

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des sciences et des technologies  
Département électronique et télécommunications  
Laboratoire de domiciliation contrôle avancé Labcav

## THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
DOCTORAT EN 3<sup>ème</sup> CYCLE

Domaine : Sciences et Technologie Filière : Electronique

Spécialité : Contrôle avancé

Présentée par

**Mecheri Belgacem**

*Intitulée*

**Contribution à la conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire  
basé sur les méthodes d'optimisation méta-heuristique**

Soutenue le : .....

Devant le Jury composé de :

<b>Mr Moussaoui Abdelkrim</b>	Professeur	Univ 8 mai 1945 Guelma	Président
<b>Mr Boudjehem Djalil</b>	Professeur	Univ 8 mai 1945 Guelma	Rapporteur
<b>Mr Boukabou Abdelkrim</b>	Professeur	Univ de Jijel	Examineur
<b>Mr Boukaache Abdelnour</b>	MCA	Univ 8 mai 1945 Guelma	Examineur
<b>Mr Boudjehem Badreddine</b>	MCA	Univ 8 mai 1945 Guelma	Invité

Année Universitaire : 2019/2020

## **DEDICACES**

A la mémoire de ma mère

A la mémoire de mon père

A la mémoire de mon fils « ZAKARIA »

A ma femme

A mes enfants

A mes frères et sœurs

A mes amis

# Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein du laboratoire de contrôle avancé (LABCAV) de L'université 8 Mai 1945 Guelma.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Djalil Boudjehem, Professeur à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, de m'avoir encadré durant ces années de préparation de Doctorat en étant toujours disponible et encourageant, pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humaines.

Je remercie aussi Monsieur Moussaoui Abdelkrim Professeur à l'Université 8 mai 1945 Guelma, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance, ainsi que Monsieur, Boukabou Abdelkrim, Professeur à l'Université de Jijel, Monsieur Boukaache Abdelnour MCA à l'Université 8 mai 1945 Guelma, et Monsieur Boudjehem Badreddine MCA à l'Université 8 mai 1945 Guelma qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire de contrôle avancé de l'université de Guelma, pour leurs aides et encouragements durant toute la période de ma préparation de doctorat.

# Résumé

Le correcteur *PID* est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels durant plusieurs décennies. Récemment, le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur *PID* classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires de l'action d'intégration et de la dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Donc, le travail réalisé dans cette thèse présente essentiellement des idées sur la commande d'ordre fractionnaire, en utilisant les algorithmes méta heuristiques et l'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Premièrement, l'application des correcteur *PID* fractionnaire pour le contrôle des systèmes chaotiques à savoir la stabilisation de ces systèmes, et une autre contribution consiste à la conception d'une commande adaptative d'ordre fractionnaire à modèle interne.

La comparaison avec les autres méthodes de commande montre une nette amélioration des performances (temps de réponse, temps de montée, stabilité) et une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations. Ces observations sont assurées par des simulations numériques.

## Mots clés

Dérivés fractionnaires, intégrales fractionnaires, systèmes d'ordre fractionnaire, contrôleurs d'ordre fractionnaire, PSO, GA, systèmes chaotiques., commande adaptative

# Abstract

The *PID* controller is the most used technique in the control of industrial processes for decades. Recently, the fractional order  $PI^\alpha D^\beta$  controller which is a generalization of the classical *PID* corrector has been proposed. The interest in this type of controller is justified by the better flexibility in the design of the control since it has two additional parameters, which are the fractional orders of the integration and the derivation actions. These parameters can be used to satisfy additional performance in the design of systems control. So, the work done in this thesis mainly presents ideas about fractional order control, using meta heuristic algorithms and the implementation of fractional order controllers.

First, the application of fractional *PID* controllers to control chaotic systems, namely their stabilization, where the other contribution consists in designing an adaptive fractional order control with an internal model.

The Comparison with other control methods shows a marked improvement in performance (response time, rise time, stability) and better robustness against noise and disturbance. These observations are ensured by numerical simulations.

## Key words

Fractional derivatives, fractional integrals, fractional order systems, fractional order controllers, PSO, GA, chaotic systems., Adaptive control

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Le Calcul d'Ordre Fractionnaire</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Domaines d'applications du calcul d'ordre fractionnaire . . . . .	5
1.3 Les opérateurs d'ordre fractionnaires . . . . .	8
1.3.1 Définition de Riemann-Liouville(R-L) . . . . .	8
1.3.2 Définition de Caputo . . . . .	9
1.3.3 Définition de Grundwald-Leitnikov(G-L) . . . . .	10
1.4 Propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire . . . . .	10
1.5 Transformé de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaires . . . . .	11
1.5.1 Transformée de Laplace de l'Intégrale d'Ordre Fractionnaire . . . . .	11
1.5.2 Transformée de Laplace de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire . . . . .	11
1.6 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaires. . . . .	12
1.7 Méthode de l'expansion par fractions continues EFC . . . . .	12
1.7.1 Méthode d'Oustloup. . . . .	13
1.7.2 Méthode de Carlson . . . . .	14
1.7.3 Méthode de Matsuda . . . . .	14
1.7.4 Méthode de Charef (Fonction de singularité) . . . . .	15
1.8 Représentations des systèmes d'ordre fractionnaires . . . . .	17
1.8.1 Représentation par des équations différentielles . . . . .	18
1.8.2 Représentation par fonction de transfert . . . . .	19
1.8.3 Représentation par espace d'état d'un système d'ordre fractionnaire . . . . .	19
1.8.4 Contrôlabilité, observabilité et stabilité . . . . .	21
1.9 Réponse temporelle des systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	22
1.10 Conclusion . . . . .	23
<b>2 La commande d'ordre fractionnaires</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25

2.2	Aperçu sur la commande d'ordre fractionnaire . . . . .	27
2.3	Correcteur d'ordre fractionnaire . . . . .	28
2.3.1	Structure du correcteur . . . . .	28
2.3.2	Techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ . . . . .	33
2.3.3	Les Algorithmes génétiques . . . . .	34
2.3.4	L'optimisation par essaim particulaire . . . . .	37
2.3.5	Approximation par fonction rationnelle du correcteur . . . . .	38
2.4	Exemple illustratif . . . . .	41
2.5	Conclusion . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Stabilisation des Systèmes Chaotiques par Contrôleur PID d'ordre Fractionnaire en Utilisant le Modele Flou de Takagi-Sugeno</b>	<b>44</b>
3.1	Introduction . . . . .	44
3.2	Systèmes chaotiques . . . . .	46
3.2.1	Introduction . . . . .	46
3.2.2	Comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires . . . . .	48
3.2.3	Concepts mathématiques et définitions . . . . .	49
3.2.4	Exposant de Lyapunov . . . . .	51
3.2.5	Présentation des attracteurs . . . . .	52
3.3	Stabilisation des systèmes chaotiques par contrôleur PID fractionnaire . . . . .	56
3.4	Résultats des simulations . . . . .	57
3.4.1	Le système chaotique de Lorenz . . . . .	57
3.4.2	Le système chaotique de Chen . . . . .	63
3.5	Conclusion . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Conception de la Commande Adaptative Fractionnaire à Modele Interne</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	La commande adaptative à modele interne . . . . .	69
4.3	La commande à modèle interne (IMC) : paramètres connus . . . . .	70
4.4	La commande à modèle de référence . . . . .	70
4.5	La commande adaptative à modele interne . . . . .	71
4.6	Conception d'une loi robuste adaptative . . . . .	72
4.7	La commande Adaptative d'un moteur à courant continu . . . . .	74
4.7.1	Le modèle de référence . . . . .	74
4.7.2	Le modèle du système à commander (Procédée) . . . . .	75
4.7.3	Contrôleur adaptatif . . . . .	75

4.7.4	L'utilisation de la commande adaptative fractionnaire . . . . .	77
4.8	Conclusion . . . . .	80
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>82</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>87</b>



# Table des figures

1.1	Classification des systèmes linéaires invariant dans le temps . . . . .	18
2.1	Système de commande à retour unitaire classique . . . . .	29
2.2	Structure interne du correcteur d'ordre fractionnaire . . . . .	31
2.3	Lines Asymptotique du correcteur d'ordre fractionnaire . . . . .	31
2.4	Diagramme de Bode des correcteurs $PID$ et $PI^\lambda D^\mu$ . . . . .	32
2.5	Correcteurs classiques et fractionnaires . . . . .	32
2.6	Tracés de Bode des correcteurs $PID$ , $PI^{0.5}D^{0.5}$ . . . . .	39
2.7	Tracés de Bode des correcteurs $PID$ , $PI^{1.5}D^{0.5}$ . . . . .	40
2.8	Tracés de Bode des correcteurs $PID$ , $PI^{0.5}D^{1.5}$ . . . . .	40
2.9	Tracés de Bode des correcteurs $PID$ , $PI^{1.5}D^{1.5}$ . . . . .	41
2.10	Réponse indicielle du système avec contrôleur PID fractionnaire. . . . .	42
2.11	Réponse indicielle avec contrôleur PID classique . . . . .	42
2.12	Réponse indicielle avec PID fractionnaire et PID classique . . . . .	43
3.1	Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches . . . . .	51
3.2	Convection de Rayleigh Bénard des tourbillons convectifs . . . . .	53
3.3	Attracteur de Lorenz $Pr = 10$ , $b = 8/3$ et $Ra = 28$ . . . . .	54
3.4	Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz. . . . .	54
3.5	Attracteur de Rössler $a = 0.398$ , $b = 2$ et $c = 4$ . . . . .	55
3.6	Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler . . . . .	55
3.7	Espace de phase du modèle T-S flou de Lorenz . . . . .	58
3.8	Le modèle de T-S flou de Lorenz ; évolution des variables d'états . . . . .	59
3.9	Variation des états du système de Lorenz . . . . .	61
3.10	Variation du signal de commande pour le système de Lorenz . . . . .	62
3.11	L'évolution du PSO pendant l'optimisation des paramètres du contrôleur pour le système de Lorenz . . . . .	62
3.12	Espace de phase du modèle T-S flou de Chen . . . . .	64
3.13	Le modèle de T-S flou de Chen ; évolution des variables d'états . . . . .	65

3.14	Variation des états du système de Chen . . . . .	66
3.15	Variation du signal de commande pour le système de chen . . . . .	67
3.16	L'évolution du PSO pendant l'optimisation des paramètres du contrôleur pour le système de Chen . . . . .	67
4.1	La commande à modèle interne (IMC) . . . . .	71
4.2	Schéma fonctionnel d'un système de commande adaptative à modèle de référence . . . . .	74
4.3	Schéma fonctionnel d'un moteur a courant continu . . . . .	75
4.4	La sortie du système commandé et la sortie du modèle . . . . .	76
4.5	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction du temps de simulation . . . . .	76
4.6	La sortie du système et du modèle sans commande et avec commande adaptative pour $\gamma = 0.5$ . . . . .	77
4.7	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction de temp de simulation . . . . .	77
4.8	Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour $K_f = 0.2$ . . . . .	78
4.9	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction du temps de simulation . . . . .	79
4.10	Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour $K_f = 1, \gamma = 0.2$ . . . . .	79
4.11	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction du temps de simulation . . . . .	79
4.12	Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour $K_f = 1, \gamma = 0$ . . . . .	80
4.13	Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour $K_f = 1, \gamma = 0.5$ . . . . .	80
4.14	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction du temps de simulation . . . . .	80
4.15	Sortie du system avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour $K_f = 2 \gamma = 0.5$ . . . . .	81
4.16	Variation des valeurs de $\theta$ en fonction du temps de simulation . . . . .	81

# Liste des tableaux

4.1 Paramètres du moteur utilisé. . . . .	76
---	----

# Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le monde industriel a connu une évolution technologique remarquable, tirée par la concurrence et des besoins de plus en plus exigeantes en matière de qualité et de performance. Les industriels ont été poussés à prêter attention et à participer à la recherche en automatique et à suivre les dernières innovations en matière des techniques de la commande des systèmes qui jouent un rôle fondamental dans l'amélioration de l'efficacité des processus de production, de la qualité des produits et de la rentabilité des chaînes de production.

Ce développement technologique et industriel est en grande partie dû au grand saut qualitatif dans lequel les programmes informatiques et les outils physiques ont traversé, en particulier depuis l'émergence et l'uniformisation des microprocesseurs, qui ont permis d'appliquer des méthodes et des technologies jusqu'alors purement théoriques. Cela est également dû au développement de la recherche fondamentale dans divers domaines tels que l'analyse numérique et la théorie des systèmes, qui ont permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes de contrôle des systèmes.

Dans cette thèse on vise à améliorer les performances des systèmes de contrôle en introduisant des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de contrôle

Le calcul fractionnaire devenait maintenant l'une des théories la plus populaire auprès des chercheurs en sciences fondamentales et en ingénierie, les premiers débuts remontent à plus de trois siècles. Au début, c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens célèbres, qui voulaient généraliser le concept de différenciation fractionnaire par des opérateurs d'ordre non entier, permettant de calculer la dérivée d'une fonction différentiable  $f(t)$ ,

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \tag{1}$$

Où  $\alpha$  est un nombre réel, et il peut être même un nombre complexe.

Il est clair que jusqu'à très récemment, cette idée mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 50 que Van Der Ziel [1] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole [2] dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, de nombreuses recherches scientifiques ont démontré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt pour les mathématiques, le traitement du signal et l'automatique [3- 9]. Les applications concernent des domaines très divers tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la modélisation et l'identification dans les domaines temporels et fréquentiels, en particulier le contrôle de processus, la mécatronique et la robotique [10-12].

Dans le domaine de l'automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) a été proposé par Oustaloup [13]. En profitant des propriétés des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un modèle d'ordre fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme.

La commande d'ordre fractionnaire venait d'apparaître, et elle attira l'intérêt de plusieurs chercheurs. Podlubny en 1999 proposa son régulateur  $PI^\alpha D^\beta$  comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\beta$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande.

### **Objective de cette thèse**

Notre principal objectif dans cette thèse est l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la commande des systèmes dynamiques. Notre intérêt pour les opérateurs d'ordre fractionnaire est motivé par les très bonnes performances de ces derniers relativement à ceux d'ordre entier. En effet, de nouvelles lois de commande ont été proposés tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents types de systèmes dynamiques. Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle approche de stabilisation des systèmes chaotiques par des contrôleurs prédictifs d'ordre fractionnaire basé sur le modèle flou de Takagi Sugeno (TS). Des simulations ont été faites et les résultats obtenus ont été satisfaisants et très motivantes.

Nous proposons en outre de nouveaux algorithmes de commande adaptative d'ordre

fractionnaire comprenant l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans le schéma de la commande adaptative à modèle interne. L'idée du contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire est ainsi le fruit de ce travail.

Ce document est constitué de deux parties :

- La première partie, présente les définitions et les bases théoriques de ce travail de recherche. Elle comporte deux chapitres :
- **Le premier chapitre** est une introduction au calcul fractionnaire et aux systèmes de commande d'ordre fractionnaire en général. Des concepts de base y sont répertoriés pour une bonne compréhension de cette thèse.
- **Le deuxième chapitre** est dédié au contrôleur d'ordre non entier. Il introduit la commande d'ordre fractionnaire et les différentes techniques de réglage des contrôleurs d'ordre non entier
- La deuxième partie, est la partie "Contribution" ou résultats, nous l'avons scindée en deux chapitres (Chapitres 3 et 4), la stabilisation des systèmes chaotiques par des contrôleurs d'ordre fractionnaire et la commande adaptative fractionnaire à modèle interne :
- **Le troisième chapitre** présente les résultats obtenus par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans le contrôle des systèmes chaotiques.
- **Le quatrième chapitre** traite de la commande adaptative fractionnaire à modèle interne de systèmes linéaires. Nous proposons par ailleurs de nouveaux régulateurs adaptatifs  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre non entier basés sur le modèle interne.

Enfin, une conclusion générale, présente les principaux résultats de cette thèse et les éventuelles perspectives de ce travail de recherche.

# Chapitre 1

## Le Calcul d'Ordre Fractionnaire

### 1.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domaine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Le calcul d'ordre fractionnaire a été introduit il y a 300 années, la question des dérivées fractionnaires fut abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre adressée à l'Hôpital, mais lorsque celui-ci lui demanda quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction  $x(t)$  par rapport à la variable  $t$ , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe apparent, d'où l'on tirera un jour des conséquences utiles. Cet événement alors représente la naissance du calcul fractionnaire.

De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grünwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé [14]. Cependant, le calcul d'ordre fractionnaire est considéré comme un axe de recherche nouvel et intéressant, puisque ce n'est que depuis un peu plus de trois décennies qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux de recherche. Le premier ouvrage dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier [15], et cela après un travail de collaboration abordé en 1968. Aujourd'hui, l'utilisation du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications est en forte croissance dans plusieurs domaines.

Cependant le calcul d'ordre fractionnaire a été appliqué presque à tous les domaines de la science, l'ingénierie, et les mathématiques. Le calcul d'ordre fractionnaire a fait

un impact profond dans presque tous les domaines, viscoélasticité et rhéologie, génie électrique, électrochimie, biologie, biophysique et technologie biologique, traitement de signal et d'image, mécanique, mécatronique, physique, et surtout dans le domaine de la théorie de commande [16].

Dans ce chapitre, nous allons, commencer par les domaines d'applications du calcul d'ordre fractionnaire, donner des définitions relatives au calcul fractionnaire et aux opérateurs d'ordre fractionnaires, les propriétés principales et aussi la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous allons en particulier présenter quelques méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

## 1.2 Domaines d'applications du calcul d'ordre fractionnaire

Pendant les deux dernières décennies le calcul d'ordre fractionnaire a été appliqué presque à chaque domaine de la science, l'ingénierie, et les mathématiques. Le calcul d'ordre fractionnaire a fait un impact profond dans presque tous les domaines, viscoélasticité et rhéologie, génie électrique, électrochimie, biologie, biophysique et technologie biologique, traitement de signal et d'image, mécanique, mécatronique, physique, et surtout dans le domaine de la théorie de commande. Bien que certaines issues mathématiques restent non résolues, la plupart des difficultés ont été surmontées, et la plupart des problèmes mathématiques principaux dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire ont été résolues à un point où plusieurs outils mathématiques pour le calcul d'ordre entier et fractionnaire sont identiques [16].

**En automatique** En automatique : beaucoup d'auteurs se sont intéressés au calcul d'ordre non entier, ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [11, 17], Chen et al. [18] et Caponetto et al [19] ont montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs d'ordre fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje et Montseny [20] et Matsuda et Fuji(1993) ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués.

Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet de contrôle fractionnaire sans aborder l'approche CRONE, introduite par Oustaloup(1991). La commande CRONE est le



travail d'un groupe de chercheurs au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système(IMS) de Bordeaux sous la direction d'Alain Oustaloup. Cette dernière a fait l'objet de nombreuses publications et de plusieurs ouvrages. La méthodologie CRONE permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaires stationnaires(LTI), incertains, mono-variables(SISO) ou multi-variables(MIMO). Les performances auxquelles elle conduit s'expliquent autant par la prise en compte aussi peu pessimiste que possible des incertitudes portant sur les systèmes commandés, que par l'efficacité des paramètres de réglage utilisés. Cette stratégie de contrôle a été appliquée à la suspension automobile, suspension qui porte d'ailleurs le même nom. Cependant, il est utile de souligner que le compensateur implanté est d'ordre entier et synthétisé physiquement par des composants classiques. Le qualificatif non entier est tout de même justifié dans la mesure où le comportement d'un opérateur non entier authentique peut être approché avec un écart arbitrairement petit sur une bande fréquentielle donnée.

**En génie électrique.** Les systèmes d'ordre fractionnaires sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur(champ, température, etc.). Le lien entre diffusion et modélisation d'ordre non entier est analysé en détail dans [11, 17].

Modélisation des machines asynchrones et synchrones : Les machines électriques sont des composants présents partout dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la production(centrales électriques) ou pour les usages domestiques ou industriels en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus réduite(réseaux embarqués) [21, 22]. Les travaux l'utilisation des systèmes d'ordre non entier pour la modélisation des machines électriques ont été introduit dans les années 90 par le professeur M. Ivanès et N. Retière au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, en France. Pendant plus d'une décennie, plusieurs articles sont apparus, traitant ces méthodes, ses applications et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalent [23]. D'autres travaux ont utilisé la modélisation d'ordre fractionnaire pour la modélisation des phénomènes transitoires dans les machines électriques.

## En électricité

**Piles à combustibles** Une pile à combustible crée l'énergie électrique grâce à l'oxydation sur l'anode d'un combustible (hydrogène) couplée à la réduction sur la cathode d'un oxydant (oxygène) Landowski (2007). Son principe de fonctionnement porte sur des phénomènes physico-chimiques de nature diffusive (diffusion des espèces gazeuses au niveau des électrodes notamment), ce qui fait appel à utiliser la modélisation d'ordre fractionnaire à l'image des machines tournantes. L'impédance de Warburg décrite en(1.1) est approximée par une impédance (1.2) d'ordre non entier(ici égal à  $\frac{1}{2}$ ), faisant apparaître une dépendance en racine carrée de la fréquence Racewicz (2005).

$$Z_W(\omega) = A_k \cdot \frac{\tanh(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{\sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad (1.1)$$

$$\text{Avec } \tau_k = \frac{\delta^2}{D_k^{eff}}$$

D'où son approximation est :

$$Z_W^{1/2}(\omega) = \frac{A_k}{\sqrt{1 + j\omega \cdot \tau_k}} \quad (1.2)$$

**Batteries électrochimiques** Les dispositifs de stockage sont de plus en plus présents dans les réseaux ou systèmes d'énergie actuels dans la mesure où ils peuvent contribuer à une gestion énergétique plus efficace, du point de vue du producteur, du consommateur ou du distributeur [24]. Les batteries électrochimiques ont un potentiel d'utilisation considérable dans une situation de diversification des sources et d'utilisation d'énergies intermittentes.

**Super condensateur** C'est un condensateur de très grande capacité par rapport à ses dimensions relativement très réduite grâce au phénomène de double couche Sutkowski(2007). Il permet ainsi de disposer de densités de puissance beaucoup plus importantes que celles des batteries plus utilisées comme sources d'énergie. Que ce soit pour une batterie ou une super capacité, il est nécessaire de modéliser finement la porosité au niveau des électrodes où se diffusent les ions de l'électrolyte [25]. D'une façon similaire aux machines électriques et piles à combustible, ce phénomène peut aussi être modélisé par des systèmes d'ordre non entier.

**Super capacité** Elle se compose de trois éléments : une résistance interne  $R_i$  (qui modélise l'électrolyte et ses connections, une inductance  $L$  (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe  $Z_p$  modélisant la porosité des électrodes du super condensateur [26].

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega \cdot \tau})}{C \cdot \sqrt{j\omega \cdot \tau}} \quad (1.3)$$

Riu dans [27] propose une approximation de l'impédance  $Z_p$  1.3 par un système d'ordre 1/2 décrit par 1.4. Ce qui permet d'obtenir une très bonne cohérence avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}}{c_0 \cdot j\omega} \quad (1.4)$$

Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre non entier de super capacités non linéaires [28].

## 1.3 Les opérateurs d'ordre fractionnaires

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier  ${}_t D_t^\alpha$ , où  $t_0$  et  $t$  sont des limites de l'opération. L'opérateur différentiel et intégral continu est défini comme [17] :

$${}_t D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_{t_0}^t (dt)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Où  $\alpha \in \mathfrak{R}$  est l'ordre de l'opération. On rencontre plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire.

