

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'études

Présenté par : **OBEIDI Roumayssa**

Master

Option : Maintenance Industrielle

=====

***Dynamique en torsion d'une ligne d'arbres
d'un moteur d'automobile à quatre temps***

=====

Sous la direction de : **Dr. REZAIGUIA Abdelouahab**

Année universitaire 2016/2017

Table des Matières

Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Recherche Bibliographique.....	2
1.1. Introduction.....	3
1.2. Synthèse bibliographique.....	4
1.3. Quelques Références bibliographiques	7
1.4. Objectifs de l'étude des vibrations de torsion des lignes d'arbres	8
1.4.1.Objectifs de l'analyse des vibrations libres	9
1.4.2.Objectifs de l'analyse des vibrations forcées permanentes	9
1.4.3.Objectifs de l'analyse des vibrations forcées transitoires	9
1.5.Différence entre la dynamique des rotors en flexion et la dynamique des rotors en torsion	10
1.6. Source d'excitation mécanique permanente : système bielle manivelle.....	11
1.6.1. Excitation par système bielle-manivelle	12

Chapitre 2 : Recherche des fréquences et des modes propres des lignes d'arbres

non ramifiées14

2.1. Introduction15

2.2. Hypothèses de modélisation15

2.3. Equations du mouvement libre des lignes d'arbres non ramifiées15

2.4. Recherche des fréquences et des modes propres17

2.4.1. Méthode de Rutishauser18

Chapitre 3 : Etude des vibrations forcées des lignes d'arbres non ramifiées25

3.1. Introduction26

3.2. Types d'amortissements dans les moteurs et principe de leurs modélisation 26

3.3. Importance d'un harmonique du couple d'excitation produit par un système
bielle-manivelle.....27

3.3.1. Cas d'un seul cylindre28

3.3.2. Cas de plusieurs cylindres	28
3.4. Mis en équations de mouvement en vibrations forcées.....	30
3.5. Proposition d'une méthode de résolution	31

Chapitre 4 : Exemple d'adaptation d'une ligne d'arbre d'un moteur d'automobile

à quatre temps	33
4.1. Introduction	34
4.2. Schéma et modèle de la ligne d'arbre du moteur	34
4.3. Pulsations et modes propres de la ligne d'arbre du moteur	36
4.4. Harmoniques dangereux et vitesses critiques	39
4.5. Etude des vibrations forcées de la ligne d'arbre du moteur	41
4.6. Algorithme de résolution	42
4.7. Quelques résultats des vibrations forcées	43
Conclusion générale	48
Références bibliographiques	50
Annexe 1.....	51

Introduction Générale

L'objectif de ce travail consiste à étudier les vibrations **libres** et **forcées** en torsion d'une ligne d'arbres d'un moteur d'automobile quatre cylindres à cycle quatre temps à allumage commandé issu de la référence [14]. Le frein est électrique de type Schenck. La liaison entre le moteur et le frein est assurée par un accouplement élastique.

Le **premier chapitre** a pour but de donner une historique et quelques travaux sur les vibrations de torsion des moteurs alternatifs, les objectifs de l'étude des vibrations de torsion de lignes d'arbres, les différences qui existent entre les vibrations de flexion et celles de torsion ainsi que l'excitation mécanique permanente du à un système bielle-manivelle.

Le **deuxième chapitre** a pour but la détermination des fréquences et des modes propres des lignes d'arbre non ramifiées sollicitées en vibrations de torsion. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations du mouvement libre de lignes d'arbres sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. La méthode de **Rutishauser** est utilisée pour calculer les fréquences propres, car elle présente l'avantage d'être précise et rapidement convergente.

Le **troisième chapitre** concerne l'étude des vibrations forcées des lignes d'arbres non ramifiées. Le modèle choisi en vibration libre est complété par la représentation des phénomènes d'amortissement absolu et relatif, et des excitations périodiques des couples moteurs dû au système bielle-manivelle. Il est possible de calculer l'importance relative des harmoniques dans la réponse vibratoire globale. On en déduit une classification de nombreuses vitesses dangereuses que l'on obtient en considérant les harmoniques non négligeables du couple exercé par la bielle sur le maneton. La méthode de **Newmark** est utilisée pour résoudre le système d'équation différentielle ordinaire du second ordre, car elle est inconditionnellement stable et de précision maximale.

Le **quatrième chapitre** concerne un exemple d'adaptation d'une ligne d'arbre d'un moteur d'automobile à quatre temps. Les résultats des deux régimes de fonctionnement **libre** et **forcé**, du moteur cité en objet, sont présentés et commentés.

En fin, on clôture ce mémoire par une *conclusion générale*.

Chapitre 1

Recherche Bibliographique

Sommaire

1.1. Introduction	3
1.2. Synthèse bibliographique	4
1.3. Quelques Références bibliographiques	7
1.4. Objectifs de l'étude des vibrations de torsion des lignes d'arbres	8
1.5. Différence entre la dynamique des rotors en flexion et la dynamique des rotors en torsion	10
1.6. Source d'excitation mécanique permanente : système bielle-manivelle	11

1.1 Introduction

Dans la dynamique des rotors des machines tournantes, on distingue trois principaux mouvements à savoir : les vibrations de torsion, les vibrations axiales (longitudinales) et les vibrations de flexion (latérales) dans deux plans latéraux.

Les vibrations de torsion des lignes d'arbres se concrétisent par des petites oscillations de torsion autour d'une position d'équilibre stable où chaque rotor composant la ligne d'arbres possède une vitesse moyenne constante. Alors, le comportement des éléments de l'installation est linéarisable autour de ce point de fonctionnement étudié.

Les vitesses critiques de torsion des lignes d'arbres sont des vitesses de rotation pour lesquelles une fréquence d'excitation se place en sympathie avec une fréquence propre de torsion du rotor; il y a résonance; les déformations et les contraintes dans les rotors peuvent être importantes. Lorsque les amortissements de torsion attachés au rotor sont négligeables (système conservatif), les vitesses critiques de torsion sont égales aux fréquences propres.

Comme la vitesse de rotation peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement (à cause de **l'effet gyroscopique** ; dû aux disques et aux arbres), les fréquences propres de torsion d'une ligne d'arbres peuvent dépendre de la vitesse de rotation. Lorsque cela se produit, le comportement libre est généralement résumé par le traçage de l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation. Comme dans de nombreux cas, les fréquences d'excitations

aussi dépendent de la vitesse de rotation. Elles peuvent être tracées dans le même diagramme en obtenant ce qu'on appelle le diagramme de Campbell.

Les vibrations de torsion des moteurs alternatifs résultent de l'application des forces de combustion périodiques dans le cylindre et des forces inertielles associées à des organes de rotation et d'articulation tels que le vilebrequin, l'arbre à cames et la bielle. D'autres excitations résultent de la rotation excentrique des appuis de tourillon et du volant. Il y a aussi d'autres sources de vibrations, telles que les dents d'engrenages, les vibrations d'engrènement des engrenages et le contact concentré des roulements dans le chemin de roulement dans les supports de l'arbre à cames. A chaque instant, la composante radiale de la force exercée sur le piston est transmise le long de la bielle et est appliquée sur le maneton. Cette force tend à tirer le maneton et induit la charge instantanée du support de palier. D'autre part, la composante tangentielle de la force appliquée au piston provoque la rotation du vilebrequin. Cette action entraîne un couple de torsion sur le vilebrequin en provoquant des vibrations de torsion. Dans un moteur à quatre temps, la fréquence fondamentale du couple appliqué peut coïncider avec la moitié de la vitesse de rotation du vilebrequin et ses harmoniques sont à des ordres entiers ou à moitiés de la même vitesse. Il existe donc un nombre infini de vitesses critiques, et en principe des couples de vibration élevés peuvent être induits à chacune de ces fréquences. Les vibrations génèrent des amplitudes qui peuvent être suffisamment élevées dans des cas extrêmes en provoquant la défaillance du vilebrequin ou d'autres composants du moteur. Dans la pratique, quelques vitesses critiques produisent des amplitudes de couple vibratoires très élevées [1].

1.2 Synthèse bibliographique

Historiquement, les vibrations de torsion dans les moteurs à piston étaient parmi les premiers problèmes de la dynamique des machines tournantes. Ils sont d'abord produits dans des moteurs marins et ont été calculés et mesurés par O. FRAHM depuis 1902. Ce type de recherche a reçu une demande importante pour des conceptions légères des avions, surtout en 1908 où l'accident du Zeppelin LZ 4, après un atterrissage d'urgence. L'analyse des dommages du moteur a accéléré les recherches en dynamique des rotors en torsion [1]. L'étude des vibrations forcées d'un moteur d'une machine électrique (E. MEISSNER, 1918) peut-être considérée comme l'une des premiers travaux dans le domaine de la dynamique des machines. Un pré-logiciel sur ordinateur sur la dynamique des moteurs alternatifs est présenté dans «Engineering Dynamics» par BIEZENO et GRAMMEL [2].

Les rotors de turbomachines individuels sont généralement suffisamment rigides en torsion pour mettre leurs fréquences naturelles de vibrations de torsion au-dessus de la plage de la plupart des excitations de torsion. Une exception est l'excitation de torsion dans certaines turbines à vapeur avec de longs rotors, ce qui peut fatiguer les lames. Lorsque les turbomachines sont reliées ensemble par des accouplements d'arbre, cependant, chacun des rotors individuels peut agir comme un seul disque rigide. Les valeurs des raideurs de torsion des accouplements et des arbres de liaison sont alors souvent suffisamment faibles pour ramener les fréquences naturelles en torsion dans la plage des fréquences d'excitation. Cela peut également se produire lorsqu'une turbomachine est reliée à un autre type de machine tournante (par exemple, un moteur électrique ou un moteur à mouvement alternatif). Un exemple est illustré sur la [figure 1.1](#), qui montre un grand moteur électrique entraînant des turbomachines à travers une boîte de vitesses. Les composantes des trains industriels sont souvent assez volumineuses. La puissance du moteur électrique peut aller jusqu'à plusieurs milliers de chevaux [\[3\]](#).



Figure 1.1 : Turbomachines reliées par des accouplements d'arbres [\[3\]](#).

Le moteur alternatif est toujours important, mais il s'agit d'étudier non seulement le moteur lui-même, mais l'ensemble du système d'entraînement. Cela conduit à des modèles mathématiques de calcul avec un grand nombre de degrés de liberté. Les vibrations de torsion dans les systèmes d'entraînement d'autres types de machines sont de plus en plus intéressantes. Par exemple, la demande croissante pour une qualité d'impression supérieure rendait inévitable la modélisation dynamique des machines d'impression. On peut généralement dire que les vibrations de torsion doivent être considérées pour presque tous les types de machines dans lesquels il ya un mouvement de rotation [\[1\]](#).

Liens de la dynamique des machines avec d'autres disciplines [\[1\]](#)

La [figure 1.2](#) montre comment le domaine de la dynamique des machines se rapporte à d'autres disciplines. La dynamique des rotors ou bien la dynamique des véhicules pourrait être liée à ces disciplines de la même façon et elles se chevauchent avec la dynamique des machines. Contrairement au dynamique des rotors et des véhicules, la dynamique des machines traite de nombreux objets et problèmes différents, qui commencent à partir des éléments de machines jusqu'aux modèles complexes où il existe des liens étroits avec la dynamique des structures.

Les fondements théoriques de la dynamique des machines sont constitués par des mathématiciens et des physiciens y compris, bien sur, presque tous les domaines du Génie Mécanique et en particulier la théorie des vibrations. Les résultats des études sur la dynamique des machines influent sur la conception et le dimensionnement des machines réelles, et il ya des liens étroits à la théorie de conception, aux éléments de machines, à la stabilité structurale, à la commande et à l'acoustique des machines.

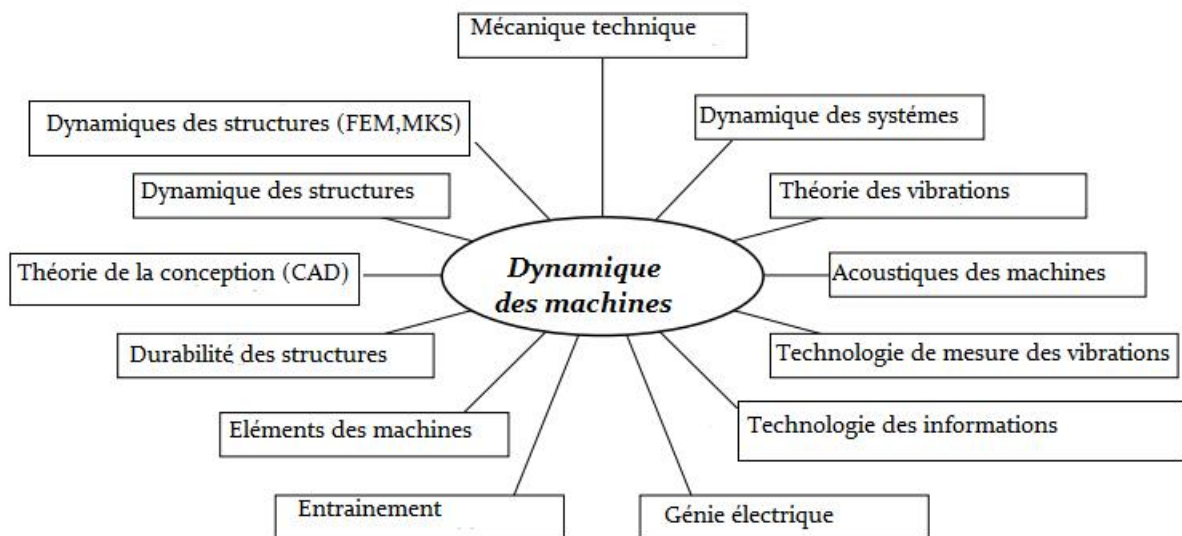


Figure 1.2 : Liens de la dynamique des machines avec d'autres disciplines [1]

Méthode des éléments finis et dynamique des rotors

L'apparition de la méthode des éléments finis a également et profondément influencée le domaine de la dynamique des rotors. Au départ, les codes de calcul des éléments finis ne peuvent

pas être utilisés pour l'analyse de la dynamique des rotors en raison du manque de considération des effets gyroscopiques. Par la suite, la matrice gyroscopique est prise en compte dans la formulation éléments finis. Actuellement, plusieurs fabricants commerciaux utilisent des codes d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors en torsion tels que TORSION et MADYN 2000. Grâce à la modélisation éléments finis, il est possible d'étudier le comportement dynamique des rotors des machines qui tournent à grandes vitesses et contenant plus de détails et par conséquent obtenir des prédictions quantitatives avec un certain degré de précision élevé.

