigidités du modèle de véhicule qui sont présentées dans l'annexe 1.

## 2.3.2 Modèle de véhicule à 11 degrés de liberté

### 2.3.2.1 Schémas du modèle de véhicule

Dans le deuxième type d'essieux tandem, la suspension et la liaison constituent un seul élément aux extrémités duquel sont fixés les axes. Le mouvement de chaque

essieu par rapport au châssis est un mouvement de rotation sans déformation autour du pivot. La rotation de l'ensemble est représentée par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse  $m_L$  attachée à l'extrémité du corps rigide du véhicule (Figure 2.4). La flexion de chacun des porte-à-faux formant la suspension est modélisée par un ressort et un amortisseur visqueux liés à chaque extrémité de la barre pivotante et aux masses  $m_i$  indépendantes des deux essieux. Comme dans le modèle précédent, les pneus des roues de chaque essieu sont représentés par un ressort et un amortisseur visqueux mis en parallèle. Le champ de déplacements de ce modèle de véhicule est défini à l'instant  $t$  par onze variables indépendantes:  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$ ,  $z_4(t)$ ,  $z_5(t)$ ,  $z_6(t)$ ,  $z_{v1}(t)$ ,  $z_{v2}(t)$  et  $z_{v3}(t)$ ,  $z_{v5}(t)$ ,  $z_{v6}(t)$ .

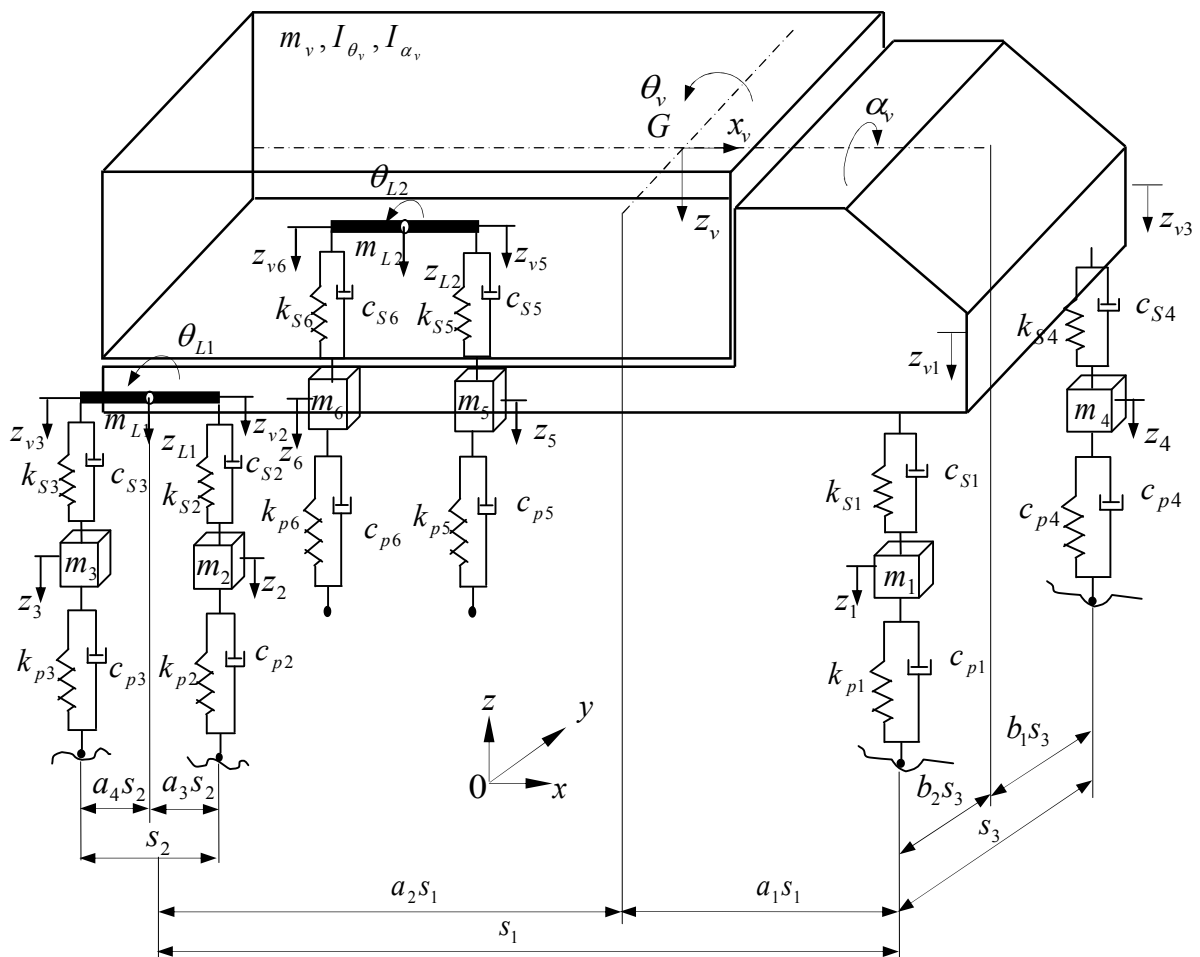


Figure 2.4 : Modèle de véhicule tridimensionnel à trois axes avec essieux tandem à 11 DDL.



### 2.3.2.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces et des moments

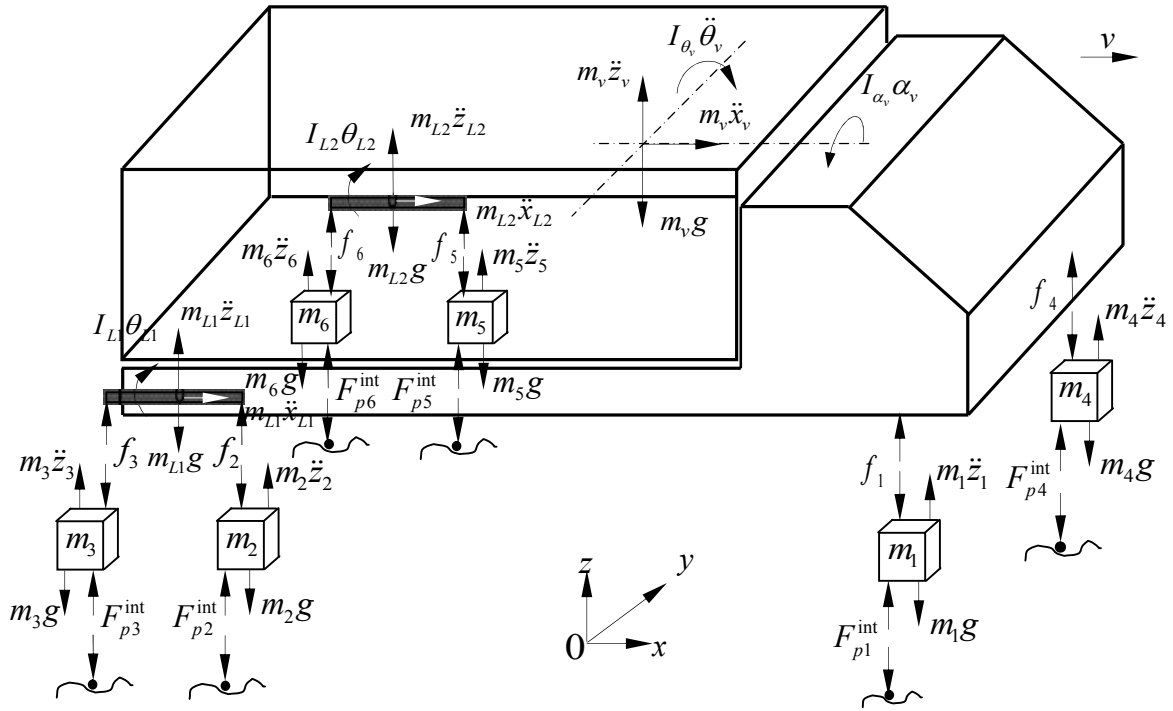


Figure 2.5 : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 11 DDL

### 2.3.2.3 Equations du mouvement

Le principe des travaux virtuels appliqué au modèle à 11DDL s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \sum_{i=1}^6 f_i \delta \Delta_{si} + \sum_{j=1}^6 [F_{pj}^{int} \delta \Delta_{pj} + m_j \ddot{z}_j \delta z_j + m_j g \delta z_j] \\
 & + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v \\
 & + m_{L1} \ddot{z}_{L1} \delta z_{L1} + m_{L1} g \delta z_{L1} + m_{L1} \ddot{x}_{L1} \delta x_{L1} + I_{\theta_{L1}} \ddot{\theta}_{L1} \delta \theta_{L1} \\
 & + m_{L2} \ddot{z}_{L2} \delta z_{L2} + m_{L2} g \delta z_{L2} + m_{L2} \ddot{x}_{L2} \delta x_{L2} + I_{\theta_{L2}} \ddot{\theta}_{L2} \delta \theta_{L2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Où les différents termes sont définis comme suit:

- $\delta W$  est le travail virtuel total du véhicule
- $f_i, F_{pj}^{int}$  sont les forces dans les suspensions et dans les pneus
- $m_j$  sont les masses des roues et des essieux
- $m_k, I_{\theta_k}, I_{\alpha_v}$  sont respectivement la masse et le moment d'inertie de la masse du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem

$g$  est l'accélération de la gravité  
 $\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$  sont respectivement les déplacements relatifs et les déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus  
 $z_j, \delta z_j$  sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical  
 $x_k, \delta x_k, z_k, \delta z_k$  sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem selon l'axe horizontal et vertical  
 $\theta_k, \delta \theta_k$  sont respectivement la rotation et la rotation virtuelle du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem  
 $\alpha_v, \delta \alpha_v$  sont respectivement la rotation et la rotation virtuelle du corps du véhicule

Les rotations  $\theta_v, \theta_{L1}, \theta_{L2}$  et  $\alpha_v$  ainsi que les déplacements  $x_v, x_{L1}, x_{L2}, z_{L1}, z_{L2}$  et  $z_v$  sont exprimés en fonction des variables cinématiques  $z_{vi}$  pour rendre homogène l'ensemble des variables du modèle.

$$\begin{aligned}
 z_{L1} &= a_4 z_{v2} + a_3 z_{v3}, & z_{L2} &= a_4 z_{v5} + a_3 z_{v6} \\
 \theta_{L1} &= \frac{z_{v3} - z_{v2}}{s_2}, & \theta_{L2} &= \frac{z_{v6} - z_{v5}}{s_2} \\
 \theta_v &= \frac{a_4 z_{v2} + a_3 z_{v3} - z_{v1}}{s_1} \\
 \alpha_v &= \frac{z_{L2} - z_{L1}}{s_3} = \frac{a_4 z_{v5} + a_3 z_{v6} - a_4 z_{v2} - a_3 z_{v3}}{s_3} \\
 z_v &= a_2 z_{v1} + a_4 (a_1 - b_2) z_{v2} + a_3 (a_1 - b_2) z_{v3} + a_4 b_2 z_{v5} + a_3 b_2 z_{v6}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$x_{L1} = x_{L2} = x_1 + \frac{h}{s_1} (a_4 z_{v2} + a_3 z_{v3} - z_{v1}) - s_1$$

$$x_v = x_1 + \frac{h}{s_1} (a_4 z_{v2} + a_3 z_{v3} - z_{v1}) - a_1 s_1$$

Les déplacements relatifs des suspensions  $\Delta_{si}$  et des pneus son  $\Delta_{pj}$  t donnés par:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{si} &= z_{vi} - z_i & i &= 1, 2, \dots, 6 \\
 \Delta_{pj} &= z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j) & j &= 1, 2, \dots, 6
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Les déplacements relatifs virtuels correspondants  $\delta \Delta_{si}$  et  $\delta \Delta_{pj}$  sont :

$$\begin{aligned} \delta \Delta_{si} &= \delta z_{vi} - \delta z_i \quad i = 1, 2, \dots, 6 \\ \delta \Delta_{pj} &= \delta z_j - \delta w - \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \delta x_j \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_i = k_{si}(z_{vi} - z_i) + c_{si}(\dot{z}_{vi} - \dot{z}_i) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.16)$$

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pj}^{int} = k_{pj} [z_j - v(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j)] + c_{pj} \left[ \dot{z}_j - \frac{\partial w}{\partial x}(x_j, y_j, t) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_j, y=y_j} \dot{x}_j \right] \quad j=1, 2, \dots, 6 \quad (2.17)$$

Le principe des travaux virtuels permet d'obtenir les équations de chaque degré de liberté du modèle à 11D. D. L. :

$$\text{Pour } z_1 : f_1 \delta \Delta_{s1} + F_{p1}^{int} \delta \Delta_{p1} + m_1 \ddot{z}_1 \delta z_1 + m_1 g \delta z_1 = 0 \quad (2.18.1)$$

$$\text{Pour } z_2 : f_2 \delta \Delta_{s2} + F_{p2}^{int} \delta \Delta_{p2} + m_2 \ddot{z}_2 \delta z_2 + m_2 g \delta z_2 = 0 \quad (2.18.2)$$

$$\text{Pour } z_3 : f_3 \delta \Delta_{s3} + F_{p3}^{int} \delta \Delta_{p3} + m_3 \ddot{z}_3 \delta z_3 + m_3 g \delta z_3 = 0 \quad (2.18.3)$$

$$\text{Pour } z_4 : f_4 \delta \Delta_{s4} + F_{p4}^{int} \delta \Delta_{p4} + m_4 \ddot{z}_4 \delta z_4 + m_4 g \delta z_4 = 0 \quad (2.18.4)$$

$$\text{Pour } z_5 : f_5 \delta \Delta_{s5} + F_{p5}^{int} \delta \Delta_{p5} + m_5 \ddot{z}_5 \delta z_5 + m_5 g \delta z_5 = 0 \quad (2.18.5)$$

$$\text{Pour } z_6 : f_6 \delta \Delta_{s6} + F_{p6}^{int} \delta \Delta_{p6} + m_6 \ddot{z}_6 \delta z_6 + m_6 g \delta z_6 = 0 \quad (2.18.6)$$

$$\text{Pour } z_{v1} : f_1 \delta \Delta_{s1} + f_4 \delta \Delta_{s4} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_k \ddot{x}_k \delta x_k + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v = 0 \quad (2.18.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z_{v2} : & f_2 \delta \Delta_{s2} + f_4 \delta \Delta_{s4} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_{L1} \ddot{z}_{L1} \delta z_{L1} + m_{L1} g \delta z_{L1} + \\ & m_k \ddot{x}_k \delta x_k + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v + I_{\theta_{L1}} \ddot{\theta}_{L1} \delta \theta_{L1} + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \end{aligned} \quad (2.18.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z_{v3} : & f_3 \delta \Delta_{s3} + f_4 \delta \Delta_{s4} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_{L1} \ddot{z}_{L1} \delta z_{L1} + m_{L1} g \delta z_{L1} + \\ & m_k \ddot{x}_k \delta x_k + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v + I_{\theta_{L1}} \ddot{\theta}_{L1} \delta \theta_{L1} + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \end{aligned} \quad (2.18.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z_{v5} : & f_4 \delta \Delta_{s4} + f_5 \delta \Delta_{s5} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_{L2} \ddot{z}_{L2} \delta z_{L2} + m_{L2} g \delta z_{L2} + \\ & I_{\theta_{L2}} \ddot{\theta}_{L2} \delta \theta_{L2} + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \end{aligned} \quad (2.46.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z_{v6} : & f_4 \delta \Delta_{s4} + f_6 \delta \Delta_{s6} + m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_{L2} \ddot{z}_{L2} \delta z_{L2} + m_{L2} g \delta z_{L2} + \\ & I_{\theta_{L2}} \ddot{\theta}_{L2} \delta \theta_{L2} + I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v \delta \alpha_v = 0 \end{aligned} \quad (2.18.11)$$

Remplaçant les expressions données (2.13 à 2.17) dans les équations (2.18.1 à 2.18.11), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\} \quad (2.19)$$

Où  $\{F^{int}\}$  est le vecteur des forces d'interaction en chaque point de contact,  $\{F_g\}$  est le vecteur des forces dues aux effets de la gravité,  $[M_v]$ ,  $[C_v]$  et  $[K_v]$  sont respectivement les matrices des masses, des amortissements et des rigidités du modèle de véhicule qui sont présentées dans l'annexe 1.

## **2.4 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons développé deux modèles de véhicule **tridimensionnels** à essieux tandem plus réalistes qui représentent fidèlement la distribution des charges de véhicule sur la dalle de roulement du pont. La différence entre les deux modèles réside dans la configuration des essieux arrière du véhicule. Ce qui permet d'avoir deux modèles différents l'un à neuf degrés de liberté et l'autre à onze degrés de liberté. L'obtention des équations de mouvement des deux modèles est basée sur le principe des travaux virtuels en dynamique.

## Chapitre 3

# Modélisation de la dalle de roulement et du profil de la chaussée

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, la dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées de propriétés équivalentes, supportée par des appuis rigides. Le profil de la chaussée est modélisé par un processus aléatoire stationnaire Gaussien de moyenne nulle. Les vibrations libres et forcés de la dalle de roulement sont régies par une équation différentielle aux dérivées partielles que l'on résoudra par la méthode de superposition modale.

### 3.2 Hypothèses de modélisation

1. La dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque rectangulaire orthotrope, multi-travées, simplement appuyée en  $x = 0$  et  $x = l$  et libre en  $y = 0$  et  $y = b$  ;
2. La dalle de roulement a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés ;
3. Les appuis intermédiaires sont linéaires, rigides et orthogonaux aux bords libres de la dalle ;
4. La longueur et la largeur de la dalle de roulement sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

### 3.3 Equation du mouvement de la dalle de roulement

La dalle de roulement est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées (Figure 3.1). Sur la base des hypothèses précédentes, l'équation du mouvement de la dalle de roulement s'écrit (Au et Wang 2005) :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) \quad (3.1)$$

Dans l'équation (3.1),  $D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$  est la rigidité de flexion selon la direction  $x$ ,  $D_y = E_y h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$  est la rigidité de flexion selon la direction  $y$ ,  $H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$  est la rigidité de flexion équivalente,  $\bar{m} = \rho h$  est la masse par unité de surface de la plaque,  $c$  est le coefficient d'amortissement visqueux de la plaque,  $F_{pk}^{int}$  est la force d'interaction dynamique entre la  $k^{ème}$  roue du véhicule et la dalle de roulement,  $(x_k(t), y_k)$  est la position de la  $k^{ème}$  force d'interaction dynamique sur la dalle de roulement,  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$  sont les coefficients de Poisson selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement,  $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$  est la rigidité de torsion,  $G_{xy}$  est le module de cisaillement,  $E_x$  et  $E_y$  sont les modules d'élasticité d'Young selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement,  $\delta$  est l'opérateur de Dirac.

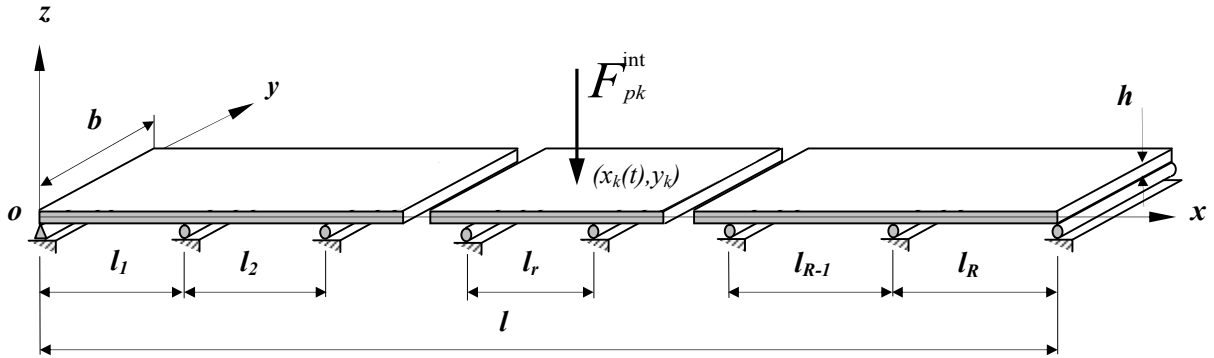


Figure 3.1 : Dalle de roulement modélisée par une plaque orthotrope multi-travées.

### 3.4 Fréquences et modes propres de la dalle de roulement

L'analyse des vibrations libres d'un pont est la première étape essentielle pour étudier les vibrations forcées de ce dernier. Cette analyse vibratoire permet de déterminer les fréquences et les déformées propres de vibrations. Pour déterminer les fréquences et les déformées propres de la dalle de roulement, considérons l'équation conservative homogène du mouvement en vibration libre de ce dernier.

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.2)$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont peut s'exprimer par:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{J\omega_{ij}t} \quad (3.3)$$

$\omega_{ij}$  et  $\phi_{ij}(x, y)$  sont respectivement les pulsations et les déformées propres de la dalle de roulement multi-travées,  $a_{ij}$  sont les amplitudes modales et  $J = \sqrt{-1}$ . On remplace l'expression (3.3) dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[ D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij} \right] e^{J\omega_{ij}t} = 0$$

Pour déterminer les fréquences et les modes propres de la dalle du pont, on doit donc résoudre l'équation spatiale suivante :

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij} = 0 \quad (3.4)$$

Plusieurs auteurs utilisent la méthode variationnelle de Rayleigh-Ritz pour déterminer les fréquences et les modes propres. Ces auteurs décomposent  $\phi_{ij}(x, y)$  comme étant le produit de deux fonctions admissibles  $\varphi_i(x)$  et  $\psi_j(y)$  qui sont respectivement les modes propres d'une poutre continue selon  $x$  et les modes propres d'une poutre libre selon  $y$ . Cette décomposition néglige le couplage intermodal entre les modes longitudinaux et transversaux. En outre, plusieurs d'intégrales doivent être évaluées pour construire la matrice de masse et la matrice de rigidité de la dalle de roulement. Pour tenir compte du couplage intermodal, notre approche considère que suivant la direction  $x$  les modes propres  $\varphi_i(x)$  sont ceux d'une poutre continue et selon la direction  $y$  les modes propres sont présentés par une fonction  $h_{ij}(y)$  vérifiant les conditions aux limites d'une plaque. Cette décomposition peut être exprimée par :

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y) \quad (3.5)$$

### 3.4.1 Détermination des paramètres de fréquences propres $k_i$ et des modes propres $\varphi_i(x)$ d'une poutre continue

Pour déterminer les paramètres de fréquences propres  $k_i$  et les modes propres  $\varphi_i(x)$  d'une poutre continue (figure 3.2), il faut déterminer les modes propres pour chaque travée en considérant les conditions aux limites et de continuité. L'expression du mode  $i$  dans la travée  $r$  est présentée par :

$$\varphi_{ri}(x_r) = A_{ri} \sin(k_i x_r) + B_{ri} \cos(k_i x_r) + C_{ri} \sinh(k_i x_r) + D_{ri} \cosh(k_i x_r), \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (3.6)$$

Les constantes  $A_{ri}$ ,  $B_{ri}$ ,  $C_{ri}$  et  $D_{ri}$  sont déterminées par l'application des conditions aux limites et de continuité,  $k_i$  est un paramètre de fréquence et  $R$  est le nombre de travées.

