

Université 08 mai 1945 - Guelma

Faculté des sciences et de la technologie
Département de génie civil et hydraulique



POLYCOPIE

Mécanique des milieux continus

DOCTEUR **HIMEUR MOHAMMED**

Adresse E-mail : bet_himeur@yahoo.fr

Téléphone : **+213 662620355**

Version : 2018

Destinée pour les étudiants du MASTER

Filières : Génie civil et Travaux Publics – Spécialités : Géotechnique, Structure, Matériaux
et Voies et Ouvrages d'Art

Avant-propos

Cette polycopie est une synthèse d'un ensemble de cours enseignés au département de Génie Civil et Hydraulique – Faculté des Sciences et de la Technologie de l'Université 08 mai 1945 – Guelma - Algérie. Elle est destinée aux filières de Génie Civil et Travaux Publics ; Spécialités : Géotechnique, Structure, Matériaux et Voies et Ouvrages d'Art.

La structure et le contenu de cet ouvrage obéissent aux recommandations formulées par le Comité Pédagogique National du domaine Sciences et Technologies et s'appuient sur l'offre de formation du Master académique destinée à la filière de Génie Civil – Spécialité : Géotechnique. Ainsi, ce document est formé de cinq chapitres.

- Dans le premier chapitre, il est fait exposé des concepts généraux de la mécanique des milieux continus en **définissant la branche de la mécanique des milieux continus** et en expliquant les notions de **mécanique**, de **milieux** et de **continuité**. Comme il comprend quelques autres **notions de base indispensables** dans toute analyse des systèmes mécaniques.

- Le chapitre deux résume les préliminaires mathématiques indispensables pour le traitement des aspects relatifs à la mécanique des milieux continus. Les outils mathématiques présentés concernent : **les symboles et les conventions d'écriture** ; **la définition des tenseurs, leurs particularités et le calcul tensoriel** ; **les éléments de calcul algébrique** ; **les opérateurs différentiels**. Comme on a enchaîné par une série d'exercices d'application avec leurs corrigés-types.

- Dans le chapitre trois, on a développé la théorie de l'état des contraintes sous ses différents aspects : **équilibre des milieux, vecteurs et tenseurs des contraintes, représentation graphique des états des contraintes, états de contraintes particuliers**. Comme on a fini le chapitre par des exercices d'application avec leurs corrigés-types.

- Le chapitre quatre traite de la théorie de l'état des déformations sous son aspect cinématique : **transformation d'un point matériel et vecteur de déplacements** ; **transformation des vecteurs et tenseurs gradients de la transformation** ; **tenseurs des déformations** ; **transformation de la géométrie des solides déformables** ; **les équations de compatibilité cinématique**. Comme on finit le chapitre par des exercices d'application avec leurs corrigés-types.

- Le chapitre cinq parle des relations de comportement. D'une part, il résume les lois de comportement en commençant par **les lois simples** puis **les lois de comportement élastiques linéaires** et enfin **les états de comportement particuliers**. D'autre part, il se termine par la mise en équations de l'équilibre des systèmes mécaniques à travers l'application des **principes des travaux virtuels**. Comme on finit le chapitre par des exercices d'application avec leurs corrigés-types.

- Nous terminons, enfin, par une bibliographie donnant une liste non exhaustive d'ouvrages traitant du domaine de la mécanique des milieux continus. Cette liste a été recommandée par le Comité Pédagogique National du domaine Sciences et Technologies.

Liste de figures

	<i>Page</i>
<i>Figure 01 – Domaines de la mécanique des milieux continus</i>	<i>1</i>
<i>Figure 02 – Dislocation</i>	<i>7</i>
<i>Figure 03 – Fissurations</i>	<i>7</i>
<i>Figure 04 – Référentiels</i>	<i>8</i>
<i>Figure 05 – Notions de configurations</i>	<i>8</i>
<i>Figure 06 – Produit scalaire</i>	<i>17</i>
<i>Figure 07 – Produit vectoriel</i>	<i>18</i>
<i>Figure 08 – Produit mixte</i>	<i>20</i>
<i>Figure 09 – Solide soumis à des sollicitations extérieures</i>	<i>38</i>
<i>Figure 10 – champs de déplacements pour tout point M du milieu,</i>	<i>38</i>
<i>Figure 11 – champs de déformations autour de chaque point M du milieu</i>	<i>39</i>
<i>Figure 12 – champs de contraintes à l'intérieur du solide</i>	<i>39</i>
<i>Figure 13 – Relations entre les différentes grandeurs physiques</i>	<i>39</i>
<i>Figure 14 – Domaine solide soumis à des sollicitations extérieures</i>	<i>40</i>
<i>Figure 15 – Forces de volume</i>	<i>40</i>
<i>Figure 16 – Forces de surface</i>	<i>40</i>
<i>Figure 17 – Corps solide en équilibre</i>	<i>41</i>
<i>Figure 18 – Equilibre des différentes parties du solide</i>	<i>41</i>
<i>Figure 19 – Contraintes intérieures</i>	<i>42</i>
<i>Figure 20 – Vecteur contrainte</i>	<i>42</i>
<i>Figure 21 – Tétraèdre</i>	<i>43</i>

<i>Figure 22 – Equilibre du tétraèdre</i>	44
<i>Figure 23 – Composantes du tenseur des contraintes de Cauchy</i>	45
<i>Figure 24 – Equilibre en rotation</i>	46
<i>Figure 25 – Equilibre en translation le long de $\mathbf{M}\mathbf{x}_1$</i>	47
<i>Figure 26 – Directions et contraintes principales</i>	49
<i>Figure 27 – Faces et contraintes principales</i>	51
<i>Figure 28 – Ellipsoïde de Lamé des contraintes</i>	52
<i>Figure 29 – Vecteur contrainte</i>	53
<i>Figure 30 – Cercle de Mohr des contraintes</i>	54
<i>Figure 31 – Cercle de Mohr des contraintes pour une face quelconque</i>	56
<i>Figure 32 – Etat de contraintes uniaxial et cercle de Mohr représentatif</i>	57
<i>Figure 33 – Etat de cisaillement pure et cercle de Mohr représentatif</i>	57
<i>Figure 34 – Etat de de contraintes isotropes et cercle de Mohr représentatif</i>	58
<i>Figure 35 – Etat de de contraintes planes</i>	58
<i>Figure 36 – Déformations de la matière autour de tout point M du milieu</i>	70
<i>Figure 37 – Vecteur déplacement de tout point M du milieu,</i>	71
<i>Figure 38 – Transformation d'un vecteur,</i>	73
<i>Figure 39 – Transformation de deux vecteurs,</i>	76
<i>Figure 40 – Essai de traction</i>	92
<i>Figure 41 - Loi de Hollomon</i>	93
<i>Figure 42 - Loi de Ludwik</i>	94
<i>Figure 43 - Loi de Swift</i>	94
<i>Figure 44 – Schéma d'un système mécanique</i>	104

Table des matières

Chapitre 01 – Concepts généraux	1
1.1- Qu'est-ce-que la mécanique des milieux continus ?	1
1.2- Notions de continuité	6
1.3- Notions de quelques bases d'analyse	7
Chapitre 02 – Préliminaires mathématiques	11
2.1- Pourquoi la nécessité d'outils mathématiques ?	11
2.2- Symboles et conventions	11
2.3- Définition des tenseurs	13
2.4- Particularités et propriétés des tenseurs d'ordre 2	15
2.5- Algèbre vectorielle	17
2.6- Calcul tensoriel	20
2.7- Opérateurs différentiels	23
2.8- Exercices	26
Chapitre 03 – Théorie de l'état des contraintes	38
3.1- Introduction	38
3.2- Equilibre d'un milieu continu	40
3.3- Vecteur contrainte	41
3.4- Tenseur des contraintes	43
3.5- Représentation graphiques des états des contraintes	51
3.6- Etats de contraintes particuliers	57
3.7- Exercices	61
Chapitre 04 – Théorie de l'état des déformations	70
4.1- Introduction	70
4.2- Transformation d'un point matériel : Vecteur déplacement	70
4.3- Transformation des vecteurs : Tenseur gradient de la transformation	72
4.4- Tenseurs des déformations	76
4.5- Transformation de la géométrie	78
4.6- Equations de compatibilité cinématique	80

4.7- Exercices _____	82
Chapitre 05 – Relations de comportement _____	91
5.1- Introduction _____	91
5.2- Les lois simples _____	91
5.3- Les lois des comportements élastiques linéaires _____	94
5.4- Etats particuliers de comportement _____	98
5.5- Mise en équation : Principes des travaux virtuels _____	103
5.6- Exercices _____	110
Bibliographie _____	121

Chapitre 01 – Concepts généraux

1.1- Qu'est-ce-que la mécanique des milieux continus ?

1.1.1- Domaine de la MMC

La **mécanique des milieux continus** est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Ce dernier point faisant l'objet de domaine intitulé Mécanique des fluides, Ce cours traite donc essentiellement la déformation des solides.



Figure 01 – Domaines de la mécanique des milieux continus

1.1.2- Mécanique

La mécanique peut faire référence à :

- la mécanique, **branche de la physique**, dont l'objet est l'étude **du mouvement, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques** ; cette science peut être classée en plusieurs domaines :
 - la mécanique rationnelle (dite aussi mécanique classique), qui regroupe elle-même :
 - la mécanique analytique, qui regroupe différentes formulations très mathématisées de la mécanique classique ;
 - la mécanique céleste,
 - la mécanique du point matériel,
 - la mécanique du solide,
 - la mécanique statique ou mécanique des systèmes matériels,
 - la mécanique des milieux continus, incluant la mécanique des fluides,
 - la dynamique (physique), discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont appliquées.
 - la mécanique quantique,
 - la mécanique relativiste,

- la mécanique, dont l'objet est l'étude et la conception de machines ; il s'agit par exemple de la mécanique automobile, de la mécanique navale, de la mécanique horlogère ;
 - une mécanique, synonyme de mécanisme, dispositif visant à produire un mouvement, à le transmettre ou à le transformer.
 - la mécanique, activité d'entretien et de réparation de tels mécanismes : la mécanique automobile

1.1.3- . De la mécanique du point matériel à la mécanique des milieux continus

La mécanique du point matériel permet de prédire le mouvement d'un point soumis à un ensemble de forces. Exemple : projectile, balle, etc...

Dans cette théorie, la description de la cinématique se réduit à :

- La position (déplacement : \vec{u}),
- La vitesse : \vec{v} ,
- L'accélération : \vec{a} ,

du point matériel.

Comme, les propriétés intrinsèques du corps et les caractéristiques mécaniques sont représentées, respectivement, seulement par sa **masse** et par la **force** auquel il est soumis.

La dynamique se résume à la relation entre le mouvement du point matériel et les forces qui le sollicitent. C'est la loi de mouvement de Newton qui régit cette dynamique :

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

\vec{f} : somme des forces sollicitant le point matériel,

m : masse du point matériel,

\vec{u} : accélération auquel est soumis le point matériel.

Nous remarquons qu'avec cette théorie, on ne peut pas décrire la **rotation** du point matériel (corps) autour de lui-même.

Pour cela intervient **la mécanique des solides indéformables** qui intègre les notions de :

- Moments : \vec{M} ,
- Inertie : I_θ ,
- Rotations : $\vec{\theta}$.

Donc, la dynamique du corps est complétée par la relation entre les moments qui le sollicitent et son accélération angulaire.

$$\vec{M} = I_\theta \vec{\theta} \quad 1.02$$

\vec{M} : somme des moments sollicitant le corps,

I_θ : Moment d'inertie de rotation du corps,

$\vec{\theta}$: accélération angulaire auquel est soumis le corps.

Donc, l'association des deux théories, à savoir :

- La mécanique du point matériel,
- Et la mécanique des solides indéformables

Permet de décrire en totalité le mouvement du corps indéformables, c'est-à-dire :

- Ses déplacements, ses vitesses de déplacement et ses accélérations de déplacement, respectivement :

$$\vec{u}, \quad \vec{\dot{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \vec{\ddot{u}} = \frac{\partial \vec{\dot{u}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad 1.03$$

- Ses rotations, ses vitesses de rotation et ses accélérations angulaires, respectivement :

$$\vec{\theta}, \quad \vec{\dot{\theta}} = \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t}, \quad \vec{\ddot{\theta}} = \frac{\partial \vec{\dot{\theta}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{\theta}}{\partial t^2} \quad 1.04$$

Cette théorie ne peut pas résoudre les problèmes des corps qui se déforment pour les raisons suivantes :

- Les propriétés intrinsèques du matériau qui compose le corps solide n'intervient pas : le module **d'Young E** et le **coefficient de Poisson ν** ,
- Les déformations du corps solide ne sont pas traités.

La prise en compte de ces particularités est entrevue à travers la théorie de **la mécanique des milieux continus** qui prend en charge, également, les notions de **déformation du solide** et de **comportement du matériau** qui le compose.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad} \vec{u}} + (\overline{\text{grad} \vec{u}})^T] \quad 1.05$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad} \vec{u}} - (\overline{\text{grad} \vec{u}})^T] \quad 1.06$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\} \quad 1.07$$

$[D]$: matrice des coefficients élastiques du matériau (**E** et **ν**),

ε : état de déformation en un point du milieu,

σ : état de contrainte en un point du milieu,

σ_{th} : état de contrainte d'origine thermique,

Donc, la mécanique des milieux continus est un cadre global physique et mathématique permettant de modéliser des problèmes concrets à résoudre.

Une fois le modèle mathématique établi, sa résolution pourra se faire soit par des méthodes analytiques (ex. RDM) soit par des méthodes numériques (ex. méthode des éléments finis).

1.2- Notions de continuité

La continuité d'un milieu est traduite mathématiquement par le fait que les grandeurs physiques caractéristiques de ce milieu sont des fonctions continues et dérivables au sens mathématique.

De cette définition, on peut affirmer que les domaines composés de milieux diphasiques ou encore de mélanges (exemple : eau-huile) ne peuvent être considérés comme domaines continus. Cependant, il sera possible de mener à bien l'étude en considérant des sous domaines continus.

De plus, il est à noter que la continuité parfaite d'un domaine matériel n'existe pas ; puisque à une échelle d'observation microscopique on remarque clairement que la matière est faite de juxtaposition d'éléments microscopiques ne possédant pas les mêmes propriétés et structurés autour de molécules se déplaçant dans le vide.

De ce fait, la continuité d'un domaine matériel n'est considérée qu'à des échelles d'observations macroscopiques qui ne pourra être qu'une approximation.

L'hypothèse de continuité de la transformation implique des champs vectoriels de déplacement dont les composantes sont des fonctions scalaires dérivables dans l'espace et dans le temps.

Ainsi les problèmes de dislocation, d'apparition du phénomène de cavitation et les fissurations font apparaître clairement des discontinuités de transformation.

Ces cas particuliers peuvent être traités en considérant la notion de continuité par sous domaine.

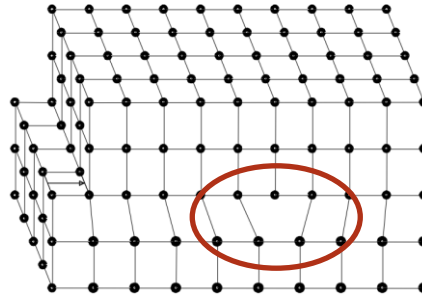


Figure 02 - Dislocation

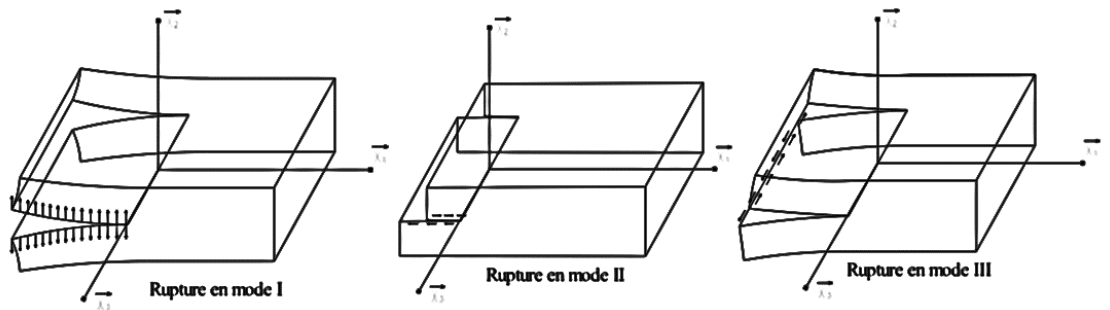


Figure 03 – Fissurations

1.3- Notions de quelques bases d'analyse

1.3.1- Les référentiels :

L'analyse d'un domaine matériel conduit à sa description et à son repérage tout au long de son évolution dans l'espace et au cours du temps. De ce fait, on doit disposer d'un référentiel pour suivre cette évolution. Ce référentiel permet une représentation de l'ensemble des points animés du mouvement du corps rigide.

Pour ce faire, on utilise une base vectorielle associée à un point « origine ». On obtient ainsi un repère R. On utilise souvent :

- soit des repères cartésiens orthonormés $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- soit pour des raisons de symétrie cylindrique des repères cylindro-polaires orthonormés $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$,

- Soit des repères sphériques $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

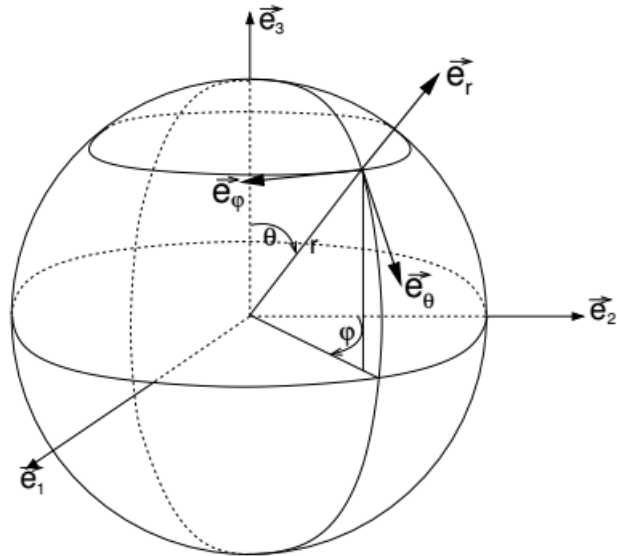


Figure 04 – Référentiels

1.3.2- Notions de configurations :

L'espace physique est rapporté à un repère, par exemple un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

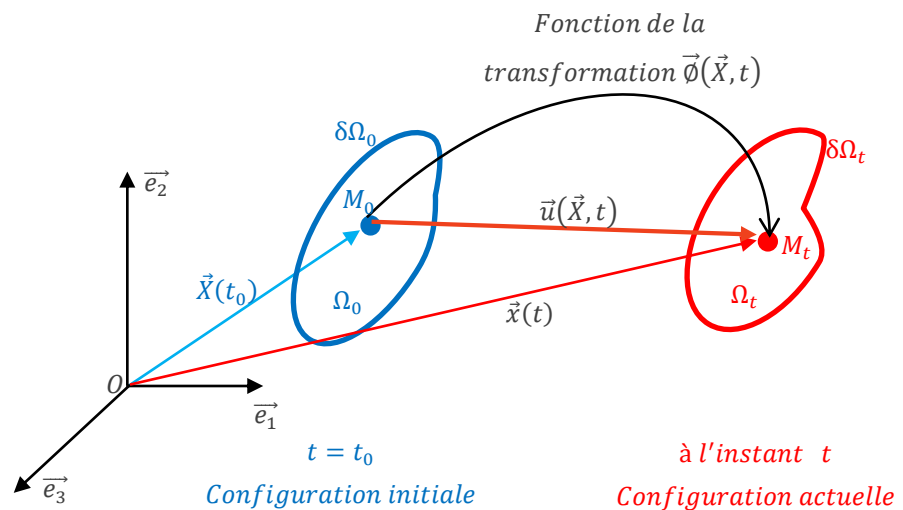


Figure 05 – Notions de configurations

A un instant $t = t_0$, le système de particules formant le milieu a une configuration appelée : **Configuration initiale ou configuration de référence.**

$$\Omega(t_0) = \Omega_0$$

$$\delta\Omega(t_0) = \delta\Omega_0$$

Après transformation et à l'instant t , le système de particules prend une autre forme notée $\Omega(t) = \Omega_t$ et $\delta\Omega(t) = \delta\Omega_t$. Cette nouvelle forme est appelée : **Configuration actuelle.**

Ainsi, le mouvement de toute particule M du milieu est décrit par rapport :

- A un repère : par exemple, cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- Au vecteur position dans la configuration initiale $\vec{X}(t_0)$, de composantes $(\vec{X}_1(t_0); \vec{X}_2(t_0); \vec{X}_3(t_0))$.
- A la fonction de la transformation $\vec{\phi}(\vec{X}, t)$
- Au vecteur position dans la configuration actuelle $\vec{x}(t)$, de composantes $(\vec{x}_1(t); \vec{x}_2(t); \vec{x}_3(t))$.
- Au vecteur déplacement de tout point M de la configuration initiale (noté M_0) à la configuration actuelle (noté M_t) qui est le vecteur :

$$\overline{M_0M_t} = \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(t) - \vec{X}(t_0).$$

De ce fait, après transformation et à l'instant t , les coordonnées de tout point M du milieu (devenu M_t) sont définies par des fonctions scalaires telles que :

$$x_1(t) = \phi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_2(t) = \phi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_3(t) = \phi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

Dire que le milieu est continu signifie que la fonction $\vec{\phi}(\vec{X}, t)$ est, mathématiquement, continue et différentiable.

1.3.3- Variables de Lagrange :

Comme il est stipulé ci-dessus, toute position à l'instant t du point M_t est décrite par les fonctions scalaires de la transformation $\vec{\phi}(\vec{X}, t)$ telle que :

$$x_i(t) = \phi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad 1.08$$

Dans cette description les variables (X_1, X_2, X_3, t) sont dites **variables ou coordonnées de Lagrange**.

