

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention de diplôme de Master

Option : Maintenance Industriel

Présenté par : Belabiod Wassim

=====

**L'INFLUENCE DE DEFAUT DE FORME ET DE LA
RUGOSITE SUR LA LUBRIFICATION
HYDRODYNAMIQUE**

=====

Sous la Direction de :

Dr. BOUCHERIT Hamid & Dr. Mouassa Ahcene

Juin 2017

SOMMAIRE

- REMERCIEMENTS

- INTRODUCTION GENERALE

- CHAPITRE UN

**Etude Bibliographique des Défauts de Forme et de la Rugosité en
Lubrification Hydrodynamique**

- CHAPITRE DEUX

**Equations de la Lubrification Hydrodynamique par Fluide
Newtonien**

- CHAPITRE TROIS

**Etude Statique d'un Palier Rugueux Revêtu Infiniment Long
Lubrifié par un Fluide Piézovisqueux et Barotrope**

- CHAPITRE QUATRE

**Etude de L'influence de la Rugosité sur les Performances d'un Palier
Infiniment Long**

- CONCLUSION GENERAL

- ANNEXE

- REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- NOMENCLATURES

- TABLE DES MATIERES

- LISTE DES ILLUSTRATION ET TABLEAUX

Table des matières

Introduction Générale	1
------------------------------------	---

Chapitre Un : Etude bibliographique des défauts de forme et de la rugosité en lubrification hydrodynamique

1. INTRODUCTION	3
2. Description des surfaces	3
__ 2.1 Etat géométrique des surfaces	3
__ 2.2. Mesure des défauts :	5
__ 2.3. Caractérisation des surfaces : principaux paramètres statistiques	6
__ 2.4. Topographie des surfaces	11
__ 2.5. Modélisation de la rugosité des surfaces	16
3. METHODES D'ANALYSE DES CONTACTS RUGUEUX LUBRIFIES	19
__ 3.1. Méthode stochastique	20
__ 3.2. Méthode déterministe	22
__ 3.3 Méthode d'homogénéisation	24
4. CONCLUSIONS	25

Chapitre Deux : Equations de la Lubrification Hydrodynamique par Fluide Newtonien

1. Introduction	26
2-EQUATIONS GENERALES DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE	27
__ 2-1. lois de comportement rhéologique des huiles lubrifiantes en film mince	27
__ 2-2. Equation de conservation de la masse	28
__ 2-3. Equation de conservation de la quantité de mouvement	28
3. Equations de Navier-Stokes ou équations de mouvement d'un fluide newtonien	28
3-1. Expression des équations de Navier-Stokes pour un écoulement en film mince visqueuse	29
__ 3-2. Détermination du champ de vitesses d'écoulement	31
__ 3-3. Expression des tenseurs de contraintes et des taux de déformations	33
4. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien	35
5- CONCLUSION	39

Chapitre Trois : Etude statique d'un palier rugueux revêtu infiniment long lubrifié par un fluide piézovisqueux et barotrope

1. INTRODUCTION	40
2. EXPRESSION DE L'EQUATION DE REYNOLDS DANS LE CAS D'UN PALIER RUGUEUX INFINIMENT LONG LUBRIFIE PAR UN FLUIDE NEWTONIEN PIEZOVISCEUX ET BAROTROPE.....	42
2.1. Conditions aux limites	44
2.1.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier	44
2.1.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant.....	44
a. Conditions de Sommerfeld	44
b. Conditions de Gümbel (demi-Sommerfeld)	45
c. Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber	45
3. EXPRESSION DE L'EPaisseur DU FILM.....	47
a) Palier lisse et rigide.....	47
b) Palier compliant (déformable).....	49
c) Palier rugueux.....	50
4. PERFORMANCES STATIQUES DU PALIER.....	51
4.1. Champ de pression dans le film.....	51
4.2. Action du fluide sur les surfaces de l'arbre et du coussinet.....	51
4.3. Composantes de la portance hydrodynamique	51
4.4. Couple de frottement sur l'arbre	53
4.5. Angle de calage.....	53
4.6. Puissance dissipée.....	54
5. LOIS DE VARIATION VISCOSITE-PRESSION ET DENSITE-PRESSION	54
5.1. Lois de variation viscosité-pression	55
5.2. Loi de variation densité-pression	57
6. SOLUTION DU PROBLEME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE EN REGIME ISOTHERME	58
6.1. Equation de Reynolds en variables sans dimension	58
6.2. Equation géométrique adimensionnée	59
6.3. Performances statiques du palier sans dimensions	59
7- CONCLUSION.....	60

**Chapitre Quatre : étude de l'influence de la rugosité sur les performances d'un palier
infiniment long**

1. INTRODUCTION	61
2. DISCRETISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTREES UNIDIMENSIONNELLES POUR UN PALIER RUGUEUX INFINIMENT LONG.....	61
3. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON LINEAIRES PAR LA METHODE ITERATIVE DE NEWTON-RAPHSON AMORTIE.....	63
___ 3.1. Equation non linéaire	64
___ 3.2. Système d'équations non linéaire	64
___ 3.3. Méthode de Newton-Raphson amortie.....	67
___ 3.4. Algorithme de Newton-Raphson amorti.....	67
___ 3.5. Calcul de la matrice jacobienne.....	68
4. CALCUL DES CARACTERISTIQUES STATIQUES.....	68
___ 4.1. Portance hydrodynamique et couple de frottement	68
___ 4.2. Calcule de la puissance dissipée	69
5- SCHEMA GENERAL DE RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERACTION FLUIDE- STRUCTURE	69
6. ETUDE PARAMETRIQUE.....	70
___ 6.1. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et piésovisqueux du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film	75
___ 6.2. Influence des rugosités de faible amplitude et de haute fréquence sur l'approximation de Reynolds	75
___ 6.3. Influence de la rugosité de surface sur les performances statiques d'un palier compliant.....	78
7. CONCLUSION.....	83
CONCLUSION GENERAL	84
ANNEXE	86

NOMENCLATURES

C : jeu radial du palier, (m)

C_c : couple de frottement sur le coussinet, (N.m)

C_d : le jeu radial d'assemblage

C_a : couple de frottement

\tilde{C}_d : est le coefficient de déformation élastique

E : Module d'Young du matériau

D_{ij} : tenseur des taux de déformation,

e : excentricité de fonctionnement, (m)

F_x, F_ϕ : Composantes de la portance hydrodynamique, (N)

h, h_0 : épaisseur du film lubrifiant, (m)

h_1 est une fonction périodique selon la forme des rugosités

\tilde{h} : épaisseur du film adimensionnée

L : longueur du palier, (m)

L_0 : l'opérateur de compliance

L_{ij} sont les coefficients de la matrice de compliance.

np : nombre de rugosité ou de périodes

O_a : Centre de l'arbre,

O_c : Centre du coussinet

p : Pression dans le film lubrifiant, (Pa)

P_0 la constante viscosité-pression de Reynolds

\tilde{p} : Pression adimensionnée,

\tilde{P}_u : puissance dissipée

R_a : Rayon de l'arbre, (m)

R_c : Rayon du coussinet, (m)

t : temps, (s)

\tilde{t}_h : l'épaisseur relative de la couche élastique (revêtement)

\tilde{U}_r : déplacement radial adimensionné

u, v, w : composantes de vecteur vitesse d'écoulement de lubrifiant, (m/s)

$u_{\text{moy}}, w_{\text{moy}}$: vitesses moyennes de l'écoulement du fluide lubrifiant, (m/s)

$\tilde{U}_{\text{moy}}, \tilde{W}_{\text{moy}}$: vitesses moyennes d'écoulement adimensionnées

\tilde{W}_0 : Portance hydrodynamique adimensionnée,

τ_{xy} et τ_{zy} : contraintes de cisaillement visqueuses.

λ et ν : coefficients de Navier

\sim : viscosité dynamique du fluide lubrifiant, (Pa.s)

\sim_0 : viscosité à la pression atmosphérique ($p = 0$)

Z : indice pression-viscosité

ε : Excentricité relative, $\varepsilon = \left(\frac{e}{C}\right)$

ϕ : Angle de calage, (rad)

θ : Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres

ω : Vitesse angulaire de l'arbre (rad/s)

ρ : Masse volumique du lubrifiant, (kg/m³)

ρ_0 : la masse volumique du lubrifiant à la pression atmosphérique.

δ_{ij} : Symbole de Kronecker ou tenseur unité

ν : Coefficient de Poisson

$\alpha_i = (\psi_i - \theta_{Li})/\beta_i$: Coefficients d'asymétrie

α_p : coefficient de piézoviscosité

\tilde{r} : amplitude de rugosité relative

INTRODUCTION GENERALE

Un système mécanique est un ensemble de pièces liées entre elles et en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces frottent les unes contre les autres et on lubrifie généralement le contact pour ainsi éviter une usure trop rapide de ces pièces.

La surface de ces pièces n'est pas lisse, car portant les traces de mouvement de la machine outils qui les a usinées. L'étude de l'influence de ses rugosités présentes sur la surface des pièces en même temps que la lubrification du contact peut contribuer à l'amélioration des performances et la durée de vie des mécanismes. Il est utile de préciser que l'existence des défauts de forme sur ces surfaces n'est pas toujours nuisible et même que certains mécanismes tels que les joints d'étanchéité, ne fonctionneraient pas sans leurs présences. Il n'en reste pas moins que leur présence modifie considérablement le comportement des machines.

Par ailleurs s'étant rendu compte que les performances et la durée de vie des pièces dépendaient largement de la qualité de leur usinage, donc de la rugosité des surfaces. Des études furent entre prises pour mieux comprendre afin de maîtriser l'influence de paramètre de rugosité des surfaces sur les systèmes mécaniques. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe ou directe et plus récemment la technique d'homogénéisation.

L'objectif principal de notre étude est d'étudier les effets de la rugosité transversale sur les caractéristiques statiques d'un palier infiniment long rugueux compliant lubrifié par fluide piésovisqueux.

L'étude résumée dans ce mémoire présente une étape vers une meilleure connaissance théorique et numérique de l'influence des effets de rugosité transversale sur les performances statiques des paliers hydrodynamiques. Elle nous conduit à la mise au point d'un programme de calcul en MS-Fortran.

Le mémoire présentant ce travail comporte quatre chapitres :

Dans le chapitre un, on va présenter dans la première partie de ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques. La seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et la méthode dite d'homogénéisation.

Dans la première partie de chapitre deux, on va rappeler les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus écrites dans le cas d'une lubrification hydrodynamique par un fluide newtonien. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on va présenter la dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien piésovisqueux et barotrope.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation de l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier infiniment long rugueux lubrifié par un fluide piezovisqueux et barotrope, la détermination de l'équation géométrique du film dans le cas d'un palier rugueux ou lisse ainsi que compliant ou rigide, les expressions des performances statiques d'un palier infiniment long et les différentes lois les plus utilisées qui nous permettent de connaître bien les variations de la viscosité et la densité en fonction de la pression.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude paramétrique. Dans la première partie de ce chapitre, on va montrer l'influence de la déformation élastique des revêtements de surface de contact due au champ de pression engendré dans le film lubrifiant ainsi que de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le pic de pression et la géométrie du film. Dans la seconde partie, une étude paramétrique de l'influence de la rugosité transversale de surface sur le champ de pression, la portance hydrodynamique, la puissance dissipée et l'angle de calage d'un palier rugueux infiniment long lubrifié par un fluide piezovisqueux.

Enfin une conclusion générale sera présentée pour rappeler l'essentiel des résultats obtenus.

1. INTRODUCTION

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques (*engineering surfaces*). La seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et la méthode dite d'homogénéisation.

2. DESCRIPTION DES SURFACES

L'étude des surfaces revêt de l'importance dans un grand nombre d'applications industrielles. Par exemple dans les procédés de fabrication par injection, le fini de surfaces du moule est un facteur important qui gouverne la qualité de la pièce. Dans certaines applications technologiques les qualités des surfaces doivent être meilleures pour garantir le bon fonctionnement du système (par exemple, le cas des pièces de frottement, d'étanchéité, de précision...). En effet, l'usure d'un joint dynamique ou d'une garniture mécanique est souvent fonction de l'état géométrique de la surface sur laquelle il vient se frotter.

En tribologie, la caractérisation, la métrologie et la simulation numérique des surfaces rugueuses constituent une étude préalable et indispensable avant d'effectuer une approche déterministe ou stochastique des contacts lubrifiés. Les techniques de caractérisation ont pour but de décrire la microtopographie des surfaces afin de mieux comprendre leurs propriétés fondamentales.

2.1 Etat géométrique des surfaces

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométriques et physico-chimiques résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les caractéristiques de l'état de surface d'une pièce peuvent intervenir de façon prépondérante sur son aptitude à remplir une fonction donnée. Le terme état de surface englobe à la fois :

- l'état géométrique de la surface défini par l'ensemble des écarts géométriques de la pièce réalisée en fabrication par rapport à celle géométriquement idéale ;
- l'état physico-chimique défini par les diverses caractéristiques de la couche superficielle : structure et texture cristallines, adsorption, etc.

Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir:

Ordre 1 : Défauts de forme et de position qui sont imputables à un manque de rectitude, à une ovalisation ou à un manque de cylindricité. Leur amplitude varie de 2.5 à plus de 100 microns et leur période est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que leur amplitude.

Ordre 2 : Défauts d'ondulation (*défauts macroscopiques*) possédant généralement un caractère périodique dû essentiellement à des vibrations de basses fréquences de la pièce et/ou de l'outil générateur. La période de ces défauts est de quelques ordres de grandeur plus grande que leur amplitude, soit de 0,1 à 50 microns.

Ordre 3 : Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques ;

Ordre 4: Défauts localisés (*échelle microscopique*) : arrachement, marque d'outil, ... ; ce type de défaut a un caractère apériodique ;

Ordre 5 : Structure cristalline (*échelle mésoscopique*) ;

Ordre 6 : Réseau cristallin (*échelle nanoscopique*).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Il convient de préciser que le profil d'une surface mesuré à l'aide d'un profilographe est le résultat de la superposition des défauts de forme, d'ondulation et de rugosité (**figure I-1**).

Les amplitudes de rugosités peuvent varier de 0,01 microns ou moins pour les surfaces polies à 25 microns pour les surfaces usinées par des procédés conventionnels.

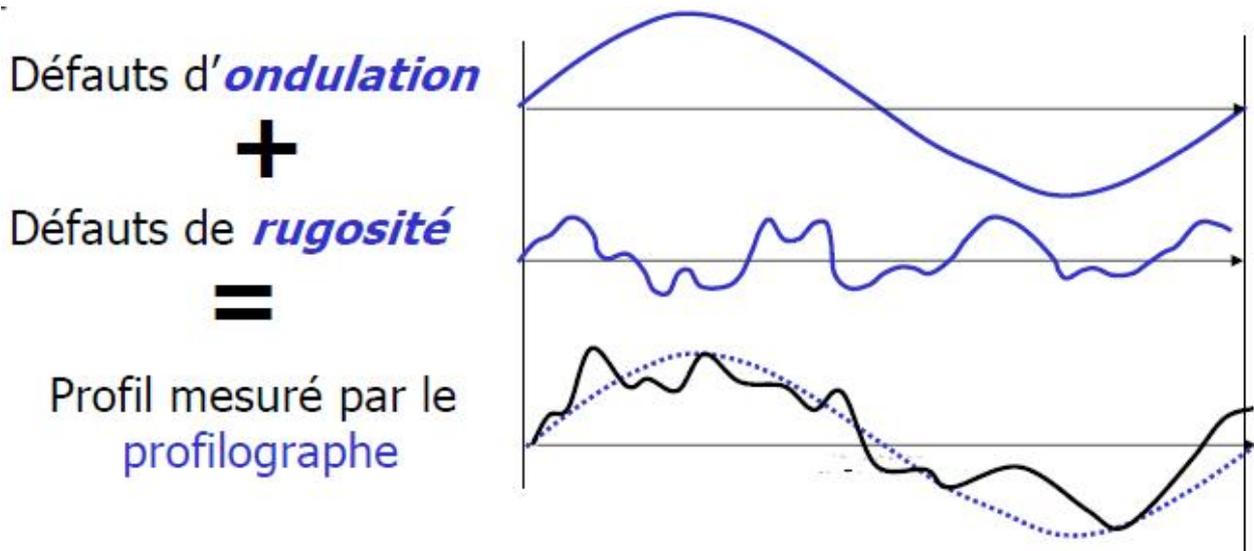


Fig. I-1 : Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe

2.2. Mesure des défauts

L'étude des états de surface remonte aux années 30, avec le développement des appareils de mesure de profil. Après 1950, les premiers appareils analogiques ont fait leur apparition et permirent de mesurer quelques paramètres. Les années 70 ont vu l'apparition de nouveaux moyens informatiques et électroniques qui permirent de définir un plus grand nombre de paramètres caractérisant l'état de surface.

Aujourd'hui, les moyens métrologiques modernes et les techniques d'imagerie topographique permettent d'extraire des paramètres pertinents des surfaces industrielles.

Le profil d'une surface est le résultat de la superposition des défauts de forme (*Shape defects*), des défauts d'ondulation (*waviness defects*) et des défauts de rugosité (*roughness defects*). Les défauts de forme sont facilement mesurés avec les instruments de métrologie classiques comme le micromètre parce que leur période est grande. La période des défauts d'ondulation et de rugosité étant plus petite, un palpeur capable de les détecter doit aussi être petit. L'appareil le plus utilisé pour cette tâche est le *profilographe* (**figure I-2**). Cet appareil comprend un stylet durci (*diamant*), qui se déplace sur la surface à très basse vitesse (1 mm/s). Le stylet est terminé par une petite pointe ($\approx 0,5 \mu\text{m}$ de rayon) qui agit un peu comme un filtre à

haute fréquence : les contours plus petits que le rayon de la pointe du palpeur ne sont pas enregistrés.

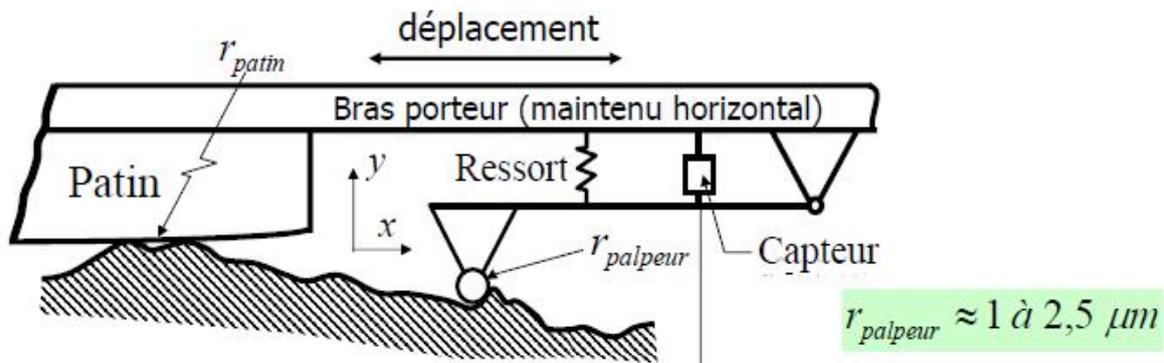


Fig. I-2 : Schéma d'un profilographe

Le déplacement du stylet sur le profil est transformé en signal électrique par le capteur, numérisé et ensuite traité par un ordinateur par des techniques statistiques.

2.3. Caractérisation des surfaces : principaux paramètres statistiques

La norme ISO 4287 [1 2] recense l'ensemble des paramètres géométriques et statistiques existants dans l'analyse des états de surfaces. Cette norme définit au moins 19 caractéristiques statistiques pour caractériser les surfaces.

Les paramètres statistiques les plus connus sont sans doute les coefficients R_a et R_q , qui sont définis pour une longueur de base sur une ligne de référence. La ligne de référence sépare les crêtes et les creux d'un profil de la surface en deux catégories : ceux situés au-dessus de la ligne de référence, et ceux situés en dessous. Les paramètres statistiques sont toujours calculés à partir de la ligne de référence sur une longueur caractéristique appelée longueur de base.

- Définition de R_a et R_q

- R_a est la moyenne des valeurs absolues des déviations y_i du profil par rapport à la ligne de référence arithmétique (**figure I-3**), soit :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i|$$

(I-1)

La ligne de référence arithmétique (ou ligne centrale) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, des aires égales de part et d'autre de cette ligne.

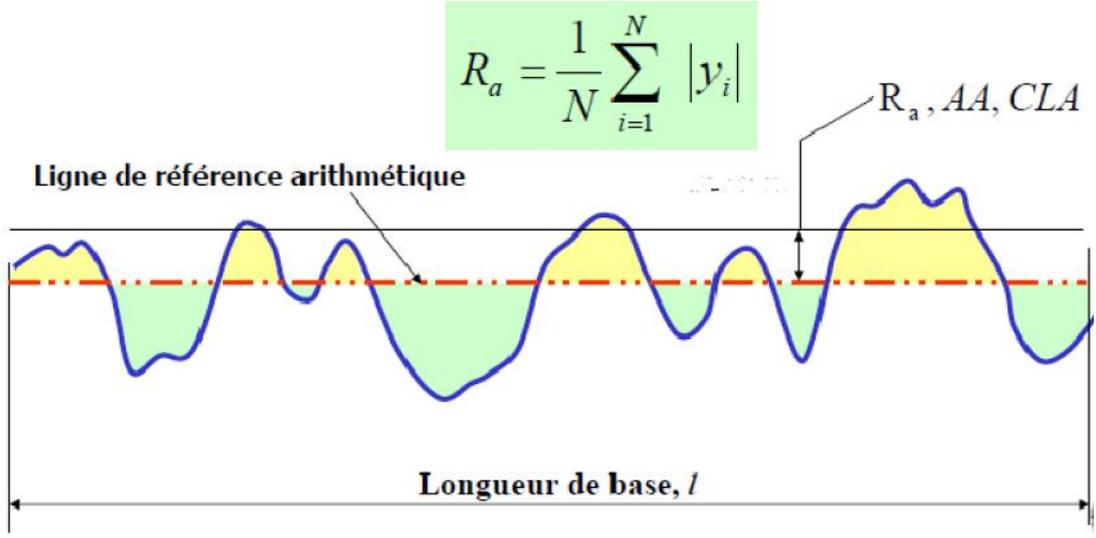


Fig. I-3 : Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart arithmétique R_a

- R_q est la moyenne RMS (**R**andom **M**ean **S**quare) des déviations du profil par rapport à la ligne de référence des moindres carrés (**figure I4**), soit :

$$R_q = RMS = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{1/2} \tag{I-2}$$

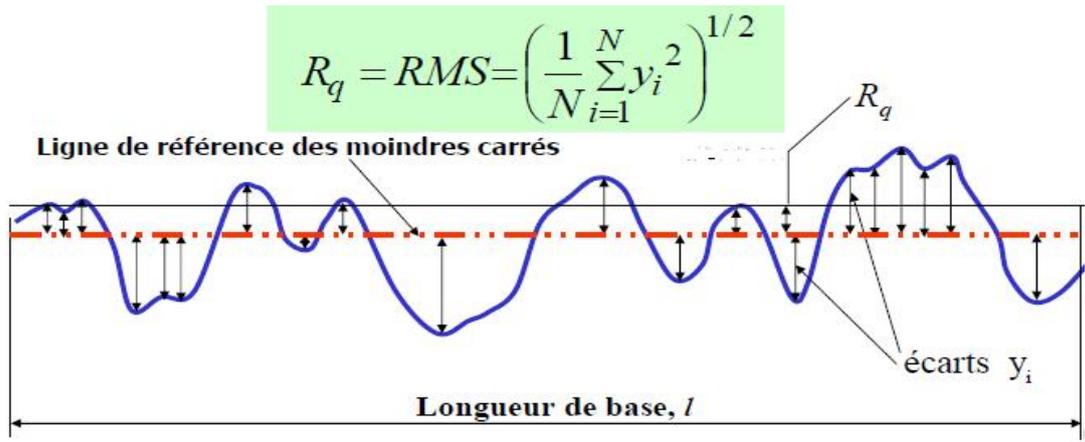
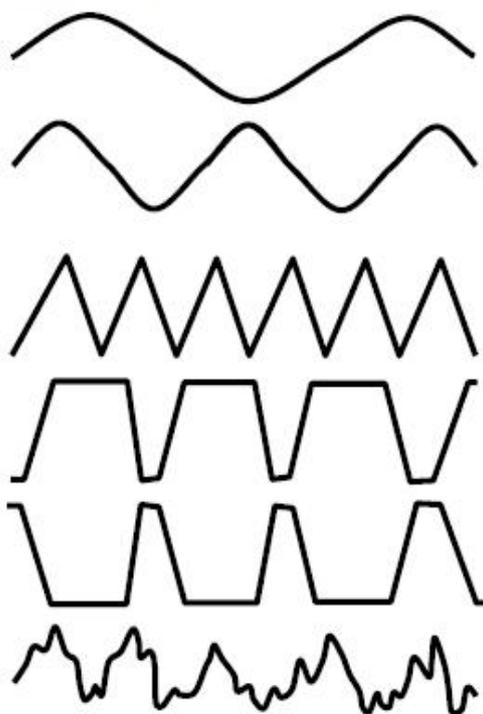


Fig. I-4 : Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart moyen géométrique RMS

La ligne de référence des moindres carrés ou ligne moyenne est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, une valeur minimale de la somme des carrés des aires entre les crêtes et les creux.

Les valeurs R_a et R_q sont très proches l'une de l'autre. Malheureusement, beaucoup d'ingénieurs ne spécifient qu'une ou l'autre de ces valeurs pour caractériser le fini de surface. Ni l'un ni l'autre de ces paramètres ne sont en réalité suffisants. En effet, plusieurs formes de profil d'allure différente peuvent avoir des valeurs R_a ou R_q très voisines. Par exemple, les profils de la (figure I-5) ont la même valeur R_a et R_q mais ils présentent un comportement totalement différent en frottement et en usure.



R_a ou R_q caractérisent la hauteur des irrégularités mais pas la forme.



R_a et R_q sont insuffisants pour bien caractériser les surfaces en tribologie.

Fig. I-5 : Exemple de 6 profils différents ayant les même R_a et R_q

- Définition de l'obliquité (Skewness)

Pour différencier les surfaces du point de vue tribologique, il est nécessaire de calculer d'autres paramètres qui caractérisent leur topographie. L'un de ces paramètres est l'obliquité S_k (**figure I-6**), qui correspond au moment d'ordre 3 :

$$S_k = \frac{1}{R_q^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^3 \quad \text{(I-3)}$$

Une valeur négative de S_k indique une prédominance de vallées, tandis qu'une valeur positive est le signe de crêtes abondantes. Un profil avec une valeur de S_k négative possède un meilleur comportement au frottement, et donc à l'usure.