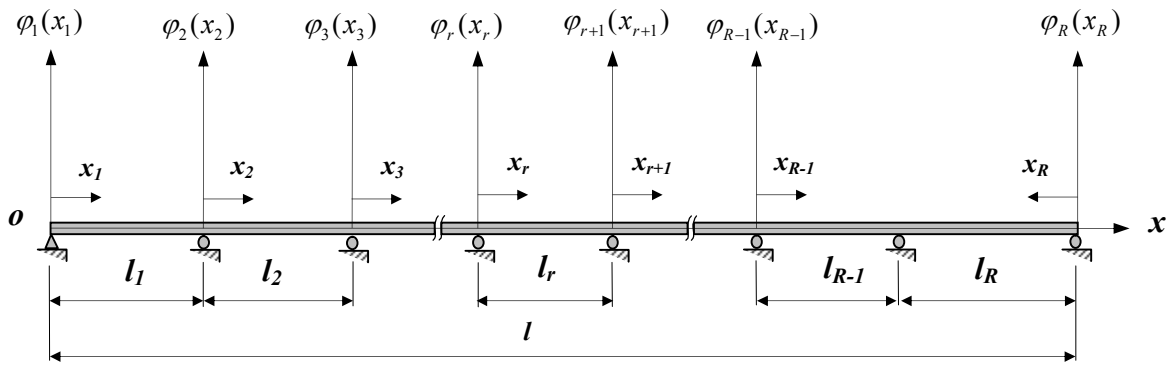


Figure 3.2 : Modèle mathématique de la poutre multi-travées

Zhu et Law (2001), ont présentés la formulation des fréquences et modes propres des poutres continues. Les conditions aux limites et de continuité sont listées comme suite :

Le déplacement vertical est nul au niveau de tous les appuis :

$$\varphi_r(x_r)|_{x_r=0} = \varphi_r(x_r)|_{x_r=l_r} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (3.7.1)$$

Le moment fléchissant est nul au niveau des appuis de rive :

$$\left. \frac{d^2 \varphi_1(x_1)}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{d^2 \varphi_R(x_R)}{dx_R^2} \right|_{x_R=0} = 0 \quad (3.7.2)$$

La pente et le moment fléchissant au niveau des appuis intermédiaires sont (les conditions de continuités) :



$$\left. \frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r} \right|_{x_r=l_r} = \left. \frac{d\varphi_{r+1}(x_{r+1})}{dx_{r+1}} \right|_{x_{r+1}=0} \quad r = 1, 2, \dots, R-2 \quad (3.7.3)$$

$$\left. \frac{d^2\varphi_r(x_r)}{dx_r^2} \right|_{x_r=l_r} = \left. \frac{d^2\varphi_{r+1}(x_{r+1})}{dx_{r+1}^2} \right|_{x_{r+1}=0} \quad r = 1, 2, \dots, R-2 \quad (3.7.4)$$

$$\left. \frac{d\varphi_{R-1}(x_{R-1})}{dx_{R-1}} \right|_{x_{R-1}=l_{R-1}} = - \left. \frac{d\varphi_R(x_R)}{dx_R} \right|_{x_R=l_R} \quad (3.7.5)$$

$$\left. \frac{d^2\varphi_{R-1}(x_{R-1})}{dx_{R-1}^2} \right|_{x_{R-1}=l_{R-1}} = \left. \frac{d^2\varphi_R(x_R)}{dx_R^2} \right|_{x_R=l_R} \quad (3.7.6)$$

Substituons toutes ces conditions (3.7.1) à (3.7.6) dans l'expression (3.6) et après plusieurs manipulations et simplifications mathématiques, nous aboutissons aux expressions des modes propres d'une poutre continue :

Pour  $0 \leq x \leq l_1$  :

$$\varphi_i(x) = A_{i1} \left( \sin(k_i x) - \frac{\sin(k_i l_1)}{\sinh(k_i l_1)} \sinh(k_i x) \right) \quad (3.8.1)$$

Pour  $\sum_{j=1}^{r-1} l_j \leq x \leq \sum_{j=1}^r l_j$  :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = & A_{ri} \left( \sin \left( k_i \left( x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) - \frac{\sin(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)} \sinh \left( k_i \left( x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right) + B_{ri} \left( \cos \left( k_i \left( x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right) \\ & - \cosh \left( k_i \left( x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) + \frac{\cosh(k_i l_r) - \cos(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)} \sinh \left( k_i \left( x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

$r = 2, 3, \dots, R-1$  et  $R \geq 3$

Pour  $l - l_R \leq x \leq l$  :

$$\varphi_i(x) = A_{Ri} \left( \sin(k_i(l-x)) - \frac{\sin(k_i l_R)}{\sinh(k_i l_R)} \sinh(k_i(l-x)) \right) \quad (3.8.3)$$

Avec  $k_i$ ,  $A_{i1}$ ,  $A_{ri}$ ,  $B_{ri}$ ,  $r = 2, 3, \dots, R-1$  et  $A_{Ri}$  à déterminer par la résolution du système d'équation suivant :

$$[F]\{A\} = \{0\} \quad (3.9)$$

Les éléments du vecteur  $\{A\}$  et la matrice  $[F]$  sont donnés dans l'annexe 2. Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice  $[F]$  doit être nul, ce qui donne l'équation aux fréquences. La résolution de cette équation, faite par le logiciel Mathematica, donne les valeurs des paramètres  $k_i$ . Pour chaque valeur de  $k_i$ , on détermine les autres constantes par la résolution du système d'équation (3.9) en utilisant la méthode de Gauss.

### 3.4.2 Détermination des fréquences propres $\omega_{ij}$ et des fonctions $h_{ij}(y)$

L'équation différentielle (3.4) doit être vérifiée quelque soit  $x$ , mais sa résolution pour chaque valeur de  $x$  est pratiquement impossible. Pour cette raison, nous proposons de remplacer l'expression (3.5) dans l'équation (3.4), puis multiplions cette dernière par  $\varphi_i(x)$  et intégrons sur toute la longueur de la dalle de roulement du pont, on obtient:

$$D_y \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} \int_0^l \varphi_i^2 dx + 2H \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} \int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx + (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2) h_{ij} \int_0^l \varphi_i^2 dx = 0 \quad (3.10)$$

Divisons (3.10) par  $D_y \int_0^l \varphi_i^2 dx$ , on obtient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left( \frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (3.11)$$

Avec  $k_{1i}$  est un nouveau paramètre de fréquence :

$$k_{1i} = \sqrt{\int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx / \int_0^l \varphi_i^2 dx} \quad (3.12)$$

La solution générale de l'équation différentielle (3.11) est donnée sous la forme suivante :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (3.13)$$

Substitutions l'expression (3.13) dans l'équation (3.11), on obtient :

$$s_{ij}^4 - \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} s_{ij}^2 + \frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} = 0 \quad (3.14)$$

Les racines de l'équation (3.14) sont données par :

$$s_{1ij} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 + \sqrt{H^2k_{1i}^4 - D_y(D_xk_i^4 - \rho h \omega_{ij}^2)}} = \pm r_{1ij} \quad (3.15.1)$$

$$s_{2ij} = \pm J \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 - \sqrt{H^2k_{1i}^4 - D_y(D_xk_i^4 - \rho h \omega_{ij}^2)}} = \pm Jr_{2ij} \quad (3.15.2)$$

Notons que les paramètres  $r_{1ij}$  et  $r_{2ij}$  sont liés par les pulsations  $\omega_{ij}$ . Substituons (3.15.1) et (3.15.2) dans l'expression (3.13), et remplaçant Les fonctions exponentielles par des fonctions trigonométriques et hyperboliques, nous obtenons :

$$h_{ij}(y) = C_{ij} \sin(r_{2ij}y) + D_{ij} \cos(r_{2ij}y) + E_{ij} \sin(r_{1ij}y) + F_{ij} \cos(r_{1ij}y) \quad (3.16)$$

Avec  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $E_{ij}$  et  $F_{ij}$  sont des nouvelles constantes d'intégration qui sont déterminées par l'application des conditions aux limites au niveau des bords libres de la dalle de roulement :  $y = 0$  et  $y = b$  où le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls. En tenant compte de l'expression (3.5), ces conditions aux limites deviennent:

$$\begin{aligned} D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(0) &= 0 \\ D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) &= 0 \\ D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(b) &= 0 \\ D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

En appliquant les conditions aux limites (3.17) à l'expression (3.16), on obtient le système suivant (on omet les indices dans  $r_{1ij}$ ,  $r_{2ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $\theta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ , et  $\chi_{ij}$ ):

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{ij} & 0 & \theta_{ij} \\ \gamma_{ij} & 0 & \chi_{ij} & 0 \\ \alpha_{ij} \sin(r_{2ij}b) & \alpha_{ij} \cos(r_{2ij}b) & \theta_{ij} sh(r_{1ij}b) & \theta_{ij} ch(r_{1ij}b) \\ \gamma_{ij} \cos(r_{2ij}b) & -\gamma_{ij} \sin(r_{2ij}b) & \chi_{ij} ch(r_{1ij}b) & \chi_{ij} sh(r_{1ij}b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= -D_y r_{2ij}^2 - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \theta_{ij} &= D_y r_{1ij}^2 - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \gamma_{ij} &= -D_y r_{2ij}^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_{2ij} k_{1i}^2 \\
 \chi_{ij} &= D_y r_{1ij}^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_{1ij} k_{1i}^2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pour une solution non-triviale du système (3.18), l'équation des fréquences vaut :

$$2\alpha_{ij}\theta_{ij}\gamma_{ij}\chi_{ij}(-1+\cos(r_{2ij}b)\cos(r_{1ij}b))+(\theta_{ij}^2\gamma_{ij}^2-\alpha_{ij}^2\chi_{ij}^2)\sin(r_{2ij}b)\sin(r_{1ij}b)=0 \tag{3.20}$$

Pour chaque valeur de  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on calcul la valeur de  $k_{1i}$  et à l'aide du logiciel Mathematica, on détermine les racines  $r_{1ij}$  ou  $r_{2ij}$  de l'équation aux fréquences (3.20). Les expressions (3.15.1) et (3.15.2) permettent de calculer les pulsations  $\omega_{ij}$ . Pour déterminer les modes propres de la dalle du pont, on peut simplifier le système (3.18) en normant la première composante  $C_{ij}$  du vecteur inconnu à 1 ( $C_{ij} = 1$ ). On aura donc quatre équations à trois inconnus. On choisit trois équations parmi les quatre :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ij} & 0 & \theta_{ij} \\ 0 & x_{ij} & 0 \\ \alpha_{ij} \cos(r_{2ij}b) & \theta_{ij} sh(r_{1ij}b) & \theta_{ij} ch(r_{1ij}b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_{ij} \\ \alpha_{ij} \sin(r_{2ij}b) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

D'où on obtient les expressions des constantes  $D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}$  :

$$D_{ij} = (\alpha_{ij} \sin(r_{2ij}b) - \frac{\gamma_{ij}\theta_{ij}}{\chi_{ij}} \sinh(r_{1ij}b)) / \alpha_{ij} (\cosh(r_{1ij}b) - \cos(r_{2ij}b))$$

$$E_{ij} = -\gamma_{ij} / \chi_{ij} \tag{3.27}$$

$$F_{ij} = (-\alpha_{ij} \sin(r_{2ij}b) + \frac{\gamma_{ij}\theta_{ij}}{\chi_{ij}} \sinh(r_{1ij}b)) / (\theta_{ij} \cosh(r_{1ij}b) - \theta_{ij} \cos(r_{2ij}b))$$

Donc les modes propres de la dalle de roulement multi-travées sont :

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) \{ \sin r_{2ij}y + D_{ij} \cos r_{2ij}y + E_{ij} sh r_{1ij}y + F_{ij} ch r_{1ij}y \} \tag{3.28}$$

### 3.5 Projection de l'équation du mouvement de la dalle dans la basse modale

On suppose que le véhicule se déplace le long du pont ce que signifie que les  $y_k$  sont constantes. Comme la vitesse de roulement est considérée constante, donc  $x_k(t) = v_x t_k$ . La résolution de l'équation du mouvement (3.1) est menée par la méthode de superposition modale. On décompose le déplacement vertical  $w(x, y, t)$  de la dalle du pont dans la base modale de la manière suivante :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (3.29)$$

Où  $\phi_{ij}(x, y)$  sont les modes propres d'une plaque mince orthotrope et multi-travées auxquelles sont associées les pulsations propres  $\omega_{ij}$  et  $q_{ij}(t)$  sont les coordonnées généralisées.

Remplaçant l'expression (3.29) dans l'équation de mouvement (3.1), puis multiplions les deux membres par  $\phi_{kl}(x, y)$  et intégrons sur toute la surface du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_S \bar{m} \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \ddot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_S c \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \dot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \\ & \iint_S D_x \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + 2 \iint_S H \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial y^2} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \\ & \iint_S D_y \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy = - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \phi_{kl} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'orthogonalité des modes propres permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{m} \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \\ \iint_S c \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ C_{ij} = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \\ \iint_S \left( D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ \omega_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Où  $\xi_{ij}$  sont les facteurs d'amortissement modaux visqueux de dalle du pont.

En tenant compte des relations d'orthogonalité (3.31), les termes dans (3.30), dont  $ij \neq kl$  disparaissent et il reste  $(i, j)$  équations modales découplées :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij}(t) + C_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + K_{ij} q_{ij}(t) = F_{ij}(t) \quad (3.32)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \iint_S \bar{m} \phi_{ij}^2(x, y) dx dy \\ C_{ij} &= \iint_S c \phi_{ij}^2(x, y) dx dy = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\ K_{ij} &= \iint_S \left( D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{ij}(x, y) dx dy = M_{ij} \omega_{ij}^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) \phi_{ij}(x, y) ds \\ &= - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \phi_{ij}(x_k(t), y_k) \end{aligned}$$

### 3. 6 Modélisation du profil de la chaussée

Le profil statique de la chaussée est déterminé par le profil en long de la route auquel est superposé les dénivellations aux appuis, les tassements différentiels des fondations ou les défauts d'alignement des travées, les contre flèches, les flèches dues aux effets différés et la rugosité du revêtement. Ces différentes composantes proviennent des tolérances de construction, des conditions d'exploitation ou des effets du temps. Les irrégularités du profil statique de la chaussée ont pour effet d'induire et d'entretenir les oscillations de la charge sur le système de suspension du véhicule. Il existe deux types d'approches pour définir les caractéristiques probabilistes des irrégularités aléatoires d'une route : l'approche basée sur la fonction d'auto-corrélation et l'approche basée sur la densité spectrale. Cheung et al. (1999), ont modélisé le profil de la voie de roulement par une fonction harmonique avec la prise en compte de deux paramètres: la hauteur et la longueur du profil. On peut modéliser le profil de la surface de roulement par un processus aléatoire stationnaire gaussien, caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de décrire la qualité de surface de

roulement. La fonction spectrale dans le domaine fréquentiel  $S_r$  (en fonction de la fréquence spatiale  $f_s = \omega_s/2\pi$ ), associée à ce processus est donnée par l'expression suivante :

$$S_r(\omega_s) = \begin{cases} A_r \left( \frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_1} & \text{pour } \omega_s \leq \omega_{s0} \\ A_r \left( \frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-\alpha_2} & \text{pour } \omega_s > \omega_{s0} \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $A_r = A_r(\omega_{s0})$  est le coefficient de rugosité spectrale (valeur de la densité spectrale), qui caractérise l'état de la voie de roulement ( $\text{m}^3/\text{cycle}$ ),  $\omega_{s0}$  est la pulsation de discontinuité ( $\omega_{s0} = 1/2\pi \text{ cycle/m}$ ),  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des exposants de rugosité spectrale. Une proposition pour la classification de la rugosité des ponts a été développée sur la base d'un paramètre du spectre  $A_r(\omega_{s0})$  avec un exposant constant  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$  (ISO 8608, 1995).

La densité spectrale est alors donnée par :

$$S_r(\omega_s) = A_r \left( \frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (3.35)$$

La fonction de densité spectrale de puissance  $S_r(\omega_s)$  est représentée dans un graphique où l'échelle est logarithmique. Une représentation approximative d'un profil aléatoire gaussien peut être obtenue à partir d'une DSP. Cette représentation considère que le profil résulte de la somme d'un nombre infini de sinusoides de phase aléatoire  $\theta_k$  indépendantes et uniformément distribuées entre  $0$  et  $2\pi$

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4S_r(\omega_{sk})\Delta\omega_s} \cos(\omega_{sk}x + \theta_k) \quad (3.36)$$

où  $N$  est le nombre de points de discrétisation en fréquence,  $\omega_{sk}$  est le nombre d'ondes ( $\omega_{sk} = 2\pi k/L_c \text{ cycle/m}$ ) et  $\Delta\omega = 2\pi/L_c$ . L'expression de la valeur discrète de la densité spectrale de puissance est:

$$S_r(\omega_{sk}) = A_r \left( \frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (3.37)$$

Remplaçons  $S_r(\omega_{sk})$  par sa valeur discrète dans l'expression (3.36), on obtient:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4 A_r \left( \frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c}} \cos(\omega_{sk} x + \theta_k) \quad (3.38)$$

Où  $L_c$  est la longueur totale d'échantillonnage qui en général égale la longueur total de la dalle de roulement multipliée par 2 (m),  $l$  est la longueur de la dalle considéré (m).

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé la dalle de roulement par une plaque orthotrope multi-travées. Tous les appuis sont considérés rigides. La méthode modale est utilisée pour résoudre l'équation du mouvement de la dalle de roulement en vibrations libres et forcés. Pour le calcul des fréquences et des modes propres, nous avons pris en compte le couplage intermodal généralement négligé dans la littérature malgré son influence sur les modes de torsion car la dalle est orthotrope. En vibrations forcées, l'application de la méthode modale permet d'obtenir un système d'équations modales découplées en bénéficiant de l'orthogonalité des modes propres. Ce système sera intégré numériquement dans le chapitre suivant. Le profile de la chaussée est modélisé par une DSP caractérisée par un coefficient de rugosité spectrale qui caractérise l'état de la chaussée.



## **Chapitre 4**

### **Résolution numérique des équations couplées dalle de roulement/camion**

#### **4.1 Introduction**

Nous présentons dans ce chapitre, les différents méthodes et techniques de résolution des équations de mouvement qui existent dans la littérature. Nous utilisons également la méthode de Newmark pour intégrer les équations de mouvement couplées obtenues dans les chapitres deux et trois. Après intégrations, nous proposons une technique de résolution découplée avec un processus de calcul itératif.

#### **4.2 Méthodes de résolution des équations de mouvement**

Il existe principalement deux familles d'algorithmes pour intégrer l'équation dynamique, l'algorithme implicite ou l'algorithme explicite.

- Les algorithmes implicites sont numériquement stables et permettent des pas de temps relativement large. Par contre, le coût par pas de temps est élevé, particulièrement pour des problèmes de grandes tailles. En générale, ces algorithmes sont très efficaces pour l'analyse dynamique des structures.
- Les algorithmes explicites sont moins chers par pas de temps et requièrent moins d'espace de stockage que les algorithmes implicites. Par contre, la stabilité numérique exige des pas très petit. Ces algorithmes sont très efficaces pour les problèmes de propagation d'ondes. Parmi les méthodes implicites et explicites utilisées pour résoudre les problèmes d'interaction dalle de roulement/véhicule, la méthode implicite de Newmark et la méthode explicite des différences finies sont retenues.

### 4.3 Intégration numérique des équations de mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule, nous utilisons la méthode d'intégration numérique de Newmark.

#### 4.3.1 Intégration numérique des équations de mouvement du camion

À l'instant  $t + \Delta t$ , l'équation de mouvement (2.11) du chapitre 2 s'écrit :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (4.1)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses respectivement sont :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (4.3)$$

$\gamma$  et  $\beta$  sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark,  $\Delta t$  est le pas du temps d'intégration. Remplaçons les expressions (4.2) et (4.3) dans l'équation (4.1), après factorisation on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (4.4)$$

Avec :

$$[S_v] = [M_v] + \gamma \Delta t [C_v] + \beta \Delta t^2 [K_v] \quad (4.5)$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (4.6)$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (4.7)$$

Multiplions l'équation (4.4) par  $[S_v]^{-1}$ , on obtient :

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} \quad (4.8)$$

Avec :

$$\{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1} (\{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t}); [U_v] = [S_v]^{-1} [C_v]; [V_v] = [S_v]^{-1} [K_v] \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Intégration numérique des équations de mouvement de la dalle de roulement

L'équation du mouvement de la dalle de roulement (3.32) du chapitre 3, à l'instant  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.10)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés du pont, à l'instant  $t + \Delta t$  sont:

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.11)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.12)$$

Remplaçons les expressions (4.11) et (4.12) dans l'équation (4.10), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left( \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{*(t+\Delta t)} \right) / \left( 1 + 2\Delta t \xi_{ij}\omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2 \right) \quad (4.13)$$

Avec :

$$q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)} \quad (4.14)$$

$$\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \quad (4.15)$$

## 4.4 Méthodes de résolutions de problèmes d'interaction dynamique

Il y a deux méthodes de simuler l'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile (Figure 4.1). La première est basée sur une méthode itérative découplée, dans laquelle chaque système d'équations de mouvement pour la dalle de roulement et pour le véhicule est résolu séparément et un processus de calcul itératif à chaque pas de temps est nécessaire pour chercher l'équilibre dynamique entre la dalle de roulement et les pneus du véhicule. La deuxième méthode consiste à coupler les équations du mouvement du véhicule avec ceux de la dalle de roulement et

deconstruire aussi un super-système d'équations. La solution est obtenue à chaque pas du temps sans aucune itération. Cette méthode présente des avantages et des inconvénients. Parmi les avantages, on peut citer : le temps de calcul est réduit en comparaison avec la méthode itérative découplée; mise en place numérique facile; mémoire de stockage réduite; aucune factorisation de la matrice globale; aucune itération dans le procédé de calcul. Cependant, les principaux inconvénients sont : la projection modale dans le sous-espace est indispensable, et si les haute fréquences de la dalle de roulement participent dans la réponse, ceci créera un problème dans la réponse dynamique; cette méthode est bien adaptée seulement pour un nombre de véhicules moins important présentant en même temps sur la dalle (cette remarque s'applique également à la méthode itérative découplée).

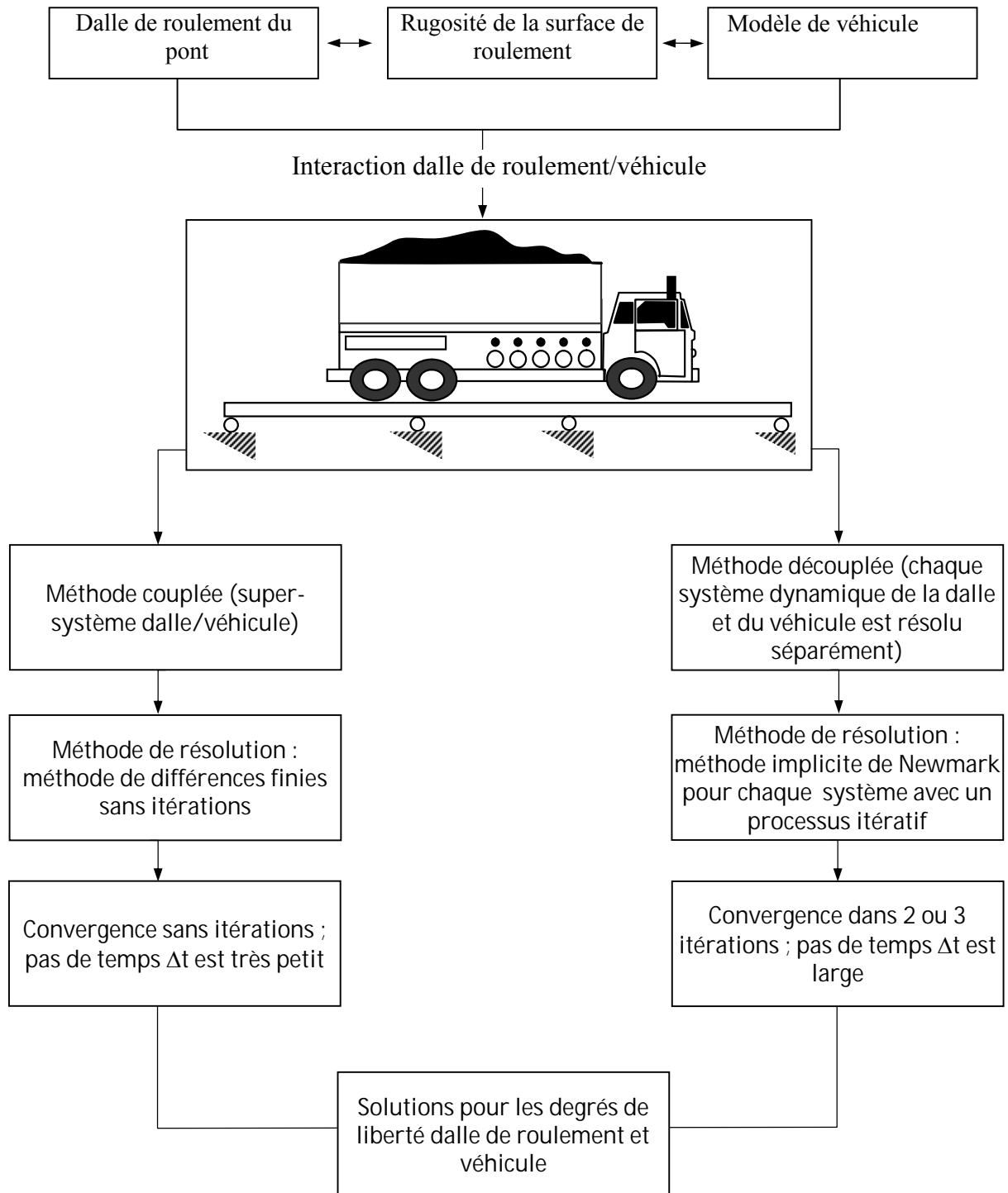


Figure 4.1 : Différentes procédures pour la résolution des problèmes d'interaction dynamique dalle de roulement/véhicule.

#### 4.5 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution comprend deux boucles. La première boucle est celle des pas du temps et la seconde correspond aux itérations. On calcule les déplacements et les vitesses de la dalle du pont et du véhicule, en utilisant les expressions (4.1) et (4.10). On fait une approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle et du véhicule à partir de l'itération précédente ( $\bar{k}$ ) (Figure4.2 et 4.3), puis on calcul les forces d'interaction en chaque point de contact puis on résout l'équation de mouvement du véhicule (4.1) par la méthode de Newmark. On calcule par la suite le vecteur des forces d'interaction qui agissent sur la dalle du pont en chaque point de contact. On résout par la méthode de Newmark, l'équation modale (4.10) du pont puis on fait un test de convergence entre le déplacement vertical du pont  $w^{(\bar{k}+1)}$  de l'itération ( $\bar{k} + 1$ ) et  $w^{(\bar{k})}$  de l'itération précédente :

$$\left| w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - w^{(\bar{k})}(x, y, t) \right| \leq \varepsilon \quad (4.16)$$

Si cette condition est vérifiée, on calcule les paramètres dynamiques voulus, puis on passe au pas du temps suivant, Si non, on passe à l'itération suivante telle que le déplacement  $w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t)$  devient une approximation de l'itération prochaine et on refait le calcul jusqu'à la convergence.

#### 4.6 Conclusion

Nous avons intégré numériquement les équations de mouvement couplées dalle de roulement/camion par la méthode de Newmark. C'est un schéma implicite à pas unique inconditionnellement stable de précision maximale. Un algorithme est présenté qui permet la résolution des équations de mouvement d'une manière découplée avec un processus de calcul itératif. Un programme principal en FORTRAN est élaboré et qui permet de simuler le passage du camion sur la dalle du pont.