Les fonctions ϕ_i représentent la description Lagrangienne du mouvement du milieu par rapport au référentiel $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1.3.4- Variables d'Euler :

Les hypothèses de continuité du milieu et de la transformation $\vec{\phi}(\vec{X}, t)$ imposent que les fonctions ϕ_i soient des bijections de la configuration initiale sur la configuration actuelle. Ceci se traduit par l'existence d'une relation inverse entre les variables x_i et X_j . On a donc :

$$X_j = \psi_j(x_i, t) \quad 1.09$$

De ce fait, on remarque qu'il est possible de changer les variables spatiales pour décrire la transformation. Celles-ci deviennent :

$$x_i(t) = \phi_i(\psi_1(x_i, t), \psi_2(x_i, t), \psi_3(x_i, t), t) \quad 1.10$$

Dans cette description les variables (x_1, x_2, x_3, t) sont dites **variables ou coordonnées d'Euler**.

Chapitre 02 – Préliminaires mathématiques

2.1- Pourquoi la nécessité d'outils mathématiques ?

La mécanique des milieux continus utilise d'une manière intensive des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. C'est grâce à ces êtres mathématiques qu'on peut écrire des modèles mathématiques pour décrire ou représenter les phénomènes physiques analysés. Ces outils permettent aux formules une concision remarquable.

2.2- Symboles et conventions

2.2.1- Convention de sommation d'Einstein

Considérant un repère cartésien orthonormé $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La convention de sommation d'Einstein stipule :

« Lorsque un indice apparaît deux fois dans un monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2, et 3 ».

Exemples :

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad 2.01$$

$$a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 \quad 2.02$$

Si nous avons une expression avec deux indices ou plus (exemples $a_{lm}b_m, a_{ijk}b_k$), l'indice qui se répète ($a_{lm}b_m, a_{ijk}b_k$) est dit "muet" et celui qui ne se répète pas ($a_{lm}b_m, a_{ijk}b_k$) est dit « franc ». Les indices muets peuvent être remplacés par n'importe quel autre indice, excepté les indices francs :

- Dans l'expression $(a_{lm}b_m)$ l'indice m peut être remplacé par n'importe quel autre indice, excepté l'indice l .

- Dans l'expression $(a_{ijk}b_k)$, l'indice k peut être remplacé par n'importe quel autre indice, excepté les indices i et j .

Cette convention de sommation est dite convention d'Einstein.

2.2.2- Symbole de Kronecker

Le **symbole de Kronecker**, qui est appelé aussi le **Delta de Kroncker**, est noté δ_{ij} et est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 2.03$$

Ainsi :

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

Sous forme matricielle, le symbole de Kronecker, s'écrit :

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{I} \quad 2.04$$

C'est, en fait, la matrice « **identité** » de taille 3x3.

2.2.3- Symbole de permutation dit de Lévi-Civita

On dispose de trois indices i , j et k , dont chacun peut prendre les valeurs 1 ; 2 et 3. On dit :

- Qu'ils forment une **permutation paire** de 1 ; 2 et 3, si la disposition des trois indices est comme suit : $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$.
- Qu'ils forment une **permutation impaire** de 1 ; 2 et 3, si la disposition des trois indices est comme suit : $(2,1,3)$, $(1,3,2)$, $(3,2,1)$.

Ceci dit, Le symbole de permutation dit de Lévi-Civita, noté ε_{ijk} est défini comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices quelconques sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire} \end{cases} \quad 2.05$$

Ainsi :

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \text{ si } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \text{ ou } i = j = k$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$$

2.3- Définition des tenseurs

2.3.1- Tenseur d'ordre « Zéro »

Un **tenseur d'ordre zéro est un scalaire** ; c'est-à-dire un être mathématique à une **seule composante et invariant** lors d'un changement de base.

Il représente certaines grandeurs physiques qui s'expriment par un nombre telles que une masse volumique, une température, ..., etc...

2.3.2- Tenseur d'ordre « Un »

Un **tenseur d'ordre un** est un être mathématique représentant certaines grandeurs physiques définies par un **sens**, une **direction** et une **intensité**. Il s'agit en fait d'un **vecteur** (Exemple : déplacement, vitesse, accélération, force, etc...).

Dans un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le tenseur d'ordre un (vecteur) possède trois composantes et est noté comme suit :

- Sous forme algébrique : $\vec{V} = \vec{V} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$
- Sous forme indicielle : $\vec{V} = \vec{V} = v_i\vec{e}_i$

- Sous forme matricielle : $\vec{V} = \vec{V} = \langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \rangle \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}$

2.3.3- Tenseur du second ordre

Un **tenseur du second ordre** est un opérateur linéaire T qui fait correspondre à un vecteur \vec{V} de l'espace euclidien un vecteur \vec{W} de ce même espace.

$$\vec{W} = T(\vec{V}) \quad 2.06$$

Dans un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le tenseur d'ordre deux possède neuf composantes. Il est représenté par une matrice de 3x3 et est noté $[T]$ ou \bar{T} ou $\bar{\bar{T}}$. La relation (2.06) peut alors s'écrire :

- Sous forme indicelle : $W_i = T_{ij}V_j$
- Sous forme matricielle : $\{\vec{W}\} = [\bar{T}]\{\vec{V}\}$ ou encore $\vec{W} = \bar{T}\vec{V}$
- Sous forme développée : $\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$

2.3.4- Tenseur d'ordre supérieur

Un **tenseur d'ordre trois** est un opérateur linéaire $\bar{\bar{S}}$ qui fait correspondre à un vecteur \vec{V} de l'espace euclidien un tenseur d'ordre deux \bar{T} de ce même espace.

$$\bar{T} = \bar{\bar{S}}(\vec{V}) \quad 2.07$$

Un **tenseur d'ordre n** est un opérateur linéaire Z^n qui fait correspondre à un vecteur \vec{V} de l'espace euclidien un tenseur d'ordre n-1 T^{n-1} de ce même espace.

$$T^{n-1} = Z^n(\vec{V}) \quad 2.08$$

2.4- Particularités et propriétés des tenseurs d'ordre 2

2.4.1- Tenseur « identité »

Le tenseur identité, noté $[\bar{I}]$ est un tenseur particulier. Sa particularité réside dans le fait que ses composantes sont les mêmes quelque soit la base orthonormée.

Celui-ci est représenté par la matrice identité :

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.09$$

Autrement dit : $I_{ij} = \delta_{ij}$

2.4.2- Tenseur « isotrope »

Le tenseur isotrope, dit également tenseur sphérique est aussi un tenseur particulier. Sa particularité réside dans le fait que ses composantes T_{ij} sont les mêmes pour $i = j$ quelque soit la base orthonormée. Les autres composantes lorsque $i \neq j$ sont nulles.

Celui-ci est représenté par la matrice :

$$[T] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.10$$

Autrement dit : $T_{ij} = t \cdot \delta_{ij}$

2.4.3- Transposé d'un tenseur

Soit un tenseur $[T] = [T_{ij}]$, où i représente le rang des lignes et j le rang des colonnes. Le **transposé** du tenseur $[T]$ est le tenseur, noté $[T]^T$, où les lignes i reviennent en colonnes et les colonnes j reviennent en lignes. Autrement dit :

$$[T_{ij}]^T = [T_{ji}] \quad 2.11$$

2.4.4- Tenseur « symétrique »

Un tenseur est dit **symétrique**, lorsque nous avons $T_{ij} = T_{ji}$, Autrement dit :

$$[T] = [T]^T \quad 2.12$$

2.4.5- Tenseur « antisymétrique »

Un tenseur est dit **antisymétrique**, lorsque nous avons $T_{ij} = -T_{ji}$, Autrement dit :

$$[T] = -[T]^T \quad 2.13$$

2.4.6- Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur, notée $\text{tr}(\bar{T})$, est la somme de ses termes diagonaux.

$$\text{Autrement dit : } \text{Tr}(\bar{T}) = \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

2.4.7- Propriétés de décomposition des tenseurs

Tout tenseur quelconque $[T]$ peut s'écrire en la somme de deux tenseurs, l'un symétrique $[T]^{Sym.}$ et l'autre antisymétrique $[T]^{antisym.}$.

$$[T] = [T]^{Sym.} + [T]^{antisym.} \quad 2.14$$

$$\text{Avec : } [T]^{Sym.} = \frac{1}{2}([T] + [T]^T)$$

$$\text{et } [T]^{antisym.} = \frac{1}{2}([T] - [T]^T)$$

2.5- Algèbre vectorielle

2.5.1- Produit scalaire de deux vecteurs

Soit deux vecteurs : $\vec{U} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}$ et $\vec{V} = \langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \rangle \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}$

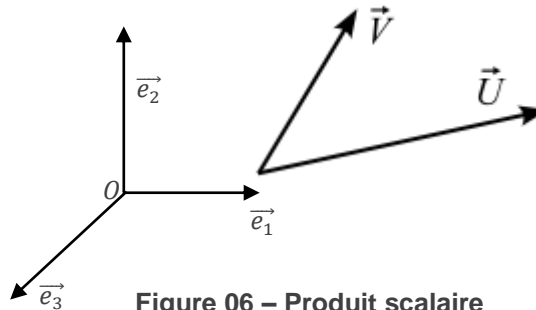


Figure 06 – Produit scalaire

On appelle produit scalaire des deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} , noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$, le nombre réel donné comme suit :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \quad 2.15$$

Dans un repère cartésien orthonormé $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le produit scalaire des deux vecteurs est égal à :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \langle u_1 \cdot \vec{e}_1 \quad u_2 \cdot \vec{e}_2 \quad u_3 \cdot \vec{e}_3 \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \cdot \vec{e}_1 \\ v_2 \cdot \vec{e}_2 \\ v_3 \cdot \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \quad 2.16$$

En introduisant le Delta de Kronecker, on remarque que :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 2.17$$

Ce qui donne à :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \quad 2.18$$

Remarques :

- Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire,
- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est égal à zéro ($\cos(90^\circ) = 0$).

2.5.2- Produit vectoriel de deux vecteurs

Soit deux vecteurs : $\vec{U} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} = \langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \rangle \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

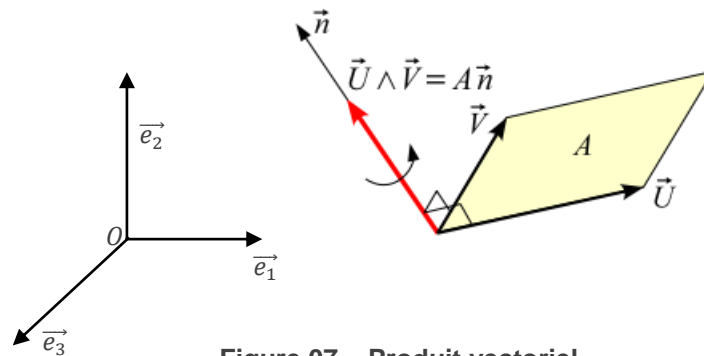


Figure 07 – Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel des deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} , noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$, le vecteur donné comme suit :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = A\vec{n} \quad 2.19$$

Avec :

\vec{n} : vecteur unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$)

\vec{n} : forme avec \vec{U} et \vec{V} un trièdre direct

A : aire du parallélogramme formé sur \vec{U} et \vec{V} .

De l'équation (29) on déduit que :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|A\vec{n}\| = A = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \sin(\widehat{(\vec{U}, \vec{V})}) \quad 2.20$$

Dans un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le produit vectoriel des deux vecteurs est égal à :

$$\{\vec{U}\} \wedge \{\vec{V}\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad 2.21$$

En introduisant le symbole de Lévi-Civita et en considérant la convention de sommation d'Einstein, on démontre que les composantes du produit vectoriel des deux vecteurs peut s'écrire comme suit :

$$\{\vec{U}\} \wedge \{\vec{V}\} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \vec{e}_i \quad 2.22$$

Propriétés du produit vectoriel :

- Distributif $\rightarrow \vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$,
- Anticommutatif $\rightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$,
- Produit des vecteurs unitaires $\rightarrow \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 : \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 : \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.
- Produits nuls $\rightarrow \vec{e}_i \wedge \vec{e}_i = \vec{0}$.

2.5.3- Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs \vec{U} , \vec{V} et \vec{W} est le scalaire noté $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ donné par la relation suivante :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) \quad 2.23$$

Lorsque le trièdre formé par les vecteurs est direct, le produit mixte est égal au volume du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

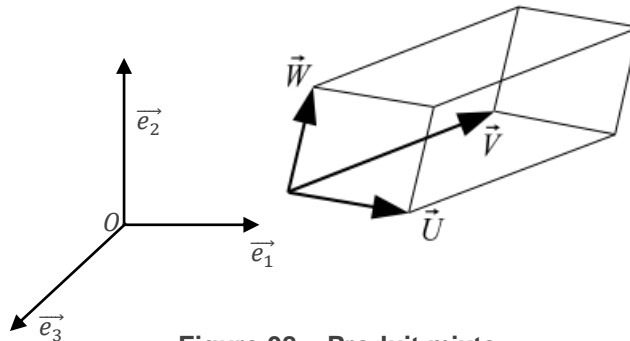


Figure 08 – Produit mixte

Par ailleurs, dans le repère cartésien orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \quad 2.24$$

Propriétés du produit mixte :

- $\rightarrow (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$,
- $\rightarrow (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}) = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{V})$
- $\rightarrow (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = -(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}) = -(\vec{U}, \vec{W}, \vec{V})$

2.6- Calcul tensoriel

2.6.1- Produit tensoriel de deux vecteurs (Tenseur d'ordre 1)

Soit deux vecteurs : $\vec{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$ et $\vec{V} = v_j \cdot \vec{e}_j$, Le produit tensoriel de ces deux vecteurs, noté $\vec{U} \otimes \vec{V}$ est un tenseur d'ordre 2 donné comme suit :

$$\vec{U} \otimes \vec{V} = (u_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (v_j \cdot \vec{e}_j) = u_i \cdot v_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad 2.25$$

Les composantes de ce tenseur sont données comme suit :

$$[T_{ij}] = [u_i \cdot v_j] = \begin{bmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & u_1 \cdot v_3 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & u_2 \cdot v_3 \\ u_3 \cdot v_1 & u_3 \cdot v_2 & u_3 \cdot v_3 \end{bmatrix} \quad 2.26$$

2.6.2- Produit contracté de deux tenseurs

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un **tenseur d'ordre 2**.

Soit deux tenseurs d'ordre 2 : $\bar{A} = a_{il} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l)$ et $\bar{B} = b_{mj} \cdot (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_j)$, Le produit tensoriel de ces deux tenseurs $\bar{A} \otimes \bar{B}$ s'écrit :

$$\bar{A} \otimes \bar{B} = a_{il} \cdot b_{mj} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_j \quad 2.27$$

Ce qui nous donne un tenseur d'ordre 4.

L'opération de contraction consiste à utiliser le même indice : $l = m = k$. De ce fait, les tenseurs ci-dessus deviennent : $\bar{A} = a_{ik} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k)$ et $\bar{B} = b_{kj} \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j)$. Et le deuxième membre de l'équation (2.27) se réduit à :

$$a_{ik} \cdot b_{kj} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j = a_{ik} \cdot b_{kj} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = c_{ij} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \text{ puisque } \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k = 1$$

Donc le produit contracté des deux tenseurs d'ordre 2 $\bar{A} = a_{il} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l)$ et

$\bar{B} = b_{mj} \cdot (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_j)$, noté $\bar{A} \cdot \bar{B}$ est donné comme suit :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = c_{ij} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} \quad 2.28$$

Remarques :

- → Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur est **un vecteur**.

$\bar{A} = a_{il} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l)$; $\vec{V} = v_k \cdot \vec{e}_k$ si on prend $l = k$ on obtient :

$$\bar{A} \cdot \vec{V} = a_{ik} \cdot v_k \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k = a_{ik} \cdot v_k \cdot \vec{e}_i = c_i \cdot \vec{e}_i \quad 2.29$$

- → Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 1 est **un scalaire**.

$\bar{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$; $\vec{V} = v_j \cdot \vec{e}_j$ si on prend $i = j = k$ on obtient :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_k \cdot v_k \cdot \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k = u_k \cdot v_k \quad 2.30$$

2.6.3- Produit doublement contracté de deux tenseurs

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un **scalaire**.

Soit deux tenseurs d'ordre 2 : $\vec{\bar{A}} = a_{il} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l)$ et $\vec{\bar{B}} = b_{mj} \cdot (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_j)$, Le produit doublement contracté de ces deux tenseurs s'écrit $\vec{\bar{A}} : \vec{\bar{B}}$.

La démarche de la **première contraction** a été décrite ci-dessus avec : $l = m = k$

Le résultat étant :

$$\vec{\bar{A}} \cdot \vec{\bar{B}} = c_{ij} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} \quad 2.31$$

La **deuxième contraction** consiste à utiliser, maintenant, le même indice pour $i = j = n$. Ainsi, l'équation (2.31) devient :

$$\vec{\bar{A}} : \vec{\bar{B}} = c_{nn} \cdot (\vec{e}_n \otimes \vec{e}_n) = c_{nn} \quad 2.32$$

Il s'agit, en fait, d'un scalaire qui n'est que la trace de la matrice résultant du produit $a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}$.

Remarques :

En général, on a :

- Le produit contracté $\rightarrow A^m \cdot B^n = C^{(m+n-2)}$;
- Le produit doublement contracté $\rightarrow A^m : B^n = C^{(m+n-4)}$.

2.7- Opérateurs différentiels

2.7.1- Le vecteur « Nabla »

Le vecteur « **Nabla** », noté $\vec{\nabla}$, est un vecteur dont les composantes par rapport à un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ sont les dérivées du 1^{er} ordre correspondants aux trois dimensions du référentiel :

$$\vec{\nabla} = \langle \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \rangle \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array} \right\} \quad 2.33$$

2.7.2- Le gradient, noté « **grad** »

Le gradient est un opérateur différentiel de 1^{er} ordre, qui si on l'applique à un tenseur d'ordre n , nous donne un tenseur d'ordre $n+1$.

Cas d'un tenseur d'ordre zéro (scalaire)

Soit une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$, par définition le gradient de cette fonction scalaire (tenseur d'ordre zéro) nous donne un tenseur d'ordre 1 (vecteur) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \langle \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \rangle \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right\} = \vec{\nabla} \cdot f \quad 2.34$$

Cas d'un tenseur d'ordre 01 (vecteur)

Soit un vecteur $\vec{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$,

par définition le gradient de vecteur (tenseur d'ordre 01) nous donne un tenseur d'ordre 2. Il s'agit en fait d'un produit tensoriel des vecteurs $\vec{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$ et $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \vec{e}_j$.

Donc :

$$\overline{\text{grad}}\vec{U} = \vec{U} \otimes \vec{\nabla} = (u_i \cdot \vec{e}_i) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \vec{e}_j \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad 2.35$$

Les composantes de ce tenseur sont données comme suit :

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad 2.36$$

2.7.3- La divergence, notée « **div** »

La divergence est un opérateur différentiel de 1^{er} ordre, qui si on l'applique à un tenseur d'ordre $n \geq 1$, nous donne un tenseur d'ordre $n - 1$.

Cas d'un tenseur d'ordre deux

Soit un tenseur d'ordre 2 $\vec{T} = [t_{ij}]$, par définition la divergence d'un tenseur d'ordre 2 nous donne un tenseur d'ordre 1 (vecteur) :

$$\overrightarrow{\text{div}}\vec{T} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right\} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad 2.37$$

Cas d'un tenseur d'ordre 01 (vecteur)

Soit un vecteur $\vec{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$,

par définition la divergence d'un vecteur (tenseur d'ordre 01) nous donne un tenseur d'ordre 0 (scalaire). Donc :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad 2.38$$

2.7.4- Le Laplacien, notée « Δ »

Le Laplacien est un opérateur différentiel de 2^{ème} ordre, qui ne change pas l'ordre de la variable auquel il s'applique.

- Appliqué à une fonction scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$, $\rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$
- Appliqué à un vecteur $\vec{U} = u_i \cdot \vec{e}_i$, $\rightarrow \Delta \vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$

2.7.5- Le rotationnel d'un vecteur, notée « $\overrightarrow{\text{rot}}$ »

Le rotationnel d'un vecteur est un opérateur différentiel de 1^{er} ordre, qui ne s'applique qu'aux vecteurs pour donner un vecteur. Il s'agit, en fait, du produit vectoriel des vecteurs Nabla et du vecteur considéré.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad 2.39$$

En introduisant le symbole de Lévi-Civita et en considérant la convention de sommation d'Einstein, on démontre que les composantes du rotationnel des deux vecteurs peut s'écrire comme suit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \quad 2.40$$

2.8- Exercices

Exercice 2.01

En adoptant la convention d'Einstein ; vérifier les équations suivantes et dire si elles sont exactes ou non en argumentant votre réponse ?

- $a_{ij}x_i x_j + b_{kl}x_k x_l = (a_{ij} + b_{ij})x_i x_j$
- $a_{ij}x_i + b_{kl}x_k = (a_{ij} + b_{ij})x_i$
- $a_{i3}(b_{3i} + c_{3i}) = a_{i3}b_{3i} + a_{k3}c_{3k}$
- $a_{ij}b_j = a_{ii}b_i$

Corrigé exercice 2.01

$$- a_{ij}x_i x_j + b_{kl}x_k x_l = (a_{ij} + b_{ij})x_i x_j$$

Dans l'expression $b_{kl}x_k x_l$ les indices k et l sont muets. De ce fait, on peut les changer par d'autres indices non francs, respectivement par $k=j$ et $l=j$. Ainsi, le premier terme de l'équation devient :

$$a_{ij}x_i x_j + b_{ij}x_i x_j = (a_{ij} + b_{ij})x_i x_j$$

Donc cette équation est exacte.

$$- a_{ij}x_i + b_{kl}x_k = (a_{ij} + b_{ij})x_i$$

Dans l'expression $b_{kl}x_k$ l'indice k est muet. De ce fait, on peut le changer par un autre indice non francs, par $k=i$. Ainsi, le premier terme de l'équation devient :

$$a_{ij}x_i + b_{il}x_i = (a_{ij} + b_{il})x_i$$

Donc cette équation n'est pas exacte ($i \neq l$).

$$- a_{i3}(b_{3i} + c_{3i}) = a_{i3}b_{3i} + a_{k3}c_{3k}$$

Dans l'expression $a_{k3}x_{3k}$ l'indice k est muet. De ce fait, on peut le changer par un autre indice non francs, par $k=i$. Ainsi, le second terme de l'équation devient :

$$a_{i3}b_{3i} + a_{i3}c_{3i} = a_{i3}(b_{3i} + c_{3i})$$

Donc cette équation est exacte.

$$- a_{ij}b_j = a_{ii}b_i$$

On remarque que dans cette équation l'indice muet j a été remplacé par l'indice franc i . Donc cette équation n'est pas exacte.

