

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière  
Département de Mathématiques  
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT EN 3<sup>ème</sup> CYCLE**

Domaine : Mathématiques et informatique Filière : Mathématiques  
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

**TOUATI Sami**

*Intitulée*

**Traitement analytique et numérique pour les équations intégro-différentielles non linéaires faiblement singulières de Fredholm.**

Soutenue le : 29/06/2020

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

Mr ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ. de Guelma	Président
Mr AISSAOUI Mohamed-Zine	Prof	Univ. de Guelma	Encadreur
Mr Ghiat Mourad	M.C.B	Univ. de Guelma	Co-encadreur
Mr MAOUNI Messaoud	Prof	Univ. de Skikda	Examinateur
Mr GUEBBAI Hamza	M.C.A	Univ. de Guelma	Examinateur
Mr BENRABIA Nouredine	M.C.A	Univ. de Souk Ahras	Examinateur

**Année Universitaire : 2019/2020.**

---

## Résumé

---

Cette thèse consiste en une étude analytique et numérique d'équations Intégro-différentielles non linéaires faiblement singulières de Fredholm et de Volterra-Fredholm. Dans l'étude analytique on démontre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème du point fixe de Banach, pour l'étude numérique on développe une méthode itérative pour approcher cette solution. Des résultats numériques ont montré l'efficacité de notre méthode.

---

**Mots clés :** Équations Intégro-différentiel de Fredholm de deuxième espèce, Équations Intégro-différentiel de Volterra-Fredholm de deuxième espèce, noyau faiblement singulier, point fixe, méthode d'intégration produit.

---

---

## Abstract

---

This thesis consists of an analytical and numerical study of weakly singular Integro-differential nonlinear equations of Fredholm and Volterra-Fredholm. In the analytical study we demonstrate the existence and uniqueness of the solution using the Banach fixed point theorem, for the numerical study we develop an iterative method to approach this solution. Numerical results have shown the effectiveness of our method.

---

**Key words :** Integro-differential Fredholm equation of the second kind, Integro-differential Volterra-Fredholm equation of the second kind, weakly singular kernel, Fixed point, Product integration method.

---

**Mathematics Subject Classification (2010)** 45B05, 45D05, 47G20, 65R20.

---

## ملخص

---

تتكون هذه الرسالة من دراسة تحليلية وعددية لمعادلات تكاملية غير خطية ضعيفة النواة لكل من فريدهولم و فولتيرا- فريدهولم. في الدراسة التحليلية نبحث عن وجود ووحداية الحل باستخدام نظرية النقطة الثابتة لبناخ, و في الدراسة العددية نطور طريقة تكرارية لمقاربة هذا الحل. أظهرت الأمثلة العددية فعالية طريقتنا.

---

### كلمات مفتاحية:

المعادلات التكاملية لفريدهولم من الدرجة الثانية المعادلات التكاملية لفولتيرا- فريدهولم من الدرجة الثانية، النواة الضعيفة، النقطة الثابتة ، طريقة التكامل المنتج.

---

---

## Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la Théorie des équations intégrales et intégr-différentielles</b>	<b>3</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	4
1.2 Définitions et principe de Banach . . . . .	5
1.3 Équations intégrales . . . . .	6
1.4 Équations intégrales singulières . . . . .	7
1.5 Equations intégr-différentielles . . . . .	8
1.5.1 Les relations entre les équations integrales et les équations intégr-différentielles . . . . .	8
1.5.2 Classification des équations intégr-différentielles . . . . .	10
1.5.2.1 les types d'équations intégr-différentielles . . . . .	10
1.6 Equations intégr-différentielles faiblement singulière . . . . .	11
1.7 Méthode d'intégration produit . . . . .	13
1.8 Interpolation polynomiale par morceaux . . . . .	14
1.9 Interpolation de Lagrange . . . . .	15
<b>2 Étude analytique et numérique des équations intégr-différentielles faiblement singulières non linéaires de Fredholm</b>	<b>16</b>

---

2.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	17
2.2	Méthodes numériques . . . . .	21
2.2.1	L'analyse de la convergence . . . . .	26
2.3	Les tests numériques . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Étude analytique et numérique des équations intégrales faiblement singulières non linéaires de Volterra-Fredholm</b>	<b>34</b>
3.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	36
3.2	Méthodes numériques . . . . .	40
3.2.1	Analyse de la convergence . . . . .	48
3.3	Les tests numériques . . . . .	51
	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

---

# INTRODUCTION

---

Les équations intégrales et integro-différentielles singulières jouent un rôle important dans des domaines célèbres, notamment dans l'étude d'un problème concernant l'analyse des contraintes, la Mécanique de la rupture, la conduction thermique et la Radiation, ainsi que le contact élastique voir [12, 24].

Comme la solution analytique de ces équations est difficile à trouver, il est donc important de développer une méthode numérique pour aborder leurs solutions. Cependant, la construction d'approximation pour ces équations n'est pas une tâche facile en raison de la singularité du noyau.

Plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour cela, telles que, la méthode de collocation [2, 8], la matrice opérationnelle [34, 39], les ondelettes [23, 45], méthode de Galerkin [25, 37], les fonctions spline [16, 41].

Dans des travaux récents [14, 15, 36], les auteurs ont étudié le problème de l'existence de la solution d'équations integro-différentielles, où la dérivée de l'inconnu est sous le signe de l'intégrale.

Dans la présente thèse, nous nous intéressons uniquement aux classes d'équations integro-différentielles, qui sont connues sous le nom d'équations integro-différentielles faiblement singulière.

Le but de cette thèse est de développer un schéma itératif pour approcher la solution de l'équation de Fredholm et de Volterra-Fredholm integro-différentielle non linéaire, avec

un noyau faiblement singulier. Nous examinons aussi l'existence et l'unicité de la solution de ces équations.

Ainsi notre thèse se compose d'une Introduction et de trois chapitres

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions de base, qui peuvent servir à notre méthode, en plus, nous discutons le concept d'équations intégral-différentielles.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations de Fredholm intégral-différentielles faiblement singulières. Après avoir prouvé l'existence et l'unicité de la solution, des exemples illustratifs ont été inclus, pour démontrer la validité et l'applicabilité des techniques proposées.

Le troisième chapitre est structuré comme le précédent, où nous appliquons une méthode itérative pour la résolution des équations intégral-différentielles non linéaires de Volterra-Fredholm avec un noyau faiblement singulier. Nous appliquons notre technique à certains nombre d'exemples d'équations, pour montrer la performance et l'efficacité de cette méthode.



**Introduction à la Théorie des équations intégrales et  
intégro-différentielles**

---

**Sommaire**

---

<b>1.1</b>	<b>Espaces fonctionnels . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.2</b>	<b>Définitions et principe de Banach . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.3</b>	<b>Équations intégrales . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.4</b>	<b>Équations intégrales singulières . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.5</b>	<b>Equations intégro-différentielles . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.6</b>	<b>Equations intégro-différentielles faiblement singulière . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.7</b>	<b>Méthode d'intégration produit . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.8</b>	<b>Interpolation polynomiale par morceaux . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>1.9</b>	<b>Interpolation de Lagrange . . . . .</b>	<b>15</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons des outils mathématiques nécessaires à notre thème de recherche. Nous commençons par donner quelques notions de base sur les espaces fonctionnels

## 1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous définissons les espaces fonctionnels les plus importants à utiliser dans l'étude des équations intégré-différentielles et nous donnons quelques notes de bases sur ces espaces.

Nous introduisons les espaces de Lebesgue des fonctions définies sur un ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  en notant par,

$$L^p(U) = \{v : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; \|v\|_{L^p(U)} = [\int_U |v(y)|^p dy]^{1/p} < \infty\}, 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(U) = \{v : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; \|v\|_{L^\infty(U)} = \text{ess sup}_{y \in U} |v(y)| < \infty\}.$$

L'espace  $L^2(U)$  est un espace de Hilbert munit du Produit scalaire

$$\langle u, w \rangle_{L^2(U)} = \int_U v(y)w(y) dy$$

et de la norme

$$\|v\|_{L^2(U)} = [\int_U |v(y)|^2 dy]^{1/2}$$

Le symbole  $C(U)$  représente l'espace de fonctions continues sur  $U$ , dans le cas où  $U$  est un compact,  $C(U)$  est l'espace de Banach muni de la norme usuelle,

$$\|v\|_{C(U)} = \max_{y \in U} |v(y)|$$

Par  $C^1(U)$ , nous désignons l'espace de Banach des fonctions continument différentiables muni de la norme

$$\|v\|_{C^1(U)} = \|v\|_{C(U)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial_i x} \right\|_{C(U)}$$

Par  $W^{1,p}(U)$ , nous désignons l'espace de Sobolev définie par

$$W^{1,p}(U) = \{u : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, u \in L^p(U), \partial_i u \in L^p(U) \quad i = 1, \dots, m\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(U)} = (\|v\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^m \|\partial_i v\|_{L^p(U)})^{1/p}$$

Pour  $p = 2$ ,  $W^{1,2} = H^1$ , est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(U)} = \langle u, v \rangle_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(U)},$$

et dont la norme est définie par

$$\|v\|_{H^1(U)} = (\langle u, v \rangle_{H^1(U)})^{1/2} = \left( \int_U |v|^2 dx + \sum_{i=1}^m \int_U \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Nous rappelons les principaux résultats de la théorie du points fixe sur un espace de Banach.

## 1.2 Définitions et principe de Banach

**Définition 1.2.1.** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach, une application  $F : X \rightarrow X$  est appelée une  $q$ -contraction, s'il existe une constante  $0 \leq q < 1$  tel que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq q\|x - y\|,$$

pour tous  $x, y \in X$ .

**Théorème 1.2.1.** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$  est une  $q$ -contraction, alors

- (a)  $F$  possède un unique point fixe  $x^* \in X$  ;
- (b) la suite d'approximations successives  $x_{n+1} = F(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  converge vers la solution  $x^*$ , pour tout choix arbitraire du point initial  $x_0 \in X$  ;

(c) *les estimations d'erreur*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|,$$

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q}{1 - q} \|x_n - x_{n-1}\|,$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.3 Équations intégrales

Une équation intégrale linéaire de la forme,

$$m(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} G(t, s)u(s) ds, \quad (1.3.1)$$

où  $f(t)$ ,  $m(t)$  et  $g(t, s)$  sont des fonctions connues, tandis que  $u(t)$  est une fonction inconnue et  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe non nul, est appelée équation intégrale de troisième espèce. La fonction  $G(t, s)$  est connue comme le noyau de l'équation intégrale.

Les cas particuliers de (1.3.1) sont les suivants :

(i) équation intégrale de premier espèce

Une équation intégrale linéaire de la forme (en posant  $m(t) = 0$  dans (1.3.1))

$$f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} G(t, s)u(s) ds = 0, \quad (1.3.2)$$

est connu comme l'équation intégrale de premier espèce.

(ii) équation intégrale du deuxième espèce

Une équation intégrale linéaire de la forme (en posant  $m(t) = 1$  dans (1.3.1))

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} G(t, s)u(s) ds, \quad (1.3.3)$$

est appelée équation intégrale de deuxième espèce

(iii) équation intégrale homogène de second espèce.

Une équation intégrale linéaire de la forme (en posant  $m(t) = 1$  et  $f(t)=0$  dans (1.3.1))

$$u(t) = \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} G(t, s)u(s) ds, \quad (1.3.4)$$

est dite équation intégrale homogène du deuxième espèce.

## 1.4 Équations intégrales singulières

Une équation intégrale est dite singulière si l'une ou les deux bornes d'intégrations sont infinies, ou si le noyau est singulier à l'intérieur du domaine d'intégration.

En se basant sur la nature infini du noyau, on peut avoir trois types de noyaux singuliers, à savoir noyau faiblement singulier, noyau fortement singulier et noyau hypersingulier.

Nous définissons les différents types de noyau singulier à savoir

- Les formes typiques de noyaux faiblement singuliers  $p(x, s)$  sont de la forme

$$p(x, s) = |x - s|^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

mais aussi Le noyau logarithmique écrit sous la forme,

$$p(x, s) = \log |x - s|,$$

qui peut être considéré comme un noyau faiblement singulier, car on peut écrire

$$\log |x - s| = \frac{\log |x - s| |x - s|^{-\alpha}}{|x - s|^{-\alpha}} = N(x, s) |x - s|^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- le noyau fortement singulier  $p(x, s)$  est de la forme suivante,

$$p(x, s) = \frac{M(x, s)}{|x - s|}, \quad a < x < b$$

où  $M(x, y)$  est une fonction différentiable avec  $M(x, x) = 0$ .

- Le noyau hypersingulier se présente sous la forme suivante,

$$p(x, s) = \frac{M(x, s)}{(x - s)^2}, \quad a < x < b$$

où  $M(x, y)$  est une fonction continue avec  $M(x, x) = 0$ .