- Lecture des données de la dalle de roulement du pont
- Lecture des données du véhicule
- Lecture des données de la chaussée
- Calcul de :  $D_x, D_y, H, D_{xy}, G_{xy}, \bar{m}$
- Choix du nombre de modes:  $n, m$
- Lecture des fréquences  $\omega_{ij}$  calculées par MATHEMATICA
- Calcul des modes propres  $\phi_{ij}$
- Choix de la vitesse de roulement:  $v$
- Choix du pas de temps  $\Delta t$ , des paramètres  $\gamma, \beta$ , et de la tolérance  $\varepsilon$
- Calcul des matrices du pont :  $M_{ij}, K_{ij}, C_{ij}$
- Calcul des matrices du modèle de véhicule:  $[M_v], [C_v], [K_v]$
- Choix des conditions initiales pour le pont :  $q_{ij}^{(0)}, \dot{q}_{ij}^{(0)}, \ddot{q}_{ij}^{(0)}$
- Choix des conditions initiales pour le véhicule :  $\{Z_v\}_0, \{\dot{Z}_v\}_0, \{\ddot{Z}_v\}_0$
- Choix de cheminement du véhicule sur la dalle de roulement du pont

Pour chaque pas du temps  $t = t + \Delta t$  :

- Détermination de la position longitudinale du véhicule sur le pont :  $x_k = v t_k$
  - Calcul du profile de la route en chaque point de contact  $k$  :  $r_k, r'_k$
  - Approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle de roulement du pont et du véhicule à partir de l'itération précédente
- $$\begin{aligned} \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} &= \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta)\Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t; \quad \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma)\Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \\ q_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}; \quad \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \end{aligned}$$

Pour chaque itération  $\bar{k} = \bar{k} + 1$  :

- Calcul en chaque point de contact  $k$  :  $w_k, \dot{w}_k, \dot{r}_k$
- Calcul des forces d'interaction  $F_k^{int} = k_{pk}(w_k + r_k) + c_{pk}(\dot{w}_k + \dot{r}_k)$
- Calcul du vecteur  $\{F^{int}\}$
- Calcul du vecteur des forces dues aux effets de la gravité :  $\{F_g\}$
- Résolution (Newmark) :  $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$
- Calcul des forces d'interaction agissant sur la dalle en chaque point de contact :

$$F_{pk}^{int} = k_{pk}(w_k + r_k - z_k) + c_{pk}(\dot{w}_k + \dot{r}_k - \dot{z}_k)$$

- Résolution (Newmark) :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij} + \omega_{ij}^2 q_{ij} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij} \quad \text{avec } F_{ij} = -\sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k)$$

- Calcul du déplacement de la dalle de roulement :  $\omega(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t)$

- Test de convergence:

$$\text{Si non} \quad \left| \omega^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - \omega^{(\bar{k})}(x, y, t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{Si oui}$$

Figure 4.2 : Algorithme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule.

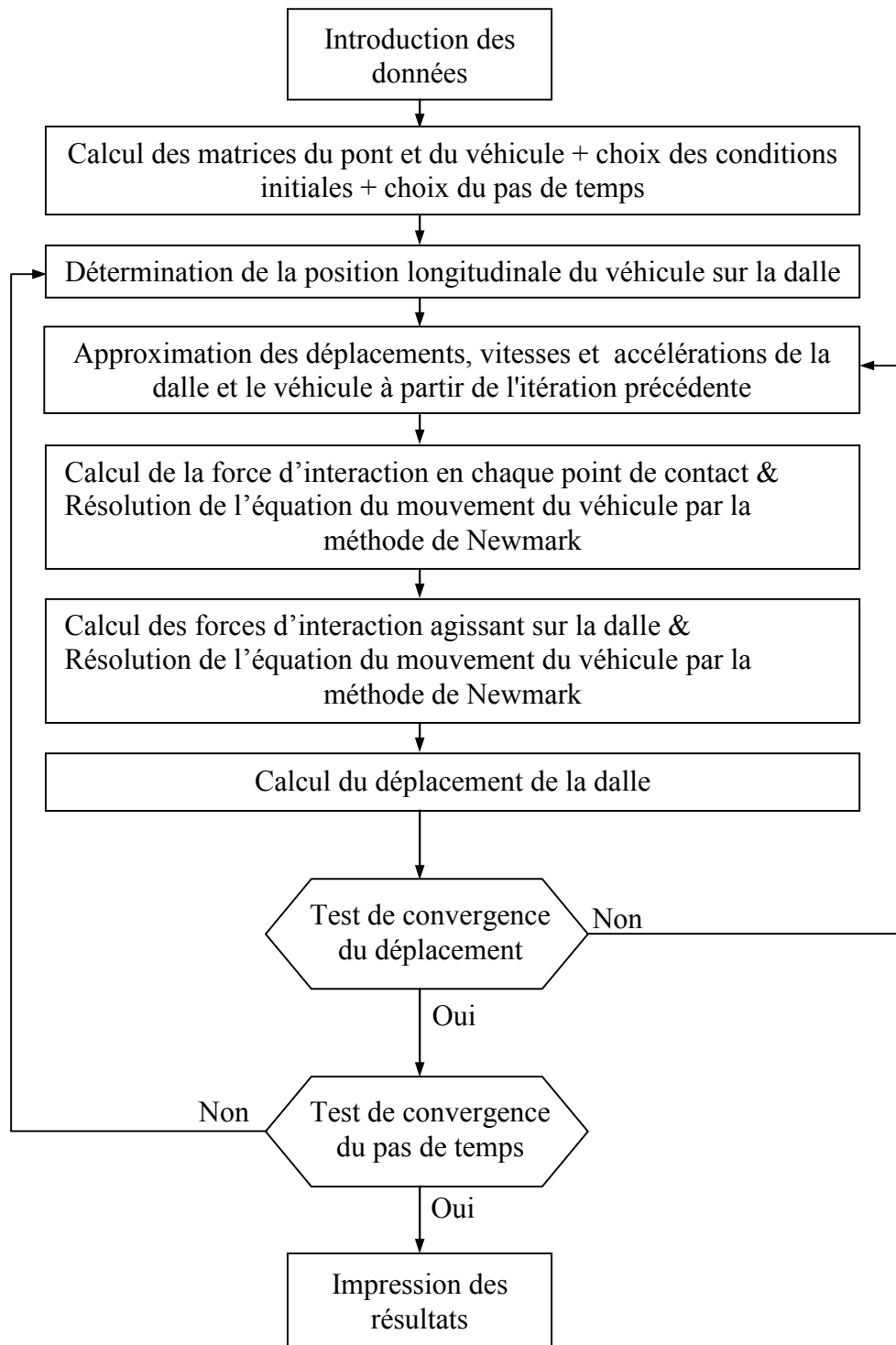


Figure 4.3 : Organigramme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule



## Chapitre 5

### Analyse des réponses dynamiques

#### 5.1 Introduction

Sur la base de la modélisation et de l'algorithme de résolution proposé, qui sont présentés dans le chapitre 2, 3 et 4 nous avons élaboré un programme de calcul en langage FORTRAN. Ce programme permet la résolution numérique des équations du mouvement dans le cas étudié. Cette résolution est basée sur la méthode modale et la méthode d'intégration numérique de Newmark. Dans ce chapitre nous avons présenté deux exemples numériques avec comparaison. La première concerne la comparaison des fréquences et des modes propres des trois dalles de roulement multi-travées. Le deuxième exemple concerne le calcul de la réponse dynamique d'une dalle de roulement orthotrope multi-travées, sous la sollicitation d'un modèle de véhicule avec d'essieux tandem à l'arrière.

#### 5.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement multi-travées

Pour vérifier la généralisation et l'efficacité de la méthode présentée dans cette étude, trois exemples sont présentés et comparés :

- une dalle de roulement orthotrope à trois travées (figure 5.1a) de longueur  $l = 78$  m et longueurs des travées  $l_1 = l_3 = 24$  m et  $l_2 = 30$  m. Les paramètres de la dalle de roulement du pont sont présentés dans le tableau 5.1.
- une dalle de roulement orthotrope à quatre travées (figure 5.1b) de longueur  $l = 108$  m et longueurs des travées  $l_1 = l_4 = 24$  m et  $l_2 = l_3 = 30$  m. Les paramètres de la dalle de roulement du pont sont présentés dans le tableau 5.2.
- une dalle de roulement orthotrope à cinq travées (figure 5.1c) de longueur  $l = 138$  m et longueurs des travées  $l_1 = l_5 = 24$  m and  $l_2 = l_3 = l_4 = 30$  m. Les paramètres de la dalle de roulement du pont sont présentés dans le tableau 5.3.

**Tableau 5.1** : Paramètres de la dalle de roulement à trois travées

<b>Dalle de roulement en béton :</b>	
Longueur	78 m
Largeur	13.715 m
Épaisseur	0.2 m
Modules de Young	$E_x = 4.17 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, E_y = 2.97 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densité de masse	$3000 \text{ kg/m}^3$
Rapport de Poisson	$\nu_{xy} = 0.3$
<b>Raidisseurs en acier :</b>	
Nombre	5
Distance entre deux raidisseurs	2.743 m
Hauteur de l'âme	1.49 m
Épaisseur de l'âme	0.0111 m
Largueur de la semelle	0.405 m
Épaisseur de la semelle	0.018 m
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
<b>Entretoises en acier :</b>	
Nombre	14
Distance entre deux entretoises	6 m
Section	$15.48 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
Moments d'inerties	$I_y = 0.71 \times 10^{-6} \text{ m}^4, I_z = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^4, J = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$

**Tableau 5.2** : Paramètres de la dalle de roulement à quatre travées

<b>Dalle de roulement en béton :</b>	
Longueur	108 m
Largeur	13.715 m
Épaisseur	0.2 m
Modules de Young	$E_x = 4.17 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, E_y = 2.97 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densité de masse	$3000 \text{ kg/m}^3$
Rapport de Poisson	$\nu_{xy} = 0.3$
<b>Raidisseurs en acier :</b>	
Nombre	5
Distance entre deux raidisseurs	2.743 m
Hauteur de l'âme	1.49 m
Épaisseur de l'âme	0.0111 m
Largueur de la semelle	0.405 m
Épaisseur de la semelle	0.018 m
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
<b>Entretoises en acier :</b>	
Nombre	19
Distance entre deux entretoises	6 m
Section	$15.48 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
Moments d'inerties	$I_y = 0.71 \times 10^{-6} \text{ m}^4, I_z = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^4, J = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$

**Tableau 5.3** : Paramètres de la dalle de roulement à cinq travées

<b>Dalle de roulement en béton :</b>	
Longueur	138 m
Largeur	13.715 m
Épaisseur	0.2 m
Modules de Young	$E_x = 4.17 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, E_y = 2.97 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densité de masse	$3000 \text{ kg/m}^3$
Rapport de Poisson	$\nu_{xy} = 0.3$
<b>Raidisseurs en acier :</b>	
Nombre	5
Distance entre deux raidisseurs	2.743 m
Hauteur de l'âme	1.49 m
Épaisseur de l'âme	0.0111 m
Largueur de la semelle	0.405 m
Épaisseur de la semelle	0.018 m
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
<b>Entretoises en acier :</b>	
Nombre	24
Distance entre deux entretoises	6 m
Section	$15.48 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Densité de masse	$7850 \text{ kg/m}^3$
Moments d'inerties	$I_y = 0.71 \times 10^{-6} \text{ m}^4, I_z = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^4, J = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$

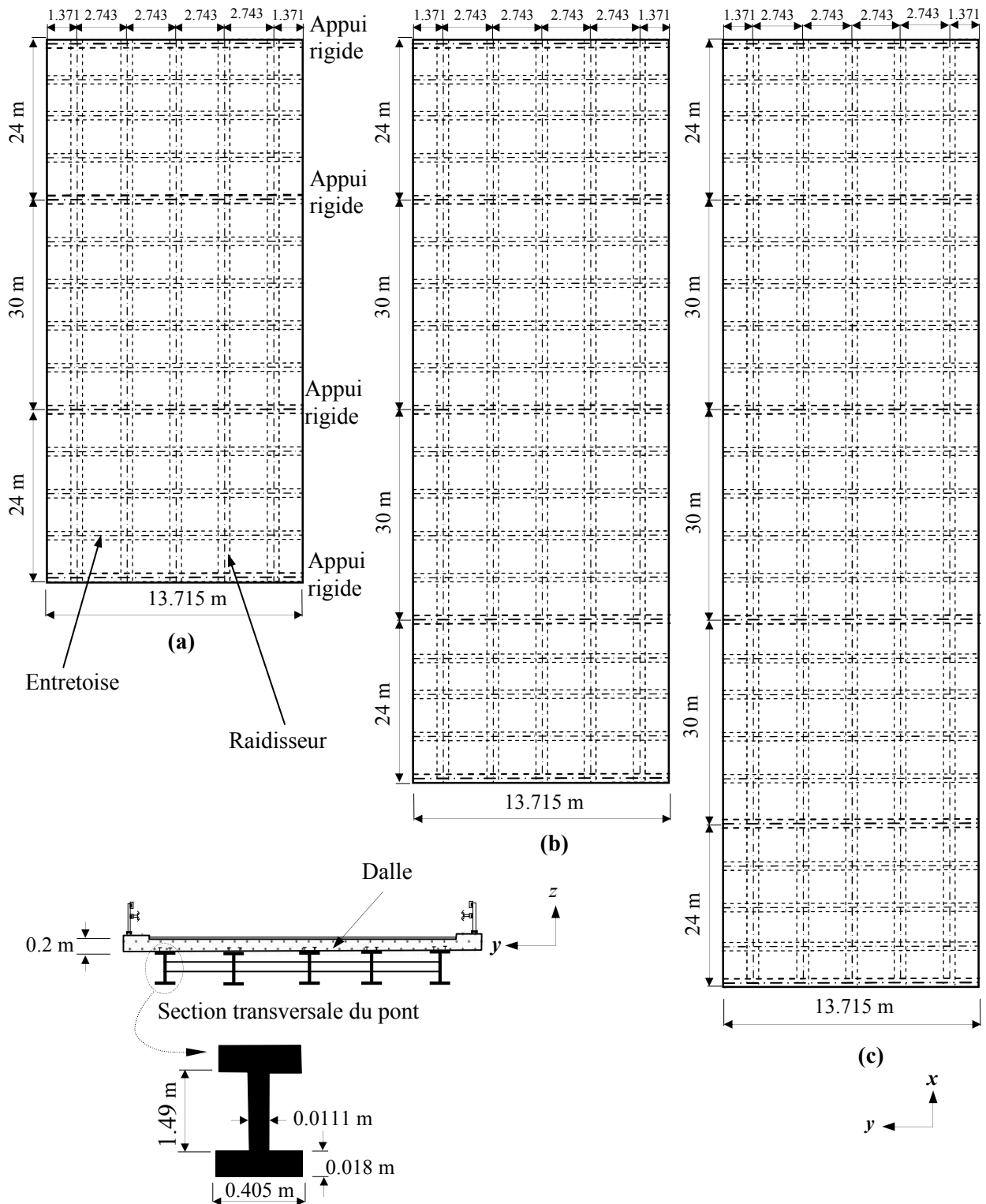


Figure 5.1 : Dalle de roulement multi-travées : (a) trois travées, (b) quatre travées, (c) cinq travées.

Dans le cas de l'exemple présenté par Zhu et Law (2002) et utilisé ici, les propriétés de la plaque orthotrope équivalente n'apparaissent pas d'une manière explicite sauf les rigidités équivalentes  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_{xy}$ . Pour cela, une homogénéisation de cette structure composite est nécessaire. Une méthode très simple, pour calculer les propriétés équivalentes de cette structure est utilisée (voir annexe 3). Cette méthode est basée sur les notions des fractions volumiques et massiques d'un matériau composite renforcé. Les propriétés de plaque orthotrope équivalente ont été obtenues en conservant les rigidités équivalentes  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_{xy}$ . Les autres caractéristiques de la dalle orthotrope équivalente sont les suivantes :

$b = 13.715$  m,  $h = 0.212$  m,  $\rho = 3265$  kg m<sup>-3</sup>,  $D_x = 2.41 \times 10^9$  N m,  $D_y = 2.18 \times 10^7$  N m,  $D_{xy} = 1.14 \times 10^8$  N m,  $\nu_{xy} = 0.3$ ,  $E_x = 3.06 \times 10^{12}$  N/m<sup>2</sup>,  $E_y = 2.76 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $G_{xy} = 1.45 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.

La comparaison des résultats s'effectue avec la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS version 10. Pour calculer les fréquences et les modes propres par ANSYS, nous avons introduit tout d'abord toutes les propriétés mécaniques et géométriques équivalentes pour chaque cas de la dalle de roulement. L'élément choisi pour mailler la dalle est de type « shell 63 » à quatre nœud et 6 degrés de liberté par nœud. La méthode modale et la méthode d'extraction « bloc LANCZOS » sont utilisées. La convergence en fonction de la densité du maillage pour chaque cas est résumée dans le tableau 5.4.

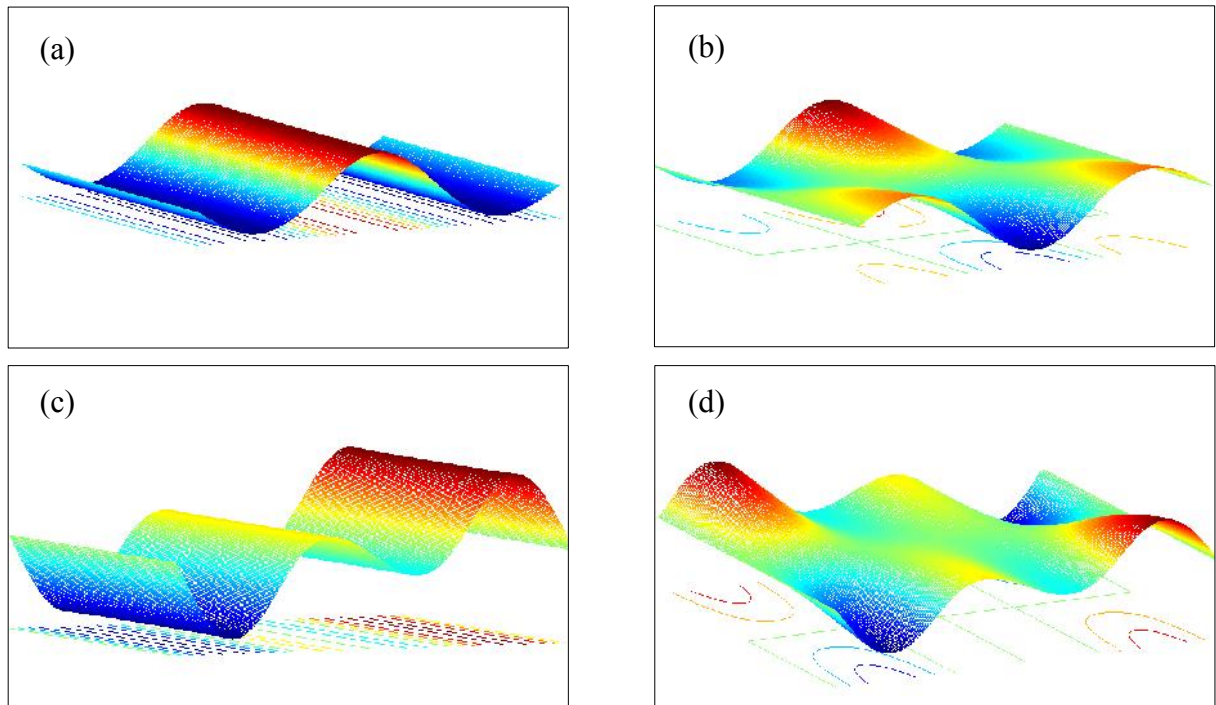
**Tableau 5.4** : La convergence en fonction de la densité de maillage

Mode	Trois travées			Quatre travées			Cinq travées		
	78×10	156×20	312×40	108×10	216×20	432×40	138×10	276×20	552×40
1	4.127	4.129	4.129	3.774	3.773	3.773	3.598	3.599	3.599
2	5.448	5.447	5.446	5.098	5.091	5.089	4.498	4.500	4.500
3	6.296	6.300	6.301	5.098	5.098	5.097	4.924	4.922	4.922
4	7.580	7.585	7.586	6.337	6.331	6.329	5.742	5.742	5.743
5	7.746	7.755	7.757	6.844	6.844	6.844	5.750	5.754	5.755
6	8.772	8.786	8.790	7.664	7.668	7.668	6.906	6.911	6.912
7	9.129	9.029	9.004	8.044	8.037	8.035	7.104	7.110	7.112
8	11.377	11.266	11.237	8.671	8.670	8.644	7.607	7.616	7.619
9	12.116	12.032	12.010	8.815	8.681	8.669	8.228	8.238	8.241
10	15.494	15.016	14.896	9.922	9.786	9.749	8.584	8.510	8.484

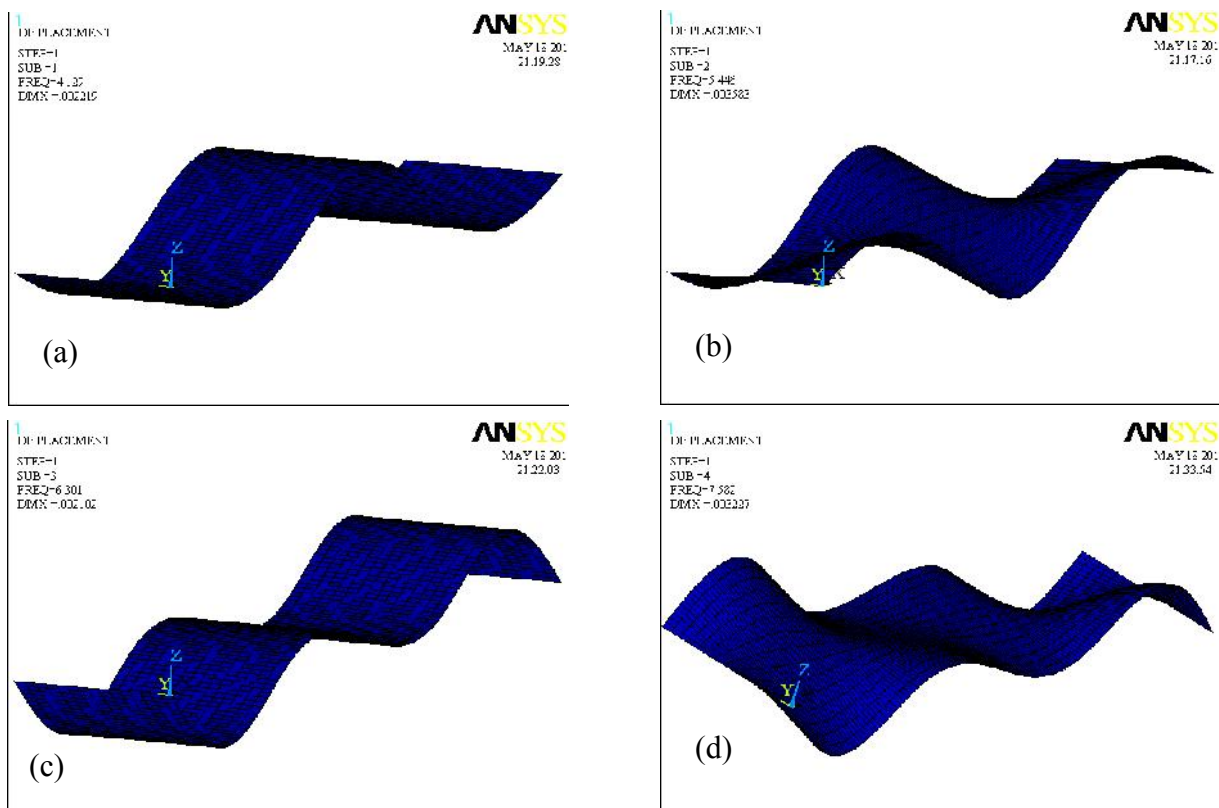
Le tableau 5.5 résume les différences entre les valeurs des dix premières fréquences propres pour les trois cas des dalles du pont. L'analyse et la comparaison des résultats montrent une excellente concordance pour toutes les fréquences (l'erreur ne dépasse pas 2%), ce qui montre la fiabilité et la précision de la méthode proposée pour le calcul des fréquences et des modes propres des dalles multi-travées orthotropes. Cependant, il y a une légère différence entre certaines fréquences des modes de combinés. Cela est dû principalement l'effet du couplage intermodal, tenir en compte dans notre approche. La figure 5.2 montre les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à trois travées obtenus par l'approche proposée (en utilisant FORTRAN avec les résultats tracés dans MATLAB). Alors ceux obtenus par la méthode des éléments finis sont présentés dans la figure 5.3. De même, les figures 5.4, 5.5 et 5.6, 5.7 représentent les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à quatre et cinq travée respectivement. Une excellente concordance entre les modes propres est observée.