### 1.3.1 Définition de Riemann-Liouville(R-L)

**Définition 1** : Soient  $\alpha \in R^+$  et  $t_0 \in R$  et  $f$  est une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0 + \infty)$  L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t$  est définie par [17] :

$${}_{t_0}^{RL}I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

Avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler défini par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy \quad (1.7)$$

**Définition 2** : Soient  $\alpha \in R^+$ ,  $t_0 \in R$  et  $f$  est une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0 + \infty)$ , La dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t$  est définie par :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\beta-1} f(\tau) d(\tau) \quad (1.8)$$

Où  $n$  est un nombre entier tel que :  $n - 1 < \beta < n$

Cette définition peut aussi être définie à partir de l'équation 1.6 comme suit [17] :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I^{(n-\alpha)} f(t) \right\} \quad (1.9)$$

### 1.3.2 Définition de Caputo

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire [17] comme suit

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.10)$$

Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.11)$$

### 1.3.3 Définition de Grundwald-Leitnikov(G-L)

La dérivée d'ordre fractionnaire pour  $\alpha > 0$  de  $G-L$  est donnée par [17] :

$${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - k.h) \quad (1.12)$$

où  $\lfloor . \rfloor$  dénote la partie entière d'un nombre réel,  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $\binom{\alpha}{k}$  sont donnés par :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \cdot \Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (1.13)$$

La définition de *Gründwald-Leitnikov* de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit [16] :

$${}_{t_0}^{GL} I_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^{GL} D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - k.h) \quad (1.14)$$

## 1.4 Propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [17] :

- Si  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(z)$  est une fonction analytique de  $z$  et  $\alpha$ .
- Pour  $\alpha = n$ , un entier, l'opérateur  $D^\alpha f(z)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
- Pour  $\alpha = 0$  l'opérateur  $D^\alpha f(z)$  est l'opérateur identité :

$$D^\alpha f(z) = f(z)$$

- La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires

$$D^m \{af(z) + bg(z)\} = aD^m \{f(z)\} + bD^m \{g(z)\}$$

## 1.5 Transformé de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaires

### 1.5.1 Transformée de Laplace de l'Intégrale d'Ordre Fractionnaire

La transformée de *Laplace* de l'intégrale d'ordre fractionnaire de *Riemann-Liouville* d'ordre  $\alpha > 0$  définie par 1.6 qui peut être écrite comme un produit de convolution des fonctions  $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$  [16] :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1*} f(t) \quad (1.15)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est donnée comme [17] :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

Donc la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de *Riemann-Liouville* est :

$$L\{I^\alpha(f(t))\} = s^{-\alpha}F(s) \quad (1.16)$$

De la même façon la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par *Gründwald-Leitnikov* ou par *Caputo* est aussi donnée par l'équation 1.14.

### 1.5.2 Transformée de Laplace de la Dérivée d'Ordre Fractionnaire

**Définition de Riemann-Liouville**

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (1.17)$$

avec  $(n-1) < \alpha < n$ ; mais l'applicabilité pratique de la transformée de *Laplace* de la dérivée de *Riemann-Liouville* est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

### Définition de caputo

$$L \{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.18)$$

Avec  $a > 0$ . L'avantage principal de la définition de *Caputo* par rapport à celle de *Riemann-Liouville* est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter. En plus, la dérivée de *Caputo* d'une constante est zéro, alors que la dérivée de *Riemann-Liouville* d'une constante est une fonction non bornée à  $t = 0$ .

### Définition de Gründwald-Leitnikov [17]

$$L \{D^\alpha(f(t))\} = s^\alpha F(s) \quad (1.19)$$

## 1.6 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaires.

Il existe plusieurs techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Les approximations disponibles dans le domaine  $s$  sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel [29]. Parmi ces méthodes on peut trouver :

- La méthode de l'expansion par fractions continues EFC (Expansion Fractionnaire Continue).
- La méthode d'Oustaloup
- La méthode de Carlson.
- La méthode de Matsuda.
- La méthode de Charef.

## 1.7 Méthode de l'expansion par fractions continues EFC

L'expansion des fractions continues (EFC) est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned}
G(s) &\cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \\
&= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) +} \frac{b_2(s)}{a_2(s) +} \frac{b_3(s)}{a_3(s) +} \dots
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Où  $a_i(s)$  et  $b_i(s)$  sont soit des fonctions rationnelles de la variable  $s$ , ou des constantes.

L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle  $\widehat{G}(s)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(s)$ . D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles.

Les techniques d'expansion des fractions continues sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle  $G(s)$  par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable  $s$  :

$$\begin{aligned}
G(s) &\cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} \\
&= \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots + q_\nu s^\nu}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

### 1.7.1 Méthode d'Oustloup.

Cette méthode [29], [13], [30] est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = s^\mu, \mu \in R^+ \tag{1.22}$$

Par une fonction rationnelle :

$$\widehat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega'_k k}} \tag{1.23}$$

En utilisant l'ensemble des formules suivantes :

$$\omega'_0 = \alpha^{-0.5} \omega_u ; \omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_u ; \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta > 1$$



$$\frac{\omega'k + 1}{\omega_k} = \eta > 0; \frac{\omega_k}{\omega'_{ik}} = \alpha > 0 : N = \frac{\log(\omega_N/\omega_0)}{\log(\alpha\eta)}; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} \quad (1.24)$$

$\omega_u$  étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit,  $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$  où  $\omega_h$  et  $\omega_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement.

### 1.7.2 Méthode de Carlson

Cette méthode est basée sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{\frac{1}{\alpha}} = s \quad (1.25)$$

La méthode itérative de *Newton* mènera à une séquence d'approximations  $H_i(s)$  qui commence par la valeur initiale  $H_0(s) = 0$  [11]. La fonction rationnelle approximant  $H(s) = s^\alpha$  est obtenue sous la forme suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) (H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) s}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) (H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s} \quad (1.26)$$

### 1.7.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par la technique de l'Expansion par Fractions Continue (EFC) et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points espacés par une échelle logarithmique [11].

En supposant que les points choisis sont  $s_i$  avec ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)}{a_1(s) + a_2(s) + a_3(s)} \dots \quad (1.27)$$

Où

$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1} = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (1.28)$$

#### 1.7.4 Méthode de Charef (Fonction de singularité)

La méthode d'approximation sera différente selon l'ordre de la fonction de transfert fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre [31] :

##### Systeme d'ordre fractionnaire du premier ordre

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre la modélisation est sous la forme

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{PT})^\beta} \quad (1.29)$$

La fonction 1.29 peut s'écrire sous la forme [13] :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{PT})^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (1.30)$$

Où  $(N + 1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation 1.25 peut être réduite à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devient :

$$H(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{PT})^\alpha} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (1.31)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de la singularité peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{cases} p_i = (ab)^i p_0 & i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i = (ab)^i a p_0 & i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (1.32)$$

Avec

$$\begin{aligned}
p_0 &= p_T 10^{\frac{\epsilon_p}{20\beta}} \\
a &= 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\beta)}} \\
b &= 10^{\frac{\epsilon_p}{10\beta}} \\
\beta &= \frac{\log(a)}{\log(ab)}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$\epsilon_p$  est l'erreur tolérée en dB.

## Systeme d'ordre fractionnaire du deuxième ordre

Un système de second ordre est décrit par l'équation

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} \tag{1.34}$$

avec  $\beta$  un nombre réel positif tel que  $0 < \beta < 1$ , on peut distinguer deux cas :

– Cas ou  $0 < \beta < 0.5$

On peut exprimer la fonction 1.29 comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_n+1}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1\right)} \tag{1.35}$$

Avec  $\alpha = \zeta^\beta$  et  $n = 1 - 2\beta$ , ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{1.36}$$

Les singularités (pôles  $p_i$  et zéros  $z_i$ ) sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
p_i &= (ab)^{i-1} a z_1 & i &= 1, 2, 3, \dots, N \\
z_i &= (ab)^{i-1} z_i & i &= 2, 3, \dots, N - 1
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Avec

$$\begin{cases}
z_1 = \omega_n \sqrt{b} \\
a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \\
b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \\
\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)}
\end{cases} \tag{1.38}$$

$\varepsilon_P$  est l'erreur tolérée en  $dB$ .

L'ordre d'approximation  $N$  est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par  $Nmax$  telle que :  $p_{n-1} < \omega_{\max} < p_n$ , ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de } \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_i}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.39)$$

Les coefficients  $a_{m_i}$  et  $b_{m_i}$  sont calculés à partir des singularités  $p_i$  et  $z_i$  ainsi que  $\alpha$  et  $\omega_i$

– Pour  $0.5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2 + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1}\right) \left(\frac{s}{\omega_n + 1}\right)^\eta} \quad (1.40)$$

Où

$$\alpha = \varrho^\beta \text{ et } \eta = 2\beta - 1$$

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^{i-1} p_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i &= (ab)^{i-1} a p_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \\ p_1 &= \omega_n \sqrt{b} \\ a &= 10^{\frac{\varepsilon_P}{10(1-\eta)}} \\ b &= 10^{\frac{\varepsilon_P}{10\eta}} \\ \eta &= \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.40) \end{aligned} \quad (1.41)$$

$\varepsilon_P$  est l'erreur en  $dB$

## 1.8 Représentations des systèmes d'ordre fractionnaires

Le diagramme de classification des systèmes d'ordre fractionnaire linéaire et invariant dans le temps est donnée par la figure(1.1) suivante :

Il existe plusieurs modes de représentation des systèmes d'ordre fractionnaire tels que la représentation par équation différentielles, équation récurrente, la fonction de transfert, et la représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaires.

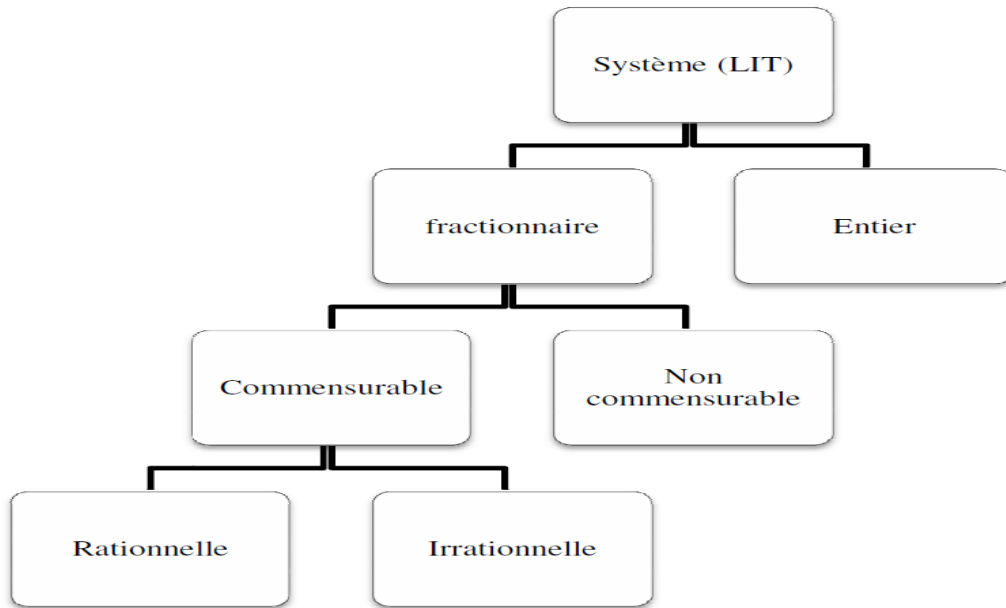


FIGURE 1.1: Classification des systèmes linéaires invariant dans le temps

### 1.8.1 Représentation par des équations différentielles

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [17] :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + b_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (1.42)$$

Où  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système fractionnaire,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  sont les ordres des dérivées, sont des nombres réels, quand les ordres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont multiples du même nombre réel  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), tel que  $\alpha_i = i \cdot \alpha$  ( $0 < i < n$ ) et  $\beta_j = j \cdot \beta$  ( $0 < j < m$ ) le système fractionnaire est dit système fractionnaire commensurable, alors équation différentielle d'ordre fractionnaire 1.38 devient :

$$\sum_{i=0}^a a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\beta} u(t) \quad (1.43)$$

## 1.8.2 Représentation par fonction de transfert

La transformée de *Laplace* de l'équation différentielle de l'équation(1.41) permet de déterminer la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire comme suit [32]

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (1.44)$$

Dans le cas des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable  $\alpha$  de l'équation (1.43), cette fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j\alpha}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha}} \quad (1.45)$$

Si l'ordre commensurable  $\alpha$  est l'inverse d'un nombre entier  $Q$  ,  $F(s)$  de l'équation (1.45) s'écrit comme suit :

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j/Q}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i/Q}} \quad (1.46)$$

## 1.8.3 Représentation par espace d'état d'un système d'ordre fractionnaire

La représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire continu invariant dans le temps s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

Où  $u(t)$  est le vecteur d'entrée,  $y(t)$  est le vecteur de sortie,  $x(t)$  est le vecteur d'état et  $\alpha$  est l'ordre de dérivation ( $0 < \alpha < 1$ ). Les matrices  $A, B, C$  et  $D$  sont de dimension appropriée et à coefficients constants appelées respectivement matrice d'évolution, matrice de commande, matrice d'observation et matrice d'action directe.

**Forme canonique contrôlable :** On considère un système fractionnaire d'ordre commensurable mono variable dont la fonction de transfert est représentée sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^a)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^a)^k}, \quad a_0 = 1, m \leq n \text{ et } (0 < a < 1) \quad (1.48)$$

Trois formes canoniques de représentations peuvent être proposées qui sont similaires à celles des cas classiques développés pour les systèmes d'équations différentielles d'ordre entier

Dans la représentation de la forme canonique contrôlable ; la première variable d'état est définie comme :

$$X_1(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k (s^a)^k} U(s) \quad (1.49)$$

Et les variables d'état restantes du vecteur d'état sont définis d'une manière récursive comme  $x_{i+1} = D^\alpha x_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

La représentation d'état sous la forme canonique contrôlable est exprimée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.50)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n \cdot u \quad (1.51)$$

**Forme canonique observable :** La forme canonique observable est donnée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 & b_n a_0 \\ b_1 & b_n a_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n-3} & b_n a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} & b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (1.52)$$

$$y = [0, 0, \dots, 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (1.53)$$

**Forme canonique modale :** La représentation canonique modal est donnée par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{D}^\alpha x_1 \\ \mathfrak{D}^\alpha x_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{D}^\alpha x_{n-2} \\ \mathfrak{D}^\alpha x_{n-1} \\ \mathfrak{D}^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{r+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r-1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.54)$$

$$y = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, \rho_{r+1}, \dots, \rho_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (1.55)$$

#### 1.8.4 Contrôlabilité, observabilité et stabilité

**Théorème 1** Le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation 1.46 est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité donnée par



$$M_{coni} = [B \quad AB \dots A^{L-1}B] \quad (1.56)$$

Est inversible ; avec L est le nombre de variable d'état [32].

**Théorème 2** Le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation 1.47 est observable si et seulement si la matrice d'observabilité donnée par :

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C^{L-1} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Est inversible ; avec L est le nombre de variable d'état [32].

**Théorème 3** Le système d'ordre fractionnaire 1.47 est stable(dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si et seulement si toutes les racines(complexes)  $r$  de son dénominateur vérifient,

$$|arg(r)| > \frac{\pi}{2Q} \quad (1.58)$$

## 1.9 Réponse temporelle des systèmes d'ordre fractionnaire

Un système fractionnaire d'ordre commensurable  $\alpha < 1$  est représenté par le modèle d'état suivant

$$\begin{cases} D^\alpha(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.59)$$

L'évaluation de la transformée de Laplace de cette équation donne [32] :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}.B.U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}x_0 \quad (1.60)$$

La matrice de transition est représentée par :

$$\psi(t) = L^{-1} [(S^\alpha I - A)^{-1}] \text{ pour } t > 0 \quad (1.61)$$

Donc

$$x(t) = \psi(t)x_0 + \psi(t)^* [Bu(t)] \quad (1.62)$$

$$x(t) = \psi(t)x_0 + \int_0^t \psi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (1.63)$$

Où  $\psi(t)$  est donnée par :

$$\psi(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} \quad (1.64)$$

Où  $E_\alpha$  étant la fonction de *Mittag-Leffler* qui est la généralisation de la fonction exponentielle en effet, lorsque  $\alpha = 1$  l'équation (1.64) donne  $e^{At}$ . [32]

Une autre technique pour avoir une solution est obtenue en utilisant la définition de *Grünwald-Letnikov* de l'équation (1.12) des dérivés ordre fractionnaire. Donc la réponse temporelle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (1.47) est obtenue en utilisant l'équation suivante [33] :

$$y(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h}} \left[ \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{\beta_j}} \sum_{k=0}^{[t-t_0]} (-1)^{(\beta_j)} y(t - k.h)u(t) \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{h^{a_i}} \sum_{k=1}^{[\frac{t-t_0}{h}]} (-1)^{(\alpha_j)} y(t - k.h) \right] \quad (1.65)$$

## 1.10 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Nous avons présenté quelques notions essentielles sur les systèmes de commande d'ordre

fractionnaire nécessaire pour la compréhension de notre travail sur la commande d'ordre fractionnaire des systèmes dynamiques.

Après une introduction sur les processus d'ordre non entier, nous avons présenté les définitions des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les méthodes de représentation et d'approximation de ces systèmes sont également étudiées.

# Chapitre 2

## La commande d'ordre fractionnaires

### 2.1 Introduction

Bien qu'il existe un très large domaine de processus actuels et malgré diverses formules vers les exigences requises, le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID), dont la structure relativement découverte se compose seulement trois termes distincts, a prévalu dans plus de 90% des boucles de contre-réaction. La principale caractéristique reconnue de ce type de correcteur, outre son extrême simplicité, vient des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, qui sont souvent des spécifications satisfaisantes, si leurs paramètres sont judicieusement choisis [34].

La capacité de percevoir un correcteur PID sous de nombreux angles radicalement différents explique que la littérature regorge de méthodes de synthèse, offrant une complexité et des performances très variables, pour répondre aux différents problèmes rencontrés. Le correcteur PID peut être vu intuitivement, comme un outil qui peut être modifié en regardant indépendamment l'effet résultant de chacun de ses paramètres. Cette vision conduit à des règles et des formules expérimentales qui sont encore très appréciées actuellement. Enfin, il peut être envisagé sous différents aspects mathématiques afin d'améliorer ses performances ou de devenir plus robuste.

D'une manière générale, les méthodes existantes peuvent être classées en deux catégories : la première examine le réglage basé sur le modèle de système à contrôler, tandis que la seconde fournit une synthèse directe, basée sur les données obtenues directement à partir des mesures. Bien que ces deux domaines aient été étudiés différemment dans la littérature, jusqu'à présent aucune méthode n'a été le remède complet, et tous les problèmes

n'ont pas encore été résolus. La preuve en est les résultats récents, qui affirment que les correcteurs PID sont souvent mal ajustés dans l'industrie et que des gains de productivité importants sont sacrifiés. La raison principale est certainement qu'un certain nombre de méthodes modernes sont peu nombreuses ou inutilisées, car elles sont souvent limitées à un type de système très spécifique. De plus, la communauté industrielle considère leur mise en œuvre sur une base régulière très complexe. Enfin, certains ne sont pas au cœur du problème, à savoir la stabilité, la robustesse et la performance du temps.

Lorsqu'une structure de rétroaction doit être utilisée, il est légitime de poser les questions suivantes : Pourquoi utiliser un contrôleur PID ? Cette structure est-elle suffisante pour contrôler le processus considéré ? Bien qu'il n'y ait pas encore de description formelle des systèmes qui prouvent que les correcteurs PID s'avère judicieuse, des réponses partielles à ces questions peuvent être trouvées dans la littérature.

Quant à la question de connaître si le correcteur PID est suffisant pour contrôler un système, une étude qualitative a été proposée dans [34]. Cela indique que lorsque la dynamique du système est principalement au premier degré, un correcteur PI est approprié. C'est également le cas pour le correcteur PID, lorsque la dynamique dominante est du deuxième ordre. D'un autre côté, si l'ordre du système est plus élevé, les performances peuvent être améliorées en utilisant d'autres structures de rétroaction. Il en résulte également des performances limitées lors de l'utilisation de contrôleur PID avec des systèmes en mode oscillant. Évidemment, les systèmes dominés par le retard pur génèrent des difficultés, et la prédiction linéaire de l'écart futur avec le terme dérivé ne permet pas de résoudre le problème de manière satisfaisante. La structure linéaire du correcteur PID n'est pas très adaptée aux systèmes non linéaires. Cependant, des résultats parfois excellents peuvent être obtenus avec d'autres structures de contrôle. Enfin, bien que de nombreuses méthodes de réglage du correcteur PID soient suggérées dans la littérature pour contrôler des systèmes instables [35, 36, 37, 38], les performances obtenues sont souvent modestes.

Enfin, on note que les exigences de performances sont très élevées pour de nombreuses applications. Malgré toutes les techniques actuelles de réglage des paramètres du correcteur PID, des travaux de recherche continus et intensifs sont en cours pour améliorer la qualité du contrôle du système et améliorer les performances. Une façon d'améliorer le correcteur PID consiste à utiliser une commande d'ordre fractionnaire avec des parties de dérivation et d'intégration d'ordre non entier.

## 2.2 Aperçu sur la commande d'ordre fractionnaire

Les deux dernières décennies ont vu des efforts de recherche considérables liés au calcul partiel et à son application dans la théorie du contrôle des systèmes. De toute évidence, pour la commande des systèmes en bouclé, il existe quatre formes : (1) système de commande d'ordre entier avec un correcteur de commande d'ordre entier, (2) système de commande d'ordre entier avec un correcteur de commande fractionnaire, (3) le système fractionnaire avec un correcteur d'ordre entier, et (4) Système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre non entier. Dans la pratique du contrôle de système, seul un correcteur d'ordre fractionnaire est pris en compte. En effet, le modèle de système peut en fait être obtenu en tant que modèle d'ordre entier au sens classique. D'un point de vue technique, la signification du contrôle d'ordre fractionnaire est qu'il s'agit d'une généralisation de la théorie classique de l'ordre entier qui peut conduire à une modélisation plus appropriée et à des performances de contrôle plus robustes. En fait, la principale préoccupation du contrôle du système fractionnaire est d'améliorer ou d'optimiser les performances à l'aide de concepts de théorie dérivée, d'intégrations et de systèmes d'ordre fractionnaire. Les premières tentatives d'application du calcul d'ordre fractionnaire aux systèmes de contrôle se trouvent dans [39, 40].

Du point de vue historique, ils existent dans la littérature, quatre structures principales de commande d'ordre non entier [41] :

La première structure de contrôle du système fractionnaire est le correcteur CRONE (la commande d'ordre non entier) [13], proposé par Alain Oustaloup au début des années 1990, et il a démontré les performances supérieures du correcteur proposé par rapport au correcteur PID classique. En tirant parti des propriétés utiles des systèmes d'ordre fractionnaire, ce correcteur a permis d'assurer la robustesse du contrôle dans une plage de fréquence spécifique, en imposant un gabarit fractionnaire à un système de contrôle en boucle fermée. Le succès de cette approche a été énorme, car de nombreuses variables sont nées de ce contrôle (première, deuxième et troisième génération) et des applications ont été développées à la fois en laboratoire et dans l'industrie, par exemple la suspension de la voiture [42].

La deuxième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [17], proposé par Igor Podlubny en 1999, ce correcteur est une généralisation du correcteur PID, comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$ . Il a également montré les

meilleures performances de ce type de correcteurs, par rapport au correcteur PID classique, pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

La troisième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur TID, ce correcteur a une structure similaire à un correcteur PID traditionnel, mais la composante proportionnelle est remplacée d'une composante ayant une fonction de transfert  $\frac{T}{s^n}$ , où  $T$  est une constante du correcteur et  $n$  est un nombre réel non nul, de préférence entre 2 et 3. La fonction de transfert du correcteur TID rapproche plus étroitement la fonction de transfert optimale de la boucle définie par Bode, obtenant ainsi de meilleures performances de la commande en rétroaction. De plus, par rapport aux correcteurs PID, le correcteur TID assure un meilleur rejet de perturbation. L'objectif du correcteur TID est de fournir un correcteur amélioré de la boucle de rétroaction ayant les avantages du correcteur PID, mais fournissant une réponse qui est plus proche de la réponse optimale théorique [43].

La quatrième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, étudié dans [44] et [45], ce correcteur est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique, une technique d'auto-réglage est donnée dans [45]. Le correcteur avance-retard de phase classique est une méthode de conception populaire des boucles de commande, le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire devrait avoir son valeur égale comparée aux correcteurs CRONE et  $PI^\lambda D^\mu$ . Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

## 2.3 Correcteur d'ordre fractionnaire

### 2.3.1 Structure du correcteur

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles de contrôle sont des correcteurs PID. En générale, le correcteur PID classique est introduit dans les systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure 2.1 Où  $u(t)$  représente le signal de commande et  $e(t)$  l'erreur résultant entre la consigne  $r(t)$  et la grandeur à commander  $y(t)$ ,  $C(s)$  est la fonction de transfert du correcteur,  $G_p(s)$  est la fonction de transfert de système.

Le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique représenté par la figure 2.1, peut être décrit par l'équation suivante

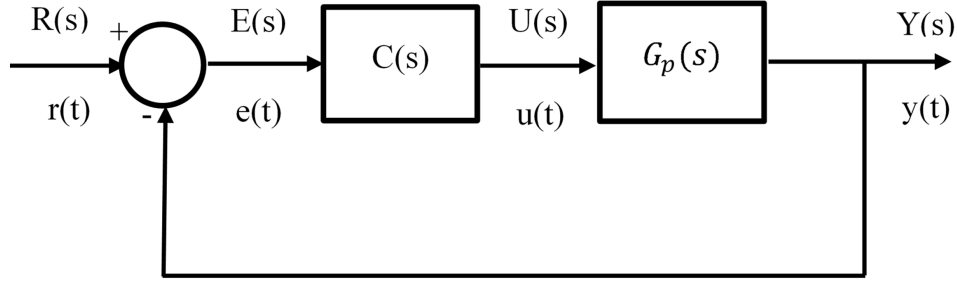


FIGURE 2.1: Système de commande à retour unitaire classique

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_P$ , la constante d'intégration  $K_I$  et la constante de dérivation  $K_D$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La composante proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_P$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [34].