Les intégrales qui contiennent des noyaux fortement singuliers ou des noyaux hypersinguliers sont souvent prises dans le sens de la valeur principale

## 1.5 Equations intégro-différentielles

### 1.5.1 Les relations entre les équations intégrales et les équations intégro-différentielles

L'équation intégro-différentielle est une équation qui inclut à la fois les dérivées et les intégrales d'une fonction inconnue. Donc à partir de la définition on peut trouver deux type d'équations intégro-différentielles

Le premier type s'écrit

$$u'(t) = f(t) + \int_a^b G(t, s, u(s)) ds, \quad (1.5.5)$$

avec  $u(a) = u_0$ . Dans ces équations la fonction  $u$  est l'inconnu, aussi la dérivée de l'inconnu est en dehors de l'intégrale, la fonction noyau  $G(t, s, u(s))$  et la source  $f$  sont données.

le deuxième type concerne une équation intégro-différentielle, dont la dérivée de l'inconnu est à l'intérieur de l'intégrale, qui s'écrit

$$u(t) = f(t) + \int_a^b G(t, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (1.5.6)$$

Dans ces équations la dérivée de l'inconnu est sous le signe de l'intégrale, le noyau  $G(t, s, u(s), u'(s))$  et la source  $f$  sont données.

Il existe une relation étroite entre les équations intégrales et les équations intégral-différentielles, en effet selon le type d'équations intégral-différentielles, on peut les relier de deux façons suivantes :

Une équation intégral-différentielle peut être transformée en équation intégrale, par l'intégration, c'est le cas de l'équation (1.5.5). Ainsi, Il est facile de montrer que l'équation de Volterra suivante :

$$u'(t) = f(t) + \int_a^t G(t, s, u(s)) ds, \quad u(a) = u_0,$$

où  $f \in C[J]$ ,  $J \in C[J \times J, \mathbb{R}]$  et  $J = [a, a + m]$ , est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = u_0 + \int_a^t [f(s) + \int_s^t G(\sigma, s, u(s)) d\sigma] ds,$$

qu'on peut obtenir en intégrant l'équation intégral-différentielle de  $a$  à  $t$  et en modifiant l'ordre d'intégration [voir [17] ].

D'après l'équation (1.5.6), on constate qu'une équation intégral-différentielle peut être considérée comme une équation intégrale, par rapport à la dérivée de la fonction inconnue, suite à l'utilisation d'un changement de variables convenable. En guise d'exemple, on peut se référer à [44] ; en notant par  $v(t) = u'(t)$ , ainsi  $v \in C([a, b])$ , alors on trouve l'équation  $u(t) = f(a) + \int_a^t v(s) ds$  :

avec

$$f(a) + \int_a^t v(s) ds = f(t) + \int_a^t G(t, s, f(a) + \int_a^s v(\tau) d\tau, v(s)) ds.$$

En dérivant par rapport à la variable  $t$  on obtient

$$v(t) = f'(t) + G(t, s, f(a) + \int_a^t v(s) ds, v(t)) + \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t, s, f(a) + \int_a^s v(\tau) d\tau, v(s)) ds.$$

## 1.5.2 Classification des équations intégro-différentielles

### 1.5.2.1 les types d'équations intégro-différentielles

pour les équations intégro-différentielles non linéaires, elle s'écrivent sous la forme standard

$$u(t) = f(t) + \int_{m(t)}^{n(t)} G(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

où  $u$  est la fonction inconnue,  $G$  et  $f$  sont des fonctions données.

Il existe trois types d'équations intégro-différentielles non linéaires à savoir,

#### 1. Equations intégro-différentielles de Volterra

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra non linéaire, une équation de la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^t G(t, s, u(s), u'(s)) ds,$$

où la limite supérieure de l'intégration est variable,  $u(t)$  est la fonction inconnue et  $u'(t)$  la dérivée de la fonction inconnue .

#### 2. Equations intégro-différentielles de Fredholm

On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm non linéaire, une équation de la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^b G(t, s, u(s), u'(s)) ds,$$

où les limites de l'intégration sont fixées.

#### 3. Equations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm



Les équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm non linéaires, ce sont les équations intégrales écrites sous la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^t G(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b G(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

## 1.6 Equations intégro-différentielles faiblement singulière

Pour obtenir la version faiblement singulière d'équations intégro-différentielles, on doit respecter deux exigences

- l'absolument intégrabilité
- le noyau qui contient la quantité  $|t - s|$  tend vers l'infini lorsque  $s \rightarrow t$

Donc, Pour garantir l'absolument intégrabilité d'équations intégro-différentielles, dont la dérivée de l'inconnu intervient d'une façon non linéaire à l'intérieur du signe intégrale, écrit sous forme

$$u(t) = f(t) + \int_{m(t)}^{n(t)} p(t-s)G(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.6.7)$$

où  $u$  est la fonction inconnue,  $G$  et  $f$  et  $p$  sont des fonctions données,

il faut que  $p \in W^{1,1}$ . Pour plus d'informations voir [14].

De plus pour obtenir un type faiblement singulière, la singularité doit provenir de la dérivée de  $p$ .

À partir de la définition ci-dessus, on a les trois types d'équations intégro-différentielles faiblement singulières suivants :

### 1. Equations intégro-différentielles de Volterra faiblement singulière

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra faiblement singulière non linéaire, une équation de la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)G(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.6.8)$$

avec

$$(H1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p(s) \in W^{1,1}(0, b-a), \\ (2) \quad \lim_{s \rightarrow t} p'(t-s) = +\infty. \end{array} \right.$$

### 2. Equations intégro-différentielles de Fredholm faiblement singulière

On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm faiblement singulière non linéaire, une équation de la forme

$$u(t) = f(t) + \int_a^b p(|t-s|)G(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.6.9)$$

où  $p(s)$  Vérifie

$$(H1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p(s) \in W^{1,1}(0, b-a), \\ (2) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} p'(s) = +\infty. \end{array} \right.$$

### 3. Equations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm faiblement singulière

On appelle équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm faiblement singulière non linéaire, une équation de la forme

$$\begin{aligned}
 u(t) &= f(t) + \int_a^t p_1(t-s)K_1(t,s,u(s),u'(s)) ds \\
 &+ \int_a^b p_2(|t-s|)K_2(t,s,u(s),u'(s)) ds, \quad t \in [a,b],
 \end{aligned}
 \tag{1.6.10}$$

avec  $p(s)$  qui satisfait

$$(H1) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 (1) & p_m \in W^{1,1}(0, b-a), \quad m = 1, 2, \\
 (2) & p_1(0) = 0, \\
 (3) & \lim_{s \rightarrow t} p_1'(t-s) = +\infty, \\
 (4) & \lim_{s \rightarrow 0^+} p_2'(s) = +\infty.
 \end{array} \right.$$

## 1.7 Méthode d'intégration produit

Lorsque la fonction du noyau n'est pas assez régulière (n'est pas bornée), on ne peut pas utiliser les méthodes d'intégration numériques habituelles, telles que les méthodes de Simpson ou du trapèze.

Cependant, il existe un moyen de gérer cette situation, à savoir utiliser la méthode d'intégration produit (voir [21]).

La méthode d'intégration produit est une méthode standard, qui permet d'évaluer numériquement l'intégral suivant

$$I = \int_a^b \phi(t) dt$$

où  $\phi(t)$  est une fonction qui n'est pas continue. Elle consiste à écrire l'intégrale sous la forme

$$I = \int_a^b p(t)\vartheta(t) dt,$$

où  $\vartheta(t)$  est en général assez régulière, et  $p(t)$  est une fonction présentant des singularités.

Ensuite, comme le noyau  $\vartheta(t)$  est une fonction suffisamment régulière (c.-à-d. qu'elle est plusieurs fois continument différentiable), on l'approche par une fonction  $\widehat{\vartheta}(t)$  et on calcule l'intégral

$$I = \int_a^b p(t)\widehat{\vartheta}(t)dt,$$

Généralement, la plupart des mathématiciens utilisent la fonction linéaire par morceaux pour approcher  $\vartheta(t)$ , au lieu de faire l'interpolation de Lagrange, parce que pour cette dernière, il est difficile de trouver sa convergence.

## 1.8 Interpolation polynomiale par morceaux

Soit  $[a, b]$  un intervalle fini, et soit  $f \in C[a, b]$ , nous introduisons la partition de l'intervalle  $[a, b]$ , noté  $\Delta$  de la manière suivante :

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.\}$$

On note  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et  $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ .

L'interpolant linéaire par morceaux  $P_\Delta f$  de  $f$  est défini par les deux critères suivants :

-Pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $P_\Delta f|_{[x_{i-1}, x_i]}$  est linéaire.

-Pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $P_\Delta f(x_i) = f(x_i)$ .

Il est facile de voir que  $P_\Delta f$  existe et unique, de plus on a

$$P_\Delta f(x) = \frac{x_i - x}{h_i} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} f(x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

pour  $1 \leq i \leq n$ .

## 1.9 Interpolation de Lagrange

Soit  $[a, b]$  un intervalle fini, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles égaux de largeur  $h$ , en utilisant

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, t_i = a + ih.$$

Dans chaque sous-intervalle, nous introduisons une subdivision supplémentaire, avec des points

$$a = t_i \leq t_{i0} \leq t_{i1} < \cdots < t_{im} \leq t_{i+1}.$$

Nous définissons les polynômes fondamentaux de Lagrange comme suit,

$$l_{ij} = \frac{(t - t_{i0}) \cdots (t - t_{ij-1})(t - t_{ij+1}) \cdots (t - t_{im})}{(t_{ij} - t_{i0}) \cdots (t_{ij} - t_{ij-1})(t_{ij} - t_{ij+1}) \cdots (t_{ij} - t_{im})}.$$

Il est clair que  $l_{ij}$  est un polynôme de degré  $m$  (Le dénominateur est une constante).

Pour évaluer une fonction  $f(t)$  sur les points  $t_{i0}, t_{i1}, \dots, t_{im}$  avec l'interpolation de Lagrange, on doit la représenter explicitement par une fonction approchée  $\hat{f}(t)$  comme suit

$$\hat{f}(t) = \sum_{j=0}^m l_{ij}(t) f(t_{ij}).$$

On remarque que dans le cas  $m = 1$  qui correspond à l'interpolation affine par morceaux.

**Étude analytique et numérique des équations  
intégro-différentielles faiblement singulières non linéaires  
de Fredholm**

---

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Existence et unicité de la solution . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthodes numériques . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Les tests numériques . . . . .</b>	<b>29</b>

---

Considérons le type d'équations de Fredholm non linéaire suivant, lorsque la dérivée de l'inconnu se trouve sous l'intégrale,

$$u(t) = f(t) + \int_a^b p(|t - s|)G(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (2.0.1)$$

où, l'inconnu  $u \in C^1([a, b])$  et  $f$  est une fonction donnée dans le même espace. De plus, nous devons associés à l'équation (2.0.1), une autre équation qui contient plus d'informations sur la solution  $u$ . Ainsi, en dérivant les deux cotés de l'équation (2.0.1), on obtient

l'équation suivante :

$$u'(t) = f'(t) + \int_a^b \text{sign}(t-s) p'(|t-s|) G(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b p(|t-s|) \frac{\partial G}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (2.0.2)$$

où le  $\text{sign}(t-s)$  représente la fonction signe, définie comme suit,

$$\text{sign}(t-s) = \begin{cases} 1 & t > s, \\ -1 & t < s, \\ 0 & t = s. \end{cases}$$

la singularité provient de la dérivée de  $p(s)$  sous la forme suivante

$$(H1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p(s) \in W^{1,1}(0, b-a), \\ (2) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} p'(s) = +\infty, \end{array} \right.$$

où

$$W^{1,1}(0, b-a) = \{p \in L^1(0, b-a), p' \in L^1(0, b-a)\}$$

est un espace de Banach munit de la norme suivante,

$$\|p\|_{W^{1,1}(0, b-a)} = \|p\|_{L^1(0, b-a)} + \|p'\|_{L^1(0, b-a)}. \quad (2.0.3)$$

Dans la suite nous démontrons un résultat d'existence et unicité de l'équation (2.0.1).

## 2.1 Existence et unicité de la solution

Nous supposons que  $G$  satisfait les hypothèses suivantes :

$$(H2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f \in C^1([a, b], \mathbb{R}), \quad \frac{\partial G}{\partial t} \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2) \\ \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} > 0, \forall t, s \in [a, b], \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \text{ on a} \\ (3) \quad |G(t, s, x, y) - G(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - y| + B|\bar{x} - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial G}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - y| + \bar{B}|\bar{x} - \bar{y}|. \end{array} \right.$$

En outre, pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de (2.0.1), nous définissons la fonctionnelle  $T_f$  par,

$$T_f(\xi)(t) = f(t) + \int_a^b p(|t-s|)G(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds,$$

où  $\xi \in C^1([a, b])$

avec la norme

$$\|\xi\|_{C^1([a,b])} = \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty$$

tel que  $\|\xi\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \{|\xi(t)|\}$ .