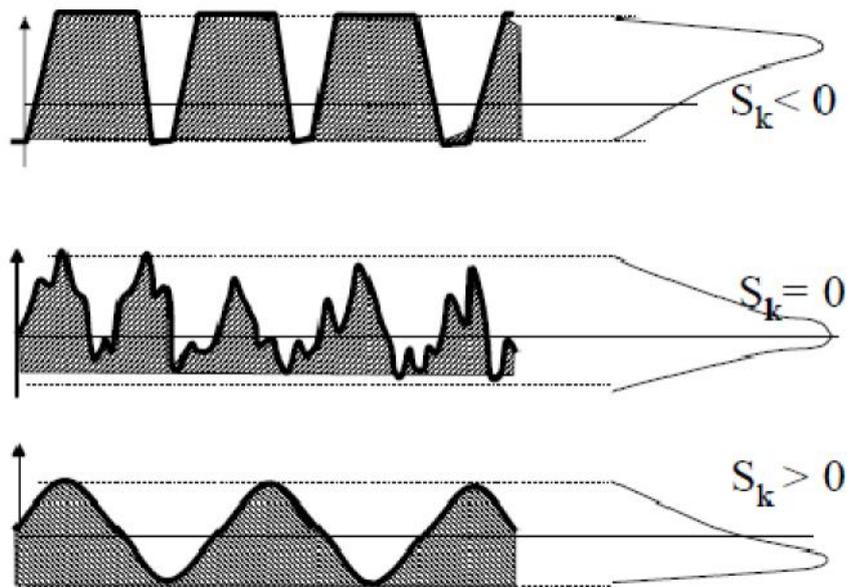


Fig. I-6 : Obliquité S_k d'un profil

- Définition de l'étalement (kurtosis)

Enfin, un autre paramètre peut aussi être utilisé pour différencier la qualité du fini de surface : il s'agit de l'étalement E_k (**figure I-7**), qui correspond à un moment d'ordre 4 du profil :

$$E_k = \frac{1}{R_q^4} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^4 \quad (\text{I-4})$$

Un profil avec un étalement $E_k > 3$ correspond à une surface apte à recevoir des placages, qui présente en même temps un bon comportement au frottement et à l'usure.

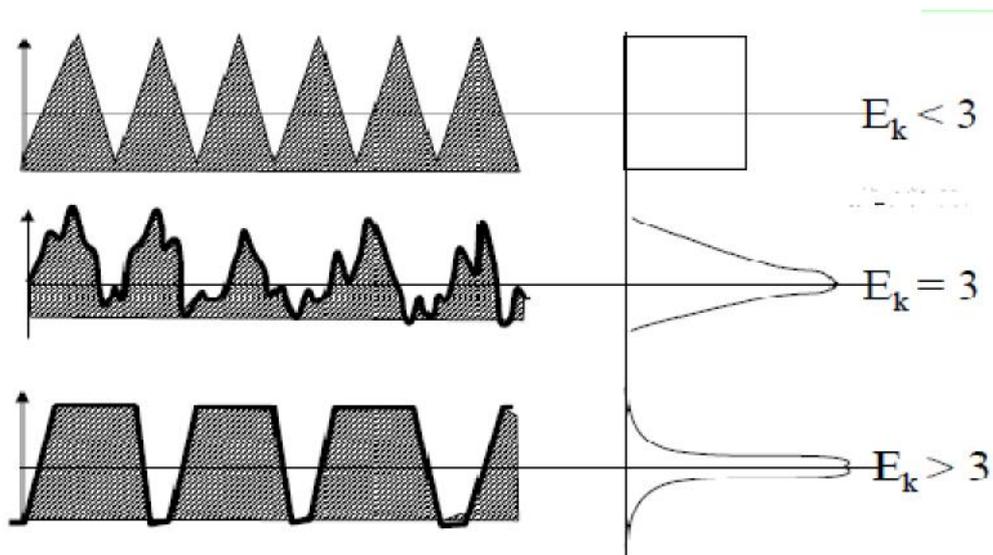


Fig. I-7 : Etalement E_k d'un profil

- Longueur portante

La longueur portante d'un profil est définie à la figure I.8 comme la somme des longueurs des segments obtenus en coupant les saillies par une ligne parallèle à la ligne de référence à l'intérieur de la longueur de base. La courbe du taux de longueur portante du profil représente la relation entre le rapport de la longueur portante sur la longueur de la ligne de base avec le niveau de coupe du profil.

Longueur portante η_p : somme des longueurs des segments obtenus en coupant le profil par une ligne parallèle à la ligne de référence à l'intérieur de la longueur de base.

$$\eta_p = \sum_{i=1}^n b_i$$

Taux de longueur portante t_p :

$$t_p = \frac{\eta_p}{l}$$

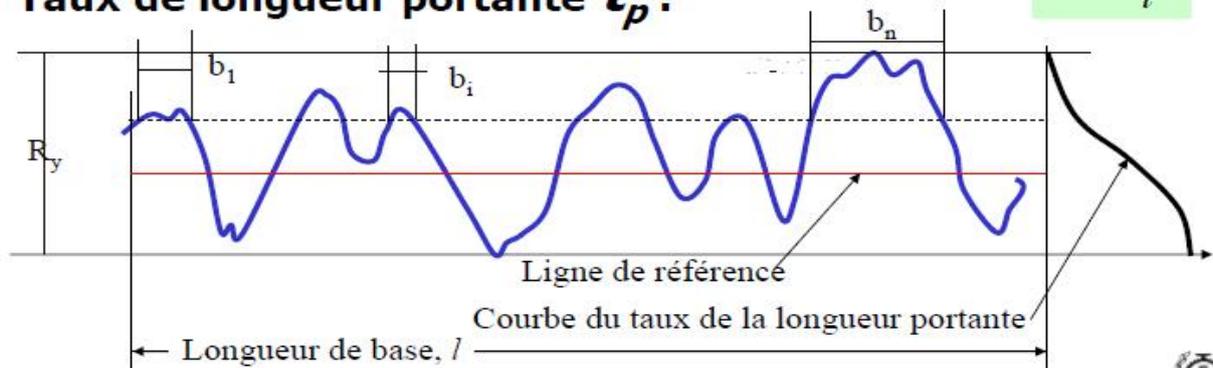


Fig. I-8. Courbe du taux de la longueur portante

(b)

2.4. Topographie des surfaces

Le profilographe mesure et enregistre les variations de hauteur d'une surface sur une ligne. Les paramètres mesurés à partir de ces enregistrements ne valent aussi que sur une ligne. Cependant, les surfaces existent en trois dimensions. Pour les caractériser en trois dimensions, il faut utiliser une technique de mesure autre que le profilographe (*optique, par exemple*) ou effectuer plusieurs passes parallèles avec le profilographe et les juxtaposer (**figure I-9**). Selon le procédé par lequel la surface est usinée, sa topographie en trois dimensions peut s'apparenter soit à des cylindres parallèles, soit à des sphères de différentes hauteurs (**figure I-9**).

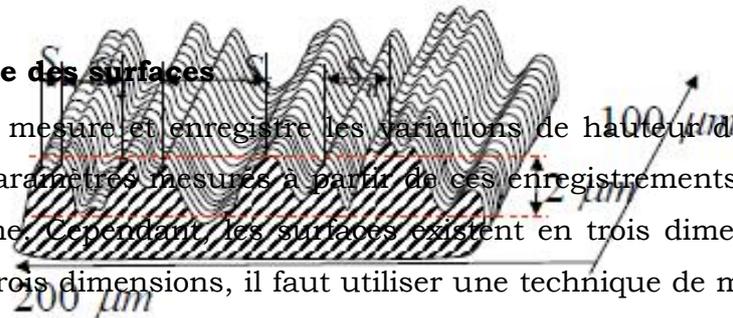


Fig. I-9 : Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe :

a) surface usinée au tour ou à la fraise **b)** surface grenillée.

Afin de comprendre les phénomènes tels que l'usure, la friction et la lubrification, la quantification de la topographie de la surface est importante. De plus, le design des surfaces esthétiques telles que les surfaces de miroir, nécessite un contrôle de la texture de la surface à une échelle très fine.

Depuis son invention par Abbot et al. [3] dans les années 30, la profilométrie décrite précédemment a été employée de façon extensive afin d'estimer la quantité et la fonctionnalité des surfaces industrielles.

Les différentes applications de la profilométrie ont généré de nombreux paramètres permettant de quantifier les propriétés de surface. Le paramètre le plus connu est la rugosité moyenne ou la hauteur arithmétique moyenne, R_a , qui est fréquemment utilisée, même aujourd'hui. Bien que de concept simple, R_a ne décrit pas très bien les surfaces usinées.

Avec la venue des ordinateurs puissants et les systèmes de mesure plus sophistiqués, la topographie (2D) traditionnelle a été suppléée, ou même substituée, par les techniques de mesure tridimensionnelle (3D) dans la mesure où la caractérisation des surfaces en (3D) permet des interprétations faciles et intuitives. Aujourd'hui, les techniques de mesure (3D) les plus couramment utilisées sont :

-Microscopie d'interférence

Il s'agit d'une technique optique utilisant l'interférométrie pour déterminer la distance de l'objectif à la surface de l'échantillon. En variant la hauteur des lentilles optiques au-dessus de l'échantillon et en enregistrant les franges d'interférences, une carte de hauteur est construite par ordinateur (**figure I-10**).

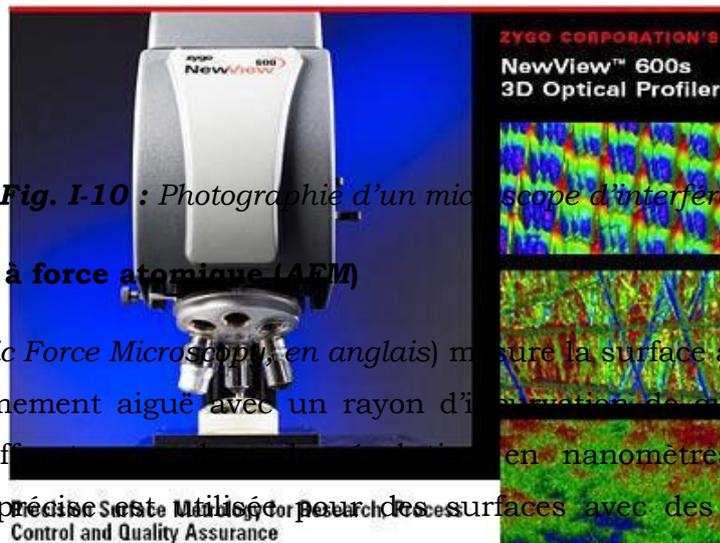
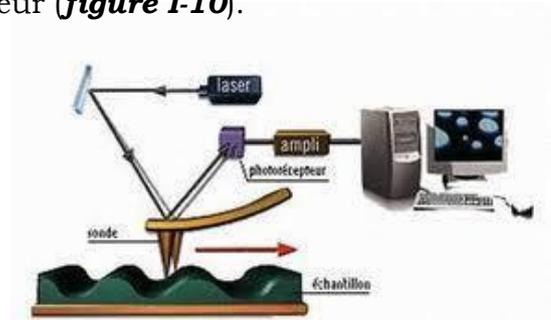


Fig. I-10 : Photographie d'un microscope d'interférences

- Microscopie à force atomique (AFM)

La MFA (*Atomic Force Microscopy*, en anglais) mesure la surface à l'aide d'une pointe silicone extrêmement aiguë avec un rayon d'inflexion de quelques dizaines de nanomètres offrant une résolution latérale en nanomètres. Cette technique extrêmement précise est utilisée pour des surfaces avec des détails et textures extrêmement fines (*moins de 5 microns*). La figure I-11 montre un instrument MFA numérique.

Fig. I-11 : Microscope à force atomique (AFM)

- La microscopie 4-D

L'objectif de la microscopie 4-D est la mesure et la caractérisation des structures microscopiques en mouvement (*Micro-Electro-Mechanical-Systems MEMS, nanotechnologies, procédés de gravure, attaques chimiques...*) en utilisant la technique de la microscopie interférométrique (**figure I-12**). Cette technique consiste à balayer en continu les franges d'interférence sur toute la profondeur de la surface mesurer, d'acquérir les images avec une caméra rapide et d'effectuer un traitement d'images fortement parallélisé en logique câblée pour mesurer la hauteur du relief de la surface. Cette technique nous permet de réaliser aussi bien des mesures apériodiques que périodiques. La figure I-13 montre le schéma du système CAM 4-D.



Fig. I-12 : Banc de mesure utilisant le système de microscopie CAM 4D

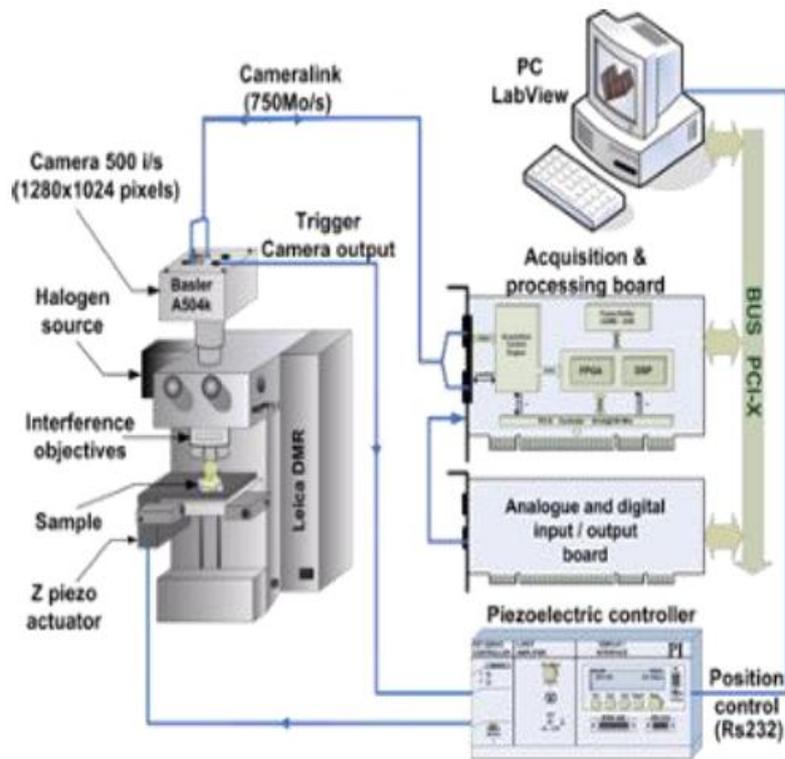


Fig. I-13 : Schéma du système de microscopie 4-D

Ce prototype peut être décomposé en deux parties. Une première partie, optique, est constituée d'un microscope Leica DMRX équipé d'objectifs interférométriques (*Michelson ou Mirau*), d'une source de lumière, d'une caméra rapide numérique et d'un module de translation verticale piézoélectrique avec une dynamique de $100\mu\text{m}$. Une série de franges peut alors être observée dans le détecteur de la caméra montrant les variations de contraste au niveau de chaque pixel. Une seconde partie, électronique/informatique, est constituée d'une carte d'acquisition (*dotée d'un FPGA Virtex 2P de Xilinx et de mémoires SRAM et DDR*) et d'un ordinateur. Elle sert à contrôler les différents systèmes de translation et à assurer l'acquisition, le stockage et le traitement des données d'interférence issues de la partie optique. L'ensemble des composants doit être soigneusement synchronisé afin que le système puisse fonctionner correctement.

Le dispositif est posé sur une table anti-vibration (*SmartTable de Newport*) équipée d'un système de compensation actif qui limite les vibrations résiduelles du banc optique.

Le principe de fonctionnement du système CAM 4-D est le suivant : la surface de l'échantillon à analyser est balayée sur toute sa profondeur par une sonde virtuelle au moyen d'un translateur vertical piézoélectrique. Les images ainsi formées sont envoyées, via une liaison « CameraLink », vers la carte d'acquisition et sont traitées dans le FPGA, où les informations d'altitude (3-D) sont extraites. Les résultats sont ensuite envoyés vers le PC, où ils sont visualisés et analysés. Ce système a l'avantage d'une grande souplesse en terme de choix de taille d'images, de cadence d'acquisition, de profondeur de mesure et de type d'algorithme employé.

Les logiciels de contrôle du système, de visualisation, de sauvegarde et d'analyse des résultats ont été développés sous l'environnement de développement graphique LabView (*Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench*). La figure I-14 donne un aperçu du logiciel de visualisation des résultats en 3-D temps réel.

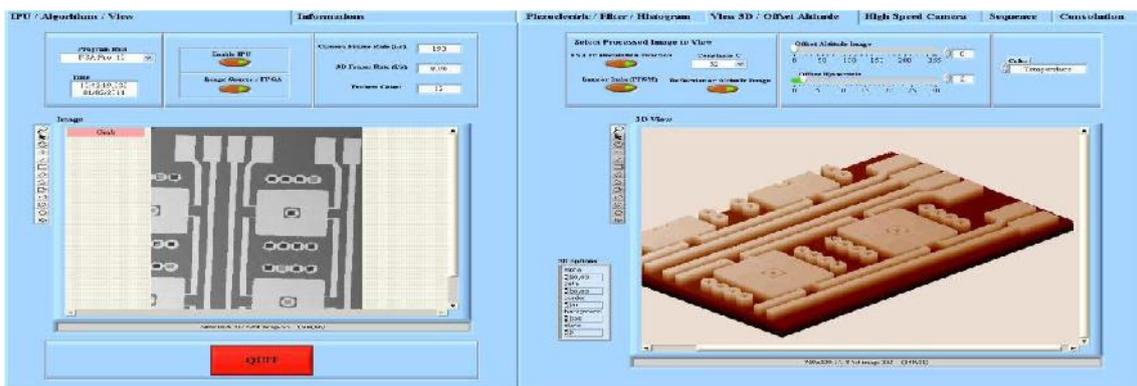


Fig.1-14 : Logiciel de visualisation des résultats du système CAM 4-D

Il existe d'autres procédés exploitant une propriété particulière de la surface à usiner. Par exemple, les mesures de capacité peuvent être utilisées pour analyser les surfaces conductrices et celles par ultrasons permettent d'étudier les surfaces immergées. La figure I-15 illustre différentes micro-topographies (3D) de surfaces industrielles obtenues par la technique optique décrite précédemment.

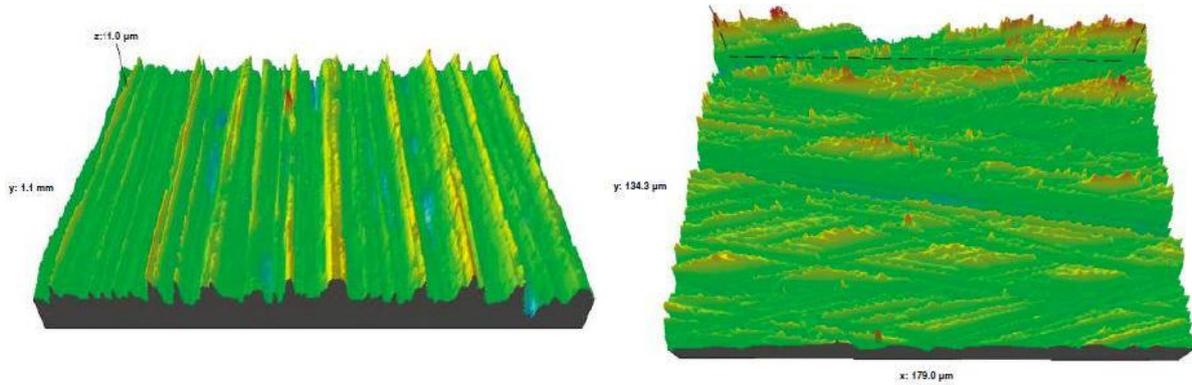


Fig. I-15 : Topographies réelles de surfaces industrielles
obtenues par la technique optique de mesure (3D)

2.5. Modélisation de la rugosité des surfaces

La hauteur d'une surface rugueuse peut être considérée comme une variable aléatoire à deux dimensions $z(x,y)$ où z se mesure à partir du plan moyen de la surface. La densité de probabilité de cette variable par l'examen de sa courbe représentative et de celles de ses moments centrés, permet d'illustrer certains aspects de la rugosité tels que la dispersion ou l'asymétrie (*moments d'ordre 3 et 4*). En adoptant la notation indicielle, les principaux paramètres de la caractérisation statistique des surfaces s'expriment :

- *Hauteur de la surface moyenne*

$$\langle z_{ij} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij} \quad (\text{I-5})$$

où N et M sont respectivement le nombre de points suivant les directions x et y et $z_{ij} = z(x_i, y_j)$

Il est à préciser que la moyenne des hauteurs de la surface est supposée nulle (surface normalisée) ; c'est à dire : $\langle z_{ij} \rangle = 0$

- *Ecart type quadratique*

Le calcul de l'écart-type quadratique de la distance des hauteurs de rugosité S_q permet d'évaluer l'intervalle de variation de la hauteur de rugosité. Il est préféré à l'écart arithmétique moyen S_a du fait de son usage fréquent en statistique :

$$S_q = \dagger = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I-6})$$

Par définition, l'écart-type d'une distribution statistique est la racine carrée de son moment centré calculé à l'ordre 2 :

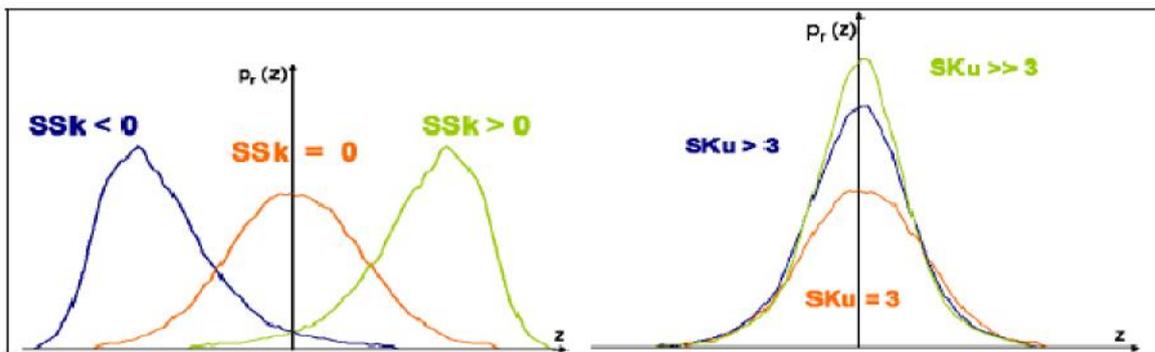
$$m_k = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (z_{ij} - \langle z_{ij} \rangle)^k \quad (\text{I-7})$$

Ces moments sont à l'origine de deux nouveaux termes décrivant la distribution statistique, le paramètre d'asymétrie SSk (*Skewness*) et le paramètre d'étalement SKu (*Kurtosis*) :

$$SSk = \frac{m_3}{S_q^3} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^3}{S_q^3} \quad (\text{I-8})$$

$$SKu = \frac{m_4}{S_q^4} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^4}{S_q^4} \quad (\text{I-9})$$

Dans cette nouvelle notation, la lettre initiale S indique que le paramètre considéré se rapporte à une surface rugueuse et non à un simple profil (§ 2.4).



a) Paramètre d'asymétrie (*skewness*) **b)** Paramètre d'étalement (*kurtosis*)

Fig. I-16 : Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement

Les deux paramètres SSk et SKu sont utilisés pour définir la forme et l'agencement de la rugosité d'une surface. Toute distribution gaussienne possède un coefficient d'asymétrie nul et un coefficient d'étalement égal à 3. Une valeur nulle du

paramètre SSk indique que la distribution est symétrique (**figure I-16.a**). Dans le contexte des surfaces rugueuses, cela signifie que les vallées et les pics (*sommets*) sont répartis de manière égale de part et d'autre du plan moyen (*par exemple, cas des surfaces de forme sinusoïdale*). Une valeur négative du paramètre SSk est caractéristique d'une surface présentant plus de vallées que de pics (**figure I-16.a**). Autrement dit, une valeur positive de ce paramètre signifie que la surface présente moins de vallées que de pics.

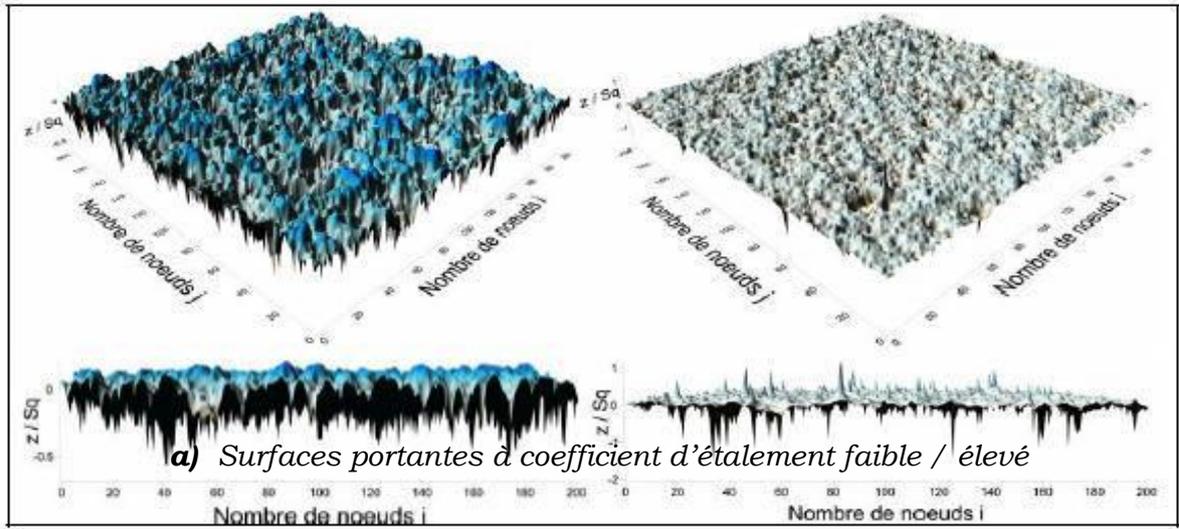
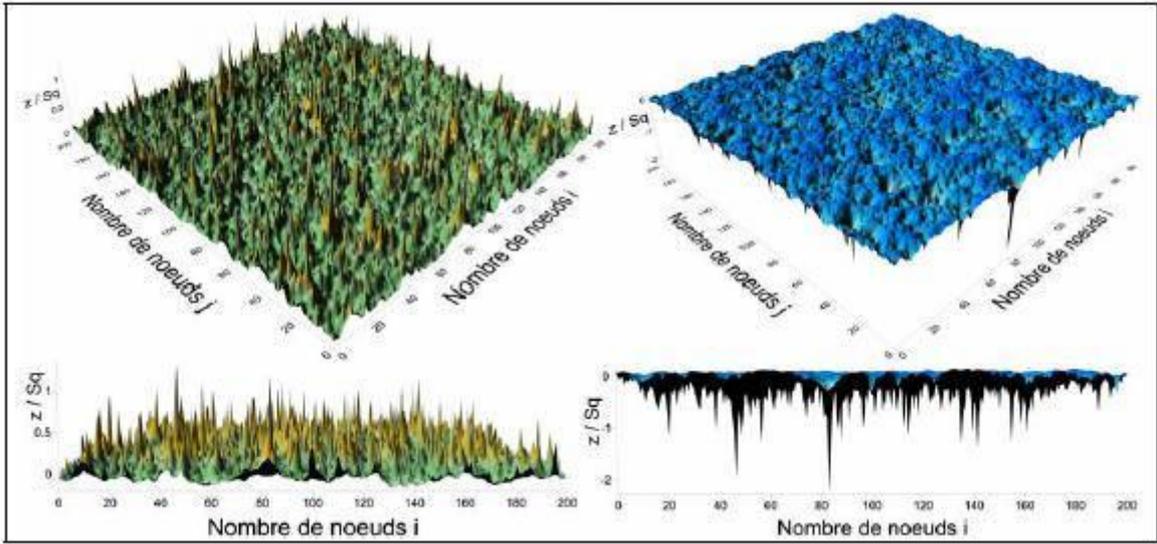
La valeur de SKu renseigne sur l'aplatissement de la courbe de distribution des hauteurs (**figure I-16.b**). Lorsque les motifs de la rugosité (*pics, vallées*) sont larges et leur extrémité peu éloignée du plan moyen, alors $SKu < 3$ et la distribution est reserrée autour de la valeur médiane. En revanche, si les pics pointus et les vallées étroites et profondes prédominent, alors $SKu > 3$ et la distribution est plus large que la distribution normale. En général, les paramètres d'asymétrie et d'étalement varient simultanément.

L'étude des propriétés spectrales d'une surface rugueuse (*fonction d'autocorrélation*) constitue un bon complément des méthodes statistiques (Cf. référence [8] pour plus de détails).

