

Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Présenté par

MEHTOUR NASREDDINE

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

=====

**Comportement dynamique linéaire d'un rotor flexible
tournant à grande vitesse monté dans des paliers à
film d'huile**

=====

Sous la Direction de

Pr. Mustapha LAHMAR

Année universitaire : 2014/2015

Table de matière

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I : Etude bibliographique sur les organes de supportage des rotors

I.1 Introduction.....	6
I.2 Histoire de la lubrification hydrodynamique.....	7
I.3 Interaction fluide-structure.....	10
I.4 Les différents régimes de lubrification.....	11
I.4.1 Contacts à basse pression ($0.1 < P < 50$ MPa).....	12
I.4.2 Contacts à haute pression (jusqu'à 3 GPa).....	14
I.5 Les organes de supportage.....	15
I.5.1 Différentes classes de paliers.....	16
I.5.1.1 Paliers de roulements.....	16
I.5.1.2 Paliers secs.....	17
I.5.1.3 Paliers poreux.....	17
I.5.1.4 Paliers magnétiques.....	18
I.6 Paliers fluides ou paliers à film d'huile.....	19
I.6.1 Paliers hydrodynamiques.....	19
I.6.1.1 Paliers à géométrie fixe.....	20
A.1 Paliers lisses cylindriques.....	21
A.2 Palier à arc partiel.....	22
A.3 Paliers multilobes.....	23
B. Paliers à géométrie variable (Paliers à patins oscillants).....	26
Tableaux 1 : Comparaison de différents types de palier.....	30

Chapitre II : Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluides newtonien et non newtonien

II.1 Introduction.....	31
II.2 Rappel des lois fondamentales de la MMC.....	31
II.3 Equation de Reynolds modifiée	38
II.3.1 Fluides non newtoniens.....	38
II.3.1.1 Fluide à couples de contraintes.....	39
II.3.2 Écoulements turbulents ou non laminares	39

CHAPITRE III : Perturbation de l'équation de Reynolds modifiée en régime transitoire

III.1 Introduction.....	40
III.2 Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes.....	41
III.3 Cas des petits mouvements : Modélisation linéaire.....	43
III.3.1 Concept des coefficients dynamiques d'un palier.....	44
III.3.2 : Méthode de perturbation : Calcul des coefficients dynamiques.....	45
III.3.2.1 Cas d'une excentricité imposée : Paramétrage (ε, ϕ).....	46
III.3.2.2 Cas d'une charge imposée : Paramétrage (X, Y).....	51
III.5 Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées.....	59
III.5.1 Cas d'un rotor rigide.....	59
Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre.....	60
III.5.2 Cas d'un rotor flexible	62
III.6 Conclusion.....	63

Chapitre IV : Traitement numérique des équations de Reynolds d'ordres zéro et un

IV.1 Introduction.....	68
IV.2 Discrétisation de l'équation de Reynolds d'ordre zéro par différences finies.....	68
IV.3 Discrétisation des équations de Reynolds d'ordre un par différences finies	72
IV.4 Solution statique du problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée.....	74
IV.5 Solution dynamique du problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée: calcul des coefficients dynamiques synchrones et de la réponse dynamique du système à une excitation synchrone.....	75
IV.6 Validation des programmes.....	75
IV.7 Etude paramétrique.....	77

INTRODUCTION GENERALE

Les développements technologiques imposent des conditions de fonctionnement de rotors de plus en plus sévères. En effet, les machines tournantes modernes telles que les turbomachines se caractérisent par des vitesses de rotation et des charges de plus en plus grandes. Ces machines sont exposées à des problèmes vibratoires aigus essentiellement dus à la réduction des masses et l'élévation des vitesses de fonctionnement des rotors.

Sur le plan industriel, la rentabilité des installations nécessite une fiabilité des composants la meilleure possible. A titre d'exemple, une avarie de paliers rendant indisponible un groupe turbo-alternateur d'une centrale électrique de grande puissance entraîne des pertes financières considérables aux entreprises de production d'électricité figure 1. Il est donc nécessaire de s'intéresser au rôle et aux performances dynamiques des paliers utilisés comme organes de supportage dans les machines tournantes comprenant une ou plusieurs lignes d'arbre.