En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} T_f'(\xi)(t) = f'(t) &+ \int_a^b \text{sign}(t-s) p'(|t-s|) G(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \\ &+ \int_a^b p(|t-s|) \frac{\partial G}{\partial t}(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds. \end{aligned}$$

Pour tout  $f \in C^1([a, b])$ , la fonctionnelle  $T_f$  est continue de  $C^1([a, b])$  dans lui-même, parce que c'est la somme de deux opérateurs de Volterra bien définis (voir [14]).

**Théorème 2.1.1.** *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) soient satisfaites, et supposons qu'il existe  $\lambda > 0$  telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on a*

$$\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t-s|)| ds \leq \lambda < \frac{1}{3}, \quad (*)$$

$$\max\{A, B\} \int_a^b |p'(|t-s|)| ds \leq \lambda < \frac{1}{3}, \quad (**)$$

alors (2.0.1) a une solution unique dans  $C^1([a, b])$ .



*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Banach sur la fonctionnelle  $T_f$  dans l'espace  $C^1([a, b])$ , muni de la norme définie ci-dessus. En effet nous avons

$$\begin{aligned} |T_f(u_1(t)) - T_f(u_2(t))| &= \left| \int_a^b p(|t-s|)G(t, s, u_1(s), u_1'(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b p(|t-s|)G(t, s, u_2(s), u_2'(s)) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |p(|t-s|)| |G(t, s, u_1(s), u_1'(s)) - G(t, s, u_2(s), u_2'(s))| ds \end{aligned}$$

en se référant à l'hypothèse (2) de  $H2$ , on obtient

$$\begin{aligned} |T_f(u_1(t)) - T_f(u_2(t))| &\leq A \int_a^b |p(|t-s|)| |u_1(s) - u_2(s)| ds \\ &\quad + B \int_a^b |p(|t-s|)| |u_1'(s) - u_2'(s)| ds \\ &\leq A \int_a^b |p(|t-s|)| ds \|u_1 - u_2\|_\infty \\ &\quad + B \int_a^b |p(|t-s|)| ds \|u_1' - u_2'\|_\infty \\ &\leq \left( \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t-s|)| ds \right) \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}, \end{aligned}$$

alors d'après (\*) (\*\*\*) on conclut que,

$$\|T_f(u_1) - T_f(u_2)\|_\infty \leq \lambda \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}. \quad (2.1.4)$$

De la même manière on évalue

$$\begin{aligned}
|T'_f(u_1(t)) - T'_f(u_2(t))| &\leq \int_a^b |p'(|t-s|)| |G(t,s,u_1(s),u'_1(t)) - G(t,s,u_2(s),u'_2(t))| ds \\
&+ \int_a^b |p(|t-s|)| \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s,u_1(s),u'_1(t)) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,s,u_2(s),u'_2(t)) \right| ds.
\end{aligned}$$

Mais d'après l'hypothèse (2) de  $H2$ , on

$$\begin{aligned}
|T'_f(u_1(t)) - T'_f(u_2(t))| &\leq A \int_a^b |p'(|t-s|)| |u_1(s) - u_2(s)| ds + B \int_a^b |p'(|t-s|)| |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \\
&\leq A \int_a^b |p'(|t-s|)| \|u_1(s) - u_2(s)\|_\infty ds \\
&+ B \int_a^b |p'(|t-s|)| \|u'_1(s) - u'_2(s)\|_\infty ds \\
&+ \bar{A} \int_a^b |p(|t-s|)| \|u_1(s) - u_2(s)\|_\infty ds \\
&+ \bar{B} \int_a^b |p(|t-s|)| \|u'_1(s) - u'_2(s)\|_\infty ds \\
&\leq \left( \max\{A, B\} \int_a^b |p'(|t-s|)| ds \right) \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])} \\
&+ \left( \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t-s|)| ds \right) \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])},
\end{aligned}$$

ce qui donne selon (\*) et (\*\*)

$$\|T'_f(u_1) - T'_f(u_2)\|_\infty \leq 2\lambda \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}. \quad (2.1.5)$$

Par conséquent, de (2.1.4) et (2.1.5), nous déduisons que

$$\|T_f(u_1) - T_f(u_2)\|_{C^1([a,b])} \leq 3\lambda \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}.$$

Finalement, comme  $\lambda < \frac{1}{3}$ ,  $T_f$  est une contraction, donc il existe un seul point fixe pour la fonctionnelle  $T_f$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 2.1.1.** Dans [35], nous pouvons constater que l'auteur a étudié, en utilisant une idée similaire, l'existence et l'unicité de la solution de la version de Fredholm de l'équation intégral-différentielle à ordre des dérivés élevé, définie comme suit,

$$x(t) = f(t) + \int_a^b G(t, s, x(s), x'(s), \dots, x^{n-1}(s)) ds, \quad a \leq t \leq b.$$

## 2.2 Méthodes numériques

En général, il existe diverses méthodes numériques pour obtenir une solution approximative des équations. Dans notre travail, nous nous intéressons à la méthode décrite dans [4] par Borzabadi et Fard pour étudier l'équation intégrale de Fredholm non linéaire suivante :

$$x(t) = f(t) + \int_a^b G(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b,$$

ou  $G \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$ .

Cette méthode consiste à estimer l'intégrale selon le procédé de Newton-Cotes, puis négliger l'erreur de troncature, afin d'obtenir une forme discrétisée de l'équation, par la suite, les auteurs utilisent les conditions suivantes :

- $G(t, s, x(s)) \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$ ,
- $G_x(t, s, x(s))$  existe sur  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ ,
- $\gamma < \frac{1}{b-a}$ , avec  $\gamma = \sup_{s,t \in [a,b]} \{|G_x(t, s, x(s))|\}$ ,

pour prouver la convergence de la méthode.

Tout au long de cette section, nous appliquons une idée similaire à celle mentionnée ci-dessus, pour approcher les équations (2.0.1) et (2.0.2).

Tout d'abord, soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , considérons la subdivision équidistante  $\Delta_N$  définie par,

$$\Delta_N = \left\{ t_i = a + ih, h = \frac{b-a}{N}, i = 0, \dots, N \right\}.$$

Par conséquent, en prenant la subdivision équidistante  $\Delta_N$ , et si on note par

$$u(t_i) = u_i, u'(t_i) = u'_i, f(t_i) = f_i \text{ et } f'(t_i) = f'_i \text{ pour tout } i = 0, \dots, N$$

, alors, les équations (2.0.1) et (2.0.2) sont données comme suit :

$$u_i = f_i + \int_a^b p(|t_i - s|) G(t_i, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (2.2.6)$$

$$u'_i = f'_i + \int_a^b \text{sign}(t_i - s) p'(|t_i - s|) G(t_i, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b p(|t_i - s|) \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (2.2.7)$$

Dans notre cas, comme  $p \in W^{1,1}(0, b-a)$ , alors pour estimer les termes intégraux de (2.2.6) et (2.2.7), nous allons utiliser la méthode d'intégration des produits (voir [3], [42]).

Cette méthode consiste à interpoler les termes réguliers  $G$  et  $\frac{\partial G}{\partial t}$  sur  $\Delta_N$ , par l'utilisation des fonctions linéaires par morceaux dans chaque sous-intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 0, \dots, N$ , comme suit,

$$\begin{aligned} P_{n,1}[G](t_i, s, u(s), u'(s)) &= \left( \frac{s - t_j}{h} \right) G(t_i, t_{j+1}, u_{j+1}, u'_{j+1}) \\ &+ \left( \frac{t_{j+1} - s}{h} \right) G(t_i, t_j, u_j, u'_j), \quad s \in [t_j, t_{j+1}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{n,1} \left[ \frac{\partial G}{\partial t} \right] (t_i, s, u(s), u'(s)) &= \left( \frac{s - t_j}{h} \right) \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_{j+1}, u_{j+1}, u'_{j+1}) \\ &+ \left( \frac{t_{j+1} - s}{h} \right) \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j), \quad s \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned}$$

Dans la suite, pour tous  $i = 0, 1, \dots, N$ , les équations (2.2.6) et (2.2.7) peuvent être écrites de manière suivante :

$$u_i = f_i + \sum_{j=0}^N \alpha_j G(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \varepsilon_1, \quad (2.2.8)$$

$$u'_i = f'_i + \sum_{j=0}^N \beta_j G(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \alpha_j \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \varepsilon_2, \quad (2.2.9)$$

où,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  sont les termes d'erreur de la règle d'intégration des produits,  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont donnés par,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) p(|t_i - s|) ds, \\ \alpha_j &= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) p(|t_i - s|) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) p(|t_i - s|) ds \right), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \alpha_N &= \frac{1}{h} \int_{t_{N-1}}^b (s - t_{N-1}) p(|t_i - s|) ds, \\ \beta_0 &= \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) \text{sign}(t_i - s) p'(|t_i - s|) ds, \\ \beta_j &= \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \text{sign}(t_i - s) p'(|t_i - s|) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) \text{sign}(t_i - s) p'(|t_i - s|) ds \right), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \beta_N &= \frac{1}{h} \int_{t_{N-1}}^b (s - t_{N-1}) \text{sign}(t_i - s) p'(|t_i - s|) ds. \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.1.**  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , considérés dans les équations (2.2.6) et (2.2.7), satisfont respectivement,

$|\varepsilon_1| \leq \mu_1(h)$  et  $|\varepsilon_2| \leq \mu_2(h)$  pour certains  $\mu_1(h), \mu_2(h) > 0$  avec  $\mu_1(h) \rightarrow 0$  et  $\mu_2(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_1| &\leq \int_a^b |p(|t_i - s|)| \max_{|s-t|<h} |(G(t, s, u(s), u'(s)) - P_{n_1}[G](t, \tau, u(\tau), u'(\tau)))| \\
&\leq \int_a^b |p(|t_i - s|)| ds (|G(t_i, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - G(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta))| \\
&\quad + |G(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - G(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \\
&\leq \int_a^b |p(|t - s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |G(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - G(t, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
&\quad + \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t - s|)| ds \max_{|\tau-\theta|<h} |u(\tau) - u(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |u'(\tau) - u'(\theta)|,
\end{aligned}$$

en utilisant les équations (1) et (2) et les notations suivantes :

$$H(t) = \int_a^b p(|t - s|) G(t, s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$w_0(h, \varphi) = \max_{|s-t|<h} |\varphi(t) - \varphi(\theta)|,$$

$$w_1(h, \varphi) = w_0(h, \varphi) + w_0(h, \varphi'),$$

(  $w_0(h, \varphi)$  est appelée le module de continuité de  $\varphi$  ) nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_1| &\leq \int_a^b |p(|t - s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |G(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - G(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
&\quad + \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t - s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |f(\tau) - f(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |f'(\tau) - f'(\theta)| \right) \\
&\quad + \max_{|\tau-\theta|<h} |H(\tau) - H(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H'(\tau) - h'(\theta)|, \\
|\varepsilon_1| &\leq \lambda \left( w_1(h, f) + w_1(h, H) + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, G(t, \cdot, x, y))}{\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}} \right).
\end{aligned}$$

selon les même étapes précédentes, on trouve

$$|\varepsilon_2| \leq \lambda \left( 2w_1(h, f) + 2w_1(h, H) + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} (w_0(h, G(t, \cdot, x, y)))}{\max\{A, B\}} \right. \\ \left. + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, \frac{\partial K}{\partial t}(t, \cdot, x, y))}{\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}} \right).$$

Comme  $f \in C^1([a, b])$  et en se référant à la condition (1) de (H2), nous obtenons le résultat.  $\square$

Nous considérons maintenant les équations approchées non linéaires suivantes en négligeant les termes d'erreur  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  dans (2.2.8) et (2.2.9) respectivement,

$$v_i = f_i + \sum_{j=0}^N \alpha_j G(t_i, t_j, v_j, w_j), \quad (2.2.10)$$

$$w_i = f'_i + \sum_{j=0}^N \beta_j G(t_i, t_j, v_j, w_j) + \alpha_j \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j), \quad (2.2.11)$$

où  $(v, w) = (v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N)$  sont les solutions de (2.2.10) et (2.2.11) respectivement.

le théorème suivant permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution de (2.2.10)-(2.2.11).