Il est intéressant de noter que les surfaces rugueuses gaussiennes ou non peuvent être générées numériquement (**figures I-17**) en faisant généralement appel à des séries harmoniques de la forme :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} [\cos(\check{S}_k x_i + w_k) \cos(\check{S}_l y_j + w_l)] \quad \text{(I-10)}$$

Dans cette équation, a_{kl} est un terme d'amplitude, ω_k et ω_l désignent les pulsations spatiales, w_k et w_l sont des déphasages introduits pour donner un caractère aléatoire aux hauteurs z .



b) Surfaces à coefficient d'asymétrie positif / négatif

Fig.I-17 : Exemples de surfaces industrielles générées numériquement

3. METHODES D'ANALYSE DES CONTACTS RUGUEUX LUBRIFIES

La théorie de lubrification hydrodynamique classique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses [4]. Cependant, il a été montré qu'une telle hypothèse est peu réaliste surtout pour l'étude des contacts lubrifiés sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (**EHD**) tels que les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages et les roulements (**figure I-18**), l'épaisseur du film lubrifiant **h** est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (*rugosité de Reynolds*); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes.

Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation.

3.1. Méthode Stochastique

Le concept stochastique a été introduit pour la première fois par Tzeng et Saibel [5] en 1967 pour l'étude de l'influence d'une rugosité transversale sur les performances d'un patin incliné bidimensionnel.

L'approche Stochastique est basée sur l'introduction de facteur d'écoulement dans l'équation de Reynolds et d'une rugosité aléatoire sur les surfaces en contact. La génération de rugosité se fait suivant une loi gaussienne. Cette approche Stochastique connaît des limites. En effet, seule une description globale est possible, on ne peut avoir accès aux informations locales. Ainsi, deux profils de rugosité différents mais possédant les mêmes propriétés statistiques conduiront aux mêmes répartitions de pression.

En 1969, la théorie Stochastique développée par Christensen [6] pour la lubrification hydrodynamique des surfaces rugueuses a été étendue au cas des paliers poreux par Prakash et Tiwari [7]. En 1971, Christensen et Tonder [8] développent l'équation moyennée pour analyser la répartition de la pression en présence de rugosités unidirectionnelles. Dans cette équation, ils introduisent le facteur de correction provenant de la théorie Stochastique pour tenir compte des effets de la rugosité dans les patins. En 1973, Elrod [9] a utilisé une approche stochastique pour mettre en évidence les effets des paramètres statistiques sur les caractéristiques d'un écoulement newtonien en film mince en prenant en compte les défauts de rugosité. En 1978, Patir et Cheng [10] proposent une équation de Reynolds moyennée dans laquelle plusieurs facteurs de correction de débit sont introduits pour tenir compte des effets de la rugosité dans les 3 dimensions. En 1997, Boedo et Booker [11] utilisent la méthode des éléments finis pour l'analyse des performances d'un palier avec une rugosité isotrope et ses effets sur la déformation élastique du palier. Dans cette étude, le fluide est supposé newtonien. En 2001, Wang et Keith [12] ont utilisé l'algorithme de cavitation universel développé par Elrod [13] en 1981, puis par Vijayaraghavan et Keith [14] pour analyser les effets de la rugosité ainsi que les effets non newtoniens sur le comportement de paliers dynamiquement chargés. Trois types de rugosité ont été étudiés : longitudinale, axiale et isotrope.

Récemment, Naduvinamani et al. [15] ont étudié l'effet de l'obliquité de la rugosité sur les performances hydrodynamiques d'un patin échelon de Rayleigh poreux utilisant un fluide à couples de contraintes comme lubrifiant. Ils ont montré que pour une inclinaison négative de la rugosité, la capacité de charge du contact

augmente tandis que le coefficient de frottement diminue. Cependant, la tendance inverse est observée pour une inclinaison positive.



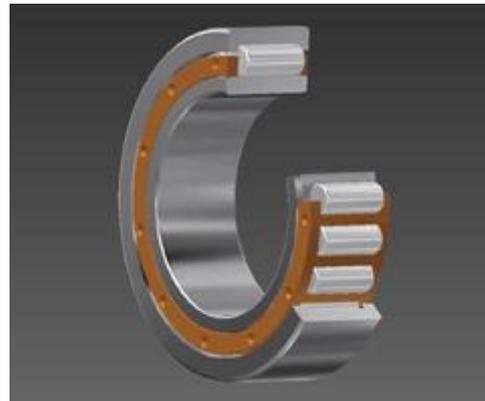
a) Palier radial marin

b) Butée axiale à patins

c) Garniture d'étanchéité



d) Engrenages



e) Roulement à rouleaux

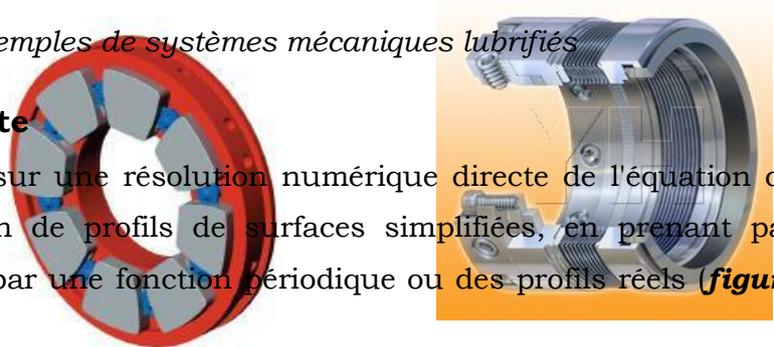
Fig.I-18 : Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés

3.2. Méthode déterministe

Ce type d'analyse est basé sur une résolution numérique directe de l'équation de Reynolds et une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels (**figure I-18**).

Il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous la forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont prises en compte les rugosités.

L'approche déterministe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur



l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

En 1992, Kweh et al. [16] se sont intéressés au cas d'un contact lourdement chargé en introduisant une rugosité transverse sinusoïdale tridimensionnelle. Greenwood et al. [17] traitent le problème inverse; c'est-à-dire la rugosité de la surface est recherchée à partir des variations sinusoïdales de la pression. La reproduction de la rugosité de la surface revient à regarder les variations de la pression et ne prendre en compte que les petites variations : les composantes de basses fréquences (l'ondulation) d'une rugosité de surface sont très aplaties alors que les composantes de hautes fréquences (rugosité) sont encore présentes après déformation.

En 1997, Zhu *et al.* [18] ont utilisé un relevé tridimensionnel de rugosité de surface pour étudier un contact ponctuel. Ils montrent que le pic de pression est une variable locale qui dépend largement des aspérités et de leurs pentes (obliquités).

Récemment, Dobrica et al. [19] ont étudié l'influence de la pression spécifique sur les performances d'un palier à arc partiel rugueux de faibles dimensions dont la surface projetée est de 3 cm² fonctionnant en régime de lubrification mixte. Pour prendre en considération les effets des différentes formes de rugosités (*anisotropes, transversales et longitudinales*), ces auteurs ont utilisé deux approches, à savoir : l'approche stochastique proposée par Patir et Cheng [10] basée sur la résolution d'une équation de Reynolds moyennée par la méthode des volumes finis et l'approche déterministe basée sur la résolution de l'équation de Reynolds classique au moyen de la même méthode, i. e. les volumes finis. Dans cette excellente étude, l'arbre tournant à une faible vitesse de rotation est supposé rigide et parfaitement lisse tandis que la surface du patin contiguë au film présente des rugosités gaussiennes isotropes ou orientées générées numériquement dont la rugosité RMS ou $R_q=0.4$ microns. Ils ont montré que :

- l'orientation de la rugosité de surface affecte les performances du palier tels que l'épaisseur minimale du film, l'angle de calage et les couples de frottement calculés sur l'arbre et le patin;

- par comparaison au cas lisse, l'effet de la rugosité transversale est le plus important conduisant à une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film et du couple de frottement sur l'arbre;
- la rugosité longitudinale n'affecte que le couple de frottement.

A partir d'une comparaison des résultats obtenus par les deux approches déterministe et stochastique pour les trois formes de rugosités considérées, ils ont aussi montré que l'approche stochastique donne une bonne prédiction de l'épaisseur minimale du film et une mauvaise estimation (*sous-estimation*) des couples de frottement.

Plus récemment, les mêmes auteurs [20] ont développé une nouvelle approche élasto-hydrodynamique (EHD) pour l'étude du comportement des paliers à arc partiel rugueux fonctionnant en régime de lubrification mixte. Dans cette approche, l'arbre est supposé rigide et lisse tournant à de faibles vitesses tandis que le patin est rugueux et compliant (*déformable*) dont le comportement est élastique parfaitement plastique (EPP).

3.3 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation ou de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide [21]. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites [22, 23]. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien.

L'approche d'homogénéisation consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales ;
- Un problème homogénéisé régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

4. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a présenté dans la première partie, une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques. La seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et la méthode dite d'homogénéisation.

D'après la recherche bibliographique effectuée sur ces différentes méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode déterministe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques.

Par contre, l'approche déterministe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

1. INTRODUCTION

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact dans lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi-solide (*graisses*). Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir : la lubrification solide et la lubrification fluide. Cette dernière est la plus importante qui représente 96% dans les systèmes mécaniques. Le fluide lubrifiants utilisés dans la lubrification fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou iso-volume tels que les huiles, de l'eau ou même un métal fondu (*Sodiumliquide*) comme il peut être un gaz compressible le plus souvent est l'air comme le cas des paliers et butées à gaz.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince continu, dont le comportement est newtonien (**figure II-1**). Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

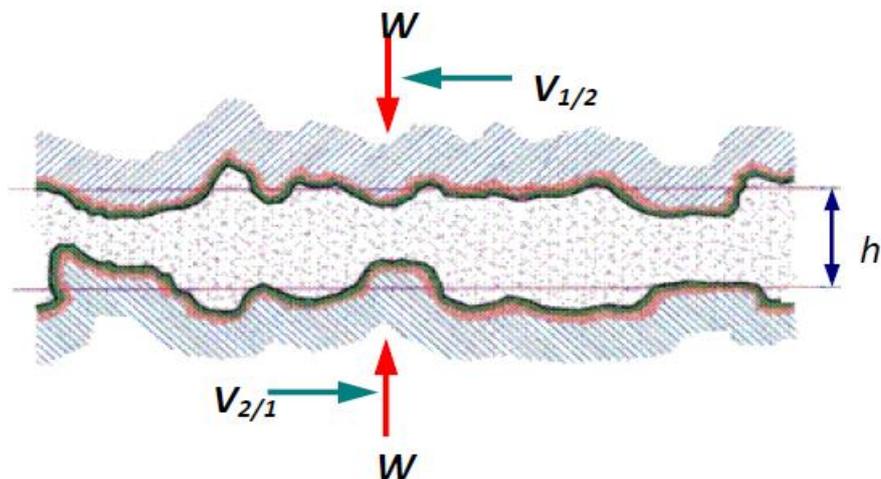


Fig. II-1 : Schéma d'un contact lubrifié

2-EQUATIONS GENERALES DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique permettent compte tenu des conditions géométriques et cinématiques de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance (**figure**

II-1). Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus appliquées aux fluides lubrifiants.

Les équations qui décrivent le comportement d'un fluide compressible sont établies à partir de :

- Principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus : lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ;
- Régime d'écoulement isotherme en tous points du fluide, c'est à dire la température reste constante en tous points du fluide lubrifiant.

2-1. lois de comportement rhéologique des huiles lubrifiantes en film mince

La plus simple de ces lois de comportement rhéologique, qui présente le plus grand intérêt en lubrification est celle du fluide newtonien, qui ne fait intervenir que la viscosité dynamique (μ) donnant une relation rhéologique linéaire entre les contraintes de cisaillement et le gradient de vitesse, en lubrification et plus particulièrement en film mince (**figure II.1**) où seulement les contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{zy} sont prises en compte, les lois constitutives d'un fluide newtonien s'écrivent alors [24] :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad \text{(II-1)}$$

Où,

μ : viscosité dynamique du fluide lubrifiant

u et w : composantes du vecteur vitesse d'écoulement d'une particule fluide selon l'axe x et z

τ_{xy} et τ_{zy} : contraintes de cisaillement.

Dans le cas général, pour un fluide newtonien, la relation qui lie le tenseur de contraintes (σ_{ij}) au tenseur de taux de déformation (D_{ij}) s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \mu) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad \text{(II-2)}$$

Avec,

p : pression dans le fluide ;

D_{ij} : tenseur de taux de déformation, ($D_{ij} = 1/2(u_{ij} + u_{ji})$)

θ : taux de dilation cubique, ($\theta = D_{kk}$)

δ_{ij} : symbole de Kronecker

λ et μ : coefficients de Navier.

Pour un fluide incompressible ($\theta = 0$), le second coefficient de viscosité λ n'intervient plus.

2-2. Equation de conservation de la masse

La loi fondamentale de la mécanique classique concernant la conservation de la masse traduit le fait que la masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante. Cette équation peut être décrite par sa forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad \text{(II-3)}$$

$i = 1 \div 3$

Avec, ρ est la masse volumique de fluide et u_i composantes du vecteur vitesse d'une particule fluide.

Pour un fluide incompressible, la masse volumique reste constante, l'équation de continuité II-3 devient :

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i) = 0 \quad \text{(II-4)}$$

2-3. Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation générale de conservation de la quantité de mouvement de fluide est donnée par :

$$\frac{du_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{(II-5)}$$

Avec, $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, i et $j = 1 \div 3$

3. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES OU EQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE NEWTONIEN

En reportant l'équation du comportement rhéologique II-2 dans l'équation de mouvement II-5, on obtient les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad (\text{II-6})$$

Avec, i et $j = 1 \div 3$

3-1. Expression des équations de Navier-Stokes pour un écoulement en film mince visqueux

En lubrification hydrodynamique, les équations de Navier (**II-6**) se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant (o, \vec{x}_2) est très faible par rapport aux deux autres dimensions du contact (**figure II-2**), ce qui permet de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation **II-6**, de faire une analyse dimensionnelle. Pour cela, on pose :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \quad \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2 L}{Vh}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{V},$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Où, μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité dynamique de référence et la masse volumique de référence à $T = T_0$.

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes (o, \vec{x}_1) et (o, \vec{x}_3) , h et $\frac{Vh}{L}$, celles suivant (o, \vec{x}_2) ,

$\frac{L}{V}$ est l'ordre de grandeur du temps.

Ce changement de variable conduit à poser que : $\tilde{p} = \frac{\rho h^2}{\mu_0 V L}$

On remarque que la vitesse caractéristique (**V**) peut être définie de plusieurs façons, en hydrodynamique, V sera la vitesse de l'une des parois du contact.

Compte tenu de ces changements de variables, les équations **II-6** de Navier-Stockes se réduisent à (Annexe A):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\tilde{\rho} \varepsilon \Re \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \end{cases} \quad \text{(II-7)}$$

Avec, $i = 1$ et 3

$\Re = \rho_0 \frac{Vh}{\mu_0}$ est le nombre sans dimension de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule fluide ;

$\varepsilon = \frac{h}{L}$ est le paramètre d'échelle, en mécanique des films minces visqueux est de l'ordre de 10^{-3} .

Les termes en $\varepsilon \times \Re$ ou termes d'inertie de l'équation **II-7** seront négligeables devant les termes de viscosité, i.e. $\varepsilon \times \Re \ll 1$; ce qui est vérifié dans la plus part des écoulements rencontrés en lubrification. Quelques exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité du fluide est faible, quand l'épaisseur du film est importante ou dans le cas des paliers de grandes dimensions.

Si par hypothèse, on néglige les forces d'inertie l'équation **II-7**, elle devient comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \right) \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \end{cases} \quad \text{(II-8)}$$

$i = 1$ et 3

En revenant aux variables dimensionnées l'équation **II-8** donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \quad \text{(II-9)}$$

Le système d'équation précédent (II-9) montre que la pression varie en fonction de \mathbf{x} et \mathbf{z} , ($\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$).

Ce sont les équations de Navier écrites dans le cadre de la théorie de lubrification. Ces équations auxquelles s'ajoute l'équation de la conservation de la masse (II-8) et les conditions aux limites et après intégration, permettent formellement de connaître le champ de vitesses u_1 et u_3 ($u_2 \ll u_1$ et u_3 : écoulement bidimensionnel de lubrifiant dans la direction $(0, \vec{x}_1)$ et $(0, \vec{x}_3)$) la pression et les contraintes de cisaillement dans le film.

3-2. Détermination du champ de vitesses d'écoulement

Lorsque la vitesse de paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisés se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi (**figure II-2**), on pose :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$$

Définition des hypothèses et des conditions aux limites sur les vitesses :

- fluide adhère parfaitement aux parois (*vitesse de glissement négligeable*) ;
- on suppose que la paroi inférieure (\mathbf{S}_1) est confondue avec le plan (x_1, O, x_3) du référentiel ;
- vitesse en tous points de la surface (\mathbf{S}_1) est tangente à cette surface.

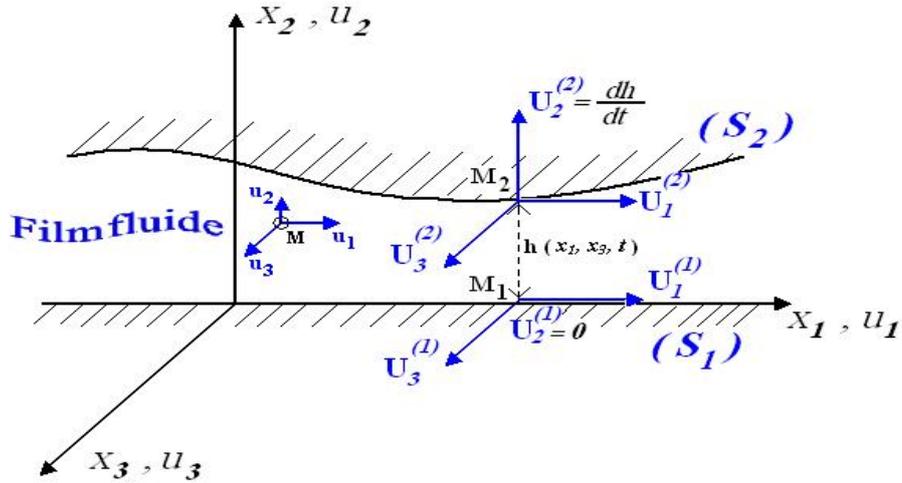


FIG. II-2 : **GEOMETRIE ET CINEMATIQUE D'UN CONTACT**
HYDRODYNAMIQUE

Pour un écoulement bidimensionnel (**2D**) en film mince visqueux (**figure II-2**), les équations de Navier-Stokes (**II-9**) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

Après deux intégrations de ces équations par rapport à la variable x_2 , on obtient :

- Première intégration par rapport à x_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + A(x_1, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2 + B(x_1, x_3) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + \frac{A(x_1, x_3)}{\mu} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2 + \frac{B(x_1, x_3)}{\mu} \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

- Deuxième intégration par rapport à x_2 :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_1} \int \frac{x_2}{\mu} dx_2 + A(x_1, x_3) \int \frac{dx_2}{\mu} + C(x_1, x_3) \\ u_3(x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_3} \int \frac{x_2}{\mu} dx_2 + B(x_1, x_3) \int \frac{dx_2}{\mu} + D(x_1, x_3) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{A}{\mu} x_2 + C \\ u_3(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2^2 + \frac{B}{\mu} x_2 + D \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

Pour déterminer les constantes **A**, **B**, **C** et **D**, on utilise les conditions aux limites sur les vitesses, d'après la figure II-2, les conditions aux limites sur les vitesses sont :

$$\begin{cases} \text{pour } x_2 = 0, & u_1 = U_1^{(1)}, & u_2 = U_2^{(1)} = 0, & u_3 = U_3^{(3)} \\ \text{pour } x_2 = h, & u_1 = U_1^{(2)}, & u_2 = U_2^{(2)}, & u_3 = U_3^{(2)} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

En remplaçant ces conditions aux limites sur les vitesses dans les expressions **II-13**, on obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{\mu}{h} \left[U_1^{(2)} - U_1^{(1)} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} h^2 \right] \\ B = \frac{\mu}{h} \left[U_3^{(2)} - U_3^{(1)} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} h^2 \right] \\ C = U_1^{(1)} \\ D = U_3^{(1)} \end{cases}$$

En remplaçant les constantes **A**, **B**, **C** et **D** par leurs expressions, les deux composantes de vecteur vitesse d'écoulement d'une particule fluide, s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (x_2^2 - x_2 h) + \frac{x_2}{h} U_1^{(2)} + U_1^{(1)} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \\ u_3(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (x_2^2 - x_2 h) + \frac{x_2}{h} U_3^{(2)} + U_3^{(1)} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

Les premiers termes de ces deux équations de vitesses, représentent l'écoulement de **Poiseuille** (*dû au gradient de pression*) et les seconds termes représentent l'écoulement de **Couette** (*dû aux déplacements de parois*).

3-3. Expression des tenseurs de contraintes et des taux de déformations

Dans le cas d'un fluide newtonien le tenseur de contrainte est symétrique et la matrice représentative de ce tenseur s'écrit en un point M (**figure II-2**) :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(II-15)}$$

En lubrification, On a les relations suivantes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \approx \varepsilon, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \approx \varepsilon, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \approx \varepsilon^2, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

En prenant en considération les hypothèses ci-dessus, la loi de comportement rhéologique **II-2** se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_{1,2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2}u_{1,2} \\ \text{Sym} & & 0 \end{bmatrix}$$

Soit encore :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{bmatrix} -p & \mu \times u_{1,2} & 0 \\ & -p & \mu \times u_{3,2} \\ \text{Sym} & & -p \end{bmatrix} \quad \text{(II-16)}$$

Le taux de déformation :

$$\overline{\overline{D}}(M) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \text{Sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II-17)}$$

Le fluide étant newtonien, les champs de contraintes de cisaillement dans le fluide s'expriment par :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{(II-18)}$$

En remplaçant u_1 et u_3 par leurs expressions (**Eq.II-14**), on obtient le champ de contraintes exercées par le fluide sur les parois :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_2 - h) + \frac{\mu}{h} (U_1^{(2)} - U_1^{(1)}) \\ \sigma_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_3} (2x_2 - h) + \frac{\mu}{h} (U_3^{(2)} - U_3^{(1)}) \end{cases} \quad \text{(II-19)}$$

- **Changement de notation** : Dans ce qui suit, on adopte la nouvelle notation pour les variables d'espace et les composants de vitesses d'écoulement comme suit :

(x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3)

(u, v, w) au lieu de (u_1, u_2, u_3)

(U_1, V_1, W_1) au lieu de $(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)})$ (II-20)

(U_2, V_2, W_2) au lieu de $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)})$

Les composantes du vecteur vitesse d'écoulement (**Eq. II-14**) deviennent :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad \text{(II-21)}$$

Les contraintes de cisaillement (**Eq. II-19**) dans le fluide deviennent aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \frac{\mu}{h} (U_2 - U_1) \\ \sigma_{yz} = \tau_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h) + \frac{\mu}{h} (W_2 - W_1) \end{array} \right. \quad \text{(II-22)}$$

4. DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS POUR UN FLUIDE NEWTONIEN

La dérivation de l'équation de Reynolds nécessite l'emploi des hypothèses suivantes :

- le milieu est continu : l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film ;
- l'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact, le rapport entre ces grandeurs doit être de l'ordre de 10^{-3} . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique, si cette hypothèse n'est pas vérifiée, l'équation de Reynolds ne peut être s'appliquée ;
- l'écoulement est laminaire ;
- les forces massiques extérieures dans le fluide sont négligeables ;
- les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression ;
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact, ainsi sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois ;
- la courbure générale du film est négligée, on peut démontrer qu'en film mince, dans un palier par exemple, l'effet de courbure est du second ordre ;
- la vitesse d'une des parois du contact est toujours tangente à cette paroi : ce qui permet de placer le système d'axe (o, x, z) sur la paroi (S_1) où $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{H}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$ (*figure II-2*).

- Dérivation de l'équation de Reynolds

Pour un fluide newtonien avec la suspension des particules solides, à partir de l'équation de continuité **II-3**, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \text{(II-23)}$$

L'intégration de cette équation à travers l'épaisseur ($\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$) de film donne :

$$\int_0^{h(x,z)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dy = 0 \quad \text{(II-24)}$$

$$\text{Où : } \int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)}_{I_1} dy + \int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)}_{I_2} dy + \int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)}_{I_3} dy = 0$$

Alors,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \text{(II-25)}$$

Avec :

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy \\ I_2 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \\ I_3 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy \end{cases} \quad \text{(II-26)}$$

On a : $p = p(x, z)$, $\rho = \rho(p)$ et $\mu = \mu(p)$,

Il vient alors, $\mu = \mu(x, z)$ et $\rho = \rho(x, z)$

$$I_2 = \rho [v]_0^h = \rho(v(h) - v(0)) = \rho(v_2 - v_1) = \rho v_2$$

I_1 et I_3 sont des intégrales difficiles à calculer, pour les déterminer en utilisant le théorème de Leibnitz :

$$\int_{h(x,z,t)}^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x, y, z) dy - f(x, h_2, z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x, h_1, z) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

Les intégrales I_1 et I_3 deviennent alors :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u(y)) dy - \rho u(y) \frac{\partial h}{\partial x} \\ I_3 = \int_0^h (\rho w(y)) dy - \rho w(y) \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad \text{(II-27)}$$

Avec, $U(h) = U_2$ et $W(h) = W_2$

Comme la variation de densité (ρ) à travers l'épaisseur du film n'est pas importante l'équation **II-27** devient :

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) - \rho U_2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ I_2 = \rho V_2 = \rho \frac{dh}{dt} \\ I_3 = \left(\frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) + \rho w_2 \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{cases} \quad \text{(II-28)}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} Q_x = \rho \int_0^h (U(y)) dy \\ Q_z = \rho \int_0^h (w(y)) dy \end{cases}$$

$$\text{Et,} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$$

Avec, Q_x et Q_z sont les débits massiques par unité de longueur suivant les directions x et z.

On intègre Q_x et Q_z selon l'épaisseur de film on obtient :

$$\begin{cases} Q_x = \rho \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} (U_2 + U_1) \right) \\ Q_z = \rho \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{h}{2} (W_2 + W_1) \right) \end{cases} \quad \text{(II-29)}$$

L'équation **II-25** alors devient :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - \rho V_2 \quad \text{(II-30)}$$

En remplaçant V_2 , Q_x et Q_z par leurs expressions, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho h (U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [\rho h (W_1 + W_2)] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad \text{(II-31)}$$

Cette équation est l'équation de base de la mécanique de film mince visqueux par un fluide newtonien en régime isotherme.

C'est l'équation de Reynolds écrite pour un écoulement bidimensionnel (**2D**) en régime isotherme ; c'est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique, qui n'admet généralement pas une solution analytique sauf dans des cas où on la simplifie.

Le second membre de l'équation générale de Reynolds **II-26** correspond à deux effets qui sont :

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho h \vec{U}) : \text{ effet d'entraînement (wedge effect) ;}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) : \text{ effet d'écrasement (squeeze effect).}$$

$$\text{Avec : } \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_2 + U_1 \\ W_2 + W_1 \end{Bmatrix}$$

Généralement en lubrification hydrodynamique, les fluides lubrifiants sont des fluides considérés comme incompressibles [25] ; c.-à-d. la densité de lubrifiant reste constante en fonction de pression (la densité varie très peu en fonction de la pression dans le film lubrifiant $\rho(p) \approx \text{cte.}$). Dans ce cas l'équation de Reynolds **II-26** pour un fluide Newtonien (fluide propre) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [h(U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [h(W_1 + W_2)] + \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{(II-32)}$$

L'équation **II-32** est l'équation de base de la mécanique de film mince visqueux par un fluide lubrifiant Newtonien en régime laminaire et isotherme.