Afin d'améliorer le comportement du correcteur PID, on propose la version du correcteur d'ordre fractionnaire. La forme la plus commune d'un correcteur d'ordre fractionnaire est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [11], impliquant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et



un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont n'importe quels nombres réels. L'équation de la sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} D^{-\lambda} (e(t)) + T_D D^\mu (e(t)) \right) \quad (2.2)$$

$\lambda$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que  $0 < \lambda < 1$  et  $\mu$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que  $0 < \mu < 1$ . L'algorithme du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation 2.2 peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (2.3)$$

En générale une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (2.4)$$

Les gains d'intégration  $K_I$  et de dérivation  $K_D$  sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{K_P}{T_I} \quad (2.5)$$

$$K_D = K_P T_D \quad (2.6)$$

La figure (2.2), représente la structure interne du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, elle constitue la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.

En tenant compte de la représentation précédente, le tracé asymptotique de Bode du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire de l'équation (2.4) est donné dans la figure 2.3 On

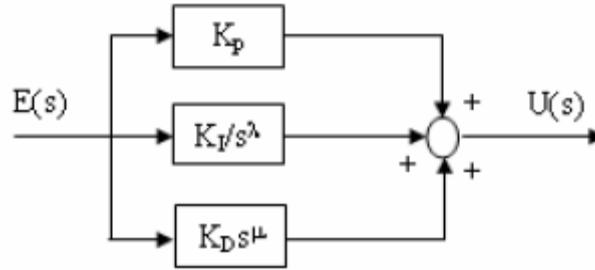


FIGURE 2.2: Structure interne du correcteur d'ordre fractionnaire

peut remarquer les pentes de  $-20\lambda \text{ dB/dec}$  et  $20\mu \text{ dB/dec}$  des parties intégrale et dérivée, respectivement, du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

Les tracés bode du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire (amplitude et phase) sont représentés dans la figure 2.3. Par comparaison avec celles du correcteur PID, on peut remarquer l'effet des ordres fractionnaires sur les pentes des parties intégrale et dérivée, du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  de ce correcteur

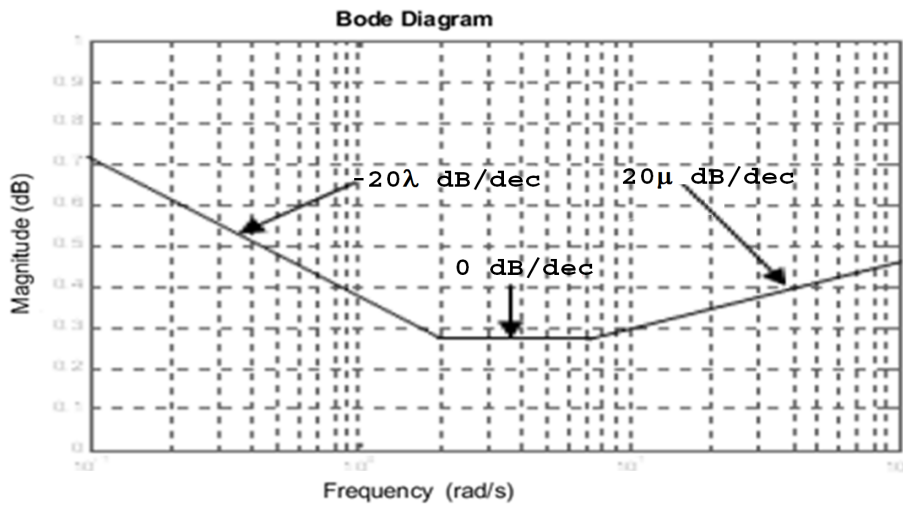


FIGURE 2.3: Lines Asymptotique du correcteur d'ordre fractionnaire

Comme le montre la figure 2.5, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire généralise le correcteur PID classique et l'étendu d'un point à un plan. Cette expansion pourrait fournir beaucoup plus de flexibilité dans la conception de commande PID. Evidemment, en choisissant  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ , un correcteur PID classique peut être restauré. En utilisant  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , et  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ , respectivement, correspond à des correcteurs PI et PD classiques. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont les cas spéciaux du correcteur

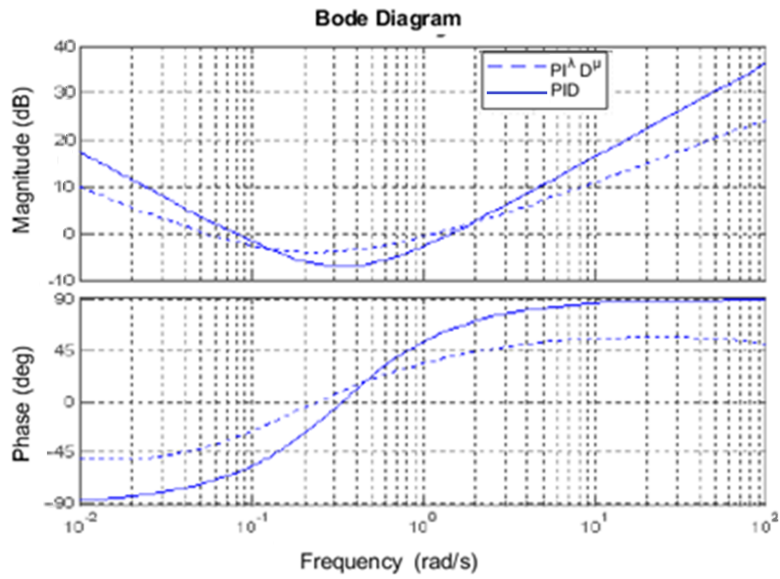


FIGURE 2.4: Diagramme de Bode des correcteurs  $PID$  et  $PI^\lambda D^\mu$  pour  $\lambda = 0.8$  et  $\mu = 0.7$ .

$PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire donné par l'équation (2.4).

En prenant un exemple, ou  $K_P = 0.309$ ,  $K_I = 4.5$  et  $K_D = 0.0006$  sont choisis comme paramètres de base d'un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Par comparaison des figures Fig.2.7 et Fig.2.8, on peut voir que l'utilisation des parties intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire peut ajuster les réponses fréquentielles du correcteur PID classique d'une manière beaucoup plus significative que de changer les coefficients  $K_P$ , et  $K_D$ . Le changement des réponses en fréquence est également plus prévisible.

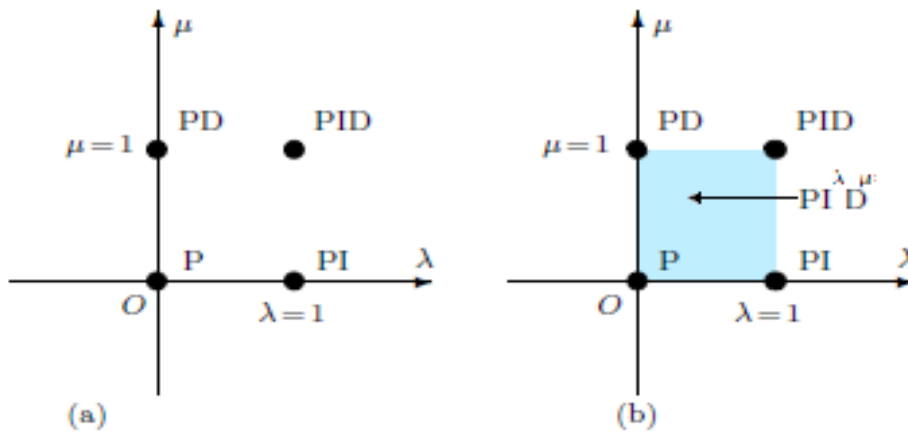


FIGURE 2.5: Correcteurs classiques et fractionnaires

L'un des principaux avantages du système fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  est sa capacité à contrôler correctement la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Une autre caractéristique est que le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  est moins sensible aux changements de paramètres du système contrôlé, ce qui améliore la robustesse. En effet, les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  ont deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et offre l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [11]. Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de commande classique.

### 2.3.2 Techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Afin d'améliorer les performances des systèmes de contrôle et d'assurer les spécifications requises, plusieurs structures de contrôle ont été étudiées par les chercheurs en utilisant la conception de correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Dans [19], l'extension de l'intégration et de la différentiation d'ordre entière à l'ordre fractionnaire offre une stratégie de réglage plus flexible et répond ainsi facilement aux exigences de contrôle par rapport aux correcteurs conventionnels.

Un correcteur PID fractionnel optimal est conçu en fonction des marges de phase et de gain spécifiques tout en optimisant l'intégrale du carré d'erreur dans [46].

Les différentes variations des parties intégrales et dérivées du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire et leurs effets sur les systèmes de contrôle d'ordre non entier ont été étudiés principalement par des analyses qualitatives et des études de simulation [47]. Une autre approche consiste à utiliser une nouvelle stratégie de contrôle pour les systèmes de premier ordre avec un lent temps de retard [48]. Une contrainte de robustesse intéressante est considérée dans ce dernier travail, en forçant la phase du système en boucle ouverte d'être plate à la fréquence de coupure. Dans [49], le réglage des contrôleurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre non entier a été réalisé en boucle QFT (Quantitative Feedback Theory). Cette présentation du problème de réglage élargit les techniques de réglage actuelles pour considérer les problèmes de commande robuste, car l'incertitude des systèmes est présentée dans le modèle QFT (y compris, par exemple, l'incertitude paramétrique). Dans [50], deux ensembles de règles pour déterminer les paramètres des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, qui dépendent uniquement des mêmes données de la réponse temporelle du

système utilisée par les règles de Ziegler-Nichols pour les correcteurs PID classique, ont été présentées. Dans ce cas-là, aucun modèle du système n'a été nécessaire ; seulement une réponse temporelle a été utilisée. Dans [51], le processus de réglage optimal des paramètres en utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaires (PSO) a été utilisé pour ajuster les paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. L'idée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  adaptatif d'ordre fractionnaire est étudiée dans [52], elle a pour but d'améliorer les performances des systèmes de commande adaptative classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de commande.

Certaines méthodes de conception de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaires dépendent d'une extension de la théorie de commande PID classique, la conception de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre non entier basée sur des méthodes d'optimisation est l'une des tendances qui évoluent intensément. Une contribution majeure dans ce secteur a été le travail [51], où il était orienté vers la conception basée sur l'optimisation, et ils existent plusieurs critères de qualité de commande pour évaluer les performances des correcteurs et concevoir les paramètres des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire basée sur l'optimisation. D'autres travaux proposent des conceptions des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre non entier pour répondre à certaines spécifications du système de contrôle, telles que la robustesse du modèle aux incertitudes et les bruits de haute fréquence.

Cette liste est tout à fait loin de donner l'ensemble de la situation, en manquant de retracer d'autres textes publiés rattachées au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications. La raison principale pour laquelle ils ne sont pas cités ici, est que leurs sujets ne sont pas concordants pour cette thèse.

### 2.3.3 Les Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques (GA) est une méthode de recherche aléatoire globale qui simule le processus d'évolution naturelle. L'algorithme génétique commence sans connaissance préalable de la bonne solution et dépend entièrement de ses réponses environnementales et des facteurs d'évolution (c'est-à-dire la reproduction, le croisement et la mutation) pour arriver à la meilleure solution [53].

En partant de plusieurs points aléatoires indépendants et de recherches parallèles, l'algorithme évite les minimas locaux et converge pour obtenir la solution optimale si elles existent.

Actuellement, les algorithmes génétiques GA ont reçu beaucoup d'attention et beaucoup de recherches ont été faites pour étudier leurs applications principalement dans le domaine du contrôle qui a connu un grand développement. Dans ce domaine, ces algorithmes ont démontré la capacité d'explorer fortement pour identifier des régions à hautes performances dans les domaines complexes sans faire face aux difficultés associées aux systèmes de grande dimension, comme cela peut arriver avec les techniques de gradient inclinés où les méthodes dépendent des informations dérivées. En l'utilisant pour rendre le contrôle plus performant, l'GA est généralement configuré avec un groupe aléatoire de 20 à 100 individus. Cette population est généralement représentée par un nombre estimé ou une chaîne binaire appelée le chromosome. La performance de chaque individu est mesurée par une fonction de coût appelée la fonction objective [53].

La fonction objective assigne à chaque individu un nombre correspondant appelé l'aptitude.

L'aptitude de chaque chromosome est répartie et une stratégie de survie du plus haut coût est appliquée. La valeur de l'erreur est habituellement utilisée pour répartir le coût de chaque chromosome.

Il existe trois phases principales dans les algorithmes génétiques, la reproduction, le croisement et la mutation.

La reproduction : Comme dans l'évolution normale, pendant la phase de reproduction, la valeur de coût est attribuée à chaque chromosome, cette valeur est utilisée dans le processus de sélection pour fournir des individus de plus haut coût, un chromosome de plus haut coût a une plus haute probabilité d'être sélectionné pour la reproduction. La roulette est un exemple de méthode de sélection courante. Une section de la roue est allouée à chaque individu dans la population, la dimension de la section est proportionnelle au nombre de l'individu. Un compteur est mis en marche et l'individu à qui il est pointé est sélectionné. Cela continue jusqu'à ce que le critère de la sélection soit atteint. La probabilité qu'un individuel soit sélectionné est donc en rapport avec son aptitude, en s'assurant que les individus de plus grand coût laissent places aux membres de la nouvelle génération. Des copies multiples de la même chaîne peuvent être sélectionnées pour la reproduction et les chaînes de plus valeur de coût devraient commencer à dominer [53].

Le croisement : Une fois le processus de la sélection termine, l'algorithme du croisement commence. Les échanges des opérations du croisement certaines parties des deux chaînes sélectionnées dans une offre de capturer les bonnes parties des vieux chromosomes et

de créer de nouveaux meilleurs. Les opérateurs génétiques manipulent directement les caractères d'un chromosome, en utilisant la supposition que le gène de certain individu codé produira des individus en meilleure santé.

La probabilité de franchissement indique la fréquence à laquelle le croisement est effectué. La technique de croisement la plus simple est le croisement en un seul point. L'utilisation de la sélection et du croisement sur une population produira un grand nombre de chaînes différentes. Cependant, il existe deux problèmes principaux en fonction de la population initiale choisie. Il ne peut y avoir suffisamment de diversité dans les chaînes initiales pour garantir que les AGs explore dans l'ensemble de l'espace de recherche.

La mutation : Est la modification aléatoire occasionnelle d'une valeur d'une place dans la chaîne. Il est considéré comme un opérateur original dans l'algorithme génétique, la probabilité de mutation est normalement faible car un taux élevé de mutation détruirait les chaînes de la population et dégènerait l'algorithme génétique en recherche aléatoire.

La probabilité de la mutation est évaluée à environ 0,1 ou 0,01 fois qu'une chaîne est sélectionnée pour la mutation, un élément est choisi au hasard dans la chaîne est changé ou a subi une mutation.

Le processus de l'algorithme génétique est résumé dans le diagramme suivant.

**Algorithme des AGs.**

1. *Initialisation*
  - Création de la population initiale avec un  $n$  individus
  - Pour chaque individu  $x_i$  calculer sa fitness  $f_i$  utilisant la fonction objective
2. *Tanque* nombre de la génération actuelle  $gen_{nbr} < Maxgen_{nbr}$ 
  - (a) *Pour* count= 1 jusqu' à  $n$ 
    - Selection des Parents Selon leurs evaluations
    - Opération de reproduction (Croisement est Mutation)
    - Selection des individus pour la nouvelle génération
  - (b) Fin de la boucle *Pour*
  - (c)  $gen_{nbr} = gen_{nbr} + 1$
3. Fin de la boucle *Tanque*
4. Meilleure solution est considérée comme la solution optimale

### 2.3.4 L'optimisation par essaim particulaire

L'optimisation par essaim particulaire est une méthode d'optimisation méta heuristique inspirée du comportement coopératif dans un essaim d'oiseaux [54]. Il s'agit d'un algorithme d'évolution de population dans lequel  $N$  candidates (solutions) d'une population évoluent en parallèle jusqu'à l'obtention de la solution globale.

Il a été introduit en premier par [54]. Dans le PSO, chaque particule est caractérisée par un vecteur de position

$$x_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,N}] \quad (2.7)$$

et un vecteur vitesse

$$v_i = [v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,N}] \quad (2.8)$$

Chacun est de dimension ( $1 \times N$ ).

La position de la particule est mise à jour en utilisant sa position et sa vitesse actuelles. La mise à jour de la vitesse est basée sur la meilleure position de particule mémorisée (meilleure position locale) et la meilleure position de ses voisins (meilleure position globale), de sorte que les ajustements de position de chaque particule seront basés sur l'apprentissage historique de sa trajectoire et des meilleures positions voisines [54].

Dans le PSO de base, la position et la vitesse de la  $i^{me}$  particule sont mises à jour comme suit [54, 55] :

$$v_i(k+1) = w \times v_i(k) + c_1 \times r_1 \times p_{lbest} - x_i(k) + c_2 \times r_2 \times p_{gbest} - x_i(k) \quad (2.9)$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k+1) \quad (2.10)$$

où  $x_i$  est la position actuelle de la  $i$ ème particule,  $v_i$  la vitesse de la  $i$ ème particule.  $c_1$  et  $c_2$  représentent les coefficients d'accélération,  $r_1$  et  $r_2$  sont des nombres aléatoires dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

$w$  est le poids inertiel qu'a été défini comme une fonction décroissante linéairement du temps d'exécution [55].

Si les valeurs  $w$  sont grandes cela implique une recherche globale. Cependant, de petites valeurs impliquent une recherche locale. La deuxième partie de l'équation 2.9 représente l'apprentissage privé des particules. Alors que la troisième partie de cette équation est la partie sociale [55].



### Algorithme du PSO

1. *Initialisation*
  - Création de la population initiale avec un  $n$  position
  - Pour chaque position  $x_i$  calculer sa fitness  $f_i$  utilisant la fonction objective
  - Pour chaque position  $x_i$  attribuer une vitesse initiale nulle  $v_i = 0$
  - Calculer la meilleure position globale selon la valeur du fitness  $gbest$
  - $lbest = gbest$  initialisation de la meilleure position locale
2. *Tanque* nombre de la génération actuelle  $gen_{nbr} < Maxgen_{nbr}$ 
  - Calculer les nouvelles vitesses selon l'équation 2.9
  - Calculer les nouvelles positions selon l'équation 2.10
  - Calculer la meilleure position locale  $lbest$
  - Si  $lbest < gbest$  alors  $gbest = lbest$
  - $gen_{nbr} = gen_{nbr} + 1$
3. Fin de la boucle *Tanque*
4. Meilleure solution est considérée comme la solution optimale

### 2.3.5 Approximation par fonction rationnelle du correcteur

L'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaires nécessite de remplacer les fonctions de transfert d'ordre fractionnaires par des fonctions de transfert d'ordre entier avec un comportement assez similaire à celui désiré, mais beaucoup plus facile à manipuler. Ils existent plusieurs méthodes pour trouver une telle approximation, un aperçu sur les méthodes d'approximations continues et discrètes des systèmes d'ordre fractionnaire est donnée dans [39].

Dans le but d'implémenter le correcteur d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande présenté dans cette thèse, nous utiliserons la méthode d'Oustaloup [56].

L'approximation des opérateurs d'intégration et de dérivée d'ordre fractionnaires est donnée par ([57, 58]) :

$$s^v \cong \prod_{k=-N}^N \frac{1 + (s/\omega_{zk})}{1 + (s/\omega_{pk})}, \quad v > 0 \quad (2.11)$$

$\omega_l, \omega_h$  sont les approximations de l'intervalle des fréquences inférieure et supérieure.

$$\alpha = \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{v/N} \quad (2.12)$$

$$\eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{(1-v)/N} \quad (2.13)$$

$$\omega_{z0} = \omega_0 \sqrt{\eta} \quad (2.14)$$

$$\omega_{Pk} = \omega_{Zk} \alpha \quad (2.15)$$

$$\omega_{zk+1} = \omega_{pk} \eta \quad (2.16)$$

Les figures 2.6, 2.7, 2.8 et 2.9 présentent les tracés de Bode des fonctions rationnelles du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs des ordres fractionnaires  $\lambda$  et  $\mu$ , on peut remarquer l'effet de changement de  $\lambda$  et  $\mu$  sur les pentes des actions intégrale et dérivée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