**Tableau 5.5** : comparaison des fréquences propres des dalles multi-travées orthotropes

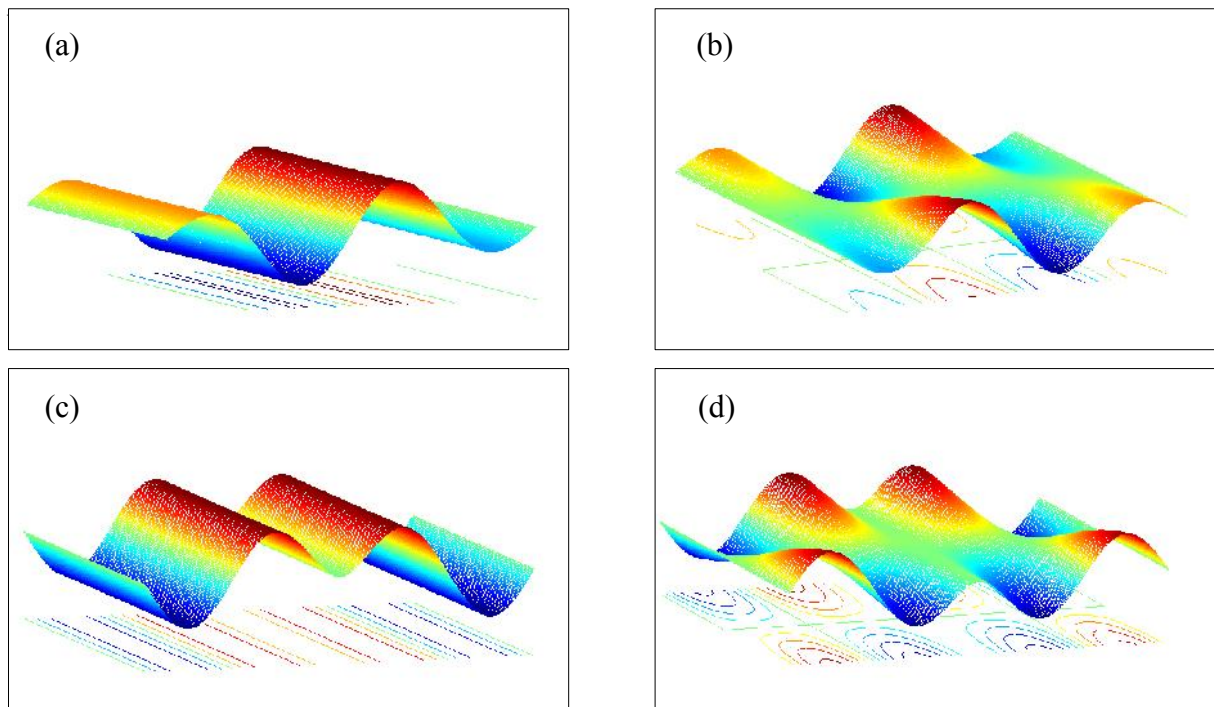
Mode	Trois travées			Quatre travées			Cinq travées		
	Présente approche	ANSYS	Erreur (%)	Présente approche	ANSYS	Erreur (%)	Présente approche	ANSYS	Erreur (%)
1	4.129	4.129	0.000	3.772	3.773	- 0.026	3.593	3.599	- 0.166
2	5.456	5.446	0.183	5.090	5.089	0.019	4.494	4.500	- 0.133
3	6.299	6.301	-0.031	5.092	5.097	- 0.098	4.918	4.922	- 0.081
4	7.588	7.586	0.026	6.450	6.329	1.875	5.745	5.743	0.034
5	7.751	7.757	-0.077	6.838	6.844	- 0.083	5.748	5.755	- 0.121
6	8.777	8.790	-0.148	7.665	7.668	- 0.039	6.929	6.912	0.245
7	9.083	9.004	0.869	8.031	8.035	- 0.049	7.111	7.112	- 0.014
8	11.267	11.237	0.266	8.661	8.644	0.196	7.617	7.619	- 0.026
9	11.975	12.010	-0.292	8.681	8.669	0.138	8.241	8.241	0.000
10	15.069	14.896	1.148	9.771	9.749	0.225	8.592	8.484	1.256



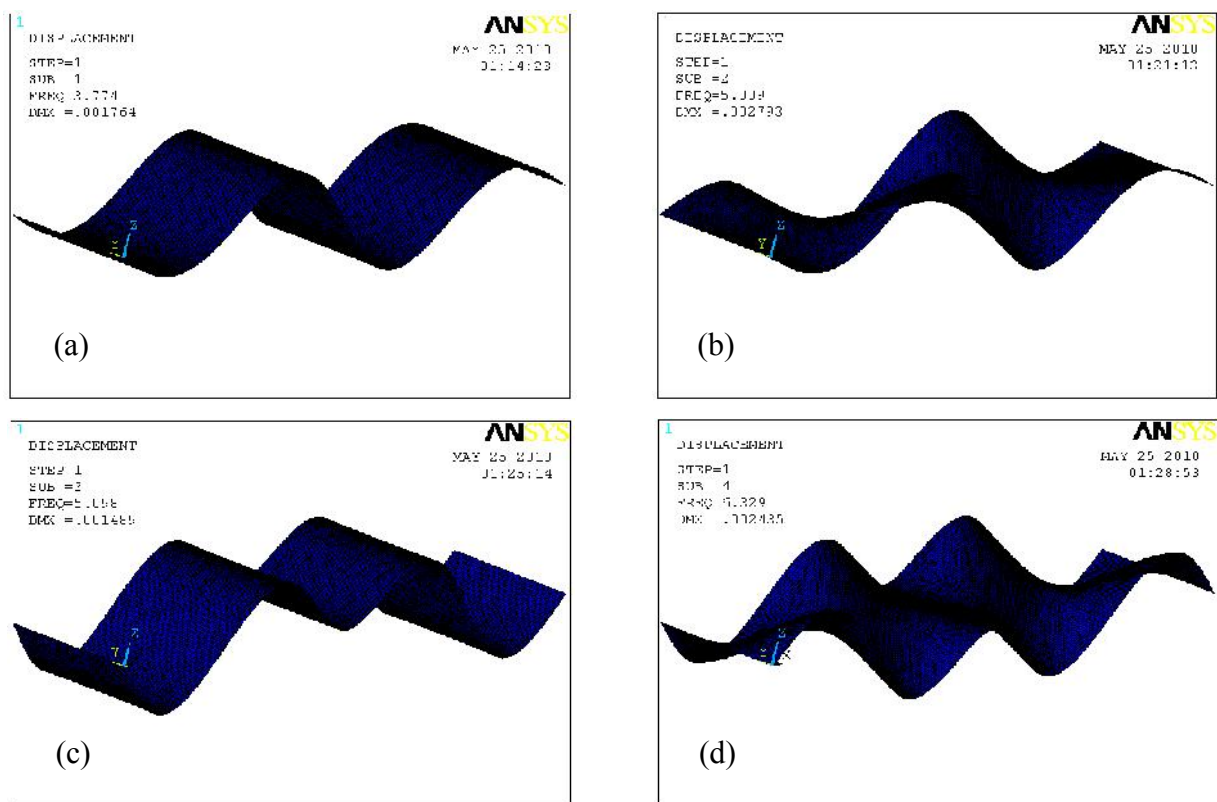
**Figure 5.2** : Les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à trois travées obtenus par la présente approche. Modes : (a) 1,  $f_1 = 4.129$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 5.456$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 6.299$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 7.588$  Hz



**Figure 5.3** : Les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à trois travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1,  $f_1 = 4.129$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 5.446$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 6.301$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 7.586$  Hz

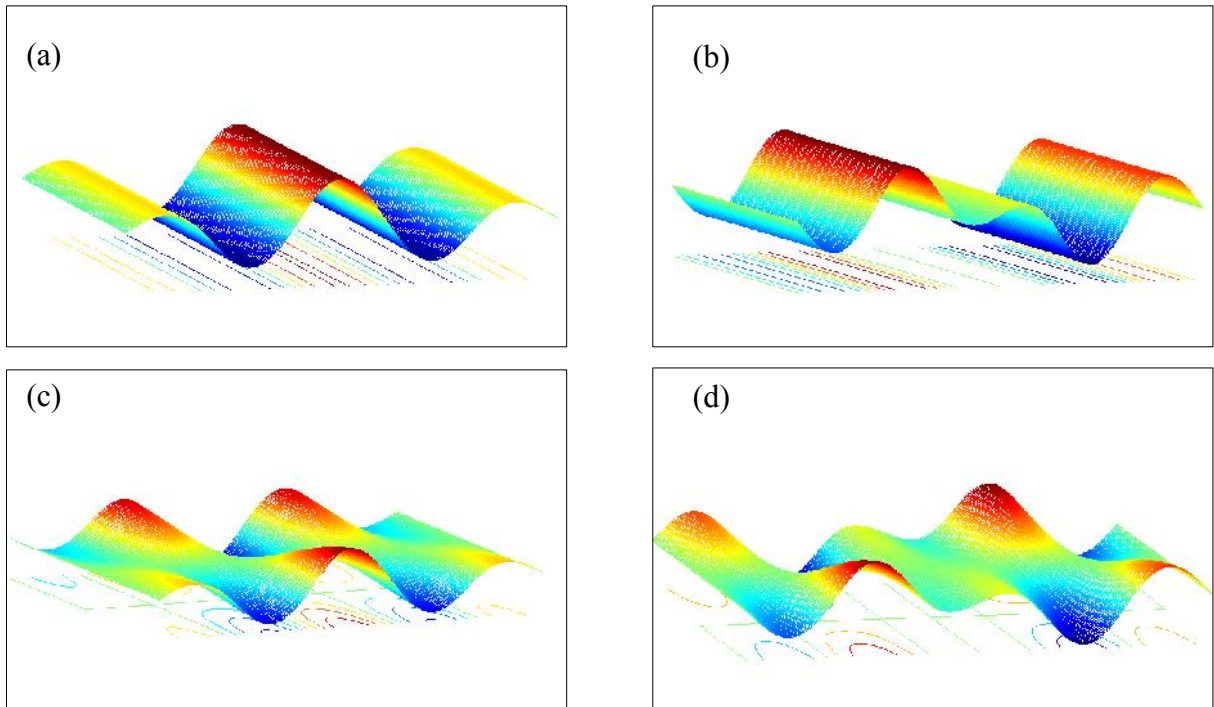


**Figure 5.4** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à quatre travées obtenus par la présente approche. Modes: (a) 1,  $f_1 = 3.772$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 5.090$ ; (c) 3,  $f_3 = 5.092$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 6.450$  Hz

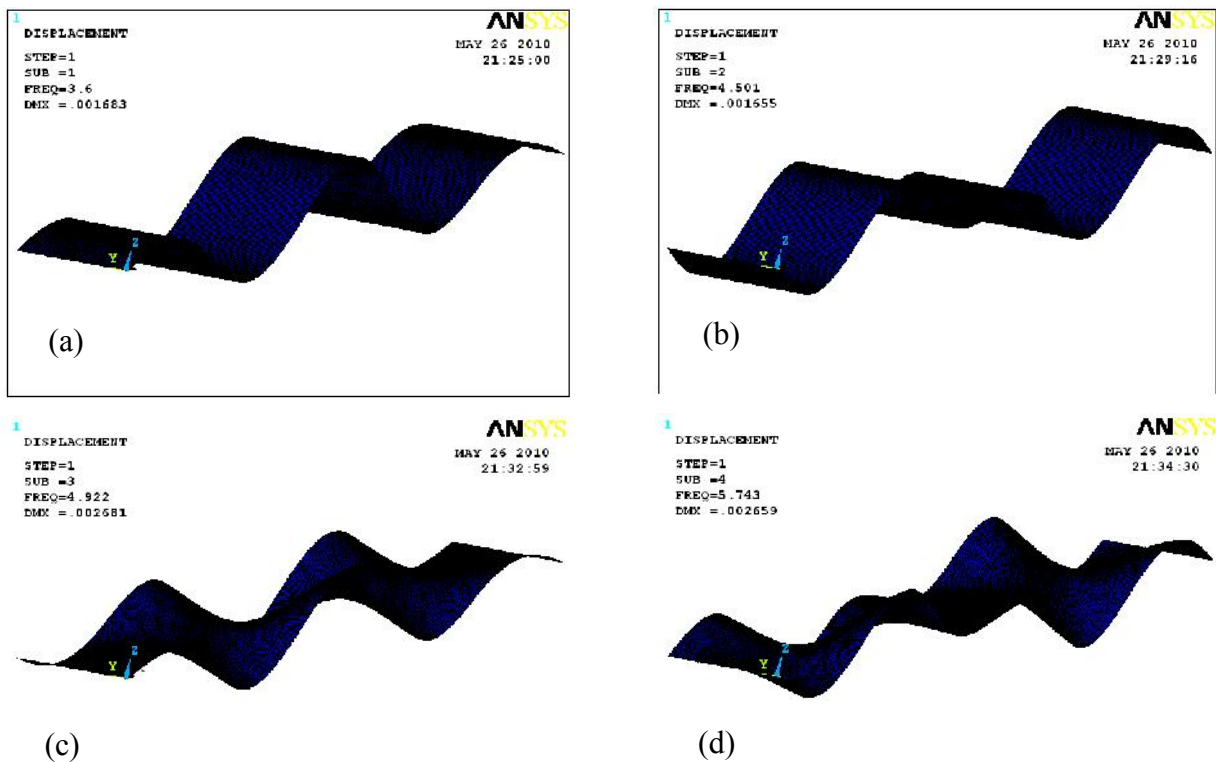


**Figure 5.5** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à quatre travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1,  $f_1 = 3.773$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 5.089$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 5.097$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 6.329$  Hz





**Figure 5.6** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à cinq travées obtenus par la présente approche. Modes: (a) 1,  $f_1 = 3.593$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 4.494$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 4.918$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 5.745$  Hz



**Figure 5.7** : les quatre premiers modes propres de la dalle du pont à cinq travées obtenus par ANSYS. Modes : (a) 1,  $f_1 = 3.599$  Hz; (b) 2,  $f_2 = 4.500$  Hz; (c) 3,  $f_3 = 4.922$  Hz; (d) 4,  $f_4 = 5.743$  Hz

### 5.3 Calcul des réponses dynamiques

Dans cet exemple, nous étudions le comportement dynamique d'une dalle de roulement orthotrope à trois travées possédant les mêmes propriétés mécaniques et géométriques de l'exemple précédant (figure 5.8). La dalle du pont est sollicitée par un modèle de véhicule à neuf degré de liberté avec essieux tandem a l'arrière. Les paramètres utilisés pour ce modèle de véhicule sont représentés dans le tableau 5.6 et la figure 5.9 (Broque 1999).

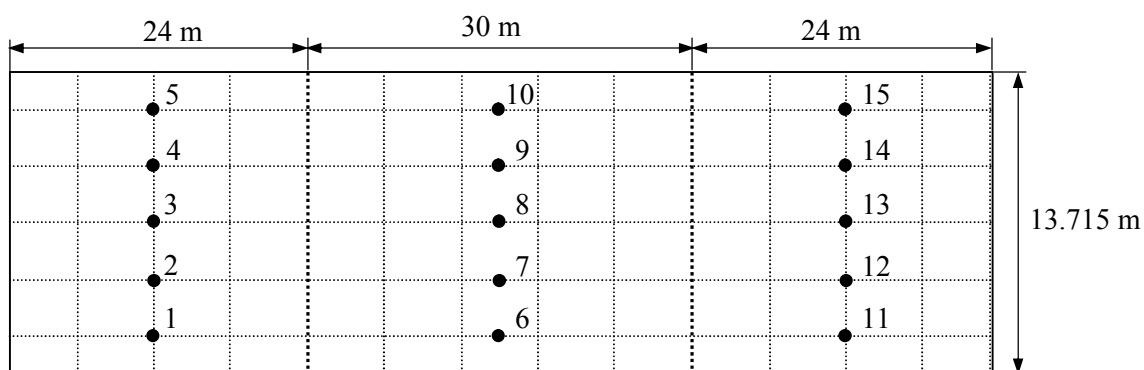


Figure 5.8 : Dalle de roulement du pont à trois travées

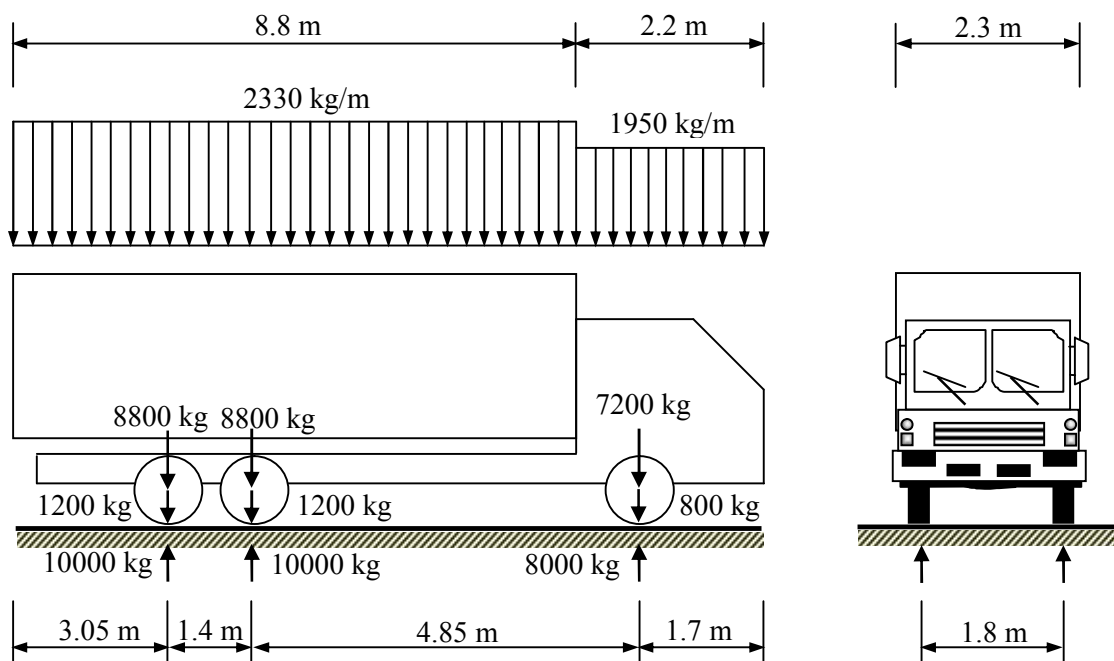


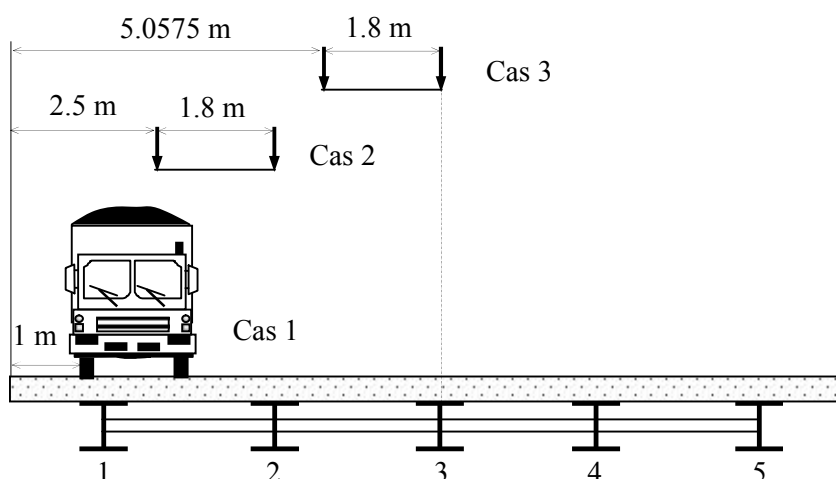
Figure 5.9 : Géométrie et masse du camion chargé

**Tableau 5.6** : paramètres des modèles de véhicule

Paramètres	Modèle à 9ddl	Modèle à 11ddl
<b>Géométrie :</b>		
Hauteur du centre de gravité du véhicule (m)	$h = 1.8$	$h = 1.8$
Distance entre l'essieu avant et le tandem (m)	$s_1 = 5.55$	$s_1 = 5.55$
Distance entre les roues de chaque essieu (m)	$s_3 = 1.8$	$s_3 = 1.8$
Rapport des longueurs		
$a_1$	0.71	0.71
$a_2$	0.29	0.29
$a_3$	0.5	0.5
$a_4$	0.5	0.5
$b_1$	0.5	0.5
$b_2$	0.5	0.5
<b>Masses :</b>		
Du bloc rigide du véhicule (kg)	$m_v = 24800$	$m_v = 24800$
De la liaison entre essieux (kg)	-	$m_{L1} = m_{L2} = 100$
Des roues avant (kg)	$m_1 = m_4 = 800$	$m_1 = m_4 = 800$
Des roues du premier essieu arrière (kg)	$m_2 = m_5 = 1200$	$m_2 = m_5 = 1200$
Des roues du deuxième essieu arrière (kg)	$m_3 = m_6 = 1200$	$m_3 = m_6 = 1200$
Moment d'inertie de tangage (kg m <sup>2</sup> )	$I_{\theta_v} = 241359$	$I_{\theta_v} = 241359$
Moments d'inertie de roulis (kg m <sup>2</sup> )	$I_{\alpha_v} = 34878.46$	$I_{\alpha_v} = 34878.46$
Moment d'inertie de la liaison (kg m <sup>2</sup> )	-	$I_{\theta_{L1}}, I_{\theta_{L2}} = 75$
<b>Rigidités :</b>		
Des suspensions avant (N/m)	$k_{s1} = k_{s3} = 520000$	$k_{s1} = k_{s4} = 520000$
Des suspensions des essieux tandem (N/m)	$k_{s2} = k_{s4} = 2348000$	$k_{s2} = k_{s5} = 1174000$
	-	$k_{s3} = k_{s6} = 1174000$
Des pneus avant (N/m)	$k_{p1} = k_{p4} = 2000000$	$k_{p1} = k_{p4} = 2000000$
Des pneus du 1 <sup>er</sup> essieu arrière (N/m)	$k_{p2} = k_{p5} = 4000000$	$k_{p2} = k_{p5} = 4000000$
Des pneus du 2 <sup>ème</sup> essieu arrière (N/m)	$k_{p3} = k_{p6} = 4000000$	$k_{p3} = k_{p6} = 4000000$
<b>Amortissements :</b>		
Des suspensions avant (Ns/m)	$c_{s1} = c_{s3} = 12194$	$c_{s1} = c_{s4} = 12194$
Des suspensions des essieux tandem (Ns/m)	$c_{s2} = c_{s4} = 40715$	$c_{s2} = c_{s5} = 20357$
	-	$c_{s3} = c_{s6} = 20357$
Des pneus avant (Ns/m)	$c_{p1} = c_{p4} = 4000$	$c_{p1} = c_{p4} = 4000$
Des pneus du 1 <sup>er</sup> essieu arrière (Ns/m)	$c_{p2} = c_{p5} = 6928$	$c_{p2} = c_{p5} = 6928$
Des pneus du 2 <sup>ème</sup> essieu arrière (Ns/m)	$c_{p3} = c_{p6} = 6928$	$c_{p3} = c_{p6} = 6928$

### 5.3.1 Influence du mode de chargement

Plusieurs simulations numériques sont effectuées pour identifier l'influence du mode de chargement mobile sur les réponses dynamiques de la dalle de roulement du pont. Le camion traverse la dalle à une vitesse de 100 km/h selon trois trajectoires différentes (figure 5.10). Nous considérons lors de la simulation que la chaussée est parfaite.



**Figure 5.10** : Différentes trajectoires utilisées pour le calcul des réponses dynamiques de la dalle du pont

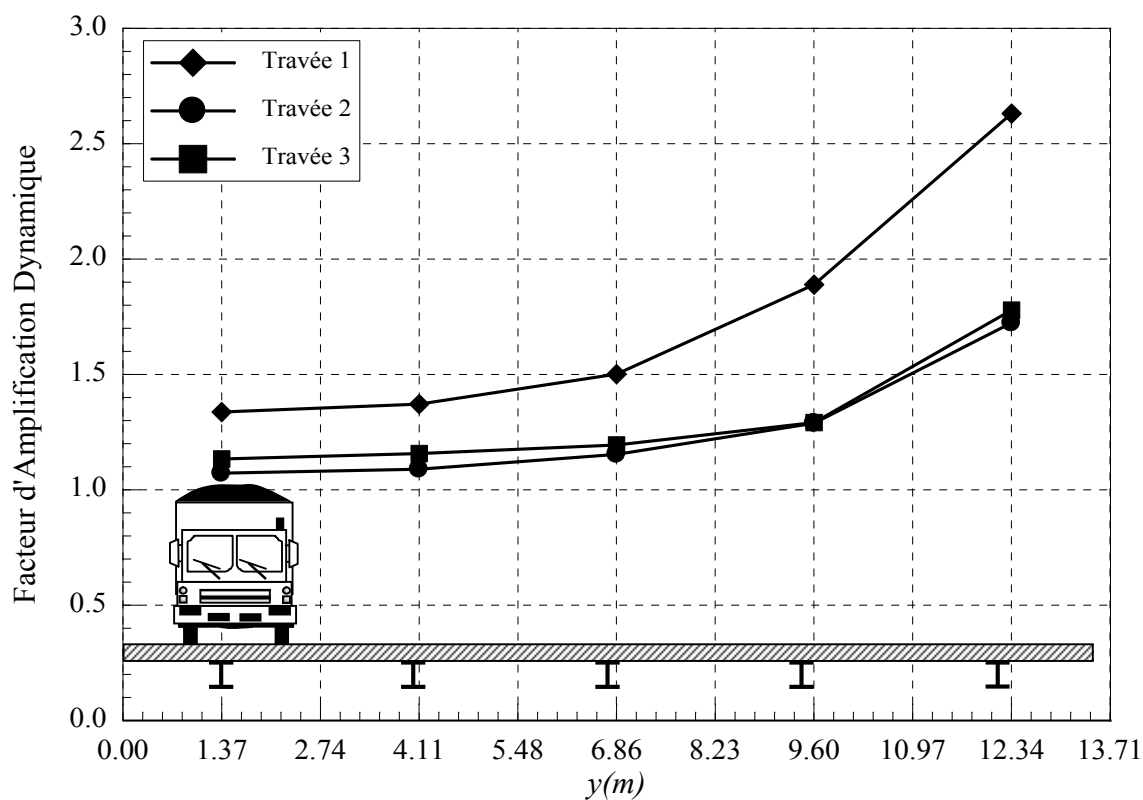
Le tableau 5.7 ainsi que les figures 5.11 et 5.12 montrent l'influence du mode de chargement sur le facteur d'amplification dynamique calculé au milieu de chaque travée et au milieu de chaque raidisseur (voir figure 5.8). Rappelons que le facteur d'amplification dynamique est défini comme étant le rapport entre la réponse dynamique maximale (déplacement, moment fléchissant, etc.) et la réponse statique maximale en même point de calcul sur la dalle. La réponse statique maximale est obtenue lorsque le camion traverse la dalle du pont à une vitesse très faible (0.01 m/s). D'après ces résultats, nous constatons que :

- Le facteur d'amplification dynamique est faible près du chargement alors qu'il est élevé loin du chargement.
- Les facteurs d'amplifications dynamiques au milieu des raidisseurs 4 et 5 sont les plus élevés pour le premier et le deuxième cas de chargement (FAD = 2.63 et 2.19).