TORSION est un logiciel développé par Guy FERRARIS, Marie Ange ANDRIANOELY du Laboratoire de Mécanique des contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. C'est un logiciel d'éléments finis destiné à prévoir le comportement statique et dynamique en régime permanent et transitoire des multi rotors en torsion. Il est utilisé pour concevoir des machines et pour modifier, si nécessaire l'architecture d'une machine existante. Dans TORSION, un élément d'arbre est modélisé par élément fini de poutre en torsion à 2 nœuds et deux degrés de liberté par nœud. Un élément de type disque est modélisé par un nœud rigide. Un engrenage est modélisé par une raideur, une inertie et un amortissement supplémentaires. En statique, le logiciel TORSION permet de calculer la déformée à des couples statiques. En dynamique en régime permanent, il permet de calculer les fréquences et les modes propres, la réponse harmonique et les énergies élémentaires. En régime transitoire, il permet de calculer les couples et les vitesses en fonction du temps [4,5].

Le logiciel MADYN 2000 est un programme d'éléments finis étendu de rotor dynamique qui est adapté pour des systèmes généraux rotor-engrenage-palier pour l'analyse des vibrations de flexion, de torsion et les vibrations couplées avec tous types de paliers y compris les paliers magnétiques. Les racines de ce logiciel remontent à l'Institut de Dynamique des Machines de l'Université Technique de Darmstadt en Allemagne. Ce programme d'élément fini est étendu sur 20 ans (1970 à 1990). Il est basé sur une longue expérience industrielle depuis 1983. Elle couvre les besoins d'une large gamme de rotors de petits turbocompresseurs automobiles jusqu'aux grands lignes d'arbre de production d'électricité avec une puissance de plusieurs centaines de milliers de MW. Le module de palier magnétique dans MADYN 2000 remonte à un développement depuis 1998 qui a été lancé pour répondre aux exigences des applications industrielles des paliers magnétiques. MADYN 2000 met l'accent sur les besoins particuliers de la dynamique des rotors [6].

1.3 Quelques Références bibliographiques

Plusieurs recherches ont été menées au fil des ans pour étudier les vibrations de torsion des moteurs alternatifs et des lignes d'arbres ramifiées ou non ramifiées. On trouve surtout sur internet, une quantité importante des études dans ce contexte.

Chetrah [7] a étudié les vibrations libres de torsion d'une installation industrielle de production d'air comprimé composée d'un moteur électrique, d'un accouplement élastique à grande vitesse, d'un réducteur à engrenages, d'un accouplement petite vitesse, d'un volant d'inertie et d'un compresseur d'air à deux cylindres. Après formulation des équations du mouvement du modèle torsionnel équivalent de l'installation, deux méthodes numériques ont été utilisées pour calculer les fréquences et les modes propres : la méthode de Holzer et la méthode de Rutishauser. Cette première analyse est le préalable incontournable à toute étude des vibrations de torsion forcées et, dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante. Des résultats numériques ont été présentés, commentés et des solutions ont été proposées.

Djebala a étudié dans son mémoire de Magistère [8], les vibrations libres et forcées de torsion de la ligne d'arbre d'une soufflante de galvanisation de SIDER El-Hadjar. Elle est composée d'un moteur électrique, d'un accouplement et d'une turbine. L'objectif principal de cette étude est de détecter le problème de vibrations hors normes de la soufflante lorsqu'elle travaille à la vitesse de service. Dans cette étude, le calcul du modèle torsionnel équivalent est basé sur la méthode empirique de BICERA. La détermination des fréquences et des modes propres de vibrations est basée sur la méthode numérique de Rutishauser. La recherche des amplitudes de vibrations forcées du premier mode est basée sur la méthode directe de Tomas. Les résultats numériques montrent une coïncidence de la première fréquence propre de la ligne d'arbre avec la fréquence de rotation (résonance). Des solutions ont été proposées.

Pasricha et al. [9], ont étudié l'influence de la variation cyclique de l'inertie rotationnelle de l'attelage mobile du système bielle manivelle d'un moteur diesel monocylindre sur les amplitudes de vibrations de torsion de ce dernier. Les résultats numériques obtenus montrent que la variation cyclique de l'inertie du moteur des pièces à mouvement alternatif élargie la zone des vitesses d'instabilité de rotation du moteur où de grandes amplitudes ont été observées. Ainsi des vibrations dangereuses peuvent être provoquées par un phénomène de résonance secondaire dans les moteurs diesel marins. Les régions d'instabilité telles que déterminées dans l'analyse de cet article sont en concordance avec des résultats expérimentaux correspondants de Goldsbrough et Gregory.

Boysal et al. [10], ont analysé les vibrations de torsion d'un modèle non linéaire de moteur à combustion interne monocylindre à plusieurs masses. Le modèle comprend toutes les inerties des masses rigides, les paliers d'appui, les joints, les accouplements et les liaisons entre les différents composants du moteur ainsi que l'amortissement de vibrations. Il est paramétré pour permettre l'appliquer à différents moteurs réels. D'après les auteurs, cette nouvelle approche réduit la durée de conception et de développement des moteurs et supprime la nécessité de faire des tests expérimentaux du moteur, ce qui représente un coût considérable dans la conception du moteur et le processus de développement. Les résultats obtenus fournissent des historiques de la réponse dynamique de tous les éléments inertiels, tels que le piston, le volant et la bielle. Ils permettent aussi d'obtenir les vibrations de torsion du vilebrequin et le mouvement de tourbillon synchrone et asynchrone des paliers lisses. L'analyse des résultats dans le domaine fréquentiel montre l'accord avec des spectres expérimentaux généralement connus. Les résultats numériques concordent également avec la solution analytique présentée par plusieurs auteurs.

1.4 Objectifs de l'étude des vibrations de torsion des lignes d'arbres

En vibrations de torsion des lignes d'arbres, il ya trois types d'analyse : l'analyse des vibrations libres, l'analyse des vibrations forcées permanentes et l'analyse de vibrations forcées transitoires. Chaque type a des objectifs différents.

1.4.1. Objectifs de l'analyse des vibrations libres

Cette première analyse est le préalable incontournable à toute étude des vibrations de torsion forcées et, dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante [11]. Les principaux objectifs sont :

- Détermination des premières fréquences et modes propres pour éviter par la suite les phénomènes de résonances ;
- Voir l'influence d'un ou plusieurs paramètres ou composants dans la ligne d'arbres sur les fréquences et les modes propres ainsi que les amplitudes de vibrations.

1.4.2. Objectifs de l'analyse des vibrations forcées permanentes

Ce deuxième type d'analyse représente un complément du premier type d'analyse. Dans ce cas, les vibrations sont forcées par des excitations périodiques données. Ces deux premières analyses supposent ensemble que les vibrations de torsion se concrétisent par des petits mouvements autour

d'une position d'équilibre stable où chaque rotor composant la ligne d'arbre possède une **vitesse moyenne constante**. Alors, le comportement des éléments de l'installation est linéarisable autour de ce point de fonctionnement étudié. Les objectifs sont :

- Calcul des amplitudes de déplacements et de contraintes en certains points choisis et jugé important de la ligne d'arbres ;
- Analyse des contraintes en relation avec des critères de tenue à la fatigue pour estimer la durée de vie probable des installations.

1.4.3. Objectifs de l'analyse des vibrations forcées transitoires

Les régimes transitoires qui correspondent à une variation au cours du temps des vitesses moyennes des rotors (démarrage ou freinage de l'installation par exemple) peuvent entraîner des ruptures brutales à cause d'instabilités induites, la plupart du temps, par un phénomène de résonance. Moins spectaculaire, une autre de leurs conséquences peut se traduire par des dépassements locaux des limites de contraintes admissibles, conduisant à une diminution notable de la durée de vie de l'installation [11]. Le comportement pouvant être linéaire ou non. Ce type d'analyse permet :

- D'étudier l'installation sur la totalité de sa plage de fonctionnement, pour des amplitudes de vibrations quelconques. Dans la mesure où le comportement global de l'installation peut être supposé linéaire, il est possible d'utiliser le modèle développé lors des deux premières analyses. Dans ce cas, il existe d'autres approches comme le calcul de la réponse par superposition modale qui, en profitant du caractère linéaire du problème est plus efficace [11] ;
- De calculer des couples de torsion dynamiques et des charges au niveau des dentures d'engrenages au cours du démarrage ou du freinage d'une machine tournante ;
- De détermination des zones de stabilité en torsion des lignes d'arbres avec contrôle automatique de la vitesse de rotation.

1.5 Différence entre la dynamique des rotors en flexion et la dynamique des rotors en torsion

- Les machines tournantes ne sont pas actuellement instrumentées pour mesurer les vibrations de torsion. En outre, les vibrations de torsion produisent rarement des bruits ou des vibrations des parties fixes des machines tournantes. Très souvent, le premier

indicateur d'un problème de vibration de torsion est un accouplement d'arbre cassé ou un arbre cassé. Dans le cas des vibrations de flexion, la défaillance commence habituellement dans le voisinage d'une concentration de contrainte et se propage à 45 degrés à l'axe de l'arbre en raison de la fatigue du matériau [12].

- Ñ Dans les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses, les vibrations de torsion peuvent produire un niveau de bruit élevé si les engrenages deviennent régulièrement déchargés due aux fluctuations de couple qui provoquent l'usure rapide et la détérioration des surfaces des dentures d'engrenages. Le changement dans le signe du couple de torsion peut briser les dentures d'engrenage [12].
- Ñ Les vibrations de flexion sont facilement mesurables par des instruments standards ou par les vibrations transmises à des boîtiers et des fondations. Aussi, de grandes amplitudes de vibrations de flexion sont souvent remarquées dues au frottement des joints et des roues en rotation. D'autre part, les instruments de mesure des vibrations de torsion ne sont pas généralement installés, et de grandes amplitudes peuvent se produire en silence et sans effet considérable sur les boîtiers et les fondations.
- Ñ Les fréquences propres des vibrations de flexion dépendent généralement de la vitesse de rotation à cause de l'effet gyroscopique, tandis que celles des vibrations de torsion sont indépendantes de la vitesse de rotation et peuvent être mesurées avec la machine au repos si une excitation peut être fournie [12].
- Ñ Les vibrations de flexion dans les machines tournantes peuvent devenir instables dues à l'effet d'amortissement; c'est très rare pour des vibrations de torsion.
- Ñ En vibrations de flexion, l'excitation est généralement tournante et synchrone avec la vitesse de rotation telle que la force de balourd. Cette dernière n'a pas d'influence sur les vibrations de torsion, sauf indirectement dans des machines à engrenages où les vibrations de flexion produisent un couple dynamique.
- Ñ L'analyse des vibrations de flexion peut être effectuée généralement sur chaque rotor entre deux paliers dans la ligne d'arbres séparément, tandis que l'analyse des vibrations de torsion doit inclure tous les rotors dans la ligne d'arbres. Dans de nombreux cas d'analyse des vibrations de torsion, chaque disque dans la ligne d'arbre peut être considérée comme rigide.

1.6 Source d'excitation mécanique permanente

Nous nous intéressons dans ce paragraphe, aux excitations permanentes dont la variation au cours du temps est périodique. Ces excitations sont extérieures et, elles doivent apporter une énergie mécanique qui sera, dans le même temps, transformée en chaleur par les phénomènes dissipatifs.

Pour un modèle linéaire, toute excitation peut être représentée par une somme d'excitations sinusoïdales élémentaires ou harmoniques. Chacune d'elle, notée $F_q(t)$ est définie par sa pulsation Ω_q , son amplitude C_q et, sa phase ϕ_q mesurée par rapport à une origine des temps donnée. Elle s'écrit sous la forme [13]:

$$F_q(t) = C_q \cos(\Omega_q t + \phi_q)$$

Avec $\Omega_q = q\Omega$. Ω est la vitesse de rotation du rotor (rad/s), q est l'ordre de l'harmonique de la force. En pratique, il est facile d'identifier la pulsation de la force par contre, il est difficile de déterminer l'amplitude et la phase de l'excitation.

1.6.1. Excitation par système bielle-manivelle [13]

La bielle exerce sur le maneton du vilebrequin un effort périodique dont la composante tangentielle donne un couple $C(t)$ qui peut se décomposer en une composante $C_p(t)$ due à l'action de la pression du gaz sur le piston et une composante $C_i(t)$ due aux forces d'inerties associées au mouvement de la bielle et du piston. On a :

$$C(t) = C_p(t) + C_i(t).$$

Pour le couple dû à la pression du gaz C_p et pour une vitesse de rotation constante du vilebrequin, la période T_p est donnée par $T_p = \frac{2kf}{\Omega}$, avec $k = 1$ pour un moteur à deux temps ou un compresseur et $k = 2$ pour un moteur à quatre temps.

Pour le couple du aux forces d'inerties C_i et pour une vitesse de rotation constante du vilebrequin, la période τ_i est donnée par : $\tau_i = \frac{2f}{\Omega}$.

La décomposition en série de Fourier du couple C_p s'écrit :

$$C_p(t/\tau_p) = C_0 + \sum_{q=0.5}^m C_{pq} \cos(q\Omega t + \phi_{pq})$$

Dans ce cas, l'ordre q est un nombre multiple de 0.5. En général, on prend $m = 9$, c'est-à-dire que tous les harmoniques de rang supérieur à 18 ont des amplitudes relativement faibles et leurs influences peuvent être négligées [13].

Pour la plupart des moteurs à combustion interne, les amplitudes C_{pq} sont proportionnelles à la pression moyenne effective P_{me} exprimée en Pascal telle que :

$$P_{me} = \frac{P_e}{V \cdot x}$$

Avec P_e est la puissance effective du moteur en Watt, V est le volume balayé par le piston en m^3 , x est le nombre de cycles thermodynamiques par seconde.

La pression moyenne indiquée P_{mi} , exprimée en Pascal, se déduit de la pression moyenne par :

$$P_{mi} = \frac{P_{me}}{y_m}$$

Avec y_m est le rendement mécanique du moteur.

La décomposition en série de Fourier du couple C_i de période $\tau_i = \frac{2f}{\Omega}$ s'écrit :

$$C_i(t/\tau_i) = \sum_{q=1}^n a_{iq} \sin q\Omega t$$

Enfin, on constate que seulement les amplitudes des quatre premières harmoniques ont une valeur non négligeable. On prendra donc $n = 4$ dans tous les cas.