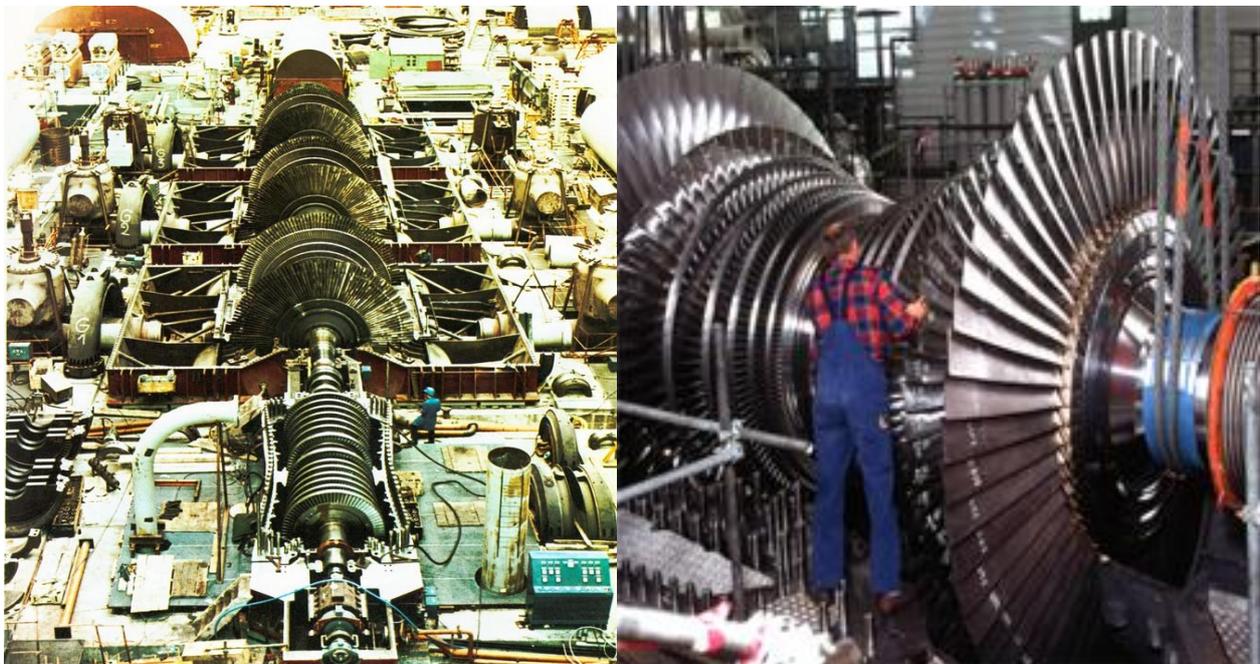


Fig. 1 Photographie d'un groupe turbo-alternateur de centrale nucléaire

Pour remédier à ces problèmes, les paliers à film d'huile ou paliers fluides constituent l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées dans ces dernières décennies, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité de charge et d'amortissement par comparaison aux paliers à roulements. Ces paliers comprennent une couche fluide généralement une huile suffisamment visqueuse interposée entre la surface du rotor et le coussinet appelée film d'huile dont l'épaisseur relative h/R est de l'ordre de 10^{-3} . En effet, les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du film fluide s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor et d'améliorer la stabilité du système rotor-palier.

Historiquement, ce n'est qu'au début du XX^{ème} siècle qu'un intérêt fut porté sur l'influence des paliers dans le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre. En 1924, **Newkirk [1]** montre expérimentalement la présence d'une fréquence de vibration qui peut être supprimée par simple réduction de l'alimentation en huile du palier. **Hummel [2]** et **Newkirk [3]** confirmèrent, à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant joué par les paliers à film d'huile. Ils observent par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement ; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé, l'arbre est animé d'un mouvement de précession appelé fouettement avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation (appelé en anglais, ²half frequency whirl²) alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes) le système redevient stable. Ces résultats sont en contradiction avec ceux obtenus théoriquement par **Stodola [4]**. Ce dernier utilise en effet un modèle de palier à film complet (full film journal bearing) qui est toujours instable quelque soit l'excentricité de fonctionnement. Les premières recherches sur la stabilité des paliers furent expérimentales. Les études avaient pour but de rechercher l'influence des paramètres et de la géométrie sur la stabilité du palier sans pour cela caractériser le comportement dynamique du palier. Au cours de cette période, les études théoriques les plus intéressantes ont essentiellement porté sur la modélisation et la prise compte de la rupture du film lubrifiant (phénomène de cavitation) lors de la résolution de l'équation de Reynolds. Ce n'est qu'en 1956 qu'**Hori [5]** détermine les huit coefficients dynamiques, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients

d'amortissement définis par la schématisation linéaire de **Stodola [4]**, il utilise pour cela le modèle du palier infiniment long avec rupture du film d'huile dans lequel l'écoulement du film lubrifiant s'effectue seulement suivant la direction circonférentielle du palier figure 2. Ces huit coefficients, utilisés dans un calcul de stabilité, mettent en évidence des zones de fonctionnement stable. Ainsi, le désaccord entre la théorie et l'expérience était seulement dû aux conditions aux limites, liées à l'écoulement du film lubrifiant dans le palier, retenues dans la résolution du problème. L'étude des paliers courts réalisée par **Holmes [6]** confirme la validité des résultats obtenus par **Hori [5]**. Le calcul des coefficients dynamiques du film dans le cas du palier de longueur finie (écoulement 2-D) n'a pas pu se faire qu'avec le développement des moyens de calcul (**Sternlicht [7]** et **Lund [8]**).