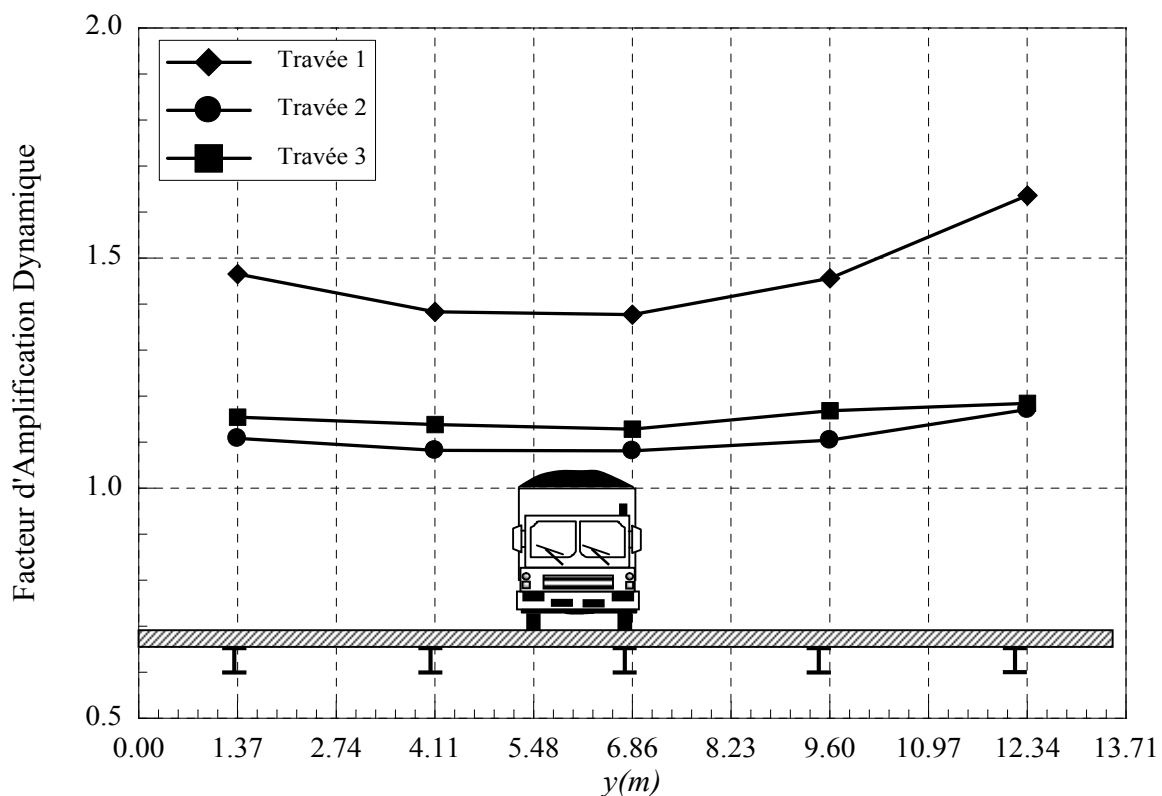
Cela peut être dû soit aux modes de torsion excités par ces cas de chargement, soit à la définition elle-même du facteur d'amplification dynamique comme étant un rapport de réponses.

**Tableau 5.7** : Distribution du facteur d'amplification dynamique sur la dalle du pont

FAD	Cas de chargement	Travée	Raidisseur 1	Raidisseur 2	Raidisseur 3	Raidisseur 4	Raidisseur 5
	FAD	1	1	1.337	1.371	1.501	1.889
2			1.072	1.089	1.153	1.288	1.723
3			1.133	1.157	1.194	1.291	1.778
2		1	1.333	1.360	1.435	1.695	2.191
		2	1.072	1.087	1.101	1.199	1.364
		3	1.137	1.135	1.171	1.224	1.402
3		1	1.465	1.383	1.377	1.456	1.636
		2	1.108	1.082	1.081	1.104	1.171
		3	1.154	1.138	1.128	1.168	1.184



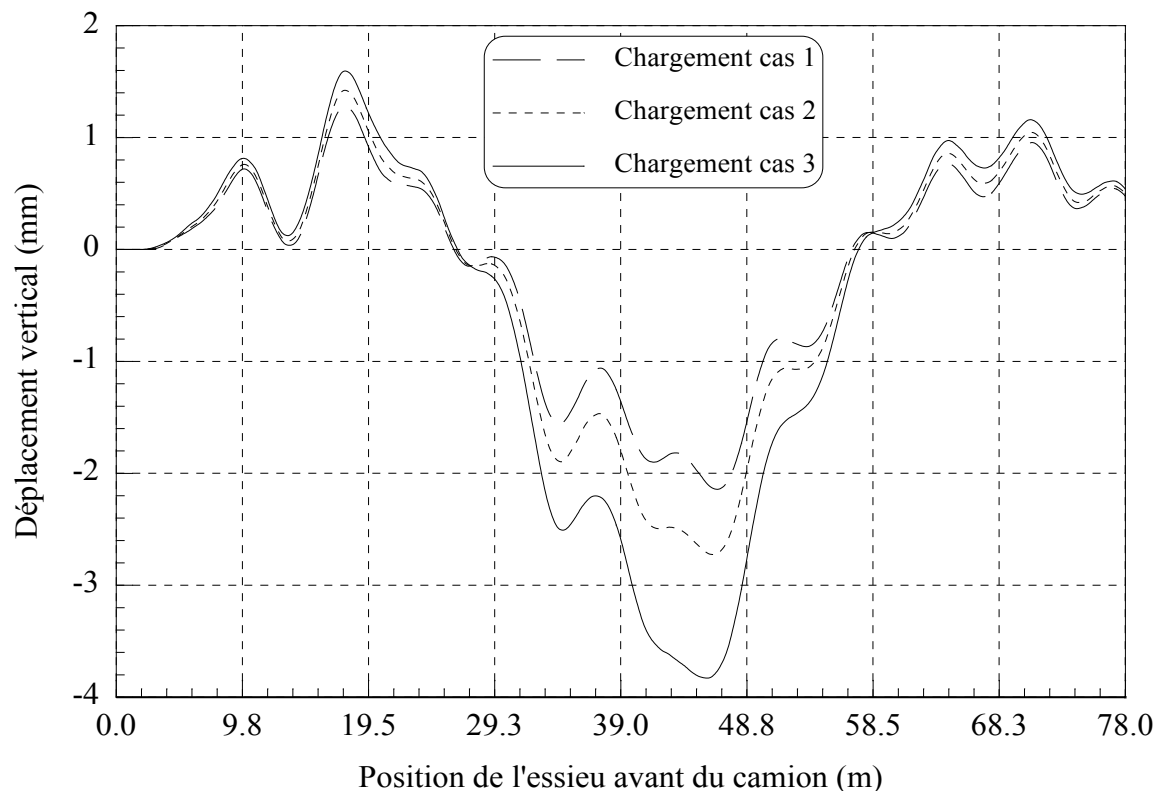
**Figure 5.11** : Distribution du facteur d'amplification dynamique dans la section transversale de la dalle de roulement, chargement cas 1



**Figure 5.12 :** Distribution du facteur d'amplification dynamique dans la section transversale de la dalle de roulement, chargement cas 3

La figure 5.13, illustre l'influence du mode de chargement sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au milieu de la deuxième travée et au milieu du raidisseur 3. On constate que :

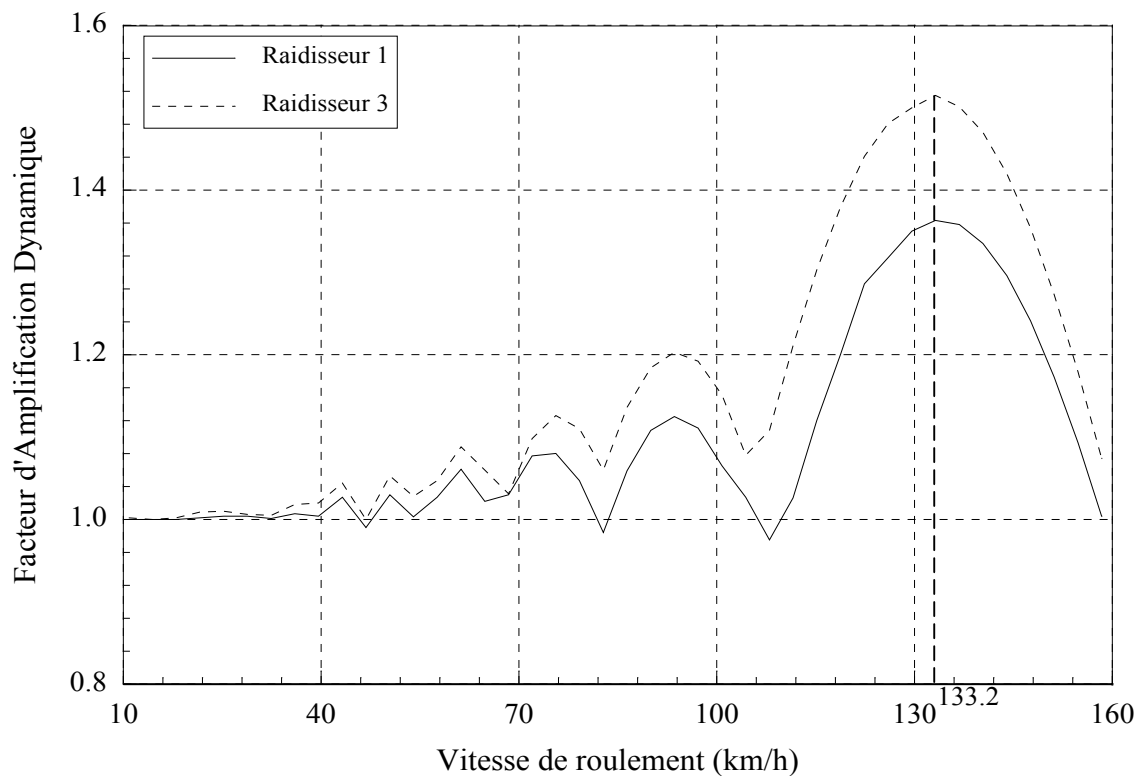
- Le déplacement vertical est élevé près du chargement alors que le facteur d'amplification dynamique est l'inverse (voir tableau 5.7 et figure 5.13).
- Le déplacement vertical est positif lorsque le chargement est excentrique c'est-à-dire lorsque le camion est sur le premier ou bien sur la troisième travée.



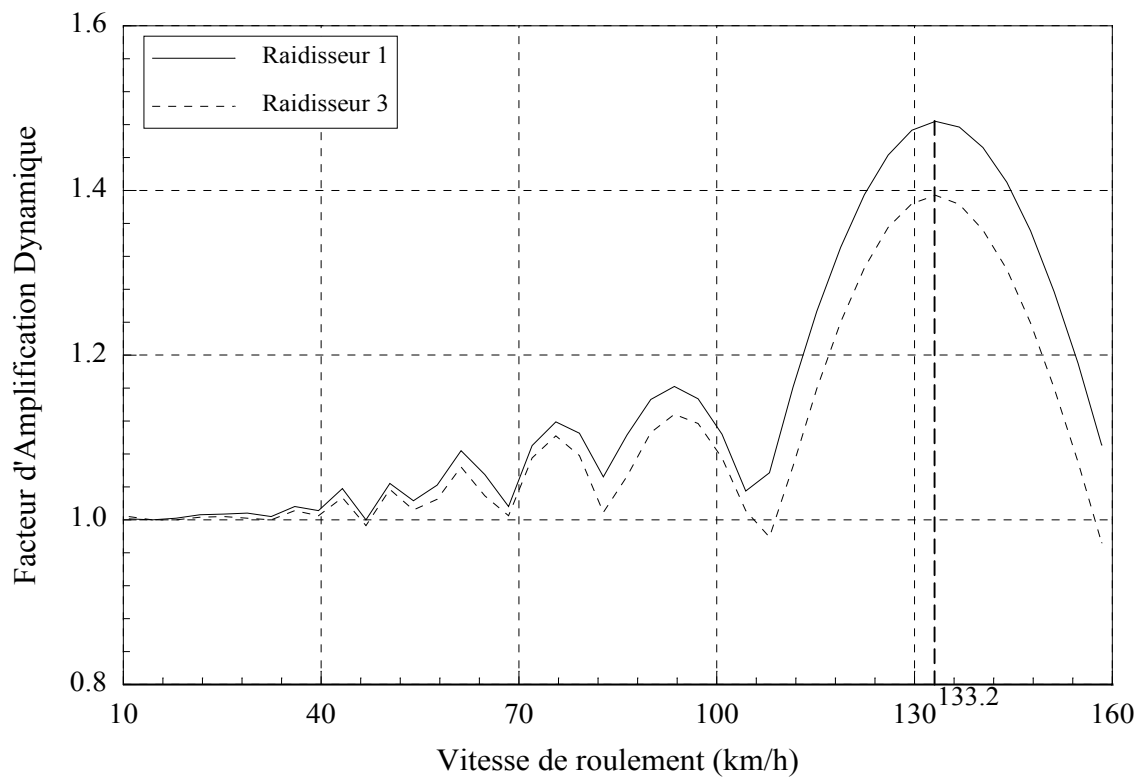
**Figure 5.13** : Influence du mode de chargement sur le déplacement vertical au milieu de la travée 2, raidisseur 3 (milieu de la dalle du pont),  $v_x = 100$  km/h

### 5.3.2 Influence de la vitesse de roulement

Les figures 5.14 et 5.15, représentent la variation du facteur d'amplification dynamique de la dalle de roulement au milieu des raidisseurs 1 et 3 et au milieu de la travée 2 en fonction de la vitesse de passage du véhicule choisie entre 10 et 160 km/h, pour les chargements cas 1 et cas 3 respectivement. D'après ces figures on remarque que le facteur d'amplification dynamique varie peu avec la vitesse de roulement jusqu'à la valeur 110 km/h environ. A partir de cette vitesse, l'influence est remarquable qui traduit par une augmentation rapide du facteur d'amplification dynamique jusqu'à la vitesse 133.2 km/h puis une diminution rapide. On dégage aussi les mêmes constatations que pour le tableau 5.7.



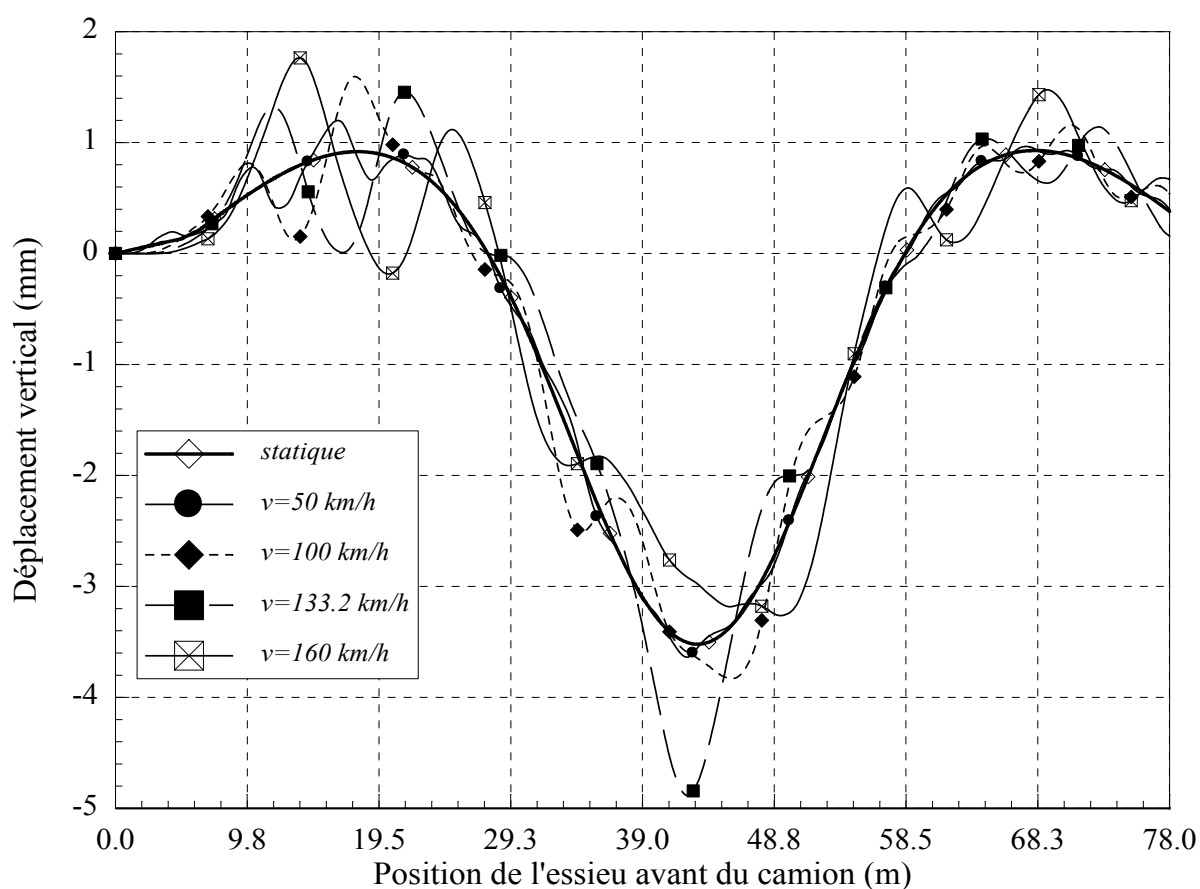
**Figure 5.14 :** Variation du facteur d'amplification dynamique au milieu de raidisseur 1 et 3 de la travée 2 en fonction de la vitesse de roulement du camion, chargement cas 1



**Figure 5.15 :** Variation du facteur d'amplification dynamique au milieu de raidisseur 1 et 3 de la travée 2 en fonction de la vitesse de roulement du camion, chargement cas 3



La figure 5.16 montre l'influence de la vitesse de passage du véhicule sur la réponse dynamique au centre de la dalle (travée 2, raidisseur 3). Le véhicule traverse la dalle selon la trajectoire du chargement cas 1. D'après cette figure, on constate que pour une vitesse très faible, la réponse dynamique au milieu de la dalle tend vers la flèche statique. Le maximum du déplacement vertical au milieu de la dalle augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement jusqu'à 133.2 km/h puis diminue et ce décale en amont dans le sens de roulement du véhicule.



**Figure 5.16** : Influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique du centre de la dalle de roulement du pont, chargement cas 1

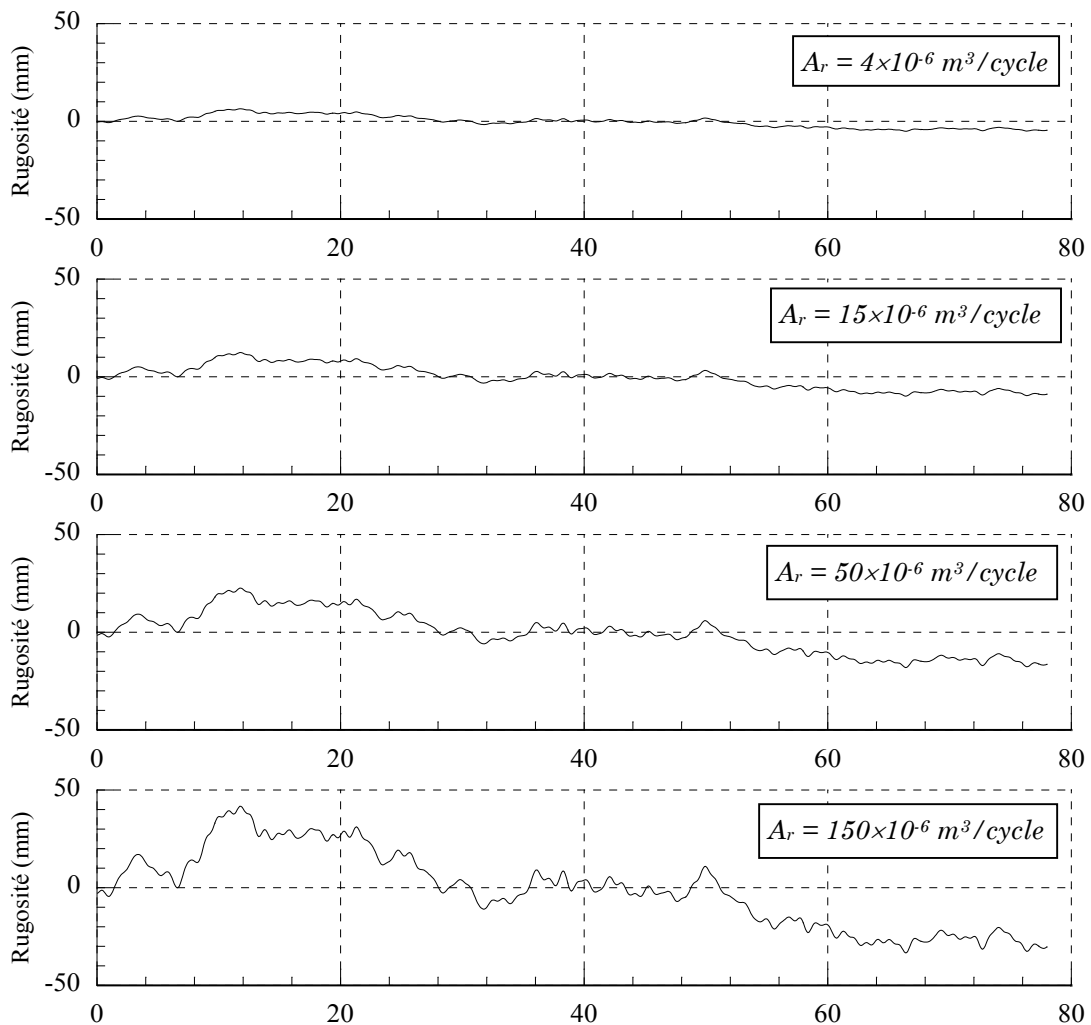
### 5.3.3 Influence du profil de la chaussée

Sur la base de l'expression du profil de la route (2.53), nous présentons sur la figure 5.17, le profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité spectral  $A_r$ , dont ces valeurs expérimentales en fonction de

l'état de la voie de roulement sont présentées dans le tableau 5.8 (Henchi 1995). La génération du variable aléatoire  $\theta_k$  se fait sur MATLAB.