Exercice 2.02

Résoudre et simplifier les relations suivantes :

$$- \delta_{ij}x_jx_ix_k = \delta_{ik}x_jx_ix_k$$

$$- \delta_{ij}\delta_{ik}a_ib_k = ?$$

$$- \delta_{ij}a_ib_j = ?$$

Corrigé exercice 2.02

$$- \delta_{ij} x_j x_i x_k = \delta_{ik} x_j x_i x_k$$

Pour $i \neq j$, on remarque que l'expression $\delta_{ij} x_j x_i x_k$, est nulle. Elle ne s'annule pas pour $i=j$. (Par définition du symbole de Kronecker δ). Ainsi le premier terme non nul de la relation devient :

$$\delta_{ii} x_i x_i x_k = x_i x_i x_k = (x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3) x_k = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_k$$

Pour $i \neq k$, on remarque que l'expression $\delta_{ik} x_j x_i x_k$, est nulle. Elle ne s'annule pas pour $i=k$. (Par définition du symbole de Kronecker δ). Ainsi le second terme non nul de la relation devient :

$$\delta_{kk} x_j x_k x_k = x_j x_k x_k = (x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3) x_j = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_j$$

$$\Rightarrow x_k = x_j \forall k \text{ et } j$$

$$- \delta_{ij} \delta_{ik} a_i b_k = ?$$

Pour $i \neq j$ ou encore pour $i \neq k$, on remarque que l'expression $\delta_{ij} \delta_{ik} a_i b_k$, est nulle. Elle ne s'annule pas pour $i=j=k$. (Par définition du symbole de Kronecker δ). Ainsi l'expression non nulle devient :

$$\delta_{ii} \delta_{ii} a_i b_i = a_i b_i = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$- \delta_{ij} a_i b_j = ?$$

Pour $i \neq j$, on remarque que l'expression $\delta_{ij} a_i b_j$, est nulle. Elle ne s'annule pas pour $i=j$. (Par définition du symbole de Kronecker δ). Ainsi l'expression non nulle devient :

$$\delta_{ii} a_i b_i = a_i b_i = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

Exercice 2.03

Soit les vecteurs $\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

- Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$
- Donner les composantes des vecteurs \vec{W} et \vec{S} , tels que $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ et $\vec{S} = \vec{V} \wedge \vec{U}$. Commenter les résultats.
- Déterminer par deux méthodes distinctes l'angle $(\widehat{\vec{U} \vec{V}})$.
- Calculer les produits tensoriels $\vec{U} \otimes \vec{V}$ et $\vec{V} \otimes \vec{U}$. Commenter les résultats.
- Calculer les produits contractés $\vec{U} \cdot \vec{W}$, $\vec{W} \cdot \vec{S}$, et $(\vec{U} \otimes \vec{V}) \cdot (\vec{V} \otimes \vec{U})$.
- Calculer le produit doublement contracté $(\vec{U} \otimes \vec{V}) : (\vec{V} \otimes \vec{U})$.

Corrigé exercice 2.03

- Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$

$$\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 2 \times 5 + 4 \times 3 + 1 \times (-1) = 21$$

- Donner les composantes des vecteurs \vec{W} et \vec{S} , tels que $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ et $\vec{S} = \vec{V} \wedge \vec{U}$. Commenter les résultats.

$$\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) - 1 \times 3 \\ 1 \times 5 - 2 \times (-1) \\ 2 \times 3 - 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \vec{V} \wedge \vec{U} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 - (-1) \times 4 \\ (-1) \times 2 - 5 \times 1 \\ 5 \times 4 - 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{s} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$, c'est la propriété de l'anti-commutativité du produit vectoriel

- Déterminer par deux méthodes distinctes l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$$\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

1^{ère} méthode : on utilise la formulation du produit scalaire

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{V} &= \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = 21 = (\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}) \cdot (\sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2}) \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \\ &\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = 39.23^\circ \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : on utilise la formulation du produit vectoriel

$$\begin{aligned} \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| &= \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \\ \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-14)^2} &= (\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}) \cdot (\sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2}) \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \\ &\Rightarrow \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = 39.23^\circ \end{aligned}$$

- Calculer les produits tensoriels $\vec{U} \otimes \vec{V}$ et $\vec{V} \otimes \vec{U}$. Commenter les résultats.

$$\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{U} \otimes \vec{V} = (u_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (v_j \cdot \vec{e}_j) = u_i \cdot v_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

$$[u_i \cdot v_j] = \begin{bmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & u_1 \cdot v_3 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & u_2 \cdot v_3 \\ u_3 \cdot v_1 & u_3 \cdot v_2 & u_3 \cdot v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 3 & 2 \times (-1) \\ 4 \times 5 & 4 \times 3 & 4 \times (-1) \\ 1 \times 5 & 1 \times 3 & 1 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 20 & 12 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} \otimes \vec{U} = (v_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (u_j \cdot \vec{e}_j) = v_i \cdot u_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

$$[v_i, u_j] = \begin{bmatrix} v_1 \cdot u_1 & v_1 \cdot u_2 & v_1 \cdot u_3 \\ v_2 \cdot u_1 & v_2 \cdot u_2 & v_2 \cdot u_3 \\ v_3 \cdot u_1 & v_3 \cdot u_2 & v_3 \cdot u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x2 & 5x4 & 5x1 \\ 3x2 & 3x4 & 3x1 \\ -1x2 & -1x4 & -1x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

On remarque que : $[\vec{U} \otimes \vec{V}] = [\vec{V} \otimes \vec{U}]^T$.

- Calculer les produits contractés $\vec{U} \cdot \vec{W}$, $\vec{W} \cdot \vec{S}$, et $(\vec{U} \otimes \vec{V}) \cdot (\vec{V} \otimes \vec{U})$.

$$\vec{U} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{W} = -7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 14\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{S} = 7\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$$

$$\vec{U} \cdot \vec{W} = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 2x(-7) + 4x7 + 1x(-14) = 0$$

$$\vec{W} \cdot \vec{S} = w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 = (-7)x7 + 7x(-7) + (-14)x14 = -294$$

$$\vec{A} = \vec{U} \otimes \vec{V} = (u_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (v_j \cdot \vec{e}_j) = u_i \cdot v_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad [u_i, v_j] = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 20 & 12 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{V} \otimes \vec{U} = (v_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (u_j \cdot \vec{e}_j) = v_i \cdot u_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad [v_i, u_j] = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = c_{ij} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 20 & 12 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 280 & 70 \\ 280 & 560 & 140 \\ 70 & 140 & 35 \end{bmatrix}$$

- Calculer le produit doublement contracté $(\vec{U} \otimes \vec{V}) \cdot (\vec{V} \otimes \vec{U})$.

$$\vec{A} = \vec{U} \otimes \vec{V} = (u_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (v_j \cdot \vec{e}_j) = u_i \cdot v_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad [u_i, v_j] = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 20 & 12 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{V} \otimes \vec{U} = (v_i \cdot \vec{e}_i) \otimes (u_j \cdot \vec{e}_j) = v_i \cdot u_j \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad [v_i \cdot u_j] = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = c_{ij} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad \text{avec} \quad c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 20 & 12 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 6 & 12 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 280 & 70 \\ 280 & 560 & 140 \\ 70 & 140 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = c_{nn} \cdot (\vec{e}_n \otimes \vec{e}_n) = c_{nn}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 140 + 560 + 35 = 735$$

Exercice 2.04

Soit les fonctions scalaires suivantes :

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^3 + z^4$$

$$g(x, y, z) = 5x^2 + 3y^4 - z^3$$

Calculer les expressions suivantes :

$$\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} g \quad [A] = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} \quad [B] = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V}$$

$$\overrightarrow{UA} = \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} \quad \overrightarrow{UB} = \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} \quad ua = \text{div} \overrightarrow{UA} \quad vb = \text{div} \overrightarrow{UB}$$

$$LF = \Delta f \quad LG = \Delta g \quad \overrightarrow{LU} = \Delta \vec{U} \quad \overrightarrow{LV} = \Delta \vec{V}$$

$$\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \quad \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$$

[Corrigé exercice 2.04](#)

$$- \vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^3 + z^4$$

$$\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 4x \\ 12y^2 \\ 4z^3 \end{Bmatrix}$$

$$- \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} g$$

$$g(x, y, z) = 5x^2 + 3y^4 - z^3$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} g = \vec{\nabla} \cdot g = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{Bmatrix} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 10x \\ 12y^3 \\ -3z^2 \end{Bmatrix}$$

$$- [A] = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{U}$$

$$\vec{U} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 4x \\ 12y^2 \\ 4z^3 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{U} = \vec{U} \otimes \vec{\nabla}$$

Les composantes de ce tenseur sont données comme suit :

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 24y & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{bmatrix}$$

$$- [B] = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{V}$$

$$\vec{V} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 10x \\ 12y^3 \\ -3z^2 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{V} = \vec{V} \otimes \vec{\nabla}$$

Les composantes de ce tenseur sont données comme suit :

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 36y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{bmatrix}$$

$$-\overline{UA} = \overline{divA}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 24y & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{UA} = \overline{divA} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + \frac{\partial a_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + \frac{\partial a_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial x} + \frac{\partial a_{32}}{\partial y} + \frac{\partial a_{33}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 24 + 0 \\ 0 + 0 + 24z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 24z \end{pmatrix}$$

$$-\overline{UB} = \overline{divB}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 36y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{bmatrix}$$

$$\overline{UB} = \overline{divB} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial x} + \frac{\partial b_{12}}{\partial y} + \frac{\partial b_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial x} + \frac{\partial b_{22}}{\partial y} + \frac{\partial b_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial b_{31}}{\partial x} + \frac{\partial b_{32}}{\partial y} + \frac{\partial b_{33}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 72y + 0 \\ 0 + 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72y \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$- ua = \operatorname{div} \overline{UA}$$

$$\overline{UA} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 24z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \overline{UA} = \frac{\partial ua_1}{\partial x} + \frac{\partial ua_2}{\partial y} + \frac{\partial ua_3}{\partial z} = 0 + 0 + 24 = 24$$

$$- ub = \operatorname{div} \overline{UB}$$

$$\overline{UB} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 72y \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \overline{UB} = \frac{\partial vb_1}{\partial x} + \frac{\partial vb_2}{\partial y} + \frac{\partial vb_3}{\partial z} = 0 + 72 + 0 = 72$$

$$- LF = \Delta f$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^3 + z^4$$

$$LF = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4 + 24y + 12z^2$$

$$- LG = \Delta g$$

$$g(x, y, z) = 5x^2 + 3y^4 - z^3$$

$$LG = \Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 10 + 36y^2 - 6z$$

$$- \overline{LU} = \Delta \vec{U}$$

$$\vec{U} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{pmatrix} 4x \\ 12y^2 \\ 4z^3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{L\vec{U}} = \Delta\vec{U} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \end{Bmatrix} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 24z \end{Bmatrix}$$

$$- \overline{L\vec{V}} = \Delta\vec{V}$$

$$\vec{V} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 10x \\ 12y^3 \\ -3z^2 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{L\vec{V}} = \Delta\vec{V} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \end{Bmatrix} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 72y \\ -6 \end{Bmatrix}$$

$$- \overline{R\vec{U}} = \overline{rot} \vec{U}$$

$$\vec{U} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 4x \\ 12y^2 \\ 4z^3 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{R\vec{U}} = \overline{rot} \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-\overline{R\vec{V}} = \overline{rot\vec{V}}$$

$$\vec{V} = \langle \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \rangle \begin{Bmatrix} 10x \\ 12y^3 \\ -3z^2 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{R\vec{V}} = \overline{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chapitre 03 – Théorie de l'état des contraintes

3.1- Introduction

Soit un corps solide soumis à des sollicitations extérieures : forces appliquées (de volume ou de surface), conditions aux limites (appuis, déplacements imposés).

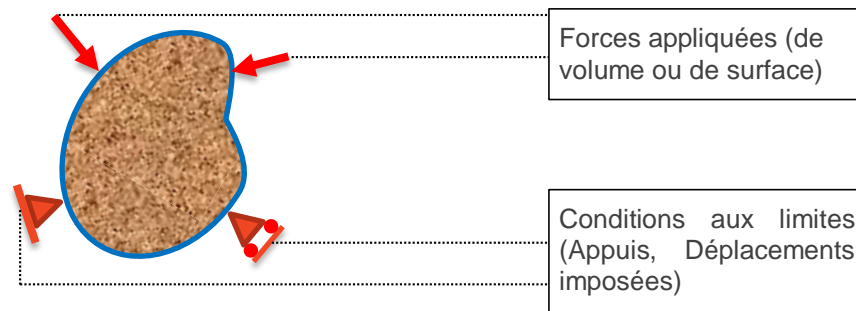


Figure 09 – Solide soumis à des sollicitations extérieures

Ces sollicitations génèrent à l'intérieur du solide **trois champs de grandeurs physiques** :

- Un champs de **déplacements** pour tout point M du milieu,
- Un champs de **déformations** autour de chaque point du milieu à l'intérieur du solide,
- Un champs de **contraintes** autour de chaque point du milieu à l'intérieur du solide,

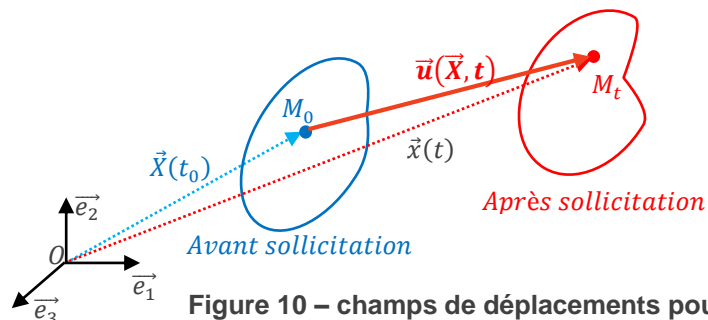


Figure 10 – champs de déplacements pour tout point M du milieu,

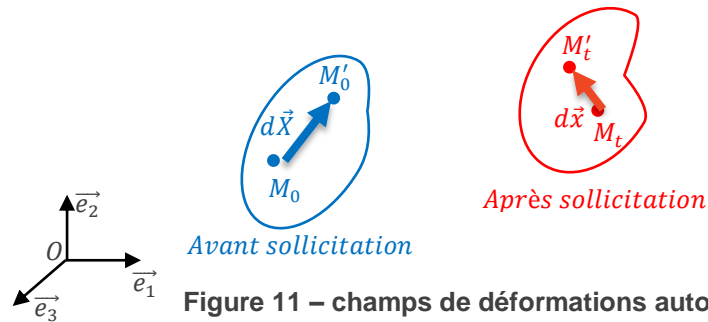


Figure 11 – champs de déformations autour de chaque point M du milieu,

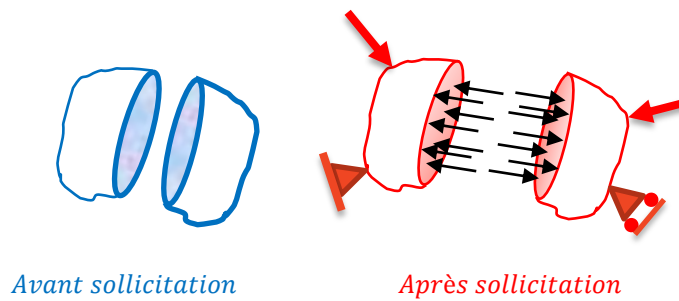


Figure 12 – champs de contraintes à l'intérieur du solide

L'équilibre du solide est traduit par des formulations mathématiques qui mettent en relation ces différents champs avec les propriétés intrinsèques du matériau qui le compose.

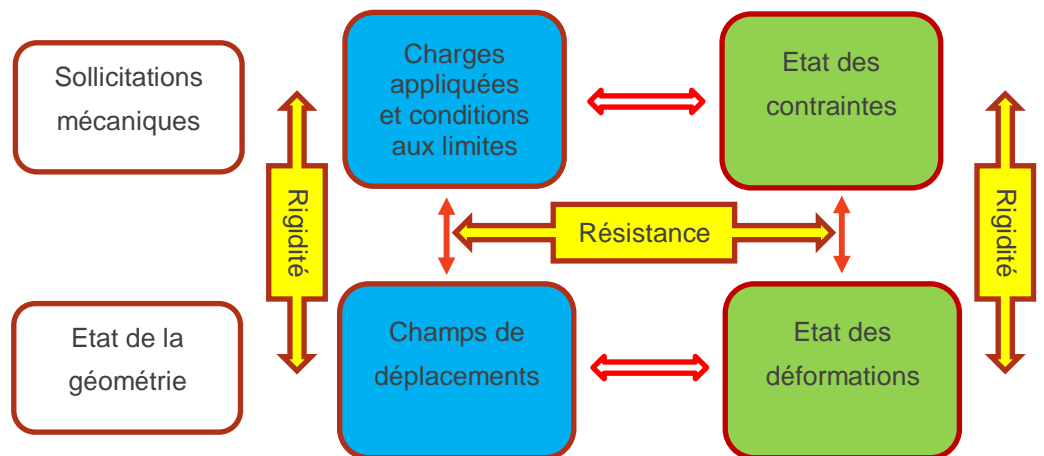


Figure 13 – Relations entre les différentes grandeurs physiques

Les préoccupations majeures dans les calculs des structures c'est de répondre à une double problématique posées en termes de **résistance** et de **rigidité**.

3.2- Equilibre d'un milieu continu

Soit un domaine solide de volume Ω et de frontière $\partial\Omega$,

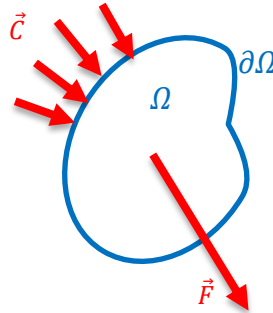


Figure 14 – Domaine solide soumis à des sollicitations extérieures

Les sollicitations extérieures (forces extérieures) appliquées à ce domaine sont de deux types :

- Les forces de volume (ou de masse) qui s'appliquent à toutes les particules M du domaine Ω : pesanteur ; inertie, etc..



Figure 15 – Forces de volume

$$\vec{F} = \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot dv \quad 3.01$$

- Les **forces de surface** (ou de contact) qui s'appliquent uniquement sur la frontière $\partial\Omega$.



Figure 16 – Forces de surface

$$\vec{C} = \iint_{\partial\Omega} \vec{c} \cdot ds \quad 3.02$$

Selon le principe fondamental de la mécanique, le milieu est en équilibre lorsque :

- La résultante de toutes les forces extérieures est nulle, c'est-à-dire :

$$\vec{F} + \vec{C} = \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot dv + \iint_{\partial\Omega} \vec{c} \cdot ds = \vec{0} \quad 3.03$$

- La nullité des moments résultants en un point O quelconque, c'est-à-dire :

$$\iiint_{\Omega} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \cdot dv + \iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{c} \cdot ds = \vec{0} \quad 3.04$$

3.3- Vecteur contrainte

Soit un corps solide soumis à des sollicitations extérieures ;

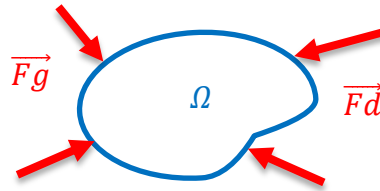


Figure 17 – Corps solide en équilibre

L'équilibre du solide se traduit par la nullité de la résultante des forces :

$$\vec{F}_d + \vec{F}_g = \vec{0}$$

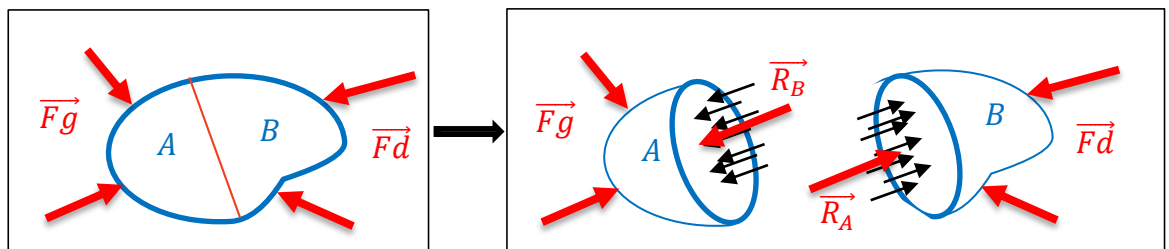


Figure 18 – Equilibre des différentes parties du solide

L'équilibre du solide implique l'équilibre des parties A et B. En effet, on a :

- Equilibre de la partie B $\vec{F}_d + \vec{R}_A = \vec{0}$

- Equilibre de la partie A $\vec{F}_g + \vec{R}_B = \vec{0}$

Puisque $\vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$ ceci implique $\vec{F}_d + \vec{F}_g = \vec{0}$

Considérons seulement la partie **A** du domaine ; Celle-ci est en équilibre sous l'effet des forces extérieures \vec{F}_g et des flux d'efforts internes \vec{f} qui agissent sur la surface $s(\vec{n})$.

Il est à noter que la surface $s(\vec{n})$ est indentifiée par rapport au vecteur unitaire sortant \vec{n} qui lui est normal (Orthogonal).