**Théorème 2.2.1.** *Le système ((2.2.10)-(2.2.11)) possède une solution unique, pour  $\lambda < \frac{1}{3}$ .*

*Démonstration.* Si on définit  $V = (v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N)$  le vecteur inconnu dans  $\mathbb{R}^{2N+2}$ , on peut écrire le système ((2.2.10)-(2.2.11)) sous forme d'une équation vectorielle  $V = \Psi(V)$ , en utilisant la norme suivante

$$\|V\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} = \max_{0 \leq i \leq N} \{|v_i|\} + \max_{0 \leq i \leq N} \{|w_i|\}.$$

Il est clair que, pour  $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \max_{i, \dots, n} \{|\Psi_i(V) - \Psi_i(\bar{V})|\} &= |\Psi_l(V) - \Psi_l(\bar{V})|, \\ &\leq \sum_{j=0}^N |\alpha_j| (A|v_j - \bar{v}_j| + B|w_j - \bar{w}_j|), \\ &\leq \max\{A, B\} \int_a^b |p(|t_i - s|)| ds (\|V - \bar{V}\|_+). \end{aligned}$$

Pour  $i = n + 1, \dots, 2n + 1$

$$\begin{aligned} \max_{i=n+1, \dots, 2n+1} \{|\Psi_i(V) - \Psi_i(\bar{V})|\} &= |\Psi_r(V) - \Psi_r(\bar{V})|, \\ &\leq \sum_{j=0}^N |\alpha_j| (\bar{A}|v_j - \bar{v}_j| + \bar{B}|w_j - \bar{w}_j|) \\ &\quad + \sum_{j=0}^N |\beta_j| (A|v_j - \bar{v}_j| + B|w_j - \bar{w}_j|), \\ &\leq (\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}) \int_a^b |p(|t_i - s|)| \\ &\quad + \max\{A, B\} \int_a^b |p'(|t_i - s|)| ds (\|V - \bar{V}\|_+). \end{aligned}$$

enfin, nous obtenons

$$\|\Psi(V) - \Psi(\bar{V})\|_{\mathbb{R}^{2n+2}} \leq 3\lambda \|V - \bar{V}\|_{\mathbb{R}^{2n+2}},$$

En utilisant le théorème du point fixe de Banach, nous obtenons le résultat.  $\square$

### 2.2.1 L'analyse de la convergence

Dans la proposition suivante, nous cherchons la condition pour que  $\|u - v\|_\infty + \|u' - w\|_\infty$  tend vers 0.



**Proposition 2.2.2.** *D'après les hypothèses (H1), (H2) et pour  $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ , nous avons,*

$$\|u - v\|_\infty + \|u' - w\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{1 - 3\lambda},$$

avec  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, il est facile d'observer qu'il existe  $q, r \in \{0, \dots, N\}$  telle que

$$\|u - v\|_\infty + \|u' - w\|_\infty = |u_q - v_q| + |u'_r - w_r|,$$

ainsi, nous avons,

$$\begin{aligned} |u_q - v_q| + |u'_r - w_r| &\leq \sum_{j=0}^N |\alpha_j| |G(t_q, t_j, u_j, u'_j) - G(t_q, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\beta_j| |G(t_r, t_j, u_j, u'_j) - G(t_r, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\alpha_j| \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t_r, t_j, u_j, u'_j) - \frac{\partial G}{\partial t}(t_r, t_j, v_j, w_j) \right| \\ &\quad + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

en se référant à l'hypothèse 2 de H2, on trouve

$$\begin{aligned} |u_q - v_q| + |u'_r - w_r| &\leq \sum_{j=0}^N (|\alpha_j| + |\beta_j|) (A|u_j - v_j| + B|u'_j - w_j|) \\ &\quad + |\alpha_j| (\bar{A}|u_j - v_j| + \bar{B}|u'_j - w_j|) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ &\leq \left\{ \max\{A, B\} \left( \int_a^b |p(|t_q - s|)| ds + \int_a^b |p'(|t_q - s|)| ds \right) \right. \\ &\quad \left. + \max\{\bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p(|t_r - s|)| ds \right\} (|u_q - v_q| + |u'_r - w_r|) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ &\leq 3\lambda (|u_q - v_q| + |u'_r - w_r|) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\|u - v\|_\infty + \|u' - w\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{1 - 3\lambda}.$$

donc, lorsque  $h \rightarrow 0$ , on a  $(v, w)$  tend vers  $(u, u')$ .  $\square$

La solution du système d'équations non linéaires (2.2.8) et (2.2.9) peut être obtenue par un processus itératif, ce qui conduit au système suivant, pour tous  $i = 0 \dots N$ ,

$$v_i^{k+1} = f_i + \sum_{j=0}^N \alpha_j G(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k), \quad (2.2.12)$$

$$w_i^{k+1} = f'_i + \sum_{j=0}^N \beta_j G(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) + \alpha_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k). \quad (2.2.13)$$

Dans la suite, nous allons prouver le théorème suivant concernant la Convergence de la solution itérative  $(v^{k+1}, w^{k+1})$  de (2.2.12) et (2.2.13) vers  $(v, w)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

**Théorème 2.2.2.** *D'après les hypothèses (H1), (H2) et pour tout vecteur initial arbitraire  $(v^0, w^0)$ , nous obtenons,*

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq (3\lambda)^k (\|v^0 - v\|_\infty + \|w^0 - w\|_\infty).$$

*Démonstration.* En utilisant (2.2.10), (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13), on a pour tout  $i = 0, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} v_i^{k+1} - v_i &= \sum_{j=0}^N \alpha_j (G(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - G(t_i, t_j, v_j, w_j)), \\ w_i^{k+1} - w_i &= \sum_{j=0}^N \beta_j (G(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - G(t_i, t_j, v_j, w_j)) \\ &\quad + \alpha_j \left( \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - \frac{\partial G}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j) \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |v_i^{k+1} - v_i| &\leq \sum_{j=0}^N |\alpha_j| |G(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - G(t_i, t_j, v_j, w_j)|, \\ &\leq \sum_{j=0}^N |\alpha_j| (A|v_j^k - v_j| + B|w_j^k - w_j|), \\ &\leq \max\{A, B\} \int_a^b |p(t_i - s)| ds (\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty), \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty \leq \lambda(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

de la même façon, on trouve

$$\|w^{k+1} - w\|_\infty \leq 2\lambda(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

Enfin, nous obtenons

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq 3\lambda(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

En répétant la dernière inégalité k-fois, on obtient

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq (3\lambda)^k(\|v^0 - v\|_\infty + \|w^0 - w\|_\infty).$$

Comme  $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ , on conclue que  $\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \rightarrow 0$   $k \rightarrow \infty$  □

## 2.3 Les tests numériques

Dans cette section, nous appliquons notre méthode à quelques exemples d'équations intégral-différentielles faiblement singulières non linéaires de Fredholm, puis nous analysons les résultats numériques.

**Exemple 1** Considérons l'équation integro-différentielle de Fredholm suivante :

$$u(t) = \frac{1}{20} \int_0^1 \sqrt{|t-s|} \sin \left( e^s + \arcsin \left( \frac{s+t}{3} \right) + u(s) - u'(s) \right) ds + f(t), \quad t \in [0, 1],$$

où,

$$f(t) = te^t - \frac{(7t+3)(1-t)^{3/2} + 7t^{5/2}}{450},$$

alors la solution exacte  $u$  de cette équation est donné par :

$$u(t) = te^t.$$

Nous pouvons voir que le noyau  $G(s, t, x, y) = \sin\left(e^s + \arcsin\left(\frac{s+t}{3}\right) + x - y\right)$  satisfait à l'hypothèse  $(H_2)$  avec

$$A = B = \frac{1}{20}, \bar{A} = \bar{B} = \frac{1}{20\sqrt{5}},$$

et la fonction  $p = \sqrt{|t - s|}$  satisfait à  $H_1$ .

Maintenant, nous essayons d'établir notre méthode numérique pour trouver la solution  $v^{k+1}$  et  $w^{k+1}$  selon les schémas (2.0.1) et (2.0.2) respectivement, avec le vecteur initial  $v^0 = w^0 = 0$ , et en utilisant une condition d'arrêt sur le paramètre  $k$  de type

$$|v^{k+1} - v^k| + |w^{k+1} - w^k| \leq 10^{-7}.$$

$E_N$  la fonction erreur de cette méthode est donnée par

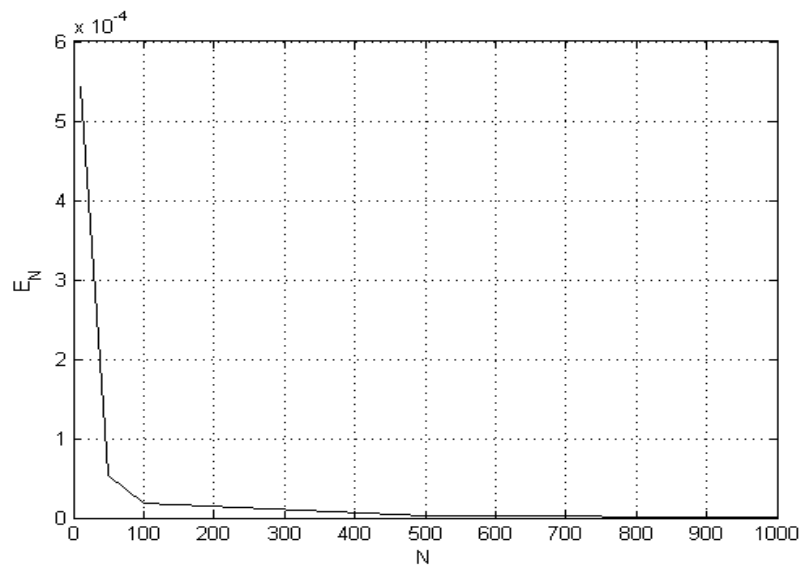
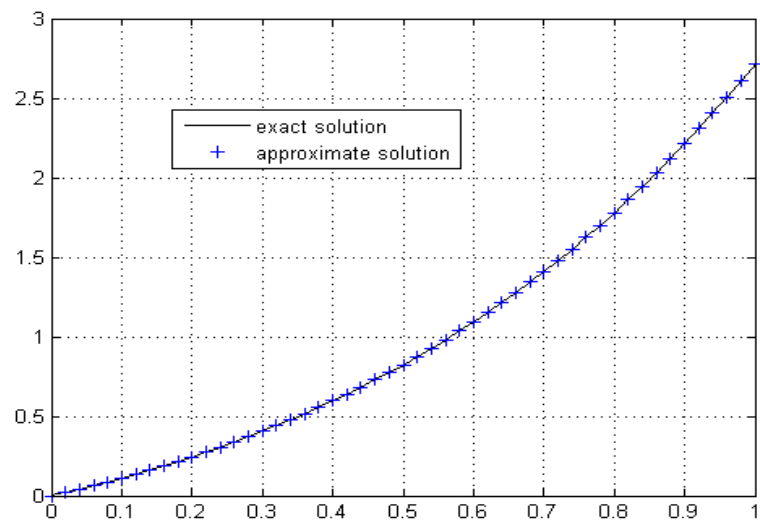
$$E_N = \max_{0 \leq i \leq N} \{|u(t_i) - v_i^{k+1}| + |u'(t_i) - w_i^{k+1}|\}.$$

TABLE 2.1 – Numerical Results.

$N$	$E_N$
10	5.43E-4
50	5.29E-5
100	1.91E-5
500	1.76E-6
1000	6.25E-7

**Exemple2** Considérons l'équation intégral-différentielle non linéaire de Fredholm, qui est défini comme suit,

$$u(t) = \frac{1}{10} \int_0^1 \sqrt{|t-s|} \frac{ts^2(1+e^{-s}+e^{-1})}{1+e^{-u(s)}+e^{-u'(s)}} ds + f(t), t \in [0, 1].$$

FIGURE 2.1 – La fonction erreur  $E_N$ FIGURE 2.2 – Solution exacte vs solution approchée pour  $N = 50$

Si on prend

$$f(t) = t - \frac{(1-t)^{3/2}(8t^3 + 12t^2 + 15t) + 8t^{9/2}}{525}$$

on trouve la solution exacte

$$u(t) = t.$$

TABLE 2.2 – Résultats numériques de Ex2.

$N$	$E_N$
10	1.60E-3
50	1.94E-4
100	7.19E-5
500	6.91E-6
1000	2.49E-6

Le tableau 2.1 représente la fonction d'erreur pour un nombre d'itérations  $N$  peut atteindre 1000.