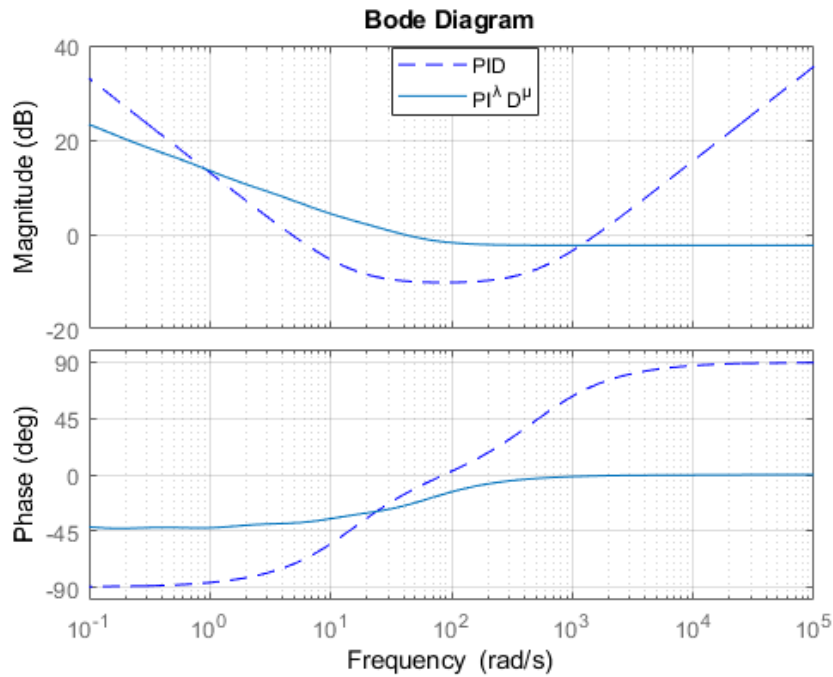


FIGURE 2.6: Tracés de Bode des correcteurs  $PID, PI^{0.5}D^{0.5}$

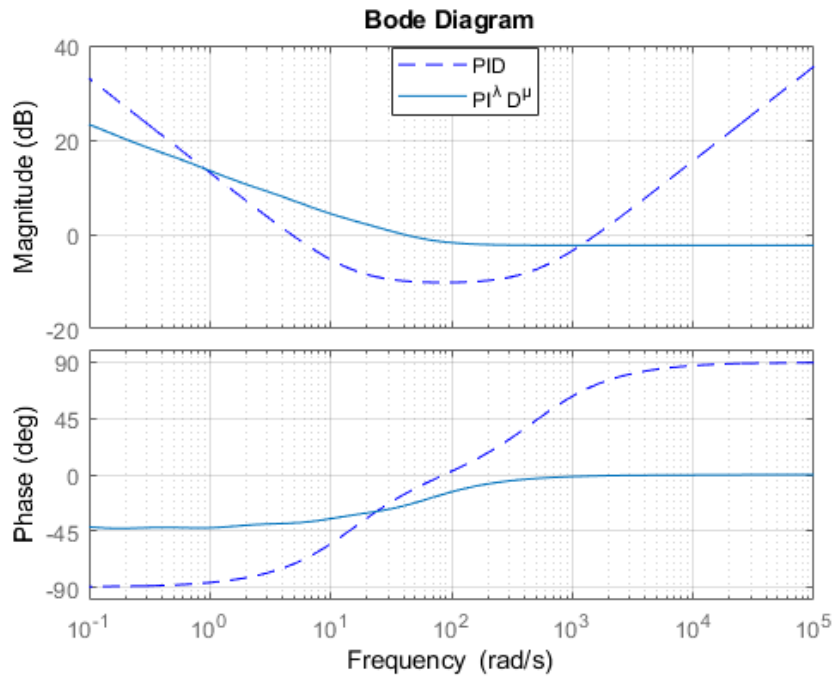


FIGURE 2.7: Tracés de Bode des correcteurs  $PID$ ,  $PI^{1.5} D^{0.5}$

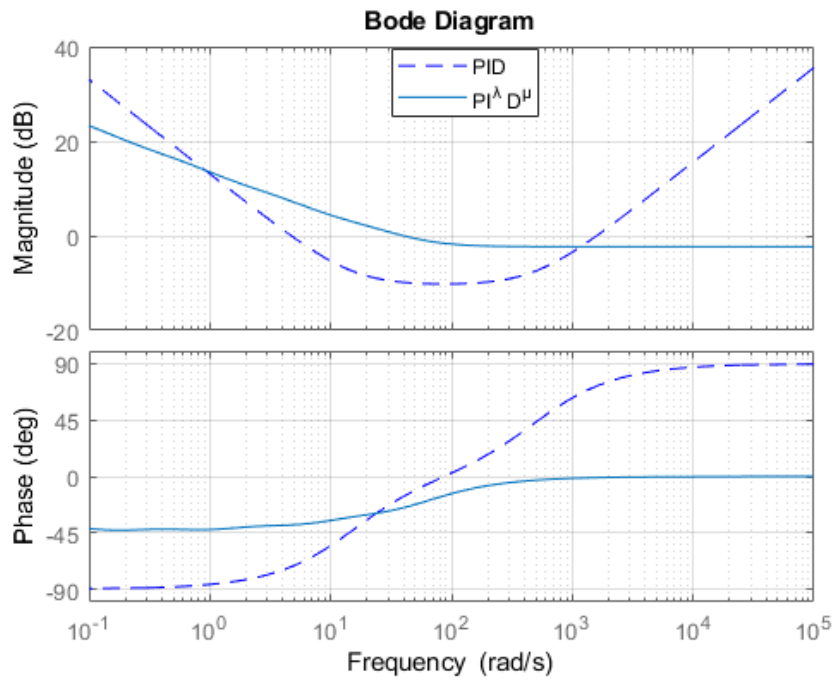


FIGURE 2.8: Tracés de Bode des correcteurs  $PID$ ,  $PI^{0.5} D^{1.5}$

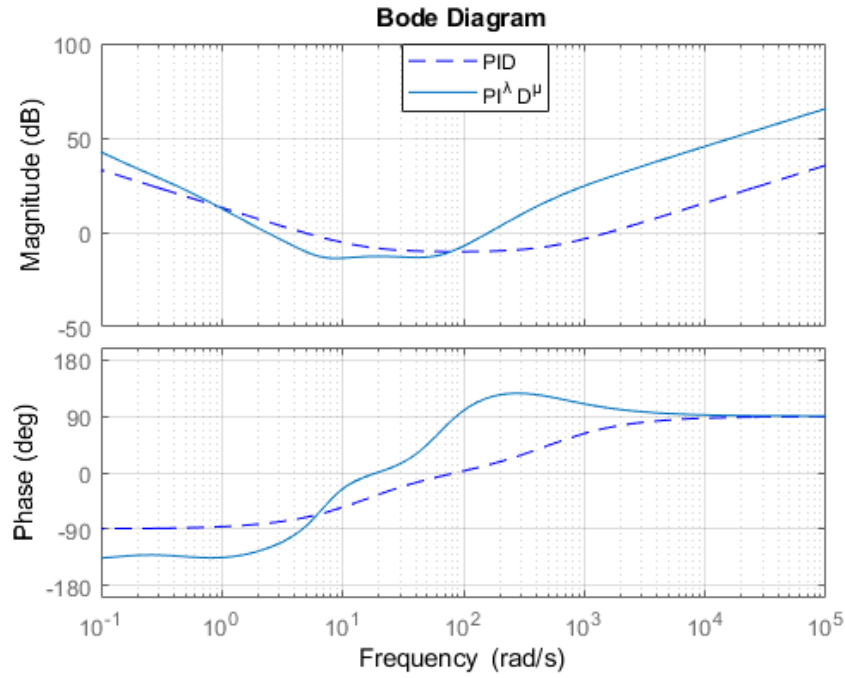


FIGURE 2.9: Tracés de Bode des correcteurs  $PID$ ,  $PI^{1.5}D^{1.5}$

## 2.4 Exemple illustratif

Dans cette partie, nous présenterons un exemple de simulation pour montrer l'efficacité de contrôleurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans une boucle de commande à retour unitaire.

Comme exemple illustrative, considèrerons un processus dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

La figure 2.10 montre la réponse indicielle du système en boucle fermé du système  $G(s)$  avec un contrôleur PID d'ordre fractionnaire dont ses paramètres sont déterminés par minimisation de l'erreur quadratique (ISTE) en utilisant les algorithmes génétiques (GA).

$K_p = 85.8807$ ;  $K_i = 7.0170$ ;  $K_d = 100$ ;  $\alpha = 1.0000e^{-05}$ ;  $\beta = 0.9999$  Pour montrer l'efficacité de ce contrôleur nous allons le comparer avec un contrôleur PID classique, les

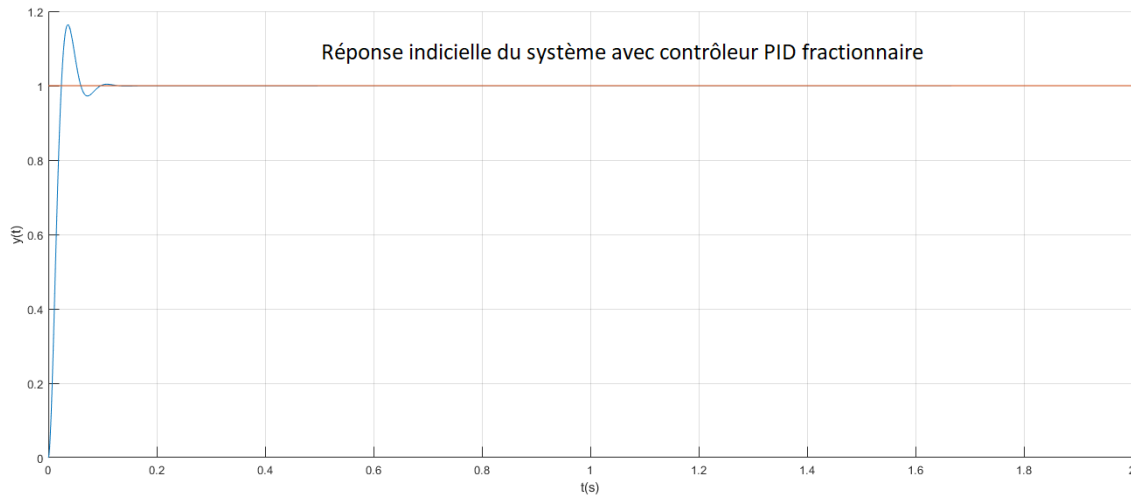


FIGURE 2.10: Réponse indicielle du système avec contrôleur PID fractionnaire.

paramètres de ce dernier sont ajustés par l'application tuning de Matlab qui donne :

$$K_p = 2.0879; K_i = 0.4853; K_d = 1.5668$$

La figure 2.11 montre la réponse indicielle du système avec un contrôleur PID classique, quant à la figure 2.12 elle représente les deux réponses indicielles.

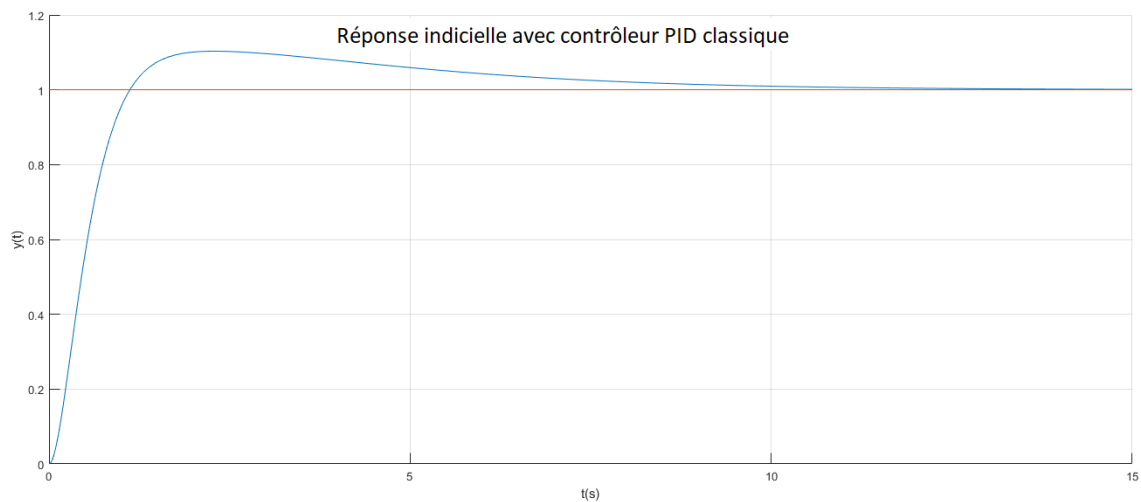


FIGURE 2.11: Réponse indicielle avec contrôleur PID classique

Nous constatons que la réponse de la sortie  $y(t)$  du système de commande en boucle fermée utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire donne des performances meilleures que celui de la sortie  $y(t)$  du système en boucle fermée utilisant le schéma de commande classique.

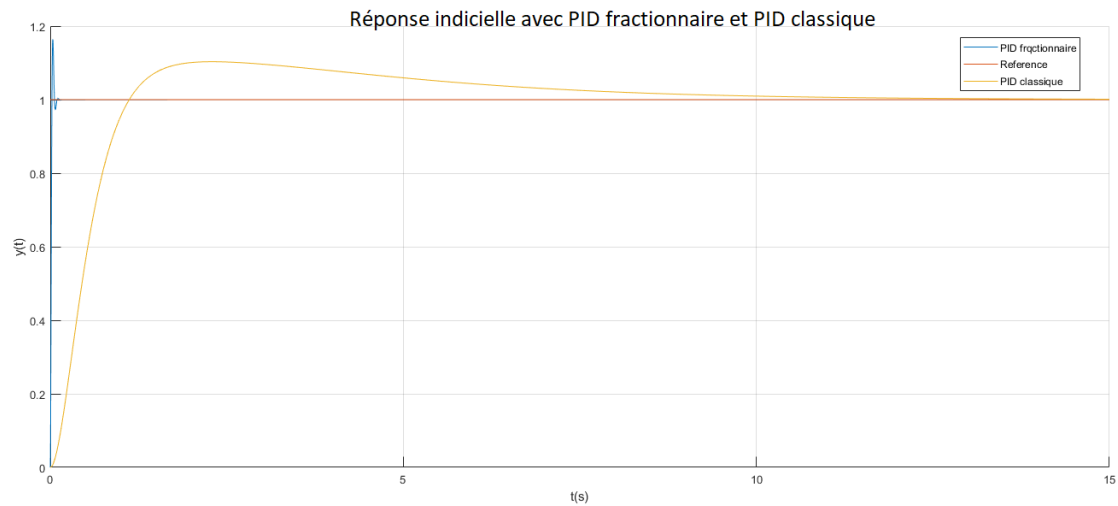


FIGURE 2.12: Réponse indicielle avec PID fractionnaire et PID classique

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre est une présentation des structures de commande d'ordre fractionnaire proposées. La première partie a été consacré à la conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, et la deuxième partie concerne les méthodes de réglages des paramètres du correcteur PID d'ordre fractionnaire. Après un aperçu sur la commande d'ordre fractionnaire, nous avons présenté, des exemples, montrons l'efficacité et la robustesse du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaires.

# Chapitre 3

## Stabilisation des Systèmes Chaotiques par Contrôleur PID d'ordre Fractionnaire en Utilisant le Modele Flou de Takagi-Sugeno

### 3.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, l'étude des systèmes chaotiques est devenue très importante. Il a attiré l'attention de nombreux chercheurs, qui ont concentré leurs travaux pour assurer la stabilité de ces systèmes.

Les systèmes chaotiques ont été présentés dans un premier temps par les travaux d'Edward Lorenz ([59]), dans lesquels il a découvert le comportement chaotique au fil du temps, et a fait une présentation sur la sensibilité de certains systèmes aux petits changements des conditions initiales. En 1975, Li présente pour la première fois un travail sérieux sur le chaos ([60]). Après cela, le contrôle des systèmes chaotiques est devenu très intéressant. Et peut-être la première tentative importante et sérieuse a été le travail d'Ott et autre en 1990, qui ont présenté le contrôle des systèmes dynamiques qui montrent un comportement chaotique (La technique qui sera plus tard appelée méthode OGY) [61]. L'idée principale de cette technique est qu'en appliquant une petite perturbation à l'un des paramètres du système, le comportement chaotique du système pourrait être contrôlé. Et ce contrôle ne prendra effet que lorsque la trajectoire de l'orbite est très proche de celle souhaitée. Cependant, cette condition peut prendre un certain temps pour être satisfaite. Dans cette technique, l'entrée de contrôle sera appliquée à un point fixe, ce

qui peut également prendre beaucoup de temps. D'autres travaux utilisant des méthodes de perturbation périodique ont été proposés pour contrôler les systèmes chaotiques ([62, 63, 64]).

Beaucoup de travaux plus tard, ont dessiné l'évolution du contrôle des systèmes chaotiques. En 1992, Pyragas a proposé d'ajouter un terme d'état retardé, pour forcer l'évolution dynamique du système à suivre une dynamique périodique souhaitée ([65, 66]). Nakajima ([67]) a montré que, dans l'utilisation de cette méthode, l'orbite périodique instable ne sera pas stabilisée si la matrice jacobienne contient un nombre impair de valeurs propres réelles supérieures à l'unité. Ushio et Yamamoto (voir [68, 69, 70]), ont proposé un contrôleur de rétroaction prédictif basé sur l'erreur entre l'état actuel et futur (prévu). Dans cette technique, les états contrôlés se stabilisent vers des points fixes du fait de l'absence du calcul approximatif dans la boucle de rétroaction. Des articles plus récents concentrent leurs études sur le contrôle prédictif des systèmes chaotiques proposé par Ushio et Yamamoto (voir [71, 72, 73, 74, 75]).

Malgré les bons résultats obtenus pour contrôler les systèmes chaotiques, plus d'efforts sont nécessaires pour atteindre l'objectif souhaité, du fait que les systèmes chaotiques sont exposés à des changements dans les conditions initiales, et à la présence de bruits des mesures et de perturbations. Ce fait rend difficile et même impossible de stabiliser le comportement chaotique dans de tels cas.

Le développement de contrôleurs plus robustes pouvant satisfaire ces nouvelles exigences peut impliquer l'utilisation du calcul fractionnaire ([75]). Lorsque son utilisation montre une grande efficacité du système de contrôle et a été appliqué comme un nouveau choix pour améliorer les exigences de performances.

La capacité des contrôleurs fractionnaires à rejeter les perturbations, à améliorer et à maintenir les performances du système même en présence d'un bruit dans les systèmes sous contrôle, a fait un sujet intéressant pour de nombreux chercheurs ([75, 76, 77, 78, 79]).

Dans ce chapitre nous proposons une technique de conception de contrôleur PID fractionnaire basée sur la commande prédictive proposé par Yamamoto [70], pour contrôler et stabiliser les systèmes à comportement chaotiques.

Pour la modélisation de systèmes chaotiques sous une forme linéaire plus adéquate, nous avons utilisé le modèle flou de Takagi Sugeno. Les paramètres du contrôleur seront déterminés en minimisant le terme de fonction d'erreur qui représente l'énergie des états



du système chaotique à l'aide de l'optimisation de l'essaim de particules (PSO).

Le contrôleur résultant est capable d'assurer la stabilité des états chaotiques et d'améliorer les performances du système. Le contrôleur est également capable de rejeter les perturbations et le bruit. Les résultats obtenus avec le contrôleur proposé ont été comparés à ceux obtenus avec le contrôleur PD fractionnel [75] et le contrôle prédictif de Yamamoto [70] utilisé dans les systèmes chaotiques de Chen et de Lorenz. Les résultats de la simulation montrent que le contrôleur proposé donne de meilleurs résultats et assure la meilleure stabilisation des états.

## 3.2 Systèmes chaotiques

### 3.2.1 Introduction

La science au XXème siècle a été distinguée par trois découvertes majeures :

- La relativité.
- La mécanique quantique.
- Le chaos

D'après le philosophe Daniel Parrochia [80], la théorie du chaos constitue une des trois grandes révolutions scientifiques du XIXe siècle et correspond à un changement de paradigme similaire à celui de la théorie de la relativité et la mécanique quantique. Ce siècle a vu les murs de certitudes qui entourant la forteresse de la physique newtonienne s'effondrer. Einstein avec sa théorie de la Relativité, a supprimé en 1905 l'illusion newtonienne d'un espace et d'un temps absolus. Dans les années 1920 à 1930, la mécanique quantique a détruit la certitude de tout pouvoir à mesurer le plus précisément que possible. Le chaos, lui a éliminé l'utopie Laplacienne d'une prédictibilité déterministe.

En bref, la théorie du chaos vise à étudier des phénomènes non linéaires régis par des lois simples et déterministes dont le comportement dans certaines conditions devient imprévisible. En particulier, cette théorie s'est formée, depuis les années 1970, à partir d'une triple confrontation :

- La théorie mathématique des systèmes dynamiques.
- L'étude du phénomène non linéaire, le désordre, la turbulence dans la nature et dans le monde de la technologie.

- La technologie et le développement de l'ordinateur.

À la fin du XIXe siècle, Henri Poincaré a réussi à mettre en évidence la possibilité de comportements irréguliers dans les systèmes déterministes. Edward Lorenz, un météorologue américain, a été le premier à comprendre et à définir un modèle mathématique du chaos, mais avec la conclusion de l'histoire de naissance de la théorie du chaos, il était le résultat d'une confrontation entre l'histoire de longue durée, qui a trouvé ses racines au XIXe siècle dans le travail de Henry Poincaré [81], et une période de reconfiguration, constituée par les travaux séminaires d'Edward Lorenz [82], Stephen Smale [83], David Ruelle et Floris Takens [84].

Dans un système déterministe, des conditions initiales identiques conduisent à des évolutions identiques. Pour un système chaotique, il s'agit d'un système dynamique déterministe avec un comportement imprévisible à long terme. Cette imprévisibilité est due à la sensibilité aux conditions initiales, qui est une particularité des systèmes chaotiques.

Le chaos est un phénomène qui se produit largement dans les systèmes dynamiques. D'un point de vue pédagogique, ce phénomène était considéré comme complexe et n'a jamais eu d'importance car il n'existait aucune analyse simple pouvant aider les chercheurs à se plonger dans ce phénomène intéressant et à obtenir des outils et des expériences. Depuis le chaos s'est répandu dans de nombreux domaines.

Le terme chaos, dans l'ancienne philosophie signifiait l'état de désordre dans la matière non formée supposée existée avant l'univers ordonné [85, 86]. Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y avait aucune définition standard du chaos. Néanmoins, les dispositifs typiques du chaos incluent :

- La non-linéarité : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- Le déterminisme : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes plutôt que probabilistes.
- La sensibilité aux conditions initiales : De très petit changement sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- L'imprévisibilité : En raison de la sensibilité aux conditions initiales qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- L'irrégularité : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

Les problèmes du chaos et de son contrôle ont fait l'objet des études approfondies au cours des deux dernières décennies. Le terme contrôle du chaos est principalement utilisé pour définir le domaine d'étude :

- y compris la théorie du contrôle et la théorie des systèmes dynamiques,
- études des méthodes de contrôle des systèmes déterministes qui présentent un comportement chaotique irrégulier [87].

### 3.2.2 Comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires

La partie suivante fournit des concepts préliminaires sur la dynamique du comportement chaotique, et les systèmes chaotiques représentent une classe de modèles indéterministes qui diffèrent des modèles stochastiques. Bien qu'il soit suffisant de connaître l'état actuel du modèle déterministe, les trajectoires futures sont prédictives d'une longue période arbitraire, le modèle aléatoire ne peut pas fournir de prévisions précises, en général, et pour une petite période arbitraire, l'erreur de prédiction du modèle chaotique augmente considérablement sous forme exponentielles et donc la prédiction ne peut être faite que sur une période limitée en temps définie par une erreur de prévision acceptable, et le processus dans les modèles chaotiques semble fluctuer de façon irrégulière et varier en amplitude et en fréquence.

Avant le XIXe siècle, les équations différentielles linéaires étaient les principaux modèles mathématiques d'oscillations des systèmes mécaniques, électriques et autres, et à la fin de ce siècle, il est devenu clair que les modèles linéaires ne pouvaient pas décrire correctement les nouveaux processus et phénomènes physiques, de nouvelles bases mathématiques ont émergé, telles que la théorie des oscillations non linéaires et principalement l'étude du cycle limite stable. Même lorsque des oscillations complexes telles que la relaxation peut être décrites par des modèles simples et non linéaires dépendants des conditions initiales des "systèmes à plusieurs cycles limites", les modèles d'oscillations linéaires et non linéaires ont largement répondu aux besoins des chercheurs depuis des décennies. Il a été reconnu que ces modèles non linéaires pouvaient décrire tous les types d'oscillations et cette conviction a été soutenue par des fondements mathématiques, telle que la théorie de Poincaré-Bendixson qui a confirmé que les points d'équilibre et les cycles limites étaient le seul type possible des états limites stables dans les systèmes continus du second ordre, mais au milieu du siècle dernier, certains mathématiciens ont démontré que ce n'était pas

le cas pour les systèmes du troisième ordre, qui ont démontré des comportements plus sophistiqués tels que des oscillations non périodiques limitées [87].

En 1963, le physicien Eduard Lorenz a révolutionné le monde et a démontré la nature qualitative de l'atmosphère turbulente, qui obéissait aux équations différentielles partielles complexes de Navier-Stokes et l'a présenté par un modèle simple non linéaire du troisième ordre, appelé plus tard les équations de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z)x - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ ,  $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$

L'intention des physiciens et des mathématiciens, et plus tard des ingénieurs, a été attirée pour ce modèle par les travaux de D. Ruelle et F. Takens qui décrivaient pour la première fois les attracteurs "étrange" et aussi par les travaux de Li et Yorke qui ont introduit le terme chaos pour désigner le phénomène non régulier dans les systèmes déterministes, notant que les bases mathématiques apparues pour étudier le phénomène chaotique ont été établies dès 1960-1970. Pendant ce temps, le comportement chaotique a été découvert dans plusieurs systèmes mécaniques, lasers, physiques, chimiques, biologiques et médicales, circuits électroniques et dans beaucoup d'autres.

### 3.2.3 Concepts mathématiques et définitions

De nouvelles méthodes analytiques et numériques développées pour les systèmes démontrent que le chaos n'est qu'un type exceptionnel de comportement de système non linéaire, le comportement chaotique qui s'est produit à tout moment

- Les trajectoires des systèmes sont globalement bornées et localement instables, dans les systèmes chaotiques, une petite divergence initiale et arbitraire des trajectoires ne reste pas insignifiante, mais croît exponentiellement.

- Le spectre de fréquence pour les trajectoires chaotiques est continu.

Dans de nombreux cas, comme les oscillations irrégulières et non périodiques, le processus est mieux représenté dans les systèmes physiques. Il convient de noter que d'un

point de vue pratique, il est impossible de distinguer à l'œil le processus chaotique soit périodique ou quasi-périodique. La terminologie n'a pas encore été résolue dans le domaine des modèles chaotiques, et il existe de nombreuses différentes définitions des systèmes chaotiques, dont on présente la plus simple.

Considérons le système dynamique continu dans le temps suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ y = h(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Où :  $x = x(t) \in R^n$  : est le vecteur d'état du système et ,  $0 < t < \infty$ .

**Définition 3.1** L'ensemble fermé  $\Omega \in R^n$  est appelé un attracteur pour le système (3.2) :

**a-** S'il existe un sous ensemble ouvert,  $\Omega_0 \in \Omega$  tel que toutes les trajectoires  $x(t)$  du système (3.2), commençant dans  $\Omega_0$  sont définies pour tout  $t > 0$  et tendent vers  $\Omega$  quand  $t \rightarrow \infty$

Si  $x_0 \in \Omega$ ,  $\|x - y\|$  représente la distance entre le point  $x$  et l'ensemble limite, alors  $\|x - y\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

**b-** Aucun autre sous ensemble de  $\Omega$  a cette propriété.

Autrement dit : On appelle attracteur un ensemble de points vers lequel converge la trajectoire de l'espace des phases. Pratiquement, à partir de quelques itérations, on considère que l'ensemble des points de l'espace des phases décrit l'attracteur.

**Définition 3.2** Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.

L'instabilité de Lyapunov caractérise la propriété principale des oscillations chaotiques appelée super sensibilité où dépendance sensible aux conditions initiales, c.à.d. toutes deux trajectoires fermées arbitraires proches s'éloignent l'une de l'autre nécessairement à une distance finie.

Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière, mais, très

vite, leur comportement devient différent pour n'avoir plus grand chose à voir.

**Définition 3.3** Un attracteur est appelé chaotique s'il est borné et toute trajectoire qui commence dedans est une trajectoire instable de Lyapunov.

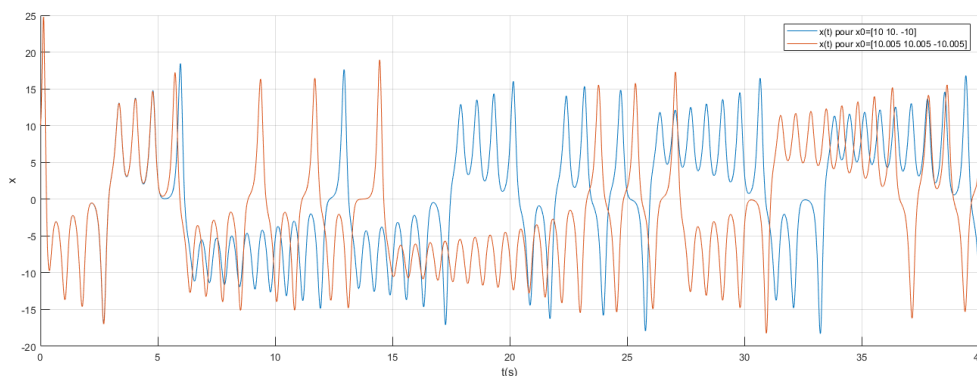


FIGURE 3.1: Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches

Il existe d'autres définitions de l'attracteur chaotique et le chaos. Par exemple, la définition de l'attracteur chaotique comprend souvent des exigences supplémentaires telles que l'existence de trajectoires ou une famille de trajectoires périodiques. La notion d'attracteur chaotique coïncide souvent avec l'attracteur étrange présenté par Ruelle et Takenes en 1971 comme un groupe accessible et appelé plus tard un ensemble fractal.

### 3.2.4 Exposant de Lyapunov

Pour caractériser un système chaotique, il est nécessaire d'utiliser l'exposant de Lyapunov. Pour estimer l'exposant de Lyapunov, nous utilisons une simulation numérique simple. Nous laissons évoluer le système à partir de deux conditions initiales différentes mais très proches. On obtient ainsi deux évolutions différentes et même très différentes à terme car le système est chaotique (donc, sensible aux conditions initiales). L'exposant de Lyapunov rend compte de l'évolution de la distance euclidienne entre les deux évolutions induites par des conditions initiales différentes.

**Définition 3.4** Un système chaotique est un système dont l'exposant de Lyapunov est strictement positif.

On considère un système, soient  $X$  et  $Y$  deux conditions initiales pour ce système. On note  $X$  et  $Y$  les fonctions du temps telles que  $X(t)$  et  $Y(t)$  représentent respectivement

l'état du système à l'instant  $t$  et telles que  $X(0) = X_0$  et  $Y(0) = Y_0$ . On note  $d$  la distance euclidienne définie comme suit :

$$d : R^N \times R^N \rightarrow R, \quad (X, Y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2} \quad (3.3)$$

S'il existe un instant  $t_l$ , deux constantes réelles  $l$  et  $a$  tels que, si :

$$I = [0, t_1], \forall t \in I \quad d(X_{t_l}(t), Y_{t_l}(t)) \rightarrow e^{\lambda t + a} \quad (3.4)$$

Alors,  $l$  est appelé exposant de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov caractérise la qualité chaotique ou non d'un système car il rend compte de la sensibilité aux conditions initiales.

Nous présentons quelques exemples des systèmes chaotiques mentionnés dans ce qui suit.

### 3.2.5 Présentation des attracteurs

#### Attracteur de Lorenz :

L'attracteur de Lorenz tire son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a étudié le premier. C'est une simplification à l'extrême d'équations régissant les mouvements atmosphériques.

Il les a étudiés afin de montrer la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observée. Les équations correspondent aux équations de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans cette expérience, il considère un fluide entre deux plaques portées à deux températures légèrement différentes. Les deux plaques sont horizontales et la plaque la plus chaude est située en bas. Il observe des tourbillons.

Cette expérience a été réalisée pour certains fluides présentant des propriétés adaptées viscosité, coefficient de dilatation, densité moyenne. Elle donne des résultats qui montrent très bien le comportement chaotique.



FIGURE 3.2: Convection de Rayleigh Bénard des tourbillons convectifs

$$\begin{cases} \dot{v} = -Pr(v - T) \\ \dot{T} = (Ra - Z)v - T \\ \dot{Z} = vT - bT \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec  $Pr = \sigma = \frac{\nu}{D}$ , nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique du fluide sur la diffusivité thermique.

$T = \rho$  est la température rapportée à celle du fluide sans la convection.

$Ra = \beta$  est le nombre de Rayleigh. Il dépend des propriétés du fluide, de la distance entre les plaques et de la différence de température entre les plaques.

Pour  $Pr = 10$ ,  $b = 8/3$  et  $Ra = 28$ . Ces valeurs impliquent un comportement chaotique.  $n$  est une composante de vitesse et  $Z$  est une variable issue des grandeurs physiques évoquées dans les équations.

Du fait de la sensibilité aux conditions initiales. On peut lire la valeur de la pente, et on estime l'exposant de Lyapunov à 0.8.

**Attracteur de Rossler** Proposé par l'Allemand Otto Rossler, ce système est lié à l'étude de la mécanique des fluides, il découle des équations de Navier Stokes. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite des travaux en chimie cinétique. Les équations de ce système sont :

$$\begin{cases} \dot{X} = -(Y + Z) \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases} \quad (3.6)$$



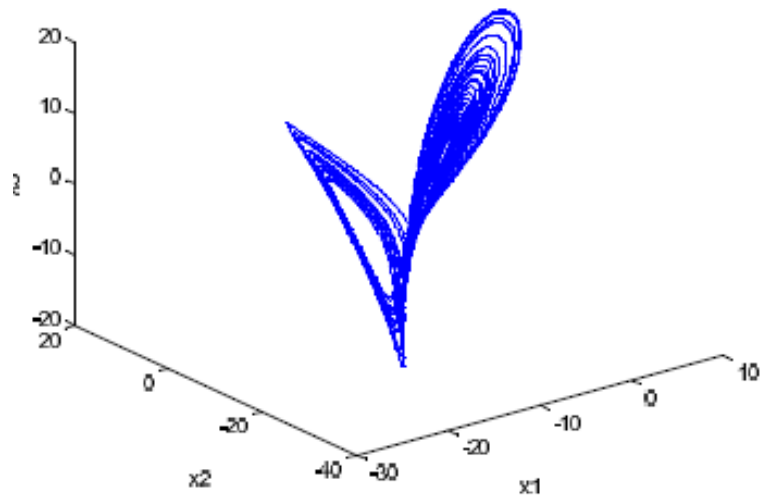


FIGURE 3.3: Attracteur de Lorenz  $Pr = 10$ ,  $b = 8/3$  et  $Ra = 28$ .

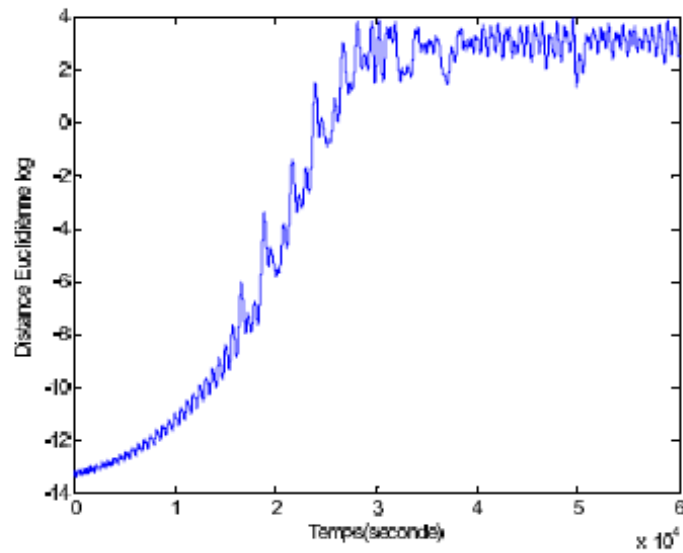


FIGURE 3.4: Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz.

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes réelles. Pour :  $a = 0.398$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ . On est alors en présence d'un système chaotique. L'exposant de Lyapunov 0.09.

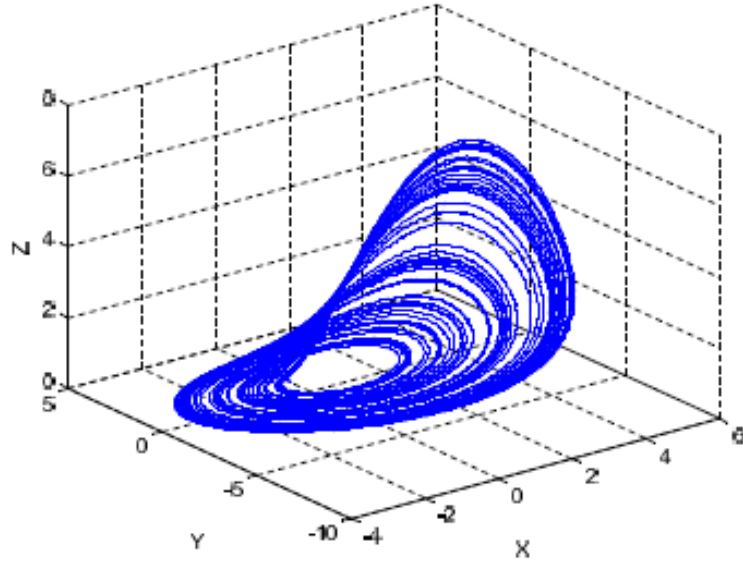


FIGURE 3.5: Attracteur de Rössler  $a = 0.398$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$

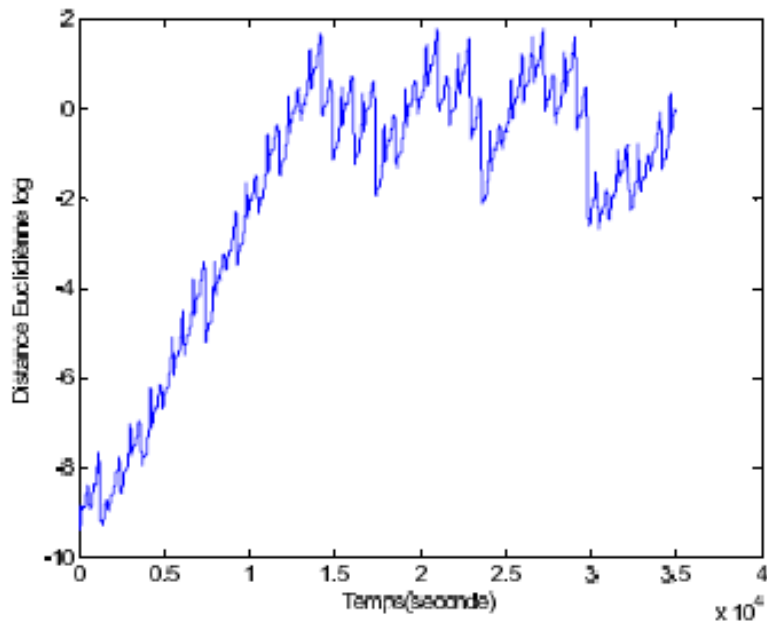


FIGURE 3.6: Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Rössler

### 3.3 Stabilisation des systèmes chaotiques par contrôleur PID fractionnaire

Dans cette section, nous présentons la conception basée sur un modèle flou de Takagi Sugeno pour stabiliser le système chaotique en utilisant un contrôleur PID fractionné. Tout d'abord, nous présentons la modélisation floue de TS qui consiste en un ensemble de règles SI ALORS, la  $i^{ime}$  plante du modèle flou est donnée par [73] :

$$R^i : \begin{cases} IF & Z_1 \text{ is } M_{i1}, \quad Z_2(t) \text{ is } M_{i2}, \dots, Z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ THEN & \dot{X}(t) = A_i X(t) + b_i, \quad i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (3.7)$$

$R^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) désigne  $i^{ime}$  la règle floue,  $r$  est le nombre de règles floues,  $Z_1(t)$ ,  $Z_p(t)$  représentent les variables de prémisse qui sont constituées des états du système,  $M_{ij}$  ( $j = 1, \dots, p$ ) sont les ensembles flous, et  $A_i$ ,  $b_i$  sont les matrices du système avec les dimensions appropriées. Par fuzzification, la sortie finale du modèle flou TS chaotique est inférée comme suit :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i X(t) + b_i\} \quad (3.8)$$

$$\text{Avec } z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)], \quad h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}, \quad \omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z(t))$$

Pour tout  $t$ , ou  $M_{ij}(z(t))$ , désigne le degré d'appartenance de  $z_j(t)$  à  $M_{ij}$ .  $h_i(z(t))$  sont considérés comme les poids normalisés des règles  $IF - THEN$ , qui satisfaisant

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \quad \text{pour tout } t \in R^+$$

Le contrôleur PID fractionnaire du modèle flou TS sera donné comme suit :

$$R^i : \begin{cases} IF & z_1(t) \text{ is } M_{i1}, z_2(t) \text{ is } M_{i2}, \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ THEN & \dot{X}(t) = A_i X(t) + b_i + u_i(t), i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (3.9)$$

Ou

$$U(s) = (K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta)(\dot{X}(s) - X(s)) \quad (3.10)$$

$U(s)$  est la transformée de Laplace du contrôleur *PID* prédictif fractionnaire avec

$$K_p, K_i, K_d \in R, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq 1$$

La sortie finale du système de commande prédictive fractionnaire du modèle flou  $T-S$  peut être déduite comme suit :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=0}^r h_i(z(t)) \{A_i X(t) + b_i + u_i(t)\} \quad (3.11)$$

## 3.4 Résultats des simulations

Dans cette partie, nous avons utilisé la technique proposée pour identifier les paramètres des contrôleurs fractionnaires, les paramètres du contrôleur *PID* fractionnaires sont déterminées à l'aide de l'algorithme PSO, qui seront utilisés avec les systèmes chaotiques de Lorenz et Chen.

Une perturbation et un bruit aléatoire sont injectés dans les états des systèmes pour tester la robustesse des contrôleurs obtenus. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus en utilisant un contrôleur *PD* fractionnaire et le contrôle prédictif conventionnel proposé par [70].

### 3.4.1 Le système chaotique de Lorenz

Le système chaotique de Lorenz est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z)x - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3.12)$$

Où  $a = 10$ ;  $b = 28$ ;  $c = 8/3$

Le système de Lorenz est représenté exactement par le modèle flou  $T - S$  avec les deux règles floues  $IF - THEN$  suivantes

$$\begin{aligned} R^1 IF \quad x(t) \text{ is } M_1 \quad THEN \quad \dot{X}(t) &= A_1 X(t) \\ R^2 IF \quad x(t) \text{ is } M_2 \quad THEN \quad \dot{X}(t) &= A_2 X(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Où  $x$  est la variable de prémisse avec  $x \in [-v \ v]$  avec  $v > 0$

D'où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & -v \\ 0 & v & -c \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & v \\ 0 & -v & -c \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$M_1 = \frac{x}{2v} + \frac{1}{2}, \quad M_2 = \frac{-x}{2v} + \frac{1}{2}, \quad v = 30 \quad (3.15)$$

La sortie finale du modèle flou  $T - S$  de Lorenz est alors donnée par :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(x) \{A_i X(t)\} \quad (3.16)$$

Les figures (3.7 et 3.8 (a b c)) montrent le modèle flou du système chaotique de Lorenz.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z)x - y \\ \dot{z} = xy - czq \end{cases} \quad (3.17)$$

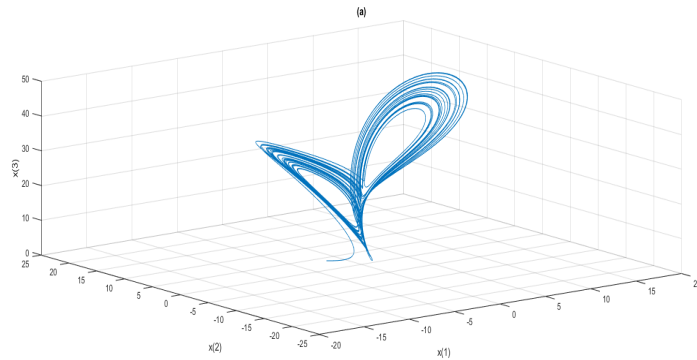
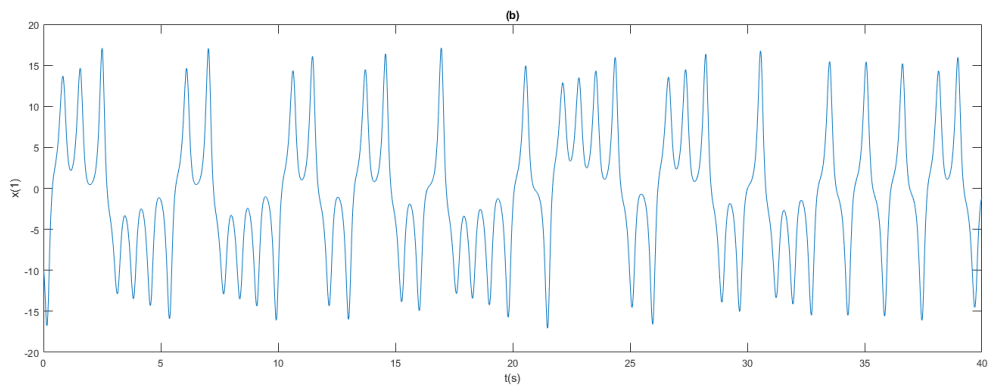
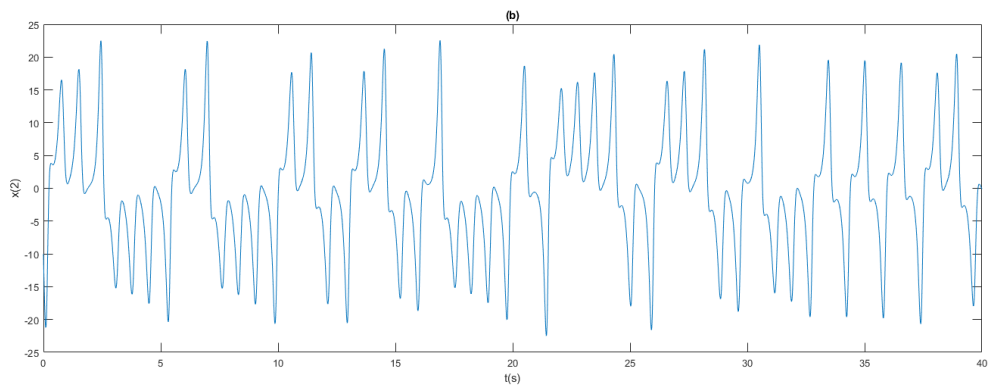


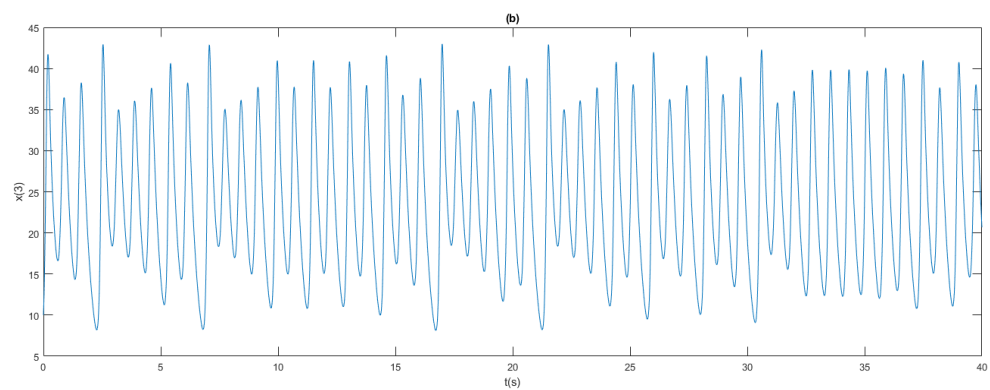
FIGURE 3.7: Espace de phase du modèle T-S flou de Lorenz



(a) a



(b) b



(c) c

FIGURE 3.8: Le modèle de T-S flou de Lorenz ; évolution des variables d'états

Après avoir obtenu le modèle flou  $T - S$  du système de Lorenz nous pouvons maintenant appliquer la commande prédictive fractionnaire par  $PID$  d'ordre non entier pour le processus de stabilisation.

Le système de Lorenz avec le contrôleur  $PID$  fractionnaire

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z) - y + u \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3.18)$$

Avec

$$U(s) = \left( K_P + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta \right) (Y(s) - Y(s)) \quad (3.19)$$

Les paramètres du contrôleur  $PID$  fractionnaires sont déterminés par l'algorithme PSO en minimisant l'erreur quadratique des trois variables d'états

$$J = \underbrace{\min}_{k, \alpha, \beta} \int e^2 \quad (3.20)$$

$$K = [K_p \ K_i \ K_d]$$

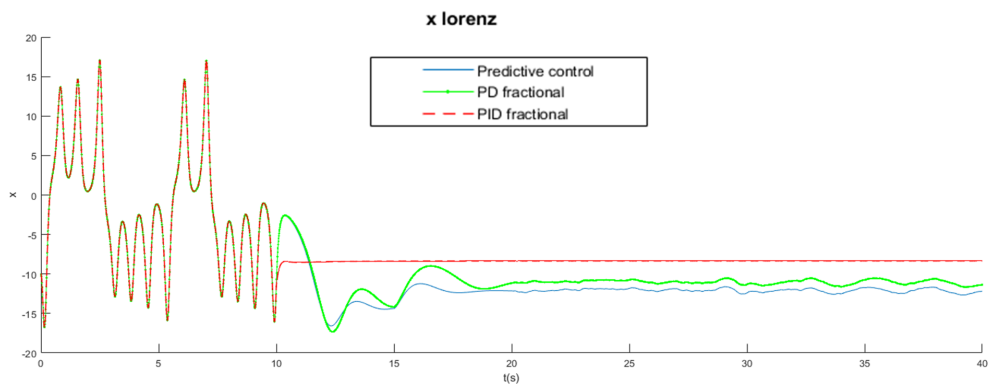
Les résultats d'optimisation par l'algorithme PSO donnent

$$U(s) = (10^{-5} + \frac{9.1005}{s^{0.1376}} + 3.2865s^{0.9999})(Y(s) - Y(s)) \quad (3.21)$$

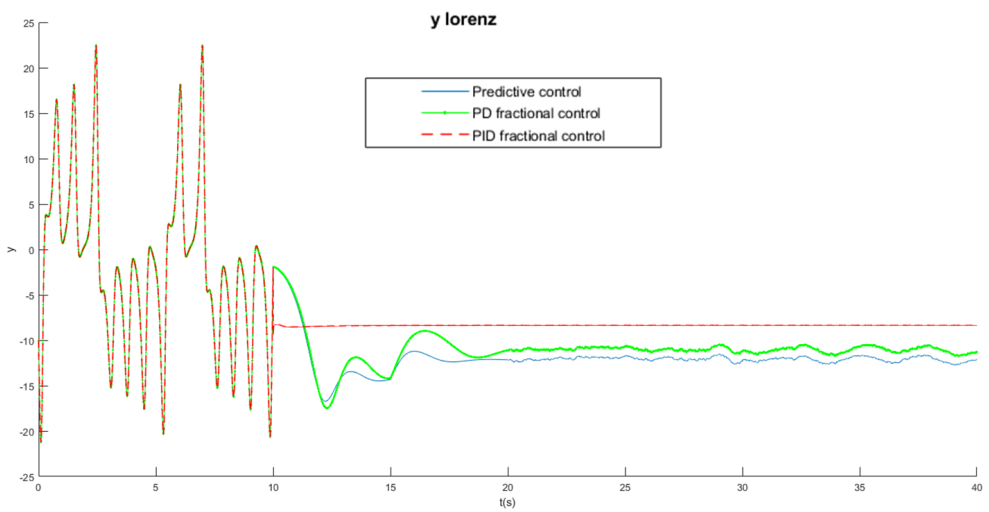
Les résultats de simulations de stabilisation du système chaotique de Lorenz sont présentés sur les figures (3.9) et (3.11). Ces résultats sont comparés à ceux de commande prédictive conventionnelle et à ceux de la commande  $PD$  fractionnaire prédictive

Le contrôleur  $PID$  fractionnaire est appliqué à  $t = 10sec$ . Les sorties contrôlées sont représentées sur la figure (3.9), et La figure (3.11) montre les valeurs fonctionnelles moyennes de l'opération d'optimisation à l'aide de l'algorithme d'optimisation de l'essaim de particules.