La résolution de l'équation de Reynolds permettra de déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant, qui servira pour le calcul des performances hydrodynamiques du contact lubrifié.

5 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté les équations de la mécanique des films minces visqueux qui vont être utilisées au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles lisses ou rugueuse, l'intégration de ces équations de la mécanique des films minces visqueux

permettent de calculer la répartition de la pression en tout point du fluide qui servira pour le calcul des performances hydrodynamiques du contact lubrifié.

1. INTRODUCTION

Lorsque deux surfaces chargées en mouvement l'une par rapport à l'autre sont entièrement séparées par un film mince visqueux, le régime de lubrification est dit hydrodynamique. La connaissance du champ de pression qui existe à l'intérieur du fluide permet de déterminer la portance d'un écoulement en film mince ainsi que les forces de frottement exercées par le fluide sur les parois du contact et le couple de frottement etc., ceci conduit à la résolution simultanée de deux équations :

- **une équation hydrodynamique qui définit le comportement du fluide**

C'est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre appelée équation de Reynolds non linéaire. La solution doit satisfaire à cette équation ainsi que les conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant, à l'alimentation et à l'environnement dans lequel fonctionne le système lubrifié ;

- **une équation géométrique qui définit la géométrie de l'épaisseur du film**

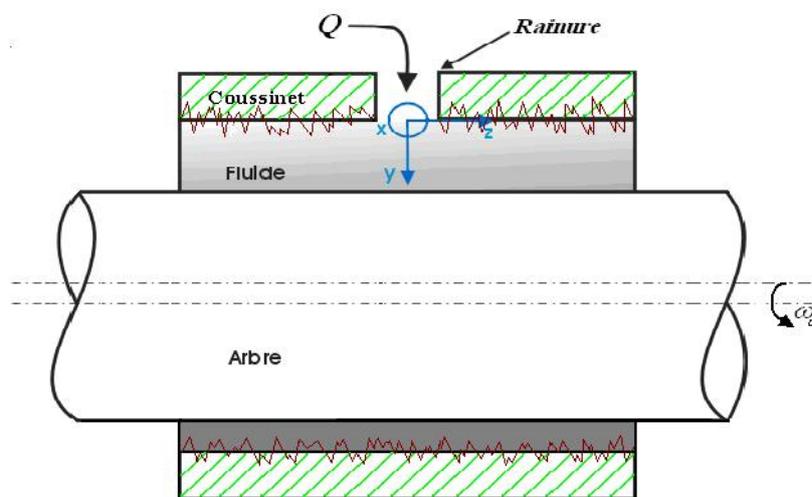
La détermination de l'équation géométrique du film permet de définir en chaque point l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas d'un palier compliant (*palier déformable*) et rugueux.

Parmi les paliers hydrodynamiques existés, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'étude des caractéristiques statiques d'un palier rugueux infiniment long lubrifié par un fluide newtonien piézo-visqueux et barotrope.

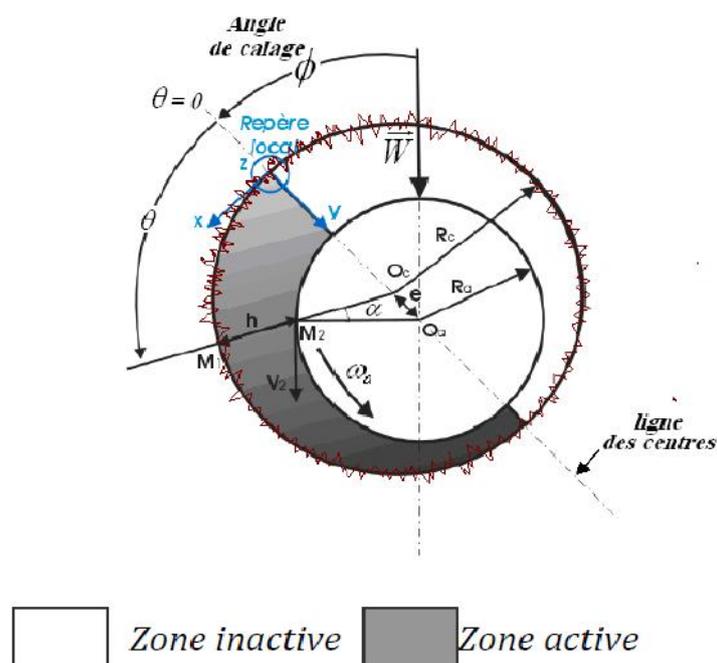
Les paliers sont des organes de machines tournantes utilisés pour guider les arbres en rotation, ils déterminent la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme. Parmi les paliers hydrodynamiques existés, on est intéressé plus particulièrement à l'étude d'un palier rugueux cylindrique, car celui-ci présente la géométrie la plus simple à réaliser et plus utilisée (**figure III-1**).

Dans un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation dans un coussinet fixe (**figures III-1.a et b**), le jeu radial **C** étant très petit devant le rayon **R** du coussinet ou de l'arbre. On peut alors négliger, la courbure du film est développée suivant sa direction circonférentielle. Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (o, x, y) du référentiel local.

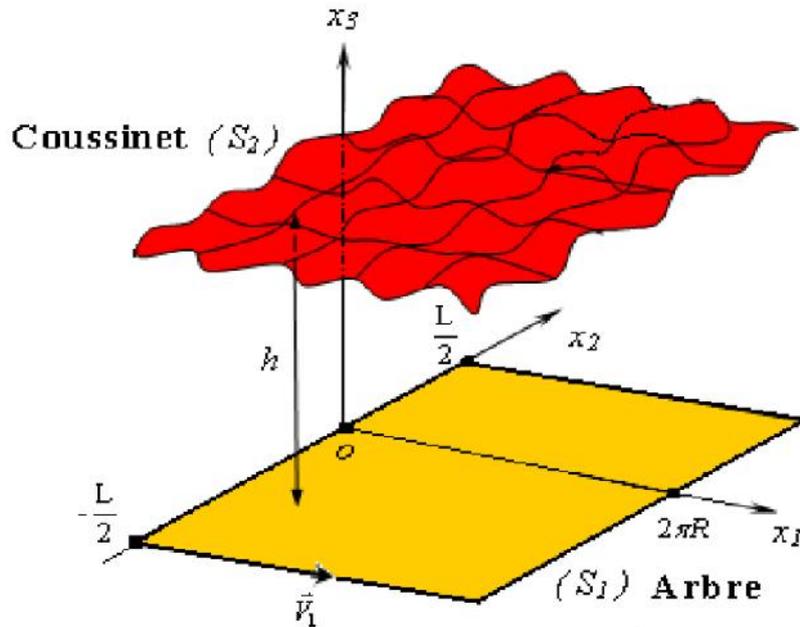
Si les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles, la surface de l'arbre est représentée par l'équation: $y = h(x)$, (**figure III-1.c**).



a) Profil d'un palier



b) section droite d'un palier



c) palier développé

Fig.III-1: Schémas d'un palier hydrodynamique

2. EXPRESSION DE L'EQUATION DE REYNOLDS DANS LE CAS D'UN PALIER RUGUEUX INFINIMENT LONG LUBRIFIE PAR UN FLUIDE NEWTONIEN PIEZOVISCEUX ET BAROTROPE

Dans le cas d'un palier l'équation de Reynolds **(II-31)** se simplifie sensiblement, elle s'écrit dans le repère local (o, x, y, z) **(figure III-1)**, l'arbre n'admet pas de déplacement axial **($\mathbf{W}_2 = \mathbf{0}$)**.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [h(U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [h(W_1 + W_2)] + \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{(III-1)}$$

Les conditions limites sur les vitesses des parois de contacts **(annexe B)** **(figure III.2)** sont :

$$\begin{cases} U_1 = V_1 = W_1 = 0 \\ U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha = R_a \omega_a \\ V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha = R_a \omega_a \frac{dh}{dx} = \omega \frac{dh}{d\theta} \end{cases} \quad \text{(III-2)}$$

$$\text{Où, } \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{dh}{dx} \text{ car } \alpha \ll 1$$

Dans l'équation **(III-2)** :

- U_1, V_1 et W_1 sont les vitesses du coussinet (*fixe*)
- U_2, V_2 et W_2 sont les vitesses de l'arbre (*mobile*)
- R_a et R_b sont respectivement les rayons de l'arbre et du coussinet tel que :
 $R_a \approx R_b = R$.

Lorsque le rapport de la longueur au diamètre du palier est grand (**L/D**), on peut négliger le débit axial, l'écoulement est donc purement circonférentielle. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tel que : **L / D > 4**.

Si, l'arbre est animé d'un mouvement de rotation uniforme $\omega_a = \omega$ et le coussinet est fixe, pour un régime permanent l'équation de Reynolds (**Eq-III.1**) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h (U_1 + U_2)) \quad \text{(III-3)}$$

Compte tenu des conditions limites sur les vitesses des parois de contacts (**Eq-III-2**) l'équation de Reynolds (**Eq-III-3**) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h U_2) \quad \text{(III-4)}$$

Soit en remplaçant par la valeur de $x = R\theta$, alors l'équation III-4 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\omega R^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho h) \quad \text{(III-5)}$$

C'est l'équation de Reynolds écrite pour un palier infiniment long en régime permanent, où :

U_2 : vitesse tangentielle de l'arbre ($U_2 = \omega R$)

p : pression dans le film lubrifiant

R : rayon du palier

θ : coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres

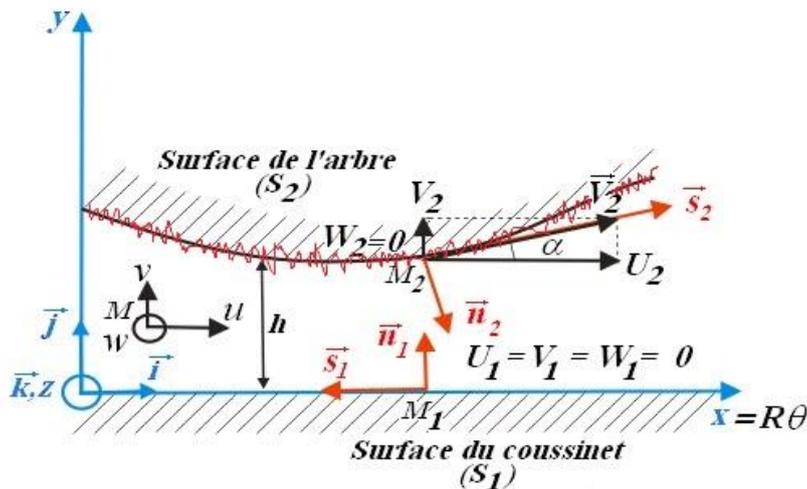


Fig.III-2: Section droite du palier développé

2.1. Conditions aux limites

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds et à certaines conditions limites liées à l'alimentation du palier ainsi qu'à l'écoulement du lubrifiant dans le palier.

2.1.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier

On suppose dans les rainures d'alimentation axiale du palier :

$$p(\theta = 0) = p_a \quad \text{(III-6)}$$

2.1.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant

On distingue trois types de conditions aux limites

a. Conditions de Sommerfeld

Ces conditions obligeant le film en entier d'être actif et ne tiennent pas compte du phénomène de cavitation (*film complet*):

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = 2\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{(III-7)}$$

La solution de Sommerfeld donne une distribution de pression antisymétrique au point, $\theta = \pi$ pour une position de l'arbre. La solution donne aussi un angle de calage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la direction de charge, ces conditions aux limites ne sont valables que pour des paliers fonctionnant à de très faibles charges ou sous des pressions très élevées.

b. Conditions de Gümbel (demi-Sommerfeld) :

ces conditions supposent les conditions sur la pression comme suit :

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = \pi) = 0 \\ p(\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \pi < \theta < 2\pi \text{ (étendue de la zone de cavitation)} \quad \text{(III-8)}$$

Ces conditions prennent en compte la rupture du film lubrifiant mais elles ne respectent pas la continuité du débit qui est physiquement inacceptable. Cette solution est fréquemment employée car elle permet d'obtenir dans le cas du palier court par exemple, une solution proche des résultats expérimentaux et elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire.

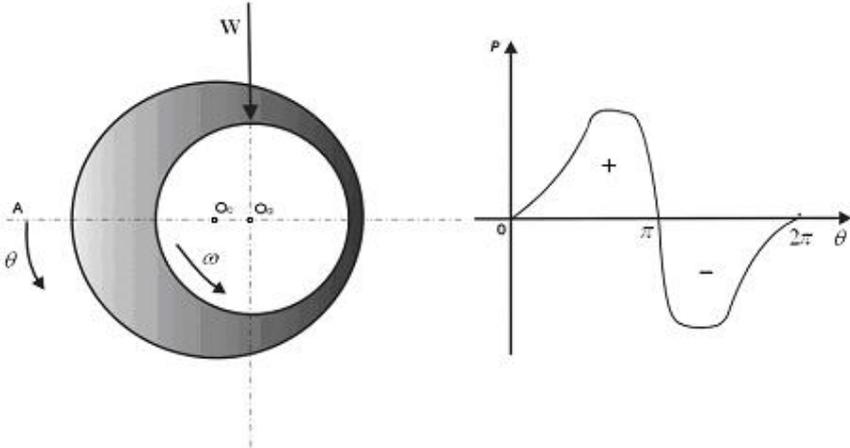
c. Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber

Ces conditions respectent la continuité du débit à la rupture du film, elles supposent que pour une abscisse θ_s à priori inconnue appelée angle de cavitation la pression et le gradient de pression s'annule :

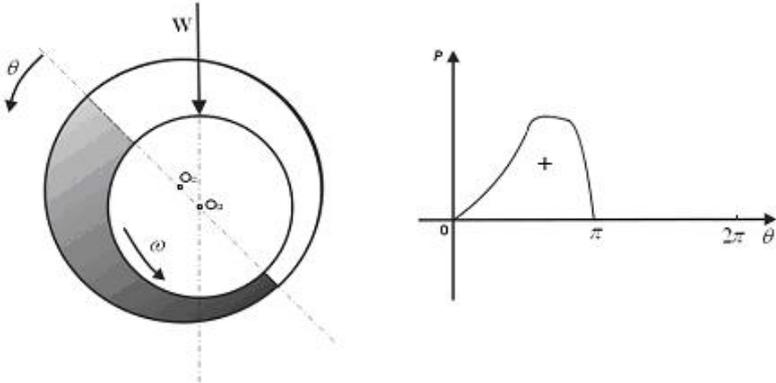
$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = \theta_s) = 0 \\ p(\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \theta_2 < \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s) = 0 \quad \text{(III-9)}$$

Les conditions les plus utilisées et relativement proche de la réalité physique sont celles de **Swift-Stieber** connues sous le nom de conditions de Reynolds. Une des difficultés majeures du calcul réside dans la double recherche de la répartition de pression dans le film et la frontière de la zone active du palier.

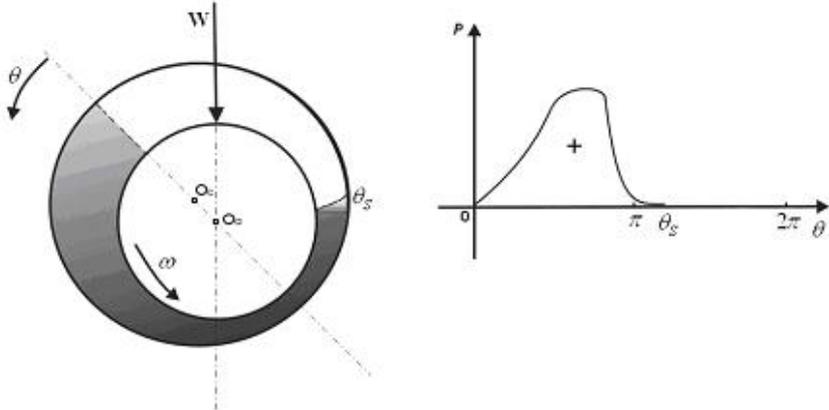
L'application de ces conditions impose l'emploi de l'algorithme de Christopherson.



a) conditions de Sommerfeld



b) conditions de Gumbel



Zone inactive
 Zone active

c) conditions de Reynolds

Fig.III-3: répartition de champ de pression pour
les différentes conditions aux limites

3. EXPRESSION DE L'ÉPAISSEUR DU FILM

a) Palier lisse et rigide

Pour une vitesse de rotation stable est une charge (\mathbf{W}) constante, le centre de l'arbre \mathbf{O}_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet.

Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique (\vec{W}) qui agit dans le plan de la section médiane du palier (*aligné*), les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles. Dans ce cas deux paramètres sont nécessaires pour positionner le centre de l'arbre (\mathbf{O}_a) par rapport au centre de coussinet (\mathbf{O}_c) :

- l'excentricité : $e = \left| \overrightarrow{O_a O_c} \right|$

- l'angle que fait la direction de la charge (\vec{W}) avec la ligne des centres, appelé angle de calage (ϕ).

Concédons une section droite du palier (**figure III-4**) un point \mathbf{M}_1 appartenant à la surface du coussinet sera repère par la coordonnée angulaire tel que : $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M_1})$

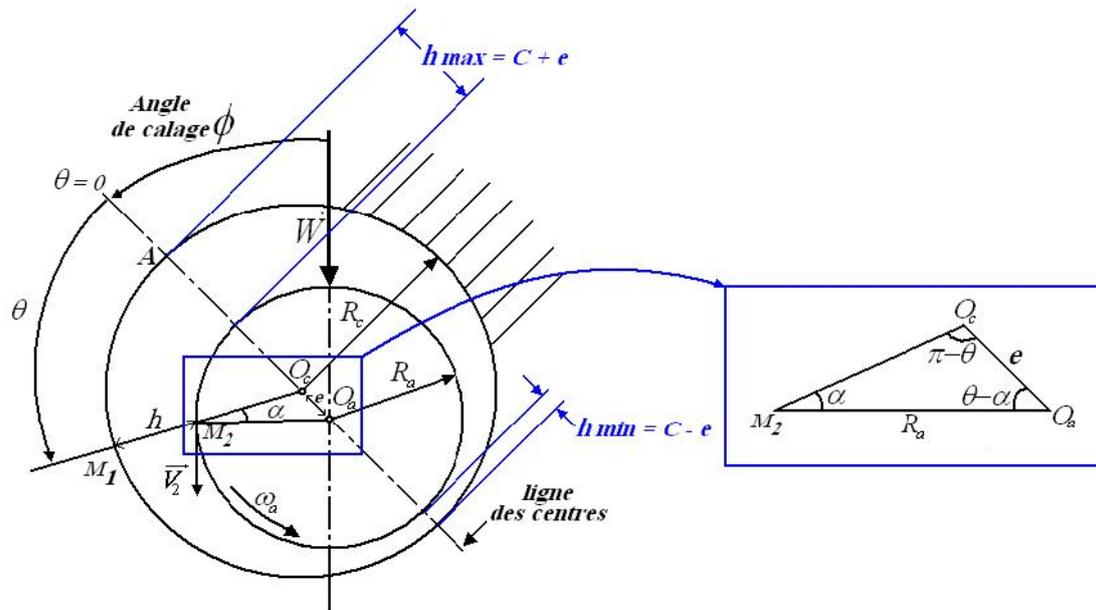


Fig.III-4: Section droite d'un palier

L'expression géométrique de l'épaisseur du film est donnée :

$$h = O_c M_1 - O_c M_2 = R_c - O_c M_2 \quad \text{(III-10)}$$

Détermination du segment $O_c M_2$

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_c O_a M_2$, il vient :

$$\frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{O_c M_2}{\sin(\theta - \alpha)}$$

d'où, $\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta$

et, $O_c M_2 = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha)$

or, $\sin(\theta - \alpha) = \sin \theta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta$

$$= \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \theta$$

$$= \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{e}{R_a} \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Donc, } O_c M_2 = R_a \left[\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right] = R_a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \right)^2 \sin^2 \theta} - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right]$$

En développant le terme $\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2}$, on obtenons :

$$\left[1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^4 + \dots$$

La quantité $\left(\frac{e}{R_a} \right)$ est très petite devant l'unité (*de l'ordre 10^{-3}*), on peut donc

négliger le terme $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2$ et $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^4$, etc. devant 1, il vient alors :

$$O_c M_2 = R_a \left(1 - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right) = R_a - e \cos \theta$$

Finalement :

$$h = R_a + C - O_c M_2 = R_a + C - R_a + e \cos \theta \quad \text{(III-11)}$$

Soit :

$$\begin{aligned} h(\theta) &= C + e \cos \theta \\ &= C(1 + \varepsilon \cos \theta) \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

C'est l'équation de l'épaisseur du film en tout point du palier, cette relation est applicable dans le cas de palier aligné et indéformable. L'équation de la géométrie du film définit en chaque point et à chaque instant l'épaisseur du film lubrifiant.

Avec, $\varepsilon = \frac{e}{C}$ qui est l'excentricité relative, elle varie de 0 à 1.

Si, $\varepsilon = 0$, l'arbre et le coussinet sont coaxiaux.

Si, $\varepsilon = 1$, il y a présence de contact entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

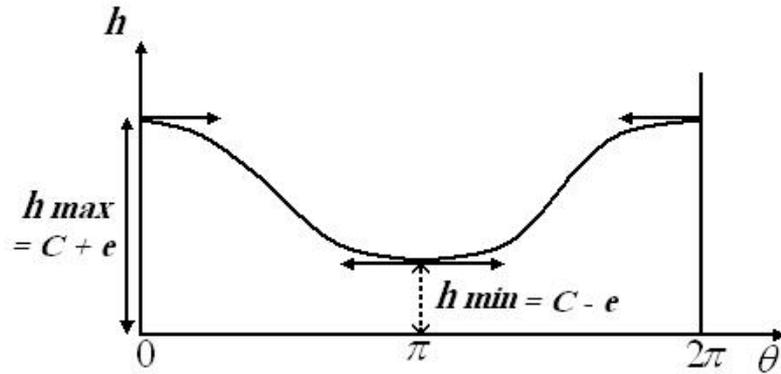


Fig.III-5: Variation de l'épaisseur du film (h) suivant l'angle θ

b) Palier compliant (déformable)

La prise en considération des déformations élastiques du revêtement de l'alésage conduit à la modification de l'équation géométrique du film (**Eq-III-12**). Dans le cas où le Modèle Couche Elastique Mince (**MCEM**) est retenu l'expression de l'épaisseur du film d'huile (**Eq-III-12**) devient [26] :

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) + U_r \quad \text{(III-13)}$$

Avec, U_r est le déplacement radial défini par : $U_r = L_0 \times p$

Où, p est la pression hydrodynamique engendrée dans le film lubrifiant et L_0 est l'opérateur de compliance qui s'exprime comme suit :

$$L_0 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{t_h}{E}$$

E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson de la couche élastique mince représentant le revêtement du palier et t_h est l'épaisseur du revêtement de surface du palier (**figure III-6**).

Notons que l'hypothèse de Modèle Couche Elastique Mince permet de déduire un modèle de calcul rapide du champ de déplacement radial. Lorsque l'épaisseur de la couche élastique mince du revêtement est très petite devant le rayon du palier, ce modèle est en général suffisant pour la prise en considération des effets de déformations élastiques dans le calcul des performances statiques et dynamiques du palier fluide [26].

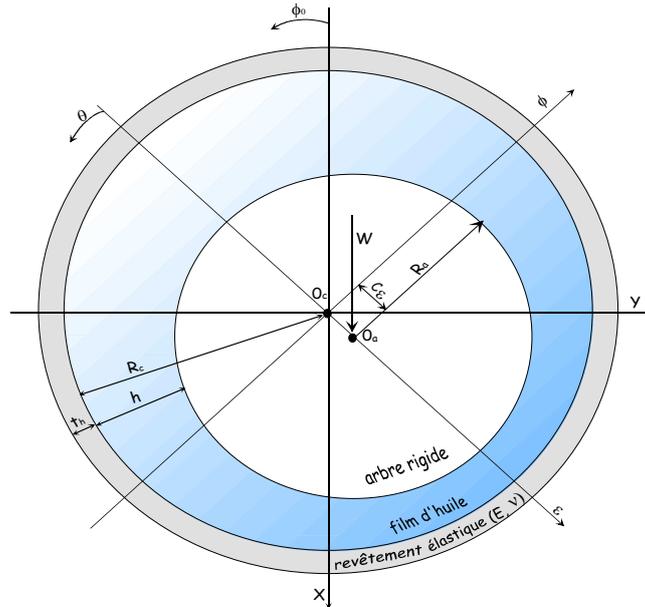


Fig.III-6: Section droite d'un palier revêtu

c) Palier rugueux

La prise en considération de la rugosité de la surface de l'arbre conduit à la modification de la géométrie locale du film, l'équation géométrique du film devient [27] :

$$h = h_0 + h_1 \tag{III-14}$$

avec,

h_0 est l'épaisseur du film sans rugosité (éq-III-13 ou éq-13)

h_1 est une fonction périodique qui peut prendre selon la forme des rugosités une expression mathématique.

Généralement, trois forme de rugosités sont considérées (**annexe C**), dans notre cas, on a intéressé que à la rugosité transversale dans le cas d'un palier infiniment long rugueux [28 29] :

$$h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p X_1}{L}\right) \tag{III-15}$$

Avec,

L : longueur de contact (**L = 2πR**)

α : amplitude de la rugosité

n_p : nombre de rugosité ou de périodes

4. PERFORMANCES STATIQUES DU PALIER

4.1. Champ de pression dans le film

La pression hydrodynamique est obtenue par intégration de l'équation de Reynolds (**Eq-III.5**) en tenant compte des conditions aux limites liées à l'alimentation du palier et à l'écoulement du fluide lubrifiant. La connaissance du champ de pression permettra de calculer toutes les performances statiques du palier.

4.2. Action du fluide sur les surfaces de l'arbre et du coussinet

L'action de contact t , appelée vecteur contrainte, exercé en un point \mathbf{M} de la surface (*paroi*) de l'arbre ou du coussinet, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \mathbf{n} (**figure III-2**):

$$t(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = t_i \mathbf{x}_i = \sigma_{ij} n_j \mathbf{x}_i \quad \text{(III-16)}$$

La matrice représentative du tenseur des contraintes dans le cas de l'écoulement unidimensionnel d'un fluide newtonien s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & -p \end{bmatrix} \quad \text{(III-17)}$$

Où, $\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ est la contrainte de cisaillement visqueuse.