Les résultats dans les tableaux 2.1 et 3.2 confirment la convergence de notre processus numérique, c'est-à-dire  $E_N \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . Les figures 2.2 et 2.4 nous montrent la comparaison entre les solutions exactes et numériques pour  $N = 50$

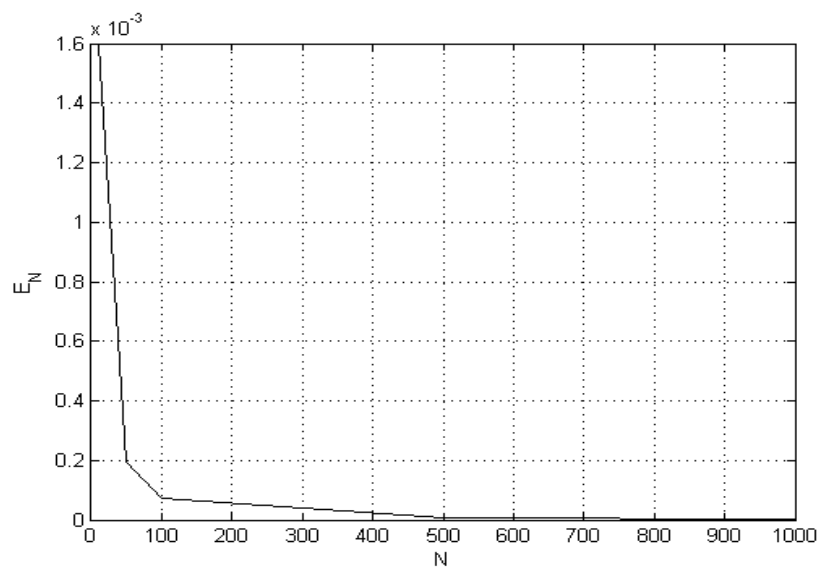


FIGURE 2.3 – La fonction erreur  $E_N$

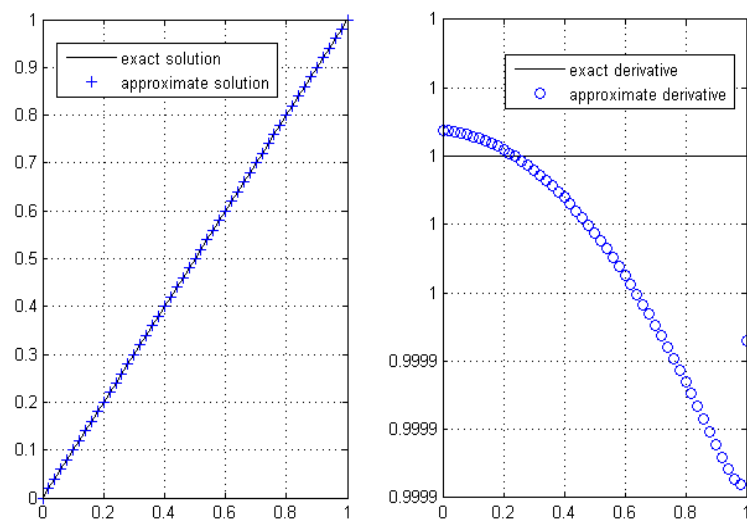


FIGURE 2.4 – Solution exacte vs solution approchée pour  $N = 50$

**Étude analytique et numérique des équations  
intégro-différentielles faiblement singulières non linéaires  
de Volterra-Fredholm**

---

**Sommaire**

---

<b>3.1 Existence et unicité de la solution . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.2 Méthodes numériques . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>3.3 Les tests numériques . . . . .</b>	<b>51</b>

---

Considérons le type d'équations de Volterra-Fredholm non linéaire, où la dérivée de l'inconnu se trouve sous l'intégrale,

$$\begin{aligned} u(t) = f(t) + \int_a^t p_1(t-s)K_1(t, s, u(s), u'(s)) ds \\ + \int_a^b p_2(|t-s|)K_2(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad t \in [a, b], \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

où, l'inconnu  $u \in C^1([a, b])$ ,  $f$  est une fonction donnée dans le même espace et les fonctions  $K_m \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2)$  avec  $m = 1, 2$ .



Notons que la dérivée de l'inconnu  $u'$  apparaît à l'intérieur de l'intégrale, donc nous devons joindre à l'équation (3.0.1), une autre équation contenant plus d'informations sur la solution  $u$ . Ainsi si nous dérivons les deux côtés de l'équation (3.0.1), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 u'(t) = & f'(t) + \int_a^t p_1'(t-s)K_1(t,s,u(s),u'(s)) ds \\
 & + \int_a^t p_1(t-s)\frac{\partial K_1}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s)) ds \\
 & + \int_a^b \gamma p_2'(|t-s|)K_2(t,s,u(s),u'(s)) ds \\
 & + \int_a^b p_2(|t-s|)\frac{\partial K_2}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s)) ds,
 \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

où  $\gamma$  représente le signe du  $(t-s)$  comme suit,

$$\gamma = \text{sign}(t-s) = \begin{cases} 1 & t > s, \\ -1 & t < s, \\ 0 & t = s. \end{cases}$$

Nous constatons, en se référant à [7], que la singularité provient de la dérivée des fonctions  $p_1(s)$  et  $p_2(s)$  sous la forme suivante :

$$(A1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p_m \in W^{1,1}(0, b-a), \quad m = 1, 2, \\ (2) \quad p_1(0) = 0, \\ (3) \quad \lim_{s \rightarrow t} p_1'(t-s) = +\infty, \\ (4) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} p_2'(s) = +\infty, \end{array} \right.$$

où  $W^{1,1}$  est l'espace de Banach définie par

$$W^{1,1}(0, b-a) = \{p \in L^1(0, b-a) : p' \in L^1(0, b-a)\},$$

muni de la norme  $\|p\|_{W^{1,1}(0,b-a)} = \|p\|_{L^1(0,b-a)} + \|p'\|_{L^1(0,b-a)}$ .

Dans la section suivante, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.0.1), et nous développons une méthode itérative pour trouver une solution approximative de cette équation.

### 3.1 Existence et unicité de la solution

Nous supposons que  $K_m, m = 1, 2$ , satisfait les hypothèses suivantes :

$$(A2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f \in C^1([a, b], \mathbb{R}), \quad \frac{\partial K_m}{\partial t} \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \quad m = 1, 2. \\ \\ \exists A, B, \bar{A}, \bar{B}, C, D, \bar{C}, \bar{D} > 0, \forall t, s \in [a, b], \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \text{ tel que :} \\ |K_1(t, s, x, y) - K_1(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - y| + B|\bar{x} - \bar{y}|, \\ (2) \quad |K_2(t, s, x, y) - K_2(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq C|x - y| + D|\bar{x} - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - y| + \bar{B}|\bar{x} - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{C}|x - y| + \bar{D}|\bar{x} - \bar{y}|. \end{array} \right.$$

Ensuite, pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.0.1), nous définissons pour tout  $f \in C^1([a, b])$  la fonctionnelle  $T_f$ ,

$$\begin{aligned} T_f : C^1([a, b]) &\longrightarrow C^1([a, b]) \\ \xi &\longmapsto T_f(\xi)(t) = f(t) + \int_a^t p_1(|t - s|) K_1(t, s, u(s), u'(s)) ds \\ &\quad + \int_a^b p_2(|t - s|) K_2(t, s, u(s), u'(s)) ds, \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

pour tout  $\xi \in C^1([a, b])$ , (muni de la norme  $\|\xi\|_{C^1([a,b])} = \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty$ ).

On remarque que la fonctionnelle  $T_f$  est continu de  $C^1([a, b])$  dans lui-même (bien défini) parce que c'est la somme de trois opérateurs de Volterra bien définis (voir [14]).

**Théorème 3.1.1.** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et s'il existe  $\varrho > 0$  tel que, pour tout  $t \in [a, b]$*

$$\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p_1(t-s)| ds + \max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \leq \varrho < \frac{1}{3}, \quad (*)$$

$$\max\{A, B\} \int_a^b |p_1'(t-s)| ds + \max\{C, D\} \int_a^b |p_2'(|t-s|)| ds \leq \varrho < \frac{1}{3}, \quad (**)$$

*alors la solution  $u$  de l'équation(3.0.1) existe et unique dans  $C^1([a, b])$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème (3.1) nous appliquons le théorème du point fixe de Banach où  $T_f$  défini auparavant.

En effet, pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons,

$$\begin{aligned} |T_f(u_1(t)) - T_f(u_2(t))| &\leq \int_a^t |p_1(t-s)| |K_1(t, s, u_1(s), u_1'(s)) - K_1(t, s, u_2(s), u_2'(s))| ds \\ &+ \int_a^b |p_2(|t-s|)| |K_2(t, s, u_1(s), u_1'(s)) - K_2(t, s, u_2(s), u_2'(s))| ds \end{aligned}$$

en se référant à l'hypothèse (2) de A2, on trouve

$$\begin{aligned} |T_f(u_1(t)) - T_f(u_2(t))| &\leq A \int_a^t |p_1(t-s)| |u_1(s) - u_2(s)| ds + B \int_a^t |p_1(t-s)| |u_1'(s) - u_2'(s)| ds \\ &+ C \int_a^b |p_2(|t-s|)| |u_1(s) - u_2(s)| ds + D \int_a^b |p_2(|t-s|)| |u_1'(s) - u_2'(s)| ds \\ &\leq A \int_a^t |p_1(t-s)| ds \|u_1 - u_2\|_\infty + B \int_a^t |p_1(t-s)| ds \|u_1' - u_2'\|_\infty \\ &+ C \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \|u_1 - u_2\|_\infty + D \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \|u_1' - u_2'\|_\infty \\ &\leq \left( \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p_1(t-s)| ds \right. \\ &\left. + \max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \right) \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|T_f(u_1) - T_f(u_2)\|_\infty \leq \varrho \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}. \quad (3.1.3)$$

De la même manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} |T_f(u_1(t)) - T_f(u_2(t))| &= \left| \int_a^t p_1'(t-s) K_1(t, s, u_1(s), u_1'(t)) ds \right. \\ &\quad - \int_a^t p_1'(t-s) K_1(t, s, u_2(s), u_2'(t)) ds \\ &\quad + \int_a^t p_1(t-s) \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, u_1(s), u_1'(t)) ds \\ &\quad - \int_a^t p_1(t-s) \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, u_2(s), u_2'(t)) ds \\ &\quad + \int_a^t p_2(|t-s|) K_2(t, s, u_1(s), u_1'(t)) ds \\ &\quad - \int_a^t p_2(|t-s|) K_2(t, s, u_2(s), u_2'(t)) ds \\ &\quad + \int_a^t p_2(|t-s|) \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, u_1(s), u_1'(t)) ds \\ &\quad \left. - \int_a^t p_2(|t-s|) \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, u_2(s), u_2'(t)) ds \right| \\ &\leq \int_a^t |p_1'(t-s)| |K_1(t, s, u_1(s), u_1'(t)) - K_1(t, s, u_2(s), u_2'(t))| ds \\ &\quad + \int_a^t |p_1(t-s)| \left| \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, u_1(s), u_1'(t)) - \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, s, u_2(s), u_2'(t)) \right| ds \\ &\quad + \int_a^b |p_2(|t-s|)| |K_2(t, s, u_1(s), u_1'(t)) - K_2(t, s, u_2(s), u_2'(t))| ds \\ &\quad + \int_a^b |p_2(|t-s|)| \left| \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, u_1(s), u_1'(t)) - \frac{\partial K_2}{\partial t}(t, s, u_2(s), u_2'(t)) \right| ds \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (2) de A2, on a

$$\begin{aligned}
 |T'_f(u_1(t)) - T'_f(u_2(t))| &\leq A \int_a^t |p'_1(t-s)| |u_1(s) - u_2(s)| ds + B \int_a^t |p'_1(t-s)| |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \\
 &+ \bar{A} \int_a^t |p_1(t-s)| |u_1(s) - u_2(s)| ds + \bar{B} \int_a^t |p_1(t-s)| |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \\
 &+ C \int_a^b |p'_2(|t-s|)| |u_1(s) - u_2(s)| ds \\
 &+ D \int_a^b |p'_2(|t-s|)| |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \\
 &+ \bar{C} \int_a^b |p_2(|t-s|)| |u_1(s) - u_2(s)| ds \\
 &+ \bar{D} \int_a^b |p_2(|t-s|)| |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \\
 &\leq \left( \max\{A, B\} \int_a^b |p'_1(t-s)| ds \right. \\
 &+ \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^b |p_1(t-s)| ds \\
 &+ \max\{C, D\} \int_a^b |p'_2(|t-s|)| ds \\
 &\left. + \max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \right) \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\|T'_f(u_1) - T'_f(u_2)\|_\infty \leq 2\varrho \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}. \quad (3.1.4)$$

Ainsi, de (3.1.3) et (3.1.4), nous obtenons

$$\|T_f(u_1) - T_f(u_2)\|_{C^1([a,b])} \leq 3\varrho \|u_1 - u_2\|_{C^1([a,b])}.$$

Comme  $\varrho < \frac{1}{3}$ ,  $T_f$  est une contraction, donc il existe  $u$  unique vérifiant  $T_f(u) = u$ , ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

## 3.2 Méthodes numériques

En général, pour résoudre les équations (3.0.1) et (3.0.2), il existe de nombreuses méthodes numériques qui reposent sur la construction d'un système algébrique non linéaire, à partir de l'équation considérée.

Dans nos travaux, nous nous intéressons à la méthode décrite dans [49] par Wang et al (la version Volterra-Fredholm du travail de Borzabadi et Fard [4] initialisé dans le chapitre 2), qui ont étudié l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm définie par,

$$x(t) = f(t) + \lambda_1 \int_a^t K_1(t, s, x(s)) ds + \lambda_2 \int_a^b K_2(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b,$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $K_1, K_2 \in C^1([a, b])$ .

La méthode basée sur la transformation de l'équation en une forme discrétisée, en utilisant l'intégration de Newton-Cotes, alors, sous certaines conditions, les auteurs ont prouvé que la solution de la forme discrétisée converge vers la solution exacte. Enfin, la solution de la forme discrétisée est approchée par une méthode itérative.

Tout au long de cette section, en suivant les idées mentionnées ci-dessus et celle du chapitre précédent, nous donnons une approche itérative pour obtenir la solution approximative de nos équations (3.0.1) et (3.0.2).