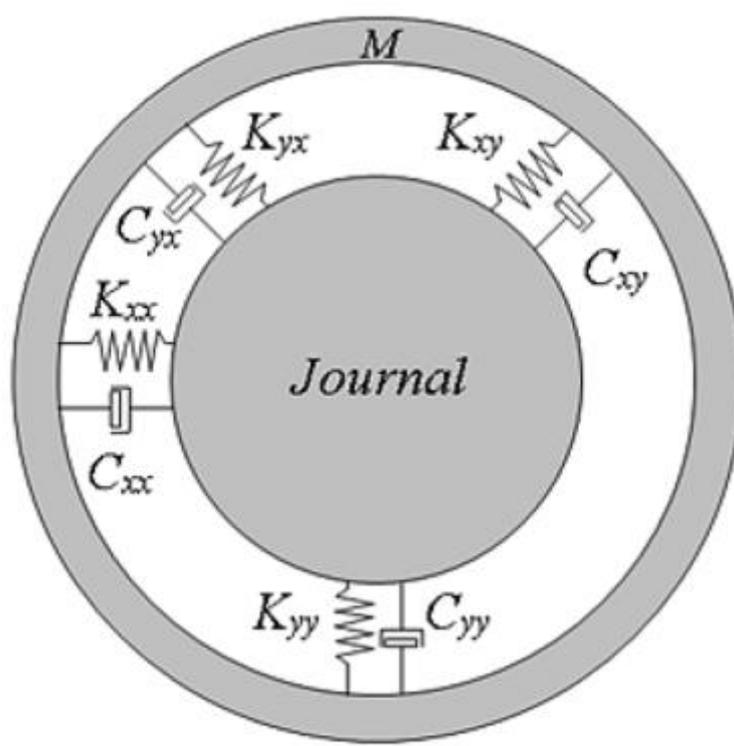


Fig. 2 Schématisation dynamique du film par des ressorts et amortisseurs linéaires

Ces coefficients permettent au spécialiste des rotors de modéliser linéairement le comportement du palier pour la recherche des instabilités, des vitesses critiques et des réponses de ligne d'arbre à des excitations de type balourd, par exemple. Cependant,

il est impossible de prévoir le comportement du palier dans la zone instable ou lorsque ce palier est soumis à des efforts dynamiques importants (grands balourds). Les limites de la théorie dynamique linéaire ont alors contraint certains chercheurs à envisager l'approche non linéaire pour mieux prédire le comportement des paliers fluides malgré les difficultés numériques inhérentes à ce type d'approche.

L'étude théorique menée dans le cadre de ce mémoire constitue une meilleure étape pour la connaissance du comportement dynamique linéaire d'un rotor rigide monté dans des paliers compliants lubrifiés par un fluide polaire incompressible et non newtonien de V. K. Stokes [9] dont la viscosité dépend de la pression. Ce fluide est caractérisé par trois constantes physiques, à savoir : la viscosité dynamique μ , la constante responsable des couples de contrainte η et le coefficient de piézo-viscosité α . D'autre part, le régime d'écoulement non laminaire (turbulent) sera aussi envisagé aussi bien dans le cas newtonien que non newtonien. Ce modèle de fluide permet de prendre en considération les effets non newtoniens dus à la présence des additifs de viscosité dans l'huile lubrifiante afin d'améliorer ses performances. Ce palier est soumis à deux types de chargement, à savoir une charge statique appliquée au palier correspondant au poids du rotor affecté au palier à laquelle est superposée un chargement dynamique dû à la présence d'un balourd résiduel (excitation synchrone).

Ce mémoire comprend quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique sur les différents organes de supportage des rotors de machine tournante appelés aussi paliers à film d'huile.

Dans le deuxième chapitre, on dérive l'équation de base de la lubrification hydrodynamique appelée équation de Reynolds modifiée à partir des équations de base de la théorie de la lubrification hydrodynamique dans le cas d'un palier fonctionnant en régime isotherme.