**Tableau 5.8** : Valeurs expérimentales de  $A_r$ , selon l'état de la voie de roulement

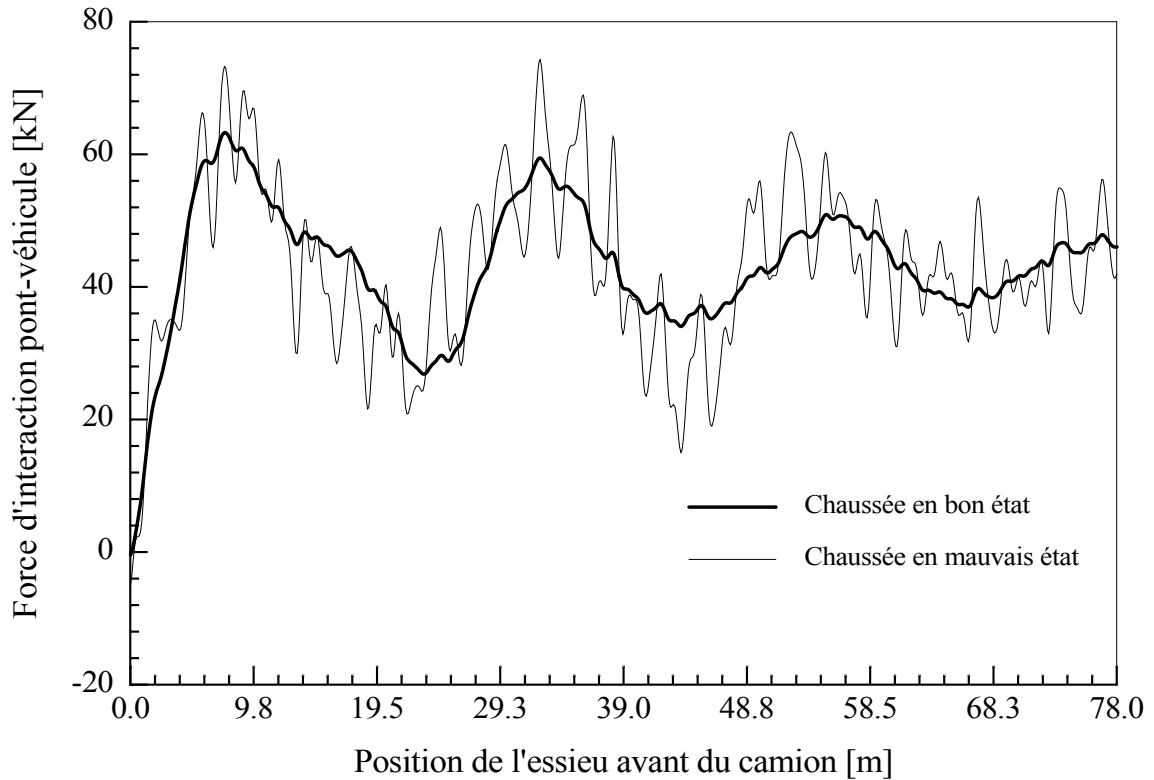
État de la voie de roulement	Très bon	Bon	Moyen	Mauvais
$A_r (m^3/cycle) \times 10^{-6}$	$A_r < 5$	$5 < A_r < 20$	$20 < A_r < 80$	$80 < A_r < 256$



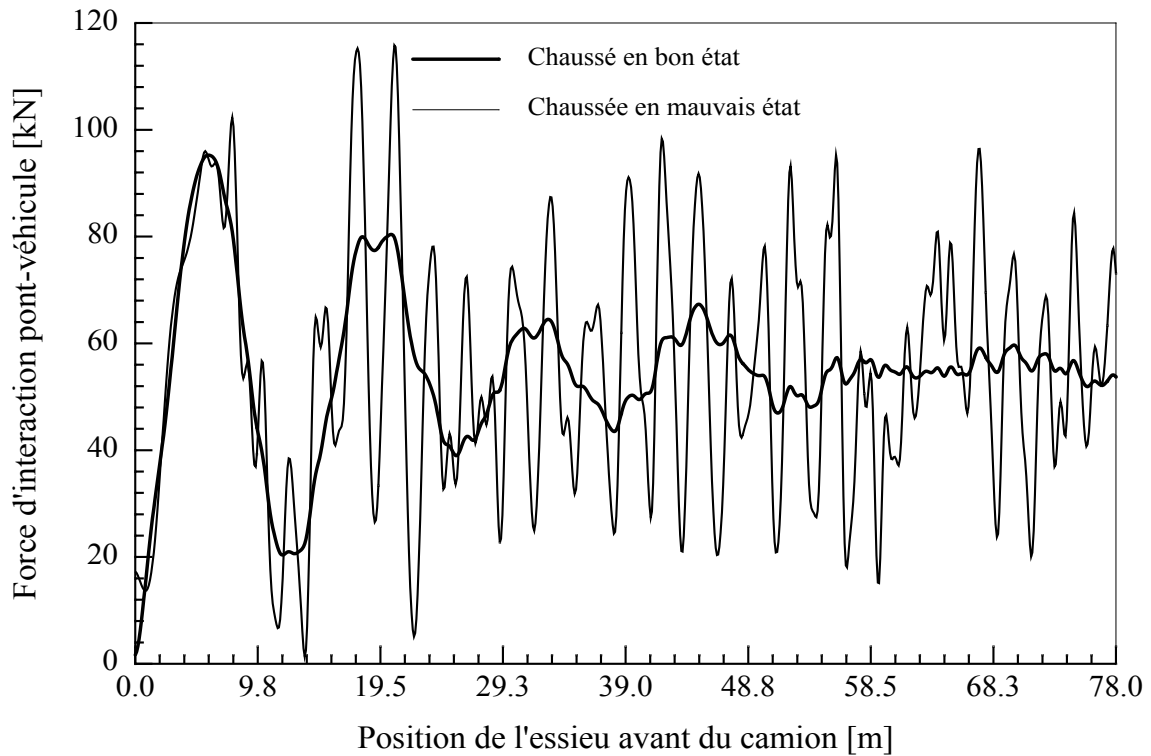
**Figure 5.17** : Profil aléatoire de la voie de roulement sous la roue droite de l'essieu avant pour différentes valeurs du coefficient de rugosité  $A_r$

Sur les figure 5.18 et 5.19, nous présentons la variation des forces d'interaction exercée par une roue avant et une roue arrière droites du véhicule en fonction de l'état de la voie de roulement. Le véhicule roule à une vitesse de 100 km/h selon la trajectoire du chargement cas 3. Les résultats obtenus montrent que les variations des

amplitudes des forces d'interactions augmentent sensiblement avec l'accroissement de la rugosité du profil de la voie de roulement. Cela signifie que l'état de la voie de roulement influe beaucoup plus sur les vibrations du véhicule que celles de la dalle de roulement. Nous constatons aussi que les forces d'interactions fluctuent autour d'une valeur moyenne qui correspond à la force statique.

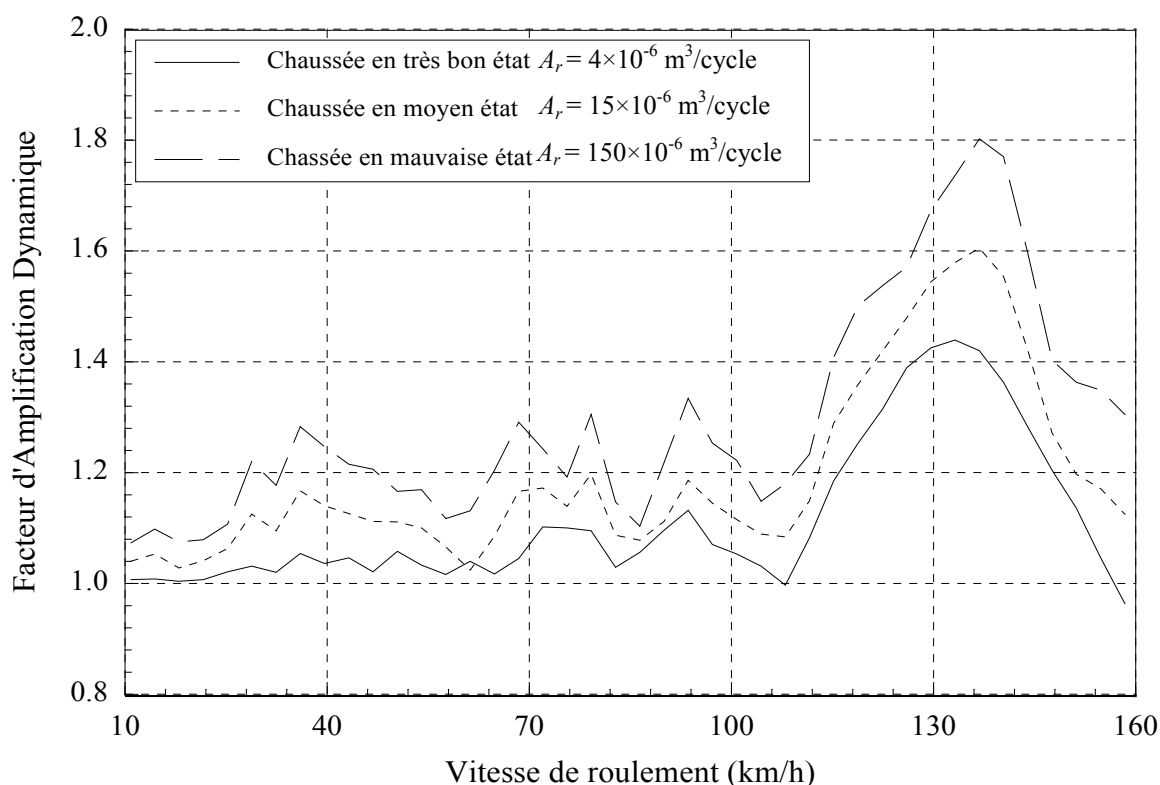


**Figure 5.18** : Force d'interaction exercée par une roue avant droite du véhicule,  $v_x = 100$  km/h, chargement cas 3



**Figure 5.19** : Force d'interaction exercée par une roue arrière droite du véhicule,  $v_x = 100$  km/h, chargement cas 3

La figure 5.20 représente l'influence du profil de la voie de roulement sur le facteur d'amplification dynamique au milieu du raidisseur 3 et au milieu de la travée 2 pour des vitesses de roulement du véhicule allant du 10 jusqu'à 160 km/h. Le véhicule traverse la dalle du pont selon la trajectoire du chargement cas 3. On remarque que l'augmentation de la rugosité du profil de la chaussée entraîne une augmentation du facteur d'amplification dynamique dans la dalle de roulement. Nous constatons aussi qu'à la vitesse 133.2 km/h et pour une chaussée en mauvais état ( $A_r = 150 \times 10^{-6}$  m<sup>3</sup>/cycle), une augmentation d'environ 25% de la valeur maximale du facteur d'amplification dynamique.



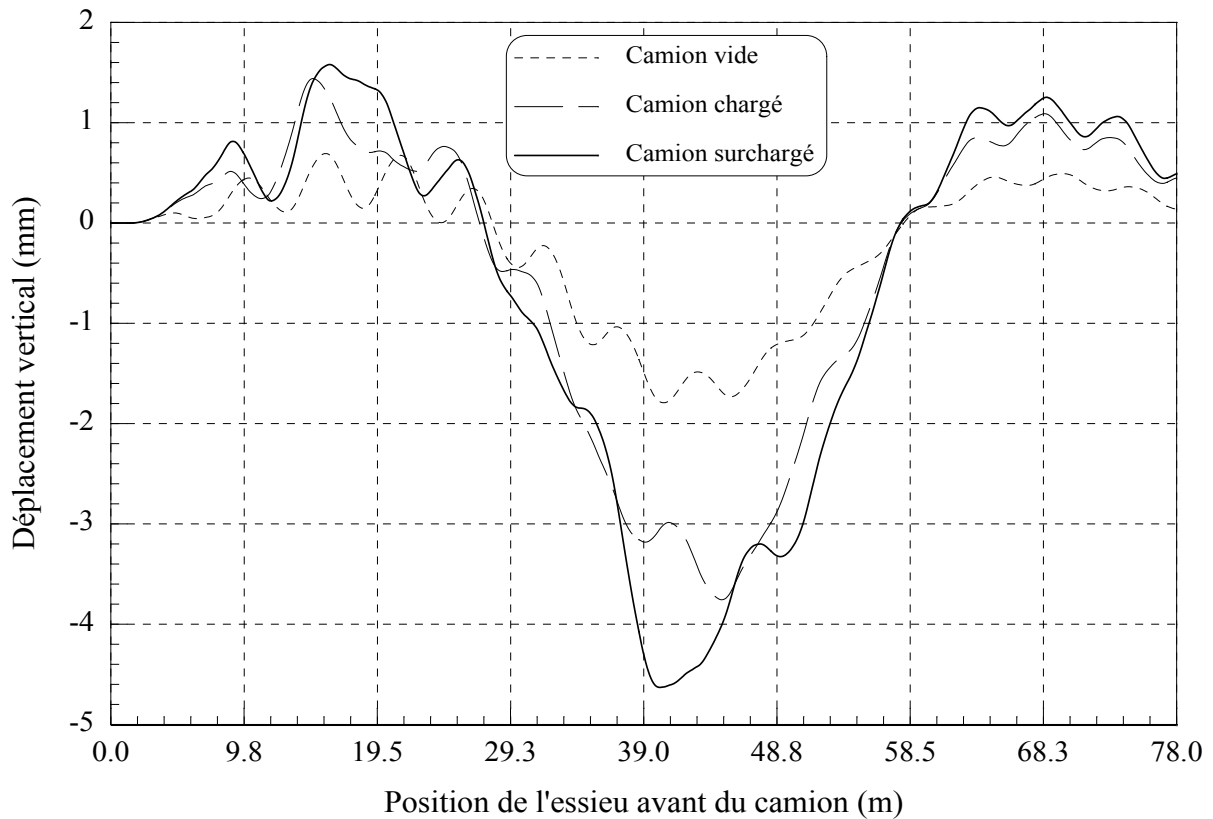
**Figure 5.20** : Influence de l'état de la voie de roulement sur le facteur d'amplification dynamique au milieu de la dalle du pont pour le chargement cas 3

### 5.3.4 Influence de la masse du véhicule

La différence de masse entre le camion vide et chargé peut entraîner des changements dans le comportement dynamique de la dalle du pont. Pour identifier l'influence de la masse du camion sur les réponses dynamiques du pont, trois niveaux de chargement ont été simulés pour le camion utilisé :

- Un camion vide ( $m_v = 8200$  kg)
- Un camion chargé ( $m_v = 24800$  kg)
- Un camion surchargé ( $m_v = 31300$  kg)

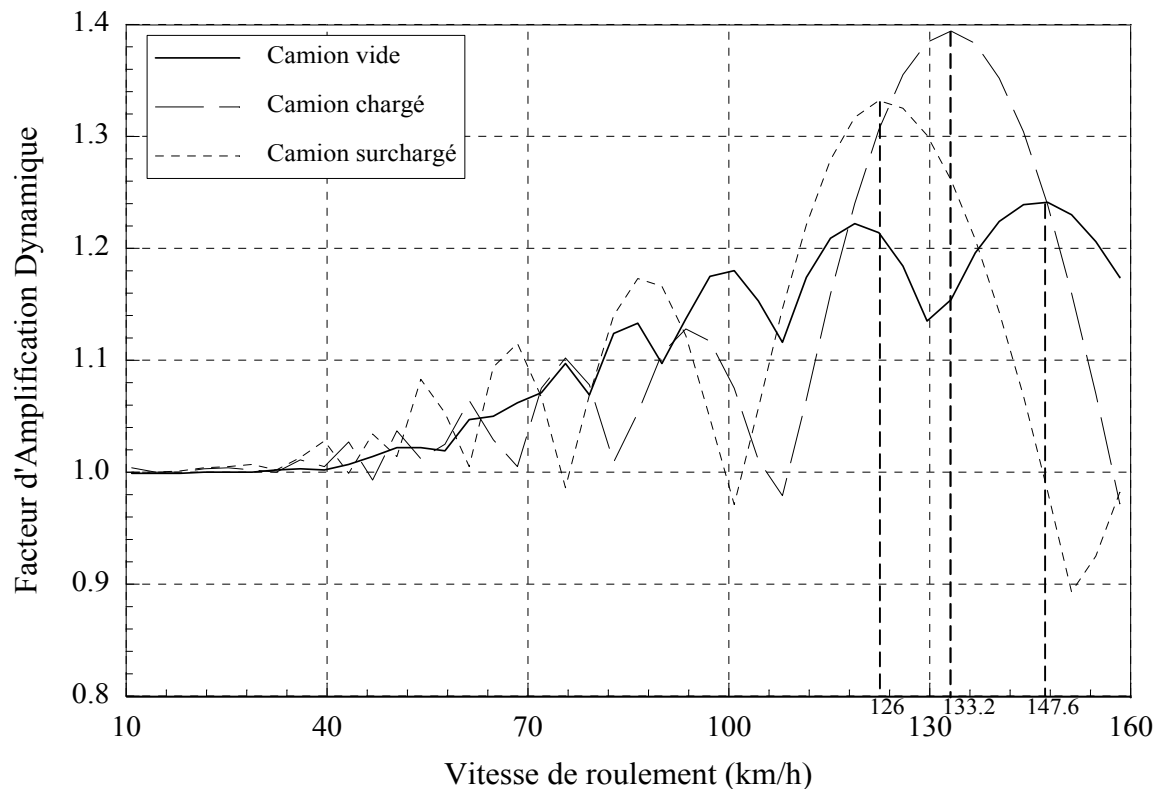
La figure 5.21 représente l'influence de la masse du véhicule sur le déplacement vertical au milieu de la dalle roulement. Le camion traverse la dalle du pont selon la trajectoire du chargement cas 3 à une vitesse de 80 km/h. On constate une nette augmentation du déplacement vertical au milieu de la dalle surtout lorsque le camion est surchargé et se situe sur la travée central.



**Figure 5.21** : Influence de la masse du véhicule sur le déplacement vertical au milieu de la travée 2, raidisseur 3 (centre du pont),  $v_x = 80$  km/h, chargement cas 3

La figure 5.22 montre l'influence de la masse du véhicule sur le facteur d'amplification dynamique au milieu du raidisseur 3 et au milieu de la travée 2 pour des vitesses de roulement du véhicule allant du 10 jusqu'à 160 km/h. on constate que :

- La vitesse critique correspondante au maximum du facteur d'amplification dynamique diminue en fonction de la masse du véhicule.
  - pour le camion vide, la vitesse critique est 144 km/h
  - pour le camion chargé, la vitesse critique est 133.2 km/h
  - pour le camion surchargé, la vitesse critique est 126 km/h
- Pour la vitesse critique, le facteur d'amplification dynamique est plus élevé au cas du camion chargé.



**Figure 5.22** : Influence de la masse du véhicule sur le facteur d'amplification dynamique au milieu de la dalle du pont pour le chargement cas 3

## 5.4 Conclusion

Sur la base des résultats présentés dans ce chapitre et l'analyse de ces résultats, nous avons tiré les conclusions suivantes :

- Une excellente concordance des fréquences avec les résultats de la simulation numérique par ANSYS ;
- La vitesse critique qui correspond au maximum de facteur d'amplification dynamique est d'environ 133.2 km / h pour le camion chargé. Elle diminue en augmentant la masse du camion ;
- Le Facteur d'Amplification Dynamique est peu affecté de la vitesse du véhicule lorsque la chaussée est en très bon état.
- L'état de la chaussée est un des paramètres qui a le plus d'influence sur les réponses dynamiques des effets dans les dalles de roulement.
- Le profil du chemin de roulement est le paramètre le plus important qui influe sur la force d'interaction.

## **Conclusion générale**

Cette étude avait pour objectif, la modélisation du comportement vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont routier lors du passage d'un véhicule avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicule et des irrégularités du profil de la chaussée.

Dans ce travail, la dalle de roulement est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées. Deux modèles de camion à trois essieux avec essieux tandem sont développés l'un à 9 degrés de liberté et l'autre à 11 degrés de liberté. Le profil de la chaussée est modélisé par une fonction caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire. La méthode de Newmark est utilisée pour résoudre les équations de mouvement couplées pont-véhicule d'une manière découplée.

Sur la base de cette modélisation, nous avons élaboré plusieurs programmes en langage FORTRAN, permettant la résolution numérique des équations du mouvement dans le cas étudié. Cette résolution est basée sur la méthode modale et l'intégration directe par la méthode de Newmark. Les fréquences et modes propres des trois exemples numériques pour les dalles orthotropes étudiées, sont présentés et comparés. Un exemple numérique pour la dalle de roulement orthotrope à trois travées est présenté pour comparer la réponse dynamique.

Sur la base des résultats obtenues et l'analyse de ces résultats, nous avons tiré les conclusions suivantes :

- La comparaison des résultats des fréquences obtenus montre une excellente concordance avec les résultats de la simulation numérique par ANSYS, ce qui montre la validité de notre modélisation.
- La distribution du facteur d'amplification dynamique sur la dalle de roulement ne reflète pas une tendance particulière, car on peut obtenir des facteurs d'amplification dynamique élevés dans des endroits où le déplacement est faible.



- Pour le cas étudié, la vitesse critique qui correspond au maximum de facteur d'amplification dynamique est d'environ 133.2 km / h.
- Le facteur d'amplification dynamique est peu affecté de la vitesse du véhicule lorsque la chaussée est en très bon état.
- La qualité de la planéité de la chaussée est un des paramètres qui a le plus d'influence sur les réponses dynamiques des effets dans les dalles de roulement. Le facteur d'amplification dynamique de la dalle de roulement peut subir un accroissement d'environ 25% pour une vitesse de 133.2 km/h et une chaussée en mauvais état ( $A_r = 150 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$ ). Le profil du chemin de roulement est le paramètre le plus important qui influe sur la force d'interaction.

## Références bibliographiques

- AASHTO, 1989, “The American Association of State Highway and Transportation Officials”, Standard Specification for Highway Bridges, 14<sup>th</sup> Edition, Washington, D.C.
- Asnachinda P., Pinkaew T., Laman J.A., 2008, “Multiple vehicle axle load identification from continuous bridge bending moment response” *Engineering Structures* vol. 30 p. 2800–2817.
- Arturo G. and Omar M., 2018, “Dynamic amplification factor of continuous versus simply supported bridges due to the action of a moving vehicle”, *Infrastructures*.
- Awasthi G., Singh T., DAS A., 2003, “On pavement roughness indices”, *Journal of the Institution of Engineers, India*, Vol. 84, p. 33-37.
- Au F.T.K., Wang M.F, 2005, “Sound radiation from forced vibration of rectangular orthotropic plates under moving loads”, *Journal of Sound and vibration*, Vol. 281, p. 1057-1075.
- Biggs J.M., Suer H.S. et Louw J.M. 1956, “A theoretical and experimental investigation of simple span highway bridges”, *Bridge vibration progress*, Department of Civil and Sanitary Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Report No. 2.
- Biggs J.M., Suer H.S., et Louw J.M. 1959, “The vibration of simple span highway bridges”, *ASCE Journal of the Structural Division*, vol. 124, p. 291–297.
- Brady S. P., González A., Žnidaric A., O’Brien E. J., 2002, “Impact Factors on Short Span Bridges due to Multiple Vehicle Presence”, *Proceedings of the 7 International Symposium of Heavy Vehicle Weights & Dimensions*.
- Broquet C., 1999, “Comportement des dalles de roulement des routes en béton sollicitées par le trafic routier”, thèse PhD, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Broquet C., Bailey S. F., Fafard M., Bruhwiler E., 2004, “Dynamic Behavior of Deck Slabs of Concrete Road Bridges”, *Journal of bridge engineering*, p. 137-146.
- BS5400, 1978, “British Standards Institution, Steel, Concrete and Composite Bridges”, Part 2: Specification for Loads, England.
- Bakht B., and Jaeger L. G., 1985, “Bridge Analysis Simplified”, New York, McGraw-Hill.

- Chompooming K., Yener M., 1995, “The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the method of lines”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183(4), p. 567-589.
- CAN/CSA-S6-88, 1988, *Design of Highway Bridges*, Canadian Standard Association, Rexdale, Ontario.
- Chul Woo Kim, Mitsuo Kawatani, Ki Bong Kim, 2005, “Three-dimensional dynamic analysis for bridge-vehicle interaction with roadway roughness”, *Computers and Structures*, vol. 83, p. 1627-1645.
- Cai C.S., Shi X.M., Araujo M. et Chen S.R., 2007, “Effect of approach span condition on vehicle-induced dynamic response of slab-on-girder road bridges”, *Engineering Structures*, vol. 29, p. 3210-3226.
- Cheung Y. K., An F. T. K., Zheng D. Y., Cheng Y. S., 1999, “Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 228(3), p. 611-628.
- Chaallal O. and Shahawy M., 1998, “Experimental evaluation of the dynamic amplification factor for evaluation of bridge performance”, Department of Construction Engineering, University of Quebec.
- Chateauminos A., 2000, “Cours matériaux composites”, 2ème édition, Masson, Paris.
- Dodds C.J., Robson J.D., 1973, “The description of road surface roughness”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31 (2), p. 175-183.
- Fleming F. J. et Romualdi J. P., 1961, “Dynamic Response of Highway Bridge”, *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 87(7), p. 31-60.
- Fenves J.S., Veletsos A.S., et Siess S.P., 1962, “Dynamic studies of bridge on the AASHTO road test”, Highway Research Board, Reports 71 and 73, National Academy of Sciences, Washington.
- Fryba L. 1972, “Vibration of solids and structures under moving loads”, Noordhoff International Publishing, Groningen, the Netherlands
- Fafard, M., Laflamme, M., Savard, M., et Mallikarjuna, B., 1998, “Dynamic analysis of an existing continuous bridge”, *ASCE Journal of Engineering Bridge*, vol. 3(1), 28-37.

- Green M.F. and Cebon D., 1997, “Dynamic interaction between heavy vehicles and highway bridges”, *Computers and Structures*, vol. 62(2), p. 253-264.
- Guo W. H. et Xu, Y. L., 2001, “Fully computerized approach to study cable-stayed bridge-vehicle interaction”, *Journal Sound and Vibration* vol. 248(4), p. 745-761.
- Huang T. 1960. “Dynamic response of three-span continuous highway Bridges”, Ph.D, dissertation, University of Illinois, Urbana.
- Hutton S.G. et Cheung Y.K., 1979, “Dynamic response of single highway bridges”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 7(6), p. 543–554.
- Hwang, E.S., et Nowak, A., 1991, “Simulation of dynamic loads for bridges”. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 117(5), p. 1413–1434.
- Henchi. K, 1995, “Analyse dynamique des ponts par élément fini sous les sollicitation des véhicules mobiles”, Thèse de doctorat, université de technologie de compiègne.
- Henchi K., Fafard M., Talbot M. et Dhatt G., 1998, “An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212(4), p. 663–683.
- Huang D., Wang T.L., Shahawy M., 1993, “Impact studies of multi girder concrete bridge”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119(8), p. 2387-2402.
- Huang D., Wang T.-L., Shahawy M., 1998, “Vibration of horizontally curved box girder bridges due to vehicles”, *Computers and Structures*, vol. 68, p. 513-528.
- Inglis C.E., 1934, “A mathematical treatise on vibration in railway bridges”, Cambridge University Press, Cambridge.
- ISO 8608, 1995, “Road surface profiles: reporting of measured data”, Mechanical vibration.
- Jeefcott H. H., 1929, “On the vibrations of beams under the action of moving loads”, *Phil. Magazine*, Ser. 7, vol. 8(48), p. 66-97.
- Javier O., José M., Goicolea, P. A., Miguel Á. A., 2013, “Relevance of a complete road surface description in vehicle–bridge interaction dynamics”, *Engineering Structures*, vol.56, p. 466–476.
- Krylov A.N., 1905, “Über die erzwungenen Schwingungen von gleichformigen elastischen Stäben”, *Mathematische Annalen*, vol. 61, p. 211.