Le couple d'excitation total est la somme des deux couples C_p et C_i .

$$C(t/\dagger_p) = C_0 + \sum_{q=0.5}^m C_q$$

Avec

$$C_q = (a_{pq} + a_{iq}) \sin q\Omega t + b_{pq} \cos q\Omega t \text{ pour } q = 1, 2, 3, 4.$$

$$C_q = a_{pq} \sin q\Omega t + b_{pq} \cos q\Omega t \text{ pour } q = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5, 5.5, \dots, 9.$$

Le calcul des amplitudes de chaque harmonique du couple peut s'effectuer grâce à deux méthodes : la méthode directe et la méthode de Ker-Wilson.

La [figure 1.3](#) montre la variation du couple total C sur une période pour un cylindre d'un moteur d'une installation industrielle [13].

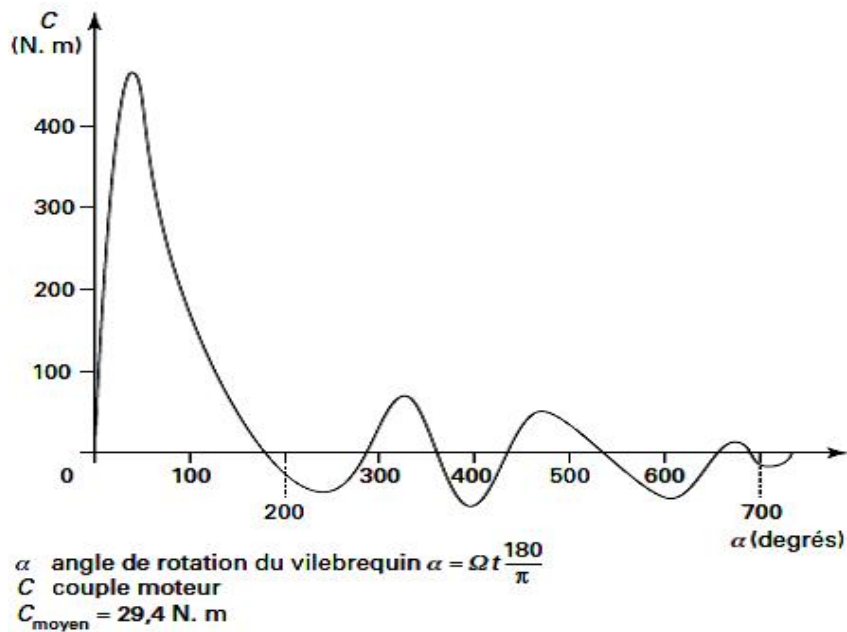


Figure 1.3 : Exemple de couple moteur **total** pour un cylindre d'un moteur d'une installation [13].

Chapitre 2

Recherche des fréquences et des modes propres des lignes d'arbres non ramifiées

Sommaire

2.1. Introduction	15
2.2. Hypothèses de modélisation	15
2.3. Equations du mouvement libre des lignes d'arbres	15
2.4. Recherche des fréquences et des modes propres	17

2.1 Introduction

Nous allons déterminer dans ce chapitre, les fréquences et les modes propres des modèles de lignes d'arbres non ramifiées, sollicitées en vibrations libres de torsion. Cette première étude est le préalable incontournable à toute étude de vibrations de torsion forcées et dans certains cas, elle peut s'avérer suffisante. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations de mouvement libre des lignes d'arbres sont obtenues en utilisant les équations de Lagrange. Nous avons choisie parmi toutes les méthodes, la méthode de **Rutishauser**, car elle présente l'avantage d'être précise et rapidement convergente lorsque les fréquences propres sont éloignées.

2.2 Hypothèses de modélisation

- Le système est conservatif ;
- Les déformations sont proportionnelles aux efforts, donc vibrations linéaires ;
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte ;
- On néglige l'effet gyroscopique, l'axe de rotation est donc principal d'inertie ;
- On néglige les vibrations de flexion des arbres, les centres de gravités des disques sont donc sur l'axe de rotation ;
- Les paliers sont considérés comme des liaisons pivot parfaites, donc rigides.

2.3 Equations du mouvement libre des lignes d'arbres non ramifiées

Dans la majorité des cas, le modèle torsionnel final obtenu, peut être représenté simplement comme l'assemblage de ressorts de torsion sans masse dont on connaît la rigidité K et la connectivité. Les extrémités de chacun d'eux sont liées à des disques indéformables d'inertie constante dont on connaît le moment d'inertie J . Le paramétrage caractérise la variation de la position et la vitesse angulaire de chaque disque du modèle. À partir des expressions de l'énergie cinétique et de déformation écrites en fonction des paramètres de vitesse et de déplacement indépendants, le formalisme de Lagrange permet d'obtenir le système différentiel représentant les vibrations libres de torsion [14].

La figure 2.1 représente le modèle torsionnel équivalent d'une ligne d'arbres non ramifiée conformément aux hypothèses cités au paragraphe 2.2. Les n disques et les tronçons d'arbre sont numérotés de gauche à droite. Dans cette figure, J_i (Kgm^2) est le moment d'inertie polaire du disque i , θ_i (rad) est la rotation du disque i par rapport à l'axe de rotation, k_i (Nm/rad) est la rigidité en torsion de l'arbre séparant les disques i et $i+1$.

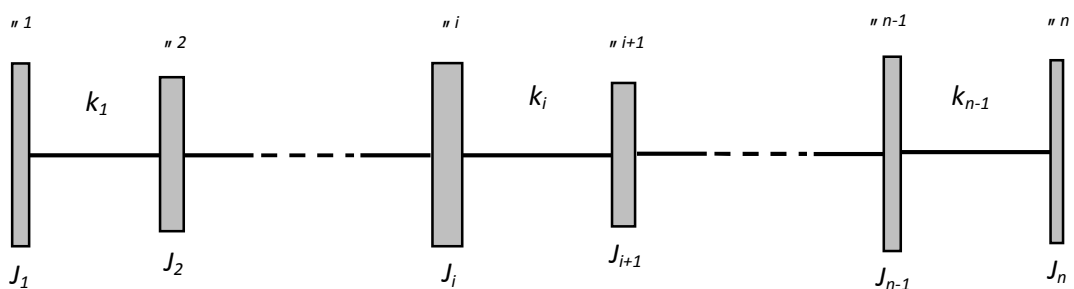


Figure 2.1 : Modèle torsionnel générique d'une ligne d'arbres non ramifiée à plusieurs degrés de liberté.

$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdot & 0 \\ & J_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & sym & \cdot & 0 \\ & & \cdot & J_n \end{bmatrix}$$

[K] est la matrice carrée symétrique des rigidités de torsion :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ & & k_2+k_3 & -k_3 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & sym & & & & & k_{n-2}+k_{n-1} & -k_{n-1} \\ & & & & & & & k_{n-1} \end{bmatrix}$$

et le vecteur des déplacement angulaire :

$$\{u\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$$

2.4. Recherche des fréquences et des modes propres

On cherche des solutions non identiquement nulles représentant à partir des conditions initiales données, les vibrations possibles des disques du modèle soumis à aucune excitation extérieure permanente [14]. Ces solutions sont de la forme :

$$u_i(t) = A_i \sin(\check{S}t + \{ \}) \quad \ddot{u}_i(t) = -\check{S}^2 A_i \sin(\check{S}t + \{ \}); \quad i=1,2,\dots, n \quad (2.6)$$

En reportant la solution (2.6) dans le système d'équation matriciel (2.5), nous obtenons :

$$([K] - \check{S}^2[M])\{A\} = 0$$

Ou encore :

$$([M]^{-1}[K] - \check{S}^2[M]^{-1}[M])\{A\} = 0 \quad (2.7)$$

Donc, si l'on désigne par [I] la matrice unité, les valeurs de ω^2 sont données par :

$$\check{S}^2[I] = [M]^{-1}[K] \quad (2.8)$$

Donc les valeurs de ω^2 cherchées sont les valeurs propres de la matrice :

$$[C] = [M]^{-1}[K] \quad (2.9)$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{J_1} & \frac{-k_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1 + k_2}{J_2} & \frac{-k_2}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2 + k_3}{J_3} & \frac{-k_3}{J_3} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{k_{n-2} + k_{n-1}}{J_{n-1}} & \frac{-k_{n-1}}{J_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{n-1}}{J_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.10)$$

Les fréquences propres et les modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté peuvent être calculés par des méthodes analytiques en mettant le polynôme caractéristique (équation aux fréquences) égal zéro. Ces méthodes deviennent pénibles pour un nombre de degré de liberté élevé. Il faut utiliser les méthodes numériques. Il existe selon la nature de la matrice [C] plusieurs méthodes pour rechercher les valeurs propres. La matrice [C] est une

matrice quasi triangulaire particulière, c'est une matrice tridiagonale. On peut donc utiliser la méthode de Rutishauser.

2.4.1 Méthode de Rutishauser [15]

Pour les lignes d'arbre simples, ou présentant une ou plusieurs ramification à chaque extrémité d'arbre, nous avons adopté l'algorithme de Rutishauser relatif aux matrices quasi triangulaire. Cette méthode présente l'avantage d'être précise et rapidement convergente [15]. Elle permet de calculer toute les fréquences propres de torsion d'un système conservatif. Outre le fait que ce procédé ne nécessite, pour son implantation sur ordinateur, qu'un nombre réduit de registres de mémoire, elle présente les avantages de méthodes itératives à convergence rapide.

a. Propriétés des matrices tridiagonales

Soit $[C]$ une matrice tridiagonale :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 & c_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_2 & c_3 & b_3 \\ & 0 & & \\ 0 & & 0 & a_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

Soit $\Delta(\lambda)$ le déterminant caractéristique de cette matrice

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1 - \lambda & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 & c_2 - \lambda & b_2 & 0 \\ 0 & a_2 & c_3 - \lambda & b_3 \\ & 0 & & \\ 0 & & 0 & a_{n-1} & c_n - \lambda \end{bmatrix}$$

Si D_{ij} est le cofacteur de l'élément situé sur la ligne i et la colonne j , nous obtenons la formule de récurrence suivante :

$$\Delta(\lambda) = (c_n - \lambda)D_{n,n} - a_{n-1}b_{n-1}D_{n-1,n}$$

Les termes symétriques par rapport à la diagonale n'interviennent que par leur produit, on peut donc les modifier à condition que leur produit reste constant. La matrice $[C_0]$ définie ci-après a donc les mêmes valeurs propres que la matrice $[C]$, mais pas les mêmes valeurs propres.

$$[C_0] = \begin{bmatrix} c_1 & a_1 b_1 & & & \\ 1 & c_2 & a_2 b_2 & 0 & \\ & 0 & 1 & c_{n-1} & a_{n-1} b_{n-1} \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

b. Suite de Rutishauser

D'après le théorème de Gauss, une matrice $[C_0]$ quasi triangulaire peut être décomposée en un produit de deux matrices $[R]$ et $[S]$ ou :

- $[R]$: est une matrice triangulaire inférieure ;
- $[S]$: est une matrice triangulaire supérieure ;

$$[C] = [R][S] = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & . & . \\ 0 & . & . \\ 0 & 0 & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & . \end{bmatrix}$$

Si l'une des matrices $[R]$ ou $[S]$ possède des 1 sur sa diagonale principale, sous cette condition, on peut donc construire la suite matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 [C_0] &= [R_1][S_1] \\
 [C_1] &= [S_1][R_1] = [R_2][S_2] \\
 &\dots\dots\dots \\
 [C_n] &= [S_n][R_n] = [R_{n+1}][S_{n+1}]
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les propriétés des éléments de cette suite sont :

- $[C_n]$ et $[C_0]$ ont les mêmes valeurs propres ;
- $[C_1], [C_2], \dots, [C_n]$ sont des matrices quasi triangulaires ;

- Lorsque $n \Rightarrow \infty$, $[C_n]$ tend vers une matrice triangulaire inferieure ;
- Les valeurs propres apparaissent donc sur la diagonale principale dans l'ordre décroissant à partir du haut.

Partant de cette approche, la matrice de départ $[C_0]$ peut être décomposée comme suit :

$$[C_0] = [R_1][S_1] = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ 1 & b_2 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & & 1 & b_{n-1} & \\ & & & & & 1 & b_n \\ 0 & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_2 & & & & \\ & 1 & s_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & 1 & s_n \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^0 & r_2^0 & & & & \\ 1 & c_2^0 & r_3^0 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & 1 & c_{n-1}^0 & r_n^0 \\ & & & & & & & 1 & c_n^0 \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Nous obtenons d'après (2.12) les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_1^0 &= b_1 & r_2^0 &= b_1 s_2 \\ c_2^0 &= s_2 + b_2 & & & r_3^0 &= b_2 s_3 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ c_n^0 &= s_n + b_n & r_n^0 &= b_{n-1} s_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les éléments b_i et s_i sont obtenus à partir des éléments c_i et r_i de la matrice de départ $[C_0]$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1^0 \longrightarrow s_2 = \frac{r_2^0}{b_1} \\ & \quad \downarrow \\ b_2 &= c_2^0 - s_2 \longrightarrow s_3 = \frac{r_3^0}{b_2} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$b_i = c_i^0 - s_i \longrightarrow s_{i+1} = \frac{r_{i+1}^0}{b_i}$$

.....

$$b_n = c_n^0 - s_n$$

La matrice suivante $[C_1] = [S_1][R_1]$ est donnée par :

$$[C_1] = [S_1][R_1] = \begin{bmatrix} 1 & s_2 & & & & \\ & 1 & s_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & 1 & s_n & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ & 1 & b_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & 0 & 1 & b_{n-1} \\ & & & & & 1 & b_n \end{bmatrix} = [R_2][S_2]$$

(2.16)

Les éléments de la nouvelle matrice $[C_1]$, sont donnés par les relations :

$$c_{i,i} = b_i + s_{i+1}, \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$c_{n,n} = b_n$$

$$c_{n+1,i} = 1 \quad \forall i \in [1, n-1] \tag{2.17}$$

$$c_{i,i+1} = s_{i+1} + b_i \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$c_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j+2 \text{ ou } j > i+2$$

La matrice $[C_1]$ est une matrice tridiagonale possède des 1 sous la diagonale principale comme la matrice $[C_0]$:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} c_1 & r_2 & & & \\ 1 & c_2 & r_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & 0 & 1 & c_{n-1} & r_n \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix} = [R_2][S_2] \quad (2.18)$$

Le processus itératif continu de la même façon afin de calculer de nouveau les éléments des matrices $[R_2]$ et $[S_2]$ jusqu'à l'obtention de la matrice $[C_n]$, ou les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans l'ordre décroissant **[8]**.

c. Test de convergence

Après chaque itération, on fait le test de convergence qui se résume à la comparaison entre la valeur c_i calculée à l'itération k et la même valeur calculée à l'itération $(k+1)$. Le test peut être formulé de la façon suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^n |c_i^k - c_i^{k+1}|}{\sum_{i=1}^n c_i^{k+1}} < v \quad (2.19)$$

En prenant $v = 10^{-16}$, les valeurs propres seront obtenues avec suffisamment de précision pour calculer les pulsations de ligne d'arbre **[15]**.