Tout d'abord, supposons que  $N \in \mathbb{N}^*$  et considérons la partition équidistance  $\Delta_N$  définie par,

$$\Delta_N = \left\{ t_i = a + ih, h = \frac{b-a}{N}, i = 0 \cdots N \right\}.$$

Pour toute partition  $\Delta_N$ , on note par,

$$u(t_i) = u_i, u'(t_i) = u'_i, f(t_i) = f_i \text{ et } f'(t_i) = f'_i \text{ pour tout } i = 0 \cdots N.$$

Alors d'après les équations (3.0.1) et (3.0.2), nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}
 u_i &= f_i + \int_a^{t_i} p_1(t_i - s) K_1(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \\
 &\quad + \int_a^b p(|t_i - s|) K_2(t_i, s, u(s), u'(s)) ds,
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 u'_i &= f'_i + \int_a^{t_i} p'_1(t_i - s) K_1(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \\
 &\quad + \int_a^{t_i} p_1(t_i - s) \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \\
 &\quad + \int_a^b \gamma_i p'_2(|t_i - s|) K_2(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \\
 &\quad + \int_a^b p_2(|t_i - s|) \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds.
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où  $\gamma_i = \text{sign}(t_i - s)$ .

Dans notre cas, comme les fonctions  $p_1(s), p_2(s)$  satisfont l'hypothèse (A1), alors pour approcher les termes intégraux de (3.2.5) et (3.2.6), nous devons utiliser la méthode d'intégration du produit (voir [3, 42]), où le concept de cette méthode est d'approcher les termes réguliers  $K_m$  et  $\frac{\partial K_m}{\partial t}$  pour  $m = 1, 2$  sur  $\Delta_N$ . En utilisant les fonctions linéaires par morceaux dans chaque sous-intervalle  $[t_j, t_{j+1}], j = 0 \cdots N$ , nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 K_m(t_i, s, u(s), u'(s)) &\simeq \left( \frac{s - t_j}{h} \right) K_m(t_i, t_{j+1}, u_{j+1}, u'_{j+1}) \\
 &\quad + \left( \frac{t_{j+1} - s}{h} \right) K_m(t_i, t_j, u_j, u'_j), \quad s \in [t_j, t_{j+1}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_m}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) &\simeq \left( \frac{s - t_j}{h} \right) \frac{\partial K_m}{\partial t}(t_i, t_{j+1}, u_{j+1}, u'_{j+1}) \\
 &\quad + \left( \frac{t_{j+1} - s}{h} \right) \frac{\partial K_m}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j), \quad s \in [t_j, t_{j+1}].
 \end{aligned}$$

puis, pour tout  $i = 0 \cdots N$ , les équations (3.2.5) et (3.2.6) peuvent être écrites comme

suit,

$$u_i = f_i + \sum_{j=0}^i \alpha_j K_1(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \sum_{j=0}^N \bar{\alpha}_j K_2(t_i, t_j, u_j, u'_j) + O_1(h), \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} u'_i &= f'_i + \sum_{j=0}^i \beta_j K_1(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \alpha_j \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) \\ &+ \sum_{j=0}^N \bar{\beta}_j K_2(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \bar{\alpha}_j \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) + O_2(h), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

où,  $O_1(h)$ ,  $O_2(h)$  sont les termes d'erreur de la méthode d'intégration des produits avec  $\alpha_j, \beta_j, \bar{\alpha}_j$  et  $\bar{\beta}_j$  qui sont donnés par,

$$\alpha_0 = \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) p_1(t_i - s) ds,$$

$$\alpha_j = \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) p_1(t_i - s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) p_1(t_i - s) ds \right), \quad j = 1 \dots i - 1,$$

$$\alpha_i = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1}) p_1(t_i - s) ds,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) \gamma_i p'_1(t_i - s) ds,$$

$$\beta_j = \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \gamma_i p'_1(t_i - s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) \gamma_i p'_1(t_i - s) ds \right), \quad j = 1 \dots i - 1,$$

$$\beta_i = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1}) \gamma_i p'_1(t_i - s) ds.$$



$$\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) p_2(|t_i - s|) ds,$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) p_2(|t_i - s|) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) p_2(|t_i - s|) ds \right), \quad j = 1 \dots N - 1,$$

$$\bar{\alpha}_N = \frac{1}{h} \int_{t_{N-1}}^b (s - t_{N-1}) p_2(|t_i - s|) ds,$$

$$\bar{\beta}_0 = \frac{1}{h} \int_a^{t_1} (t_1 - s) \gamma_i p_2'(|t_i - s|) ds,$$

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{h} \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \gamma_i p_2'(|t_i - s|) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - s) \gamma_i p_2'(|t_i - s|) ds \right), \quad j = 1 \dots N - 1,$$

$$\bar{\beta}_N = \frac{1}{h} \int_{t_{N-1}}^b (s - t_{N-1}) \gamma_i p_2'(|t_i - s|) ds.$$

**Proposition 3.2.1.**  $O_1$  et  $O_2$ , considérés dans les équations (3.2.7) et (3.2.8) satisfont respectivement,  $|O_1| \leq \mu_1(h)$ ,  $|O_2| \leq \mu_2(h)$  pour certains  $\mu_1(h), \mu_2(h) > 0$ , avec  $\mu_1(h) \rightarrow 0$  et  $\mu_2(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 |O_1| &\leq \int_a^{t_i} |p_1(t_i - s)| \max_{|s-t|<h} |(K_1(t, s, u(s), u'(s)) - P_{n_1}[K_1](t, \tau, u(\tau), u'(\tau)))| \\
 &+ \int_a^b |p_2(|t_i - s|)| \max_{|s-t|<h} |(K_2(t, s, u(s), u'(s)) - P_{n_1}[K_2](t, \tau, u(\tau), u'(\tau)))| \\
 &\leq \int_a^{t_i} |p_1(t_i - s)| ds (|K_1(t_i, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - K_1(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta))| \\
 &+ |K_1(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_1(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \\
 &+ \int_a^b |p_2(|t_i - s|)| ds (|K_2(t_i, \tau, u(\tau), u'(\tau)) - K_2(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta))| \\
 &+ |K_2(t_i, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_2(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))|) \\
 &\leq \int_a^t |p_1(t - s)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |K_1(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_1(t, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
 &+ \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^t |p_1(t - s)| ds \max_{|\tau-\theta|<h} |u(\tau) - u(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |u'(\tau) - u'(\theta)| \\
 &+ \int_a^b |p_2(|t - s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |K_2(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_2(t, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
 &+ \max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p_2(|t - s|)| ds \max_{|\tau-\theta|<h} |u(\tau) - u(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |u'(\tau) - u'(\theta)|,
 \end{aligned}$$

en utilisant les équations et les notations suivantes :

$$H(t) = \int_a^t p_1(t - s) K_1(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b p_2(|t - s|) K_2(t, s, u(s), u'(s)) ds,$$

$$w_0(h, \varphi) = \max_{|s-t|<h} |\varphi(t) - \varphi(\theta)|,$$

$$w_1(h, \varphi) = w_0(h, \varphi) + w_0(h, \varphi'),$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}
 |O_1| &\leq \int_a^t |p_1(t-s)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |K_1(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_1(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
 &+ \max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_a^t |p_1(t-s)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |f(\tau) - f(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |f'(\tau) - f'(\theta)| \right) \\
 &+ \max_{|\tau-\theta|<h} |H(\tau) - H(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H'(\tau) - h'(\theta)| \\
 &+ \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |K_2(t, \tau, u(\theta), u'(\theta)) - K_2(t_i, \theta, u(\theta), u'(\theta))| \right) \\
 &+ \max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p_2(|t-s|)| ds \left( \max_{|\tau-\theta|<h} |f(\tau) - f(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |f'(\tau) - f'(\theta)| \right) \\
 &+ \max_{|\tau-\theta|<h} |H(\tau) - H(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H'(\tau) - h'(\theta)|, \\
 |O_1| &\leq \varrho \left( w_1(h, f) + w_1(h, H) + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, K_1(t, \cdot, x, y))}{\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, K_2(t, \cdot, x, y))}{\max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\}} \right).
 \end{aligned}$$

avec de étapes similaires,

$$\begin{aligned}
 |O_2| &\leq \varrho \left( 2w_1(h, f) + 2w_1(h, H) + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} (w_0(h, K_1(t, \cdot, x, y)))}{\max\{A, B\}} \right. \\
 &+ \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} (w_0(h, K_2(t, \cdot, x, y)))}{\max\{C, D\}} + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, \frac{K_1}{t}(t, \cdot, x, y))}{\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}} \\
 &\quad \left. + \frac{\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_0(h, \frac{K_2}{t}(t, \cdot, x, y))}{\max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\}} \right).
 \end{aligned}$$

Comme  $f \in C^1([a, b])$  et d'après la condition (1) of (A2) nous obtenons le résultat.  $\square$   $\square$

Si nous négligeons les termes d'erreur  $O_1(h)$  et  $O_2(h)$  dans (3.2.7) et (3.2.8), nous

obtenons les équations approchées non linéaires suivantes :

$$v_i = f_i + \sum_{j=0}^i \alpha_j K_1(t_i, t_j, v_j, w_j) + \sum_{j=0}^N \bar{\alpha}_j K_2(t_i, t_j, v_j, w_j), \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} w_i = f'_i + \sum_{j=0}^i \beta_j K_1(t_i, t_j, v_j, w_j) + \alpha_j \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j) \\ + \sum_{j=0}^N \bar{\beta}_j K_2(t_i, t_j, v_j, w_j) + \bar{\alpha}_j \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

où, le couple  $(v, w) = (v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N)$  est la solution de (3.2.9) et (3.2.10) respectivement.

Le théorème suivant permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.2.9) et (3.2.10).

**Théorème 3.2.1.** *Sous les hypothèses (A2), le système (3.2.9-3.2.10) possède une solution unique, pour  $0 < \varrho < \frac{1}{3}$ .*

*Démonstration.* nous notons  $V = (v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N)$  le vecteur inconnu dans  $\mathbb{R}^{2N+2}$ , alors, on peut écrire le système (3.2.9-3.2.10) sous forme d'une équation vectorielle  $V = \Phi(V)$ .

Avec la norme suivante :

$$\|V\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} = \max_{0 \leq i \leq N} \{|v_i|\} + \max_{0 \leq i \leq N} \{|w_i|\}.$$

, il est clair que,

pour  $i = 0, \dots, n$

$$\max_{i, \dots, n} \{|\Phi_i(V) - \Phi_i(\bar{V})|\} = |\Phi_l(V) - \Phi_l(\bar{V})|$$

d'après les hypothèses 2 de A2, on a

$$\begin{aligned}
 |\Phi_l(V) - \Phi_l(\bar{V})| &\leq \sum_{j=0}^i |\alpha_j| (A|v_j - \bar{v}_j| + B|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &+ \sum_{j=0}^N |\bar{\alpha}_j| (C|v_j - \bar{v}_j| + D|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &\leq \max\{A, B\} \int_a^{t_i} |p_1(t_i - s)| ds (\|V - \bar{V}\|_+ \\
 &+ \max\{C, D\} \int_a^b |p_2(|t_i - s|)| ds (\|V - \bar{V}\|_+.
 \end{aligned}$$

Pour  $i = n + 1, \dots, 2n + 1$

$$\begin{aligned}
 \max_{i=n+1, \dots, 2n+1} \{|\Phi_i(V) - \Phi_i(\bar{V})|\} &= |\Phi_r(V) - \Phi_r(\bar{V})|, \\
 &\leq \sum_{j=0}^i |\alpha_j| (A|v_j - \bar{v}_j| + B|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &+ \sum_{j=0}^i |\beta_j| (A|v_j - \bar{v}_j| + B|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &+ \sum_{j=0}^N |\bar{\alpha}_j| (C|v_j - \bar{v}_j| + D|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &+ \sum_{j=0}^N |\bar{\beta}_j| (C|v_j - \bar{v}_j| + D|w_j - \bar{w}_j|) \\
 &\leq (\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\}) \int_a^{t_i} |p_1(t_i - s)| \\
 &+ \max\{A, B\} \int_a^b |p'_1(t_i - s)| ds (\|V - \bar{V}\|_+ \\
 &+ (\max\{C, D, \bar{C}, \bar{D}\}) \int_a^{t_i} |p_2(|t_i - s|)| \\
 &+ \max\{C, D\} \int_a^{t_i} |p'_2(|t_i - s|)| ds (\|V - \bar{V}\|_+.
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\|\Phi(V) - \Phi(\bar{V})\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} \leq 3\rho \|V - \bar{V}\|_{\mathbb{R}^{2N+2}},$$

Comme  $p < \frac{1}{3}$ ,  $\Phi$  est une contraction, d'après le théorème du point fixe de Banache, il existe une solution unique  $V$ .  $\square$

### 3.2.1 Analyse de la convergence

Maintenant, nous allons montrer que la solution approchée  $(v, w)$  converge vers la solution exacte  $(u, u')$  quand  $h$  tend vers 0.