Les éléments de réduction en un point \mathbf{C} quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface S du contact seront :

$$\begin{aligned} - \text{résultante} & : \mathbf{R} = \iint_S t(\mathbf{M}, \mathbf{n}) dS \\ - \text{moment en } \mathbf{C} & : \mathbf{M}(\mathbf{C}) = \iint_S \mathbf{CM} \wedge t(\mathbf{M}, \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad \text{(III-18)}$$

4.3. Composantes de la portance hydrodynamique

Dans le repère local (x, y, z) dont les vecteurs de base sont (i, j, k) (**figure III-2**), les composantes du vecteur contrainte $t(M_2, n_2)$ sont :

$$t(M_2, n_2) = [\sigma] \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} = (-p \sin \alpha - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha) \mathbf{i} + (p \cos \alpha + \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha) \mathbf{j} \quad \text{(III-19)}$$

Avec,
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$$

D'après la figure III.6, la relation qui relie le vecteur $\begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$ au vecteur $\begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix}$

s'écrit

$$\begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin r & \cos r \\ -\cos r & \sin r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos r_n & -\sin r_n \\ \sin r_n & -\cos r_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \end{Bmatrix} \quad \text{(III-20)}$$

Compte tenu de la relation (III.19), les composantes du vecteur contraint t s'écrivent :

$$t(M_2, n_2) = \left[(-p \sin r - \tau_{xy}|_{y=h} \cos r) \sin(r_n - r) + (\tau_{xy}|_{y=h} \sin r + p \cos r) \cos(r_n - r) \right] + w \left[(-p \sin r - \tau_{xy}|_{y=h} \cos r) \cos(r_n - r) + (\tau_{xy}|_{y=h} \sin r + p \cos r) \sin(r_n - r) \right] \quad \text{(III-21)}$$

Après développement de la relation (III-21) et compte tenu de $\alpha \ll 1$, on obtient :

$$t(M_2, n_2) \approx \begin{Bmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{Bmatrix}_{(\phi)} \quad \text{(III-22)}$$

Les composantes de la portance hydrodynamique dans le repère (ε, ϕ) sont obtenues par l'intégration de la relation **(III-22)** sur la surface de l'arbre :

$$\begin{aligned} F &= R_a \int_0^{2f} p \cos \theta \, d\theta \\ F_w &= R_a \int_0^{2f} p \sin \theta \, d\theta \end{aligned} \quad \text{(III-23)}$$

4.4. Couple de frottement sur l'arbre

Le vecteur moment au centre de l'arbre s'obtient par la relation suivante :

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}_a) = \int_{(S)} \mathbf{O}_a \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{t}(\mathbf{M}_2, \mathbf{n}_2) \, dS \quad \text{(III-24)}$$

avec, $\mathbf{O}_a \mathbf{M}_2 = R_a \mathbf{n}_2 = R_a (-\cos \theta \, \mathbf{i} - \sin \theta \, \mathbf{j})$

Compte tenu de la relation **(III-19)**, les composantes du vecteur moment sont :

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}_a) = R_a \int_{(S)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} |_{y=h} \end{Bmatrix} dS$$

Ou encore :

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}_a) \mathbf{k} = -R_a^2 \int_0^{2\pi} \sigma_{xy} |_{y=h} \, d\theta = C_a \quad \text{(III-25)}$$

C_a est le couple de frottement sur l'arbre.

Le fluide étant newtonien, on peut écrire :

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\omega R_a}{h} + \frac{1}{2 R_a} \frac{\partial p}{\partial \theta} (2y - h) \quad \text{(III-26)}$$

soit :

$$\sigma_{xy} \Big|_{y=h} = \sigma_h = \mu \frac{\omega R_a}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \text{(III-27)}$$

4.5. Angle de calage

L'angle de calage du palier est calculé par la relation suivante :

$$\phi = \text{arctg} \left(- \frac{F_\phi}{F_\varepsilon} \right) \quad \text{(III-28)}$$

4.5. Puissance dissipée

La puissance dissipée doit être considérée comme un paramètre important dans la conception des paliers hydrodynamiques car celle conditionne l'élévation de température du fluide lubrifiant. La puissance dissipée est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse par :

$$P = \iiint_V \Phi \, dx dy dz \quad \text{(III-29)}$$

Avec,

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \text{(III-30)}$$

Dans le cas d'un palier infiniment long $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \gg \frac{\partial p}{\partial z} \right)$ la puissance dissipée par unité de longueur d'exprime par :

$$P_u = \mu \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy R d\theta \quad \text{(III-31)}$$

Avec,
$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{R \partial \theta} (y^2 - yh) + \frac{\omega R}{h} y$$

Après l'intégration par rapport à y, on trouve :

$$P_u = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{R \partial \theta} \right)^2}_{I_1} R d\theta + \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\mu \omega^2 R^2}{h}}_{I_2} R d\theta \quad \text{(III-32)}$$

Où, I_1 et I_2 sont respectivement le terme de Poiseuille et le terme de Couette.

5. LOIS DE VARIATION VISCOSITE-PRESSION ET DENSITE-PRESSION

Lorsque le palier est sévèrement chargé, les hautes pressions engendrées dans le film lubrifiant ont une influence significative sur le lubrifiant et les surfaces des éléments constituant le palier (*arbre, coussinet, patin*). Les deux propriétés importantes du lubrifiant qui sont affectées par les pressions élevées sont la viscosité et la masse volumique. Plusieurs lois de variation viscosité-pression et densité-pression ont été proposées dans la littérature. Parmi ces lois, on cite celles qui conviennent pour l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure en régime isotherme [30 31].

5.1. Lois de variation viscosité-pression [31]

Pour caractériser l'effet piézovisqueux, on peut utiliser les lois suivantes :

- lois de Barus établie en 1893 [32] :

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha_p p} \quad \text{(III-33)}$$

où, p est la pression, μ_0 la viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique et α_p est le coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile et qui est généralement compris entre 5 et 40 GPa^{-1} . Les valeurs de ce coefficient pour différents fluides lubrifiants sont reportées dans le tableau suivant [33].

Tableau III-1 : Valeurs du coefficient de piézoviscosité pour différents fluides lubrifiants

Lubrifiant	Coefficient de piézoviscosité, α_p (GPa^{-1})

	20° C	40° C	60° C	80° C
Huile minérale naphénique	26.5	23.4	20.0	16.4
Huile minérale paraffinique	19.8	18.2	16.2	15.0
Polyglycol	18.7	16.0	13.2	10.5
TMP-ester	15.5	14.4	13.1	12.2
Diester	14.6	13.6	12.8	11.6
Polyalphaolefine	15.5	13.8	12.2	10.5

Ce coefficient est sensiblement constant pour des pressions inférieures à 70MPa. Il peut être calculé par la relation suivante [34] :

$$\alpha_p = 1,216 + 4,143(\log_{10} \nu)^{3,0627} + 2,848 \times 10^{-4} m^{5,1903} (\log_{10} \nu)^{1,5976} - 3,999(\log_{10} \nu)^{3,0975} \rho^{0,1162} \quad \text{(III-34)}$$

Dans la relation (III-34), α est le coefficient de piézoviscosité en 10^{-8} Pa^{-1} , ν est la viscosité cinématique à la température considérée en cSt ou mm^2/s , ρ la masse volumique du lubrifiant en g/cm^3 et m est le coefficient viscosité à la température, défini par la relation suivante :

$$\log_0(\log_0(\nu+a)) = -m \log_0 T + n \quad \text{(III-35)}$$

La relation (III-35) est due à **Mac Coull** et **Walther** [34]. Dans cette relation, ν est la viscosité cinématique, a , m et n des constantes qui dépendent du lubrifiant et T la température absolue en degrés Kelvin (K). La valeur de a dépend de l'unité de viscosité, si ν est en centi-Stokes (**cSt**), la valeur de a est comprise entre 0,6 et 0,75.

Autre relation, relation de **Wooster** [31] :

$$\alpha_p = (0,6 + 0,965 \log_{10} \mu_0) \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad \text{(III-36)}$$

Où, α_p en (Pa^{-1}) et μ_0 la viscosité à la pression atmosphérique en (**cPo**) ou (**mPa.s**).

- loi de Reynolds établie en 1966 :

Les effets de la pression sur la viscosité du lubrifiant sont mieux décrits par la relation de Reynolds [35]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{1 - \left(1 + \frac{p}{c}\right)^Z} \quad \text{(III-37)}$$

où,

μ_0 : viscosité à la pression atmosphérique ($p = 0$)

Z : indice pression-viscosité

$\mu_\infty = 6,31 \times 10^{-5}$ Pa.s et $c = 1,96 \times 10^8$ Pa

Autre écriture de la loi de Reynolds [36] :

$$\mu = \mu_0 \exp \left[\frac{p_0 \alpha}{Z} \left(\left(1 + \frac{p}{p_0}\right)^Z - 1 \right) \right] \quad \text{(III-38)}$$

Où, le paramètre Z est relié au coefficient de piézoviscosité α et à la viscosité dynamique du lubrifiant à la pression atmosphérique μ_0 dans le système normalisé S.I par :

$$Z = \frac{\alpha p_0}{\log_e \mu_0 + 9,67} \quad \text{(III-39)}$$

p_0 est la constante viscosité-pression de Reynolds, $p_0 = 1,96 \times 10^8$ Pa.

- loi de Sargent [37]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\frac{Ap}{B+p}} \quad \text{(III-40)}$$

Où, μ et μ_0 sont les viscosités dynamiques en mPa.s mesurées respectivement à la pression p en GPa et à la pression atmosphérique. A et B

sont des constantes dont les valeurs dépendent du fluide lubrifiant tableau **III-2**. A est sans dimension tandis que l'unité de B est celle de la pression.

Il est à noter que le terme $\frac{A}{B+p}$ peut être considéré comme l'expression du coefficient de piézo-viscosité γ intervenant dans la loi de **Barus (Eq-III-33)**.

Lorsque p tend vers 0, le terme $\frac{A}{B+p} \rightarrow \frac{A}{B}$. Donc, la loi de Barus est seulement un cas particulier de la loi de **Sargent (éq-III-36)** lorsque $p \rightarrow 0$ et le rapport $\frac{A}{B}$ devient égale à γ .

Tableau III-2: Valeurs des coefficients viscosité-pression [37]

Lubrifiant	A	B (GPa)	A/B (GPa ⁻¹)	γ (GPa ⁻¹)	Coefficient de Roelands Z
Huile paraffinique	34	1.54	22.1	22.2	0.663
Huile naphénique	49	1.62	30.2	32.4	0.867
Silicone	-14	-0.78	17.9	17.1	0.627

5.2. Loi de variation densité-pression

Pour une huile minérale, la compressibilité du lubrifiant est modélisée par **Dowson et Higginson, 1966 [30]** :

- si, p est exprimée en GPa :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6 p}{1 + 1,7 p} \quad \text{(III-41a)}$$

- si, p est exprimée en Pa :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6 \times 10^{-9} p}{1 + 1,7 \times 10^{-9} p} \quad \text{(III-41b)}$$

où, ρ_0 est la densité ou la masse volumique du lubrifiant à la pression atmosphérique.

La variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression est représentée sur la **figure III-7**.

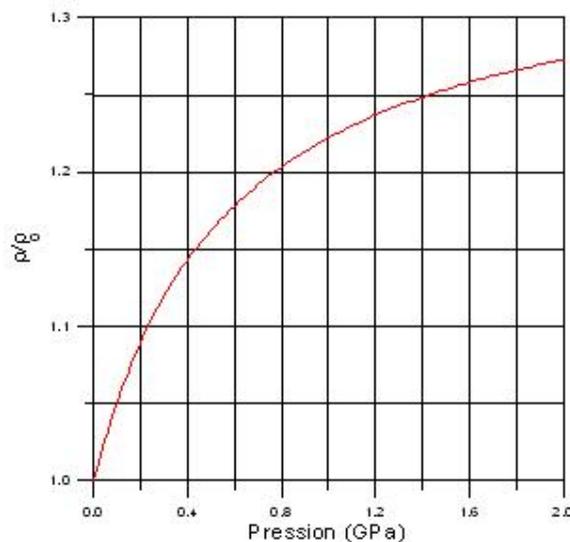


Fig. III-7: Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de Dowson et Higginson [30].

6. SOLUTION DU PROBLEME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE EN REGIME ISOTHERME

6.1. Equation de Reynolds en variables sans dimension

La prise en considération des effets rhéologique du fluide lubrifiant (*fluide piézovisqueux et barotrope*), de l'élasticité du revêtement de surface et la rugosité de surface rend l'équation de Reynolds non linéaire.

Pour les traitements numériques, on doit écrire en variables réduites

Pour cela on pose :

$$\theta = \frac{x}{R}, \tilde{p} = \frac{p}{\mu_0 \omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}, \tilde{h} = \frac{h}{C}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \text{ et } \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{C} \quad \text{(III-42)}$$

μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité et la masse volumique à température de référence.

En remplaçant les variables réduites dans l'équation de Reynolds (III-5) on obtient :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) = 6 \frac{d}{d\theta} (\tilde{\rho} \tilde{h}) \quad \text{(III-43)}$$

$$\text{Où,} \quad \tilde{\mu} = e^{\tilde{\alpha}_p \tilde{p}} \quad (\text{loi de barus}) \quad \text{(III-44)}$$

$$\text{Avec,} \quad \tilde{\alpha}_p = \mu_0 \omega \left(\frac{R}{C}\right)^2 \alpha_p$$

$$\tilde{\rho} = 1 + \frac{0,6 \times 10^{-9} p}{1 + 1,7 \times 10^{-9} p} \quad (\text{Dowson et Higginson}) \quad \text{(III-45)}$$

6.2. Equation géométrique adimensionnée

l'expression de l'épaisseur du film adimensionnée dans le cas rugueux et compliant devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \tilde{\alpha} \sin(n_p \theta) + \tilde{U}_r \quad \text{(III-46)}$$

Où, \tilde{U}_r est le déplacement radial adimensionné défini par :

$$\tilde{U}_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \times \tilde{C}_d \times \tilde{t}_h \times \tilde{p}$$

Avec, $\tilde{t}_h = t_h / R$ est l'épaisseur relative de la couche élastique mince du revêtement de surface du palier et \tilde{C}_d est le coefficient de déformation

élastique qui donné par l'expression suite : $\tilde{C}_d = \frac{\mu_0 \omega (R/C)^3}{E}$

D'après l'expression de coefficient de déformation élastique, on remarque que le coefficient de déformation est nul lorsque le module d'élasticité du matériau tend vers l'infini (*couche rigide*).

6.3. Performances statiques du palier sans dimensions

- Angle de calage

L'angle de calage du palier est calculé par la relation suivante :

$$\phi = \text{arctg} \left(- \frac{\tilde{F}_\phi}{\tilde{F}_\varepsilon} \right) \quad \text{(III-47)}$$

- Composantes de la portance hydrodynamique et le couple de frottement

Les relations de ce dernier s'expriment par :

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \frac{C^2}{\mu_0 \omega R_a^3} F = \int_0^{2\pi} \tilde{p} \cos \theta d\theta \\ \tilde{F}_\phi &= \frac{C^2}{\mu_0 \omega R_a^3} F_\phi = \int_0^{2\pi} \tilde{p} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad \text{(III-48)}$$

$$\tilde{C}_a = \frac{C_a}{\mu_0 \omega R_a^2 \left(\frac{R_a}{C} \right)^2} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\tilde{h}} + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) d\theta \quad \text{(III-49)}$$

- Puissance dissipée

La puissance dissipée adimensionnée donnée par :

$$\tilde{P}_u = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{h}^3}{12} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tilde{h}} d\theta \quad \text{(III-50)}$$

avec , $\tilde{P}_u = \frac{C}{\mu_0 \omega^2 R^3} P_u$

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté :

- l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier infiniment long rugueux lubrifié par un fluide piezovisqueux et barotrope ;
- La rupture du film (*phénomène de cavitation*) est prise en considération par l'utilisation soit des conditions de Gümbel ou celles de Swift-Stieber (*Reynolds*) qui seront utilisées pour le calcul du champ de pression ;
- La détermination de l'équation géométrique du film permet de définir en chaque point l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas d'un palier rugueux ou lisse ainsi que compliant ou rigide ;
- les expressions des performances statiques d'un palier infiniment long lubrifié par un fluide piezovisqueux et barotrope ;
- les différentes lois les plus utilisées qui nous permettent de connaître bien les variations de la viscosité et la densité en fonction de la pression.

1. INTRODUCTION

Les problèmes d'interaction structure-fluide dans les paliers hydrodynamiques (**HD**) ont fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales. Ces problèmes, qui sont fortement non linéaires interviennent dès que la prise en considération l'état de surfaces (*rugosité*), les déformations des solides principalement de l'alésage deviennent importantes de l'ordre de grandeur des épaisseurs du film lubrifiant ainsi que la variation de la viscosité de lubrifiant.

Dans notre étude, on va utiliser l'hypothèse d'une couche élastique mince permet de déduire un modèle de calcul rapide des champs de déplacement radial sont supposés proportionnels à la pression (*contrainte normale*) dues aux actions du fluides. Une technique de résolution rapide et précise de problème d'interactions fluide-structure dans les paliers compliant utilisant des fluides piezovisqueux et compressibles (*barotropes*) comme lubrifiant. Ainsi la méthode itérative de Newton-Raphson amortie permet de mettre en évidence les effets non négligeables de la rhéologie du fluide lubrifiant, de l'élasticité du fluide de la surface et la rugosité des surfaces sur le comportement statique des paliers.

Une étude paramétrique sera envisagée afin de mettre en évidence les effets de la rugosité transversale de la surface de l'arbre, de la rhéologie du lubrifiant et de l'élasticité des revêtements de surface sur les performances statiques d'un palier infiniment long lubrifié par un fluide piezovisqueux et barotrope.

2. DISCRETISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTREES UNIDIMENSIONNELLES POUR UN PALIER RUGUEUX INFINIMENT LONG

On a choisi la méthode des différences finie centrées pour la résolution de l'équation de Reynolds, car cette méthode simple, à mettre en œuvre pour des géométries de film et d'alimentation régulières, le maillage du palier infiniment long ne se fait que selon sa direction circonférentielle, la pression aux nœuds du maillages est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point (*i*) du maillage en fonction des valeurs de la pression aux point environnants (**figure IV-1**).

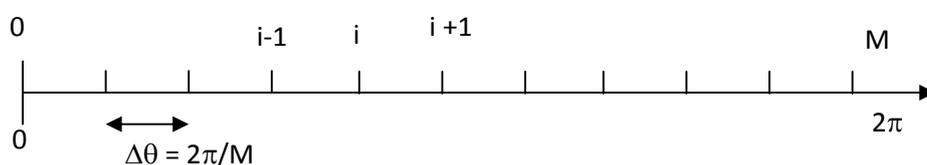


Fig.IV-1 : Discrétisation par la méthode des différences

finies de la circonférence du palier

La circonférence du palier est divisée en **M** intervalles d'amplitude angulaire :

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$$

L'utilisation des différences finies centrées permet d'évaluer les dérivées circonférentielles de la pression \tilde{p} comme suit :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right)_i = \frac{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}}{2\Delta\theta} \\ \left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\theta^2}\right)_i = \frac{\tilde{p}_{i-1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i+1}}{(\Delta\theta)^2} \end{cases} \quad \text{(IV-1)}$$

L'équation **(III-34)** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\tilde{p}) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) - 6 \frac{d}{d\theta} (\tilde{\rho}\tilde{h}) = 0 \quad \text{(IV-2)}$$

Le développement de l'équation **(IV-2)** donne :

$$f(\tilde{p}) = \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right) + 3 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^2 \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \frac{d\tilde{p}}{d\theta} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d^2\tilde{p}}{d\theta^2} - 6\tilde{h} \frac{d\tilde{\rho}}{d\theta} - 6\tilde{\rho} \frac{d\tilde{h}}{d\theta} = 0 \quad \text{(IV-3)}$$

La discrétisation de l'équation **(IV-3)** par la méthode des différences finies centrées donne :

$$\begin{aligned} f_i = \tilde{h}_i^3 \frac{\left(\left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_{i+1} - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_{i-1} \right)}{2\Delta\theta} \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta} + 3 \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_i \tilde{h}_i^2 \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})}{2\Delta\theta} \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta} + \\ \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_i \tilde{h}_i^3 \frac{(\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1})}{(\Delta\theta)^2} - 6\tilde{h}_i \frac{(\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_{i-1})}{2\Delta\theta} - 6\tilde{\rho}_i \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})}{2\Delta\theta} = 0 \end{aligned} \quad \text{(IV-4)}$$

Avec, $i = 0, M-1$

On suppose que : $F_i = \frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\mu}_i}$

Sachant que : $\tilde{\rho}_i = f(\tilde{p}_i)$, $\tilde{\mu}_i = f(\tilde{p}_i)$ et $\tilde{h}_i = f(\tilde{p}_i)$

Alors,

$$f_i(\tilde{p}) = \tilde{h}_i^3 \left(\frac{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}}{2\Delta\theta} \right) \left(\frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta\theta} \right) + 3F_i \left(\frac{\tilde{h}_{i+1}^3 - \tilde{h}_{i-1}^3}{2\Delta\theta} \right) \left(\frac{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}}{2\Delta\theta} \right) + \tilde{h}_i^3 F_i \left(\frac{\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1}}{(\Delta\theta)^2} \right) - 6\tilde{h}_i \left(\frac{\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_{i-1}}{2\Delta\theta} \right) - 6\tilde{\rho}_i \left(\frac{\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1}}{2\Delta\theta} \right) = 0 \quad (\text{IV-5})$$

Avec, $i = 0, M-1$

Dans le cas d'un palier rugueux compliant l'expression d'épaisseur de film donnée par :

$$\tilde{h}_i = 1 + \varepsilon \cos\theta_i + \tilde{\alpha} \sin(n_p \theta_i) + \sum_{j=0}^{M-1} L_{ij} \tilde{p}_j \quad (\text{IV-6})$$

Avec, L_{ij} sont les coefficients de la matrice de compliance.

Lorsque le modèle couche mince est appliqué, ces coefficients s'expriment par :

$$L_{ij} = \tilde{L} \delta_{ij}$$

Où, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $\tilde{L} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \tilde{C}_d \tilde{t}_h$.

3. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON LINEAIRES PAR LA METHODE ITERATIVE DE NEWTON-RAPHSON AMORTIE

Les méthodes de résolution d'une équation non linéaire ou d'un système des équations non linéaires sont nombreuses [38]. On ne présente que la méthode de *Newton-Raphson* qui est la plus importante et la plus utilisée en pratique.

3.1. Equation non linéaire

- *Principe de la méthode* : Si, $f(x)$ continue en voisinage de x^* , alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé $x^{(n)}$ est :

$$f(x^{(n)}) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^* - x^{(n)}) + f''(x^{(n)}) \frac{(x^* - x^{(n)})^2}{2!} + \dots \quad (\text{IV-7})$$

Si, $x^{(n)}$ est un estimé proche de la solution x^* de $f(x) = 0$, alors l'erreur :

$$\varepsilon^{(n)} = x^* - x^{(n)}$$

Et les termes de degré supérieur sont négligeables.

Sachant que, $f(x^*) = 0$, on obtient la relation approximation suivante :

$$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^* - x^{(n)}) = 0 \quad (\text{IV-8})$$

Une approximation de l'erreur est donc :

$$\varepsilon^{(n)} = - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \quad (\text{IV-9})$$

On peut donc, considérer qu'un meilleur estimé de x^* sera :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \quad (\text{IV-10})$$

3.2. Système d'équations non linéaire

- *Principe de la méthode* : Dans ce cas le problème consiste à trouver le ou les vecteurs, $\mathbf{P} = \langle \tilde{p}_1; \tilde{p}_2; \tilde{p}_3; \dots; \tilde{p}_n \rangle$ vérifiant les n équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_3(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

Où, les f_i sont des fonctions de n variables $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n$ que on suppose différentiables. Le problème (IV-11) apparaît comme une généralisation au cas

dimensionnel du problème $f(\tilde{\mathbf{p}})=0$. De même qu'une équation non linéaire $f(\tilde{\mathbf{p}})=0$ peut posséder plusieurs racines, le système **(IV-11)** peut posséder plusieurs solutions.

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général.

Considérons donc le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) = 0 \\ f_2(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{(IV-12)}$$

Soit, $(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$, une approximation initiale ou un estimé initial de la solution.

Le but de ce qui suit est de déterminer une correction $(\delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$ à $(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) = f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) = 0 \\ f_2(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) = f_2(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer $(\delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$, il suffit maintenant de faire un développement en séries de *Taylor* de f_1 et f_2 au point $(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$:

$$0 = f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) = f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_1}(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})\delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})\delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \text{termes d'ordre} \geq 2$$

$$0 = f_2(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) = f_2(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_1}(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})\delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}(\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})\delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)} + \text{termes d'ordre} \geq 2$$

Pour déterminer $(\delta\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)}, \delta\tilde{\mathbf{p}}_2^{(0)})$, il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur:

$$-\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{p}_1^{(0)} \\ \delta \tilde{p}_2^{(0)} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV-13)}$$

Il convient de remarquer que lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur, la solution $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ devient une approximation qui sera prise comme nouveau

point de départ $(\tilde{p}_1^{(1)}, \tilde{p}_2^{(1)})$ de la prochaine approximation tel que :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(1)} = \tilde{p}_1^{(0)} + \delta \tilde{p}_1^{(0)} \\ \tilde{p}_2^{(1)} = \tilde{p}_2^{(0)} + \delta \tilde{p}_2^{(0)} \end{cases} \quad \text{(IV-14)}$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de *Newton-Raphson* pour deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{p}_1^{(k)} \\ \delta \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV-15)}$$

Avec, $k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \quad \text{(IV-16)}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} - \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \end{pmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} f_1(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \\ f_2(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \end{Bmatrix}$$

De manière plus générale pour un système de n équations, on pose :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \delta \tilde{p}_j^{(k)} = -f_i^{(k)} \quad \text{(IV-17)}$$

où, $E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j} \Big|_{\mathbf{P}^{(k)}}$ sont les composantes de la matrice jacobienne tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(k)} = \langle \tilde{p}_1^{(k)} ; \tilde{p}_2^{(k)} ; \dots ; \tilde{p}_n^{(k)} \rangle \quad \text{Avec,}$$

$$\text{Et, } \mathbf{f}(\mathbf{P}^{(k)}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{P}^{(k)}) \\ f_2(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{P}^{(k)}) \end{Bmatrix} ; \quad \delta \mathbf{P}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \delta \tilde{p}_1 \\ \delta \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \delta \tilde{p}_n \end{Bmatrix}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution, la méthode ne converge pas.

3.3. Méthode de Newton-Raphson amortie

L'algorithme de Newton-Raphson amorti s'écrit :

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda \delta \tilde{p}_i^{(k)} \quad \text{(IV-18)}$$

Où,

λ est le coefficient de relaxation ;

$\lambda = 1$: méthode classique de *Newton* ;

$\lambda < 1$: méthode de *Newton* dite amortie

Notons que cet algorithme converge plus vite que l'algorithme précédent.

3.4. Algorithme de Newton-Raphson amorti

1. Etant donné $\varepsilon^{(1)}$, un critère d'arrêt ;
2. Etant donné k_{\max} , le nombre maximal d'itérations ;
3. Etant donné $\mathbf{P}^{(0)} = \langle \tilde{p}_1^{(0)} ; \tilde{p}_2^{(0)} ; \dots ; \tilde{p}_n^{(0)} \rangle$, une approximation initiale de la solution du système ;
4. Calculer la matrice jacobienne E_{ij} ;

5. Résoudre le système linéaire par la méthode d'élimination de *Gauss* :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \delta \tilde{p}_j^{(k)} = -f_i^{(k)}$$

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda^{(k)} \tilde{\delta p}_i^{(k)} \quad 6. \text{ Calculer :}$$

$$\frac{|\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}|}{|\tilde{p}_i^{(k+1)}|} < \varepsilon^{(1)} \quad \text{et} \quad |f_i^{(k+1)}| < \varepsilon^{(1)} \quad 7. \text{ Si ;}$$

- convergence atteinte

- arrêt

8. Si, le nombre maximal d'itérations k_{\max} est atteint :

- convergence non atteinte en K_{\max} itérations

- arrêt

9. Sinon, poser $k \leftarrow k+1$

10. Retour à l'étape 4 pour une autre itération

3.5. Calcul de la matrice jacobienne

Il existe une variante de la méthode de *Newton* qui évite le calcul des n^2 dérivées et qui ne nécessite que les n fonctions $f_i(\mathbf{P})$. La méthode de *Newton* modifiée consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences

centrées ou décentrées, soit :

- *Approximation du second ordre par différences centrées* $o(\delta^2)$:

$$E_{ij} = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\delta p}_j} (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n) \approx \frac{f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j - \delta, \dots, \tilde{p}_n)}{2\delta} \quad \text{(IV-19)}$$

- *Approximation du premier ordre par différences décentrées* $o(\delta)$:

$$\frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\delta p}_j} \approx \frac{f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j - \delta, \dots, \tilde{p}_n)}{\delta} \quad \text{(IV-20)}$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide.