Donc la pulsation $\tilde{\omega}_i$ correspondant à la valeur propre c_i sera égale à :

$$\tilde{\omega}_i = \sqrt{|c_i|} \quad (2.20)$$

d. Déformées modales

Les valeurs propres de la matrice aux pulsations étant connues, il est possible de déterminer les vecteurs propre correspondant, ces derniers caractérisent les déformés modales (amplitudes relatives des disques) des divers modes de vibration.

Les composantes des vecteurs propres étant définies à un coefficient près, il est donc nécessaire de fixer une composante, par exemple ; l'amplitude du disque $N^o I$ sera prise égale à 1.

La matrice $[C]$ à utiliser, pour le calcul des composantes des vecteurs propres est celle définie par le produit $[M]^{-1} [K]$.

Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir de l'équation :

$$[[C] - \check{S}_i^2 [I]] [X_i] = [0] \quad (2.21)$$

Avec :

ω_i : est la pulsation propre d'ordre i

$[I]$: la matrice unité

$[X_i]$: matrice colonne des composantes : $x_{i,1} ; x_{i,2} ; \dots ; x_{i,n}$ du vecteur propre associé à la valeur propre \check{S}_i^2

$[0]$: Matrice colonne composée d'éléments tous nuls.

Nous obtenons ainsi les n relations suivantes :

$$\begin{aligned} j=1: & \quad \left(\frac{k_1}{J_1} - \check{S}_i^2 \right) x_{i,1} - \frac{1}{J_1} x_{i,2} = 0 \\ & \quad \dots\dots\dots \\ \forall j \in [2, n-1]: & \quad \frac{-k_{j-1}}{J_j} x_{i,j-1} + \left(\frac{k_j + k_{j-1}}{J_j} - \check{S}_i^2 \right) x_{i,j} - \frac{k_j}{J_j} x_{i,j+1} = 0 \\ j=n: & \quad \frac{-k_{n-1}}{J_n} x_{i,n-1} + \left(\frac{k_{n-1}}{J_n} - \check{S}_i^2 \right) x_{i,n} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

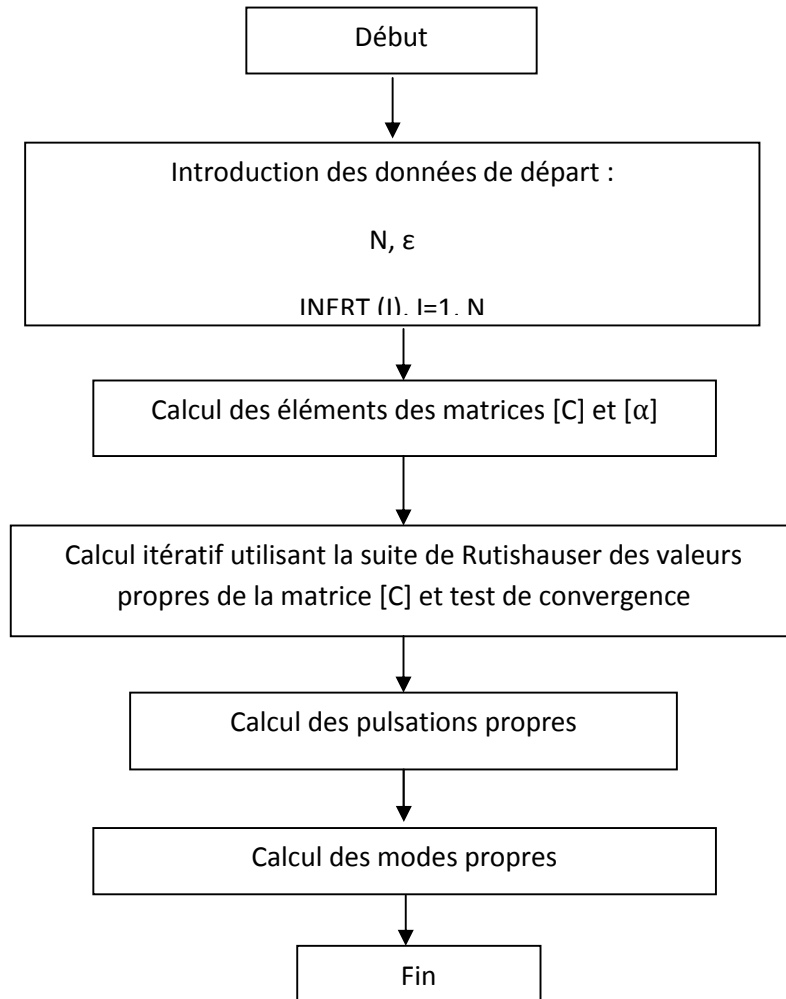
En posant $x_{i,l}=1$ rad, nous obtenons :

$$x_{i,2} = \frac{1}{k_1} (k_1 - J_1 \tilde{S}_i^2)$$

$$\forall j \in [2, n-1]; \quad x_{i,j+1} = \frac{1}{k_j} [(x_{i,j} - x_{i,j-1}) \times k_{j-1} + (k_j - J_j \tilde{S}_i^2) \times x_{i,j}]$$

(2.23)

e. Organigrammes du programme RUTHIS



Chapitre 3

Etude des vibrations forcées des lignes d'arbres non ramifiées

Sommaire

3.1	Introduction	26
3.2	Types d'amortissements dans les moteurs et leur principe de modélisation ...	26
3.3	Importance d'un harmonique du couple d'excitation produit par un système bielle-manivelle	27
3.4	Mis en équations de mouvement en vibrations forcées	30
3.5	Proposition d'une méthode de résolution	31

3.1 Introduction

L'objectif de l'étude des vibrations de torsion forcées des lignes d'arbres est de calculer les amplitudes de déplacements et de contraintes en certains points choisis et jugés important de la ligne d'arbres. L'analyse de ces déplacements et contraintes permet d'estimer la durée de vie probable des installations. Il s'agit dans ce chapitre on des vibrations causées par des excitations périodiques permanentes telles que les couples moteurs.

On peut exciter un tel système par une action extérieure. De la nature de cette action, de son point d'application dépendra la réponse du système en vibrations forcées. Dans tous les cas, la réponse sera gouvernée par les modes propres qui seront plus ou moins pondérés par les conditions même de l'excitation et de l'amortissement. Il est donc particulièrement important, avant de faire l'étude d'un système en vibrations forcées, de définir les vitesses dangereuses, la nature et l'intensité des actions mécaniques excitatrices.

Les vitesses dangereuses sont les vitesses pour lesquelles les pulsations des harmoniques de l'excitation périodique, d'amplitudes non négligeables, se mettent en sympathie avec les pulsations propres et dans le cas de l'absence de l'amortissement, sont égales à l'une des pulsations propres de la ligne d'arbre. Ces oscillations importantes sont l'origine de la destruction d'une façon générale de la ligne d'arbre.

Le modèle choisi pour cette étude est déduit du modèle utilisé pour l'étude en vibrations libres. Il est complété par la représentation des phénomènes d'amortissement présents dans l'installation et les amplitudes et les phases des excitations périodiques.

3.2 Types d'amortissements dans les moteurs et principe de leur modélisation

Le rôle de l'amortissement dans les moteurs est d'amortir les amplitudes de vibrations qui sont dues aux excitations périodiques par dissipation de l'énergie par frottement (**amortissement absolu**) ou visqueux (**amortissement relatif**). L'excitation mécanique qui représente ce phénomène est un couple noté Q_i de direction l'axe de rotation appliquant sur un disque i et proportionnel à la vitesse de vibration. On définit le coefficient d'amortissement absolu A_i qui dépend de la vitesse de vibrations absolue $\dot{\theta}_i$. On définit les coefficients d'amortissement relatifs R_{i-1} et R_i en relation avec les vitesses de vibrations relatives. L'unité des coefficients d'amortissement absolu et relatif est Nms/rad . L'amortissement induit par un accouplement viscoélastique est aussi relatif. En isolant le disque i , supposé connecté aux disques $i-1$ et $i+1$ (Figure 3.1) et en incluant tous les amortisseurs prévus, le moment Q_i caractérisant le couple de dissipation visqueuse s'écrit :

$$Q_i = -A_i \dot{\theta}_i - R_{i-1}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) + R_i(\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i) \quad (3.1)$$

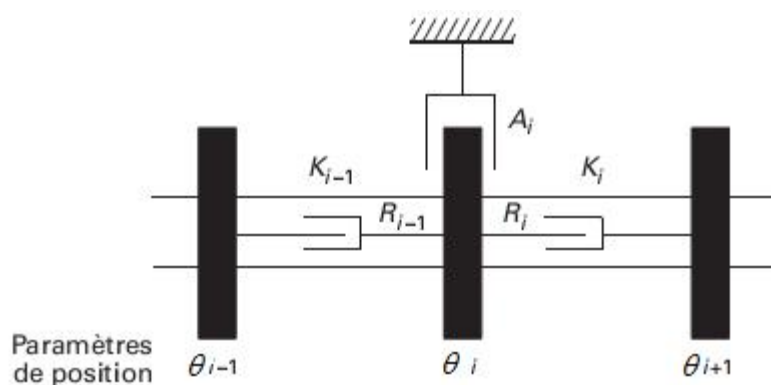


Figure 3.1 : Représentation d'un amortissement absolu et d'un amortissement relatif [14]

3.3 Importance d'un harmonique du couple d'excitation produit par un système bielle-manivelle

Pour certains types d'excitations dont celles produites par un système bielle-manivelle, il est possible de mesurer l'importance relative des harmoniques dans la réponse vibratoire globale. On en déduit une classification de nombreuses vitesses dangereuses que l'on obtient en considérant les harmoniques non négligeables du couple exercé par la bielle sur le maneton. On considère l'harmonique d'ordre q qui entraîne une vitesse dangereuse de valeur Ω (rad/s) pour le mode propre de pulsation ω_i (rad/s). On a :

$$\check{S}_i = q\Omega \quad (3.2)$$

La déformée modale associée à la pulsation propre ω_i est représentée par le vecteur $\{X_i\}$ tel que :

$$\{X_i\} = \begin{Bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,n} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

avec $x_{i,1} = 1$ est une valeur normalisée.

Pour le cylindre numéro ℓ du moteur à m cylindres, le couple harmonique d'ordre q s'écrit [14] :

$$C_{\ell q}(t) = C_q \cos(q\Omega t + S_{\ell q}) \quad (3.4)$$

Avec $S_{\ell q}$ est l'angle de déphasage. On suppose que l'amplitude C_q est constante pour tous les cylindres du moteur. Cela impose une géométrie identique pour chaque attelage mobile ainsi que, pour chaque cylindre, un cycle thermodynamique identique et stabilisé [14].

L'importance de l'harmonique du couple d'excitation d'ordre q , pour la vitesse dangereuse Ω , relative à la pulsation propre ω_i , est égale au travail du couple élastique développé par l'ensemble des couples harmoniques de rang q de chaque cylindre. Ce travail est maximal à la résonance [14].

3.3.1 Cas d'un seul cylindre

Dans les conditions définies précédemment et en choisissant correctement l'origine du temps, le déplacement angulaire du disque correspondant au cylindre numéro ℓ s'écrit :

$$\theta_{\ell}(t) = \Theta_{\ell} \cos(q\Omega t) \quad (3.5)$$

L'expression du travail du couple élastique est :

$$W_e = \int_0^{2f/S_i} C_q \cos(q\Omega t + S_{\ell q}) d_{n\ell}$$

En utilisant les expressions (3.2) et (3.5), après intégration, on obtient :

$$W_e = f C_q \Theta_\ell \sin S_{\ell q} \tag{3.6}$$

La valeur maximale de W_e est obtenue à la résonance pour $S_{\ell q} = f/2$. L'importance relative de cet harmonique est donc :

$$\boxed{W_{e\max} = f C_q \Theta_\ell} \tag{3.7}$$

Donc à la résonance, l'excitation et le déplacement sont déphasés de $\pi/2$.

3.3.2 Cas de plusieurs cylindres

Pour éviter des lourdeurs au niveau de la présentation, on suppose que les numéros des disques et des cylindres sont consécutifs et varient entre 1 et m (indice de sommation ℓ). On calcule le déphasage angulaire entre le couple de l'harmonique d'ordre q du cylindre ℓ par rapport à celui du cylindre 1. L'expression du couple pour chaque cylindre est :

$$\begin{aligned}
 C_{1q}(t) &= C_q \cos(q\Omega t + S_{1q}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_{\ell q}(t) &= C_q \cos(q\Omega t + S_{\ell q})
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

La combustion dans le cylindre 1 débute à l'instant t_1 , alors qu'elle débute à l'instant t_ℓ dans le cylindre ℓ . Les couples délivrés par deux cylindres étant identiques, on a :

$$C_{1q}(t_1) = C_{\ell q}(t_\ell)$$

Soit : $C_q \cos(q\Omega t_1 + S_{1q}) = C_q \cos(q\Omega t_\ell + S_{\ell q})$

On en déduit : $q\Omega t_1 + S_{1q} = q\Omega t_\ell + S_{\ell q}$

Enfin : $S_{\ell q} = S_{1q} - q\Omega(t_\ell - t_1)$

Le terme $\Omega(t_\ell - t_1)$ représente l'angle dont a tourné le vilebrequin entre le début de la combustion au cylindre 1 et le début de la combustion au cylindre ℓ . Cet angle est calculable à partir du maillage du vilebrequin ainsi que de l'ordre d'allumage. On pose :

$$S_{1\ell} = \Omega(t_\ell - t_1)$$

alors

$$S_{\ell q} = S_{1q} - qS_{1\ell} \quad (3.9)$$

Le calcul du travail du couple élastique maximal des couples harmoniques d'ordre q pour la déformée du mode de pulsation \tilde{S}_i conduit à chercher la valeur maximale de l'intégrale suivante :

$$W_e = \int_0^{2f/q\Omega} C_q \sum_{\ell=1}^m \cos(q\Omega t + S_{\ell q}) d_{n_\ell} \quad (3.10)$$

Pour un mode propre donné, tous les disques vibrent à la même pulsation et en phase ou en opposition de phase. L'angle $S_{\ell q}$ est donc identique pour tous les disques [14]. Sa valeur à la résonance, assure le maximum de W_e , on obtient :

$$W_{e_{\max}} = \frac{f C_q}{q\Omega} \sqrt{\left(\sum_{\ell=1}^m \Theta_\ell \cos(qS_{1\ell}) \right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^m \Theta_\ell \sin(qS_{1\ell}) \right)^2} \quad (3.11)$$

Alors, l'importance de l'harmonique q relatif à la vitesse dangereuse Ω dépend :

- de l'ordre d'allumage et du maillage du vilebrequin ;
- de l'amplitude C_q du couple harmonique d'ordre q ;
- des amplitudes relatives Θ_ℓ associées au mode propre de pulsation $\tilde{S}_i = q\Omega$.