**Proposition 3.2.2.** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et pour  $0 < \rho < \frac{1}{3}$ , nous avons,*

$$\|u - v\|_{\infty} + \|u' - w\|_{\infty} \leq \frac{O_1(h) + O_2(h)}{1 - 3\rho}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque qu'il existe  $q, r \in \{0 \dots N\}$  tel que,

$$\|u - v\|_{\infty} + \|u' - w\|_{\infty} = |u_q - v_q| + |u'_r - w_r|,$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} |u_q - v_q| + |u'_r - w_r| &\leq \sum_{j=0}^i |\alpha_j| |K_1(t_q, t_j, u_j, u'_j) - K_1(t_q, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\beta_j| |K_1(t_r, t_j, u_j, u'_j) - K_1(t_r, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\alpha_j| \left| \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_r, t_j, u_j, u'_j) - \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_r, t_j, v_j, w_j) \right| + O_1(h) \\ &\quad + \sum_{j=0}^N |\bar{\alpha}_j| |K_2(t_q, t_j, u_j, u'_j) - K_2(t_q, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\bar{\beta}_j| |K_2(t_r, t_j, u_j, u'_j) - K_2(t_r, t_j, v_j, w_j)| \\ &\quad + |\bar{\alpha}_j| \left| \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_r, t_j, u_j, u'_j) - \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_r, t_j, v_j, w_j) \right| + O_2(h). \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (A2) on obtient

$$\begin{aligned}
 |u_q - v_q| + |u'_r - w_r| &\leq \sum_{j=0}^i (|\alpha_j| + |\beta_j|)(A|u_j - v_j| + B|u'_j - w_j|) \\
 &\quad + |\alpha_j|(\bar{A}|u_j - v_j| + \bar{B}|u'_j - w_j|) \\
 &\quad + \sum_{j=0}^N (|\bar{\alpha}_j| + |\bar{\beta}_j|)(C|u_j - v_j| + D|u'_j - w_j|) \\
 &\quad + |\bar{\alpha}_j|(\bar{C}|u_j - v_j| + \bar{D}|u'_j - w_j|) + O_1(h) + O_2(h).
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 |u_q - v_q| + |u'_r - w_r| &\leq \left\{ \max\{A, B\} \left( \int_a^{t_q} |p_1(t_q - s)| ds + \int_a^{t_q} |p'_1(t_q - s)| ds \right) \right. \\
 &\quad \left. + \max\{\bar{A}, \bar{B}\} \int_a^{t_r} |p_1(t_r - s)| ds \right\} (|u_q - v_q| + |u'_r - w_r|) \\
 &\quad + \left\{ \max\{C, D\} \left( \int_a^b |p_2(|t_q - s|)| ds + \int_a^b |p'_2(|t_q - s|)| ds \right) \right. \\
 &\quad \left. + \max\{\bar{C}, \bar{D}\} \int_a^b |p(|t_r - s|)| ds \right\} (|u_q - v_q| + |u'_r - w_r|) + O_1(h) + O_2(h), \\
 &\leq 3\rho(|u_q - v_q| + |u'_r - w_r|) + O_1(h) + O_2(h).
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|u - v\|_\infty + \|u' - w\|_\infty \leq \frac{O_1(h) + O_2(h)}{1 - 3\rho}.$$

Enfin, si  $h$  converge vers 0, alors  $(v, w)$  converge vers  $(u, u')$ .  $\square$

Dans la pratique, il est clair que la solution  $(v, w)$  ne peut pas être déterminée, pour cela il faut l'approcher en utilisant la méthode des approximations successives, définie comme suit,

pour tout  $i = 0 \dots N$ ,

$$v_i^{k+1} = f_i + \sum_{j=0}^i \alpha_j K_1(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) + \sum_{j=0}^N \bar{\alpha}_j K_2(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k), \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned}
 w_i^{k+1} &= f'_i + \sum_{j=0}^i \beta_j K_1(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) + \alpha_j \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) \\
 &+ \sum_{j=0}^N \bar{\beta}_j K_2(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) + \bar{\alpha}_j \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k).
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Dans le prochain théorème, nous allons prouver que la solution itérative

$$(v^{k+1}, w^{k+1}) = (v_0^{k+1}, \dots, v_N^{k+1}, w_0^{k+1}, \dots, w_N^{k+1})$$

de (3.2.11) et (3.2.12) converge vers  $(v, w)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

**Théorème 3.2.2.** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et pour tout  $(v^0, w^0)$ , nous avons,*

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq (3\rho)^{k+1} (\|v^0 - v\|_\infty + \|w^0 - w\|_\infty).$$

*Démonstration.* En utilisant (3.2.9), (3.2.10), (3.2.11) et (3.2.12), nous avons pour tout  $i = 0 \dots N$  :

$$\begin{aligned}
 v_i^{k+1} - v_i &= \sum_{j=0}^i \alpha_j (K_1(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_1(t_i, t_j, v_j, w_j)) \\
 &+ \sum_{j=0}^N \bar{\alpha}_j (K_2(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_2(t_i, t_j, v_j, w_j)),
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 w_i^{k+1} - w_i &= \sum_{j=0}^i \beta_j (K_1(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_1(t_i, t_j, v_j, w_j)) \\
 &+ \alpha_j \left( \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - \frac{\partial K_1}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j) \right) \\
 &+ \sum_{j=0}^N \bar{\beta}_j (K_2(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_2(t_i, t_j, v_j, w_j)) \\
 &+ \bar{\alpha}_j \left( \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - \frac{\partial K_2}{\partial t}(t_i, t_j, v_j, w_j) \right).
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 |v_i^{k+1} - v_i| &\leq \sum_{j=0}^i |\alpha_j| |K_1(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_1(t_i, t_j, v_j, w_j)| \\
 &+ \sum_{j=0}^N |\bar{\alpha}_j| |K_2(t_i, t_j, v_j^k, w_j^k) - K_2(t_i, t_j, v_j, w_j)|,
 \end{aligned}$$



en se référant à l'hypothèse (2) de (A2), on obtient

$$\begin{aligned}
 |v_i^{k+1} - v_i| &\leq \sum_{j=0}^i |\alpha_j| (C|v_j^k - v_j| + D|w_j^k - w_j|) \\
 &+ \sum_{j=0}^N |\bar{\alpha}_j| (A|v_j^k - v_j| + B|w_j^k - w_j|), \\
 &\leq \max\{C, D\} \int_a^t |p_1(t_i - s)| ds (\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty) \\
 &+ \max\{A, B\} \int_a^b |p_2(|t_i - s|)| ds (\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty \leq (\varrho)(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

De la même manière, nous obtenons

$$\|w^{k+1} - w\|_\infty \leq 2(\varrho)(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

Enfin, on trouve

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq 3\varrho(\|v^k - v\|_\infty + \|w^k - w\|_\infty).$$

Par induction, nous obtenons

$$\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty \leq (3\varrho)^{k+1}(\|v^0 - v\|_\infty + \|w^0 - w\|_\infty).$$

Comme  $0 < \varrho < \frac{1}{3}$ ,  $(3\varrho)^{k+1} \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  aussi on a la quantité  $(\|v^0 - v\|_\infty + \|w^0 - w\|_\infty)$  bornée, alors nous avons  $\|v^{k+1} - v\|_\infty + \|w^{k+1} - w\|_\infty$  tend vers zéro lorsque  $k \rightarrow \infty$ . □

### 3.3 Les tests numériques

Nous présentons quelques exemples d'équations intégro-différentielles faiblement singulières non linéaires de Volterra-Fredholm qui seront traités numériquement afin de valider notre méthode.

Pour les exemples suivants, nous appliquons notre processus numérique pour calculer  $v^{k+1}$  et  $w^{k+1}$ , selon les schémas (3.2.11) et (3.2.12).

Nous considérons le vecteur initial  $(v^0, w^0)$  nul, et nous proposons le critère d'arrêt en fixant le paramètre  $k$  de la manière suivante :

$$|v^{k+1} - v^k| + |w^{k+1} - w^k| \leq 10^{-7}.$$

Nous définissons la fonction d'erreur  $E_N$ , calculée à l'aide de notre méthode numérique, par,

$$E_N = \max_{0 \leq i \leq N} \{|u(t_i) - v_i^{k+1}| + |u'(t_i) - w_i^{k+1}|\}.$$

**Exemple 3.3.1.**

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt{|t-s|} \cos \left( e^{2s} + \arccos \left( \frac{s+t}{3} \right) + u(s) - u'(s) \right) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sqrt{(t-s)} \sin \left( e^{2s} + \arcsin \left( \frac{t-s}{5} \right) + u(s) - u'(s) \right) ds \\ &+ e^{2t} - \frac{(7t+3)(1-t)^{3/2}}{90} - \frac{53t^{5/2}}{450}, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

où la solution exacte est donnée par

$$u(t) = e^{2t}$$

**Exemple 3.3.2.**

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{20} \int_0^1 \sqrt{|t-s|} \cos \left( 1-s + \arccos \left( \frac{s+t}{3} \right) + u(s) - u'(s) \right) ds \\ &+ \int_0^t \sqrt{(t-s)} \frac{ts^2(1+e^{-s}+e^{-1})}{1+e^{-u(s)}+e^{-u'(s)}} ds \\ &+ t - \frac{(7t+3)(1-t)^{3/2} + 7t^{5/2}}{450} - \frac{16t^{9/2}}{105}, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

où la solution exacte s'écrit

TABLE 3.1 – Résultats numériques de (3.3.1).

$N$	$E_N$
10	3.03E-3
50	3.00E-4
100	1.08E-4
200	3.92E-5
500	1.01E-5
1000	3.60E-6

$$u(t) = t$$

TABLE 3.2 – Résultats numériques de (3.3.2).

$N$	$E_N$
10	1.30E-2
50	1.28E-3
100	4.61E-4
200	1.66E-4
500	4.28E-5
1000	1.52E-5

Les tableaux 3.1 et 3.2 nous montre l'efficacité de notre méthode numérique en examinant la fonction d'erreur  $E_N$ , où nous avons constaté que  $E_N$  converge vers 0 lorsque