Dans ces deux approximations, la valeur de U est 10^{-4} .

4. CALCUL DES CARACTERISTIQUES STATIQUES

Les intégrales des caractéristiques statiques sont évaluées à l'aide de la méthode des trapèzes généralisées.

4.1. Portance hydrodynamique et couple de frottement par unité de longueur

D'après l'équation (Eq-III-48) on a :

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \frac{C^2}{\mu_0 \omega R_a^3} F = \int_0^{2\pi} \tilde{p} \cos \theta d\theta \\ \tilde{F}_\phi &= \frac{C^2}{\mu_0 \omega R_a^3} F_\phi = \int_0^{2\pi} \tilde{p} \sin \theta d\theta\end{aligned}\tag{IV-21}$$

Pour calculer ces dernières on utilise la méthode des trapèzes comme suit :

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta \approx \frac{\Delta\theta}{2} \left[\tilde{f}_0 + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \tilde{f}_i + \tilde{f}_M \right]$$

Comme, $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_M$, alors : $\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta \approx \Delta\theta \sum_{i=1}^M \tilde{f}_i$

Finalement, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_\varepsilon \\ \tilde{F}_\phi \end{Bmatrix} = \Delta\theta \sum_{i=1}^M \tilde{P}_i \begin{Bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{Bmatrix}\tag{IV-22}$$

D'après la formule du couple de frottement sur l'arbre (Eq-III-49), on utilise la méthode des Trapèzes, on obtient :

$$\tilde{C}_a = \frac{\Delta\theta}{2} \left[\tilde{C}_a(M) + \tilde{C}_a(0) + 2 \sum_{i=2}^M \tilde{C}_a(i) \right]\tag{IV-23}$$

On peut écrire aussi : $\tilde{C}_a = \frac{\Delta\theta}{2} \left[\left(\frac{1}{\tilde{h}_M} + \frac{\tilde{h}_M}{2} \frac{\partial \tilde{P}_M}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{\tilde{h}_0} + \frac{\tilde{h}_0}{2} \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \theta} \right) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{1}{\tilde{h}_i} + \frac{\tilde{h}_i}{2} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \theta} \right) \right]$

On obtient alors :

$$\tilde{C}_a = \Delta\theta \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\tilde{h}_i} + \frac{\tilde{h}_i}{2} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \theta} \right)\tag{IV-24}$$

4.2. Calcul de la puissance dissipée par unité de longueur

D'après la relation de la puissance dissipée équation (Eq-III-50), évaluée par la méthode des trapèzes généralisée :

$$\tilde{P}_u = \Delta_u \sum_{i=1}^M \tilde{P}_u(i) \quad (\text{IV-25})$$

Donc,

$$\tilde{P}_u = \Delta\theta \sum_{i=1}^M \left[\tilde{h}_i^3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{h}_i} \right] \quad (\text{IV-26})$$

5- SCHEMA GENERAL DE RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

1. Lecture des données : $\tilde{h}_i, \tilde{\alpha}, \tilde{c}_d, \tilde{\alpha}_p, \varepsilon, \nu, \lambda, n_p$, etc. ;
2. Calcul du champ de pression initial $\tilde{p}_i^{(0)}$ en utilisant la solution de *Gümbel* dans le cas du palier rigide (**annexe D**), $i = 0, M$ où M est le nombre d'intervalles ;
3. Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée \tilde{h}_i , de la viscosité dynamique adimensionnée ($\tilde{\mu}_i$) et de la densité relative ($\tilde{\rho}_i$) à partir des équations Eq-IV-6 et eq-III-44 et Eq-III-45 ;
4. Calcul du résidu (f_i) aux nœuds intérieurs ($i = 1, M-1$), de l'équation IV-5 ;
5. Construction de la matrice jacobienne, $E_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j}$ par la méthode des différences finie (Eq-IV-20) ;
6. Résolution du système linéaire : $\sum_{j=1}^{M-1} E_{ij} \delta \tilde{p}_j = -f_i$
7. Calcul de la nouvelle répartition de la pression : $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda \delta \tilde{p}_i^{(k)}$
8. Si, $\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \left| \frac{\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}}{\tilde{p}_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-5}$
 - convergence atteinte
 - calcul des performances hydrodynamiques du palier compliant

- arrêt

9. Sinon poser $k \leftarrow k + 1$ et retourner à l'étape 3 pour une autre itération ;

10- Calcule les composantes de la portance hydrodynamique ($\tilde{F}_\epsilon, \tilde{F}_\phi$), couple de frottement (\tilde{C}_a) et l'angle de calage (ϕ) à partir des équations.

6. ETUDE PARAMETRIQUE

Dans cette étude paramétrique, on va étudier l'influence de la rugosité de surface de l'arbre du palier sur le champ de pression, la géométrie du film, la portance hydrodynamique, la puissance dissipée et l'angle de calage d'un palier rugueux infiniment long lubrifié par un fluide piézo-visqueux dont les caractéristiques géométrique, les conditions de fonctionnement, les propriétés physiques du lubrifiant et les caractéristiques élastique et géométrique du revêtement de surface sont portés dans le tableau IV-1.

Tableau IV-1: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.

Caractéristiques géométriques	
- Rayon de l'arbre, R_a	0.025 m
- Jeu radial, C	5×10^{-5} m
Conditions de fonctionnement	
- Vitesse angulaire de l'arbre, \tilde{S}	$100 \times \pi$ rd/s
Propriétés du lubrifiant	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, μ_0	0.030 Pa.s
- Masse volumique, ρ_0	870 kg/m ³
- Coefficient de piézo-viscosité r_p	10×10^{-9} Pa ⁻¹
Caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement	
- Module d'Young du matériau, E	126 GPa
- Coefficient de Poisson, ϵ	0.3
- Epaisseur du revêtement, t_h	5×10^{-3} m

6.1. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film

Dans cette partie de calcul, on va montrer les effets de l'élasticité du revêtement de surface, de la piézo-viscosité et de compressibilité du fluide

lubrifiant sur la répartition de champs de pression dans le palier et l'épaisseur de film lubrifiant.

Pour bien mettre en évidence l'effet des déformations élastiques sur le comportement du palier, on a pris une épaisseur du revêtement, $t_h = 5\text{mm}$ correspondant à $\tilde{t}_h = t_h / R = 0.2$ et un revêtement de surface en bronze (**E = 126 GPa**, **ν = 0.30**).

Pour étudier les effets de l'élasticité du revêtement de surface sur la répartition de la pression dans le palier et l'épaisseur de film lubrifiant, les calculs ont été effectués pour un fluide incompressible et isovisqueux dont les quels $\tilde{\rho} = \text{cte}$ et $\tilde{\mu} = \text{cte}$.

Les résultats graphiques présentés sont obtenus à partir de l'exécution de programme de calcul élaboré en Langage Fortran de résolution du problème d'interaction fluide-structure dont lequel les déformations élastiques du revêtement sont calculées à partir du modèle couche élastique mince (**MCEM**) [26].

Les figures IV-2 et IV-3 présentent l'évolution circonférentielle de la pression hydrodynamique et l'épaisseur du film dans le palier pour un revêtement de surface du palier en bronze.

On constate que la prise en considération de la déformation élastique du revêtement de surface du palier entraîne :

- Une diminution de la pression d'ordre 12% ;
- Une augmentation de l'étendue de la zone active du palier ;
- Une augmentation de l'épaisseur du film d'ordre 20%.

A cet effet, la prise en considération des effets de l'élasticité (*déformations*) des surfaces de contact dans le calcul des paliers hydrodynamiques est indispensable.

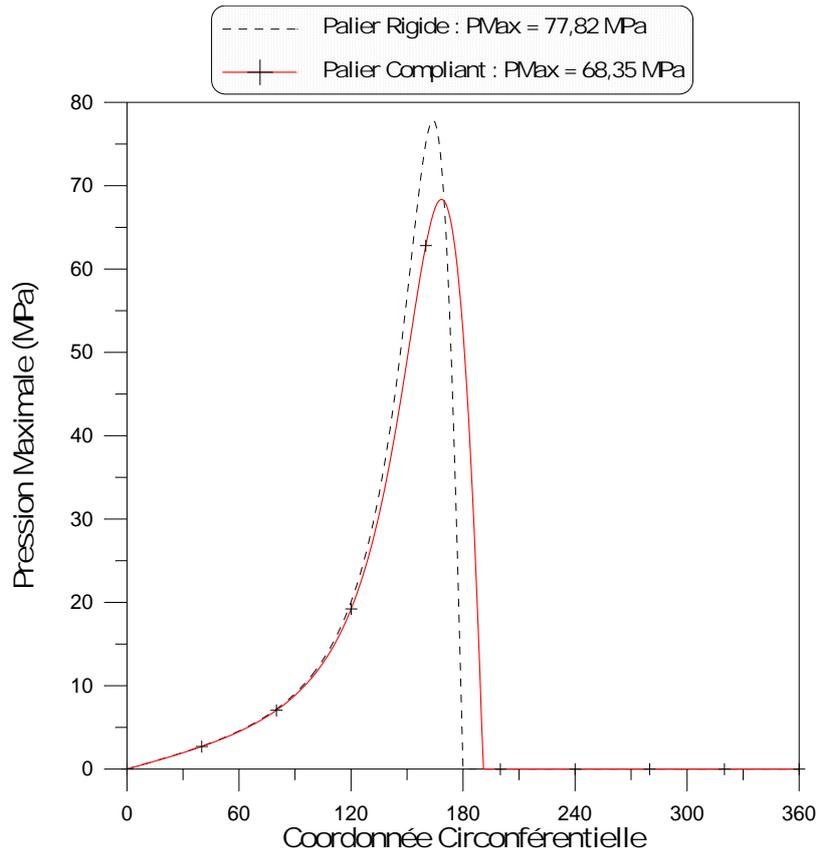


Fig. IV-2: Variations de la pression en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier rigide et compliant

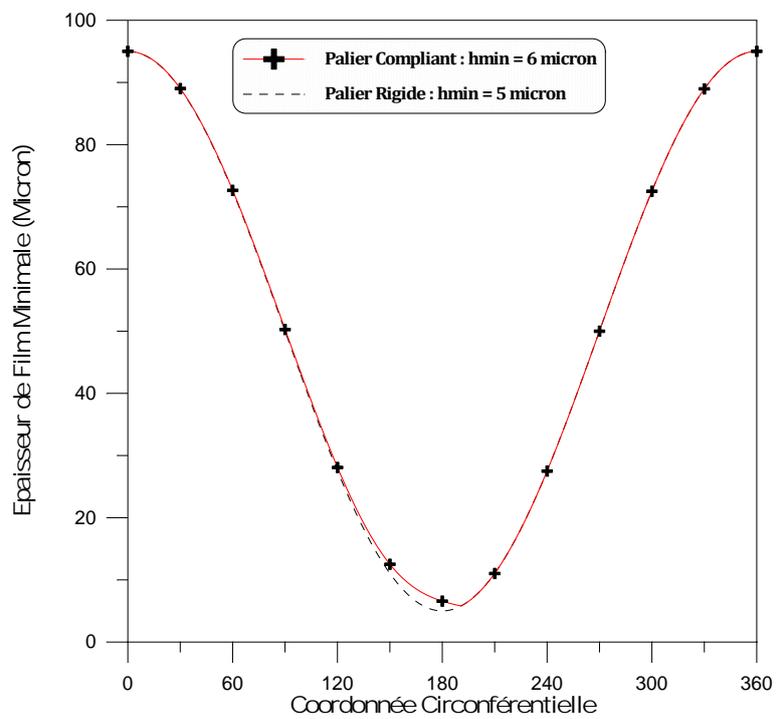


Fig. IV-3: Variations de l'épaisseur de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier rigide et compliant

L'étude des effets de la piésovisqueux du fluide lubrifiant sur le champ de pression dans le film et l'épaisseur de film lubrifiant, les calculs ont été effectués pour un palier compliant lubrifié par un fluide isovisqueux ($r_p = 0$) et piésovisqueux dont le coefficient de piézoviscosité, $r_p = 10 \hat{=} 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$.

Les figures IV-4 et IV-5 présentent l'évolution circonférentielle de la pression hydrodynamique et l'épaisseur du film dans le palier compliant lubrifié par un fluide isovisqueux et piésovisqueux.

Comme montrent les figures IV-4 et IV-5, la prise en considération de l'effet de piézoviscosité du fluide conduit à une augmentation significative de la pression maximale dans le film lubrifiant d'ordre 31% et une légère diminution de l'épaisseur de film d'ordre 4%.

On peut conclure que la prise des effets de la piézoviscosité de fluide lubrifiant est indispensable dans l'étude de comportement des paliers fluides.

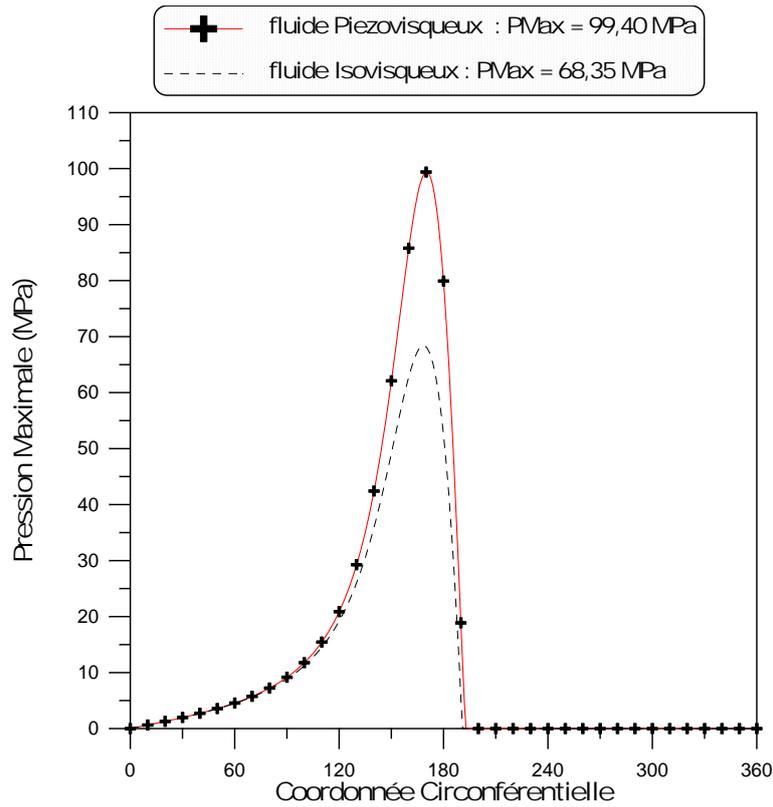


Fig. IV-4: Variations de pression de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lubrifié par fluide isovisqueux ou pézovisqueux

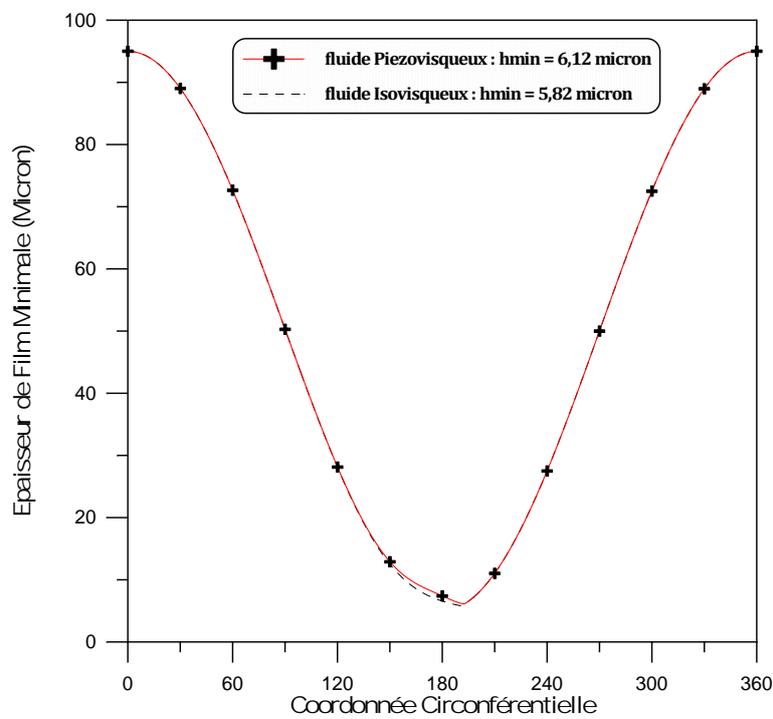


Fig. IV-5: Variations de l'épaisseur de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lubrifié par fluide isovisqueux ou pézovisqueux

L'étude des effets de la compressibilité du fluide lubrifiant sur la champs de pression dans le film lubrifiant, les calculs ont été effectués pour un palier compliant lubrifié par un fluide piésovisqueux ($\Gamma_p = 10 \hat{=} 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$).

La figure IV-6 montre clairement que l'effet de la compressibilité du film est négligeable car les pressions développées dans le film lubrifiant ne sont pas important ce qui confirme bien les résultats obtenus par Mouassa et al [25]. Il convient de noter que la compressibilité du fluide lubrifiant n'a pas d'effet sur la pression et la géométrie du film.

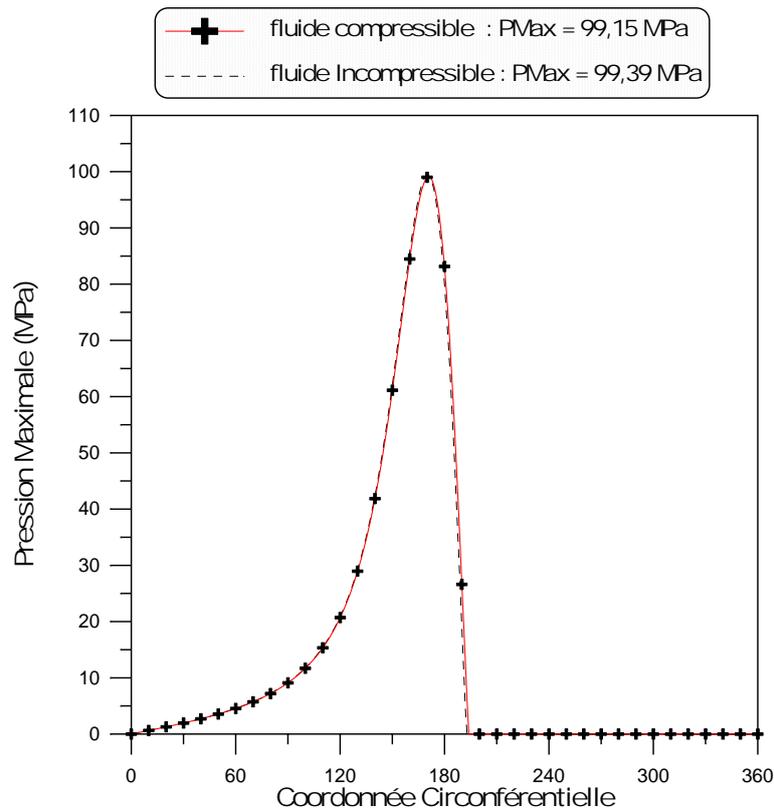


Fig. IV-6: Variations de pression de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lubrifié par fluide compressible et incompressible

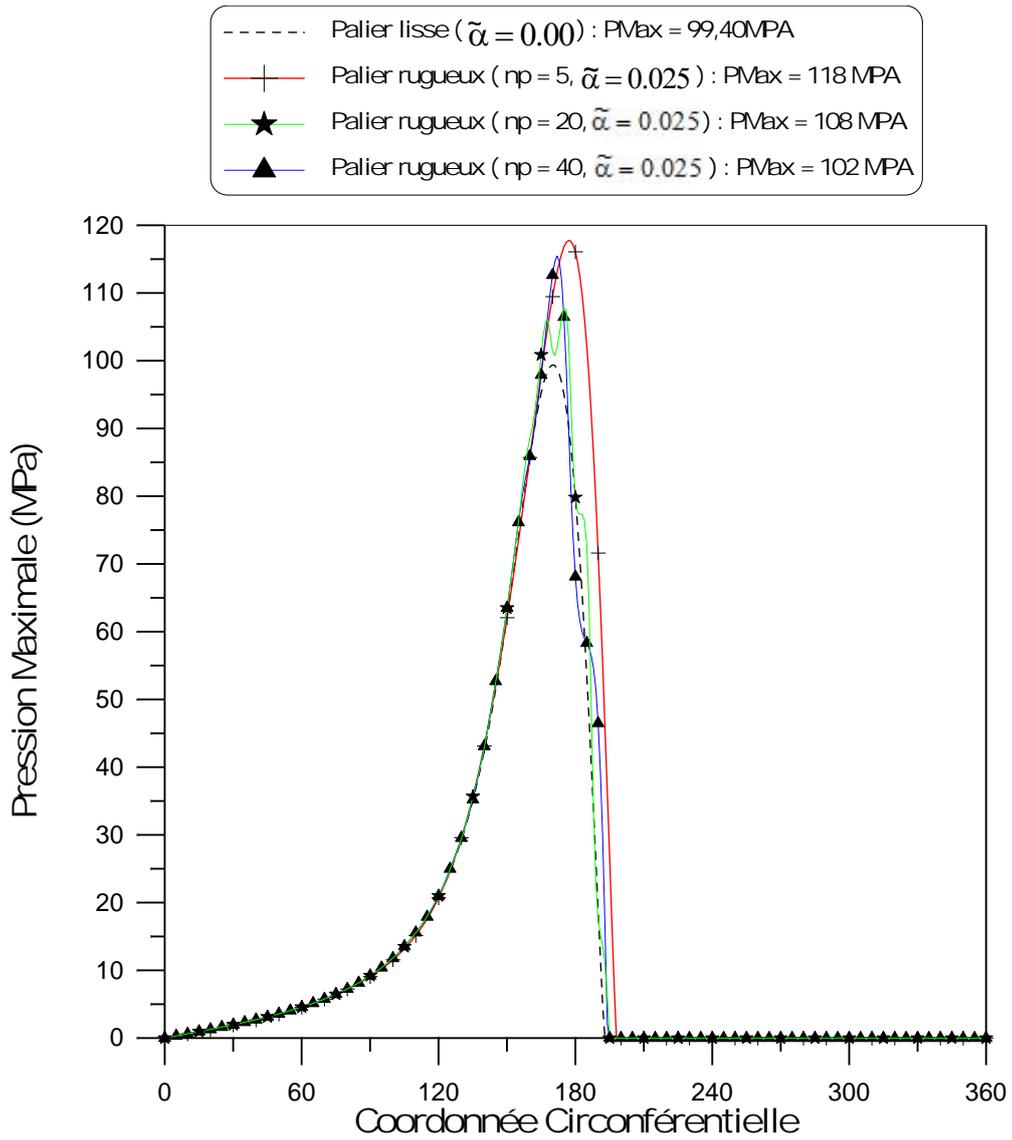
6.2. Influence de la rugosité de surface sur le champ de pression dans le film lubrifiant

L'étude des effets de la rugosité transversale de surface sur le champ de la pression dans le film d'un palier compliant lubrifié par fluide piésovisqueux ($\Gamma_p = 10 \hat{=} 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$), les calculs ont été effectués pour un nombre de la

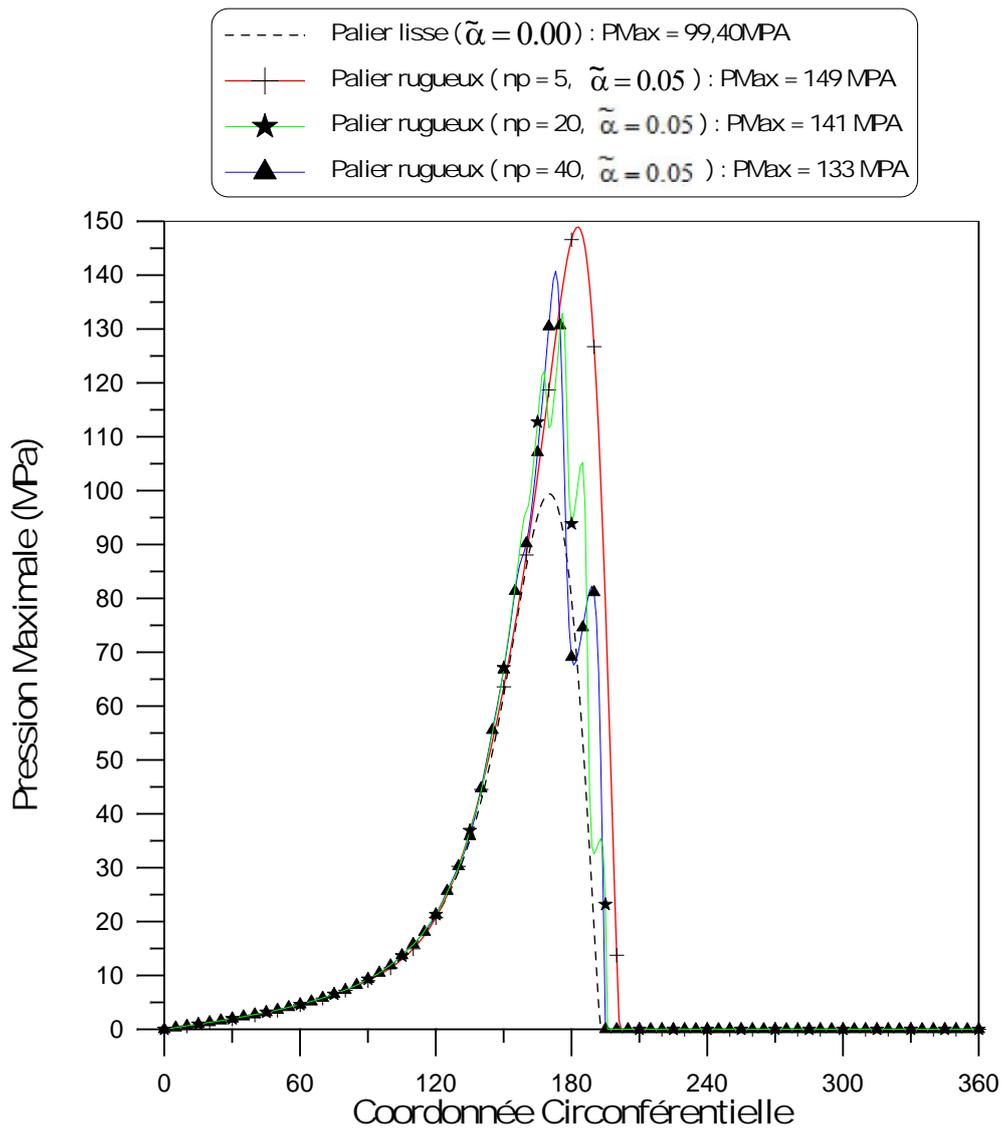
rugosité : $n_p = 5, 10, 40$ et une amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.025$ **0.05 et 0.075**.

Les résultats de l'étude paramétrique effectuée montrent clairement que la rugosité transversale de surface de l'arbre est des effets non négligeables sur le champ de pression. La présence de la rugosité entraîne d'une part une augmentation significative du pic de pression surtout dans le cas de rugosité de forte amplitude, $\tilde{\alpha} = 0.075$ qui que corresponde une amplitude de rugosité $\alpha = 3.75$ micron et faible nombre de rugosité $n_p = 5$, de l'ordre de **87%** comparativement au palier lisse ($\tilde{\alpha} = 0.00$) (*figure IV-7-c*), ce qui confirme bien les résultats obtenus par Mouassa et al et Dobrica et al [**29 19**].