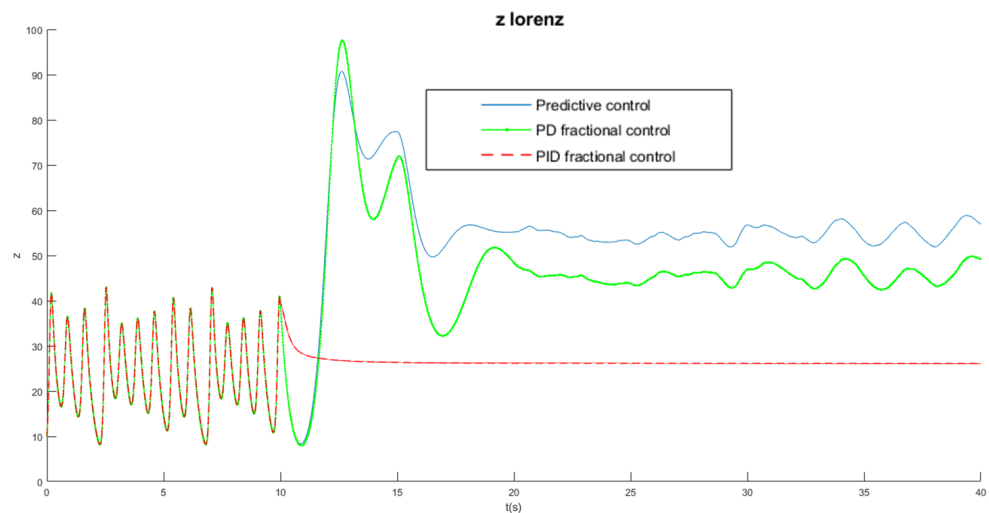
Nous avons injecté une entrée comme perturbation à  $t = 15sec$ , et un bruit aléatoire de 10% à  $t = 20sec$ . Les sorties contrôlées sont représentées aussi sur les figures (3.9).



(a)  $x(t)$



(b)  $y(t)$



(c)  $z(t)$

FIGURE 3.9: Variation des états du système de Lorenz



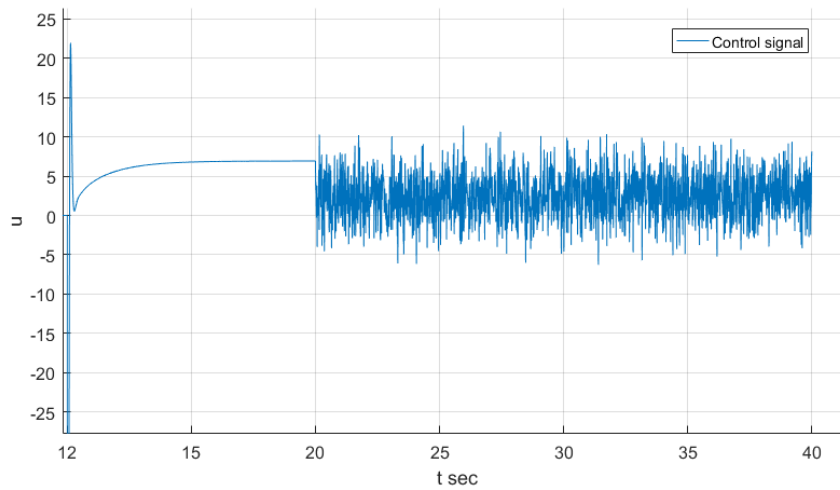


FIGURE 3.10: Variation du signal de commande pour le système de Lorenz

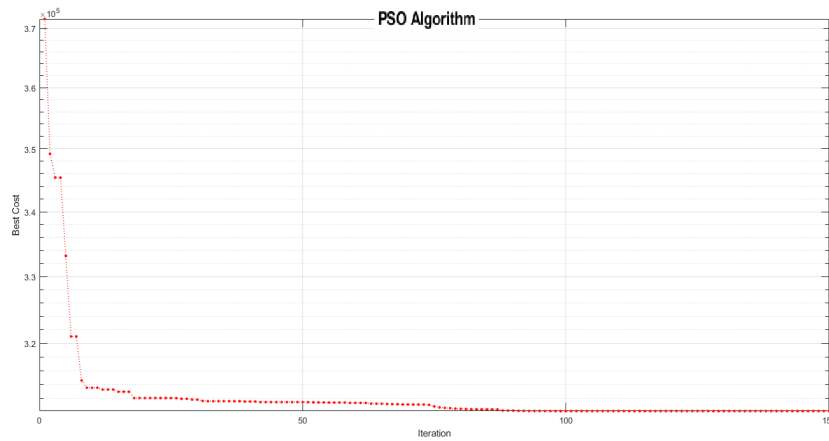


FIGURE 3.11: L'évolution du PSO pendant l'optimisation des paramètres du contrôleur pour le système de Lorenz

Il est très clair que le contrôleur *PID* fractionnaire proposé donne de meilleurs résultats que les autres contrôleurs utilisés.

### 3.4.2 Le système chaotique de Chen

Le système chaotique de Chen est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3.22)$$

Où  $a = 35$ ,  $b = 28$ ,  $c = 3$ .

Le système de Chen est représenté exactement par le modèle flou  $T - S$  avec les deux règles floues  $IF - THEN$  suivantes

$$\begin{aligned} R^1 IF \quad x(t) \text{ is } M_1 \quad THEN \quad \dot{X}(t) &= A_1 X(t) \\ R^2 IF \quad x(t) \text{ is } M_2 \quad THEN \quad \dot{X}(t) &= A_2 X(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Où  $x$  est la variable de prémisse avec  $x \in [-v \ v]$  avec  $v > 0$

D'où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - a & 1 & -v \\ 0 & v & -c \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - a & 1 & v \\ 0 & -v & -c \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$M_1 = \frac{x}{2v} + \frac{1}{2}, \quad M_2 = \frac{-x}{2v} + \frac{1}{2}, \quad v = 30 \quad (3.25)$$

La sortie finale du modèle flou  $T - S$  de Chen est alors donnée par l'équation suivante :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(x) \{A_i X(t)\} \quad (3.26)$$

Les figures (3.13) montrent le modèle flou  $T - S$  du système chaotique de Chen

Après avoir obtenu le modèle flou  $T - S$  du système de Chen nous appliquons maintenant la commande prédictive fractionnaire par  $PID$  d'ordre non entier pour le processus de stabilisation.

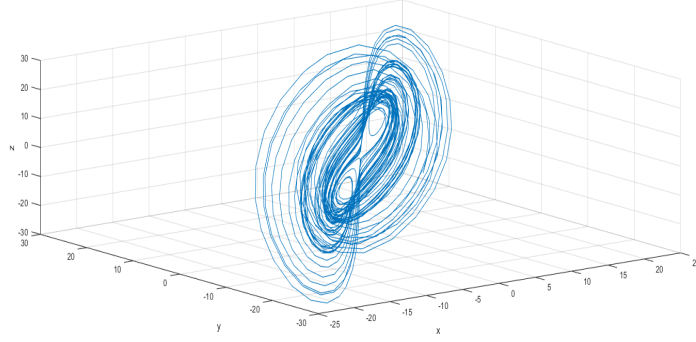


FIGURE 3.12: Espace de phase du modèle T-S flou de Chen

Le système de Chen avec le contrôleur  $PID$  fractionnaire est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z) - y + u(\dot{y} - y) \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3.27)$$

Où

$$U = \left( K_P + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta \right) (\dot{Y} - Y) \quad (3.28)$$

Les paramètres ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) du contrôleur  $PID$  fractionnaires sont déterminés par l'algorithme PSO en minimisant l'erreur quadratique des trois variables d'états

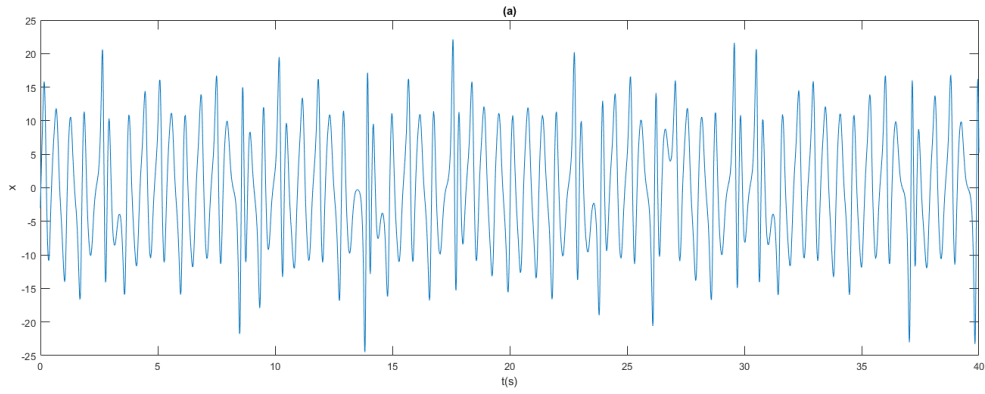
$$J = \min_{k, \alpha, \beta} \int e^2 \quad (3.29)$$

avec :  $k = [K_p \ K_i \ K_d]$

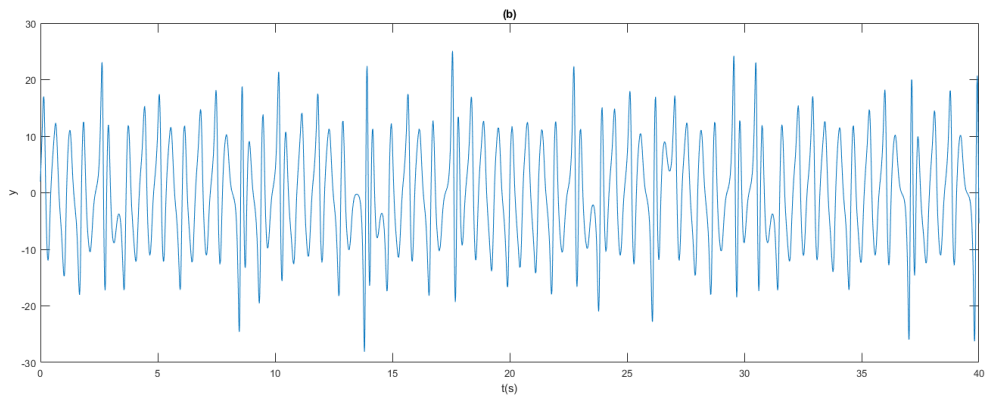
Les résultats d'optimisation par l'algorithme ont donné

$$U(s) = -0.98 \left( 11.9613 + \frac{11.9949}{s^{0.7467}} + 11.9949s^{0.0990} \right) (Y_{predicted} - Y) \quad (3.30)$$

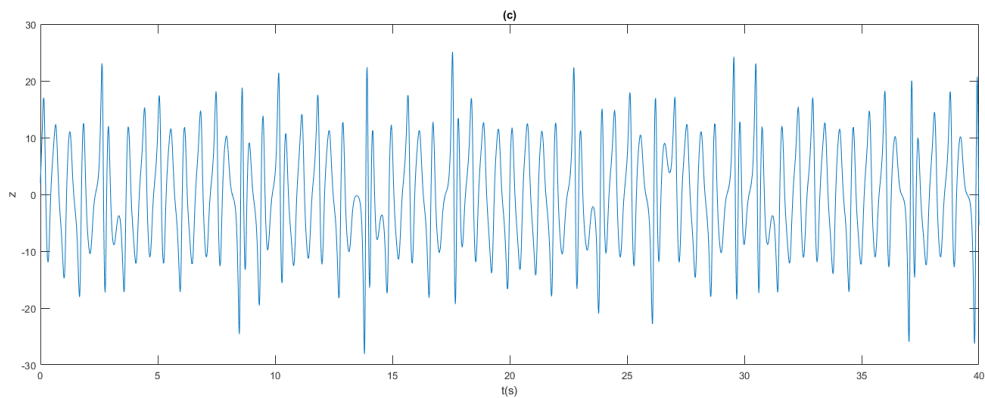
Les résultats de simulations de stabilisation du système chaotique de Chen sont présentés sur les figures (3.14), et figure (3.16). Ces résultats sont comparés à ceux de la



(a)  $x(t)$



(b)  $y(t)$

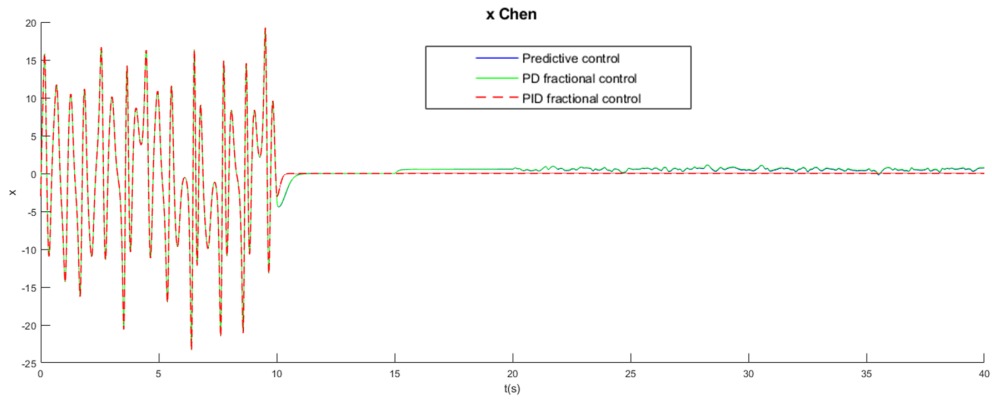


(c)  $z(t)$

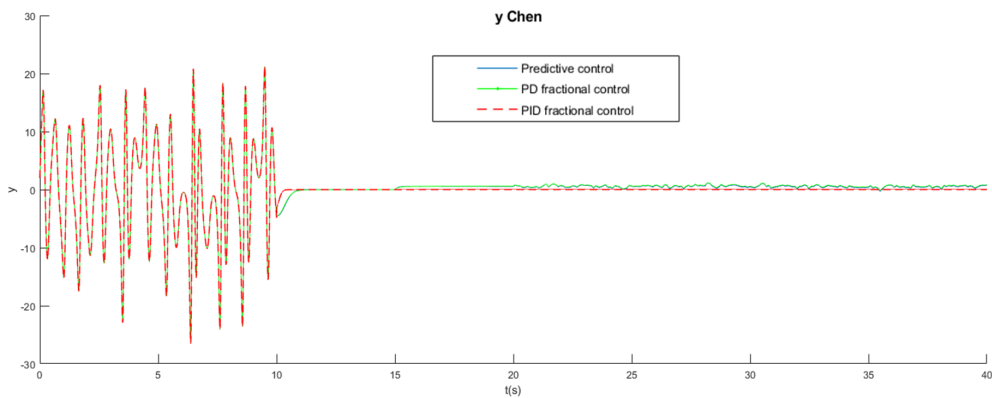
FIGURE 3.13: Le modèle de T-S flou de Chen ; évolution des variables d'états

commande prédictive conventionnelle et à ceux de la commande  $PD$  fractionnaire prédictive.

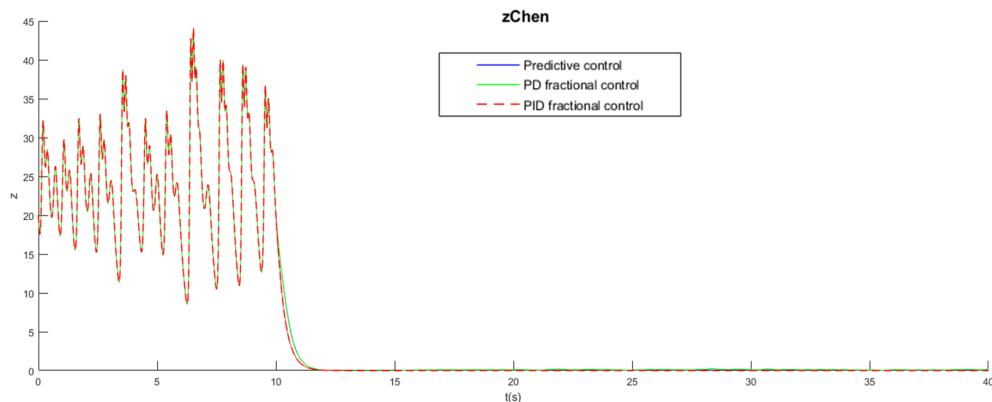
Le contrôleur fractionnaire est appelé à  $t = 10sec$  . Les sorties contrôlées sont représentées sur la figure (3.14) . La figure (3.16) montre les valeurs fonctionnelles moyennes de



(a)  $x(t)$



(b)  $y(t)$



(c)  $z(t)$

FIGURE 3.14: Variation des états du système de Chen

l'opération d'optimisation à l'aide de l'algorithme d'optimisation de l'essaim de particules PSO.

Nous avons utilisé une entrée comme perturbation à  $t = 15sec$ , et un bruit aléatoire de 10% à  $t = 20sec$ .

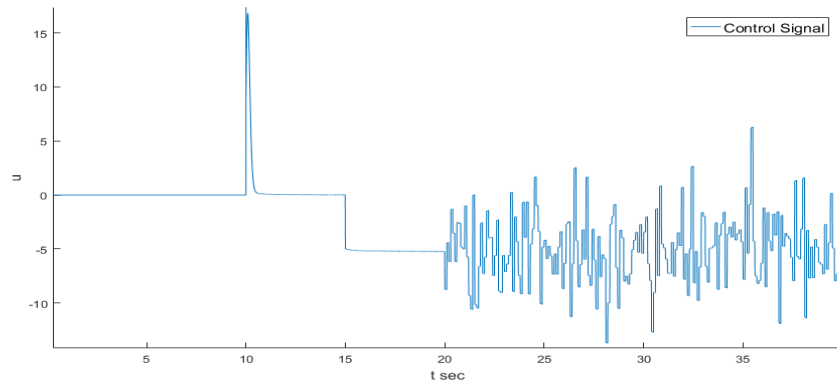


FIGURE 3.15: Variation du signal de commande pour le système de chen

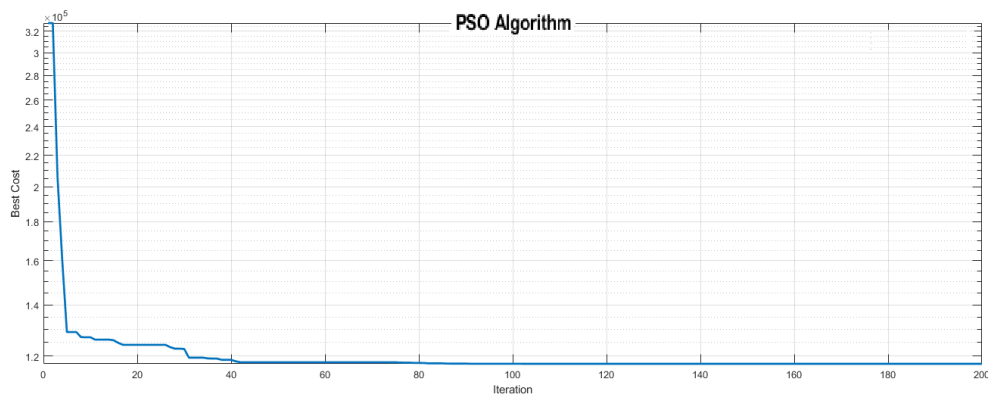


FIGURE 3.16: L'évolution du PSO pendant l'optimisation des paramètres du contrôleur pour le système de Chen

Les sorties contrôlées sont représentées sur les figures (3.14. Il est très clair que le contrôleur *PID* fractionnaire proposé donne de meilleurs résultats que les autres contrôleurs utilisés

## 3.5 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle technique de conception pour construire un contrôleur *PID* fractionnaire robuste qui est basé sur l'idée du retour d'erreur entre les états actuels et futurs dans les systèmes à comportement chaotique proposé par [69].

Les résultats obtenus en utilisant le contrôleur proposé sur les systèmes chaotiques de

Chen et de Lorenz montrent que le contrôleur *PID* fractionnaire est capable de stabiliser les systèmes chaotiques étudiés et de maintenir la stabilité des états, de rejeter les bruits et les perturbations injectés dans les systèmes et de surmonter les performances du contrôleur PD fractionnel et du contrôle prédictif conventionnel proposé par Yamamoto.

# Chapitre 4

## Conception de la Commande Adaptative Fractionnaire à Modele Interne

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la conception et l'analyse d'une commande adaptative fractionnaire à modèle interne. La principale motivation tient au fait que, malgré les succès industriels rapportés des systèmes de contrôle adaptatifs des modèles internes, il n'existe actuellement pas de méthodologie de conception capable de fournir une garantie théorique de stabilité et de robustesse. Le principe consiste à utiliser le calcul fractionnaire pour construire une loi adaptative robuste avec des contrôleurs à modèle interne robustes pour obtenir des lois de commande adaptatives fractionnaire à modèle interne qui peuvent garantir la robuste ainsi que la stabilité.

### 4.2 La commande adaptative à modele interne

Les techniques de la commande à modèle interne ou *internal model control* (IMC) en anglais, qui nous permettent de mettre en œuvre des contrôleurs incluent un modèle explicite du système à commander, continuent de présenter une grande popularité dans les applications de commande des processus industriels [88]. De tels techniques peuvent garantir la stabilité interne uniquement pour les systèmes stables en boucle ouverte; comme la plupart des systèmes rencontrés dans la commande des processus sont de toute façon stables en boucle ouverte, cela n'impose vraiment aucune restriction significative.



La principale caractéristique de l'IMC est que sa mise en œuvre nécessite un modèle explicite du système à utiliser dans la conception du contrôleur. Alors le système lui-même se trouve être inconnue, ou ces paramètres varient lentement avec le temps en raison du vieillissement. Aucun modèle de ce type n'est directement disponible a priori alors, des techniques d'identification doivent être utilisées pour trouver en ligne un modèle adapté. Plusieurs études empiriques ont démontré la faisabilité d'une telle approche. [89], [90]. Cependant, ce qui fait largement défaut dans la littérature sur la commande des processus, c'est la disponibilité des résultats avec de grandes garanties théoriques de stabilité et de performance.

Nous avons présenté la conception d'une commande IMC adaptative fractionnaire qui garantit la stabilité et la robustesse.

### 4.3 La commande à modèle interne (IMC) : paramètres connus

Dans cette section, nous présentons quelque structure de commande non adaptatives utilisant la structure IMC. Maintenant, nous considérons la configuration IMC pour un système stable défini par sa fonction de transfert  $P(s)$  comme le montre la figure 4.1. Le contrôleur IMC se compose d'un « contrôleur de l'IMC »  $Q(s)$  stable et d'un modèle du système qui est généralement appelé « modèle interne ». On peut montrer [88, 91] que si le système  $P(s)$  est stable et que le modèle interne est une réplique exacte de ce dernier, alors la stabilité du contrôleur IMC est équivalente à la stabilité interne de la configuration de la figure 4.1. En effet, le contrôleur IMC est vraiment le contrôleur Youla [92] qui apparaît dans un cas particulier de paramétrage YJBH de tous les contrôleurs de stabilisation [91]. De ce fait, la stabilité interne est assurée tant que  $Q(s)$  est choisie pour être une fonction de transfert rationnelle stable.