Les importances permettent de sélectionner les harmoniques associés aux régimes véritablement dangereux et limitent les calculs en vibrations forcées aux seuls harmoniques dangereux [14].

3.4 Mis en équations de mouvement en vibrations forcées

Par rapport au système différentiel obtenu lors de l'étude en vibrations libres, il s'agit de tenir compte de l'énergie dissipée par les amortisseurs relatifs et absolus ainsi que des couples d'excitation périodiques qui sont appliqués aux disques du modèle. De manière formelle, il est possible de définir l'énergie de dissipation E_d , en supposant un amortisseur absolu défini au niveau du disque i (Figure 3.2) et un amortisseur relatif placé entre les disques i et $i + 1$, l'expression de E_d s'écrivent :

$$2E_d = \sum_{i=1}^n A_i \dot{u}_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} R_i (\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1})^2 \quad (3.12)$$

Les expressions de l'énergie cinétique E_c des disques et de l'énergie de déformation élastique E_e des ressorts de torsion sont identiques à celles écrites lors de l'étude en vibrations libres.

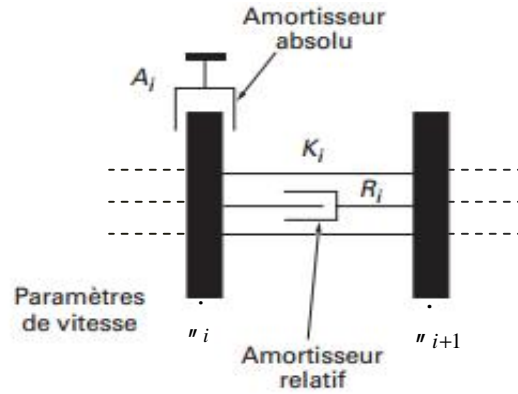


Figure 3.2 – Définition des fonctions de dissipation élémentaires [13]

Dans ces conditions, l'équation différentielle écrite pour le disque i est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial E_e}{\partial u_i} + \frac{\partial E_d}{\partial u_i} = C_i \quad (3.13)$$

Le couple C_i représente l'excitation périodique appliquée au disque i . On obtient le système différentiel suivant que l'on présente sous forme matricielle générale (3.14) :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (3.14)$$

Avec $[M]$ est la matrice de masse diagonale, $[C]$ est la matrice d'amortissement symétrique, $[K]$ est la matrice de rigidité symétrique et $\{F\}$ est le vecteur second membre des couples excitateurs.

3.5 Proposition d'une méthode de résolution

Pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires du deuxième ordre (3.14), nous proposons la méthode d'intégration numérique de Newmark. Cette méthode permet de calculer l'état du système à un instant donné $t + \Delta t$ en fonction de leur état à l'instant t . Le système (3.14), à l'instant $t + \Delta t$, s'écrit :

$$[M] \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + [K] \{u\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (3.15)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les variations des déplacements et vitesses angulaires s'écrivent [16]:

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \Delta t \{\dot{u}\}_t + \Delta t^2 (0,5 - S) \{\ddot{u}\}_t + S \Delta t^2 \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1 - \chi) \Delta t \{\ddot{u}\}_t + \chi \Delta t \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \quad (3.17)$$

Avec χ et S sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt et le pas du temps d'intégration. Remplaçons les expressions (3.16) et (3.17) dans (3.15), après factorisation on obtient :

$$[S] \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{u}^*\}_{t+\Delta t} + [K] \{u^*\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (3.18)$$

Avec

$$[S] = [M] + \chi \Delta t [C] + S \Delta t^2 [K]$$

$$\{\dot{u}^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1 - \chi) \Delta t \{\ddot{u}\}_t \quad (3.19)$$

$$\{u^*\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \Delta t \{\dot{u}\}_t + (0,5 - S) \Delta t^2 \{\ddot{u}\}_t$$

Multiplions (3.18) par $[S]^{-1}$, nous obtenons :

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = \{F^*\}_{t+\Delta t} - [U] \{\dot{u}^*\}_{t+\Delta t} - [V] \{u^*\}_{t+\Delta t} \quad (3.20)$$

Avec

$$\{F^*\}_{t+\Delta t} = [S]^{-1} \{F\}_{t+\Delta t}$$

$$[U] = [S]^{-1} [C] \quad (3.21)$$

$$[V] = [S]^{-1} [K]$$

Remarque

Le choix des constantes $\chi = 1/2$, $S = 1/6$, est équivalent à l'interpolation linéaire des accélérations $\{\ddot{u}\}_{\ddagger} = \{\ddot{u}\}_t + \ddagger \left(\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{u}\}_t \right) / \Delta t$ dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. De même pour $\chi = 1/2$, $S = 1/4$, correspond à adopter une valeur des accélérations moyennes $\{\ddot{u}\}_{\ddagger} = \left(\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{u}\}_t \right) / 2$ sur l'intervalle. L'algorithme de l'accélération moyenne est le schéma *inconditionnellement stable de précision maximale* [16].

Chapitre 4

Exemple d'adaptation d'une ligne d'arbre d'un moteur d'automobile à quatre temps

Sommaire

4.1	Introduction	34
4.2	Schéma et modèle de la ligne d'arbre du moteur	34
4.3	Pulsations et modes propres de la ligne d'arbre du moteur	36
4.4	Harmoniques dangereux et vitesses critiques	39
4.5	Etude des vibrations forcées de la ligne d'arbre du moteur	41
4.6	Algorithme de résolution	42
4.7	Quelques résultats des vibrations forcées	43

4.1 Introduction

L'étude des vibrations libres permettra le calcul des premières pulsations propres et des déformées modales associées et déduire les harmoniques dangereux et vitesses critiques. Ces résultats permettent une première prévision du comportement vibratoire de la ligne d'arbres dans la mesure où, par ailleurs, un bilan des pulsations des excitations extérieures sera réalisé. L'étude des vibrations permanentes, forcées par des excitations périodiques, a pour objectifs des calculer les amplitudes des déplacements et contraintes on des point importantes sur la ligne d'arbres.

4.2 Schéma et modèle de la ligne d'arbre du moteur

Il s'agit d'une ligne d'arbre d'un moteur d'automobile quatre cylindres à cycle quatre temps à allumage commandé présentée par le [schéma 4.1](#) et issu de la référence [\[14\]](#). Le frein est électrique de type Schenck. La liaison entre le moteur et le frein est assurée par un accouplement élastique.

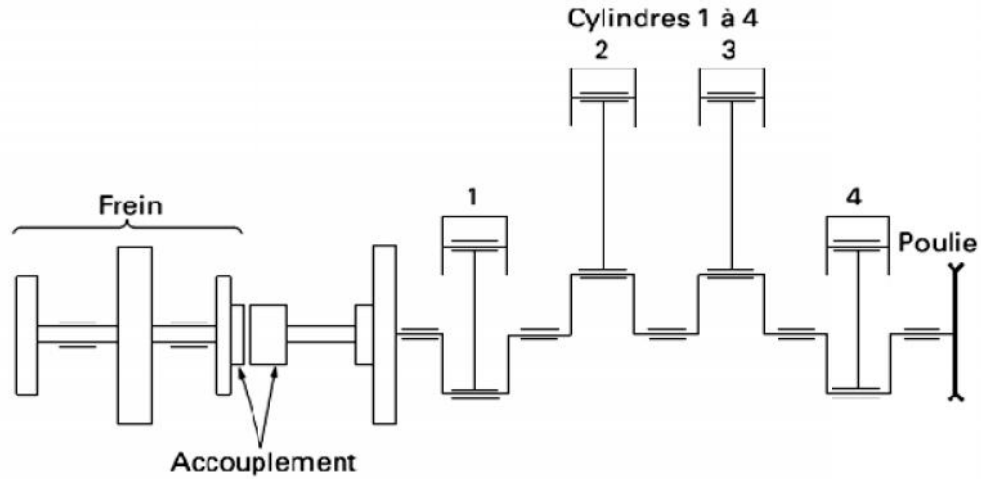


Figure 4.1 : Schéma cinématique du moteur d'automobile [14].

On a choisi le modèle à deux disques par couple pour le vilebrequin. Un troisième disque est ajouté à chaque couple pour représenter l'inertie de la bielle et du piston qui y sont rattachés [17]. Les moments d'inertie $J_7 = J_{10} = J_{13} = J_{16}$ de ces disques équivalents à l'équipage bielle-piston s'obtiennent à partir de la formule suivante [17] :

$$J_7 = J_{10} = J_{13} = J_{16} = J_e = \left(\frac{1}{2} m_p + \frac{3}{4} m_b + \frac{1}{2} \frac{J}{L^2} \right) R^2$$

Avec $m_p = 0.51$ kg est la masse du piston, $m_b = 0.648$ kg est la masse de la bielle, $L = 136.5$ mm est la distance entre l'axe du pied et celui de la tête de bielle, $R = 42$ mm est le rayon de la manivelle, $J = 0.004$ N m s² est le moment d'inertie de la bielle par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe du vilebrequin.

La valeur du moment d'inertie de chaque disque équivalent à l'équipage mobile bielle-piston est :

$$J_e = \left(\frac{1}{2} \times 0.51 + \frac{3}{4} \times 0.648 + \frac{1}{2} \times \frac{0.004}{(0.1365)^2} \right) \times (0.042)^2 = 0.0015 \text{ N.m.s}^2$$

Le modèle torsionnel équivalent du schéma cinématique 4.1 est présenté par la figure 4.2. Les caractéristiques inertielles et rigidités torsionnelles du modèle sont indiquées dans le tableau 4.1 [14].

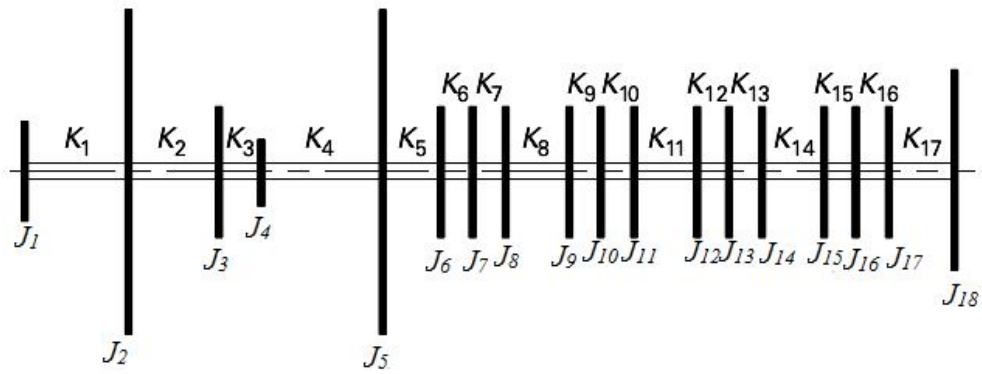


Figure 4.2 : Modèle torsionnel équivalent du schéma cinématique 4.1 [14].

Tableau 4.1: Inerties et rigidités torsionnelles équivalentes de la ligne d'arbre de la figure 4.2 [14]

N° du disque	Inertie torsionnelle (N.m.s ²)	N° de l'arbre	Rigidité torsionnelle (N.m/rad)
1	0.98×10^{-2}	1	0.285×10^6

2	0.14		
		2	0.285×10^6
3	0.1475×10^{-1}		
		3	0.21×10^4
4	0.25×10^{-2}		
		4	0.205×10^5
5	0.1476		
		5	0.4302×10^7
6	0.343×10^{-2}		
		6	0.912×10^7
7	0.15×10^{-2}		
		7	0.9124×10^7
8	0.145×10^{-2}		
		8	0.22147×10^7
9	0.1175×10^{-2}		
		9	0.9124×10^7
10	0.15×10^{-2}		
		10	0.9124×10^7
11	0.345×10^{-2}		
		11	0.22147×10^7
12	0.345×10^{-2}		
		12	0.9124×10^7
13	0.15×10^{-2}		
		13	0.9124×10^7
14	0.1175×10^{-2}		
		14	0.22147×10^7
15	0.145×10^{-2}		

		15	0.9124×10^7
16	0.15×10^{-2}		
		16	0.9124×10^7
17	0.343×10^{-2}		
		17	0.22147×10^7
18	0.5×10^{-2}		

4.3 Pulsations et modes propres de la ligne d'arbre du moteur

Avant de réaliser l'étude en vibrations forcées, on doit commencer par l'analyse en vibrations libres. Les pulsations propres et les déformées modales sont obtenus en utilisant la méthode de Rutishauser (voir chapitre 2). Le calcul s'effectue à partir d'un programme FORTRAN existant [7,8] mais adaptés à notre modèle. Les résultats des dix premières pulsations propres sont présentés dans le tableau 4.2, alors que ceux des trois premiers modes propres sont présentés dans le tableau 4.3.