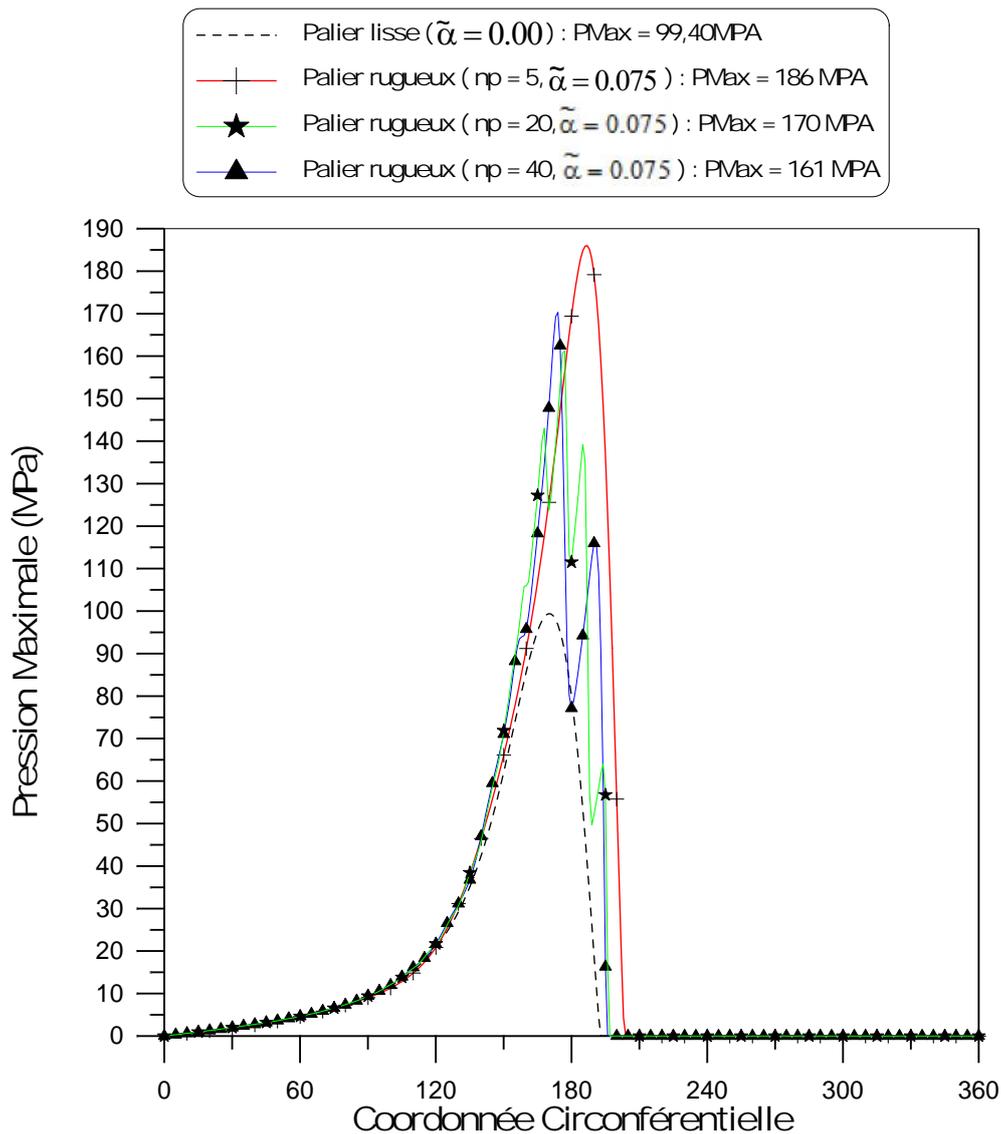
D'autre part, on remarque une augmentation importante de la zone active du palier surtout dans le cas de rugosité de forte amplitude.



a) Amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.025$



b) Amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.05$



c) **Amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.075$**

Fig. IV-7: Variations de champ pression dans film lubrifiant en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier

compliant lisse et rugueux

6.3. Influence de la rugosité de surface sur les performances statiques d'un palier compliant

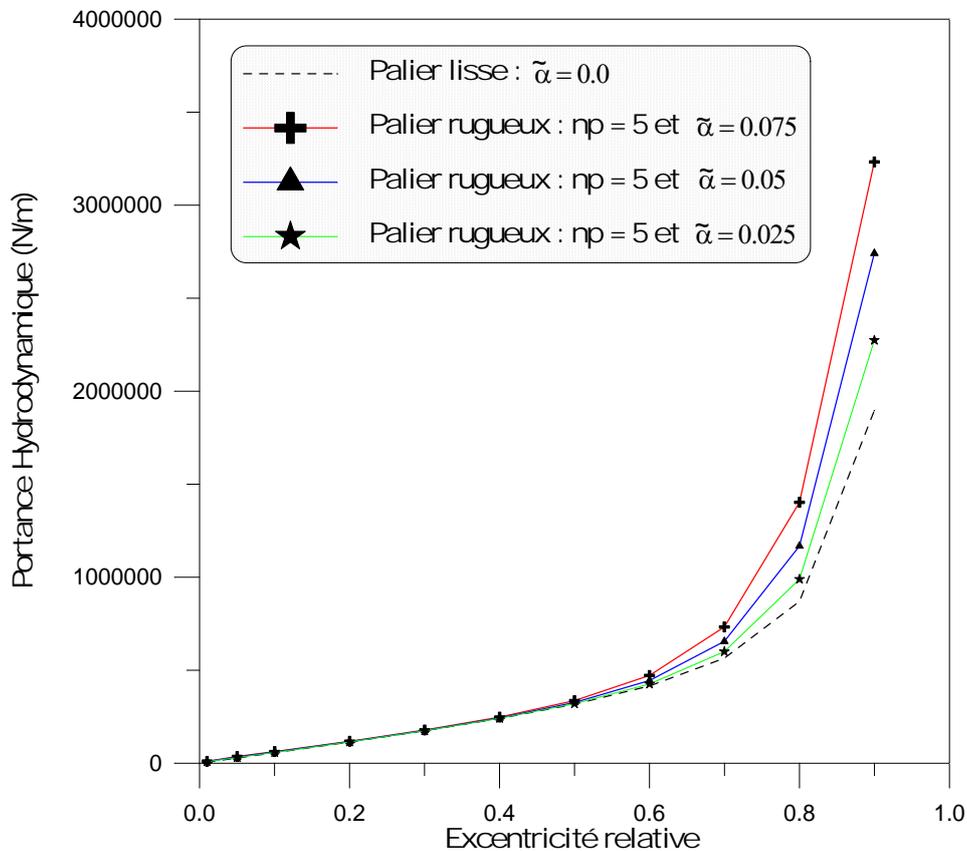
L'étude des effets de la rugosité transversale de surface d'un palier compliant lubrifié par fluide piésovisqueux ($r_p = 10 \hat{=} 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$), les calculs ont été effectués pour un nombre de la rugosité, $n_p = 5, 10, 40$ et une amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.025, 0.05, 0.075$ pour une excentricité relative statique varie de 0.01 à 0.90.

Les figures IV-8 à IV-10 présentent les variations de la portance par unité de longueur (N/m), la puissance dissipée par unité de longueur (Watt/m) et l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de nombre et amplitude de la rugosité transversale de surface de l'arbre.

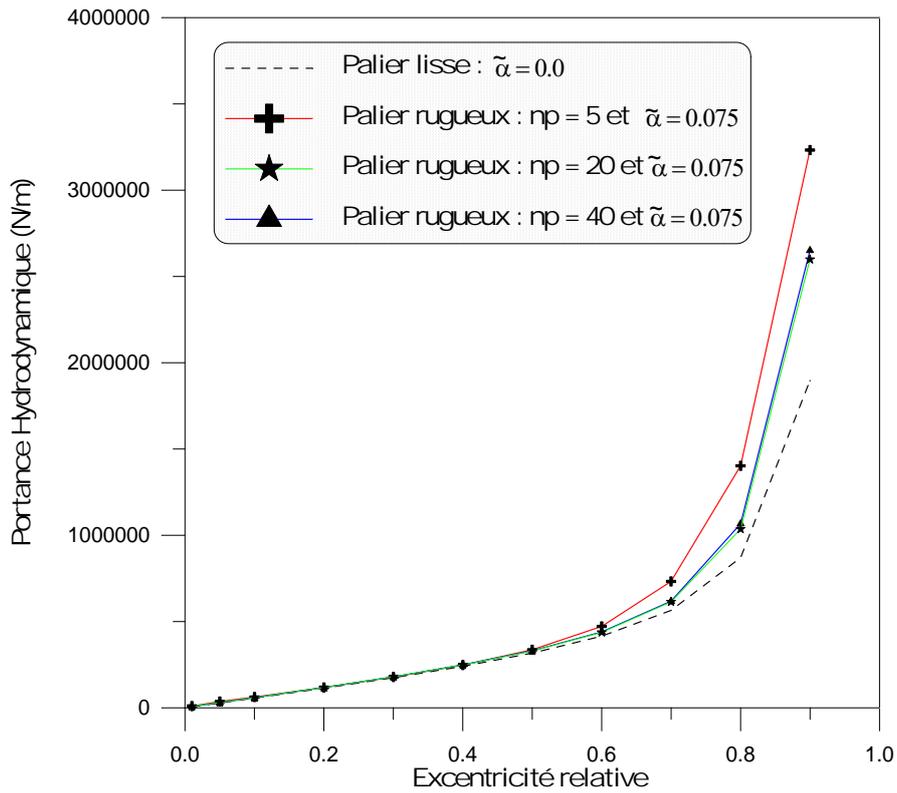
On observe d'une part une augmentation significative de la portance hydrodynamique du palier et la puissance dissipée avec l'augmentation de l'amplitude de rugosité ($\tilde{\alpha}$) surtout pour des grandes valeurs d'excentricité relative statique.

On peut conclure qu'un palier rugueux permet d'augmenter la capacité de charge du palier et les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé par comparaison au palier lisse.

D'autre part, On constate que la valeur de l'angle de calage diminue avec l'augmentation de l'amplitude de rugosité ($\tilde{\alpha}$) surtout pour des grandes valeurs d'excentricité relative statique.

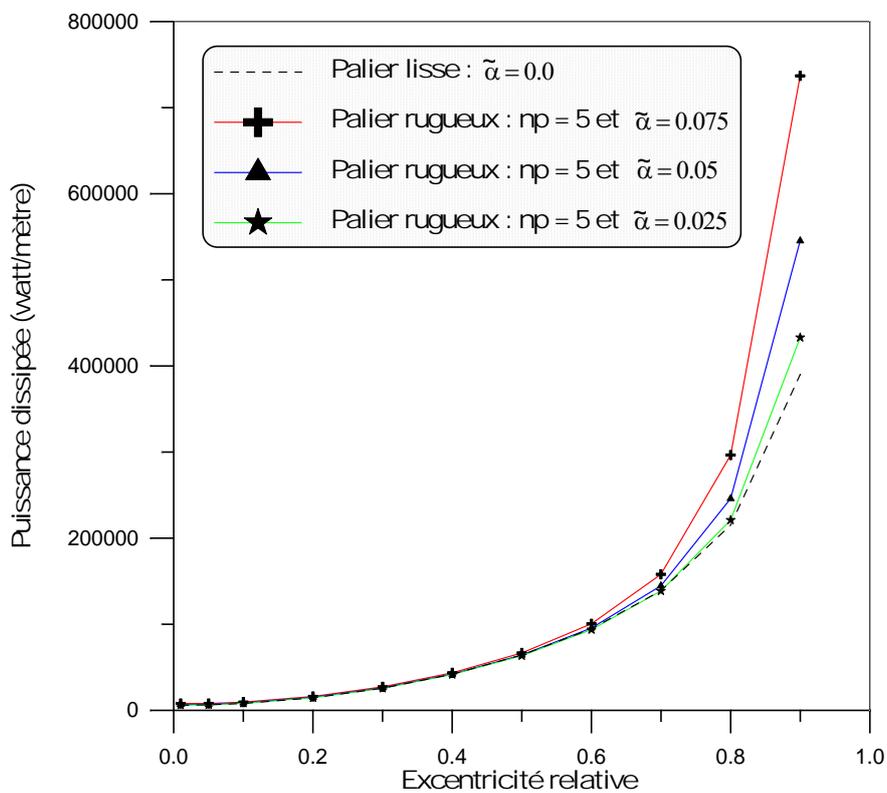


a) nombre de la rugosité, $n_p = 5$

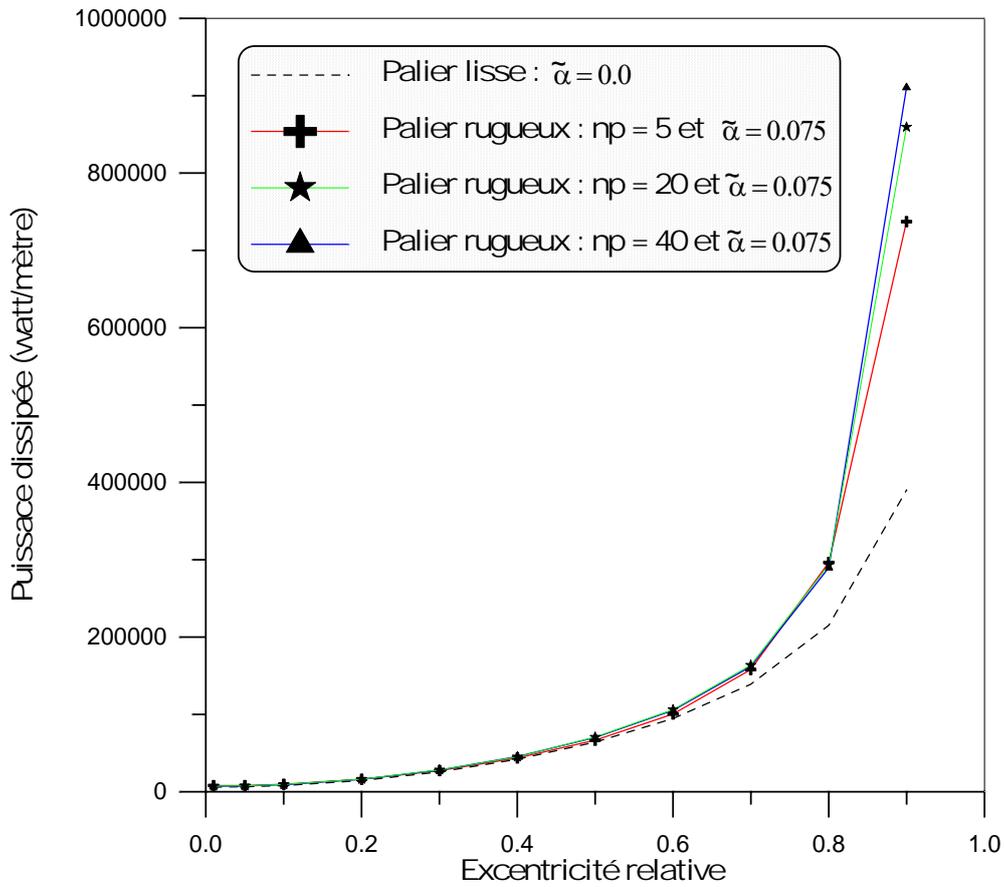


b) Amplitude de rugosité relative, $\tilde{\alpha} = 0.075$

Fig.IV-8: Variations de la portance hydrodynamique par unité de longueur en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse et rugueux

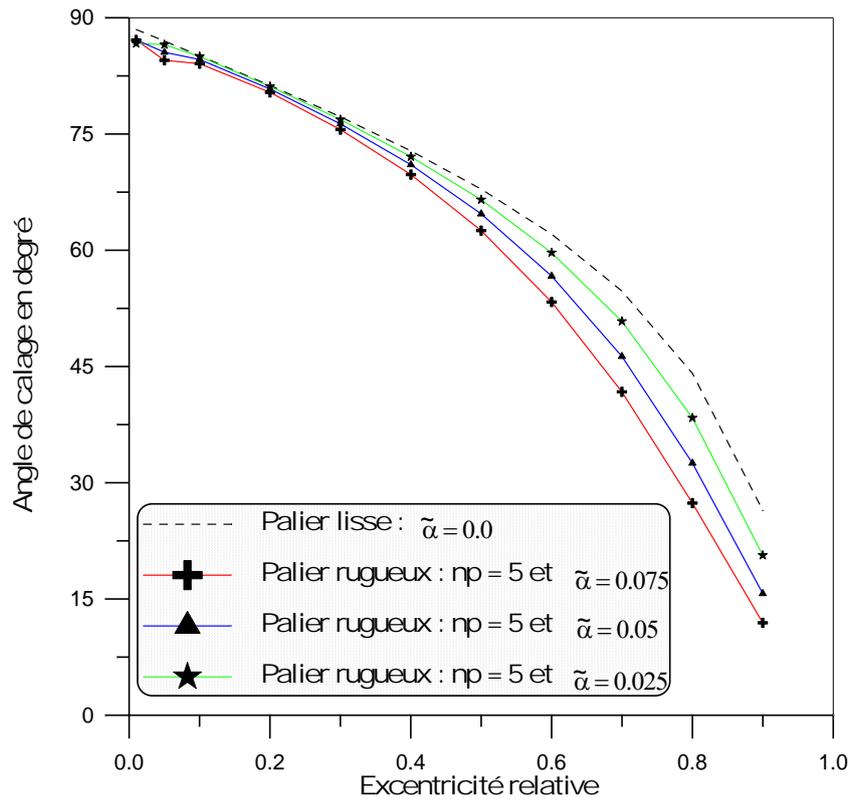


a) nombre de la rugosité $n_p = 5$

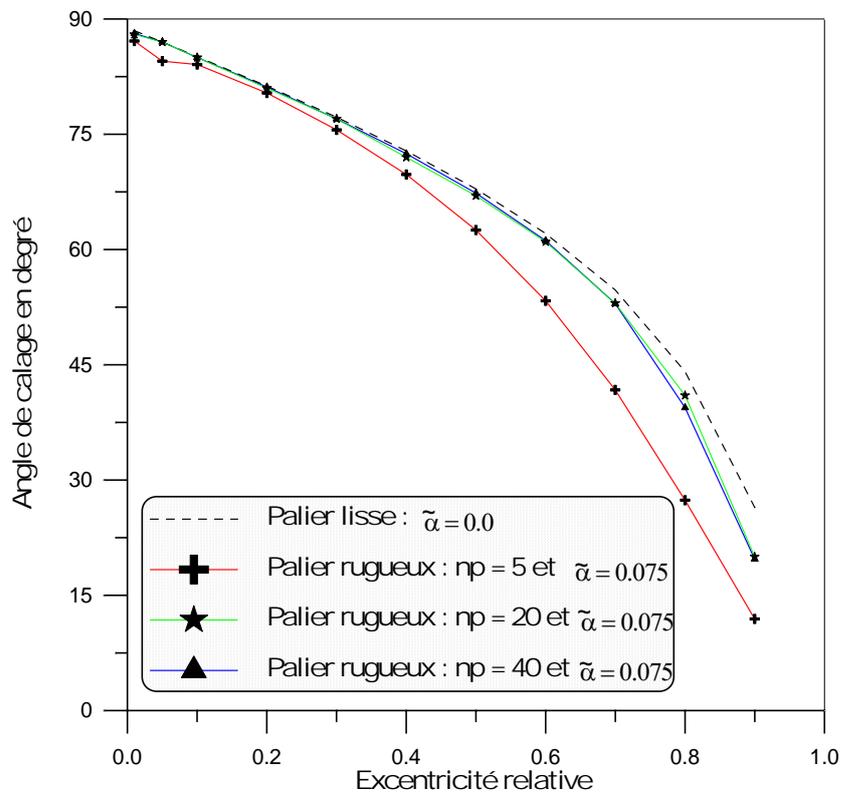


b) Amplitude de rugosité relative $\tilde{\alpha} = 0.075$

Fig. IV-9: Variations de la puissance dissipée par unité de longueur en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse et rugueux



a) nombre de la rugosité $n_p = 5$



b) Amplitude de rugosité relative $\tilde{\alpha} = 0.075$

Fig. IV-10: Variations de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse et rugueux

7. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré d'une part à l'étude de l'influence des déformations élastiques des revêtements de surface dues aux pressions hydrodynamiques et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film.

D'autre part, une étude de l'influence de la rugosité transversale de surface de l'arbre sur le champ de pression, la portance hydrodynamique, la puissance dissipée et l'angle de calage d'un palier rugueux infiniment long lubrifié par un fluide piezovisqueux.

Les résultats ont montré d'une part que la prise en considération des effets de l'élasticité (*déformations*) des surfaces de contact et la piésoviscosité du fluide lubrifiant sont indispensable dans le calcul de comportement des paliers hydrodynamiques.

D'autre part, que de la rugosité transversale de surface de l'arbre permet d'augmenter le pic de pression maximale dans le film, la portance hydrodynamique du palier et la puissance dissipée surtout pour des grandes valeurs de l'amplitude de rugosité et d'excentricité relative statique.

On peut conclure qu'un palier rugueux permet d'augmenter la capacité de charge du palier et les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé par comparaison au palier lisse.

Annexe A

ANALYSE DIMENSIONNELLE DE L'EQUATION DE NAVIER-STOKES

En reportant l'équation de comportement rhéologique Eq-II-2 dans l'équation de la dynamique Eq-II-5 et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier qui s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

(A.1)

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film (o, \bar{x}_2) est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (A.1) d'écrire :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \quad \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2 L}{VH}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{V}$$

Et d'ajouter pour cette étude :

$$\tilde{\sim} = \frac{\tilde{\sim}}{\tilde{\sim}_0} \text{ et } \tilde{\sim} = \frac{\sim}{\sim_0}, \quad \dots = \frac{\dots}{\dots_0}$$

Dans ces expressions L et v sont respectivement la dimension et caractéristique selon les axes (o, \bar{x}_1) et (o, \bar{x}_3), H, $\frac{VH}{L}$ celles suivant (o, \bar{x}_2), $\frac{L}{V}$, \sim_0 , \sim_0 définissent de grandeur du temps et des coefficients de Navier. Nous supposons que ces deux coefficients sont du même ordre de grandeur. Ce changement de variable conduit à

poser $\tilde{p} = p \frac{H^2}{\sim_0 VL}$. Remarquons que la vitesse caractéristique V peut être définie de

plusieurs façons, en hydrodynamique, changement sera la vitesse d'une des parois du contact. Si les parois du contact sont immobiles, le contact est hydrostatique, on définit alors la pression sans dimension par $\tilde{p} = \frac{p}{p_s}$ ou p_s est par exemple la pression d'alimentation et la vitesse caractéristique est :

$$V = \frac{p_s H^2}{\sim_0 L}$$

Compte tenu de ces changements de variable l'équation (A.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = v \left[-R \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_j} \right) + v \left(\tilde{z} + \tilde{y} \frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + v \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \tilde{z} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} + \\ v^2 \left[\frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + v^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) \\ \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = v^2 \left\{ v \left[-R \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_j} \right) + v \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \left(\tilde{z} + \tilde{y} \frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \tilde{z} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2} + \right. \\ \left. \frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + v^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} + v^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right\} \\ \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = v \left[-R \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_j} \right) + v \left(\tilde{z} + \tilde{y} \frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + v \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \tilde{z} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} + \\ v^2 \left[\frac{\tilde{z}_0}{\sim_0} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} + v^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \end{array} \right. \quad \text{(A.2)}$$

Où $\Re = \dots_0 \frac{VH}{\tilde{\nu}_0}$ est le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement et où

$\nu = \frac{H}{L}$, paramètre d'échelle, est en mécanique des films minces visqueux de l'ordre

de 10^{-3} . En négligeant les termes multipliés soit par ν^2 , soit par $\nu^3 \Re$ il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\nu R \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Avec, (i=1 et 3)

Les terme en $\nu \Re$, ou terme d'inertie, de l'équation (A.3) seront négligeables devant les termes de viscosité quand $\nu \Re \ll 1$, ce qui est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification.

Si par hypothèse on néglige les forces d'inertie il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

(i=1 et 3)

Et en revenant aux variables dimensionnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(- \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(- \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

**DETERMINATION DES CHAMPS DES
VITESSES U_2 ET V_2 (EN REGIME TRANSITOIRE)**

En utilisant successivement les matrices de passage des repères à $(\vec{r}, \vec{t}), (\vec{n}_2, \vec{s}_2), (\vec{i}, \vec{j})$, les composantes U_2 et V_2 (suivant les directions x et y), du vecteur vitesse \vec{V}_2 d'un point M_2 appartenant à la surface de l'arbre (S_2), telle que :

(B-1)
$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{M_2} = \vec{V}(O_a) + \overline{M_2 O_a} \wedge \vec{\omega}$$

(B-1)

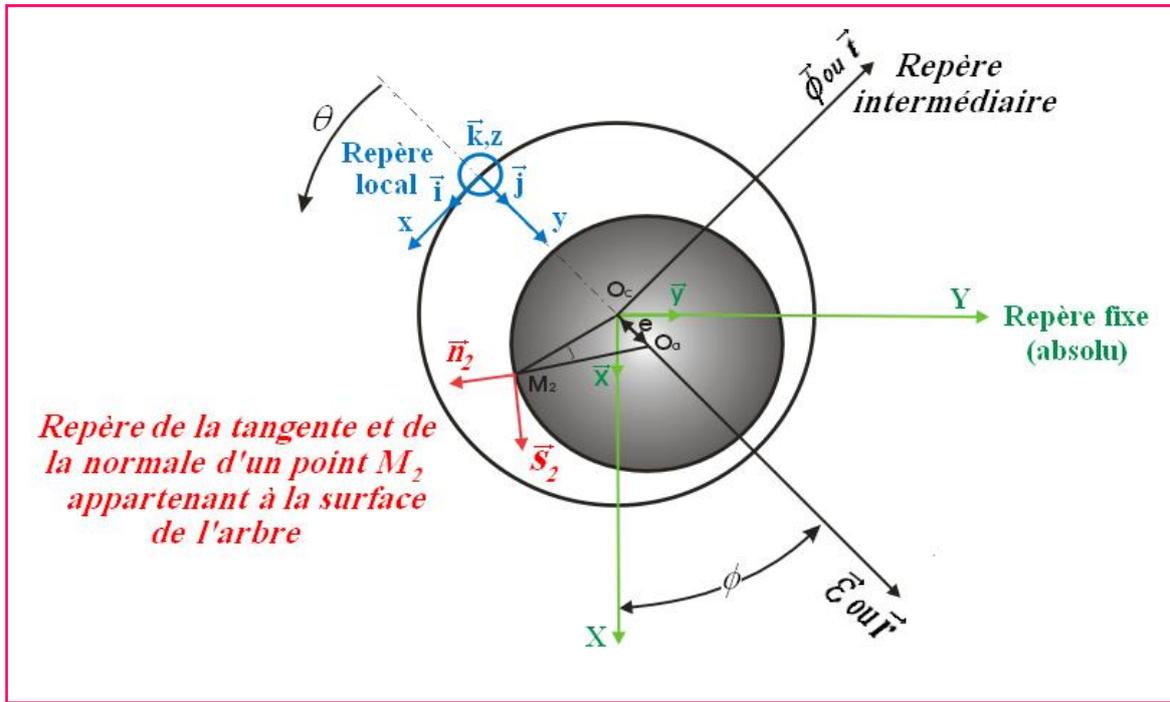


Fig.B.1 : Systèmes d'axes

Ces composantes sont exprimées dans le système de coordonnées locales.