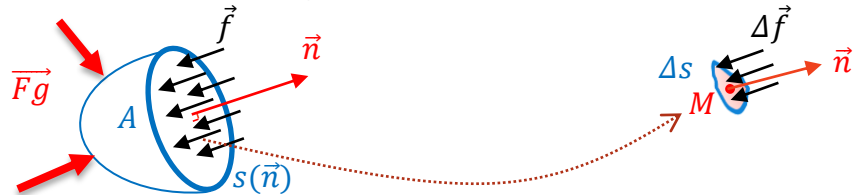
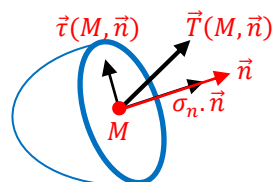


Figure 19 – contraintes intérieures

Considérons :

- un point M appartenant à la surface $s(\vec{n})$
- une portion élémentaire Δs de la surface $s(\vec{n})$ autour du point M ;
- une portion des efforts internes $\Delta \vec{f}$ appliquée sur Δs

On appelle **vecteur contrainte** le vecteur : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta s}$



Celui-ci se décompose de deux types de vecteurs contraintes :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \vec{\tau}(M, \vec{n}).$$

3.05

Figure 20 – Vecteur contrainte

- $\sigma_n \cdot \vec{n}$: Un vecteur **contrainte normale** qui correspond à une sollicitation de type traction (lorsque $\sigma_n > 0$) ou de type compression (lorsque $\sigma_n < 0$).

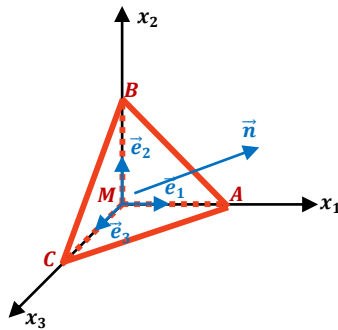
- $\vec{\tau}(M, \vec{n})$: Un vecteur **contrainte tangentielle** (appliqué au point M et tangentielle à la surface de normale \vec{n}) qui correspond à une sollicitation de cisaillement. L'intensité (ou le module) de ce vecteur est donnée comme suit :

$$\|\vec{\tau}(M, \vec{n})\| = \sqrt{\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \|\sigma_n \cdot \vec{n}\|^2} \quad 3.06$$

3.4- Tenseur des contraintes

3.4.1- Tenseur des contraintes de Cauchy

Considérons, en un point M du solide, les axes Mx_1, Mx_2, Mx_3 de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et définissons dans cette base un tétraèdre $MABC$.



- Les points A , B et C sont sur les parties positives respectivement des axes Mx_1, Mx_2, Mx_3 .

- Le vecteur \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface ABC .

- Les composantes du vecteur unitaire \vec{n} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont n_1, n_2 et n_3 ; ce qui se traduit par : $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3$

Figure 21 – Tétraèdre

Donc les facettes du tétraèdre ont pour normales sortantes :

----- $-\vec{e}_1$ pour ce qui est de la facette MBC

----- $-\vec{e}_2$ pour ce qui est de la facette MCA

----- $-\vec{e}_3$ pour ce qui est de la facette MAB

Après simplification, l'équation (3.12) devient :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_1 \cdot \vec{T}(M, \vec{e}_1) + n_2 \cdot \vec{T}(M, \vec{e}_2) + n_3 \cdot \vec{T}(M, \vec{e}_3) \quad 3.13$$

L'équation (3.13) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\{T(M, \vec{e}_1)\} \quad \{T(M, \vec{e}_2)\} \quad \{T(M, \vec{e}_3)\}]. \{n\} \quad 3.14$$

Soit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]. \{n\} \quad 3.15$$

L'équation (3.15) s'appelle **la formule de Cauchy** où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes de Cauchy** au point M. Les composantes de ce tenseur des contraintes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont :

$$\begin{array}{c} T(M, \vec{e}_1) \quad T(M, \vec{e}_2) \quad T(M, \vec{e}_3) \\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \end{array} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

Remarques :

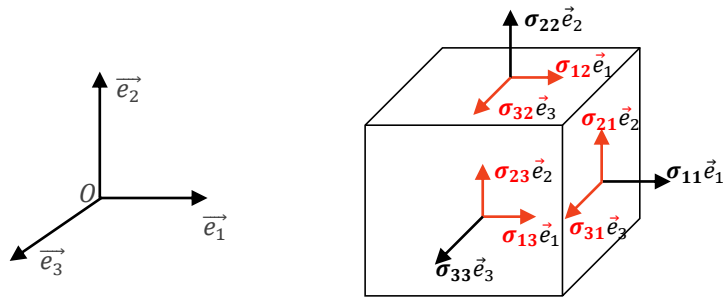


Figure 23 – Composantes du tenseur des contraintes de Cauchy

La **contrainte normale** au point M sur la facette de normale \vec{n} est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)]. \{n\} \quad 3.17$$

Sur la facette de normale \vec{e}_1 , le **vecteur contrainte** au point M est égal à :

$$\vec{T}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{21} \vec{e}_2 + \sigma_{31} \vec{e}_3 \quad 3.18$$

D'où la **contrainte normale** et le **vecteur contrainte tangentielle** sur la facette de normale \vec{e}_1 , ce qui suit :

$$\sigma_{e_1} = \vec{e}_1 \cdot \vec{T}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11} \quad \vec{\tau}_{e_1} = \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 \quad 3.19$$

3.4.2- Propriété de symétrie du tenseur de Cauchy

Assimilant un point M du solide à un volume infiniment petit de dimensions dx_1, dx_2, dx_3 et considérant que ce volume est en équilibre vis-à-vis des rotations, ceci se traduit par :

$$\sum \vec{M}_i = \vec{0} \quad 3.20$$

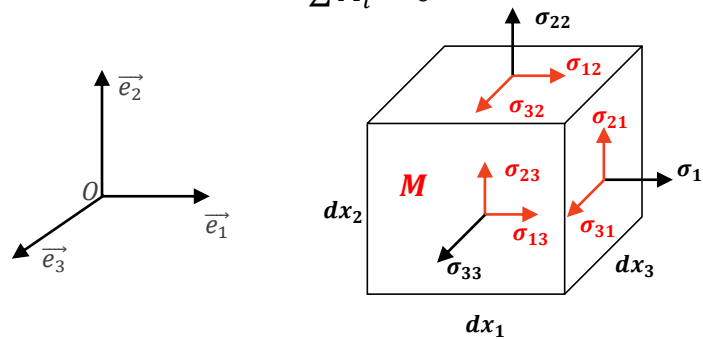


Figure 24 – Equilibre en rotation

Pour $i=1$, il s'agit de la nullité de la somme des moments autour de l'axe Mx_1 .

$$\sum \vec{M}_1 = (\sigma_{32} \cdot dx_1 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_2}{2} - (\sigma_{23} \cdot dx_1 \cdot dx_2) \cdot \frac{dx_3}{2} = \vec{0} \quad 3.21$$

$$\Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad 3.22$$

Pour $i=2$, il s'agit de la nullité de la somme des moments autour de l'axe Mx_2 .

$$\sum \vec{M}_2 = (\sigma_{13} \cdot dx_1 \cdot dx_2) \cdot \frac{dx_3}{2} - (\sigma_{31} \cdot dx_1 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_1}{2} = \vec{0} \quad 3.23$$

$$\Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad 3.24$$

Pour $i=3$, il s'agit de la nullité de la somme des moments autour de l'axe Mx_3 .

$$\sum \vec{M}_3 = (\sigma_{21} \cdot dx_2 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_1}{2} - (\sigma_{12} \cdot dx_1 \cdot dx_2) \cdot \frac{dx_3}{2} = \vec{0} \quad 3.25$$

$$\Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12} \quad 3.26$$

Donc, l'équilibre en rotation de tout point M du solide implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$[\sigma(M)] = [\sigma(M)]^T \quad 3.27$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 3.28$$

3.4.3- Equations d'équilibre

- Soit une portion du solide infiniment petite de dimensions dx_1, dx_2, dx_3 ,
- Soit une force par unité de volume \vec{f} de composantes f_1, f_2, f_3 . Appliquée au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) ,
- Soit $\vec{\gamma}$ l'accélération de composantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ auquel est soumis le point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) ,
- soit ρ la masse volumique du matériau de ce volume.

* L'équilibre en rotation implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy : $[\sigma(M)] = [\sigma(M)]^T$

* L'équilibre en translation le long de la direction Mx_1

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{0} \quad 3.29$$

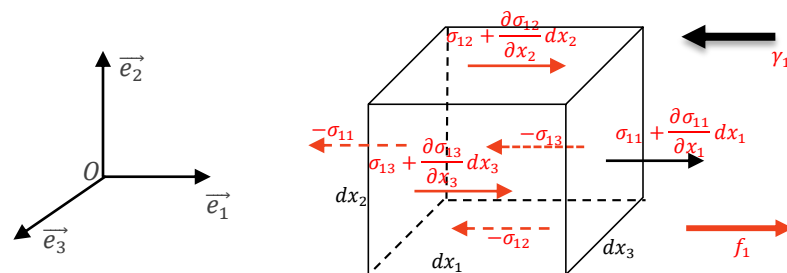


Figure 25 – Equilibre en translation le long de Mx_1

Le développement de l'équation (3.28) nous donne :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_1 = & \left(-\sigma_{11} + \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot dx_2 \cdot dx_3 + \left(-\sigma_{12} + \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) \cdot dx_1 \cdot dx_3 \\ & + \left(-\sigma_{13} + \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) \cdot dx_1 \cdot dx_2 + f_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 - \gamma_1 \cdot \rho \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = \vec{0} \quad 3.30 \end{aligned}$$

Après simplification l'équation d'équilibre en translation le long de Mx_1 devient :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \cdot \gamma_1 \quad 3.31$$

De la même façon, on obtient pour les autres directions les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \cdot \gamma_2 \quad \mapsto \text{Le long de } Mx_2 \quad 3.32$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \cdot \gamma_3 \quad \mapsto \text{Le long de } Mx_3 \quad 3.33$$

Sous forme indicielle, ces trois équations s'écrivent, d'une façon condensée comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \cdot \gamma_i \quad 3.34$$

3.4.4- Directions et contraintes principales

Soit un tenseur des contraintes $[\sigma(M)]$; sa symétrie ($[\sigma(M)] = [\sigma(M)]^T$) implique que :

- Sa matrice est diagonalisable,
- Ses valeurs propres sont réelles,
- Ses vecteurs propres sont orthogonaux.

Donc, en tout point M du solide, il existe au moins un repère orthogonal $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ dans lequel la matrice des contraintes associée à ce repère est diagonale.

$$[\sigma_n(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

3.35

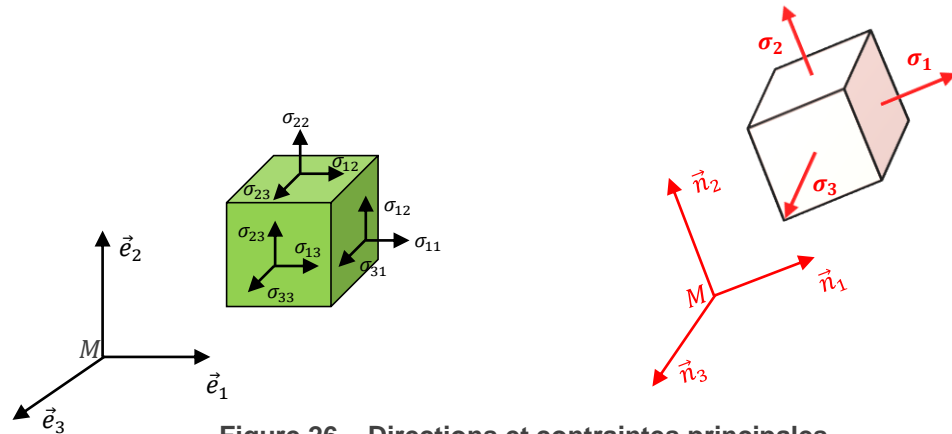


Figure 26 – Directions et contraintes principales

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: sont appelées **contraintes principales** ; ce sont les **valeurs propres** de la matrice associée au tenseur des contraintes de Cauchy.

- $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$: sont les **axes principaux** du tenseur des contraintes de Cauchy. On les appelle aussi **directions principales** des contraintes.

Propriétés :

Les fibres passant par M , orientées selon les directions principales travaillent seulement en traction ou en compression (efforts normaux aux plans perpendiculaires à \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 . Les contraintes tangentielles à ces plans sont, donc, nulles.

3.4.5- Invariants du tenseur des contraintes

Les invariants du tenseur des contraintes sont les coefficients (ou encore les paramètres I_1, I_2 et I_3) de l'équation caractéristique :

$$P(\sigma_n) = -\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

3.36

Les trois contraintes principales sont les racines de cette équation. Donc :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - [\sigma_n] \bar{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad 3.37$$

Les invariants I_1 , I_2 et I_3 sont indépendants du repère.

Après développement de l'équation (3.36), Ces invariants sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma]^2) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \\ \quad = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\ I_3 = \det[\sigma] = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \\ \quad = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \quad 3.38$$

3.4.6- Partie sphérique et déviateur des contraintes

Le tenseur des contraintes peut s'écrire :

$$[\sigma(M)] = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma(M)]. [I] + [S] \quad 3.39$$

La partie $\frac{1}{3} \text{tr}[\sigma(M)]. [I]$ est la partie sphérique du tenseur de contraintes. Elle a la même trace que le tenseur des contraintes $[\sigma(M)]$. Cette partie est égale à :

$$\frac{1}{3} \text{tr}[\sigma(M)]. [I] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 3.40$$

$[S]$ représente la partie déviatrice (ou déviatorique) du tenseur des contraintes. On l'appelle aussi tenseur déviateur des contraintes.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{(-\sigma_{11} + 2\sigma_{22} - \sigma_{33})}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{(-\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\sigma_{33})}{3} \end{bmatrix} \quad 3.41$$

A partir des considérations ci-dessous, on remarque que :

- La trace du tenseur déviateur des contraintes est nulle : $\text{tr}[S] = 0$.
- Le tenseur déviateur des contraintes a pour valeurs propres (contraintes principales) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{\text{tr}[\sigma(M)]}{3}$.
- Si le tenseur déviateur des contraintes est nul ($[S] = [0]$), alors on a :

$$[\sigma_n] = \vec{n} \cdot [\sigma(M)] \cdot \vec{n} = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma(M)] \cdot [I] \quad \text{et} \quad \vec{\tau} = [\sigma(M)] \cdot \vec{n} - [\sigma_n] = \vec{0} \quad \forall \vec{n} \quad 3.42$$
- C'est donc la partie déviatrice du tenseur des contraintes qui est seule responsable de l'apparition du cisaillement.
- Les invariants du tenseur déviateur des contraintes sont :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}[S] = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}[S]^2) = S_{ij} S_{ij} \end{cases} \quad 3.43$$

3.5- Représentation graphiques des états des contraintes

3.5.1- Ellipsoïde de Lamé des contraintes

Soit un vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{e})$,

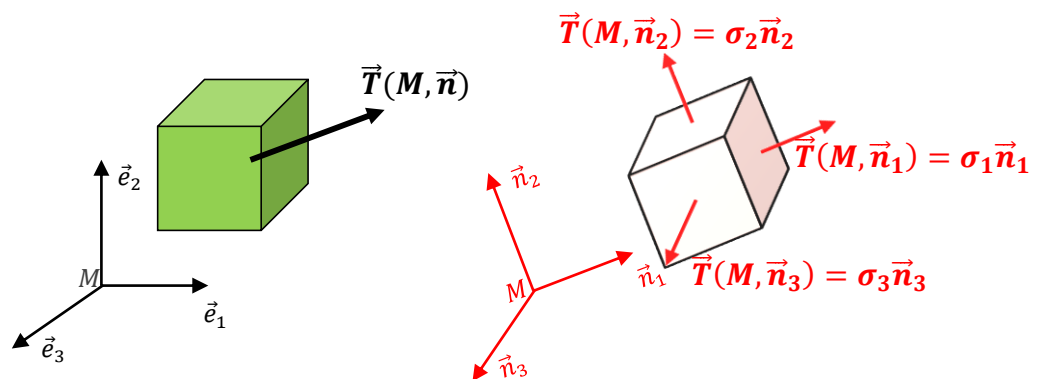


Figure 27 – Faces et contraintes principales

Nous avons énoncé qu'il existe une base orthogonale $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ dans laquelle $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ sont les directions principales et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales.

Les composantes de ce vecteur contraintes dans cette base sont :

$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{cases} \quad 3.44$$

D'où :

$$n_1 = \frac{T_1}{\sigma_1} \quad n_2 = \frac{T_2}{\sigma_2} \quad n_3 = \frac{T_3}{\sigma_3} \quad 3.45$$

Sachant que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ on déduit à partir des équations (3.44) et (3.45) ce qui suit:

$$\left(\frac{T_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1 \quad 3.46$$

L'équation (3.46) est l'équation de Lamé des contraintes, où l'extrémité du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ décrit une ellipsoïde d'axes $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ (directions principales) et de demi-centres σ_1, σ_2 et σ_3 .

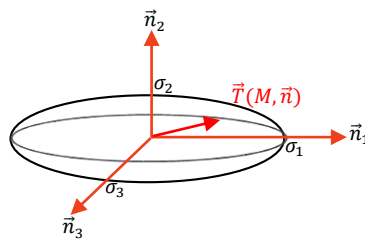
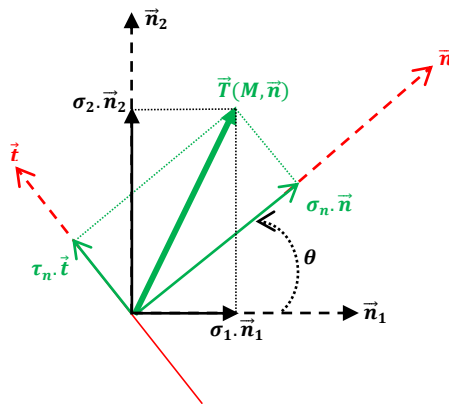


Figure 28 – Ellipsoïde de Lamé des contraintes

3.5.2- Cercles de Mohr

Représentation sur un plan

Penons en un point M du solide un repère principal $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ et considérons uniquement les facettes passant par la direction \vec{n}_3 de normale \vec{n} et de direction tangentielle \vec{t} .



Le vecteur contrainte défini au point M par rapport à la surface de normale \vec{n} est :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad 3.47$$

Comme le vecteur contrainte est repéré dans la base $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_1 \cdot \vec{n}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{n}_2 \quad 3.48$$

Figure 29 – Vecteur contrainte

La projection des vecteurs $\sigma_1 \cdot \vec{n}_1$ et $\sigma_2 \cdot \vec{n}_2$ sur les axes \vec{n} et \vec{t} nous donne :

$$\begin{cases} \text{Sur } \vec{n}: \Rightarrow \sigma_n \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \cos(\theta) + \sigma_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \sin(\theta) \\ \text{Sur } \vec{t}: \Rightarrow \tau_n \cdot \vec{t} = -\sigma_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \sin(\theta) + \sigma_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \cos(\theta) \end{cases} \quad 3.49$$

Sachant que : $\vec{n}_1 = \vec{n} \cdot \cos(\theta)$

$$\vec{n}_2 = \vec{n} \cdot \sin(\theta)$$

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{n}$$

Les équations (3.49) se simplifient comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2(\theta) + \sigma_2 \cdot \sin^2(\theta) \\ \tau_n = (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad 3.50$$

Sachant que : $\cos(2\theta) = \cos(-2\theta)$; $\sin(2\theta) = -\sin(-2\theta)$

$$\cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2} = -\frac{\sin(-2\theta)}{2}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \quad ; \quad \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Alors, les équations (3.50) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_n = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos(-2\theta) \\ \tau_n = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin(-2\theta) \end{cases} \quad 3.51$$

Si on pose :

$$\begin{cases} d = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) \\ r = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \end{cases} \quad 3.52$$

Les équations (3.51) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cdot \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \cdot \sin(-2\theta) \end{cases} \quad 3.53$$

Ces équations montrent que pour chaque facette de normale \vec{n} , on peut associer un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère orthonormé $\{\sigma_n, \tau_n\}$.

Lorsque l'angle θ varie, ce point décrit un cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r . C'est ce qu'on appelle le **cercle de Mohr des contraintes**.