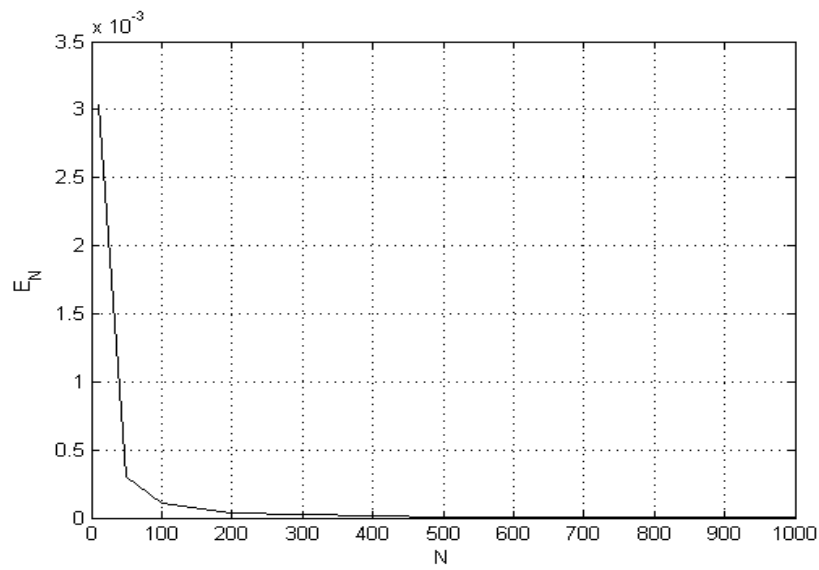


FIGURE 3.1 – La fonction d’erreur  $E_N$

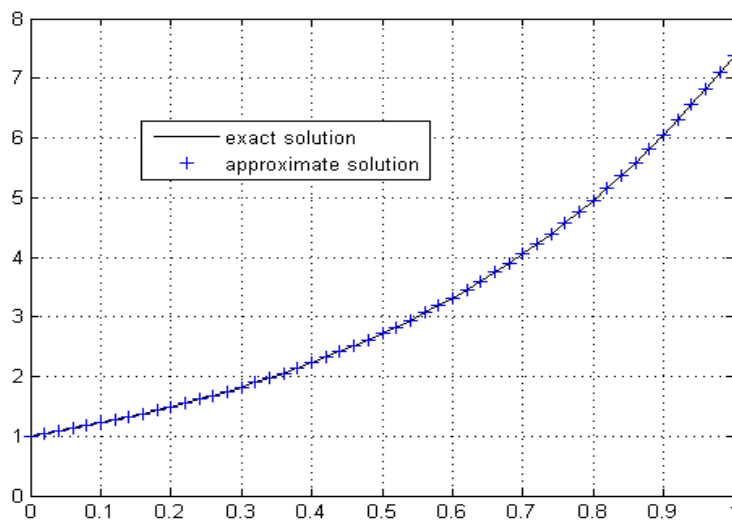
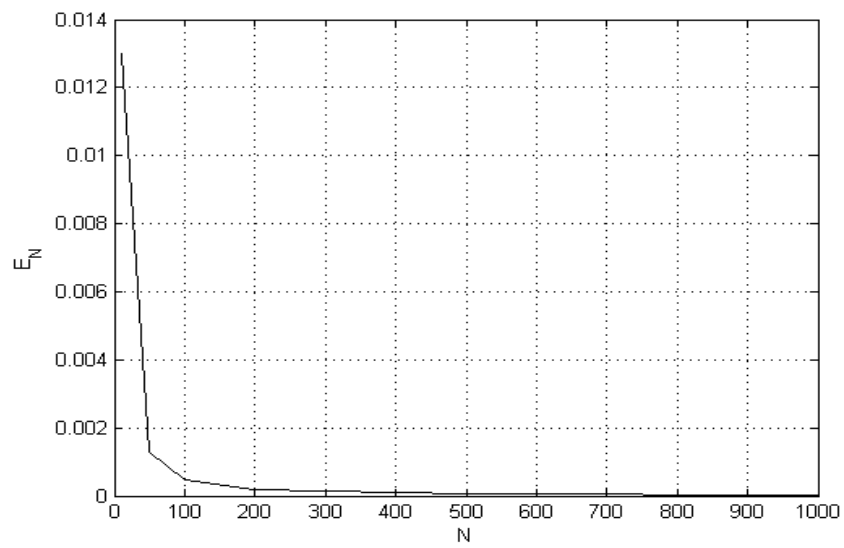
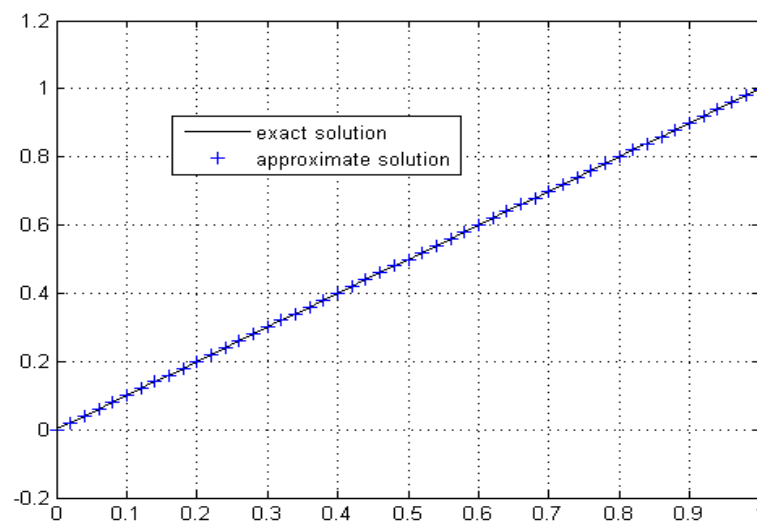


FIGURE 3.2 – la Solution exacte vs la solution approchée pour  $N = 50$

FIGURE 3.3 – La fonction d'erreur  $E_N$ FIGURE 3.4 – la Solution exacte vs solution la approchée pour  $N = 50$

$N$  augmente ( $E_N \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ ), ainsi que les graphes de la fonction d'erreur pour les exemples (3.1) et (3.2) sont présentés dans les figures (3.1) et (3.3) respectivement. De plus, les figures (3.2) et (3.4) montrent la comparaison entre les solutions exactes et numériques pour  $N = 50$ .

---

# CONCLUSION

---

Nous avons introduit une méthode numérique cohérente, pour l'approximation d'une équation non linéaire faiblement singulière de Fredholm et Volterra-Fredholm integro-différentielle. on a étudié l'existence et l'unicité de la solution, sous certaines hypothèses sur les fonctions impliquées et leurs dérivés. Le célèbre théorème du point fixe de Banach est utilisé pour établir les résultats.

Comme perspective, nous allons appliquer d'autres schémas itératifs, avec des conditions appropriées, pour améliorer la convergence des solutions approchées. Aussi, notre méthode peut être étendue pour approcher l'équation integro-différentielle de Fredholm avec un ordre de dérivée élevé.

Nous allons aussi étudier d'autres types d'équations intégro-différentielles, comme les équations intégro-différentielles de Fredholm floues ou fractionnaires, à l'aide de méthodes numériques cohérentes.

Enfin et surtout, nous allons étudier le cas 2D d'équations intégro-différentielles faiblement singulière.

---

## Bibliographie

---

- [1] R P. AGARWAL and D. O' REGAN : *Singular differential and integral Equations with applications*. Springer, 2003.
- [2] P. ASSARI : *Solving weakly singular integral equations utilizing the meshless local discrete collocation technique* .Alexandria Engineering Journal. **75** (2017), 2497–2507.
- [3] K. ATKINSON and H. HAN : *Theoretical numerical analysis : a functional analysis framework*. Springer, New York, 2001.
- [4] A.H.Borzabadi and O.S.Fard, A numerical scheme for a class of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. J Comput Appl Math. 232 (2009) 449-454.
- [5] H. BRUNNER : *The numerical solution of integral equations with weakly singular kernels, numerical analysis*. Lecture Notes in Math. **1066** (1984), 50–71.
- [6] Z. CHEN and W. JIANG : *An efficient algorithm for solving nonlinear Volterra-Fredholm*. AMC. **259** (2015), 614–619.
- [7] O. DIEKMANN : *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*. J. Math. Biol. **6** (1978), 109–130.



- [8] J. DU : *The collocation methods for singular integral equation with cauchy kernels* . Acta Mathematica Scientia **6** (2000), 289–302.
- [9] R. ESTRADA and R. KANWAL : *Singular Integral Equations* . Springer-Verlag New York, 2000.
- [10] M. ESMAEILBEIGI and F. MIRZAEI and D. MOAZAMI : *A meshfree method for solving multidimensional linear Fredholm integral equations on the hypercube domains* . Appl. Math. Comput. **298** (2017), 236–246.
- [11] M. ESMAEILBEIGI and F. MIRZAEI and D. MOAZAMI : *Radial basis functions method for solving three-dimensional linear Fredholm integral equations on the cubic domains*. Iran. J. Numer. Anal. Optim **7(2)** (2017), 15-38.
- [12] J. I. FRANKEL : *A Galerkin solution to a regularized Cauchy singular integro-differential equation*. Quart Appl Math. **53** (1995), 245–258.
- [13] M. GHIAT : *Etude analytique et numérique des équations intégrales-différentielles de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers*. Thèse de doctorat en Mathématiques université Guelma (2018).
- [14] M. GHIAT and H. GUEBBAI : *Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel*. Comp Appl Math. **232** (2018), 1-14.
- [15] H. GUEBBAI, M Z. AISSAOUI I. DEBBAR, B. KHALLA, : *Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation*. AMC. **229** (2014), 367-373.
- [16] E. JEN and R. SRIVASTAV : *Cubic splines and approximate solution of singular integral equations*. Mathematics of Computation. **37** (1981), 417–423.
- [17] V. LAKSHMIKANTHAM and M. RAO : *Theory of integro-differential equations* . Gordon and Breach, Lausanne, 1995.

- [18] E. LADOPOULOS : *Singular integral equations* . Springer-Verlag Berlin, 2000.
- [19] S. LEMITA : *Traitement numérique des équations intégrales de Fredholm : Généralisation des méthodes itératives*.Thèse de doctorat en Mathématiques université Guelma (2018).
- [20] S. LEMITA H.GUEBBAI, AISSAOUI, M. Z : *Generalized Jacobi method for linear bounded operators system*.Comp. Appl. Math. (2017), <https://doi.org/10.1007/s40314-017-0557-3>
- [21] P. LINZ : *Analytical and numerical methods for Volterra equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1985.
- [22] F. MALEKNEJAD and M. HADIZADEH : *A New computational method for Volterra-Fredholm integral equations*. Comput. Math. Appl. **37** (1999), 1–8.
- [23] F. MALEKNEJAD and M. NOSRATI and E. NAJAFI : *Wavelet Galerkin method for solving singular integral equations*. Computational and Applied Mathematics **vol.31 no.2** (2012), 371–390.
- [24] B N. MANDAL and A. CHAKRABARTI : *Applied singular integral equations*. Springer-Verlag Berlin, 2000.
- [25] M. MANDAL and G. NELAKANTI : *Superconvergence Results for weakly singular Fredholm-Hammerstein integral equations*. Numerical Functional Analysis and Optimization. **40** (2019), 935–942.
- [26] S. MICULA : *An iterative numerical method for Fredholm-Volterra integral equations of the second kind*. Appl. Math.Comput. **270** (2015), 935-942.
- [27] F. MIRZAEI : *Numerical solution of nonlinear Fredholm-Volterra integral equations via Bell polynomials*. Comput Methods Differ Equ. **5(2)** (2017), 88–102.

- [28] F. MIRZAEI and H. HADADIYAN : *Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions*. Appl. Math.Comput. **250** (2015), 805-816.
- [29] F. MIRZAEI and H. HADADIYAN : *Using operational matrix for solving nonlinear class of mixed Volterra-Fredholm integral equations*. Math Methods Appl Sc. **40(10)** (2017), 3433-3444.
- [30] F. MIRZAEI and S. F. HOSEINI : *Application of Fibonacci collocation method for solving Volterra-Fredholm integral equations*. Appl. Math.Comput. **273** (2016), 637–644.
- [31] F. MIRZAEI and N. SAMADYAR : *Convergence of 2D-orthonormal Bernstein collocation method for solving 2D-mixed Volterra-Fredholm integral equations* . Trans. A Razmadze. Math. Inst **172** (2018), 631-641.
- [32] F. MIRZAEI and N. SAMADYAR : *On the numerical solution of stochastic quadratic integral equations via operational matrix method*. Math Methods Appl Sc **41(12)** (2018), 4465–4479.
- [33] K. MIRZAEI and N. SAMADYAR : *Using radial basis functions to solve two dimensional linear stochastic integral equations on non-rectangular domains*. Math Methods Appl Sc **41(12)** (2018), 4465–4479.
- [34] S. NEMATI : *An efficient operational matrix method for solving a class of two-dimensional singular Volterra integral equations*. Journal of Mathematical Sciences and Modelling . **11** (2017 ), 192–201.
- [35] B.G.Pachpatte, On Fredholm type integrodifferential equation. Tamkang J. Math. **39** (2008) 85-94.
- [36] B G. PACHPATTE : *Multidimensional integral equations and inequalities* . ATLANTIS PRESS, AMSTERDAM-PARIS, 2011.

- [37] A. PEDAS and E. TAMME : *Discrete Galerkin method for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels*. Journal of Computational and Applied Mathematics. **213(1)** (2008), 111–126.
- [38] M D. RAISINGHANIA : *Integratal equation and boundary vlue problem* . S. Chand Publishing, 2007.
- [39] M N. SAHLAN and H. FEYZOLLAHZADEH : *Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations*. Mathematical Sciences . **11** (2017 ), 165–171.
- [40] SALAH S., GUEBBAI H. LEMITAS. and AISSAOUI M.Z. : *Solution of an integro-differential nonlinear equation of Volterra arising of earthquake Model*. To appear in Bol. Soc. Paran. Mat doi :10.5269/bspm.48018.
- [41] G. SCHMIDT : *Spline Collocation for singular integro-differential equations over  $(0, 1)$*  . Numerische Mathematik **50(3)** (1987), 337–352.
- [42] C. SCHNEIDER : *Product integration for weakly singular integral equations*. Tamkang J. Math. **36** (1981), 207–213.
- [43] S. SEGNI : *Amélioration des conditions d’existence et d’unicité pour les équations intégro-différentielles de Volterra*.Thèse de doctorat en Mathématiques université Guelma (2019).
- [44] S. SEGNI and M. GHIAT and H. GUEBBAI : *New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation*. Asian-European Journal of Mathematics **Vol. 12, No. 01**, 1950016 (2019), 1–10.
- [45] C. SCHNEIDER : *Haar wavelet method to Solve Volterra Integral Equations with weakly singular kernel by collocation method*. Applied Mathematical Sciences **Vol. 5 no. 65** (2011),

- [46] TOUATI S., AISSAOUI M.Z. LEMITAS. and GUEBBAI H. : *Investigation approach for a nonlinear singular Fredholm integro-differential equation*. To appear in Bol. Soc. Paran. Mat.
- [47] S.Touati, S.Lemita, M.Ghiat and M.Z.Aissaoui, *Solving a nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernels*. Fasciculi Mathematici **62** (2019).
- [48] G. VAINIKKO : *Multidimensional weakly singular integral equations, Lecture Notes in Mathematics*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1549, Springer, (1993).
- [49] K. WANG and Q. WANG and K. GUAN : *Iterative method and convergence analysis for a kind of mixed nonlinear Volterra-Fredholm integral equation*. Appl. Math. Comput. **225** (2013 ), 631–637.
- [50] A. M. WAZWAZ : *Volterra-Fredholm integro-differential equations*, Linear Nonlinear Integr. Equ. (2011) 285-309.

---

## **Bibliographie**

---