Le troisième chapitre est réservé à la perturbation de l'équation de Reynolds modifiée transitoire et à l'écriture des équations de la dynamique des rotors rigide et flexible de

type Jeffcott. La méthode de perturbation utilisée permet de transformer l'équation de Reynolds en trois équations aux dérivées partielles d'ordres zéro et un. L'équation d'ordre zéro dont l'inconnue est la pression stationnaire p_0 permet d'étudier le comportement statique du palier soumis à un chargement statique W_0 . Les deux équations d'ordre un dont les inconnues sont les pressions dynamiques complexes $Q_X = p_X + ivp_{\dot{X}}$ et $Q_Y = p_Y + ivp_{\dot{Y}}$ où v est la pulsation d'excitation. La connaissance de ces pressions permet de calculer les huit coefficients dynamique du palier et de déterminer ainsi la réponse dynamique du système rotor-palier.

Le quatrième chapitre est dévolu d'une part aux traitements numériques des équations différentielles obtenues dans le chapitre précédent, à savoir :

- l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro écrite en régime turbulent,
- les équations de Reynolds perturbées complexes,
- les équations de la dynamique des rotors.

La méthode de discrétisation spatiale des équations de Reynolds est celles les différences finies tandis que le schéma utilisé pour l'intégration des équations de mouvement des rotors est celui d'Euler.

Ce chapitre se termine par une validation du programme de calcul développé et une étude paramétrique.

Chapitre I

Etude bibliographique

sur les organes de supportage des rotors

I.1 Introduction

Les paliers sont des organes de machines utilisés pour guider les arbres en rotation. Deux grandes familles de paliers existent : les paliers lisses et les paliers à roulements. Dans les premiers, l'arbre prend appui sur un coussinet et est séparé de celui-ci par un film lubrifiant ; dans les seconds, des corps roulants (billes ou rouleaux) séparent la bague en rotation de l'alésage extérieur. Selon la direction de la charge par rapport à l'arbre en rotation, on distingue les paliers porteurs pour lesquels la charge est radiale, généralement appelés paliers ou paliers radiaux, des paliers pour lesquels la charge est axiale appelés butées. Dans ce qui suit, nous ne intéresserons que des paliers fluides radiaux et plus particulièrement des paliers hydrodynamiques dans lesquels un film mince de fluide sépare les surfaces en mouvement relatif.

Le comportement, la durée de vie et la tenue des paliers hydrodynamiques dépendent de nombreux paramètres, parmi lesquels les paramètres géométriques (dimensions et formes du palier), cinématiques et dynamiques (vitesse de rotation et charge appliquée), les caractéristiques du lubrifiant (essentiellement sa viscosité et dans certains cas sa masse volumique) et la nature des matériaux formant le palier.

Ainsi, la détermination des performances des paliers hydrodynamiques ne dépend pas seulement de la théorie de la lubrification mais aussi d'un ensemble de conditions liées à l'environnement des mécanismes. Il est cependant possible de présenter succinctement leurs principales caractéristiques de fonctionnement. Tout d'abord, l'épaisseur minimale du film lubrifiant doit toujours être nettement supérieure à la somme des hauteurs des rugosités des surfaces, sinon l'usure rapide du coussinet sera due soit à l'abrasion, soit plus rapidement encore au grippage des surfaces. Cette épaisseur minimale dépend bien sûr de l'aspect dynamique du système et en particulier des vibrations de l'arbre en rotation. Le palier hydrodynamique pouvant être lui-même source de vibrations, les aspects dynamiques devront être examinés en détail. Ils sont analysés de façon très différente selon qu'il s'agit des paliers de ligne d'arbre (charges relativement constantes) ou des paliers de moteurs ou de compresseurs alternatifs (charges variables en module et en direction).



I.2 Histoire de la lubrification hydrodynamique

Historiquement, il existe beaucoup de travaux sur la lubrification hydrodynamique. C'est au XIXe siècle, que les bases de la lubrification moderne ont été établies. En 1822, le mathématicien français Claude Louis Marie Navier, à la suite des travaux d'Euler présente les équations générales du mouvement d'un fluide en prenant en compte, pour la première fois, le frottement interne du fluide, c'est-à-dire la viscosité. Ces lois sont toujours utilisées aujourd'hui sous le nom d'équations de Navier-Stokes.

Dès 1840, le médecin français Jean Louis Marie Poiseuille établit les équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide dans un tube de faible diamètre afin de décrire l'écoulement du sang dans les vaisseaux. Ces lois, très utilisées en lubrification, ont été dans le même temps développées par Hagen en Allemagne.