- Law S.S. et Zhu X. Q., 2000, “Identification of vehicle axle loads from bridge dynamic responses”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 236(4), p. 705-724.
- Law S.S., Bu B., Zhu X.Q., 2004, “Vehicle axle loads identification using finite element method”, *Engineering Structures*, vol. 26(8), p. 1143-1153.
- Leslaw K., Hongyi L., Jerry W. et Jerzy M., 2006, “Finite element analysis of vehicle–bridge interaction”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, p. 950–959.
- Marzougui D., Richard A., Livingston, Shuang J, 2001, “Stochastic modeling of ambient traffic loadings in LS-DYNA nonlinear FE analysis”, *Proc. SPIE 4337, Health Monitoring and Management of Civil Infrastructure Systems*.
- Maa L., Zhang W., Han W.S. et Liu J.X., 2019, “Determining the dynamic amplification factor of multi-span continuous box girder bridges in highways using vehicle-bridge interaction analyses”, *Engineering Structures* vol. 181, p. 47–59.
- Marchesiello S., Fasana A., Garibaldi L., Piombo B.A.D., 1999, “Dynamics of multi-span continuous straight bridges subject to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation”, *Vol. 224(3)*, p. 541-561.
- OHBD, 1983, “Ontario Highway Bridge Design Code”, Ministry of Transportation and Communication, Downsview, Ontario.
- Paultre P., Chaalal O., Proulx J., 1992, “Bridge dynamic and dynamic amplification factors—a review of analytical and experimental findings”, *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 19, p. 260-278.
- Sundara Raja Iyengar K.T., Jagadish K.S., 1970 “Dynamic response of highway bridges to moving loads” *Int. Assoc. of Bridge and Struct. Engrg*, vol. 30 (11), p 57-76.
- Stokes, G.G., 1883, “Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges”, Réimpression, *Mathematical and Physical Papers*, vol. 2, p. 178–220.
- SIA 160, 1989 “Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes”, actions sur les structures porteuses.
- Timoshenko S.P., 1908, “Forced vibration of prismatic bars”, *Izvestiya Kievskogo politekhnicheskogo instituta*. (En russe); voir aussi en allemand, *Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe*, *Zeitch. F. Mathematik u Physik* 1911, vol. 59(2), p. 203–209.

- Timoshenko, S. P., 1922, “On the forced vibration of bridges”, *Philosophical Magazine*, N° 6, 1018.
- Timoshenko, S. P., 1953, “History of the Strength of Materials”, van Nostrand, New York.
- Ting E.C., Genin J., et Ginsberg J. H. 1974, “A general algorithm for moving mass problems”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 33(1), p. 49–58.
- Tan G. H., Brameld G. H., Thambiratnam D. P., 1998, “Development of analytical model for treating bridge-vehicle interaction”, *Eng. Struct.*, vol. 20(1), p. 54-61.
- Veletsos A.S., and Huang T., 1970, “Analysis of dynamic response of highway bridges”, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 90(5), p. 1648–1659.
- Willis R., 1849, “the effects produced by causing weights to travel over elastic bars, appendix to the report of the commissioners, publisher in: Barlow, P. 1851, *Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron and Malleable Iron*, London, England.
- Wen R. K., 1960, “Dynamic Response of Beams Traversed by Two-Axle Loads”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 86(5), p. 91-112.
- Wang, T.L., Huang, D., et Shahawy, M. 1992, “Dynamic response of multi-girder bridges”, *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 118(8), p. 2222–2238.
- Wang T. L., Huang D. Z., Shahawy M. and Huang K. Z., 1996, “Dynamic response of highway girder bridge”, *Computers and Structures*, vol. 60(6), p. 1020-1027.
- Wu J. J., 2003 “Use of equivalent beam models for the dynamic analyses of beam plates under moving forces”, *Computers and Structures*, vol. 81(30), p. 2749-2766.
- Wei Z., Cai C.S., Fang P., 2013, “Finite element modeling of bridges with equivalent orthotropic material method for multi-scale dynamic loads”, *Engineering Structures*, vol. 54, p. 82–93.
- Yang Y.B., Chang C.H., Yau J.D., 1999, “An element for analysing vehicle–bridge systems considering vehicle's pitching effect”, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, vol. 46(7), p. 1031-1047.
- Yin Z., Cai C.S., 2007, “Load distribution and dynamic response of multi-girder bridge with FRP decks”, *Engineering Structures*, vol. 29, p. 1676–1689.
- Yin X., Fang Z., Cai C.S., Deng L., 2010, “Non-stationary random vibration of bridges under vehicles with variable speed”, *Engineering Structures*, vol. 32, p. 2166–2174.

- Zaman M., Taheri M.R., Khanna A., 1996, “Dynamic response of cable-stayed bridges to moving vehicles using the structural impedance method”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 20(12), p. 877-889.
- Zhu X.Q., and Law S.S., 2001, “orthogonal function in moving loads identification on a multi-span bridge”, *Journal of sound and vibration*, vol. 245(2), p.329-345.
- Zhu X.Q. and Law S.S., 2002a, “Dynamic load on continuous multi-lane bridge deck from moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251(4), p. 697-716.
- Zhu X.Q. and Law S.S., 2002b, “Practical aspects in moving load identification”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258(1), p. 123-146.
- Zhu X.Q. and Law S.S., 2007, “Identification of moving loads on an orthotropic plate”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49(11), p. 1262-1275.
- Yang Y.B., Lin B.H., 1995, “Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method *Journal of Structural Engineering*”, Vol. 121(11), p. 1636-1643.

## Annexe 1

### Equations du mouvement de différents modèles de véhicules

#### 1.1 Modèle à 9 D.D.L

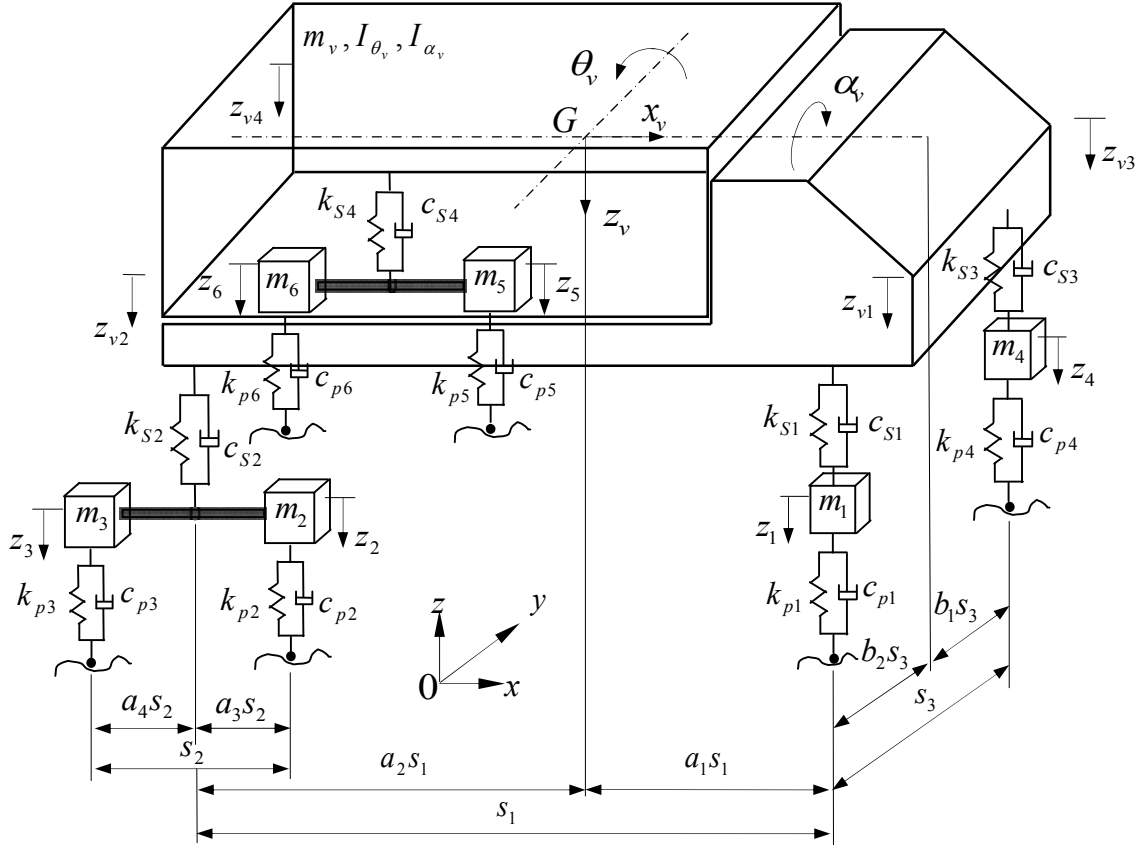


Figure 1.1 : Modèle tridimensionnel du véhicule à 9 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} & ; \alpha_v = \frac{z_{v2} - z_{v4}}{s_2} \\ z_v = a_2 z_{v1} + (a_1 - b_2) z_{v2} + b_2 z_{v4} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement :  $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$



Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & m_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & m_v \left( a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v \left[ a_1 a_2 - a_2 b_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right] - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v a_2 b_2 & \\ & & & & & & & m_v \left[ (a_1 - b_2)^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right] + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} + \frac{I_{\alpha v}}{s_3^2} & m_v \left[ a_1 b_2 - b_2^2 \right] - \frac{I_{\alpha v}}{s_3^2} & \\ sym & & & & & & & & & m_v b_2^2 + \frac{I_{\alpha v}}{s_3^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 \\ & k_{s2} a_4^2 + k_{p2} & k_{s2} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} a_4 & 0 \\ & & k_{s2} a_3^2 + k_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} a_3 & 0 \\ & & & k_{s3} + k_{p4} & 0 & 0 & 0 & -k_{s3} & k_{s3} & -k_{s3} \\ & & & & k_{s4} a_4^2 + k_{p5} & k_{s4} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & -k_{s4} a_4 \\ & & & & & k_{s4} a_3^2 + k_{p6} & 0 & 0 & 0 & -k_{s4} a_3 \\ & & & & & & k_{s1} + k_{s3} & -k_{s3} & k_{s3} & \\ & & & & & & & k_{s2} + k_{s3} & -k_{s3} & \\ sym & & & & & & & & & k_{s3} + k_{s4} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement :

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 \\ & c_{s2} a_4^2 + c_{p2} & c_{s2} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} a_4 & 0 \\ & & c_{s2} a_3^2 + c_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} a_3 & 0 \\ & & & c_{s3} + c_{p4} & 0 & 0 & 0 & -c_{s3} & c_{s3} & -c_{s3} \\ & & & & c_{s4} a_4^2 + c_{p5} & c_{s4} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & -c_{s4} a_4 \\ & & & & & c_{s4} a_3^2 + c_{p6} & 0 & 0 & 0 & -c_{s4} a_3 \\ & & & & & & c_{s1} + c_{s3} & -c_{s3} & c_{s3} & \\ & & & & & & & c_{s2} + c_{s3} & -c_{s3} & \\ sym & & & & & & & & & c_{s3} + c_{s4} \end{bmatrix}$$

Vecteur de force :

$$\{F_g\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ -m_4 g \\ -m_5 g \\ -m_6 g \\ -a_2 m_v g + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -(a_1 - b_2) m_v g - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -b_2 m_v g \end{array} \right\}$$

$$\{F^{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p5} [w(x_5, y_5, t) + r(x_5, y_5)] + c_{p5} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_5, y_5, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_5, y=y_5} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p6} [w(x_6, y_6, t) + r(x_6, y_6)] + c_{p6} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_6, y_6, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_6, y=y_6} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

## 1.2 Modèle à 11 D.D.L

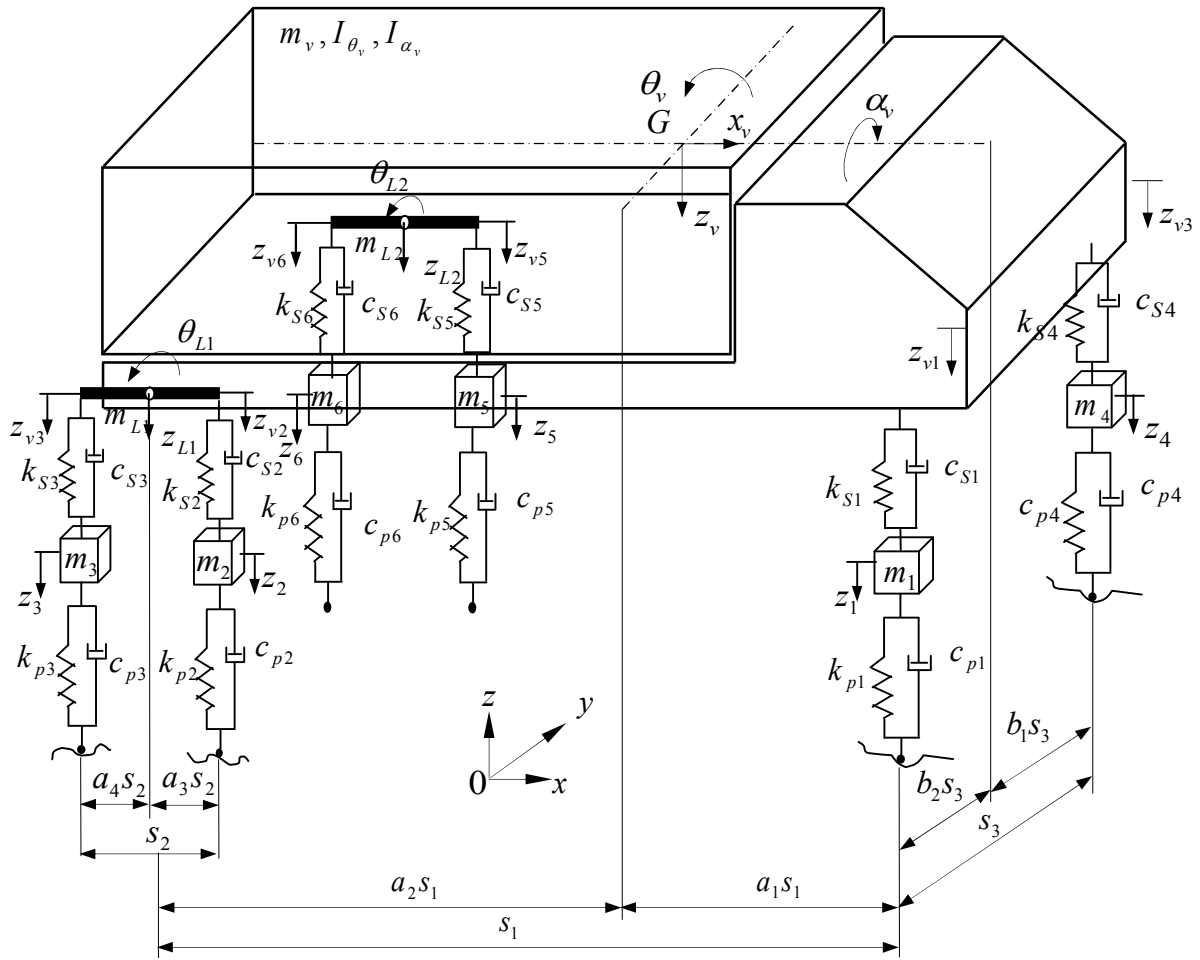


Figure 1.2 : Modèle tridimensionnel du véhicule à 11 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}, z_{v4}, z_{v5}\}^T$$

$$\theta_{L1} = \frac{z_{v3} - z_{v2}}{s_2}$$

$$\theta_{L2} = \frac{z_{v6} - z_{v5}}{s_2}$$

$$\theta_v = \frac{a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - z_{v1}}{s_1}$$

$$\alpha_v = \frac{z_{L1} - z_{L2}}{s_2} = \frac{a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - a_3 z_{v6} - a_4 z_{v5}}{s_2}$$

$$z_v = a_2 z_{v1} + a_4 (a_1 - b_2) z_{v2} + a_3 (a_1 - b_2) z_{v3} + a_4 b_2 z_{v5} + a_3 b_2 z_{v6}$$

Equation générale du mouvement :  $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Vecteur de force :

$$\{F_g\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ -m_4 g \\ -m_5 g \\ -m_6 g \\ -a_2 m_v g + (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_4 (a_1 - b_2) m_v g - a_4 m_{L1} g - (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_4 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_3 (a_1 - b_2) m_v g - a_3 m_{L1} g - (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_4 b_2 m_v g - a_4 m_{L2} g \\ -a_3 b_2 m_v g - a_3 m_{L2} g \end{array} \right\}$$
  

$$\{F^{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p5} [w(x_5, y_5, t) + r(x_5, y_5)] + c_{p5} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_5, y_5, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_5, y=y_5} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p6} [w(x_6, y_6, t) + r(x_6, y_6)] + c_{p6} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_6, y_6, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_6, y=y_6} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Matrice de rigidité :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{s3} + k_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s3} & 0 & 0 \\ & & & k_{s4} + k_{p4} & 0 & 0 & -k_{s4} & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 \\ & & & & k_{s5} + k_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s5} & 0 \\ & & & & & k_{s6} + k_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s6} \\ & & & & & & k_{s1} + k_{s4} & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 \\ & & & & & & & k_{s2} + k_{s4}a_4^2 & k_{s4}a_3a_4 & -k_{s4}a_4^2 & -k_{s4}a_3a_4 \\ & & & & & & & & k_{s3} + k_{s4}a_3^2 & -k_{s4}a_3a_4 & -k_{s4}a_3^2 \\ & & & & & & & & & k_{s5} + k_{s4}a_4^2 & k_{s4}a_3a_4 \\ \text{sym} & & & & & & & & & & k_{s6} + k_{s4}a_3^2 \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement :

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{s3} + c_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s3} & 0 & 0 \\ & & & c_{s4} + c_{p4} & 0 & 0 & -c_{s4} & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 \\ & & & & c_{s5} + c_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s5} & 0 \\ & & & & & c_{s6} + c_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s6} \\ & & & & & & c_{s1} + c_{s4} & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 \\ & & & & & & & c_{s2} + c_{s4}a_4^2 & c_{s4}a_3a_4 & -c_{s4}a_4^2 & -c_{s4}a_3a_4 \\ & & & & & & & & c_{s3} + c_{s4}a_3^2 & -c_{s4}a_3a_4 & -c_{s4}a_3^2 \\ & & & & & & & & & c_{s5} + c_{s4}a_4^2 & c_{s4}a_3a_4 \\ \text{sym} & & & & & & & & & & c_{s6} + c_{s4}a_3^2 \end{bmatrix}$$

$m_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$m_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$m_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
			$m_4$	0	0	0	0	0	0	0
				$m_5$	0	0	0	0	0	0
					$m_6$	0	0	0	0	0
						$m_v a_2^2 + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2}$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{h^2}{s_1^2}$	$m_v a_2 a_4 (a_1 - b_2) - \frac{a_4}{s_1^2} I_{\theta v}$ $- (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_4 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_2 a_3 (a_1 - b_2) - \frac{a_3}{s_1^2} I_{\theta v}$ $- (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_2 a_4 b_2$	$m_v a_2 a_3 b_2$
						$m_v a_4^2 (a_1 - b_2)^2 + \frac{a_4^2}{s_1^2} I_{\theta v}$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_4^2 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_3 a_4 (a_1 - b_2)^2 + \frac{a_3 a_4}{s_1^2} I_{\theta v}$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3 a_4 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_3 a_4 (a_1 - b_2)^2 + \frac{a_3 a_4}{s_1^2} I_{\theta v}$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3 a_4 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_4^2 b_2 (a_1 - b_2)$ $- \frac{a_4^2}{s_3^2} I_{\omega v}$	$m_v a_3 a_4 b_2 (a_1 - b_2)$ $- \frac{a_3 a_4}{s_3^2} I_{\omega v}$
						$\frac{I_{\theta L1}}{s_2^2} + \frac{a_4^2}{s_3^2} I_{\omega v} + m_{L1} a_4^2$	$-\frac{I_{\theta L1}}{s_2^2} + \frac{a_3 a_4}{s_3^2} I_{\omega v} + m_{L1} a_3 a_4$	$-\frac{I_{\theta L1}}{s_2^2} + \frac{a_3 a_4}{s_3^2} I_{\omega v} + m_{L1} a_3 a_4$		
							$m_v a_3^2 (a_1 - b_2)^2 + \frac{a_3^2}{s_1^2} I_{\theta v}$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3^2 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_3 a_4 b_2 (a_1 - b_2)$ $+ (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3^2 h^2}{s_1^2}$	$m_v a_3 a_4 b_2 (a_1 - b_2)$ $- \frac{a_3 a_4}{s_3^2} I_{\omega v}$	$m_v a_3^2 b_2 (a_1 - b_2)$ $- \frac{a_3^2}{s_3^2} I_{\omega v}$
									$m_v a_4^2 b_2^2 + m_{L2} a_4^2$ $+ \frac{I_{\theta L2}}{s_2^2} + \frac{a_4^2}{s_3^2} I_{\omega v}$	$m_v a_3 a_4 b_2^2 + m_{L2} a_3 a_4$ $- \frac{I_{\theta L2}}{s_2^2} + \frac{a_3 a_4}{s_3^2} I_{\omega v}$
										$m_v a_3^2 b_2^2 + m_{L2} a_3^2$ $+ \frac{I_{\theta L2}}{s_2^2} + \frac{a_3^2}{s_3^2} I_{\omega v}$
sym										

## Annexe 2

### Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis simples

Les éléments du vecteur  $\{A\}$  sont donnés par :

$$\{A\} = \{A_{1i}, A_{2i}, B_{2i}, \dots, A_{(R-1)i}, B_{(R-1)i}, A_{Ri}\}^T \quad (2.1)$$

Les éléments du matrice  $[F]$  sont donnés par :

$$f_{11} = \cos(k_i l_1) - \theta_1 \cosh(k_i l_1), \quad f_{12} = \theta_2 - 1, \quad f_{13} = -\Phi_2, \quad f_{21} = \sin(k_i l_1), \quad f_{23} = -1 \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{2r-1, 2(r-1)} &= \cos(k_i l_r) - \theta_r \cosh(k_i l_r) \\ f_{2r-1, 2r-1} &= -\sin(k_i l_r) - \sinh(k_i l_r) + \Phi_r \cosh(k_i l_r) \\ f_{2r-1, 2r} &= \theta_{r+1} - 1 \\ f_{2r-1, 2r+1} &= -\Phi_{r+1} \\ f_{2r, 2(r-1)} &= -\sin(k_i l_r) - \theta_r \sinh(k_i l_r) \\ f_{2r, 2r-1} &= -\cos(k_i l_r) - \cosh(k_i l_r) + \Phi_r \sinh(k_i l_r) \\ f_{2r, 2r+1} &= 2 \end{aligned} \right\}, \quad r = 2, 3, \dots, R-2 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} f_{2R-3, 2(R-2)} &= \theta_{R-1} \cosh(k_i l_{R-1}) - \cos(k_i l_{R-1}) \\ f_{2R-3, 2R-3} &= \sin(k_i l_{R-1}) + \sinh(k_i l_{R-1}) - \Phi_{R-1} \cosh(k_i l_{R-1}) \\ f_{2R-3, 2(R-1)} &= \theta_R \cosh(k_i l_R) - \cos(k_i l_R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2(R-1), 2(R-2)} &= \sin(k_i l_{R-1}) + \theta_{R-1} \sinh(k_i l_{R-1}) \\ f_{2(R-1), 2R-3} &= \cos(k_i l_{R-1}) + \cosh(k_i l_{R-1}) - \Phi_{R-1} \sinh(k_i l_{R-1}) \\ f_{2(R-1), 2(R-1)} &= -2 \sin(k_i l_R) \end{aligned} \quad (2.4)$$

where

$$\theta_r = \frac{\sin(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)}, \quad \Phi_r = \frac{\cosh(k_i l_r) - \cos(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)}, \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (2.5)$$

et les autres éléments  $f_{ij}$  égaux à zéro

### Cas d'une poutre à trois travées (R = 3)

Considérons le cas d'une poutre à trois travées (figure 2.1), possédant les mêmes propriétés suivantes : module d'Young, masse par unité de longueur et moment d'inertie polaire.