Tableau 4.2 : Pulsations propres de la ligne d'arbres de la figure 4.2		
Modes	Pulsations propres (rad/s)	
	(rad/s)	(Hz)
1	148.63	23.65
2	3021.50	480.90
3	4591.85	730.83
4	5416.51	862.09
5	5615.04	893.68
6	14967.79	2382.26
7	25842.24	4113.04
8	31721.21	5048.73
9	35835.02	5703.49

10	68161.02	10848.48
----	----------	----------

Tableau 4.3 : Modes propres de la ligne d'arbres de la figure 4.2			
N° du disque	Mode 1 $\omega_1 = 148.63 \text{ rad/s}$	Mode 2 $\omega_2 = 3021.50 \text{ rad/s}$	Mode 3 $\omega_3 = 4591.85 \text{ rad/s}$
1	1	1	1
2	0.99924	0.68607	0.27496
3	0.98763	-2.70465	-3.29807
4	-0.74045	-289.4427	0.22649
5	-0.91548	3.43519	5.14470×10^{-3}
6	-0.91562	3.75482	3.68112×10^{-4}
7	-0.91568	3.89270	-1.88797×10^{-3}
8	-0.91574	4.02467	-4.13653×10^{-3}
9	-0.91595	4.54433	-1.33429×10^{-2}
10	-0.91600	4.66512	-1.55413×10^{-2}
11	-0.91605	4.77891	-1.76859×10^{-2}
12	-0.91621	5.17975	-2.59402×10^{-2}
13	-0.91624	5.25916	-2.77369×10^{-2}
14	-0.91626	5.33068	-2.94375×10^{-2}
15	-0.91637	5.59951	-3.61144×10^{-2}
16	-0.91639	5.65664	-3.76140×10^{-2}
17	-0.91641	5.70528	-3.89833×10^{-2}
18	-0.91645	5.82500	-4.33514×10^{-2}

On présente sur la [figure 4.3](#), le premier mode de vibration de torsion de la ligne d'arbres du moteur. L'analyse de cette figure montre que le nœud de vibrations est situé au niveau de l'accouplement élastique de faible rigidité (voir [tableau 4.1](#)). C'est logique car, l'accouplement est situé entre deux disques de grandes inerties J_2 (frein) et J_5 (volant moteur) (voir [tableau 4.1](#)). Or, d'une manière générale, les accouplements élastiques de liaison sont montés près des disques de grandes inerties et les nœuds de vibrations sont presque toujours localisés dans les accouplements.

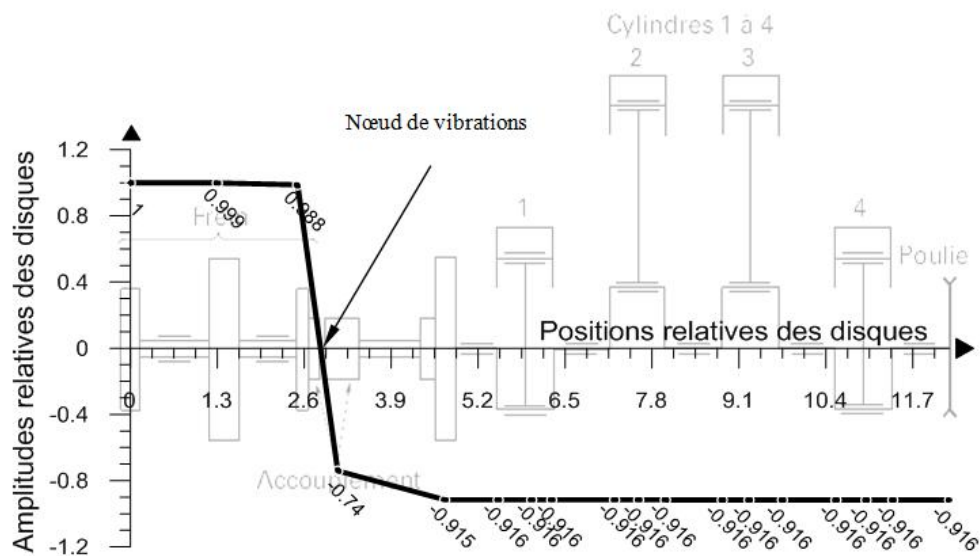


Figure 4.3 : Déformée modale du premier mode du modèle de la figure 4.1

La [figure 4.4](#), représente la déformée modale du deuxième mode de vibrations. L'analyse près de ce mode de vibration montre :

- Deux nœuds de vibrations, l'un près de l'accouplement et l'autre près du volant moteur ;
- Une grande valeur d'amplitude du disque J_4 qui correspond au demi-accouplement, donc une grande quantité d'énergie élastique est emmagasinée dans l'accouplement.

Pour la [figure 4.5](#) qui représente la déformée modale du troisième mode propre de vibrations, il ya trois nœuds de vibrations : le premier près de J_2 , le deuxième au niveau de l'accouplement et le troisième près du volant moteur.

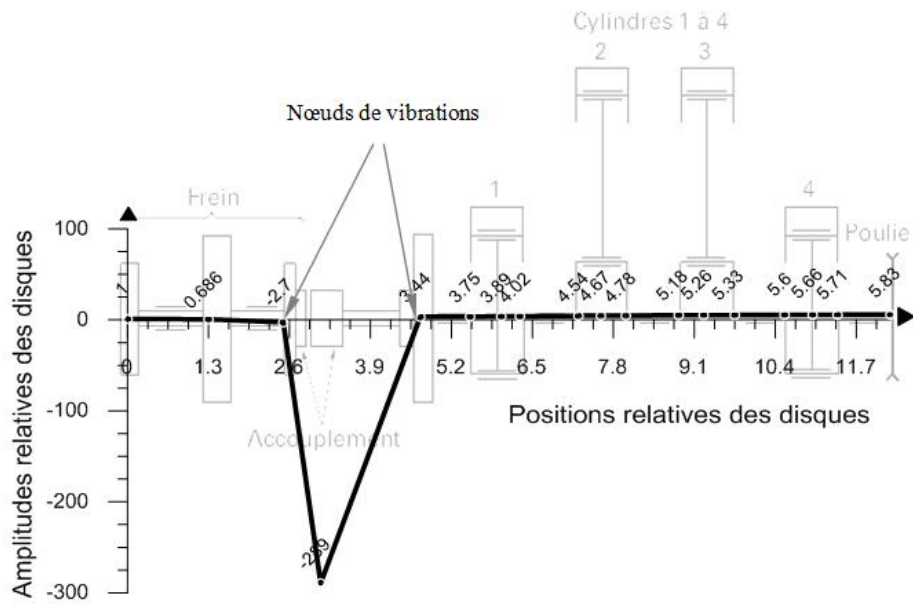


Figure 4.4 : Déformée modale du deuxième mode du modèle de la figure 4.1

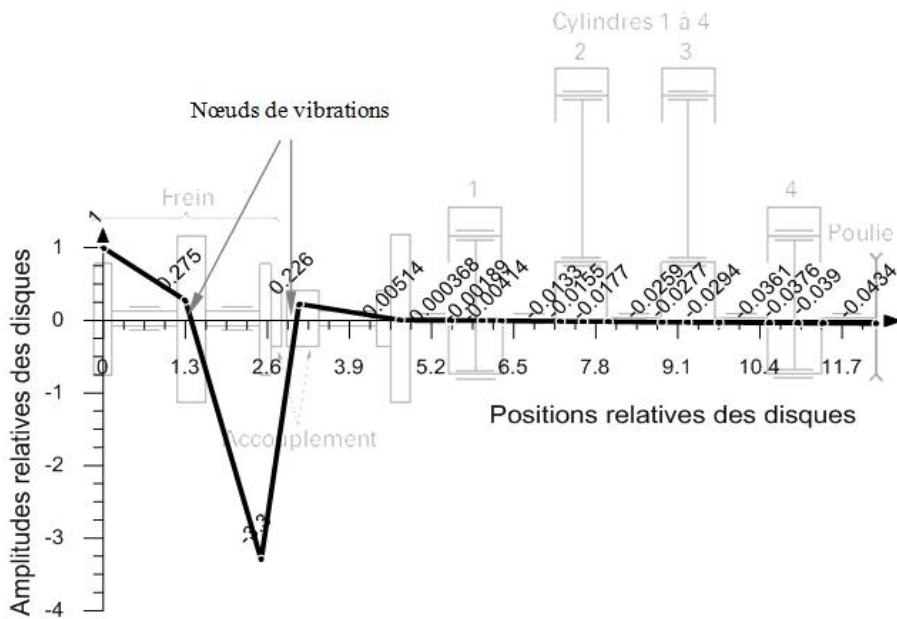


Figure 4.5 : Déformée modale du troisième mode du modèle de la figure 4.1

4.4 Harmoniques dangereux et vitesses critiques

La plage de fonctionnement de ce moteur est comprise entre **600** et **5500** tr/min. Nous limitons l'exploration aux deux premiers modes. Dans le [tableau 4.4](#), on présente les rangs q des harmoniques dangereux, les vitesses critiques N_{cr} , les amplitudes des couples harmoniques correspondants C_q résultant de la décomposition en série de Fourier du couple [14] et importances des harmoniques pour les deux premiers modes calculées par l'expression (3.6) du chapitre 3. L'analyse des résultats de ce tableau montre que les vitesses de rotation du vilebrequin **particulièrement dangereuses** pour le moteur sont égales à :

- **710** tr/min (importance **2.36**, harmonique **2**) pour le premier mode ;
- 3608 tr/min (importance 0.0417, harmonique 8) ainsi que 4811 tr/min (importance 0.097, harmonique 6) pour le deuxième mode.

Tableau 4.4 : Harmoniques dangereux, vitesses critiques, amplitudes des couples harmoniques et importances des harmoniques pour les deux premiers modes												
Rangs des harmoniques dangereux q	Mode N° 1 $f = 23.65$ Hz				Mode N° 2 $f = 480.90$ Hz							
	0.5	1	1.5	2	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9
Vitesses critiques N_{rc} (tr/min)	2840	1420	946	710	5248	4811	4441	4124	3849	3608	3396	3207
Amplitudes des couples harmoniques C_q (N.m) [14]	59.22	63.96	47.91	30.57	5.64	4.78	3.77	3.12	2.55	2.06	1.67	1.57
Importance des harmoniques	0.001	0.0002	0.0007	2.36	0.011	0.097	0.0077	0.0012	0.0049	0.0417	0.0032	0.006

La [figure 4.6](#), représente l'histogramme de l'importance de l'harmonique dangereux (voir [tableau 4.4](#)), calculé par l'expression (3.6) du chapitre 3. Les importances permettent de sélectionner les harmoniques véritablement dangereux, et limitent les calculs en vibrations forcées aux seuls harmoniques dangereux.

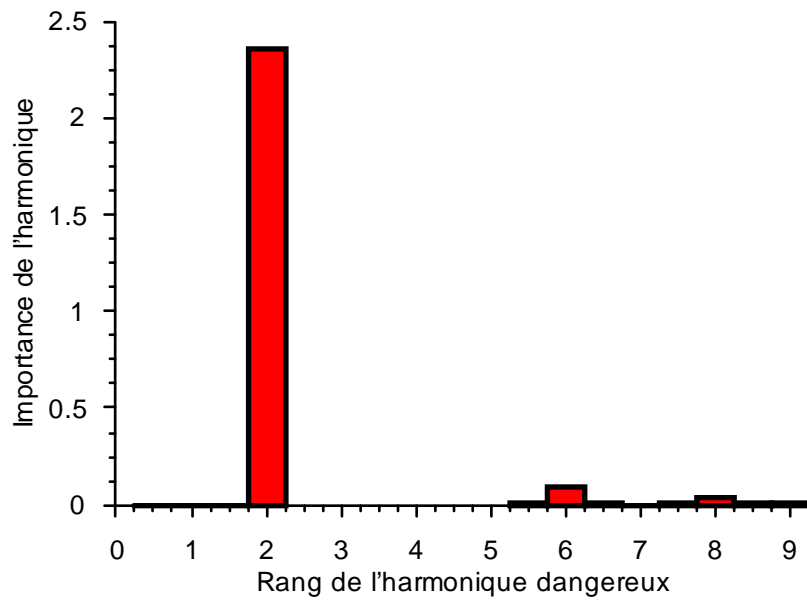


Figure 4.6 : Importance des l'harmoniques dangereux

4.5 Etude des vibrations forcées de la ligne d'arbre du moteur

En utilisant le même modèle des vibrations libres, en rajoutant seulement les couples excitateurs et les amortissements. On ne dispose plus des amortissements relatifs des arbres donc ils sont négligés. On ne considère que les amortissements absolus A , placés au niveau de chaque attelage mobile bielle-piston et supposés identiques (voir figure 4.7).

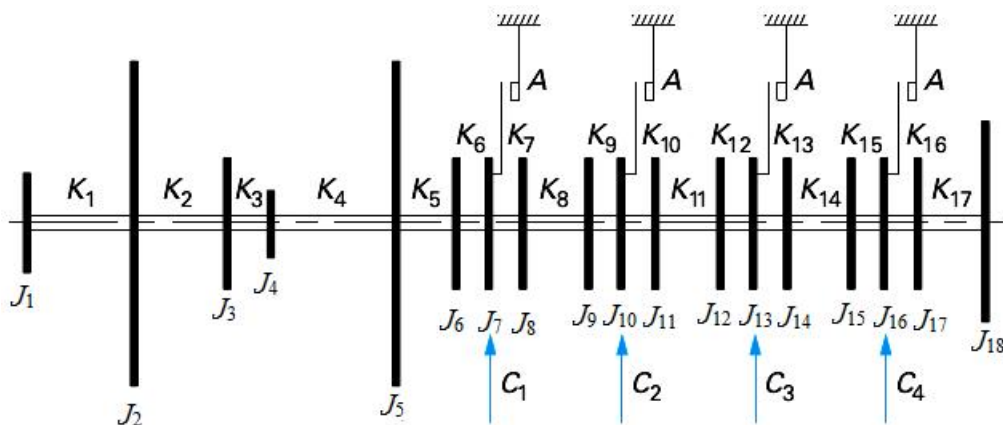


Figure 4.7 : Modèle torsionnel équivalent pour l'étude des vibrations forcées du schéma cinématique du moteur d'automobile de la figure 4.1

Les couples d'excitation $C_{\ell q}(t)$ sont dus au couple harmonique d'ordre q du couple moteur. Ils sont appliqués au niveau des quatre disques N° 7, 10, 13 et 16 du modèle de la figure 4.6 dont les inerties sont égales à l'inertie moyenne de l'attelage bielle-piston.

Pour le cylindre ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), le couple appliqué est égale à :

$$C_{\ell q}(t) = C_q \cos(q\Omega t + S_{\ell q})$$

(4.1)

Avec :

C_q : Amplitude de l'harmonique dangereux d'ordre q ;

Ω : Vitesse de rotation moyenne du vilebrequin (rad/s);

$S_{\ell q}$: Phase initiale du couple moteur d'ordre q pour le cylindre ℓ au temps $t = 0$ s. Le déphasage $S_{\ell q}$, exprimé en radians, est calculé à partir de l'expression (3.9) du chapitre 3 :

$$S_{\ell q} = S_{1q} - qS_{1\ell}$$

(4.2)

Les valeurs de q , Ω et C_q sont indépendantes du cylindre considéré.

Après formulation des équations de mouvement du [modèle 4.7](#), on obtient le système différentiel suivant (voir chapitre 3) :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (4.3)$$

Avec $[M]$, $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$ sont donnés dans l'**annexe 1**. La résolution du système (4.3) est effectuée par la méthode de Newmark dont les détails sont présentés dans le chapitre 3.