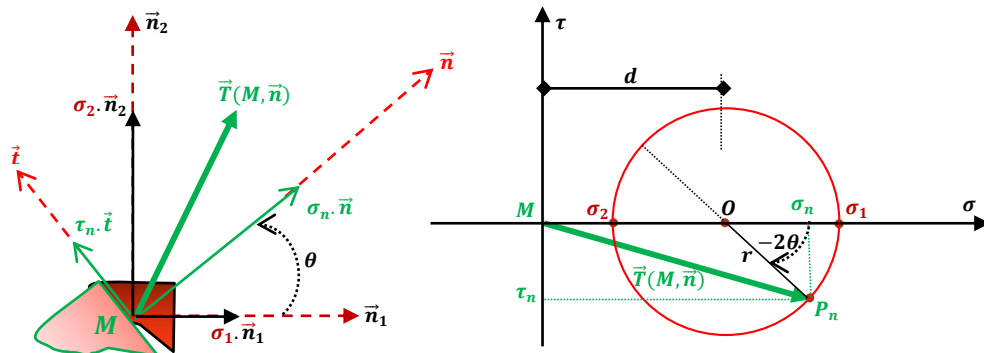


Figure 30 – Cercle de Mohr des contraintes

Représentation sur une face quelconque

Considérons en un point M du solide un repère principal $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, tel que $\vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3$. Le vecteur contraintes au point M par rapport à une surface de normale \vec{n} est :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{T}(M, \vec{n})\| = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad 3.54$$

Il est à signaler que : $\{\vec{n}\}^T \cdot \{\vec{n}\} = 1$ et $\{\vec{t}\}^T \cdot \{\vec{t}\} = 1$

Dans le repère principal, le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_1 \cdot \vec{n}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{n}_2 + \sigma_3 \cdot \vec{n}_3 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{T}(M, \vec{n})\| = \sigma_1^2 \cdot n_1^2 + \sigma_2^2 \cdot n_2^2 + \sigma_3^2 \cdot n_3^2 \quad 3.55$$

De même on a dans ce repère :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad 3.56$$

Si les trois contraintes principales sont distinctes, on déduit à partir des équations (3.54-3.55 et 3.56) ce qui suit :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \quad 3.57$$

Sachant que $n_1^2 \geq 0$; $n_2^2 \geq 0$ et $n_3^2 \geq 0$ et en supposant que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, l'équation (3.57) se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{(\sigma_3 + \sigma_1)}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases} \quad 3.58$$

Ces conditions sont représentées par les cercles de Mohr des contraintes comme suit :

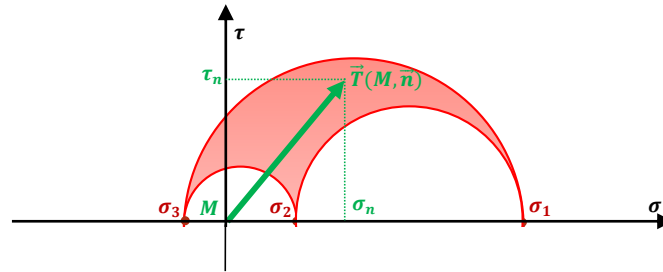


Figure 31 – Cercle de Mohr des contraintes pour une face quelconque

Le point de coordonnées σ_n et τ_n se trouvent dans la partie coloriée ;

→ à l'extérieur du cercle de centre $\left(\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{(\sigma_2-\sigma_3)}{2}$

→ à l'intérieur du cercle de centre $\left(\frac{(\sigma_1+\sigma_3)}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2}$

→ à l'extérieur du cercle de centre $\left(\frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}$

On déduit de cette analyse que :

- La valeur maximale de la **contrainte normale** au point M est :

$$\sigma_{max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

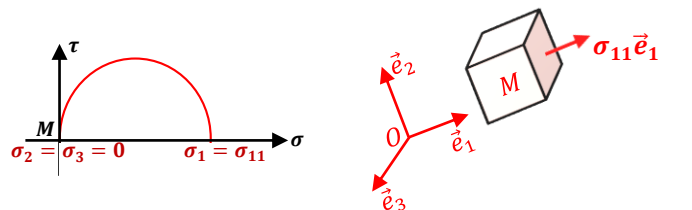
- La valeur maximale de la **contrainte de cisaillement** au point M est :

$$2. \tau_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

3.6- Etats de contraintes particuliers

3.6.1- Etat de contraintes uniaxial

Considérons une base orthonormée $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et M un point quelconque d'un milieu continu ; L'état de contraintes au point M est **uniaxial** par rapport à l'axe (M, \vec{e}_1) , si le tenseur des contraintes se réduit à :



$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.59$$

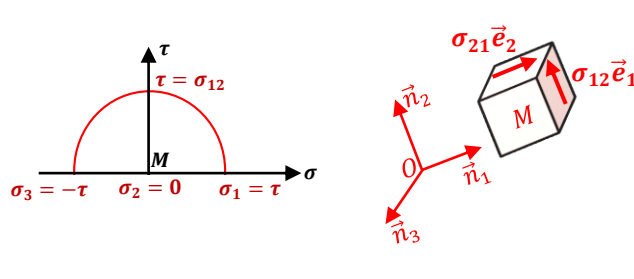
Figure 32 – Etat de contraintes uniaxial et cercle de Mohr représentatif

Dans cette situation le repère $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, est le repère principal.

3.6.2- Etat de cisaillement pure

Considérons une base orthonormée $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et M un point quelconque d'un milieu continu ; L'état de contraintes au point M est un **état de cisaillement pure** par rapport au plan $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.60$$



Les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau,$$

Les directions principales sont :

$$n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad n_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

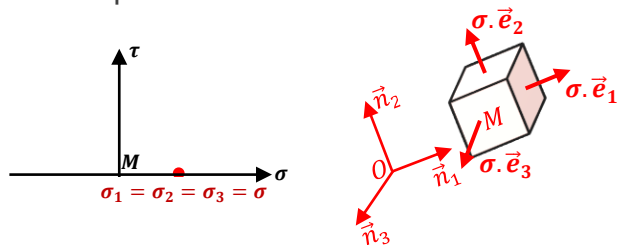
Figure 33 – Etat de cisaillement pure et cercle de Mohr représentatif

3.6.3- Etat de contraintes isotropes

Considérons une base orthonormée $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et M un point quelconque d'un milieu continu ; L'état de contraintes au point M est un **état de contraintes isotropes (ou sphériques)** si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad 3.61$$

Dans cet état, toute facette de normale \vec{n} , en M est face principale quelque soit le repère considéré.



Les trois cercles de Mohr des contraintes se confondent et se réduisent à un point de coordonnées $(\sigma, 0)$,

Figure 34 – Etat de de contraintes isotropes et cercle de Mohr représentatif

3.6.4- Etat de contraintes planes

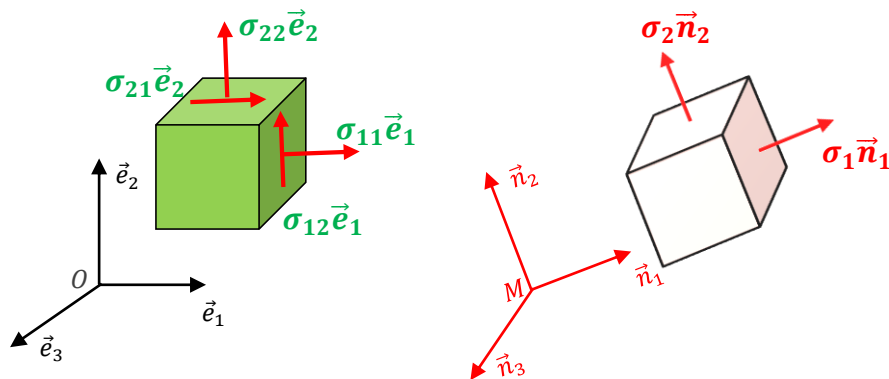


Figure 35 – Etat de de contraintes planes

Considérons une base orthonormée $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et M un point quelconque d'un milieu continu ; L'état de contraintes au point M est un état de contraintes planes par rapport au plan $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.62$$

En un point M d'un milieu continu, Le tenseur des contraintes de Cauchy par rapport à une surface de normal \vec{n} est donné par la relation :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \cdot \{n\} \quad 3.63$$

Cette relation peut s'écrire dans le cas d'un état de contraintes planes comme suit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{Bmatrix} \quad 3.64$$

La direction $\vec{n}_3 = \vec{e}_3$ est une direction principale. Les deux autres directions

Sont les solutions de l'équation :

$$\{T(M, \vec{n})\} \cdot \vec{n} = \sigma_n \cdot \vec{n} \quad 3.65$$

Qui représente la projection du tenseur des contraintes sur le repère principal $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ avec $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{Bmatrix}$ et $n_1^2 + n_2^2 = 1$. Ceci permet d'écrire l'équation (3.65) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \sigma_n \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad 3.66$$

Les solutions de ce système d'équations sont celles du polynome caractéristique

$$P(\sigma_n) = -\sigma_n^2 + I_1\sigma_n - I_2 = 0 \quad 3.67$$

Les deux contraintes principales sont les racines de cette équation. Donc :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - [\sigma_n] \vec{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad 3.68$$

Les invariants I_1, I_2 sont indépendants du repère.

Après développement de l'équation (3.68), Ces invariants sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1 + \sigma_2 \\ I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma]^2) = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2 \end{cases} \quad 3.69$$

Ainsi les solutions de ce polynôme sont :

En terme de contraintes principales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \end{cases} \quad 3.70$$

En terme de directions principales :

$$\text{tang}(\theta_1) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_{11})}{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{(\sigma_1 - \sigma_{22})} \quad 3.71$$

Avec θ_1 qui représente la position angulaire de \vec{n}_1 par rapport à \vec{e}_1 .

Les composantes des directions principales seraient :

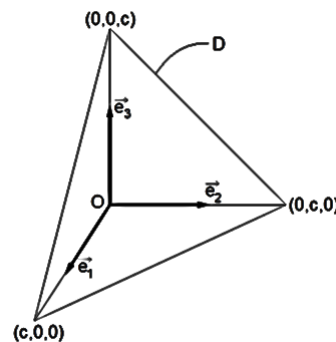
$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \langle \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \\ \vec{n}_2 = \langle -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad 3.72$$

3.7- Exercices

Exercice 3.01

Soit un milieu continu où le tenseur de Cauchy est constant dans l'espace et dans le temps. On considère au sein de ce milieu un domaine matériel D , en forme de tétraèdre tel que représenté dans la figure ci-dessous. On considère un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Les arrêtes parallèles aux axes de la base ont une longueur donnée « c ».



Des mesures à partir d'une expérience ont montré que :

- La composante normale de la force exercée sur la face arrière (correspondant au plan $x_1 = 0$) est égale à F_1 ,
- La composante normale de la force exercée sur la face latérale (correspondant au plan $x_2 = 0$) est égale à F_2 ,
- La composante normale de la force exercée sur la face de dessous (correspondant au plan $x_3 = 0$) est égale à F_3 ,
- La force exercée sur la face inclinée du tétraèdre est égale à $\vec{G} = G_1 \vec{e}_1 + G_2 \vec{e}_2 + G_3 \vec{e}_3$.

Déterminer les composantes du tenseur de Cauchy dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Corrigé exercice 3.01

La détermination des composantes du tenseur de Cauchy dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ implique la recherche des termes de la matrice $[\sigma(M)]$ à partir des mesures effectuées sur les facettes du domaine.

Donc, étant donné que le tenseur de Cauchy est symétrique il y a lieu de déterminer les six inconnues scalaires de ce tenseur ; à savoir: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$.

Nous avons vu au cours que la relation de Cauchy s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M)] \cdot \{\vec{n}\}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}$$

* Prenons la facette perpendiculaire à \vec{e}_1 (plan $x_1 = 0$) dont la force normale est égale à F_1 .

Sur cette facette la normale sortante est $\vec{n} = -\vec{e}_1$ d'où $\begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc,

$$\vec{T}(M, -\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

La projection de ce vecteur contraintes sur l'axe x_1 est traduite par le produit

scalaire $\vec{T}(M, -\vec{e}_1) \cdot (-\vec{e}_1) = -(\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_{11}$.

il s'agit de la composante normale : $\sigma_{11} = \frac{F_1}{S}$ avec $S = \frac{c^2}{2}$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \frac{2F_1}{c^2}$$

* Le même raisonnement pour les facettes perpendiculaires à \vec{e}_2 (plan $x_2 = 0$ et F_2) et \vec{e}_3 (plan $x_3 = 0$ et F_3) nous donne :

$$\sigma_{22} = \frac{2F_2}{c^2} \quad \sigma_{33} = \frac{2F_3}{c^2}$$

* Prenons enfin la facette restante perpendiculaire à \vec{n} dont la force est égale à $\vec{G} = G_1\vec{e}_1 + G_2\vec{e}_2 + G_3\vec{e}_3$

La normale sortante est un vecteur unitaire colinéaire à la direction $\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ et de norme 1. C'est-à-dire :

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 1; \quad \text{d'où } a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La normale sortante est donc le vecteur unitaire $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

La surface de cette facette (qui est un triangle équilatéral de coté $c\sqrt{2}$) est :

$$S' = \frac{c^2\sqrt{3}}{2}$$

On peut maintenant écrire :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{Bmatrix}$$

On sait que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{\vec{G}}{S'} = \frac{2}{c^2 \sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{2}{c^2 \sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{Bmatrix}$$

D'où le système d'équation à trois inconnues (σ_{12} , σ_{13} , σ_{23})

$$\begin{cases} G_1 = \frac{c^2}{2} \left(\frac{2F_1}{c^2} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \right) \\ G_2 = \frac{c^2}{2} \left(\sigma_{12} + \frac{2F_2}{c^2} + \sigma_{23} \right) \\ G_3 = \frac{c^2}{2} \left(\sigma_{13} + \sigma_{23} + \frac{2F_3}{c^2} \right) \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \sigma_{12} + \sigma_{13} = \frac{2G_1 - 2F_1}{c^2} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} = \frac{2G_2 - 2F_2}{c^2} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} = \frac{2G_3 - 2F_3}{c^2} \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations nous donne :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) - (G_3 - F_3)}{c^2} \\ \sigma_{13} = \frac{(G_1 - F_1) - (G_2 - F_2) + (G_3 - F_3)}{c^2} \\ \sigma_{23} = \frac{-(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) + (G_3 - F_3)}{c^2} \end{cases}$$

Exercice 3.02

En un point M d'un milieu continu la matrice du tenseur des contraintes est donnée (en MPa) dans le repère cartésien (O,x,y,z), comme suit :

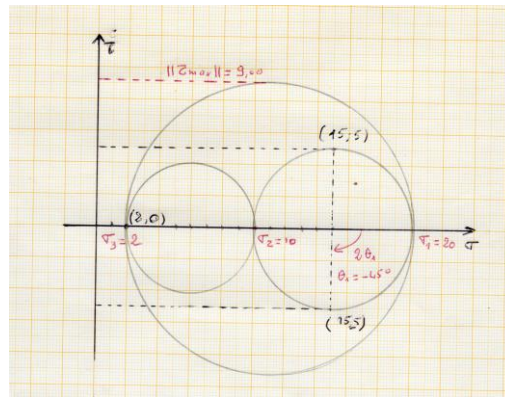
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1- Construire les cercles de Mohr, représentant cet état de contrainte,
- 2- En déduire les contraintes principales et les normales aux plans principaux.
- 3- Donner la contrainte normale maximale et la contrainte de cisaillement maximale au point M.
- 4- Vérifier les résultats de la question (2) par la méthode numérique.

Corrigé exercice 3.02

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1- Construction des cercles de Mohr, représentant cet état de contrainte,



2- Contraintes principales et normales aux plans principaux.

Contraintes principales : $\sigma_1 = 20 \text{ Mpa}$ $\sigma_2 = 10 \text{ Mpa}$ $\sigma_3 = 2 \text{ Mpa}$

Directions principales : $\theta_1 = -45^\circ$ position angulaire de \vec{n}_1 par rapport à \vec{e}_1 .

$$\vec{n}_1 = \langle \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \quad \vec{n}_2 = \langle -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \quad \vec{n}_3 = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}$$

3- Contrainte normale maximale et contrainte de cisaillement maximale au point M.

$$\sigma_{max} = 20 \text{ Mpa} \quad \|\tau_{max}\| = 09 \text{ Mpa}$$

4- Vérification par la méthode numérique.

Contraintes principales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(15 + 15)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(15 - 15)^2 + 4 \times 5 \times 5} = 20 \\ \sigma_2 = \frac{(15 + 15)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(15 - 15)^2 + 4 \times 5 \times 5} = 10 \end{cases}$$

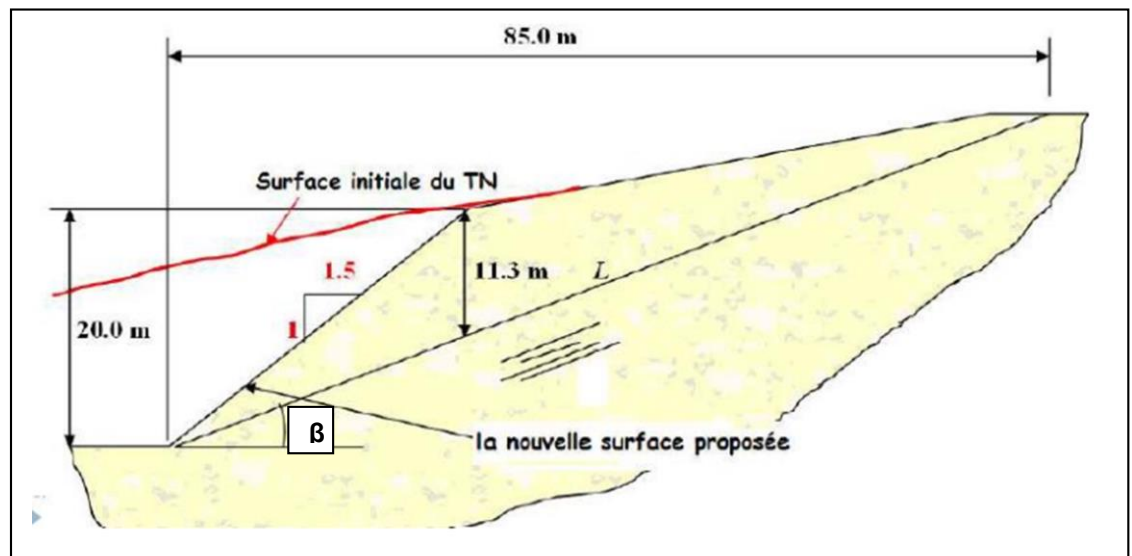
Directions principales :

$$\text{tang}(\theta_1) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_{11})}{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{(\sigma_1 - \sigma_{22})}$$

$$\text{tang}(\theta_1) = \frac{(20 - 15)}{-5} = \frac{-5}{(20 - 15)} = -1 \Rightarrow \theta_1 = -45^\circ$$

Exercice 03

Une pente de 1,5H : 1V est prévue dans un sol schisteux stratifié dont le lit inférieur des plans de stratification fait un pendage d'angle « β » avec le plan horizontal. Les données géométriques du talus sont illustrées dans le schéma suivant :



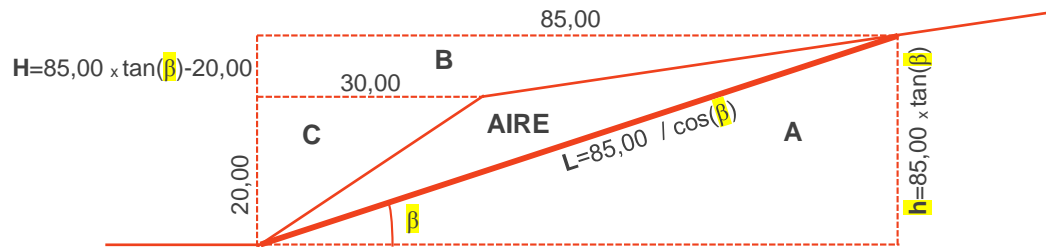
Si le facteur de sécurité minimal vis-à-vis de la sécurité à la rupture est égal à 2, déterminer l'angle « β » correspondant.

Utilisez :

- un poids unitaire de 20,1 kN/m³,
- et les paramètres de résistance : $c = 12$ kPa et $\varphi = 30^\circ$.

Corrigé exercice 3.03

1 - Poids de la masse susceptible de glisser $W = \text{AIRE} \times \gamma$



$\text{AIRE} = \text{surface du rectangle} - \text{surfaces (A+B+C)}$

$$\text{Surface(A)} = 0,5 \times h \times 85,00$$

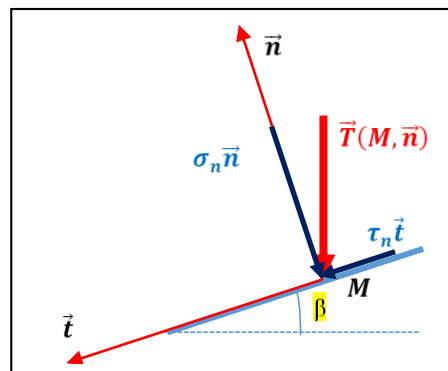
$$\text{Surface(B)} = 0,5 \times (30,00 + 85,00) \times (h - 20,00)$$

$$\text{Surface(C)} = 0,5 \times 20,00 \times 30,00 = 300,00\text{m}^2$$

$$\text{AIRE} = (85,00 \times h) - ((0,5 \times h \times 85,00) + (0,5 \times (30,00 + 85,00) \times (h - 20,00)) + 300,00) = 850 - 15xh$$

$$\underline{W} = \text{AIRE} \times 20,10 = \underline{17085,00 - 301,50xh}$$

2 – Vecteur contrainte en un point M de la surface potentielle de rupture de normale \vec{n} :



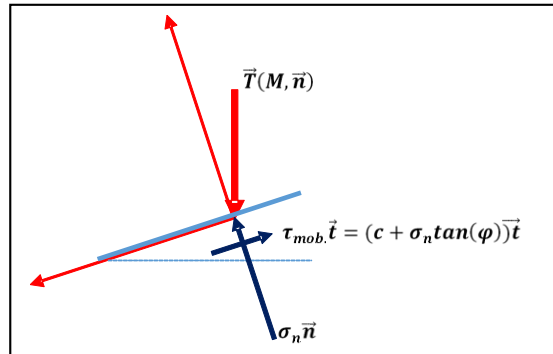
$$\sigma_n = \frac{W}{L} \cos(\beta)$$

$$\tau_n = \frac{W}{L} \sin(\beta)$$

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n(-\vec{n}) + \tau_n \vec{t} = \frac{W}{L} \cos(\beta)(-\vec{n}) + \frac{W}{L} \sin(\beta) \vec{t}$$

3 – Effort de cisailment mobilisable (résistance) le long du plan de rupture :

$$\tau_{mob.} \vec{t} = (c + \sigma_n \tan(\varphi)) \vec{t}$$



$$\tau_{mob.} = c + \sigma_n \tan(\varphi)$$

3 – Formulation de l'équilibre à la rupture :

$$\tau_{mob.} = 2. \tau_n = c + \sigma_n \tan(\varphi) = \frac{W}{L} \sin(\beta)$$

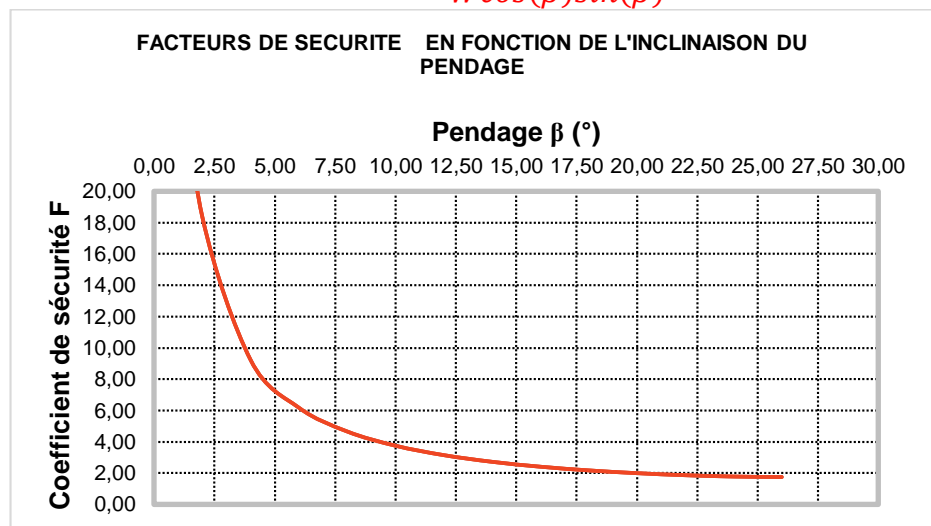
$$\tau_{mob.} = 2. \tau_n = c + \frac{W}{L} \cos(\beta) \tan(\varphi) = \frac{W}{L} \sin(\beta)$$

$$c + \frac{W}{L} \cos(\beta) \tan(\varphi) = \frac{W}{L} \sin(\beta)$$

$$85. c + W \cos^2(\beta) \tan(\varphi) = W \cos(\beta) \sin(\beta)$$

4 – Résolution graphique : Il s'agit d'utiliser cette formulation pour tracer (avec Excel) le graphe

$$F = f(\beta) = \frac{85. c + W \cos^2(\beta) \tan(\varphi)}{W \cos(\beta) \sin(\beta)}$$



De ce graphe on déduit que pour $F=2$ on a $\beta=20^\circ$

Chapitre 04 – Théorie de l'état des déformations

4.1- Introduction

Sous l'action des sollicitations extérieures (forces appliquées, conditions aux limites), tous les points du solide se déplacent. De ce fait toute fibre infinitésimale de la matière subit des variations de longueurs et des variations d'angle. Ces variations sont appelées « **déformations** ».