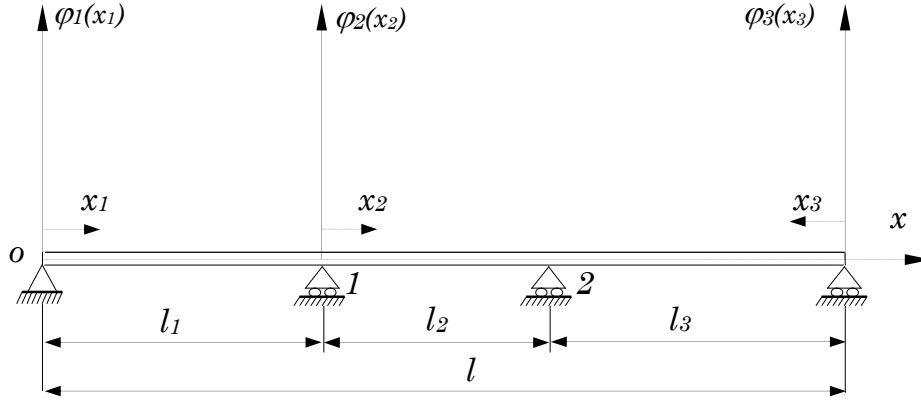


Figure 2.1: Poutre continue avec 2 appuis intermédiaires simples

Les modes propres de chaque travée  $r$  sont (on omet l'indice  $i$ ) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(l-x) - \theta_3 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.6)$$

Avec :

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3 \quad \Phi_2 = \frac{\operatorname{ch} k l_2 - \cos k l_2}{\operatorname{sh} k l_2} \quad (2.7)$$

Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3\}^T \quad (2.8)$$

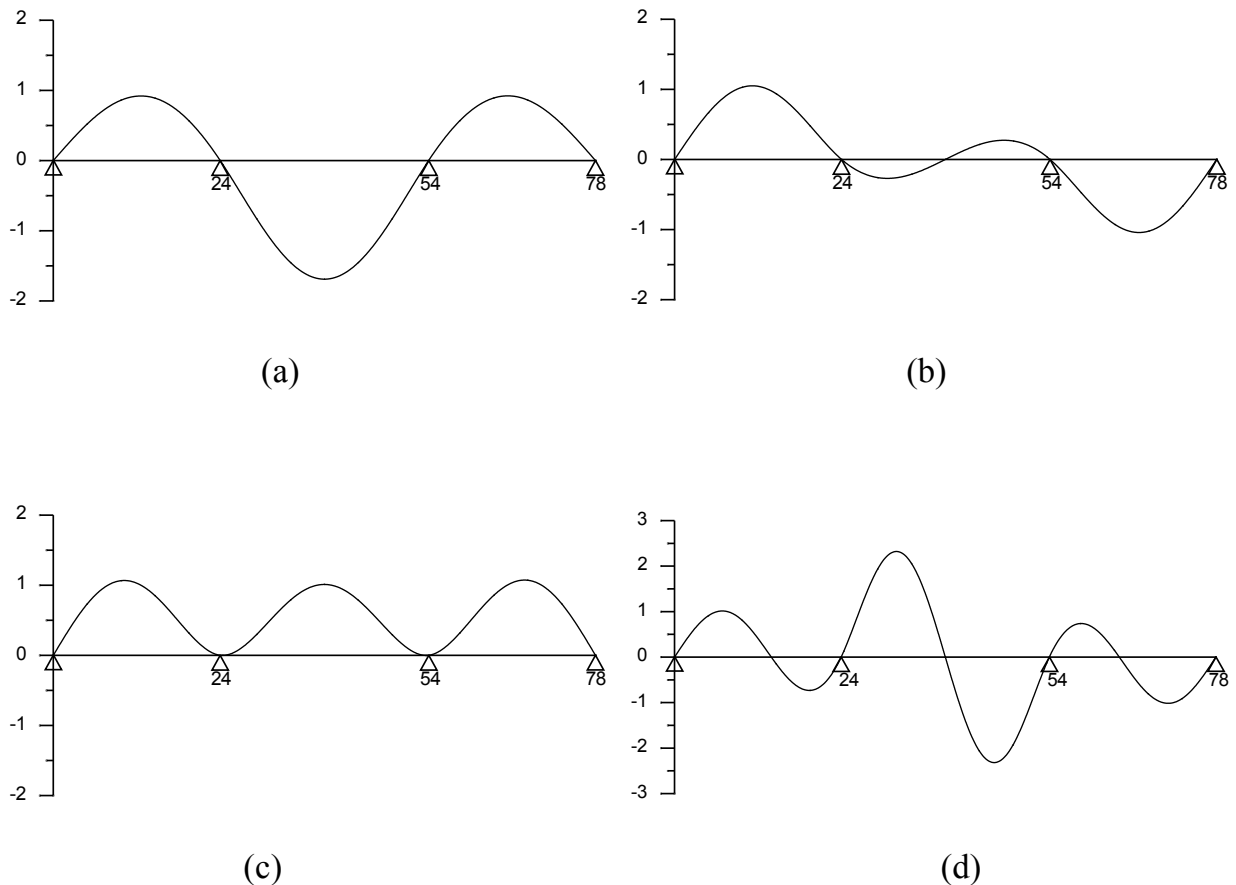
$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 \operatorname{cosh}(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\cos(kl_2) + \theta_2 \operatorname{cosh}(kl_2) & \sin(kl_2) + \operatorname{sinh}(kl_2) & -\cos(kl_3) + \theta_3 \operatorname{cosh}(kl_3) \\ 0 & \sin(kl_2) + \theta_2 \operatorname{sinh}(kl_2) & \cos(kl_2) + \operatorname{cosh}(kl_2) & -2 \sin(kl_3) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

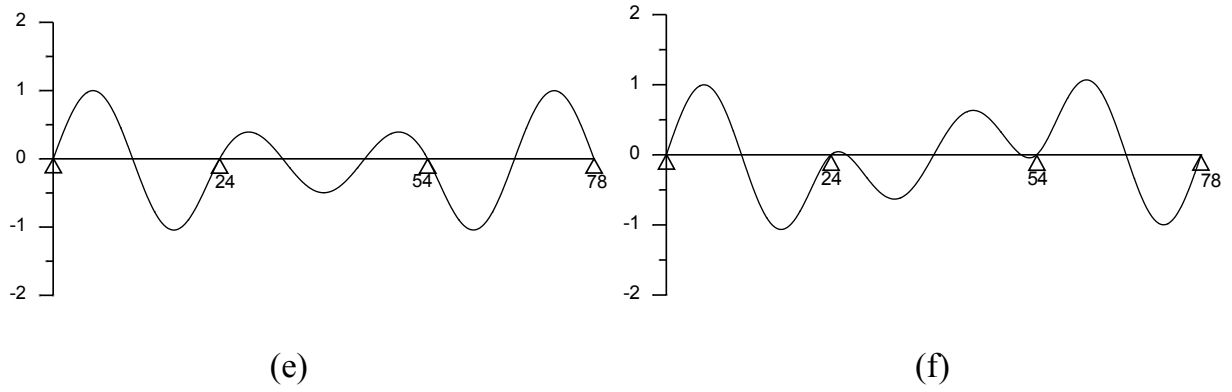


### L'équation aux fréquences

$$\begin{aligned}
 & 2(\coth(k_i l_1) \sin(k_i l_1) \sin(k_i l_2) + \coth(k_i l_2) \sin(k_i l_1) \sin(k_i l_2) \\
 & - \sin(k_i(l_1 + l_2))) (\cos(k_i l_3) - \coth(k_i l_3) \sin(k_i l_3)) \\
 & + \sin(k_i l_3) (2 \cos(k_i l_1) \cos(k_i l_2) + 3 \operatorname{csc} h(k_i l_2) \sin(k_i l_1) \\
 & + \coth(k_i l_2) (-4 \cos(k_i l_2) \sin(k_i l_1) + \operatorname{cosh}(k_i l_2) \sin(k_i l_1)) \\
 & - 2 \cos(k_i l_1) \sin(k_i l_2) - 2 \operatorname{cosh}(k_i l_1) \sin(k_i l_1) (\cos(k_i l_2) \\
 & - \coth(k_i l_2) \sin(k_i l_2)) - \sin(k_i l_1) \sinh(k_i l_2))
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Le logiciel Mathématique permet de déterminer les racines  $k_i$  de l'équation aux fréquences (1.10). Considérons une poutre de longueur  $l = 78$  m à trois travées illégales de longueurs  $l_1 = l_3 = 24$  m,  $l_2 = 30$ . Les six premiers modes propres de la poutre à trois travées sont présentés sur la figure 2.2.





**Figure 2.2:** Les six premiers modes propres de la poutre à trois travées, modes: (a) 1,  $k_1=0.1178$ ; (b) 2,  $k_2=0.1455$ ; (c) 3,  $k_3=0.1614$ ; (d) 4,  $k_4=0.2304$ ; (e) 5,  $k_5=0.2736$ ; (f) 6,  $k_6=0.2857$

### Cas d'une poutre à quatre travées (R=4)

Comme l'exemple précédent, on prenant le cas d'une poutre à quatre travées dont les propriétés mécaniques sont les mêmes dans chaque travée. Considérons la poutre de longueur  $l = 108$  m à quatre travées illégales de longueurs  $l_1 = l_4 = 24$ m,  $l_2 = l_3 = 30$ . Les modes propres de chaque travée  $r$  sont (figure 2.3) :

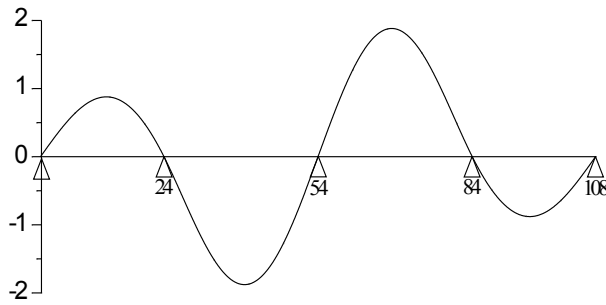
$$\phi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)), & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(x-(l_1+l_2)) - \theta_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))) + B_3(\cos k(x-(l_1+l_2)) - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2)) + \Phi_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \\ A_4(\sin k(l-x) - \theta_4 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad \Phi_r = \frac{\operatorname{ch} k l_r - \cos k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 2, 3 \quad (2.12)$$

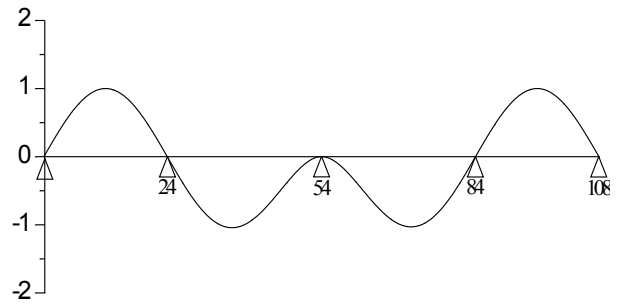
Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4\}^T \quad (2.13)$$

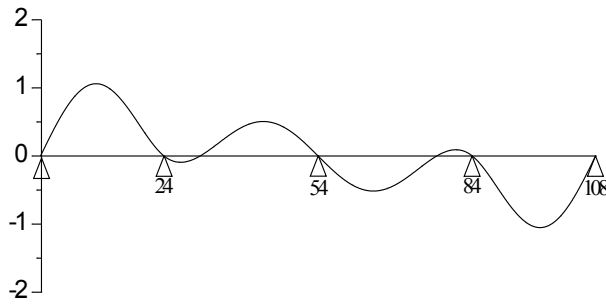
$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 ch(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kl_2) - \theta_2 ch(kl_2) & -\sin(kl_2) - sh(kl_2) & \theta_3 - 1 & -\Phi_3 & 0 \\ 0 & -\sin(kl_2) - \theta_2 sh(kl_2) & +\Phi_2 ch(kl_2) & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(kl_2) - ch(kl_2) & -\cos(kl_3) + \theta_3 ch(kl_3) & \sin(kl_3) + sh(kl_3) & -\cos(kl_4) + \theta_4 ch(kl_4) \\ 0 & 0 & +\Phi_2 sh(kl_2) & \sin(kl_3) + \theta_3 sh(kl_3) & -\Phi_3 ch(kl_3) & -2\sin(kl_4) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(kl_3) + \theta_3 ch(kl_3) & \cos(kl_3) + ch(kl_3) & \\ 0 & 0 & 0 & \sin(kl_3) + \theta_3 sh(kl_3) & -\Phi_3 sh(kl_3) & \end{bmatrix} \quad (2.14)$$



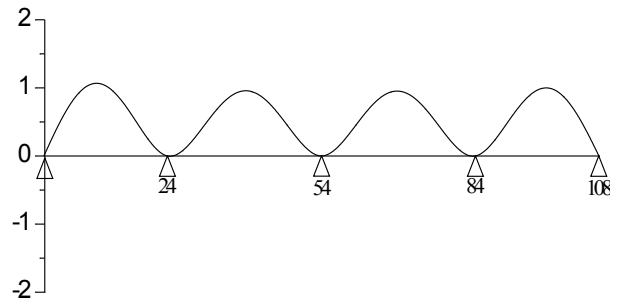
(a)



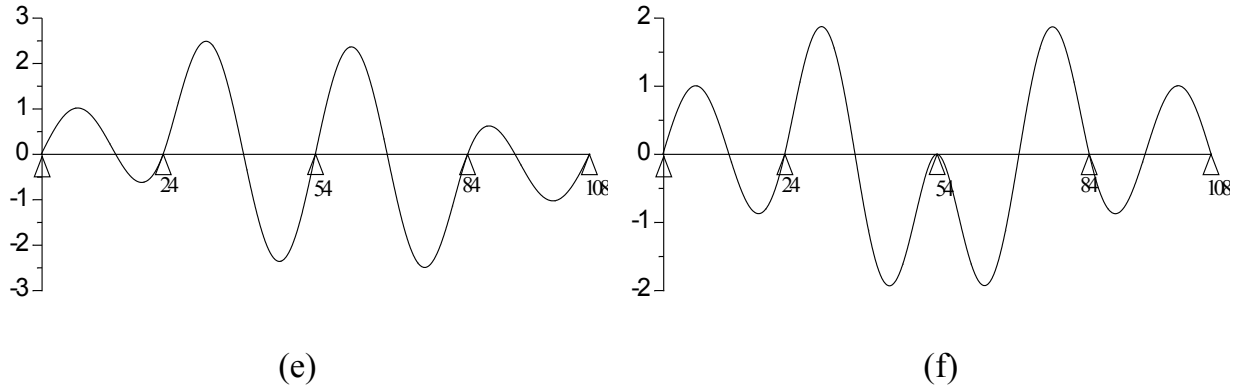
(b)



(c)



(d)



**Figure 2.3:** Les six premiers modes propres de la poutre à quatre travées, modes: (a) 1,  $k_1=0.1126$ ; (b) 2,  $k_2 = 0.1308$ ; (c) 3,  $k_3 = 0.1516$ ; (d) 4,  $k_4 = 0.1605$ ; (e) 5,  $k_5= 0.2213$ ; (f) 6,  $k_6= 0.2435$ .

### Cas d'une poutre à cinq travées (R = 5)

On prenant le cas d'une poutre à cinq travées dont les propriétés mécaniques sont les mêmes dans chaque travée. Considérons la poutre de longueur  $l = 138$  m à cinq travées illégales de longueurs  $l_1 = l_5 = 24$ m,  $l_2 = l_3 = l_4 = 30$ . Les modes propres de chaque travée  $r$  sont (figure 2.4) :

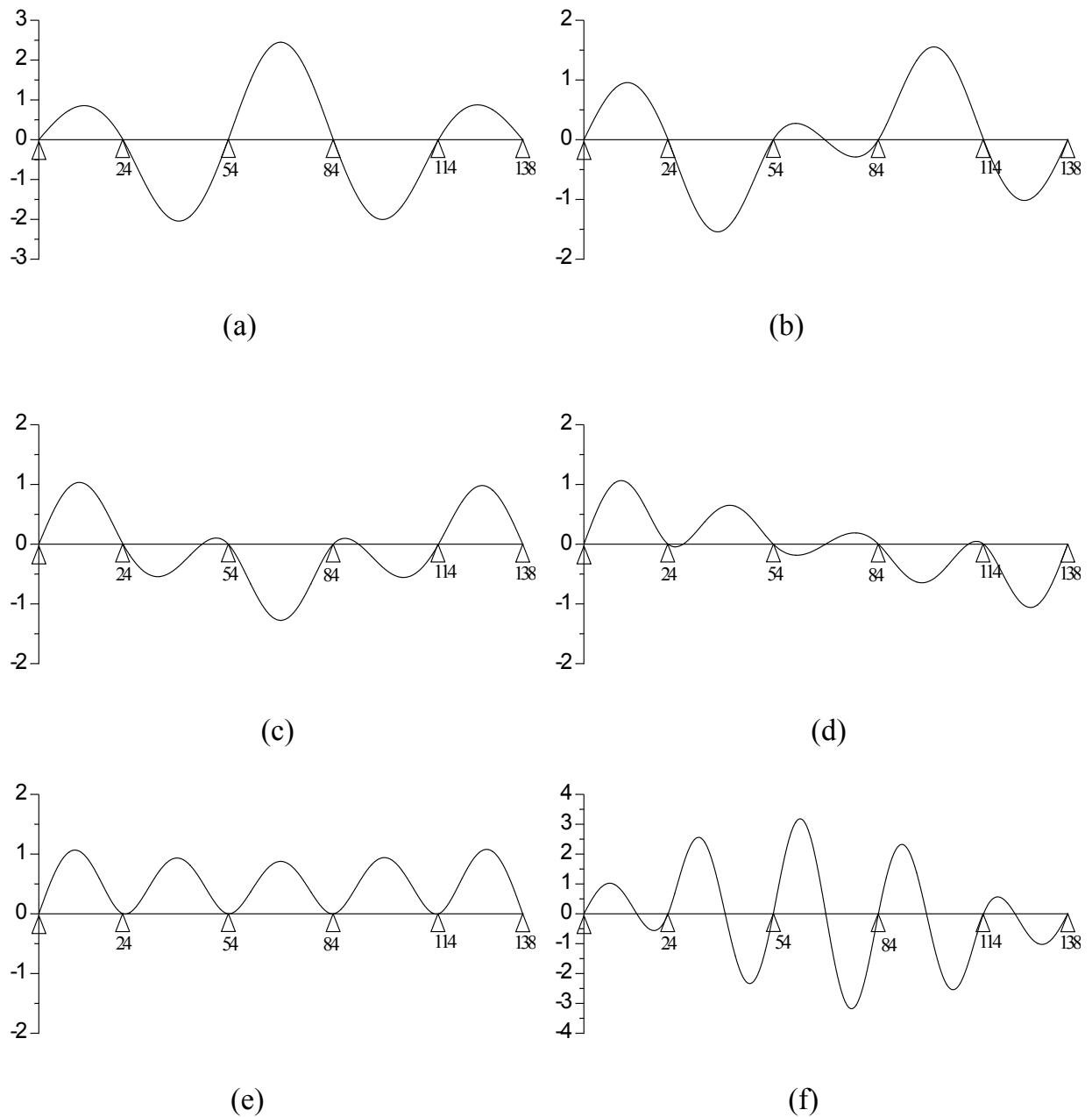
$$\phi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)), & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(x-(l_1+l_2)) - \theta_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))) + B_3(\cos k(x-(l_1+l_2)) - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2)) + \Phi_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \\ A_4(\sin k(x-(l_1+l_2+l_3)) - \theta_4 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2+l_3))) + B_4(\cos k(x-(l_1+l_2+l_3)) - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2+l_3)) + \Phi_4 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2+l_3))), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \\ A_5(\sin k(l-x) - \theta_5 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \Phi_r = \frac{\operatorname{ch} k l_r - \cos k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 2, 3, 4 \quad (2.16)$$

Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5\}^T \quad (2.17)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 ch(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kl_2) - \theta_2 ch(kl_2) & -\sin(kl_2) - sh(kl_2) & \theta_3 - 1 & -\Phi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(kl_2) - \theta_2 sh(kl_2) & +\Phi_2 ch(kl_2) & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(kl_2) - ch(kl_2) & \cos(kl_3) - \theta_3 ch(kl_3) & -\sin(kl_3) - sh(kl_3) & \theta_4 - 1 & -\Phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & +\Phi_2 sh(kl_2) & -\sin(kl_3) - \theta_3 sh(kl_3) & +\Phi_3 ch(kl_3) & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(kl_3) - ch(kl_3) & -\cos(kl_4) + \theta_4 ch(kl_4) & \sin(kl_4) + sh(kl_4) & -\cos(kl_5) + \theta_5 ch(kl_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(kl_4) + \theta_4 sh(kl_4) & -\Phi_4 ch(kl_4) & -2\sin(kl_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_4 sh(kl_4) & \cos(kl_4) + ch(kl_4) & -2\sin(kl_5) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

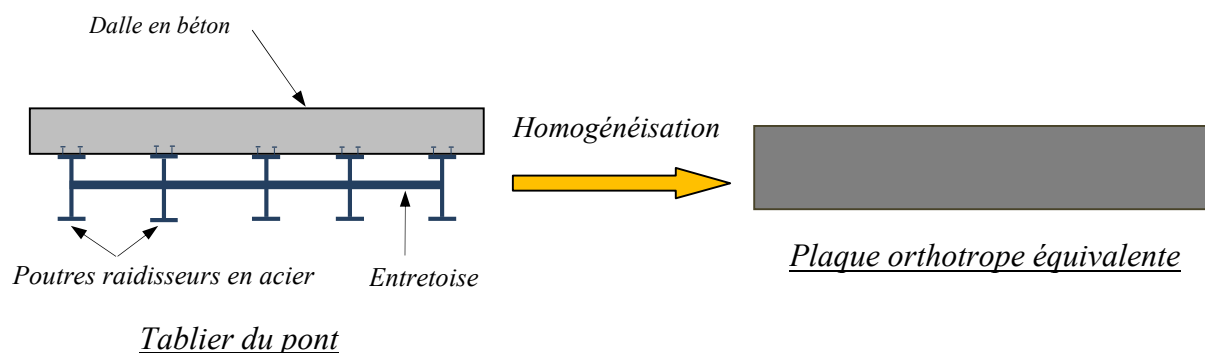


**Figure 2.4:** Les six premiers modes propres de la poutre à cinq travées, modes: (a) 1,  $k_1=0.1099$ ; (b) 2,  $k_2 = 0.1229$ ; (c) 3,  $k_3 = 0.1390$ ; (d) 4,  $k_4 = 0.1546$ ; (e) 5,  $k_5= 0.1600$ ; (f) 6,  $k_6= 0.2170$ .

## Annexe 3

### Calcul d'une dalle orthotrope équivalente au tablier

Le tablier du pont de la figure 5.1 est considéré comme un matériau composite, composé d'une dalle en béton et de 5 poutres raidisseurs en acier et 14 entretoises en acier. Il peut être remplacé par une dalle orthotrope (figure 3.1) en utilisant la notion des fractions volumiques et massiques au sein d'un matériau composite. Les données du pont sont présentées au chapitre 5, paragraphe 5.2 :



**Figure 3.1** : Modélisation du tablier du pont par une dalle orthotrope équivalente

Masse et volume de la dalle de roulement en béton :

$$M_b = \rho_b l b h = 3000 \times 78 \times 13.715 = 641862 \text{ kg}$$

$$V_b = \frac{M_b}{\rho_b} = 213.954 \text{ m}^3$$

Section, masse et volume d'une poutre raidisseur :

$$S_r = 0.405 \times 0.018 \times 2 + 0.0111 \times 1.49 = 0.03113 \text{ m}^2$$

$$M_r = \rho_r S_r l_r = 7850 \times 0.03113 \times 78 = 19063.287 \text{ kg}$$

$$V_r = \frac{M_r}{\rho_r} = \frac{19063.287}{7850} = 2.4284 \text{ m}^3$$

Masse et volume d'une entretoise :

$$M_e = \rho_e S_e b_e = 7850 \times 0.001548 \times 10.972 = 133.329 \text{ kg}$$

$$V_e = \frac{M_e}{\rho_e} = \frac{133.329}{7850} = 0.01698 \text{ m}^3$$

Fractions volumiques des constituants (Chateauminos 2000):

Fraction volumique du béton :

$$V_r = \frac{M_b}{\rho_c} = \frac{\text{volume du béton}}{\text{volume du composite}} = 0.9453$$

Fraction volumique de l'acier :

$$V_r = \frac{M_a}{\rho_c} = \frac{\text{volume de l'acier}}{\text{volume de composite}} = 0.0547$$

Avec  $V_c$  est le volume du composite qui est égale à :

$$V_c = V_b + 5V_r + 14V_e$$

Caractéristiques de la dalle de roulement orthotrope équivalente :

Masse volumique :

$$\rho_c = \rho_b v_b + \rho_a v_a = 3265.295 \text{ kg/m}^3$$

Epaisseur :

$$h_c = \frac{M_c}{\rho_c l b} = 0.21157 \text{ m}$$

Avec  $M_c$  est la masse du composite qui est égale à :

$$M_c = M_b + 5M_r + 14M_e$$

Rigidités (Bakht and Jaeger 1985) :

$$D_x = 2.415 \times 10^9 \text{ Nm} ; D_y = 2.1807 \times 10^7 \text{ Nm} ; D_{xy} = 1.1424 \times 10^8 \text{ Nm}$$

Rapports de Poisson :

$$\nu_{xy} = 0.3 ; \nu_{yx} = \frac{D_y}{D_x} \nu_{xy} = 0.0027$$

Modules d'Young :

$$E_x = \frac{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})D_x}{h_c^3} = 3.0576 \times 10^{12} \text{ N/m}^2 ;$$

$$E_y = E_x \frac{D_y}{D_x} = 2.7607 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$$

Module de cisaillement :

$$G_{xy} = \frac{12D_{xy}}{h_c^3} = 1.4475 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$