### 4.4 La commande à modèle de référence

L'objectif de la commande de modèle à référence est de concevoir un contrôleur sans différentiateur de sorte que la sortie  $y$  du système commandé  $P(s)$  suive asymptotiquement la sortie d'un modèle de référence stable  $w_m(s)$  pour toutes les parties des signaux d'entrées de référence continus  $r(t)$ . Afin d'atteindre l'objectif de commande, nous faisons

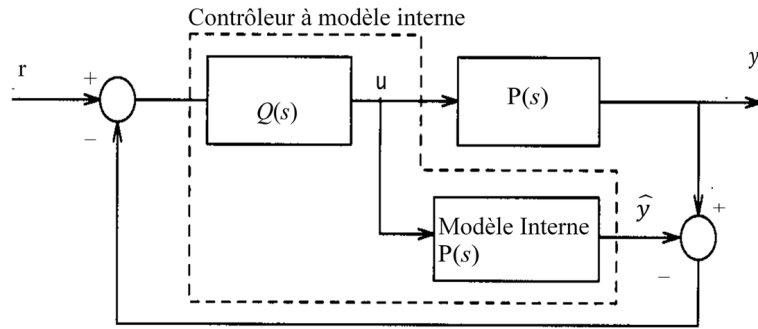


FIGURE 4.1: La commande à modèle interne (IMC)

les hypothèses suivantes qui sont désormais standard dans la littérature de la commande de modèle à référence :

1. Le système  $P(s)$  est à minimum de phase.
2. Le degré relatif de la fonction de transfert du modèle de référence  $w_m(s)$  est supérieur ou égal à celui de la fonction de transfert du système  $P(s)$

L'hypothèse (1) ci-dessus est nécessaire pour assurer la stabilité interne car la satisfaction de l'objectif de la commande à modèle de référence nécessite l'annulation des zéros du système. L'hypothèse (2), d'autre part, permet la conception d'un contrôleur sans différenciateur pour répondre à l'objectif de la commande. Si les hypothèses (1) et (2) sont satisfaites, il est facile de vérifier à partir de la figure 1.1 que le choix

$$Q(s) = W_m(s)P^{-1}(s) \quad (4.1)$$

## 4.5 La commande adaptative à modèle interne

Afin de mettre en œuvre les contrôleurs IMC de la dernière section, l'installation doit être connue a priori afin que le « modèle interne » puisse être conçu et le paramètre IMC  $Q(s)$  est calculé. Alors le système lui-même est inconnu, les contrôleurs basés sur IMC ne peuvent pas être mis en œuvre. Dans ce cas, l'approche naturelle à suivre est de conserver la même structure de contrôleur que celle de la figure 4.1, le modèle interne étant adapté en ligne sur la base d'une sorte de mécanisme d'estimation des paramètres et le ou les paramètres IMC étant mis à jour ponctuellement. En utilisant l'une des lois de commande

ci-dessus. Il s'agit de l'approche d'équivalence de certitude standard de la commande adaptative et aboutit à ce que l'on appelle des lois de commande adaptative de modèle interne. Bien que de telles commandes adaptatives IMC aient été étudiés empiriquement dans la littérature, par ex. [89, 90], l'objectif maintenant, est de développer des lois de commande IMC adaptatives avec des garanties prouvées de stabilité et de robustesse du procédé décrit par :

$$P(s) = \frac{Z_0(s)}{R_0(s)} [1 + \mu\Delta_m(s)], \mu > 0 \quad (4.2)$$

où  $R_0(s)$  est un polynôme de Hurwitz monique de degré  $n$ ;  $Z_0(s)$  est un polynôme de degré  $l$  avec;  $l < n$ ,  $\frac{Z_0(s)}{R_0(s)}$  représente la partie modélisée du système; et  $\mu\Delta_m(s)$  est une incertitude multiplicative stable telle que  $\frac{Z_0(s)}{R_0(s)}\Delta_m(s)$  est dite proprement stricte. Maintenant, on va présenter la conception de la loi adaptative robuste qui est réalisée en utilisant une approche standard de la littérature de la commande adaptatif robuste.

## 4.6 Conception d'une loi robuste adaptative

Soit le procédé définie par l'équation :

$$y = \frac{Z_0(s)}{R_0(s)} [1 + \mu\Delta_m(s)] u, \mu > 0 \quad (4.3)$$

Où  $u, y$  sont les signaux d'entrée et de sortie du procédé. Cette équation peut être réécrite comme :

$$R_0(s)y = Z_0(s)u + \mu\Delta_m(s) Z_0(s) u, \mu > 0 \quad (4.4)$$

La multiplication de deux cotés par  $\frac{1}{\Lambda(s)}$  ou  $\Lambda(s)$  et un polynôme aléatoire monique et Hurwitz de degré  $n$ , nous donne :

$$y = \frac{\Lambda(s) - R_0(s)}{\Lambda(s)} y + \frac{Z_0(s)}{\Lambda(s)} u + \frac{\mu\Delta_m(s)Z_0(s)}{\Lambda(s)} u \quad (4.5)$$

L'équation ci-dessus peut être réécrite en :

$$y = \theta^{*T} \phi + \mu \eta \quad (4.6)$$

Où  $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}]^T$ ,  $\theta_1^*, \theta_2^*$  sont des vecteurs contenant les coefficients de  $[\Lambda(s) - R_o(s)]$  et  $Z_0(s)$  respectivement.

$$\phi = [\phi_1^T, \phi_2^T]^T; \quad \phi_1 = \frac{a_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y; \quad \phi_2 = \frac{a_l(s)}{\Lambda(s)} u \quad (4.7)$$

$$a_{n-1}(s) = [s^{n-1}, s^{n-2}, \dots, 1]^T$$

$$a_l(s) = [s^l, s^{l-1}, \dots, 1]^T$$

Et

$$\eta \triangleq \frac{\Delta_m(s) Z_o(s)}{\Lambda(s)} u \quad (4.8)$$

L'équation (4.5) est exactement sous la forme du modèle paramétrique linéaire avec erreur de modélisation pour laquelle une grande classe de lois adaptatives robustes peut être développée. En particulier, en utilisant la méthode du gradient avec normalisation et projection des paramètres, nous obtenons la loi adaptative robuste suivante (Datta,[91])

$$\dot{\theta} = Pr[\gamma \varepsilon f], \theta(0) \in C_\theta \quad (4.9)$$

$$\varepsilon = \frac{y - \hat{y}}{m^2} \dot{y} \quad (4.10)$$

$$\dot{y} = \theta^T \phi \quad (4.11)$$

$$m^2 = 1 + n_s^2, n_s^2 = m_s \quad (4.12)$$

$$\dot{m}_s = -\delta_o m_s + u^2 + y^2, \quad m_s(0) = 0 \quad (4.13)$$

Où  $\gamma > 0$  est un gain adaptatif;  $C_\theta$  est un ensemble convexe compact connu contenant  $\theta^*$ ;  $Pr[\cdot]$  est l'opérateur de projection standard qui garantit que le paramètre estimé  $\theta(t)$  ne sort pas de l'ensemble  $C_\theta$  et  $\delta_o > 0$  est une constante choisie de sorte que  $\Delta_m(s), \frac{1}{\Lambda(s)}$  sont analytiques dans  $Re[s] > -\frac{\delta_o}{2}$ . Ce choix de  $\delta_o$ , bien sûr, nécessite quelques connaissances a priori sur la marge de stabilité de la dynamique non modélisée, une hypothèse qui est maintenant devenue assez standard dans la littérature de la commande adaptative robuste.

La commande adaptative robuste est obtenue en remplaçant le modèle interne de la figure 4.1 par celui obtenu à partir de l'équation (10), et le paramètre  $Q(s)$  par un opérateur de temporisation qui minimise, pour chaque temps fixe  $t$ , le critère de la norme  $H_2$  correspondant au système estimé.

## 4.7 La commande Adaptative d'un moteur à courant continu

Dans cette session, nous avons utilisé la méthode adaptative directe appelée la commande adaptative à modèle de référence. Il existe trois principaux éléments de ce modèle : Modèle de référence, modèle du système et contrôleur adaptatif.

Le modèle ressemblera à ceci :

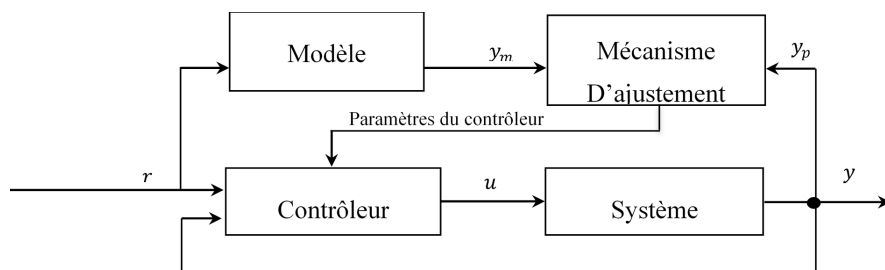


FIGURE 4.2: Schéma fonctionnel d'un système de commande adaptative à modèle de référence

### 4.7.1 Le modèle de référence

Cette partie contient le comportement souhaité du système en boucle fermée. En d'autres termes, comment le système global se comporte pour une entrée donnée. Le comportement de référence est modélisé comme une fonction de transfert. Cela peut également provenir des spécifications du système en boucle fermée décrites dans la figure ci-dessous comme le temps de montée, le temps de réponse et l'erreur statique souhaitée (en%). La sortie du modèle de référence,  $y_m$ , est la trajectoire de référence souhaitée que la sortie du système ( $y_p$ ) doit suivre.

## 4.7.2 Le modèle du système à commander (Procédée)

Le système traité dans cette partie est un moteur à courant continu. L'un des nombreux paramètres du moteur,  $K_f$  l'amortissement mécanique, est considéré comme variant, à partir d'une valeur initiale (nominale)  $k_{fn}$ . Le contrôleur  $PID$  est réglé pour obtenir la réponse souhaitée avec cette valeur initiale de  $K_f$ . Maintenant que le moteur passe par le vieillissement et l'impact d'autres conditions environnementales,  $K_f$  change, cela changera le comportement du moteur. Par conséquent, le contrôleur doit adapter et changer ses paramètres pour obtenir la réponse souhaitée ( $Y_p - Y_m = erreur(e) = 0$ ).

La fonction de transfert du moteur est donnée par :

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \left[ \frac{rad/sec}{V} \right] \quad (4.14)$$

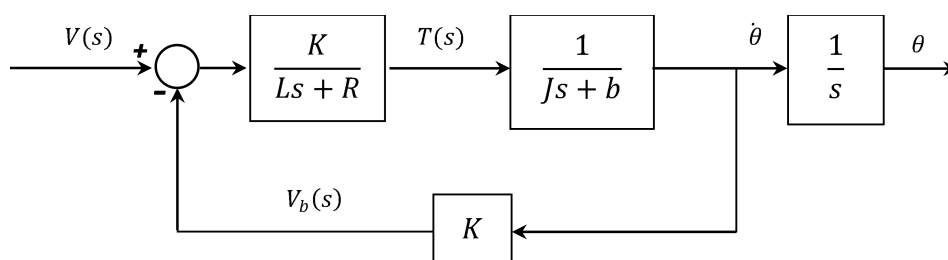


FIGURE 4.3: Schéma fonctionnel d'un moteur a courant continue

## 4.7.3 Contrôleur adaptatif

Le contrôleur  $PID$  : cette partie est fixe et les gains ont été ajustés pour garder à l'esprit l'état initial du système et pour obtenir une stabilité globale. La sortie du contrôleur  $PID$  est  $u_c$ .

### Le Mécanisme de la commande appliquée

L'objectif de cette partie du contrôleur est de modifier sa sortie ( $\theta$ ) en fonction de l'erreur ( $e$ ) entre la sortie du système ( $y_p$ ) et la sortie du modèle de référence ( $y_m$ ). La vitesse à laquelle il peut s'adapter (ou modifier sa sortie) dépend du paramètre appelé taux d'apprentissage,  $gamma\gamma$ . Plus la valeur de gamma est élevée, plus il peut s'adapter rapidement à tout changement du système. Mais il y a aussi des effets secondaires.

La sortie du contrôleur ( $u$ ) est maintenant calculée par :  $u = u_c * \theta$

TABLE 4.1: Paramètres du moteur utilisé.

$B$	$J$	$K_F$	$K_b$	$K_c$	$K_f$	$K_m$	$L$	$R$
0.2000	0.0200	10.0000	0.0150	1.0000	0.2000	0.0150	0.5000	2.0000

Dans le cas normal le système est commandé en utilisant un régulateur  $PID$  ou sa fonction de transfert est donnée par :

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (4.15)$$

### Cas où le système ne présente aucun changement dans ses paramètres internes

Dans ce cas la valeur de  $\theta$  reste constante et égal à 1.

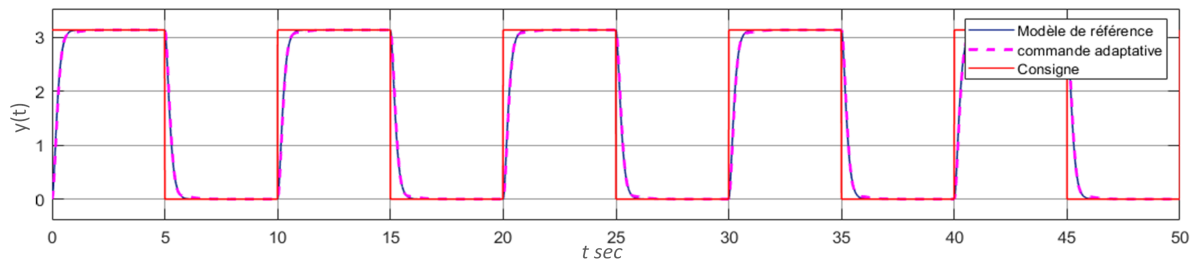


FIGURE 4.4: La sortie du système commandé et la sortie du modèle

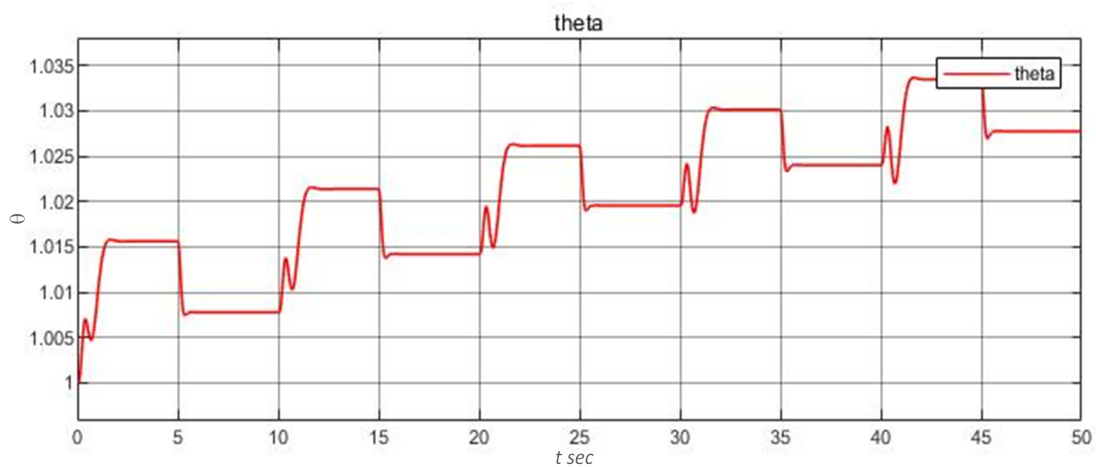


FIGURE 4.5: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction du temps de simulation

Dans le cas où la valeur de  $K_f$  changera de 0.2 à 1 une différence entre la sortie du modèle et du système provoque une augmentation de la valeur de  $\theta$  pour que le système de commande s'adapte et compense la différence. Une valeur optimale de  $\gamma = 0.5$  reste toujours un bon choix pour l'adaptation de la commande.

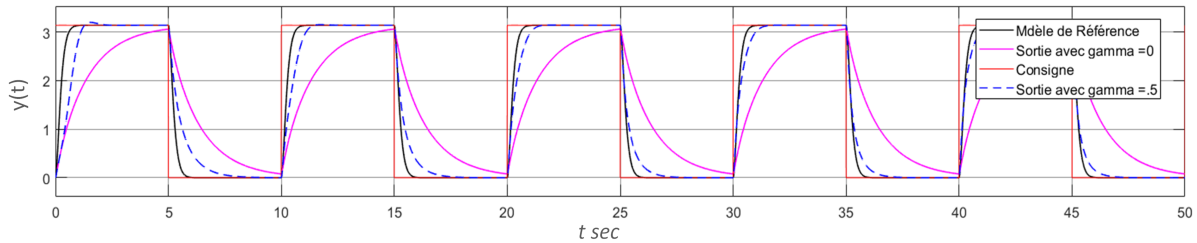


FIGURE 4.6: La sortie du système et du modèle sans commande et avec commande adaptative pour  $\gamma = 0.5$

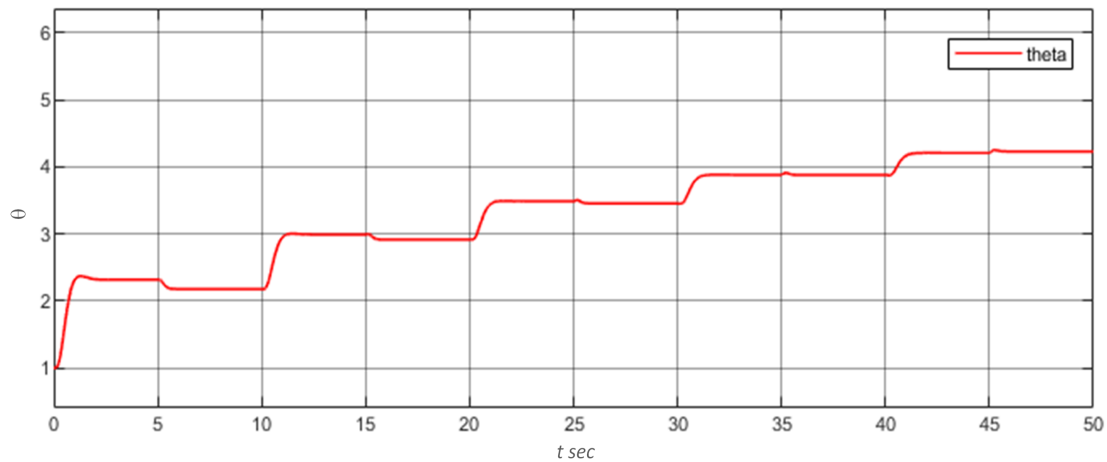


FIGURE 4.7: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction de temp de simulation

#### 4.7.4 L'utilisation de la commande adaptative fractionnaire

Dans cette partie on va utiliser une commande adaptative fractionnaire basé sur l'intégration d'un régulateur PID fractionnaire dans la chaîne de commande. La structure du régulateur et donner par l'équation suivante :

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s^{\alpha'}} + K_D s^{\beta} \quad (4.16)$$

ou  $1 < \alpha' < 2$  et  $0 < \beta < 1$ .



On suppose maintenant que  $\alpha' = \alpha + 1$  avec  $0 < \alpha < 1$ .

Donc la fonction de transfert du contrôleur ( 4.16) devient :

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s \cdot s^\alpha} + K_D s^\beta \quad (4.17)$$

Dans le cas où la valeur de  $K_f$  changera de 0.2 à 1, en va utiliser la même valeur optimale de  $\gamma = 0.5$  pour l'adaptation de la commande utilisant les deux contrôleurs classique et fractionnaire.

La fonction de transfert du contrôleur utilisé par la commande adaptative fractionnaire est donnée par :

$$R(s) = 10(4 + 14.5 \frac{1}{s \cdot s^{0.01}} + 0.5 s^{0.15}) \quad (4.18)$$

Avec  $\alpha = 0.01$  et  $\beta = 0.15$ , ces valeurs sont obtenues empiriquement, l'utilisation de techniques d'optimisation peut donner de meilleurs résultats. Cependant, comme la technique empirique nous donne de bons résultats, nous considérons que notre objectif est réalisé

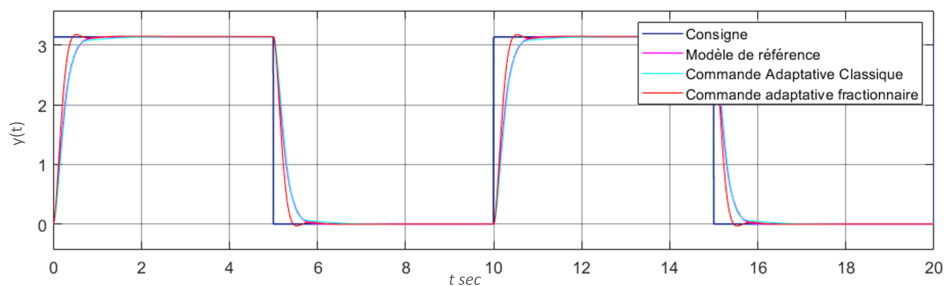


FIGURE 4.8: Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour  $K_f = 0.2$

Une comparaison de l'utilisation des deux contrôleurs avec  $K_f = 1$  est montrée dans la figure suivante :

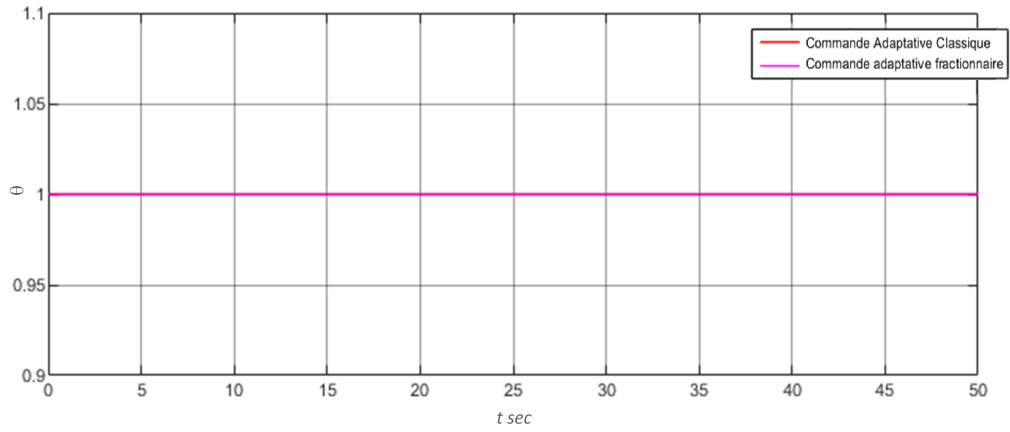


FIGURE 4.9: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction du temps de simulation

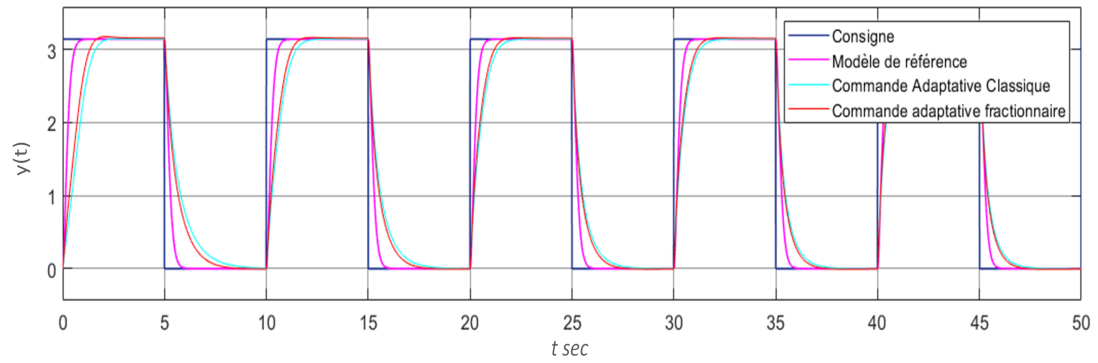


FIGURE 4.10: Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour  $K_f = 1$ ,  $\gamma = 0.2$

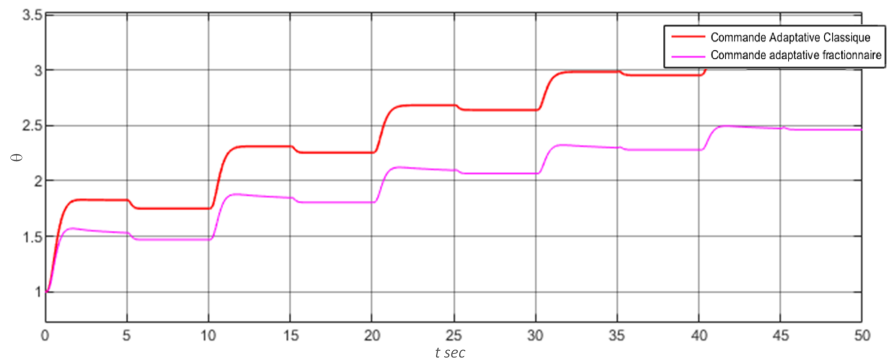


FIGURE 4.11: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction du temps de simulation

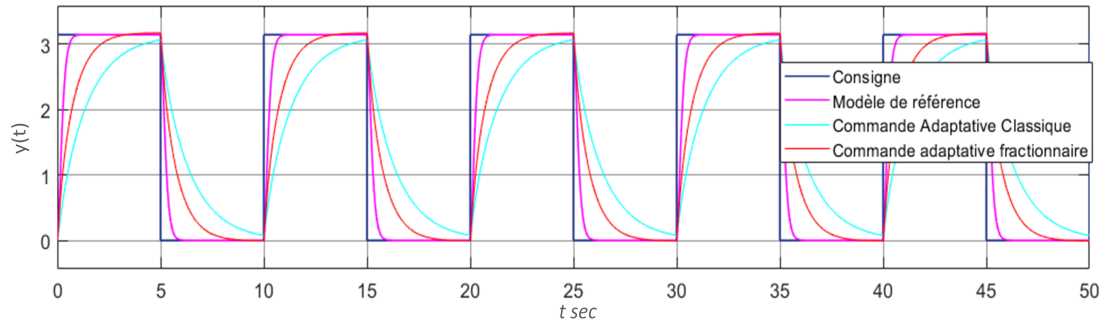


FIGURE 4.12: Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour  $K_f = 1$  ,  $\gamma = 0$