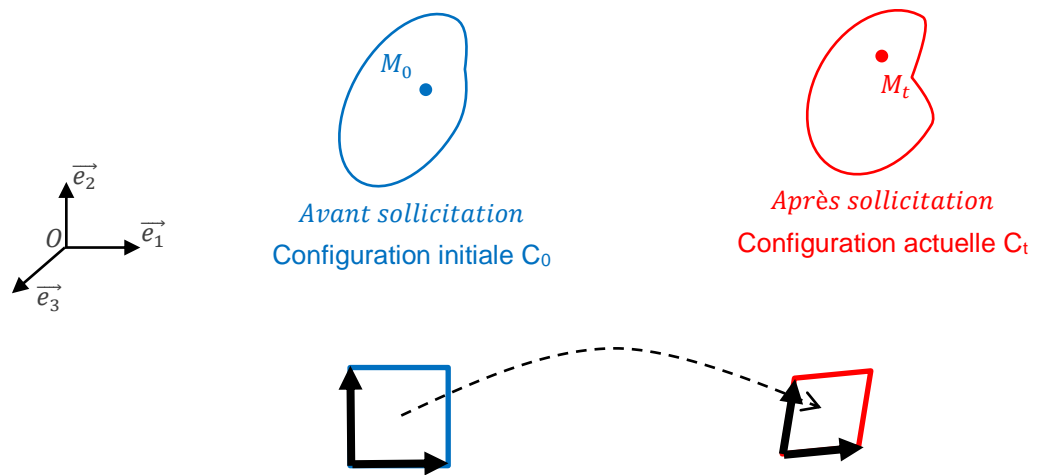


Figure 36 – Déformations de la matière autour de tout point M du milieu,

4.2- Transformation d'un point matériel : Vecteur déplacement

La forme du solide à l'instant t est appelée configuration actuelle définie par un volume $\Omega_{(t)}$ et un contour $\partial\Omega_{(t)}$.

La configuration initiale est la configuration de référence définie par un volume $\Omega_{(0)}$ et un contour $\partial\Omega_{(0)}$.

Toute particule du solide notée M_0 dans la configuration initiale devient M_t dans la configuration actuelle.

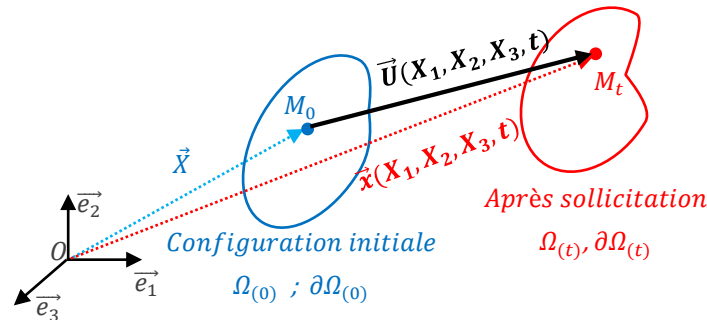


Figure 37 – Vecteur déplacement de tout point M du milieu,

Dans cette transformation on a :

- Une position de la particule du solide dans sa configuration initiale, définie par le vecteur position initiale \overline{OM}_0 telle que :

$$\overline{OM}_0 = \vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 = X_i \vec{e}_i \quad 4.01$$

- Une position de la particule du solide dans sa configuration actuelle, définie par le vecteur position actuelle \overline{OM}_t telle que :

$$\overline{OM}_t = \vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x_i \vec{e}_i \quad 4.02$$

On appelle **vecteur déplacement** de la particule M du solide le vecteur $\vec{U}(X_1, X_2, X_3, t)$, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}(X_1, X_2, X_3, t) = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \\ \quad \quad \quad = u_i \vec{e}_i \\ \quad \quad \quad = \overline{M}_0 \overline{M}_t = \overline{OM}_t - \overline{OM}_0 \\ \quad \quad \quad = \vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) - \vec{X} \end{array} \right. \quad 4.03$$

Où u_1, u_2, u_3 sont des fonctions continues et dérivables par rapport à X_1, X_2, X_3 .

Donc les coordonnées de la particule du solide dans sa configuration actuelle s'écrivent :

- Sous forme vectorielle,

$$\vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) = \vec{X} + \vec{U}(X_1, X_2, X_3, t) \quad 4.04$$

Ou encore

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3 + u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \quad 4.05$$

- Sous forme indicielle,

$$x_i\vec{e}_i = X_i\vec{e}_i + u_i\vec{e}_i = (X_i + u_i)\vec{e}_i \quad 4.06$$

- Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{pmatrix} \quad 4.07$$

X_1, X_2, X_3 sont les coordonnées de Lagrange et cette description du vecteur de déplacement est dite Lagrangienne.

4.3- Transformation des vecteurs : Tenseur gradient de la transformation

La description d'un point matériel ne peut décrire que le vecteur de déplacement du point matériel. Donc, cette transformation représente uniquement le mode rigide de translation du point matériel. De ce fait, pour décrire les autres degrés de liberté relatifs aux rotations et aux déformations dans le solide, on doit considérer des couples de points matériels très voisins.

Soit un vecteur $d\vec{X}$ infiniment petit dans la configuration initiale tel que :

$$d\vec{X} = \overline{M_0M'_0} \quad 4.08$$

Après sollicitation, ce vecteur $\overline{M_0 M'_0}$ devient $\overline{M_t M'_t}$ dans la configuration actuelle ; tel que :

$$d\vec{x} = \overline{M_t M'_t} \quad 4.09$$

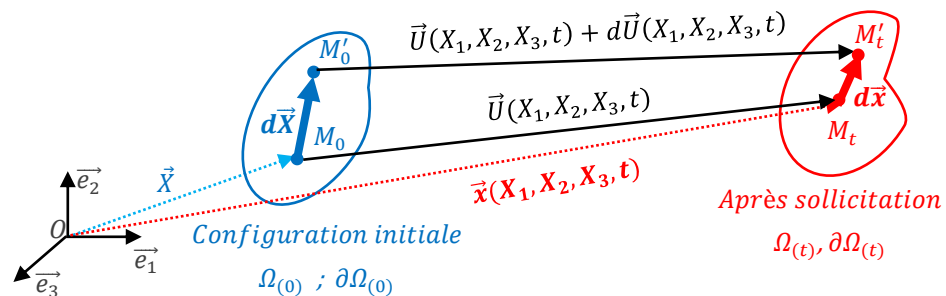


Figure 38 – Transformation d'un vecteur,

La description Lagrangienne de la transformation des points matériels est établie comme suit :

$$\begin{cases} M_0 \Rightarrow M_t \text{ est : } \vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) = \vec{X} + \vec{U}(X_1, X_2, X_3, t) \\ M'_0 \Rightarrow M'_t \text{ est : } \vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) + d\vec{x}(X_1, X_2, X_3, t) = \vec{X} + d\vec{X} + \vec{U}(X_1, X_2, X_3, t) + d\vec{U}(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \quad 4.10$$

Après simplification des équations (4.10) on obtient :

$$d\vec{x} = d\vec{X} + d\vec{U} \quad 4.11$$

On appelle tenseur gradient de la transformation du vecteur $d\vec{x}$ (en \vec{X}), l'application linéaire (qui est un tenseur d'ordre 2) qui met en relation $d\vec{x}$ avec $d\vec{X}$. Cette relation s'écrit :

$$d\vec{x} = [F].d\vec{X} \quad 4.12$$

Ce tenseur est donné par l'expression :

$$[F] = \overline{\text{grad}} \vec{x} = \overline{\text{grad}} (\vec{X} + \vec{U}) = (\vec{X} + \vec{U}) \otimes \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} X_1 + u_1 \\ X_2 + u_2 \\ X_3 + u_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad 4.13$$

Après développement, l'équation (4.13) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(X_1+u_1)}{\partial X_1} & \frac{\partial(X_1+u_1)}{\partial X_2} & \frac{\partial(X_1+u_1)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial(X_2+u_2)}{\partial X_1} & \frac{\partial(X_2+u_2)}{\partial X_2} & \frac{\partial(X_2+u_2)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial(X_3+u_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial(X_3+u_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial(X_3+u_3)}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad 4.14$$

Si on pose $[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$ l'équation (4.12) s'écrit comme suit :

$$d\vec{x} = [F].d\vec{X} = ([I] + [L]).d\vec{X} \quad 4.15$$

Sachant que toute matrice quelconque peut être s'écrire en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, donc on peut dire que :

$$[L] = [\Omega] + [\varepsilon] \quad 4.16$$

Avec $[\Omega]$ une matrice antisymétrique ; c'est-à-dire $[\Omega] = -[\Omega]^T = \frac{1}{2}([L] - [L]^T)$

Et $[\varepsilon]$ une matrice symétrique ; c'est-à-dire $[\varepsilon] = [\varepsilon]^T = \frac{1}{2}([L] + [L]^T)$

D'où :

$$[F] = [I] + [L] = [I] + [\Omega] + [\varepsilon] \quad 4.17$$

Dans cette relation :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

représente le tenseur des déformations infinitésimales linéarisées,

et :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ -\theta_{12} & 0 & \theta_{23} \\ -\theta_{13} & -\theta_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

représente le tenseur des rotations infinitésimales.

Nous remarquons que le tenseur gradient de la transformation d'un vecteur décrit bien le mouvement d'une fibre infinitésimale de la matière d'un milieu, puisque il met en évidence :

- Les modes de corps rigides de translation, à travers l'application linéaire $[I]$
- Les modes de corps rigides de rotation, à travers l'application linéaire $[\Omega]$
- Les déformations, à travers l'application linéaire $[\varepsilon]$

Propriétés du tenseur gradient de la transformation $[F]$

- Ce tenseur d'ordre 2 permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après la transformation,
- C'est un tenseur non symétrique,
- Ce tenseur n'est pas une bonne mesure de déformation puisque pour $[\varepsilon] = [0]$, on a $[F] = [I] + [\Omega] \neq [0]$,
- Mais, c'est l'ingrédient de base pour définir les déformations.

4.4- Tenseurs des déformations

4.4.1- Tenseurs de dilatation de Cauchy-Green

Considérons en un point M_0 dans la configuration initiale deux vecteurs infiniment petits $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$ qui deviennent dans la configuration actuelle $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$.



Figure 39 – Transformation de deux vecteurs,

Sachant que chacun de ces vecteurs dans la configuration actuelle est respectivement en relation avec le vecteur correspond dans la configuration initiale par l'application linéaire $[F]$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} d\vec{x} = [F].d\vec{X} \\ d\vec{x}' = [F].d\vec{X}' \end{cases} \quad 4.18$$

En exprimant le produit scalaire des vecteurs dans la configuration actuelle, on obtient :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \cdot \{dx'\} = ([F].d\vec{X})^T \cdot ([F].d\vec{X}') = d\vec{X}^T \cdot ([F]^T \cdot [F]).d\vec{X}' \quad 4.19$$

Dans cette expression, le tenseur $[C] = [F]^T \cdot [F]$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit

Inversement, chacun des vecteurs dans la configuration initiale est respectivement en relation avec le vecteur correspond dans la configuration actuelle par l'application linéaire $[F]^{-1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} d\vec{X} = [F]^{-1} \cdot d\vec{x} \\ d\vec{x}' = [F]^{-1} \cdot d\vec{X}' \end{cases} \quad 4.20$$

En exprimant le produit scalaire des vecteurs dans la configuration initiale, on obtient :

$$d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = \{dX\}^T \cdot \{dX'\} = ([F]^{-1} \cdot d\vec{x})^T \cdot ([F]^{-1} \cdot d\vec{x}') = d\vec{x}^T \cdot ([F^{-1}]^T \cdot [F]^{-1}) \cdot d\vec{x}' \quad 4.21$$

Dans cette expression, le tenseur $[b] = [F] \cdot [F]^T$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche

4.4.2- Tenseur de déformation de Green-Lagrange

Ce tenseur, noté $[E]$ est défini par l'expression :

$$\frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}') = \frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot [C] \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot [I] \cdot d\vec{X}') = d\vec{x} \cdot [E] \cdot d\vec{x}' \quad 4.22$$

Avec :

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \frac{1}{2}([F]^T \cdot [F] - [I]) \quad 4.23$$

4.4.3- Tenseurs de déformation d'Euler-Almansi

Ce tenseur, noté $[e]$ est défini par l'expression :

$$\frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}') = \frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot [I] \cdot d\vec{x}' - d\vec{x} \cdot [b]^{-1} \cdot d\vec{x}') = d\vec{x} \cdot [e] \cdot d\vec{x}' \quad 4.24$$

Avec :

$$[e] = \frac{1}{2}([I] - [b]^{-1}) = \frac{1}{2}([I] - [F^{-1}]^T \cdot [F]^{-1}) \quad 4.25$$

4.4.4- Propriétés des tenseurs de dilatation de Cauchy -Gren

- Ce sont des tenseurs symétriques du deuxième ordre,

- Ces tenseurs ne sont pas une bonne mesure de déformation puisque pour $[\varepsilon] = [0]$, on a $[C] = [b] = [I]$,

4.4.5- Propriétés des tenseurs de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi

- Ce sont des tenseurs symétriques du deuxième ordre,
- Ces tenseurs sont une bonne mesure de déformation puisque pour des modes de corps rigides $[F] = [R]$, on a $[E] = [e] = [0]$,
- Ces tenseurs ne sont pas indépendants puisque, on a :

$$[e] = [F^{-1}]^T \cdot [E] \cdot [F]^{-1} \quad \text{et} \quad [E] = [F]^T \cdot [e] \cdot [F].$$

4.5- Transformation de la géométrie

4.5.1- Dilatation

Considérons en un point M_0 dans la configuration initiale un vecteur infiniment petit $d\vec{X}$ de longueur dl_0 porté par le vecteur unitaire \vec{n}_0 :

$$d\vec{X} = dl_0 \cdot \vec{n}_0$$

Ce vecteur devient dans la configuration actuelle $d\vec{x}$ de longueur dl .

On appelle **dilatation** en M_0 dans la direction \vec{n}_0 , la quantité :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\{n_0\}^T \cdot [C] \cdot \{n_0\}} \quad 4.26$$

Si $\vec{n}_0 = \vec{e}_1$, on a :

$$\lambda(M_0, \vec{e}_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{1 + 2 \cdot E_{11}} \quad 4.27$$

4.5.2- Déformation de Green-Lagrange

On appelle **déformation de Green-Lagrange** en M_0 dans la direction \vec{n}_0 , la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = \{n_0\}^T \cdot [E] \cdot \{n_0\} \quad 4.28$$

Si $\vec{n}_0 = \vec{e}_1$, on a :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = E_{11} \quad 4.29$$

4.5.3- Allongement unitaire

On appelle **allongement unitaire** (déformation de l'ingénieur) en M_0 dans la direction \vec{n}_0 , la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1 = \sqrt{1 + 2 \cdot \{n_0\}^T \cdot [E] \cdot \{n_0\}} - 1 \quad 4.30$$

Si $\vec{n}_0 = \vec{e}_1$, on a :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2 \cdot E_{11}} - 1 \quad 4.31$$

4.5.4- Transformation des angles

Considérons en un point M_0 dans la configuration initiale deux vecteurs infiniment petits $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$ de longueurs respectives dl_0 et dl'_0 et portés par deux vecteurs unitaires orthogonaux \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 .

$$d\vec{X} = dl_0 \cdot \vec{n}_0 \quad d\vec{X}' = dl'_0 \cdot \vec{n}'_0 \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{n}'_0 = 0 \quad 4.32$$

Ces vecteurs deviennent dans la configuration actuelle $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ de longueurs respectives dl et dl' . Soit φ l'angle que font ces vecteurs entre eux.

On appelle **glissement** en M_0 dans les directions \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 , la quantité :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi = \arcsin \frac{\{n_0\}^T \cdot [C] \cdot \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \cdot \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} = \arcsin \frac{2\{n_0\}^T \cdot [E] \cdot \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \cdot \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \quad 4.33$$

Si $\vec{n}_0 = \vec{e}_1$ et $\vec{n}'_0 = \vec{e}_2$ on a :

$$\gamma(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \arcsin \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}} = \arcsin \frac{2E_{12}}{\sqrt{(1+2.E_{11}) \cdot (1+2.E_{22})}} \quad 4.34$$

4.5.5- Transformation des volumes

Considérons en un point M_0 dans la configuration initiale trois vecteurs infiniment petits $d\vec{X}_1$, $d\vec{X}_2$ et $d\vec{X}_3$ formant un trièdre direct qui deviennent dans la configuration actuelle respectivement $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ et $d\vec{x}_3$. Les volumes des parallélépipèdes construits par ces vecteurs sont :

$$dV_0 = (d\vec{X}_1 \wedge d\vec{X}_2) \cdot d\vec{X}_3 \quad \text{et} \quad dV = (d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot d\vec{x}_3 \quad 4.35$$

Des équations (4.35) on trouve que :

$$dV = \det[F] \cdot dV_0 \quad 4.36$$

On appelle **dilatation volumique** en M_0 , la quantité :

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0} = \det[F] \quad 4.37$$

On appelle **déformation volumique** en M_0 , la quantité :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1 \quad 4.38$$

4.6- Equations de compatibilité cinématique

Pour établir les équations de compatibilité cinématique, considérons un état plan. Et on considère donc trois inconnues : les déformations ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} qui sont des variables scalaires fonctions de x_1 et x_2 . Les composantes du vecteur déplacement sont alors, $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$, telle que :

$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} \quad \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} \quad \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12} \quad 4.39$$

Donc les fonctions $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ peuvent se différencier pour donner :

$$\begin{cases} du_1(x_1, x_2) = \varepsilon_{11}dx_1 + C_1dx_2 \\ du_2(x_1, x_2) = C_2dx_1 + \varepsilon_{22}dx_2 \end{cases} \quad 4.40$$

Avec : $C_1 + C_2 = 2\varepsilon_{12}$

Les équations du système (4.40) ne sont bien des différentielles exactes que si et seulement si :

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial C_2}{\partial x_2} \quad 4.41$$

En dérivant la première condition par x_2 et la deuxième condition par x_1 on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 4.42$$

En additionnant les équations (4.42), membre à membre, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 (C_1 + C_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 4.43$$

D'où, l'équation dite de compatibilité cinématique représentant la condition nécessaire d'intégrabilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 4.44$$

En procédant le même raisonnement pour le cas général (Trois dimensions), on obtient six (6) équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad 4.45$$

4.7- Exercices

Exercice 4.01

On considère un mouvement défini dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne (φ est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\varphi t) - X_2 \sin(\varphi t) \\ x_2 = X_1 \sin(\varphi t) + X_2 \cos(\varphi t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calculer le tenseur gradient de la transformation $[F]$ et en déduire le tenseur infinitésimal linéarisé des déformations et celui des rotations.
2. Calculer le tenseur des dilatations $[C]$ et le tenseur des déformations $[E]$.
3. Pour un instant t , calculer la dilatation en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
4. Pour un instant t , calculer le glissement en un point de vecteur position \vec{X} et pour les deux directions orthogonales $d\vec{X} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $d\vec{X}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
5. On considère que le milieu possède au temps $t=0$, une masse volumique ρ_0 ; calculer sa masse volumique au temps t .

Corrigé exercice 4.01

1. Calculer le tenseur gradient de la transformation $[F]$ et en déduire le tenseur infinitésimal linéarisé des déformations et celui des rotations.