4.6 Algorithme de résolution

-
- Lecture des données de départ :
 - Nombre de disques n
 - Inerties $J_i, i = 1, 2, \dots, n$

- Raideurs $k_i, i = 1, 2, \dots, n-1$

- Choix :
 - Choix de l'harmonique dangereux q et de l'amplitude C_q de son couple
 - Choix de l'amortissement absolu A
 - Choix de la phase S_{1q} du couple harmonique du cylindre 1
 - Choix de la vitesse de rotation N
 - Choix des paramètres de stabilité de Newmark S, X
 - Choix des conditions initiales $\{v\}_0, \{\dot{v}\}_0$

- Calculs préliminaires :
 - Calcul des phases $S_{\ell q}, \ell = 2,3,4$
 - Calcul du pas de temps Δt
 - Calcul des matrices : $[M], [C], [K], [M]^{-1}, [S], [S]^{-1}, [U], [V]$
 - Calcul du vecteur $\{F\}_0$
 - Calcul de l'accélération initiale : $\{\ddot{v}\}_0$

- Pour chaque pas du temps : $t = t + \Delta t$



- Calcul de : $\{v^*\}_{t+\Delta t}, \{\dot{v}^*\}_{t+\Delta t}, \{F\}_{t+\Delta t}, \{F^*\}_{t+\Delta t}$
- Calcul de : $\{\ddot{v}\}_{t+\Delta t}, \{\dot{v}\}_{t+\Delta t}, \{v\}_{t+\Delta t}$

4.7 Quelques résultats des vibrations forcées

Nous donnons sur la [figure 4.8](#), la courbe représentant les couples d'excitations, appliqués au niveau des quatre disques du modèle 7, 10, 13 et 16 correspondants aux cylindres 1, 2, 3, et 4 respectivement, en fonction de l'angle de rotation de vilebrequin pour un cycle complet (0 à 720°) et pour l'harmonique 0.5. Les inerties sont égales à l'inertie moyenne de l'attelage mobile bielle-piston calculé précédemment. La phase des couples C_2 , C_3 et C_4 sont calculés en fonction de la phase de couple C_1 .

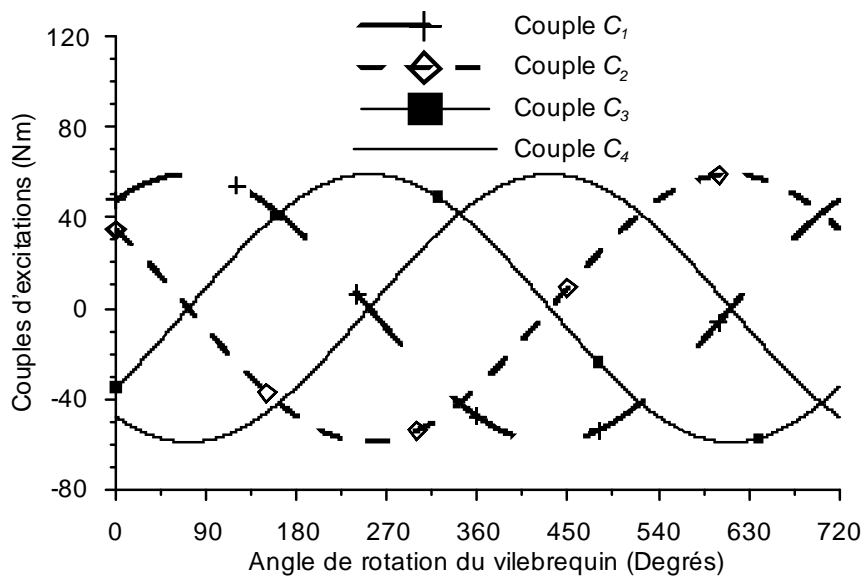


Figure 4.8 : Couples d'excitations pour les cylindres 1, 2, 3 et 4, $q=0.5$.

La [figure 4.9](#), illustre l'amplitude maximale, en degrés, du déplacement angulaire des disques 1 et 5 en fonction du rang de l'harmonique dangereux, pour un coefficient d'amortissement absolu $A=0.25$ Nms/rad. Ces amplitudes sont calculées pour les couples et les vitesses de rotation correspondants. On constate que l'amplitude maximale pour le rang 2 des deux disques est dominante sur les amplitudes des autres rangs. Pour la [figure 4.10](#), qui représente l'amplitude maximale des disques 2 et 18, on constate la même chose.

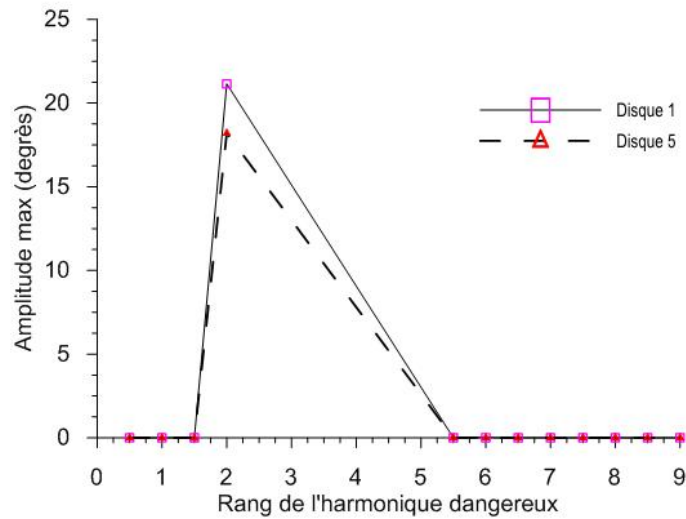


Figure 4.9 : Amplitude maximale du déplacement angulaire des disques 1 et 5 en fonction

du rang de l'harmonique dangereux, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$

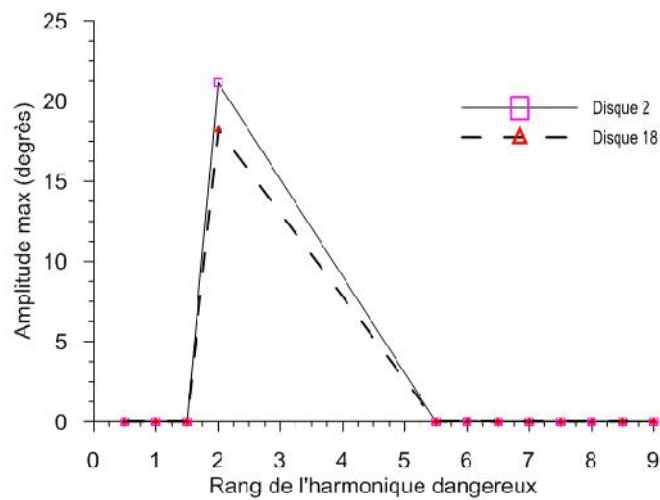


Figure 4.10 : Amplitude maximale du déplacement angulaire des disques 2 et 18 en fonction

du rang de l'harmonique dangereux, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$

La **figure 4.11**, montre la variation du déplacement angulaire des disques 1, 2, 5, 7, 10, 13, 16 et 18, en fonction du temps pour l'harmonique 1 et pour un amortissement absolu $A=0.25 \text{ Nms/rad}$ et un couple harmonique $C_1=59.22 \text{ Nm}$ et une vitesse de rotation $N=2840 \text{ tr/min}$. plusieurs constatation ont dégagées.

- La variation du déplacement angulaire est périodique et diminue dans le temps à cause de l'amortissement ;
- Il y a trop de fluctuations dans la variation du déplacement à partir du disque 5 jusqu'au disque 18, alors qu'elles sont absentes dans les déplacements des disques 1 et 2 ;
- L'effet de l'amortissement est faible sur les variations du déplacement angulaire des disques 1 et 2.
- Les amplitudes maximales pour les différents disques restent très faibles parce que l'harmonique 1 n'est pas véritablement dangereux.

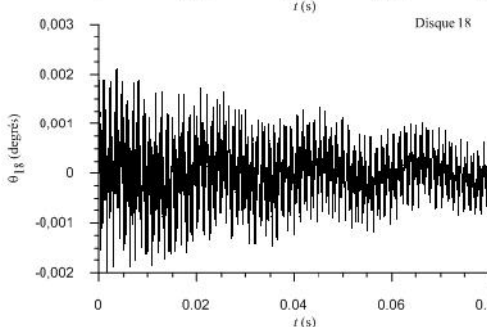
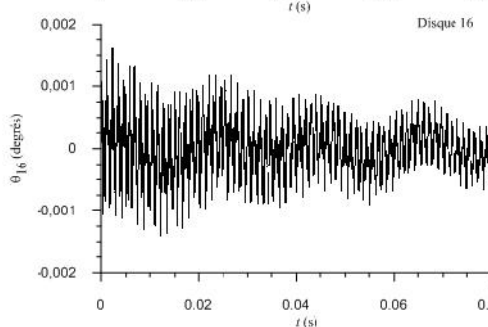
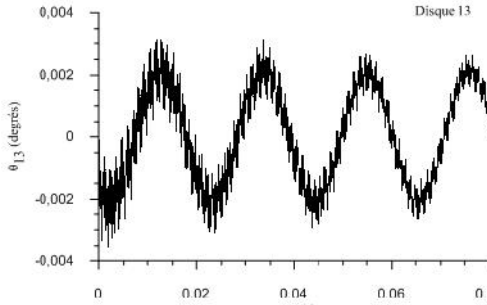
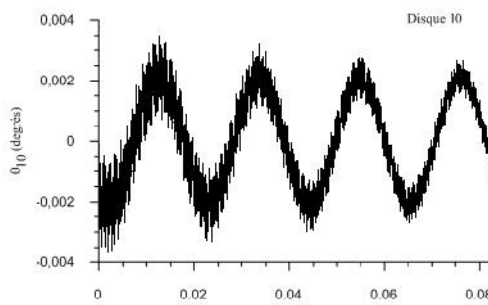
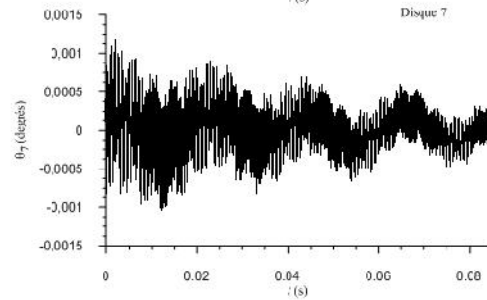
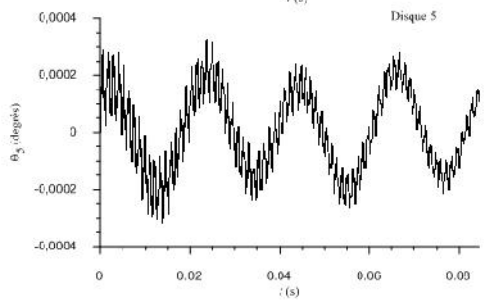
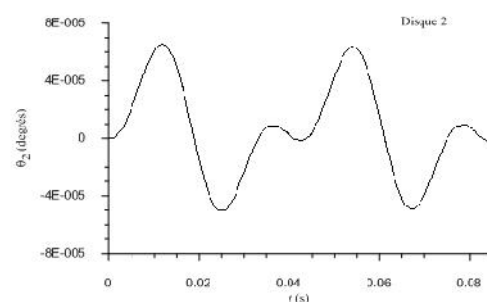
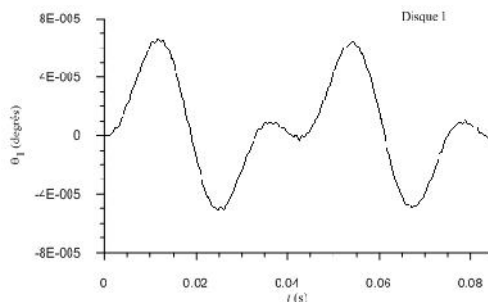
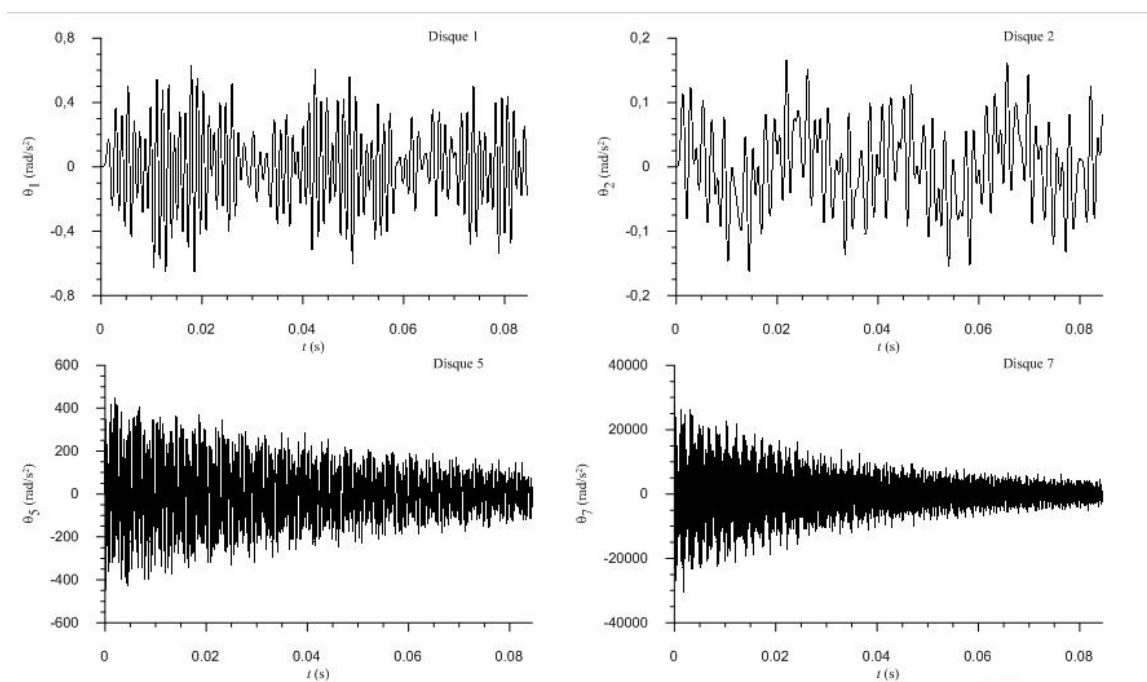


Figure 4.11 : Déplacement angulaire pour différents disques, $A = 0.25$ Nms/rad, $q = 1$,

$$C_q = 59.22 \text{ Nm} , N = 2840 \text{ tr/mn}$$

Pour la figure 4.12, qui représente à son tour la variation en fonction du temps de l'accélération angulaire des mêmes disques et pour les mêmes conditions que pour la [figure 4.11](#). Les mêmes constatations ont dégagées.