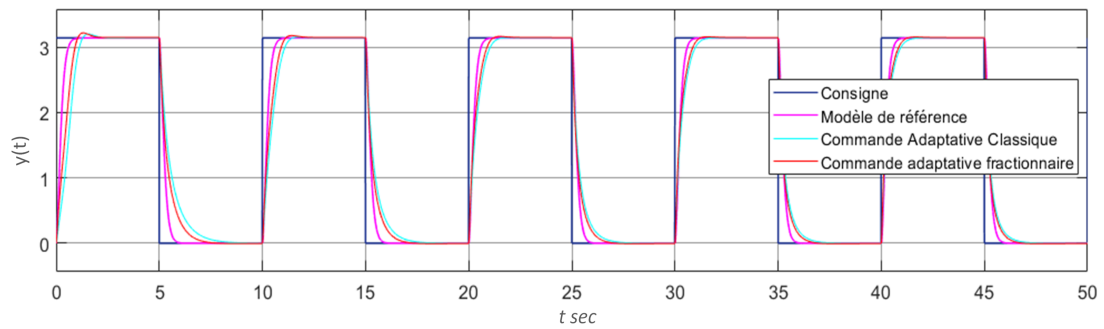


FIGURE 4.13: Sortie du système avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour  $K_f = 1$  ,  $\gamma = 0.5$

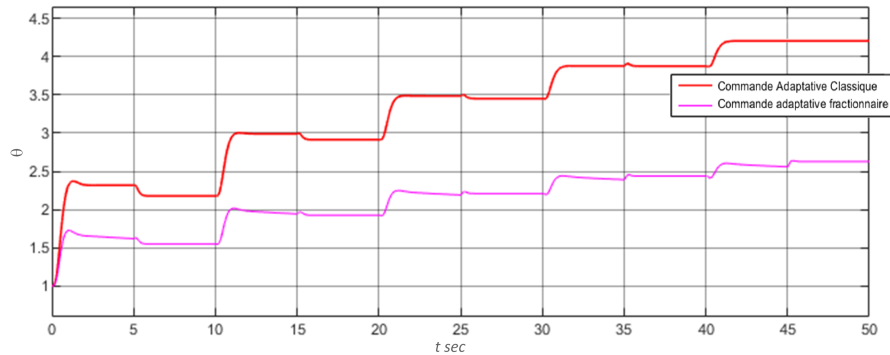


FIGURE 4.14: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction du temps de simulation

## 4.8 Conclusion

Ce chapitre introduit les notions de base sur les techniques de commande adaptative d'ordre fractionnaire à modèle interne. Nous y présentons la commande adaptative à modèle interne avec ses lois de commande et sa structure de contrôleur PID avec des

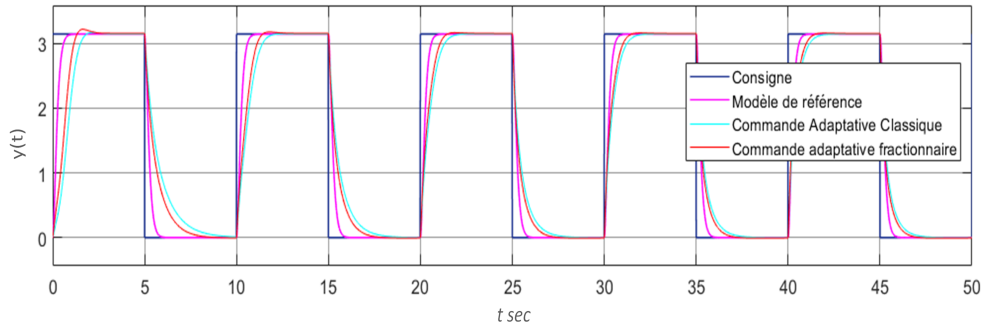


FIGURE 4.15: Sortie du system avec une commande adaptative classique et fractionnaire pour  $K_f = 2$   $\gamma = 0.5$

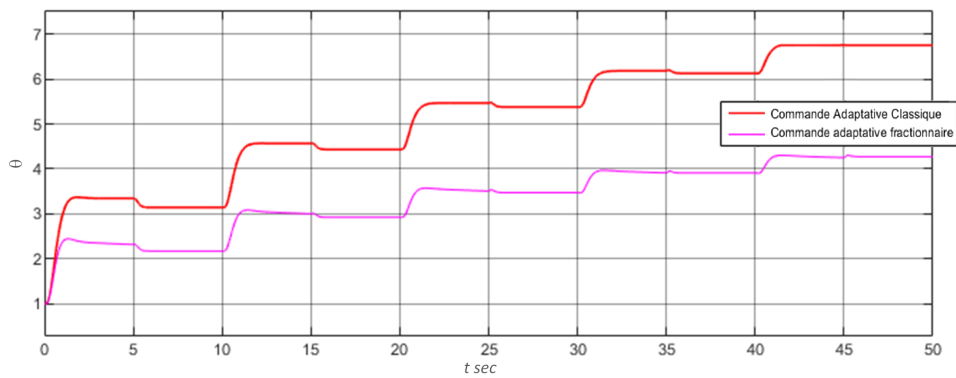


FIGURE 4.16: Variation des valeurs de  $\theta$  en fonction du temps de simulation

opérateurs d'ordre fractionnaires. Cette dernière montre la stabilité du système en BF, tout en assurant la précision de la sortie ainsi qu'un meilleur temps de réponse. D'autre part, il faut noter que cette méthode donne de meilleures performances que celle utilisée avec un PID classique.

# Conclusion Générale

Ce travail se concentre essentiellement sur la commande d'ordre fractionnaire. En effet, de nouvelles conceptions et réglages des correcteurs fractionnaires sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant à différents processus. Nous avons présenté deux contributions relatives à la commande fractionnée pour améliorer la qualité de commande des systèmes dynamiques.

Notre première contribution concerne l'application du calcul d'ordre non entier pour le contrôle des systèmes chaotiques, nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur la commande prédictive fractionnaire, et le modèle flou de Takagi- Sugeno TS. Une généralisation du correcteur *PID* d'ordre entier dans lequel les ordres des actions dérivée et intégrale sont fractionnaires. L'idée de base de la méthode de réglage proposée est d'ajuster les cinq paramètres  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  en minimisant l'intégrale du carré de l'erreur (ISE) des états du système du système chaotique en utilisant l'algorithme d'optimisation de l'essaim de particules (PSO). Une étude comparative avec la structure de contrôle déjà existante nous a montré que cette nouvelle conception donne des résultats meilleurs.

La deuxième contribution concerne la proposition d'une nouvelle conception de commande adaptative d'ordre fractionnaire à modèle interne, le contrôleur utilisé dans cette structure est une généralisation de la structure de commande *PID* classique. Le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire en plus des trois paramètres classiques, nous retrouvons une action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et une action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$ , l'intérêt de ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a cinq paramètres. Les paramètres du contrôleur dans cette partie ont été ajustés empiriquement. En effet, nous avons obtenu de très bons résultats et il n'est pas nécessaire d'appliquer une méthode d'optimisation. Cependant l'utilisation d'une telle technique peut donner un bon résultat considérable en terme de qualité dans le domaine du contrôle adaptatif. Dans l'ensemble, nous pouvons dire que le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire a amélioré les performances et la robustesse du système de commande. Nous

y présentons la commande adaptative à modèle interne avec ses lois de commande et sa structure de contrôleur *PID* avec des opérateurs d'ordre fractionnaires. Cette dernière montre la stabilité du système en BF, tout en assurant la précision de la sortie ainsi qu'un meilleur temps de réponse. D'autre part, il faut noter que cette méthode donne de meilleures performances que celle utilisée avec un *PID* classique.

## Perspectives et suggestions

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux réalisés et en cours de réalisation. Nous proposons ainsi :

- Etendre les nouvelles techniques basées sur les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire pour la synchronisation des systèmes chaotiques.
- Etendre les approches proposées de la commande adaptative d'ordre fractionnaire aux systèmes multi-variables.
- Etendre la commande d'ordre fractionnaire aux systèmes à retard.

# Résumé

Le correcteur *PID* est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels durant plusieurs décennies. Récemment, le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur *PID* classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires de l'action d'intégration et de la dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Donc, le travail réalisé dans cette thèse présente essentiellement des idées sur la commande d'ordre fractionnaire, en utilisant les algorithmes méta heuristiques et l'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Premièrement, l'application des correcteur *PID* fractionnaire pour le contrôle des systèmes chaotiques à savoir la stabilisation de ces systèmes, et une autre contribution consiste à la conception d'une commande adaptative d'ordre fractionnaire à modèle interne.

La comparaison avec les autres méthodes de commande montre une nette amélioration des performances (temps de réponse, temps de montée, stabilité) et une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations. Ces observations sont assurées par des simulations numériques.

## Mots clés

Dérivés fractionnaires, intégrales fractionnaires, systèmes d'ordre fractionnaire, contrôleurs d'ordre fractionnaire, PSO, GA, systèmes chaotiques., commande adaptative



# Abstract

The *PID* controller is the most used technique in the control of industrial processes for decades. Recently, the fractional order  $PI^\alpha D^\beta$  controller which is a generalization of the classical *PID* corrector has been proposed. The interest in this type of controller is justified by the better flexibility in the design of the control since it has two additional parameters, which are the fractional orders of the integration and the derivation actions. These parameters can be used to satisfy additional performance in the design of systems control. So, the work done in this thesis mainly presents ideas about fractional order control, using meta heuristic algorithms and the implementation of fractional order controllers.

First, the application of fractional *PID* controllers to control chaotic systems, namely their stabilization, where the other contribution consists in designing an adaptive fractional order control with an internal model.

The Comparison with other control methods shows a marked improvement in performance (response time, rise time, stability) and better robustness against noise and disturbance. These observations are ensured by numerical simulations.

## Key words

Fractional derivatives, fractional integrals, fractional order systems, fractional order controllers, PSO, GA, chaotic systems., Adaptive control

# Bibliographie

- [1] A. VanDerZiel. On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effects. *Physica*, 16 :359-372, 1950.
- [2] D.W. Davidson and R.H. Cole. Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol and n-propanol. *Journal of Chemical Physics*, 19 :1484-1490, 1951.
- [3] S. Buller, E. Karden, D. Kok, and R.W. de Doncker. Modeling the dynamic behaviour of supercapacitors using impedance spectroscopy. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(6), 2002.
- [4] A.M.A. El-Sayed and F.M. Gaafar. Fractional calculus and some intermediate physical processes. *Applied Mathematics and Computation*, 144 :117-126, 2003.
- [5] J.J. Loiseau and H. Mounier. Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux. *ESAIM : Proc.*, pages 131-144, 1998.
- [6] A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Masson. Paris, 1983.
- [7] J. Padovan and J.T. Sawicki. *Nonlinear Vibrations of Fractionally Damped Systems*. *Nonlinear Dynamics*, 16 :321-336, 1998.
- [8] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral. Fractional differentiation for edge detection. *Signal Processing*, 83 :2421-2432, 2003.
- [9] J.T. Sawicky and J. Padovan. Analogue Realisations of Fractional-Order Controllers. *Journal of the Franklin Institute*, 336 :423-433, 1999.
- [10] T.T. Hartley and C.F. Lorenzo. Dynamics and Control of Initialized Fractional Order Systems. *Nonlinear Dynamics*, 29 :201-233, 2002.
- [11] I. Podlubny. Fractional order systems and  $pi^{\lambda}d^{\mu}$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) :208-214, 1999.
- [12] H. Sun and B. Onaral. A unified approach to represent metal electrode interface. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 31 :399-406, July 1984.
- [13] A. Oustaloup. *La commande crone : commande robuste d'ordre non entier*. Hermes. paris 1991
- [14] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Springer-Verlag. Wien and New York, 1997.
- [15] K.B. Oldham and J. Spanier. *Fractional calculus*. Academic Press. New York, 1974.
- [16] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus : Theoretical development and applications in physics and engineering*. Springer. Netherlands, 2007.

- [17] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, 1999.
- [18] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives - an Expository Review. *Nonlinear Dynamics*, 38 :155-170, 2004.
- [19] R. Caponetto, L. Fortuna, and D. Porto. Parameter tuning of a non integer order PID controller. In 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Notre Dame, Indiana, August 12-16, 2002.
- [20] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermes Science, Paris, France, 2005.
- [21] W. Jun, Z. Zhengming, and S. Xiaoying. Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane. volume 2 of Proc. ICEMS'03 Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems, pages 665-668, 2003.
- [22] W. Jun, Z. Zhengming, and S. Xiaoying. Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane. *European Journal of Control*, 1(2) :113-121, 2003.
- [23] N. Retière and M. Ivanès. Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems. *IEEE Power Engineering Review*, pages 62-64, 1998.
- [24] B. Yang, et al. On the use of energy storage technologies for regulation services in electric power systems with significant penetration of wind energy. volume 2 of Proc. EEM'08 5th International Conference on European Electricity Market, pages 1-6, Lisboa, 2008.
- [25] V.K. Varentsov, Koshev A. N., and Chirkina M. A. The electrochemical processes in porous ambience - nonstationary models. volume 2 of Proc. IFOST'08 Third International Forum on Strategic Technologies, pages 148-152, Novosibirsk-Tomsk, 2007.
- [26] S. Buller, E. Karden, D. Kok, and R.W. de Doncker. Modeling the dynamic behaviour of supercapacitors using impedance spectroscopy. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(6), 2002.
- [27] D. Riu, N. Retière, and D. Linzen. Half-order modelling of super capacitors. *IEEE industry applications conference*, pages 2550-2554, 2004.
- [28] N. Bertrand, J. Sabatier, O. Briat, and J.M. Vinassa. Fractional non-linear modelling of ultra-capacitors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation - Elsevier*, 15(5) :1327-1337, 2010.
- [29] Petras, I., Podlubny, I., O'Leary, P., Dorcak L., and Vinagre, B. M., *Analogue Realization of Fractional Order Controllers*, Fakulta BERG, TU Kocise, 2002.
- [30] A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Masson. Paris, 1983.
- [31] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao, B. Onaral, Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Trans Autom Control* 37 :1465-1470, 1992.
- [32] A. Oustaloup, F. Levron, F. Nanot, and B. Mathieu. Frequency band complex non integer differentiator : Characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 47(1) :25-40, 2000.
- [33] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Batlle, *Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications*. London : Springer, 2010.

- [34] K. Aström and T. Hägglund. PID controllers : theory, design and tuning. Instrument Society of America. 2nd edition, 1995.
- [35] P. Torvik and R. Bagley, "On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials", Journal of Applied Mechanics, vol. 51, no. 2, p. 294, 1984.
- [36] L. Le Lay, Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Talence, France, 1998
- [37] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J. L. Battaglia, " Non integer model from modal decomposition for time domain system identification ", Proceedings of the 12th IFAC SYSID, Santa Barbara. USA, pp. 989-994, 2000.
- [38] R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup and H. Garnier, "An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification", IFAC Proceedings Volumes, vol. 41, no. 2, pp. 14379-14384, 2008.
- [39] D. Valério, Fractional Robust System Control. PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade de Técnica de Lisboa, 2005.
- [40] A. Tepljakov, Fractional-order calculus based identification and control of linear dynamic systems. Master's thesis, Department of Computer Control, Tallinn University of Technology, 2011.
- [41] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation, Automatica, vol. 43, no. 9, pp. 1640-1648, 2007.
- [42] R. Malti, S. Victor and A. Oustaloup, Advances in System Identification Using Fractional Models, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 3, no. 2, p. 021401, 2008.
- [43] S. Victor, Identification par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France, 2010.
- [44] R. Malti, M. Aoun, F. Levron, and A. Oustaloup, Unified construction of fractional generalized orthogonal bases, Fractional Differentiation and its Applications, pp. 87-102, 2005
- [45] R. Malti, M. Aoun, and A. Oustaloup, " Synthesis of fractional Kautz-like basis with two periodically repeating complex conjugate modes ", In Control Communications and Signal Processing, First International Symposium on IEEE, pp. 835-839, 2004
- [46] J.F. Leu, S.Y. Tsay, and C. Hwang. Design of optimal fractional-order PID controllers. Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers, 33(2) :193-202, 2002.
- [47] Z. Qing-Shan, C. Guang-Yi, and Z. Xin-Jian. The effect of the fractional order controller's orders variations on the fractional order control systems. Proc. of the first international conference on machine learning and cybernetics, Beijing, China, 4-5 Nov. 2002.
- [48] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and C.A. Monje. Une proposition pour la synthèse de correcteurs PI d'ordre non entier. In Action Thématique "Les Systèmes à Dérivées Non Entières", LAP-ENSEIRB, Bordeaux, France, 27-28 March, 2003.
- [49] J. Cervera, A. Baños, C.A. Monje, and B.M. Vinagre. Tuning of fractional PID controllers by using QFT. In 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Paris, France, 2006.

- [50] D. Valerio and J. Sa Da Costa. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. *Signal Processing*, 86(10) :2771-2784, Oct. 2006.
- [51] J.Y. Cao and B.G. Cao. Design of fractional order controller based on Particle Swarm Optimization. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 4(6) : 775-781, Dec. 2006.
- [52] S. Ladaci and A. Charef. An adaptive fractional  $pi\lambda d\mu$  controller. In *Proc. TMCE* (pp. 18-22), 2006.
- [53] L. Davis. *Handbook of genetic algorithms*. Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [54] Kennedy, James, and Russell Eberhart. Particle swarm optimization, *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*. Vol. 4. IEEE, 1995.
- [55] Boudjehem Djalil, and Boudjehem, Badreddine. Improved heterogeneous particle swarm optimization. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 38(3-4), 481-499, 2017.
- [56] A. Oustaloup, J. Sabatier, and P. Lanusse. From fractal robustness to CRONE control. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2(1) :1-30, 1999.
- [57] D. Boudjehem and B. Boudjehem. A fractional model predictive control for fractional order systems. In *Fractional dynamics and control*, pages 59-71. Springer, 2012.
- [58] Badreddine Boudjehem and Djalil Boudjehem. Fractional order controller design for desired response. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 227(2) :243-251, 2013.
- [59] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2) :130-141, 1963.
- [60] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10) :985-992, 1975.
- [61] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A Yorke. Controlling chaos. *Physical review letters*, 64(11) :1196, 1990.
- [62] Ricardo Lima and Marco Pettini. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations. *Physical Review A*, 41(2) :726, 1990.
- [63] Antonio Azevedo and Sergio M Rezende. Controlling chaos in spin-wave instabilities. *Physical review letters*, 66(10) :1342, 1991.
- [64] Y Braiman and I Goldhirsch. Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations. *Physical Review Letters*, 66(20) :2545, 1991.
- [65] Kestutis Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, 170(6) :421-428, 1992.
- [66] Michael E Bleich and Joshua ES Socolar. Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback. *Physics Letters A*, 210(1-2) :87-94, 1996.
- [67] Hiroyuki Nakajima. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, 232(3-4) :207-210, 1997.
- [68] Toshimitsu Ushio and Shigeru Yamamoto. Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems. *Physics Letters A*, 247(1-2) :112-118, 1998.

- [69] Toshimitsu Ushio and Shigeru Yamamoto. Prediction-based control of chaos. *Physics Letters A*, 264(1) :30-35, 1999.
- [70] Shigeru Yamamoto, Toru Hino, and Toshimitsu Ushio. Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 48(6) :785-789, 2001.
- [71] Sung Jin Yoo, Jin Bae Park, and Yoon Ho Choi. Stable predictive control of chaotic systems using self-recurrent wavelet neural network. *international journal of control, automation, and systems*, 3(1) :43-55, 2005.
- [72] Abdelkrim Boukabou, Abdelhamid Chebbah, and Noura Mansouri. Predictive control of continuous chaotic 9
- [73] Zhang Longge and Liu Xiangjie. The synchronization between two discrete-time chaotic systems using active robust model predictive control. *Nonlinear Dynamics*, 74(4) :905-910, 2013.
- [74] Abdelkader Senouci and Abdelkrim Boukabou. Predictive control and synchronization of chaotic and hyperchaotic systems based on a t-s fuzzy model. *Mathematics and Computers in Simulation*, 105 :62-78, 2014.
- [75] Djalil Boudjehem and Badreddine Boudjehem. Robust fractional order controller for chaotic systems. *IFAC-PapersOnLine*, 49(9) :175-179, 2016.
- [76] Djalil Boudjehem, Moussa Sedraoui, and Badreddine Boudjehem. A fractional model for robust fractional order smith predictor. *Nonlinear Dynamics*, 73(3) :1557-1563, 2013.
- [77] JA Tenreiro Machado. Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms. *Nonlinear Dynamics*, 62(1-2) :447-452, 2010.
- [78] Isabel S Jesus, JATenreiro Machado, and Ramiro S Barbosa. Control of a heat diffusion system through a fractional order nonlinear algorithm. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5) :1687-1694, 2010.
- [79] JA Tenreiro Machado. Optimal controllers with complex order derivatives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 156(1) :2-12, 2013.
- [80] Daniel Parrochia, *Les Grandes Révolutions scientifiques du XXe siècle*, Paris, Presses Universitaires de France, 1997.
- [81] Poincaré, H. *Science et méthode*, Edition Ernest Flammarion, Paris 1908, pp. 66.
- [82] Edward N.Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130-141. *Journal*, 1963.
- [83] Stephen Smale, Differentiable Dynamical Systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, pp. 1-82, 1967.
- [84] David Ruelle, F. Takens, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, volume 20, no. 2, pp. 167-192, 1971.
- [85] David Ruelle, *Hasard et chaos*, Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Odile Jacob 1993.
- [86] Devaney, R.L, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York, 1987.

- [87] B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov, Control of Chaos : Methods and Applications., Automation and Remote Control Volume 64, No. 5, 2003, pp. 673-713.
- [88] Morari, Manfred, and Evangelhos Zafriou. Robust process control. Morari, 1989.
- [89] Takamatsu, T., S. Shioya, and Y. Okada. "Adaptive internal model control and its application to a batch polymerization reactor." IFAC Proceedings Volumes 18.15 (1985) : 109-114.
- [90] Soper, Robert A., Duncan A. Mellichamp, and Dale E. Seborg. "An adaptive nonlinear control strategy for photolithography." 1993 American Control Conference. IEEE, 1993.
- [91] Datta, Aniruddha, and James Ochoa. "Adaptive internal model control : Design and stability analysis." Automatica 32.2 (1996) : 261-266.
- [92] Youla, D., J. D. Bongiorno, and Hamid Jabr. "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers Part I : The single-input-output case." IEEE Transactions on Automatic Control 21.1 (1976) : 3-13.
- [93] Djalil Boudjehem, Badreddine Boudjehem, and Belgacem Mecheri. "Diffusive representation of a fractional control using adaptive partitioning algorithm." Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics 67.1 (2018) : 168-178.
- [94] Belgacem Mecheri, Djalil Boudjehem, Badreddine Boudjehem, "Fractional Order PID Controller for the Stabilization of Chaotic Systems Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model", Int. J. Systems, Control and Communications, 1-13(2020)

## ملخص

ان المصحح PID هو الأسلوب الأكثر استخداما في السيطرة على العمليات الصناعية لعدة عقود. في الآونة الأخيرة، تم اقتراح تحكم للكسور وهو تعميم مصحح PID الكلاسيكي. يتم تبرير الاهتمام بهذا النوع من المصحح بمرونة أفضل في تصميم الأمر نظرًا لأنه يحتوي على معلمتين إضافيتين، وهما الأوامر الكسرية لإجراء التكامل والاشتقاق. يمكن استخدام هذه المعلومات لتلبية أداء إضافي في تصميم أنظمة الرقيق. لذلك، فإن العمل المنجز في هذه الأطروحة يقدم بشكل أساسي أفكارًا حول التوليف باستخدام خوارزميات الكشف عن الفوقية وتطبيق المصححات الكسرية. أولاً، تطبيق مصححات PID الكسرية للتحكم في الأنظمة الفوضوية، أي تثبيت وتزامن هذه الأنظمة، ومساهمة أخرى تتمثل في تصميم عنصر تحكم ترتيب كسري متكيف مع نموذج داخلي.

تشير المقارنة مع طرق التحكم الأخرى إلى تحسن ملحوظ في الأداء (زمن الاستجابة، وقت الصعود، الاستقرار) وقوة أفضل ضد الضوضاء والإزعاج. يتم ضمان هذه الملاحظات عن طريق المحاكاة العددية.

## **الكلمات المفتاحية**

المشتقات الكسرية، التكاملات الكسرية، أنظمة ترتيب كسرية، أنظمة تحكم أمر كسرية، AG-PSO ، الأنظمة الفوضوية، التحكم التكيفي