Le tenseur gradient de la transformation est donné, en notation indicielle comme suit :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Donc :

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On sait que $[F] = [I] + [L] = [I] + [\varepsilon] + [\Omega]$ avec :

$$[L] = [F] - [I]$$

$[\varepsilon]$: tenseur symétrique des déformations infinitésimales linéarisées

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \cos(\varphi t) - 1 & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) - 1 & \sin(\varphi t) & 0 \\ -\sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[\Omega]$: tenseur antisymétrique des rotations infinitésimales linéarisées

$$[\Omega] = \frac{1}{2}([L] - [L]^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \cos(\varphi t) - 1 & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) - 1 & \sin(\varphi t) & 0 \\ -\sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le tenseur des dilatations $[C]$ et le tenseur des déformations $[E]$.

le tenseur des dilatations $[C]$

$$[C] = [F]^T \cdot [F]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) & \sin(\varphi t) & 0 \\ -\sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (\cos(\varphi t))^2 + (\sin(\varphi t))^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos(\varphi t))^2 + (-\sin(\varphi t))^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

le tenseur des déformations [E]

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I])$$

On a donc :

$$[E] = [0]$$

3. Pour un instant t, calculer la dilatation en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{\{dX\}^T \cdot [C] \cdot \{dX\}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{\langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{2}$$

4. Pour un instant t, calculer le glissement en un point de vecteur position \vec{X} et pour les deux directions orthogonales $d\vec{X} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $d\vec{X}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

$$\gamma(M_0, d\vec{X}, d\vec{X}') = \arcsin \frac{2 \cdot \{dX\}^T \cdot [E] \cdot \{dX'\}}{\lambda(M_0, d\vec{X}) \cdot \lambda(M_0, d\vec{X}')}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{2}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}') = \sqrt{\langle 1 \quad -1 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}') = \sqrt{2}$$

$$\gamma(M_0, d\vec{X}, d\vec{X}') = 0$$

5. On considère que le milieu possède au temps t=0, une masse volumique ρ_0 ; calculer sa masse volumique au temps t.

Principe de conservation de la masse $\Rightarrow \rho_0 dV_0 = \rho_t dV_t$

$$\Rightarrow \rho_t = \rho_0 \frac{dV_0}{dV_t} = \rho_0 \frac{1}{\lambda_V(M_0)} = \rho_0 \frac{1}{\det[F]}$$

$$\Rightarrow \rho_t = \rho_0 \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \cos(\varphi t) & -\sin(\varphi t) & 0 \\ \sin(\varphi t) & \cos(\varphi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \rho_t = \rho_0 \frac{1}{(\cos(\varphi t))^2 + (\sin(\varphi t))^2}$$

$\rho_t = \rho_0 \Rightarrow$ masse volumique constante Quelque soit t

Exercice 4.02

On considère un milieu continu où tout point M_0 de coordonnées (X_1, X_2, X_3) occupe après sollicitation une position M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) . Cette transformation est définie par les équations suivantes :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{OM} = \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Avec : } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-X_2}{(X_1^2 + X_2^2)} \\ X_1 \\ \frac{X_1}{(X_1^2 + X_2^2)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- 1- Calculer le produit tensoriel $(\overrightarrow{OM} \otimes \overrightarrow{V})$. Que représente le résultat ? En déduire, sans faire de calcul, le tenseur infinitésimal des rotations $[\Omega]$ et celui des déformations $[\varepsilon]$.
- 2- Calculer le tenseur des dilatations $[C]$ et le tenseur des déformations $[E]$ en considérant $X_1 = X_2 = a$ (avec a différent de zéro)
- 3- Pour a=1 calculer
 - la dilatation en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

- L'allongement unitaire en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
 - La déformation de Green-Lagrange en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
- 4- Pour $a=1$ calculer le glissement, la dilatation volumique et la déformation volumique en un point de vecteur position \vec{X} et pour les deux directions orthogonales $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $d\vec{X}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

Corrigé exercice 4.02

1. Calculer le produit tensoriel $(\vec{OM} \otimes \vec{V})$. Que représente le résultat ?

$$\vec{OM} \otimes \vec{V} = \vec{x} \otimes \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1} & \frac{\partial X_1}{\partial X_2} & \frac{\partial X_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial X_1} & \frac{\partial X_2}{\partial X_2} & \frac{\partial X_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial X_1} & \frac{\partial X_3}{\partial X_2} & \frac{\partial X_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{-X_2}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= \frac{2X_1X_2}{(X_1^2 + X_2^2)^2}$	$\frac{\partial u_1}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{-X_2}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= \frac{-X_1^2 + X_2^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2}$	$\frac{\partial u_1}{\partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\frac{-X_2}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= 0$
$\frac{\partial u_2}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{X_1}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= \frac{-X_1^2 + X_2^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2}$	$\frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{X_1}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= \frac{-2X_1X_2}{(X_1^2 + X_2^2)^2}$	$\frac{\partial u_2}{\partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\frac{X_1}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ $= 0$
$\frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 0$	$\frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 0$	$\frac{\partial u_3}{\partial X_3} = 0$

$$\overline{OM} \otimes \overline{V} = \vec{x} \otimes \overline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \begin{bmatrix} 2X_1X_2 & -X_1^2 + X_2^2 & 0 \\ -X_1^2 + X_2^2 & -2X_1X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le résultat représente le tenseur gradient de la transformation [F].

En déduire, sans faire de calcul, le tenseur infinitésimal des rotations $[\Omega]$ et celui des déformations $[\varepsilon]$.

$$\overline{OM} \otimes \overline{V} = \vec{x} \otimes \overline{V} = [F] = [I] + [L] = [I] + [\varepsilon] + [\Omega]$$

Avec $[\varepsilon]$ Tenseur symétrique et $[\Omega]$ tenseur antisymétrique

Nous remarquons que :

$$[F] = [I] + [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \begin{bmatrix} 2X_1X_2 & -X_1^2 + X_2^2 & 0 \\ -X_1^2 + X_2^2 & -2X_1X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec ; } [L] = \frac{1}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \begin{bmatrix} 2X_1X_2 & -X_1^2 + X_2^2 & 0 \\ -X_1^2 + X_2^2 & -2X_1X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ qui est un tenseur symétrique}$$

$$\text{Donc } [\varepsilon] = [L] = \frac{1}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \begin{bmatrix} 2X_1X_2 & -X_1^2 + X_2^2 & 0 \\ -X_1^2 + X_2^2 & -2X_1X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [\Omega] = [0]$$

2. Calculer le tenseur des dilatations $[C]$ et le tenseur des déformations $[E]$ en considérant $X_1 = X_2 = a$ (avec a différent de zéro)

Pour $X_1 = X_2 = a$ on a :

$$[F] = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix}$$

le tenseur des dilatations [C]

$$[C] = [F]^T \cdot [F]$$

$$[C] = \frac{1}{4a^4} \begin{bmatrix} 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{1}{4a^4} \begin{bmatrix} (2a^2 + 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^4 \end{bmatrix}$$

le tenseur des déformations [E]

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I])$$

$$[E] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4a^4} \begin{bmatrix} (2a^2 + 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[E] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4a^4} \begin{bmatrix} 4a^4 + 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^4 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^4 - 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[E] = \frac{1}{2a^4} \begin{bmatrix} a^4 + a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3- Pour a=1 calculer

- la dilatation en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
- L'allongement unitaire en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
- La déformation de Green-Lagrange en un point de vecteur position \vec{X} et dans une direction $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Pour $a=1$ on a :

$$[C] = \begin{bmatrix} 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la dilatation :

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{\{dX\}^T \cdot [C] \cdot \{dX\}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = \sqrt{\langle 1 \quad 2 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = 3.20$$

L'allongement unitaire :

$$\varepsilon(M_0, d\vec{X}) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \lambda(M_0, d\vec{X}) - 1 = \sqrt{1 + 2 \cdot \{dX\}^T \cdot [E] \cdot \{dX\}} - 1$$

$$\varepsilon(M_0, d\vec{X}) = 2.20$$

La déformation de Green Lagrange :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, d\vec{X}) = \frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = \{n_0\}^T \cdot [E] \cdot \{n_0\}$$

$$\varepsilon_{GL}(M_0, d\vec{X}) = \langle 1 \quad 2 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{GL}(M_0, d\vec{X}) = 1$$

4. Pour $a=1$ calculer le glissement, la dilatation volumique et la déformation volumique en un point de vecteur position \vec{X} et pour les deux directions orthogonales $d\vec{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $d\vec{X}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

le glissement

$$\gamma(M_0, d\vec{X}, d\vec{X}') = \arcsin \frac{2 \cdot \{dX\}^T \cdot [E] \cdot \{dX'\}}{\lambda(M_0, d\vec{X}) \cdot \lambda(M_0, d\vec{X}')}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}) = 3.20$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}') = \sqrt{\{dX'\}^T \cdot [C] \cdot \{dX'\}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}') = \sqrt{\langle 2 \quad -1 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$$\lambda(M_0, d\vec{X}') = 6.10$$

$$2 \cdot \langle 1 \quad 2 \quad 0 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma(M_0, d\vec{X}, d\vec{X}') = \arcsin \frac{4}{3.20 \times 6.10} = \arcsin \frac{4}{19.52} = \arcsin 0.2049$$

$$\gamma(M_0, d\vec{X}, d\vec{X}') = 11.84^\circ$$

la dilatation volumique

Pour a=1 on a

$$[F] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0} = \det[F] = \det \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 6$$

la déformation volumique

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1 = 5$$

Chapitre 05 – Relations de comportement

5.1- Introduction

Le traitement d'un problème implique la détermination des inconnues qui sont au nombre de 15 :

- Trois (03) fonctions de déplacements,
- Six (06) fonctions de déformations,
- Six (06) fonctions de contraintes.

Les théories qu'on a vu précédemment, à savoir, la théorie des états de déformations et celle des états de contraintes nous ont fourni uniquement neuf équations :

- Six équations issues de la cinématique qui relient les déformations aux déplacements : $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u})$
- Trois équations issues des conditions d'équilibre : $div\bar{\sigma} + \vec{f} = \vec{0}$

Soit au total neuf (09) équations. Le déficit en équations est à rechercher à travers une formulation du comportement du matériau, c'est-à-dire des lois établies expérimentalement mettant en relation les contraintes aux déformations. Ces lois fournissent les six (06) équations manquantes pour une résolution complète du problème.

5.2- Les lois simples

Les essais mécaniques ont pour principal objectif la mise en place d'une loi destinée à prévenir le comportement du matériau. Pour cela, il n'est parfois pas nécessaire de faire appel à des lois compliquées. On se contente alors de relations simples dans des cas particuliers. Nous allons voir ici quelques relations issues des essais de traction.

Lors d'un essai de traction, la courbe $(\sigma ; \varepsilon)$ met en évidence deux types de comportement du matériau : une partie élastique et une partie plastique.

Comme l'illustre la courbe du schéma suivant, la déformation élastique est notée ε_e et la déformation plastique est notée ε_p .

Pour une sollicitation F d'une éprouvette de section S , on a $\sigma = \frac{F}{S}$ et la déformation correspondante $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ avec :

- Une déformation élastique : $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$
- Et une déformation plastique : $\varepsilon_p = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$

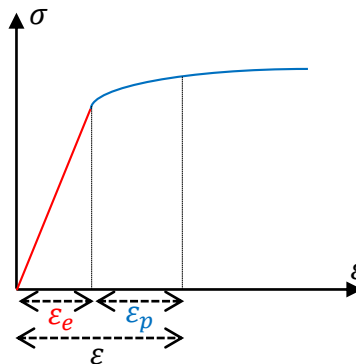


Figure 40 – Essai de traction

Dans ces formulations :

E : Représente le module d'Young du matériau,

l_0 : Représente la longueur initiale de l'éprouvette

l : Représente la longueur de l'éprouvette après mise en charge

5.2.1. Loïs décrivant le comportement plastique

Pour beaucoup de matériaux, la partie élastique de la déformation est très faible par rapport à la partie plastique. Ceci emmène souvent à négliger ε_e pour ce type de matériau. De ce fait, la courbe $(\sigma ; \varepsilon)$ est approchée par les principales lois suivantes :

Loi de Hollomon ou loi puissance

Cette loi, décrite par le graphe de la figure suivante, exprime la relation $(\sigma ; \varepsilon)$ en fonction de deux paramètres (K et n) :

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad 5.01$$

Avec $n = \frac{d\ln(\sigma)}{d\ln(\varepsilon)}$ appelé coefficient d'écroutissage.

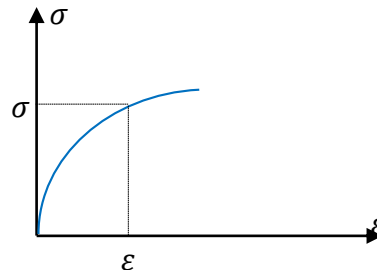


Figure 41- Loi de Hollomon

Loi de Ludwik

Cette loi, décrite par le graphe de la figure suivante, exprime la relation $(\sigma ; \varepsilon)$ en fonction de trois paramètres (σ_e , K et n) :

$$\sigma = \sigma_e + K\varepsilon^n \quad 5.02$$

Avec σ_e la limite d'élasticité du matériau et $= \frac{d\ln(\sigma - \sigma_e)}{d\ln(\varepsilon)}$. Ici, n n'est pas un coefficient d'écroutissage.

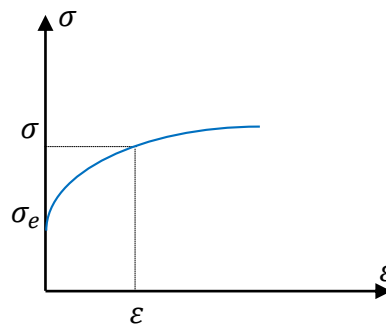


Figure 42- Loi de Ludwik

Loi de Swift ou loi de Krupkowski

Cette loi, décrite par le graphe de la figure suivante, exprime la relation $(\sigma ; \varepsilon)$ en fonction de trois paramètres $(\varepsilon_0, K \text{ et } n)$:

$$\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad 5.03$$

On remarque que $\sigma_e = K\varepsilon_0^n$. Ici, n n'est pas un coefficient d'écrouissage.

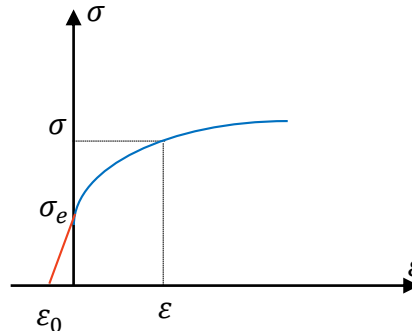


Figure 43- Loi de Swift

5.3- Les lois des comportements élastiques linéaires

5.3.1- Loi de Hooke Généralisée

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857). Celle-ci exprime les composantes de tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations.

$$\bar{\sigma} = \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\bar{C}}}} : \bar{\varepsilon} \quad 5.04$$

Qui s'écrit sous forme indicielle :

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x, t) \quad 5.05$$

Dans ces relations, $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\bar{C}}}}$ est un tenseur de quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, c'est-à-dire $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, on peut démontrer que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad 5.06$$

De ce fait, $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\bar{C}}}}$ est un tenseur dont la matrice représentative comporte 81 composantes avec seulement 21 paramètres indépendants.

5.3.2- Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène isotrope

Pour un matériau élastique homogène isotrope, toutes les directions ont les mêmes propriétés. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux, tel l'acier, le béton etc... Dans ce cas et pour une température constante, la loi de hooke prend deux types de formes :

- La loi de Gabriel Lamé

Dans cette forme on exprime les contraintes en fonction de déformations. La loi de comportement (5.04) se réduit à :

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{Trace}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\varepsilon} \quad 5.07$$

Qui s'écrit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad 5.08$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad 5.09$$

Avec :

- $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad 5.10$$

- $[D]$ appelée la matrice des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad 5.11$$

- λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé qui dépendent de la particule considérée. Leurs expressions en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν sont données comme suit :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad 2\mu + \lambda = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad 5.12$$

Ou encore :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad 5.13$$

- La loi de Hooke-Duhamel

Cette forme est réciproque de la précédente : On exprime les déformations en fonction de contraintes :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\bar{\sigma}) \cdot \bar{I} \quad 5.14$$

Qui s'écrit en notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad 5.15$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad 5.16$$

Avec :

- $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad 5.17$$

- $[S]$ appelée la matrice inverse des coefficients élastiques est égale à:

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad 5.18$$

5.3.3- Loi de Hooke pour un matériau élastique homogène orthotrope

Pour un matériau élastique homogène orthotrope, ce matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. Ce modèle s'applique aux tôles laminées, aux composites tissés, au bois et certains bétons structurés, etc..

Pour ces cas, la matrice de comportement est définie par neuf (09) composantes indépendantes. Dans un repère principal d'orthotropie cette loi s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{cases} \quad 5.19$$

Avec les conditions de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \quad ; \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} \quad ; \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \quad 5.20$$

5.4- Etats particuliers de comportement

5.4.1- Etat de contraintes et de déformations sphériques

Dans un état de contraintes et de déformations sphériques, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \\ \text{ou} \\ \{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma \\ \sigma_{22} = \sigma \\ \sigma_{33} = \sigma \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{23} = 0 \end{cases} ; \{\varepsilon\} = \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 0 \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = 0 \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad 5.21$$

En utilisant la loi de comportement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 5.22$$

On obtient une relation entre les deux scalaires σ et ε :

$$\sigma = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon \quad \text{ou encore} \quad \sigma = 3K\varepsilon \quad \text{avec} \quad K = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3} \quad 5.23$$

Dans cette relation, le coefficient K est le **module de rigidité à la dilatation uniforme** (cas de la dilatation d'une sphère sous pression).

5.4.2- Etat de cisaillement pure

Dans un état de cisaillement pure, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\begin{cases} [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{ou} \\ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad 5.24$$

En utilisant la loi de comportement :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 5.25$$

On obtient une relation entre les deux scalaires σ_{12} et ε_{12} :

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = G \cdot \gamma_{12} \quad \text{où} \quad \mu = G \quad 5.26$$

Dans cette relation, le coefficient $\mu = G$ est le **module de rigidité au glissement ou au cisaillement** (le glissement défini par $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ représente la variation d'angle droit).

5.4.3- Etat de contraintes uni-axial

Dans un état de contraintes uni-axial, par exemple le long de l'axe $(O; x_1)$, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\begin{cases}
 [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \\
 \text{ou} \\
 \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{cases} \quad 5.27$$

En utilisant la loi de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 5.28$$

On obtient une relation entre les deux scalaires σ_{11} d'une part et ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} d'autre part :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{-\nu\sigma_{11}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{-\nu\sigma_{11}}{E} \quad 5.29$$

Dans cette relation, le module de Young E est le **module de rigidité à l'allongement en traction simple**.

5.4.4- Etat de contraintes planes

Un état de contraintes planes est généralement admis pour le calcul des structures minces (exemple une plaque) dont le plan moyen est situé dans le plan $(O; x_1; x_2)$ et qui n'admet de charges que dans son plan. De ce fait, les composantes du tenseur des contraintes σ_{33} ; σ_{13} ; σ_{23} et les composantes du tenseur des déformations ε_{13} ; ε_{23} sont nulles. Ainsi, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \\ \text{ou} \\ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{array} \right. \quad 5.30$$

En utilisant la loi de souplesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad 5.31$$

On obtient :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E} \quad 5.32$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\} \quad 5.33$$

5.4.5- Etat de déformations planes

Un état de déformations planes est généralement admis pour le calcul des structures de longueur importante suivant l'axe $(O; x_3)$, supposées bloquées dans cette direction. De ce fait, les composantes du tenseur des déformations ε_{33} ; ε_{13} ; ε_{23} et les composantes du tenseur des contraintes σ_{13} ; σ_{23} sont nulles. Ainsi, les tenseurs des contraintes et des déformations se réduisent à :

$$\begin{cases} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{ou} \\ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad 5.34$$

En utilisant la loi de comportement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad 5.35$$

avec

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad 5.36$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad 5.37$$

5.5- Mise en équation : Principes des travaux virtuels

5.5.1- Passage des formes différentielles aux formes intégrales

Considérons un solide de volume Ω et de contour $\partial\Omega$. Ce solide est soumis aux sollicitations suivantes :

- Des forces de volume : $\vec{f}_v \cdot dV$
- Des forces surfaciques extérieures : $\vec{f}_s \cdot dA$
- Des conditions aux limites représentées par des déplacements \vec{u} imposés appliquées sur une portion du contour A_u .

De cet état, on peut déduire que le système mécanique du solide est caractérisé par :

- Des grandeurs scalaires qui sont son volume, la surface de son contour, la surface d'application des déplacements imposés A_u et sa masse volumique ρ . Il est à noter que $A + A_u = \partial\Omega$
- Des champs vectoriels imposés (connus ou des données du problèmes), qui sont représentés par les forces élémentaires de volume \vec{f}_V , les forces élémentaires extérieures de surface \vec{f}_S et les déplacements imposés \vec{u} .
- Des inconnues du problème à trouver, à savoir :
 - o Les champs vectoriels relatifs aux déplacements \vec{u} et aux réactions d'appui surfaciques \vec{t} ,
 - o Les champs des tenseurs de contraintes $\vec{\sigma}$ et des déformations $\vec{\varepsilon}$.