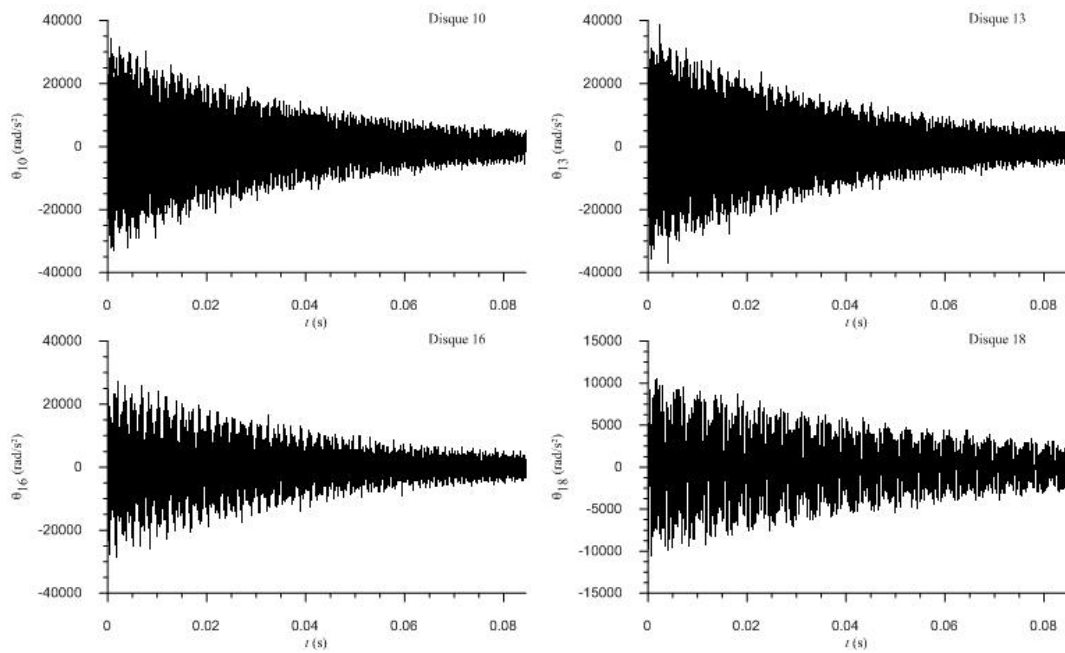


Figure 4.12 : Accélération angulaire pour différents disques, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$, $q = 1$,

$$C_q = 59.22 \text{ Nm}, N = 2840 \text{ tr/mn}$$

Pour voir l'influence de l'amortissement absolu sur la réponse dynamique, nous avons tracé sur la [figure 4.13](#), la variation du déplacement angulaire du disque 7 en fonction du temps pour les mêmes conditions que la [figure 4.12](#) et pour deux valeurs d'amortissement $A=0 \text{ Nms/rad}$ ([figure 4.13.a](#)) et $A=0.25 \text{ Nms/rad}$ ([figure 4.13.b](#)). On remarque qu'une faible variation de A diminue d'une façon importante les amplitudes de l'accélération angulaire.

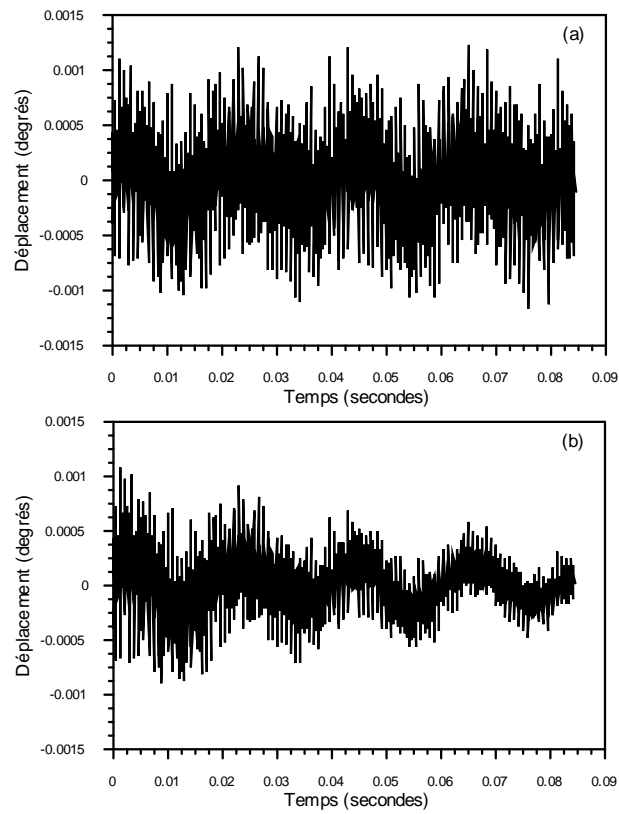


Figure 4.13 : Influence de l'amortissement absolu sur le déplacement angulaire du disque 7,

$q = 1$, $C_q = 59.22 \text{ Nm}$, $N = 2840 \text{ tr/mn}$, **(a)**: $A = 0 \text{ Nms/rad}$, **(b)**: $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$

Annexe 1

Complément du paragraphe 4.5 du chapitre 4

Sous forme matricielle, les équations de mouvement du modèle à 18 degrés de liberté de la figure 4.6 s'écrivent :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

Avec :

$$\{u\} = \{u_1, u_2, \dots, u_{18}\}$$

$$\{F\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, C_1, 0, 0, C_2, 0, 0, C_3, 0, 0, C_4, 0, 0\}$$

$$C_1 = C_q \cos(q\Omega t + S_{1q})$$

$$C_3 = C_q \cos(q\Omega t + S_{3q})$$

Conclusion Générale

Ce travail avait pour objectif, l'étude des vibrations de torsion **libres** et **forcées** d'une ligne d'arbres d'un moteur d'automobile quatre cylindres à cycle quatre temps à allumage commandé. Pour cela, nous avons présenté en particulier dans le premier chapitre, l'excitation mécanique permanente due à un système bielle-manivelle.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la formulation mathématique des équations du mouvement libre en torsion de lignes d'arbres non ramifiées à plusieurs degrés de liberté en se basant sur le formalisme de Lagrange. La résolution de ces équations a été faite par la méthode de Rutishauser.

Dans le troisième chapitre, nous avons complété la formulation mathématique des équations du mouvement libre par la représentation des phénomènes d'amortissement absolu et relatif, et des excitations périodiques des couples moteurs due au système bielle-manivelle. La méthode de **Newmark** est utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires du second ordre.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté un exemple numérique de calcul des pulsations propres et des déformés modaux ainsi que les réponses en régime permanent du moteur cité en objet. L'analyse des résultats des deux régimes de fonctionnement, nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Les fréquences et les modes propres calculés par la méthode de Rutishauser, sont identiques à ceux présentés dans la référence [14]. Cette méthode est simple de mise en œuvre et donne des résultats très précises mais elle n'est pas applicable pour des modèles ramifiés ;
- Pour les premiers modes, les nœuds de vibrations sont presque toujours localisés dans les accouplements car, ces derniers sont généralement montés près des disques de grande inertie ;
- La connaissance des pulsations propres et des sources d'excitation possibles permet de définir les vitesses dangereuses dans la plage de fonctionnement du moteur ;
- Le calcul des importances des couples harmoniques permet de définir les rangs et les vitesses **potentiellement dangereuses** dans la plage de fonctionnement du moteur. La vitesse de **710 tr/min**, dont l'importance est de **2.36** et l'harmonique **2** pour le premier mode, est la vitesse potentiellement dangereuse pour le moteur étudié ;
- Lorsqu'une ou plusieurs vitesses dangereuses appartiennent à la plage de fonctionnement, il est nécessaire d'apporter des modifications à la ligne d'arbres, soit pour rejeter les vitesses

dangereuses en dehors de la plage de fonctionnement, soit pour diminuer les amplitudes des oscillations de torsion ;

- La présence de l'amortissement est très important pour diminuer les amplitudes des déplacements et des accélérations angulaires au cours du temps ;
- L'excitation par un couple harmonique n'est pas suffisante. Il ne manque donc un relevé de pression ou du couple moteur dans un cylindre pour valider les résultats de la partie vibrations forcées permanentes.

Liste des figures

Figure 1.1 : Turbomachines reliées par des accouplements d'arbres	5
Figure 1.2 : Liens de la dynamique des machines avec d'autres disciplines	6
Figure 1.3 : Exemple de couple moteur total pour un cylindre d'un moteur d'une installation.....	13
Figure 2.1 : Modèle torsionnel générique d'une ligne d'arbres non ramifiée à plusieurs degrés de liberté	16
Figure 3.1 : Représentation d'un amortissement absolu et d'un amortissement relatif	27
Figure 3.2 : Définition des fonctions de dissipation élémentaires.....	30
Figure 4.1 : Schéma cinématique du moteur d'automobile.....	34
Figure 4.2 : Modèle torsionnel équivalent du schéma cinématique 4.1.....	35
Figure 4.3 : Déformée modale du premier mode du modèle de la figure 4.1.....	38
Figure 4.4 : Déformée modale du deuxième mode du modèle de la figure 4.1.....	39
Figure 4.5 : Déformée modale du troisième mode du modèle de la figure 4.1.....	39
Figure 4.6 : Importance de l'harmonique dangereux.....	40
Figure 4.7 : Modèle torsionnel équivalent pour l'étude des vibrations forcées du schéma cinématique du moteur d'automobile de la figure 4.1.....	41
Figure 4.8 : Couples d'excitations pour les différents cylindres 1, 2, 3 et 4 , $q = 0.5$	43
Figure 4.9 : Amplitude maximale du déplacement angulaire des disques N° 1 et N° 5 en fonction du rang de l'harmonique dangereux, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$	44

Figure 4.10 : Amplitude maximale du déplacement angulaire des disques N° 2 et N° 18 en fonction du rang de l'harmonique dangereux, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$ 44

Figure 4.11 : Déplacement angulaire des différents disques, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$, $q = 1$,
 $C_q = 59.22 \text{ Nm}$, $N = 2840 \text{ tr/mn}$ 45

Figure 4.12 : Accélération angulaire des différents disques, $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$, $q = 1$,
 $C_q = 59.22 \text{ Nm}$, $N = 2840 \text{ tr/mn}$ 46

Figure 4.13 : Influence de l'amortissement absolu sur le déplacement angulaire du disque N° 7, $q = 1$, $C_q = 59.22 \text{ Nm}$, $N = 2840 \text{ tr/mn}$, **(a)** : $A = 0 \text{ Nms/rad}$,
(b) : $A = 0.25 \text{ Nms/rad}$ 47

Résumé

Ce sujet de fin d'étude concerne l'analyse des régimes de fonctionnement **libres** et **forcés** en torsion d'une ligne d'arbres d'un moteur automobile quatre cylindres à cycle quatre temps à allumage commandé. La plage de fonctionnement de ce moteur est comprise entre 600 et 5500 tr/min. Le modèle torsionnel équivalent possède dix-huit degrés de liberté. L'objectif principal est de déterminer les rangs et les vitesses de rotation du vilebrequin particulièrement dangereuses, ainsi que les amplitudes des vibrations de torsion des différents disques pendant la résonance.

Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations du mouvement libre et forcé de la ligne d'arbres sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. La méthode de Rutishauser est utilisée pour calculer les fréquences et les modes propres, alors que la méthode de Newmark est utilisée pour résoudre le système d'équation différentielle ordinaire du second ordre en vibrations forcées par des excitations périodiques.

L'exemple d'adaptation de la ligne d'arbres du moteur montre en particulier que la vitesse de 710 tr/min, dont l'importance est de 2.36 pour l'harmonique 2, est la vitesse particulièrement dangereuse pour toute la plage de fonctionnement du moteur.

Mots clés : Vibrations de torsion, ligne d'arbres, moteur automobile, vitesse critique, méthode de Rutishauser, méthode de Newmark.

Références Bibliographiques

- [1] H. Drezig, F. Holzweibig, *"Dynamics of machinery, theory and applications"*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] Biezeno, C. B.; Grammel, R. *"Engineering Dynamics"*, Vol. 1-4, London, Blackie & Son, 1954-1956.
- [3] J. Vance, F. Zeidan, B. Murphy, *"Machinery vibration and rotordynamics"*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
- [4] Michel Lalanne, Guy Ferraris, *"Rotordynamics" Prediction in Engineering* by J. Wiley, 254 p, 2nd edition 1998. ISBN 0 471 97288 6.
- [5] A. Castilho, G. Jacquet-Richardet, M. Lalanne, *"Dynamic problems concerning the speed of rotation increase of a turbine –blower assembly"*., Journal of Sound and Vibration, 1998 215(1), 47-62
- [6] <http://www.delta-js.ch/english/software/references/>
- [7] F. Chetrah, *"Dynamique en torsion d'une installation industrielle de production d'air comprimé"*, Mémoire de Master, Université de Guelma, 2016.
- [8] A. Djebala, *"Etude du comportement vibratoire des machines de production du laminoir à froid"*, Mémoire de Magistère, Université de Guelma, 1998.
- [9] M.S. Pasricha, F.M. Hashim, *"Effect of the reciprocating mass of slider-crank mechanism on torsional vibrations of diesel engine systems"*, AJSTD, Vol. 23, Issues 1 et 2, pp. 71-81, 2006.
- [10] A. Boysal, H. Rahnejat, *" Torsional vibration analysis of a multi-body single cylinder internal Combustion engine model "*, Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, University of Bradford, Bradford, West Yorkshire, UK 1997.

- [11] H. Blanc, "*Dynamique des rotos en torsion : introduction*", technique de l'ingénieur, BM 5- 120.
- [12] J. Vance, F. Zeidan, B. Murphy, "*Machinery vibration and rotordynamics*", John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
- [13] H. Blanc, "*Dynamique des rotos en torsion : types d'excitations permanentes*", Technique de l'Ingénieur, BM 5 121.
- [14] H. Blanc, "*Dynamique des rotos en torsion : analyse des régimes de fonctionnement*", Technique de l'Ingénieur, BM 5 123.
- [15] B. Jironnet, G. louradour "*Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d'arbres*", Technique de l'ingénieur, B5770.
- [16] A. Rezaiguia, "*Modélisation du comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage des véhicules*", Thèse de Doctorat, Université de Annaba, 2008.
- [17] H. Blanc, "*Dynamique des rotos en torsion : répartition de l'inertie et de la raideur*", Technique de l'Ingénieur, BM 5 122.