Dans le repère $(\vec{r}, \vec{t}, \vec{z})$, Figure B-1

on a :

$$\vec{V}(O_a) = \dot{e}\vec{r} + e\dot{\phi}\vec{t} = C\dot{e}\vec{r} + C\epsilon\dot{\phi}\vec{t}$$

Dans le repère $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$:
$$\overline{M_2 O_a} = -R\vec{n}_2$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{r} = -\vec{n}_2 \cos \theta + \vec{s}_2 \sin \theta \\ \vec{t} = -\vec{n}_2 \sin \theta - \vec{s}_2 \cos \theta \end{cases}$$

Il vient :

$$(B-2) \quad \vec{V}(O_a) = \vec{n}_2(-C\dot{\epsilon}\cos\theta - C\epsilon\dot{\phi}\sin\theta) + \vec{s}_2(C\dot{\epsilon}\sin\theta - C\epsilon\dot{\phi}\cos\theta)$$

D'autre part, on a aussi :

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{s}_2 \cos\alpha + \vec{n}_2 \sin\alpha \\ \vec{j} = -\vec{n}_2 \sin\alpha - \vec{s}_2 \cos\alpha \end{cases}$$

D'autre part :

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \\ \vec{s}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{M_2O_a}$ dans le repère fixe représenté par :

$$\overrightarrow{M_2O_a} = -R\vec{n}_2 = -R\sin\alpha\vec{i} + R\cos\alpha\vec{j}$$

On a alors :

$$(B-3) \quad \overrightarrow{M_2O_a} \wedge \vec{\omega} = R\omega(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j})$$

(B-3)

On remplace l'équation (B-2) et l'équation (B-3) dans l'équation (B-1), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 = & \vec{i}(-C\dot{\epsilon}\cos\theta\sin\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\sin\theta\sin\alpha + C\dot{\epsilon}\sin\theta\cos\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\cos\theta\cos\alpha + R\omega\cos\alpha) \\ & + \vec{j}(C\dot{\epsilon}\cos\theta\cos\alpha + C\epsilon\dot{\phi}\sin\theta\cos\alpha + C\dot{\epsilon}\sin\theta\sin\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\cos\theta\sin\alpha + R\omega\sin\alpha) \end{aligned}$$

ou :

$$\vec{V}_2 = U_2\vec{i} + V_2\vec{j}$$

alors :

$$\begin{cases} U_2 = -C\dot{\epsilon}\cos\theta\sin\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\sin\theta\sin\alpha + C\dot{\epsilon}\sin\theta\cos\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\cos\theta\cos\alpha + R\omega\cos\alpha \\ V_2 = C\dot{\epsilon}\cos\theta\cos\alpha + C\epsilon\dot{\phi}\sin\theta\cos\alpha + C\dot{\epsilon}\sin\theta\sin\alpha - C\epsilon\dot{\phi}\cos\theta\sin\alpha + R\omega\sin\alpha \end{cases}$$

on a :

$$\text{tgr} = \frac{dh}{dx}$$

Comme $\left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \sin r = r \\ \cos r = 1 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} U_2 = \omega R + C \dot{\epsilon} \sin \theta - C \epsilon \dot{\phi} \cos \theta - \frac{\partial h}{\partial x} (C \dot{\epsilon} \cos \theta + C \epsilon \dot{\phi} \sin \theta) \\ V_2 = \omega R \frac{\partial h}{\partial x} + C \dot{\epsilon} \cos \theta + C \epsilon \dot{\phi} \sin \theta + \frac{\partial h}{\partial x} (C \dot{\epsilon} \sin \theta - C \epsilon \dot{\phi} \cos \theta) \end{cases}$$

$$\text{Où : } \dot{V} = \frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{W} = \frac{dW}{dt}$$

On régime permanent (tous les dérivées par rapport au temps sont nulles) les expressions des vitesses deviennent.

(B-4)

$$\begin{cases} U_2 = \omega R \\ V_2 = \omega R \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$

Annexe C

FORME DES RUGOSITES CONSIDEREES

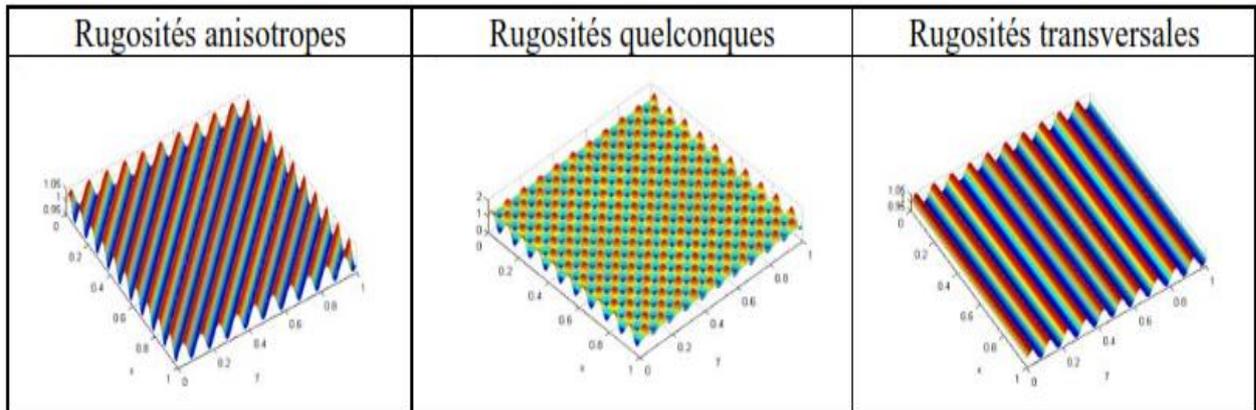
Trois formes de rugosité seront considérées : une forme de rugosité anisotrope, une rugosité quelconque et enfin une rugosité transversale [Tableau 1-C] **[28 29]** .

- Rugosités anisotropes : $\delta = \alpha \sin \left(2\pi n_r \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right)$
- Rugosités quelconques : $\delta = \alpha \sin \left(\frac{2\pi n_y}{b} \right) \times \left(\frac{2\pi n_x}{a} \right)$
- Rugosités transversales : $\delta = \alpha \sin \left(\frac{2\pi n_x}{a} \right)$

Avec,

- a : amplitude des rugosités,
- n_r : nombre de rugosités,
- a et b : demi largeur et demi longueur du contact.

Tableau 1-C : les trois formes de rugosités considérées



La géométrie du contact est obtenue en ajoutant à l'épaisseur globale « lisse » les rugosités.

Annexe D

SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'EQUATION

DE REYNOLDS POUR UN PALIER LONG LUBRIFIE PAR UN FLUIDE ESQUISQUEUX ET INCOMPRESSIBLE

Dans cette annexe, nous présentons les solutions analytiques de l'équation de *Reynolds* (Eq-III-43) correspondant aux conditions limites de *Sommerfeld* (*film complet*), de *demi-Sommerfeld* et de *Swift-Stieber* (*film rompu*).

1- Solutions de Sommerfeld et de Gumbel

Nous supposons que le palier est alimenté à la pression $p = 0$ par l'intermédiaire d'une rainure axiale infiniment mince située à l'abscisse $x = 0$, soit :

$$p(x = 0) = p(x = 2f) = 0 \quad \text{(D.1)}$$

Une première intégration de l'équation de *Reynolds* donne :

$\frac{dp}{dx} = 6\eta R_a^2 \frac{h - h^*}{h^3}$ Où h^* est l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul.

En intégrant encore une fois, on obtient :

$$p(x) = 6\eta \left(\frac{R_a}{C}\right)^2 \left[\int \frac{dx}{(1 + v \cos x)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{dx}{(1 + v \cos x)^3} \right] + K$$

Où K est une constante d'intégration.

Pour calculer ces intégrales, on utilise le changement de variable de *Sommerfeld* :

$$1 + v \cos x = \frac{1 - v^2}{1 - v \cos \xi} \quad \text{(D.2)}$$

tel que $x = 0, 2f$ correspond à $\xi = 0, 2f$

Soit :

$$p(\xi) = \frac{6\eta \left(\frac{R_a}{C}\right)^2}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \xi - v \sin \xi - \frac{h^* [2\xi - 4v \sin \xi + v^2 \xi + v^2 \sin \xi \cos \xi]}{2C(1 - v^2)} \right\} + K \quad \text{(D.3)}$$

Les deux constantes h^* et K sont déterminées à partir des conditions aux limites (D.1) :

Soit :

$$p(\mathbb{E}) = \frac{6\tilde{S}\left(\frac{R_a}{C}\right)^2}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \mathbb{E} - v \sin \mathbb{E} - \frac{2\mathbb{E} - 4v \sin \mathbb{E} + v^2 \mathbb{E} + v^2 \sin \mathbb{E} \cos \mathbb{E}}{(2-v^2)} \right\} \quad (\text{D.4})$$

Qui s'écrit aussi :

$$\tilde{p} = \frac{p}{\tilde{S}\left(\frac{R_a}{C}\right)^2} = \frac{6v \sin \mathbb{E}}{(2+v^2)(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} [2-v^2 - v \cos \mathbb{E}] \quad (\text{D.5a})$$

si on change \mathbb{E} en ω tel que : $\cos \mathbb{E} = \frac{v + \cos \omega}{1 + v \cos \omega}$; $\sin \mathbb{E} = \frac{\sqrt{1-v^2} \sin \omega}{1 + v \cos \omega}$, il vient :

$$\tilde{p}(\omega) = \frac{6v \sin \omega (2 + v \cos \omega)}{(2 + v^2)(1 + v \cos \omega)} \quad (\text{D.5b})$$

La répartition circonférentielle de la pression dans le palier est représentée figure (D-1).

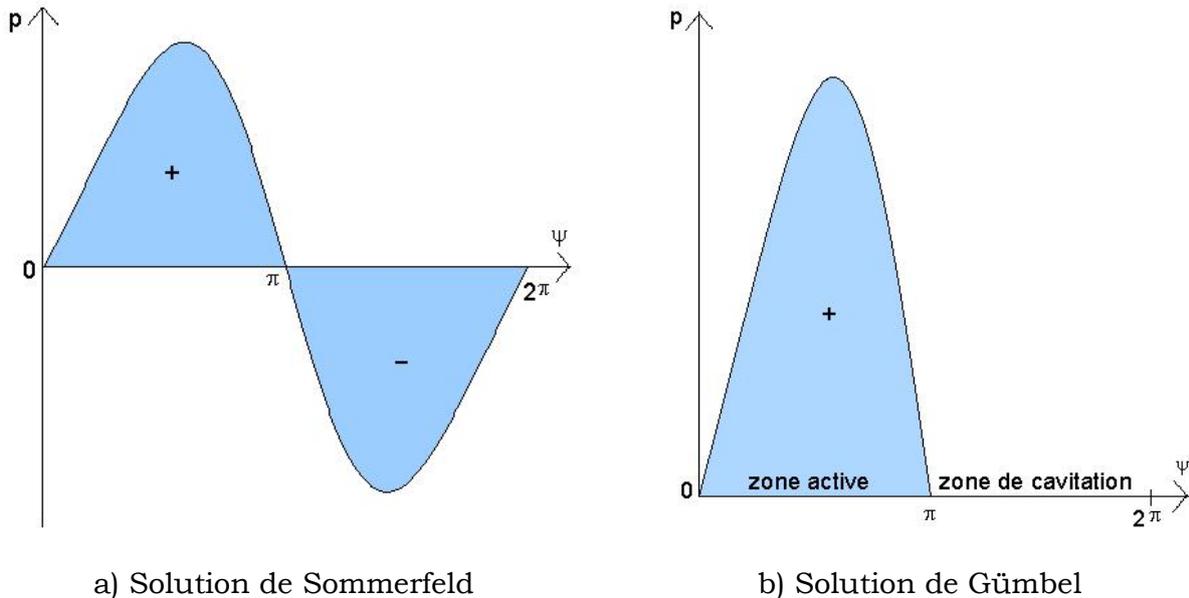


Fig. D. 1: Solutions de Sommerfeld (film complet) et de Gumbel (film rompu).

2- Solution de Swift-Stieber

$$p = p_{\text{alim}} = 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_c \text{ ou } \theta = 0$$

$$p(\theta = \theta_c) = \left(\frac{dp}{d\theta} \right)_{\theta = \theta_c} = 0 \quad (\text{D.6})$$

où θ_c est l'abscisse du début de la région inactive qui est une inconnue supplémentaire du problème.

Compte tenu des C.L. (D.6), le champ de pression s'écrit :

$$p(\theta) = \frac{6\tilde{S}R_a^2}{C^2(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \theta - v \sin\theta - \frac{2\theta - 4v \sin\theta + v^2\theta + v^2 \sin\theta \cos\theta}{2(1-v \cos\theta_c)} \right\} \quad (\text{D.7})$$

La répartition circumférentielle de la pression dans le palier est représentée figure (D-2).

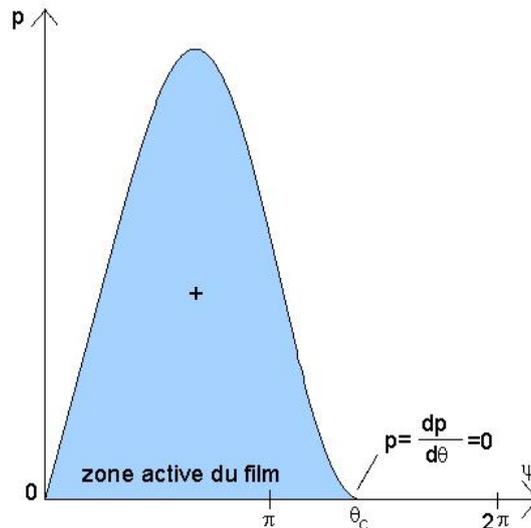


Fig. D. 2: Solution de Swift-Stieber.

Cette solution a été obtenue à partir de la solution générale (D.3) pour laquelle:

$K = 0$ puisque pour $\mathbb{E} = 0$, $p = 0$ et h^* est déterminé à partir de $\left. \frac{dp}{d\mathbb{E}} \right|_{\mathbb{E}=\mathbb{E}_c} = 0$, soit :

$$\frac{dp}{d\mathbb{E}} = \frac{6\tilde{S}R_a^2}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 - v \cos\mathbb{E} - \frac{h^* \left[2 - 4v \cos\mathbb{E} + v^2 + v^2 \cos^2\mathbb{E} \right]}{2C(1-v^2)} \right\} \quad (\text{D.8})$$

$$h^* = \frac{C(1-v^2)}{1-v \cos\mathbb{E}_c} \quad (\text{D.9})$$

on calcule \mathbb{E}_c en exprimant que pour $\mathbb{E} = \mathbb{E}_c$, nous avons $p = 0$, on a alors:

$$2(\mathbb{E}_c - v \sin\mathbb{E}_c)(1 - v \cos\mathbb{E}_c) = 2\mathbb{E}_c - 4v \sin\mathbb{E}_c + v^2\mathbb{E}_c + v^2 \sin\mathbb{E}_c \cos\mathbb{E}_c$$

Soit :

$$v(\sin\mathbb{E}_c \cos\mathbb{E}_c - \mathbb{E}_c) + 2(\sin\mathbb{E}_c - \mathbb{E}_c \cos\mathbb{E}_c) = 0$$

qui est une équation non linéaire de la forme $f_v = (\mathbb{E}_c) = 0$. L'angle de cavitation \mathbb{E}_c est déterminé numériquement par les méthodes numériques classiques de résolution des équations non linéaires (méthode de *Newton-Raphson*, méthodes d'interpolation, etc.).

on remarque que \mathbb{E}_c ou μ_c ne dépendent que de l'excentricité v .

Les valeurs de \mathbb{E}_c et μ_c en fonction de v sont données par le tableau (D.1):

Tableau D.1: Valeurs de l'angle de cavitation \mathbb{E}_c ou μ_c pour différentes valeurs de l'excentricité relative v .

v	\mathbb{E}_c (rad.)	$\mu_c = \arctg\left(\frac{\sin\mathbb{E}_c \sqrt{1-v^2}}{\cos\mathbb{E}_c - v}\right) + f$ (rad.)
-----	-----------------------	--

0.1	4.44510	4.34974
0.2	4.39765	4.21195
0.3	4.35099	4.08021
0.4	4.30484	3.95451
0.5	4.25905	3.83438
0.6	4.21346	3.71892
0.7	4.16785	3.60645
0.8	4.12203	3.49369
0.9	4.07574	3.37195

CONCLUSION GENERALE

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométriques et physico-chimiques résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces. Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir :

1. Défauts de forme et de position ;
2. Défauts d'ondulation (*défauts macroscopiques*) ;
3. Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques ;
4. Défauts localisés (*échelle microscopique*) ;
5. Structure cristalline (*échelle microscopique*) ;
6. Réseau cristallin (*échelle nanoscopique*).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Les amplitudes de rugosités peuvent varier de 0,01 microns ou moins pour les surfaces polies à 25 microns pour les surfaces usinées par des procédés conventionnels. Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD) tels que les paliers, les butées, les engrenages et les roulements, l'épaisseur du film lubrifiant est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités de la rugosité, dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Notre travail a été consacré d'une part à l'étude de l'influence des effets de la déformation élastique de revêtement de surface et la rhéologie de lubrifiant sur le champ de pression dans le film et l'épaisseur de film et d'autre part à l'étude de l'influence de la rugosité transversale sur quelques performances statiques d'un palier infiniment long lubrifié par fluide piesovisqueux.

L'étude paramétrique menée dans ce présent travail a permis de mettre en évidence d'une part que la prise en considération des effets de l'élasticité de revêtement (*déformations*) des surfaces de contact et la piésoviscosité du fluide lubrifiant sont indispensables dans le calcul de comportement des paliers hydrodynamiques.

D'autre part, les résultats ont montré que de la rugosité transversale de surface de l'arbre permet d'augmenter le pic de pression maximale dans le film, la portance hydrodynamique du palier et la puissance dissipée surtout pour des grandes valeurs de l'amplitude de rugosité et d'excentricité relative statique.

On peut conclure qu'un palier rugueux permet d'augmenter la capacité de charge du palier et les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé par comparaison au palier lisse.

LISTES DES FIGURES ET DES TABLEAUX

CHAPITRE UN

Fig. I-1 :Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe.	5
Fig. I-2 : Schéma d'un profilographe	6
Fig. I-3 : Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart arithmétique R_a	7
Fig. I-4 : Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart moyen géométrique RMS	7
Fig. I-5 :Exemple de 6 profils différents ayant les même R_a et R_q	8
Fig. I-6 : Obliquité S_k d'un profil.	9
Fig. I-7 : Etalement E_k d'un profil.	10
Fig. I-8 : Courbe du taux de la longueur portante.	10
Fig. I-9 : Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe :	11
Fig. I-10 : Photographie d'un microscope d'interférences.	12
Fig. I-11 : Microscope à force atomique (AFM).	13
Fig. I-12 : Banc de mesure utilisant le système de microscopie CAM 4D.....	13
Fig. I-13 : Schéma du système de microscopie 4-D	14
Fig.I-14 : Logiciel de visualisation des résultats du système CAM 4-D.....	15
Fig. I-15 : Topographies réelles de surfaces industrielles obtenues par la technique optique de mesure (3D)	16
Fig. I-16 : Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement.	17
Fig.I-17 : Exemples de surfaces industrielles générées numériquement	19
Fig.I-18 : Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés	22

CHAPITRE DEUX

Fig. II-1:Schéma d'un contact lubrifié	26
Fig. II-2: Géométrie et cinématique d'un contact hydrodynamique	32

CHAPITRE TROIS

Fig.III-1: Schémas d'un palier hydrodynamique	42
Fig.III-2: Section droite du palier développé.....	44
Fig.III-3: répartition de champ de pression pour les différentes conditions aux limites.....	46
Fig.III-4: Section droite d'un palier	47
Fig.III-5: Variation de l'épaisseur du film (h) suivant l'angle θ	49
Fig.III-6: Section droite d'un palier revêtu	50

Tableau III-1: Valeurs du coefficient de piézoviscosité pour différents fluides lubrifiants.....	55
Tableau III-2: Valeurs des coefficients viscosité–pression	57
Fig. III-7: Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de Dowson et Higginson	58

CHAPITRE QUATRE

Fig.IV-1: Discrétisation par la méthode des différences finies de la circonférence du palier ..	62
Tableau IV-1: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.....	70
Fig. IV-2: Variations de la pression en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant ou rigide	72
Fig. IV-3: Variations de l'épaisseur de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant ou rigide	73
Fig. IV-4: Variations de pression de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lubrifié par fluide isovisqueux ou pézovisqueux.....	74
Fig. IV-5: Variations de l'épaisseur de film en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lubrifié par fluide isovisqueux ou pézovisqueux	74
Fig. IV-6: Variations de champ pression dans film lubrifiant en fonction de coordonnées circonférentielle dans le cas d'un palier compliant lisse ou rugueux.....	75
Fig.IV-7: Variations de la portance hydrodynamique par unité de longueur en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse ou rugueux	78
Fig. IV-8: Variations de la puissance dissipée par unité de longueur en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse ou rugueux	80
Fig. IV-9: Variations de couple de frottement adimensionné par unité de longueur en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse ou rugueux	81
Fig. IV-10: Variations de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative dans le cas d'un palier compliant lisse ou rugueux.....	82

Références bibliographiques

- [1] Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 177, 1886, 157-234.
- [2] Norme Internationale ISO 13565-3, 1997, "Spécification Géométrique des Produits(GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 3 : Caractérisation des Hauteurs par la Courbe de Probabilité de Matière".
- [3] Abbott E. J., Firestone F. A., 1933, "Specifying Surface Quality: A Method Based on Accurate Measurement and Comparison", Mechanical Engineering, Vol. 55, pp.569-572.
- [4] Norme Internationale ISO 4287, 1997, "Spécification Géométrique des Produits(GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Termes, Définitions et Paramètres d'Etat de Surface".
- [5] Tzeng S T, Saibel E., Surface roughness effect on slider lubrication, ASLE Trans 1967; vol. 10, 334
- [6] Christensen H. Stochastics models for hydrodynamic lubrication of rough surfaces. Proc. IMechE 1969-70, 184 (Part 1)
- [7] Prakash J., Tiwari K. Lubrication of a porous bearing with surface corrugations. ASME Journal of Lubrication Technology, 1982; 104, 127-34
- [8] Christensen H., Tonder K. The hydrodynamic lubrication of rough bearing surfaces of finite width, Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, July 1971, Vol. 93, Serie F, 3, 324-330.
- [9] Elrod H. G. Thin-film lubrication theory for newtonian fluids possessing striated roughness or grooving. ASME Journal of Lubrication Tech., 95, 484-489, 1973.
- [10] Patir N., Cheng H. S. Effect of surface roughness orientation on central film thickness in EHD contact, Proc. 5th Leeds-Lyon Symp. Trib., 1978, 15-21

- [11] Boedo S., Booker J. F. Surface roughness and structural inertia in a mode-based mass conserving elastohydrodynamic lubrication model, *Trans. of the ASME, Journal of Tribology*, Jul. 1997, 119, 3, 449-455.
- [12] Wang P., Keith T. G. Combined surface roughness of dynamically loaded journal bearings, *Tribology Transactions*, 2002, Vol. 45, 1-10.
- [13] Elrod J. R. A cavitation algorithm, *Trans. of the ASME Journal of Lubrication Technology*, July 1981, Vol. 103, 3, 350-354.
- [14] Vijayaraghavan D., Keith J. R. Development and evaluation of a cavitation algorithm, *Tribology Transactions*, Apr. 1989, Vol. 32, 2, 225-233.
- [15] N. B. Naduvinamani, A. Siddangouda Effect of surface roughness on the hydrodynamic lubrication of porous step-slider bearings with couple stress fluids. *Tribology International*, 40, 780-793, 2007.
- [16] Kweh C. C., Patching M. J., Evans H. P., Snidle R. W. Simulation of elastohydrodynamic contacts between rough surfaces, *trans. of the ASME Journal of Tribology*, Jul. 1992, Vol. 114, 3, 412-419.
- [17] Greenwood J. A., Morales, Espejel G. E. The behavior of transverse roughness in elastohydrodynamic lubrication contact, *Proc. Of the IMechE, Journal of Tribology Engg, Part J*, 1994, Vol. 208, J2, 121-132.
- [18] Zhu D., Ai X. Point contact elastohydrodynamic lubrication based on optically measured three-dimensional rough surfaces, *Trans. of the ASME, Journal of Tribology*, Jul. 1997, Vol. 119, 3, 375-384.
- [19] Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2006. Mixed elastohydrodynamic lubrication in partial journal bearings – comparison between deterministic and stochastic models, *ASME J. Tribol.*, 128, 778-788.
- [20] **Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2008. Influence of mixed lubrication and rough elastic-plastic contact on the performance of small fluid film bearings, *STLE Tribol. Transactions*, 51, 699-717.**
- [21] Marchenko V. A., Khruslov E. Ya. Homogenization of partial differential equations, Birkhäuser, Boston 2006.

- [22] Hiroshi O., Yasuyoshi F., Noriyoshi K. Homogenization method for heterogeneous material based on boundary element method, *Computers and Structures*, 79, 2001, 1987-2007.
- [23] Marcin K. Sensitivity and randomness in homogenization of periodic fiber-reinforced composites via the response function method, *Intl Journal of Solids and Structures*, 46, 2009, 923-937.
- [24] Nicolas N., *Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconque*, Thèse de Docteur Ingénieur, Lyon, 1972.
- [25] Mouassa A., Boucherit H., Bou-saïd B., Lahmar M., Bensouilah H., Ellagoune S. " steady-state behavior of finite compliant journal bearing using a piezoviscous polar fluid as lubricant ", *Mechanics & Industry*, Volume 16, N°6, pp.111-121 (2015),AFM, EDP Sciences, 2015.
- [26] Boucherit H., Lahmar M., Bou-Saïd B., Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Journal of Lubrication Science*, John Wiley Editor, 20 (2008) 241-268.
- [27] Bernard F. « Influence des défauts de forme dans la lubrification hydrodynamique », thèse de doctorat, Institut National des sciences appliquées de Lyon, 1973, France.
- [28] Kane M., *Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non-newtonien dans les contacts sévères lubrifiés* », thèse de doctorat, Institut National des sciences appliquées de Lyon, 2003, France.
- [29] Mouassa Ah., *contribution a l'étude de l'influence des défauts de forme et de rugosité des surfaces sur les performances des contacts lubrifiés severes*, 2010, Laboratoire de Mécanique et Structures (LMS), Equipe Systèmes Mécaniques Lubrifiés (SML) Université 8 mai 1945 Guelma
- [30] Dorson D., Hgginson G.R., *Elasto-hydrodynamic lubrication*, SI Edition Prergamon int. library 1997.
- [31] Cameron. A, Ettels .C.M. Mc, *Basic lubrication theory*, 3rd edition, John wiley& sons, 1981.
- [32] Barus .C, *isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity*, *Am. J. Sci.* 45 (1893),87-96.

- [33] Erik Hoglund, influence of lubricant properties on elastohydrodynamic, lubrication, wear, 232, 1999, 178-184.
- [34] Reynolds .O, on the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, phil. Trans. Roy. Soc London series A 177, Pt1, 1886. pp. 135-217.
- [35] Roelands .C. J. A, correlation aspects of the viscosity-pressure relationship of lubricating oils, Druk V. R. B Groningen, Netherlands.
- [36] Chang .L., Conry .T. F, Cusano .C., An efficient, robust, multi-level computational algorithm for the ASME, Journal of tribology. 1988. 1-7 .
- [37] Lowrie B. Sargent, JR, Pressure-viscosity coefficient of liquid lubricants, ASLE transactions. Volume 26, 1, 1-10. 1981.
- [38] Gourdin A. Boumahrat .M: Méthodes numériques appliquées. Office des publications universitaire, Seconde édition. 1990.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

GENERALE

Chapitre Un :

Etude Bibliographique

Chapitre Deux :
Equations de la Lubrification
Hydrodynamique par Fluide
Newtonien

Chapitre Trois :

**Etude Statique d'un Palier Rugueux
Revêtu Infiniment Long Lubrifié par
un Fluide Piézovisqueux et
Barotrope**

Chapitre Quatre :
Etude de L'influence de la
Rugosité sur les Performances
d'un Palier Infiniment Long

CONCLUSION GENERALE

ANNEXES

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUE

NOMENCLATURES

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS