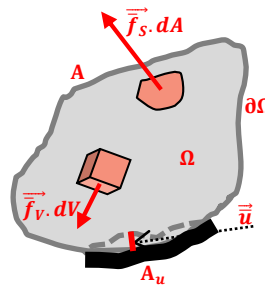


Figure 44 – Schéma d'un système mécanique

Pour la résolution du problème, on dispose des équations de l'équilibre et de la cinématique fournies sous forme différentielle; à savoir :

Pour la forme différentielle de l'équilibre

* L'équation générale d'équilibre de Cauchy : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{Vi} = \rho \cdot \gamma_i$

Qui prend la forme :

- d'équilibre statique en volume : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{Vi} = 0$ et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

- d'équilibre statique sans forces de volume : $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

* L'équation des conditions statiques à la surface : $n_i \sigma_{ij} = f_{s_i}$ sur **A**

qui prend la forme, sans forces extérieures : $n_i \sigma_{ij} = 0$ sur **A**

Pour la forme différentielle de la cinématique

* Le champ des déplacements u_i satisfait l'équation : $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

* La symétrie du tenseur des déformations : $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

* Les conditions aux limites : $u_i = \bar{u}_i$

La résolution de ces formes différentielles est quasiment impossible. Cependant des techniques numériques sont requises et existent ; seulement ces techniques se prêtent au mieux à la résolution des formes intégrales, d'où la considération des **formes intégrales de l'équilibre et de la cinématique**. Pour passer des formes différentielles aux formes intégrales, la technique approchée utilisée est celle des résidus pondérés.

a- Forme intégrale de l'équilibre statique

Celle-ci consiste à pondérer et à intégrer la condition d'équilibre $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{V_i} = 0$,
(pour un équilibre statique) :

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{V_i} \right) w_i dV = \int_V w_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V f_{V_i} w_i dV = 0 \quad 5.38$$

Avec $w_i = w_i(x_1; x_2; x_3)$ un champ vectoriel continu et dérivable

L'intégration par partie de l'équation (5.38) donne :

$$\int_A w_i \sigma_{ij} n_i dA - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV + \int_V f_{V_i} w_i dV = 0 \quad 5.39$$

Sachant que :

$$n_i \sigma_{ij} = f_{s_i}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma_{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)$$

L'équation (5.39) devient :

$$\int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_V f_{V_i} w_i dV + \int_A f_{s_i} w_i dA \quad 5.40$$

Cette relation contient en une seule équation toute la statique y compris les conditions aux limites.

Si on y rajoute l'expression $\int_V \rho \cdot \gamma_i \cdot w_i dV$ on trouve sous forme intégrale les équations du mouvement.

Remarques :

- La forme différentielle de l'équilibre est dite **FORME FORTE** (Strong Form).
- La forme intégrale de l'équilibre est dite **FORME FAIBLE** (Weak Form).
- On démontre mathématiquement que ces deux formes sont **EQUIVALENTES**.

b- Forme intégrale de la cinématique

L'équation de la cinématique s'écrit : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Donc on peut dire que :

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad 5.41$$

Comme pour le cas des équations d'équilibre, on peut pondérer et intégrer cette équation :

$$\int_V \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) w_{ij} dV = 0 \quad 5.42$$

Avec w_{ij} un champ tensoriel symétrique.

L'intégration par partie de l'équation (5.42) nous donne :

$$\int_V \varepsilon_{ij} w_{ij} dV - \left(\int_A (n_j w_{ji}) u_i dA - \int_V \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_j} \right) u_i dV \right) = 0 \quad 5.43$$

Si on pose $w_{ij} = \delta \sigma_{ij}$ avec $-\frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \delta f_{Vi}$ et $n_j \sigma_{ji} = \delta f_{Si}$

L'équation (5.43) devient :

$$\int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta f_{Vi} u_i dV + \int_A \delta f_{Si} u_i dA \quad 5.44$$

5.5.2- Principe des déplacements virtuels

En considérant un état d'équilibre statique, ce principe consiste à satisfaire l'équation d'équilibre sous forme intégrale qui est donnée comme suit :

$$\int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_V f_{Vi} w_i dV + \int_A f_{Si} w_i dA \quad 5.45$$

Ce principe stipule « **pour tout champs de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur** ». De ce fait, le champs vectoriel continu et dérivable w_i peut prendre la forme d'une variation du champ de déplacement virtuel (interprétation physique)

$$w_i = \delta u_i \quad 5.46$$

Tenant compte de l'équation (5.46), l'équation (5.45) devient :

$$\int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_V f_{Vi} \delta u_i dV + \int_A f_{Si} \delta u_i dA \quad 5.47$$

Ou encore

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_{Vi} \delta u_i dV + \int_A f_{Si} \delta u_i dA \quad 5.48$$

Où :

Le premier terme représente la variation du travail virtuel intérieur (variation de l'énergie de déformation) : $\delta w_{int} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$

Et le deuxième terme représente la variation du travail virtuel des forces extérieures : $\delta w_{ext} = \int_V f_{Vi} \delta u_i dV + \int_A f_{Si} \delta u_i dA$

5.5.3- Principe des forces virtuelles

En considérant les équations de la cinématique, ce principe consiste à satisfaire l'équation d'équilibre sous forme intégrale qui est donnée comme suit :

$$\int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta f_{Vi} u_i dV + \int_A \delta f_{Si} u_i dA \quad 5.49$$

Ce principe stipule « **pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces, le travail virtuel complémentaire des forces extérieures est égal au travail virtuel complémentaire intérieur** ».

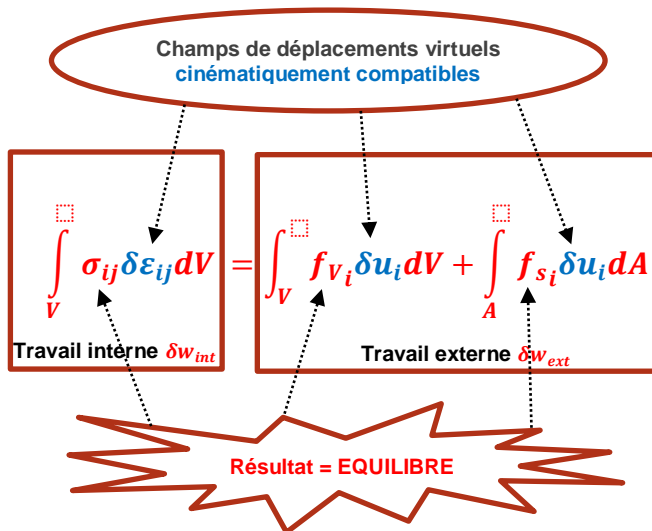
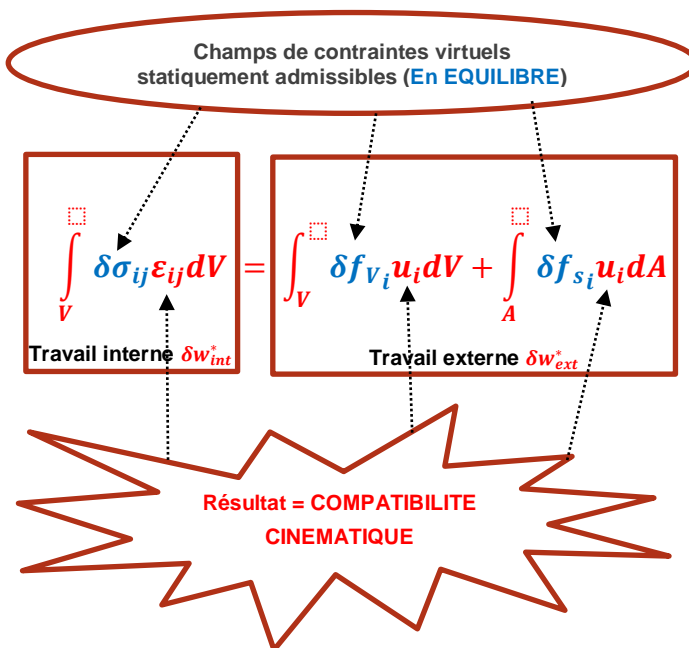
Le premier terme représente la variation du travail virtuel complémentaire

intérieur : $\delta w_{int}^* = \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$

Et le deuxième terme représente la variation du travail virtuel complémentaire

des forces extérieures : $\delta w_{ext}^* = \int_V \delta f_{Vi} u_i dV + \int_A \delta f_{Si} u_i dA$

5.5.4- Résumé

Principe des déplacements virtuels (Travaux virtuels)Principe des forces virtuelles (Travaux virtuels complémentaires)

5.5.5- Energie de déformation - Théorème de Clapeyron

Pour un matériau élastique linéaire, l'énergie potentielle de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad 5.50$$

En considérant le principe des déplacements virtuels, avec $\delta \varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij}$ et $\delta u_i \approx u_i$ on aura :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_{Vi} u_i dV + \int_A f_{Si} u_i dA \quad 5.51$$

Donc l'énergie de déformation peut être exprimé comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_V f_{Vi} u_i dV + \int_A f_{Si} u_i dA \right) \quad 5.52$$

5.6- Exercices

Exercice 5.01

Soit le tenseur des contraintes : $[\sigma] = \begin{bmatrix} 6.0 & 5.0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 1.0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

- 1- Donner la valeur des composantes (σ_{13} ; σ_{21} ; σ_{23} ; σ_{31} ; σ_{32} , σ_{33}) lorsqu'on est dans un état de déformation plane (Prendre $\nu=0.3$), en expliquant votre réponse.
- 2- Calculer en fonction du module d'Young E les composantes du tenseur des déformations $[\varepsilon]$. (Prendre $\nu=0.3$).

Corrigé exercice 5.01

- 1- Donner la valeur des composantes (σ_{13} ; σ_{21} ; σ_{23} ; σ_{31} ; σ_{32} , σ_{33}) lorsqu'on est dans un état de déformation plane (Prendre $\nu=0.3$), en expliquant votre réponse.

Dans un état de déformations planes, les composantes des déformations suivant la direction $\overrightarrow{Ox_3}$ sont nulles :

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Et

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

De ce fait, l'utilisation de la loi de Hook donne un tenseur des contraintes avec les composantes $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$

La propriété de symétrie du tenseur des contraintes implique :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = 5.0 \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0.3 \times (6.0 + 1.0) = 2.1$$

Donc, le tenseur des contraintes devient :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 6.0 & 5.0 & 0 \\ 5.0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer en fonction du module d'Young E les composantes du tenseur des déformations $[\varepsilon]$. (Prendre $\nu=0.3$)

La loi de comportement, pour un état de déformation plane ne comportent que les trois termes $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12}$ et se présente comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 6.0 \\ 1.0 \\ 5.0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+0.3)(1-2 \times 0.3)} \begin{bmatrix} 1-0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1-0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \times 0.3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 3.12 \\ 0.52 \\ 2.60 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 5.06 \\ -1.41 \\ 6.50 \end{Bmatrix}$$

Exercice 5.02

Soit le tenseur des déformations suivant : $[\varepsilon] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 300 & \blacksquare & \blacksquare \\ 350 & -100 & 0 \\ 0 & \blacksquare & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

Les caractéristiques du matériau sont $E = 200\text{GPa}$ et $\nu = 0.3$

1. Compléter la matrice des déformations (composantes indiquées par \blacksquare).
2. Ecrire la structure du tenseur des contraintes. Expliquer pourquoi la contrainte σ_{33} est nulle.
3. Par application de la loi de Hook, calculer les composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$.
4. Calculer la déformation ε_{33} .
5. Par exploitation du cercle de Mohr, déterminer les contraintes principales, la direction des axes principaux et la contrainte de cisaillement maximale.

Corrigé exercice 5.02

1. Compléter la matrice des déformations (composantes indiquées par ■).

Le tenseur des déformations étant symétrique, celui-ci s'écrit :

$$[\varepsilon] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 300 & 350 & 0 \\ 350 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

2. Ecrire la structure du tenseur des contraintes. Expliquer pourquoi la contrainte σ_{33} est nulle.

Ce tenseur des déformations est associé à un état de contraintes planes avec

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E} \quad \text{donc} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

3. Par application de la loi de Hook, calculer les composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$.

Pour à un état de contraintes planes la loi de Hook s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{200}{1 - 0.3^2} \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0.3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 300 \\ -100 \\ 700 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0594 \\ -0.0022 \\ 0.0538 \end{Bmatrix}$$

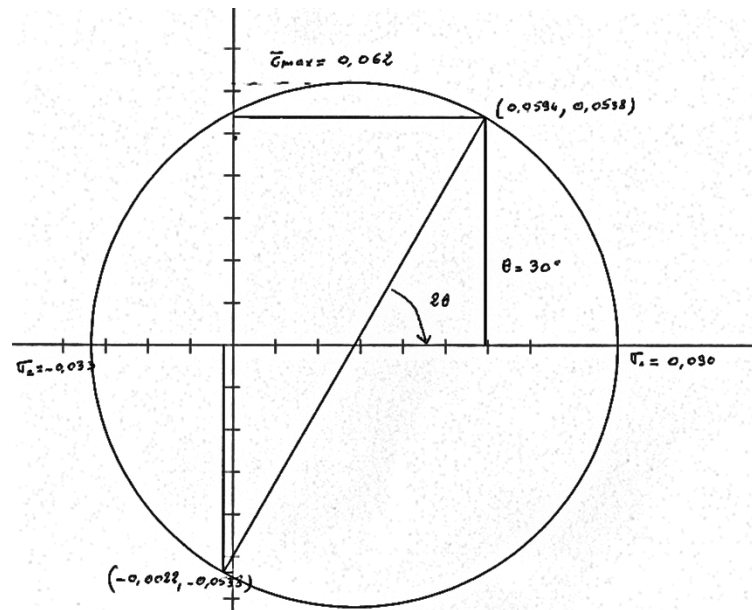
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0.0594 & 0.0538 & 0 \\ 0.0538 & -0.0022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Calculer la déformation ε_{33} .

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-0.3(0.0594 - 0.0022)}{200} = -85.80 \cdot 10^{-6}$$

5. Par exploitation du cercle de Mohr, déterminer les contraintes principales, la direction des axes principaux et la contrainte de cisaillement maximale.



Contraintes principales : $\sigma_1 = 0.09$; $\sigma_2 = -0.33$

Direction des axes principaux : $\theta = -30^\circ$

Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{max} = 0.062$

Exercice 5.03

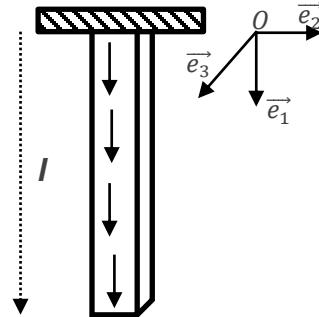
Soit une barre encastrée à son extrémité, soumise à son poids propre. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont données comme suit :

Section : A

Poids volumique γ

Module de Young E

Coefficient de Poisson ν



on se propose un champs de déplacement le long de l'axe de la barre, dont la composante dépend de 03 paramètres :

$$u_1(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

- 1- Par application des travaux virtuels, calculer les paramètres $a_1, a_2, et a_3$
- 2- En déduire les champs des déplacements, des déformations et des contraintes
- 3- Calculer les contraintes et les déformations principales aux sections de coordonnées $x = 0$, $x = \frac{l}{2}$, $x = l$.

Corrigé exercice 5.03

- 1- Par application des travaux virtuels, calculer les paramètres $a_1, a_2, et a_3$

Il s'agit d'un état de contraintes uni-axial selon l'axe (O, \vec{e}_1) ; donc :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Avec :

Cinématique :

$$u_1(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \delta u_1(x) = \delta a_1x + \delta a_2x^2 + \delta a_3x^3$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1(x)}{\partial x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \quad \delta \varepsilon_{11} = \delta a_1 + 2\delta a_2x + 3\delta a_3x^2$$

Loi de comportement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{-\nu\sigma_{11}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{-\nu\sigma_{11}}{E}$$

Le principe des travaux virtuels est formulé comme suit :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_{Vi} \delta u_i dV + \int_A f_{si} \delta u_i dA$$

Le développement de cette formule donne :

$$\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{21} \delta \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \delta \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \delta \varepsilon_{32} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33}) dV$$

$$= \int_V (f_{V1} \delta u_1 + f_{V2} \delta u_2 + f_{V3} \delta u_3) dV + \int_A (f_{s1} \delta u_1 + f_{s2} \delta u_2 + f_{s3} \delta u_3) dA$$

Sachant que : $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$

Et : $f_{V2} = f_{V3} = f_{s1} = f_{s2} = f_{s3} = 0$

La formule exprimant l'équilibre des travaux virtuels se simplifie comme suit :

$$\int_V \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dV = \int_V f_{V1} \delta u_1 dV$$

Sachant que : $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)$

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta a_1 + 2\delta a_2x + 3\delta a_3x^2$$

$$\delta u_1(x) = \delta a_1x + \delta a_2x^2 + \delta a_3x^3$$

$$\int_V f_{V1} \delta u_1 dV = YA \int_l \delta u_1 dx$$

L'expression du principe des travaux virtuels devient :

$$EA \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)(\delta a_1 + 2\delta a_2x + 3\delta a_3x^2) dx = YA \int_l (\delta a_1x + \delta a_2x^2 + \delta a_3x^3) dx$$

Pour donner :

$$\begin{aligned} \frac{E}{Y} \int_l ((a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) \cdot \delta a_1 + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) \cdot 2\delta a_2x + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) \cdot 3\delta a_3x^2) dx \\ = \int_l (\delta a_1x + \delta a_2x^2 + \delta a_3x^3) dx \end{aligned}$$

Cette équation s'écrit sous forme vectorielle comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{E}{Y} \left\langle \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) dx \quad \int_l (2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3) dx \quad \int_l (3a_1x^2 + 6a_2x^3 + 9a_3x^4) dx \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{Bmatrix} \\ = \left\langle \int_l x dx \quad \int_l x^2 dx \quad \int_l x^3 dx \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Ce système d'équations doit être vérifié quelque soit le vecteur $\begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{Bmatrix}$.

Prenons par exemple trois vecteurs particuliers :

$$\begin{cases} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

Tenant compte du premier vecteur on obtient la première équation :

$$\begin{aligned} \frac{E}{Y} \left\langle \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) dx \quad \int_l (2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3) dx \quad \int_l (3a_1x^2 + 6a_2x^3 + 9a_3x^4) dx \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \left\langle \int_l x dx \quad \int_l x^2 dx \quad \int_l x^3 dx \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{Y} \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) dx = \int_l x dx$$

$$a_1 + a_2l + a_3l^2 = \frac{Yl}{2E}$$

Tenant compte du deuxième vecteur on obtient la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \frac{E}{Y} \left\langle \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) dx \quad \int_l (2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3) dx \quad \int_l (3a_1x^2 + 6a_2x^3 + 9a_3x^4) dx \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \left\langle \int_l x dx \quad \int_l x^2 dx \quad \int_l x^3 dx \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{Y} \int_l (2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3) dx = \int_l x^2 dx$$

$$a_1 + \frac{4}{3}a_2l + \frac{3}{2}a_3l^2 = \frac{Yl}{3E}$$

Tenant compte du troisième vecteur on obtient la troisième équation :

$$\begin{aligned} \frac{E}{Y} \left\langle \int_l (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) dx \quad \int_l (2a_1x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3) dx \quad \int_l (3a_1x^2 + 6a_2x^3 + 9a_3x^4) dx \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \left\langle \int_l x dx \quad \int_l x^2 dx \quad \int_l x^3 dx \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{Y} \int_l (3a_1x^2 + 6a_2x^3 + 9a_3x^4) dx = \int_l x^3 dx$$

$$a_1 + \frac{3}{2}a_2l + \frac{9}{4}a_3l^2 = \frac{Yl}{4E}$$

Donc le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} a_1 + a_2l + a_3l^2 = \frac{Yl}{2E} \\ a_1 + \frac{4}{3}a_2l + \frac{3}{2}a_3l^2 = \frac{Yl}{3E} \\ a_1 + \frac{3}{2}a_2l + \frac{9}{4}a_3l^2 = \frac{Yl}{4E} \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équation conduit à :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{Y}{2E} \begin{pmatrix} 2l \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- En déduire les champs des déplacements, des déformations et des contraintes

Champs des déplacements :

$$u_1(x) = \frac{Y}{2E} (2lx - x^2)$$

Champs des déformations :

$$\varepsilon_{11}(x) = \frac{Y}{E} (l - x)$$

Champs des contraintes :

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}(x) = Y(l - x)$$

- 3- Calculer les contraintes et les déformations principales aux sections de coordonnées $x = 0$, $x = \frac{l}{2}$, $x = l$.

Dans un état de contraintes uni-axial, la contrainte σ_{11} est une contrainte principale et toutes les autres composantes du tenseur de contraintes sont nulles :

$$\sigma_1 = \sigma_{11} \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

Egalement les composantes du tenseur des déformations sont des déformations principales :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \quad , \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$$

Donc :

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{11}(x) = \frac{Y}{E}(l - x)$$

$$\sigma_1(x) = \sigma_{11}(x) = E\varepsilon_{11}(x) = Y(l - x)$$

$$\varepsilon_2(x) = \varepsilon_{22}(x) = \varepsilon_3(x) = \varepsilon_{33}(x) = \frac{-\nu\sigma_{11}}{E}$$

Pour $x = 0$ $\varepsilon_1(0) = \frac{Yl}{E}$ $\sigma_1(0) = Yl$ $\varepsilon_2(0) = \varepsilon_3(0) = \frac{-\nu Yl}{E}$

Pour $x = \frac{l}{2}$ $\varepsilon_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Yl}{2E}$ $\sigma_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Yl}{2}$ $\varepsilon_2\left(\frac{l}{2}\right) = \varepsilon_3\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{-\nu Yl}{2E}$

Pour $x = l$ $\varepsilon_1(l) = 0$ $\sigma_1(l) = 0$ $\varepsilon_2(l) = \varepsilon_3(l) = 0$

Bibliographie

1. *Mécanique des milieux continus*, par P. Germain, Editions Masson, Paris (1983)
2. *Théorie de l'élasticité*, par S. Timoshenko et J.M. Goodier, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1961
3. *Mécanique des milieux continus - 4e édition: Cours et exercices corrigés*, par Jean Coirier et Carole Nadot-Martin, Edition Dunod, 2013
4. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, Par Roger Temam et Alain Miranville, Edition Scopos, Springer.
5. *Mécanique des milieux continus*, par G. Duvaut, Edition Masson, 1990
6. *Introduction à la mécanique des milieux continus*, par Paul Germain et Patrick Muller, Edition Masson, 1995
7. *Mécanique des milieux continus*, Tomes 1, 2 et 3, J.Salençon, Edition Ecole Polytechnique, France.
8. *Mécanique des milieux continus*, P. Germain, Editions Masson.
9. *Introduction à la mécanique des milieux continus*, P. Germain et P. Muller, Edition Masson.
10. *Mécanique des milieux continus: Cours et exercices corrigés*, J. Coirier et C. Nadot-Martin, Editions Dunod.
11. *Mécanique des milieux continus*, par G. Duvaut, Editions Masson.
12. *Mécanique des milieux continus: une introduction*, J. Botsis et M. Deville, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.