Les premiers travaux connus sur la lubrification hydrodynamique sont celles de Gustave Adolph Hirn en 1847 qui réalise des expériences sur la lubrification hydrodynamique. En présence de fluide, Hirn constate que pour une charge donnée, le couple de frottement a faible vitesse augmente, le couple devient stable, passe par un minimum puis, à température constante, est proportionnel à la vitesse de rotation. Il montre aussi que le couple dépend directement de la viscosité de fluide. Les travaux de Hirn sont publiés en 1854 et exactement le 28 juin dans « La société industrielle de Mulhouse ».

En 1879, Robert Henry Thyrston, publie le résultat de ses études sur le frottement et la lubrification, il montre que lorsque la vitesse augmente, le coefficient de frottement d'un palier lubrifié décroît au dessous de la valeur statique, passe par un minimum puis augmente ensuite avec la vitesse. Il remarque aussi que la vitesse qui correspond au minimum de frottement dépend de la charge appliquée au palier.

Dès 1880, Couette qui étudiait, du point de vue de la mécanique des fluides, l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation de rayons très voisins afin de déterminer la signification physique de la viscosité, avait noté une discontinuité dans la courbe de variation du couple de frottement en fonction de la vitesse. Il attribuait déjà cette discontinuité à un changement de régime qui évidemment n'était pas prévu par la théorie laminaire.

C'est Osborne Reynolds en 1886 qui le premier a établi les bases de la lubrification hydrodynamique moderne. Il modélise mathématiquement le problème de la lubrification en posant des hypothèses de la lubrification. Cette modélisation est basée sur la modélisation faite par le médecin français Poiseuille entre 1840 et 1846. Il analyse l'écoulement simple entre deux plaques parallèles puis inclinées. Il donne une explication physique du phénomène de portance dû à la conservation du débit dans le coin d'huile. Finalement Reynolds présente une solution approchée de l'équation de lubrification ; la solution est basée sur les développements en série.

La première solution exacte de problème de lubrification est faite en Allemagne en 1904 par Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld. Il utilise un excellent changement de variable afin de décrire le champ de pression dans



le cas d'un palier infiniment long, les conditions aux limites proposées ne tiennent pas compte de la rupture du film dans le palier et la pression ainsi obtenue est négative dans la zone divergente.

En 1914, et toujours en Allemagne, Ludwig Karl Friedrich Gumbel propose de négliger toute la zone où la pression est négative pour la solution de Sommerfeld.

En 1931 Swift et Stieber en 1933, présentent indépendamment des conditions aux limites à la sortie du film plus proche à la réalité. Ils écrivent que dans la zone divergente du palier, le film est rompt le long d'une frontière déterminée par des conditions supplémentaires tels que : le long de frontière, la pression prend la valeur de la pression saturante du fluide et le gradient de pression s'annule. Ces conditions dites conditions aux limites de Reynolds qui sont universellement utilisées aujourd'hui pour les calculs des paliers soumis à des charges constantes.

L'année 1949, est la naissance de première approche numérique de problème de lubrification des paliers. Cette approche faite par Caméron et Wood basée sur le calculé simultané, afin de déterminer le champ de pression et la capacité de charge supporté par le palier.

En 1953, Fred William Ocvirk présente une méthode approchée pour le calculé des paliers courts. Il propose de négliger dans l'équation de Reynolds le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. La solution est analytique et utilise les conditions aux limites de Gumbel. Les résultats obtenus sont pratiquement exacts pour des paliers dont le rapport L/D est inférieur à 0.25

En 1986, Wang et Tsai, présentent un travail analytique sur l'écoulement entre deux cylindres rugueux, ils assimilent la rugosité des surfaces comme une loi sinusoïdale pour les deux surfaces de l'arbre et du coussinet, ils résoudrent directement les équations de Navier Stokes avec une méthode basé sur le développement en séries.

En 1989 Maspeyrot étudie le comportement dynamique des paliers de vilebrequin, il spécifie l'influence des défauts de forme. Il utilise la méthode de mobilité de Booker pour déterminer l'épaisseur minimale du film et la trajectoire de centre de l'arbre tels que le champ de pression étant déterminé par la méthode des différences finies associées à la méthode de Gauss Seidel avec coefficient de sur relaxation. Il conclut que ces défauts de forme ont une faible influence sur le couple de frottement et le débit axial, l'épaisseur minimale du film lubrifiant diminuant, dans une des sections extrêmes, de 30% à 60% et que l'augmentation de la pression d'alimentation entraîne une diminution de la température d'équilibre du palier et une augmentation du débit axial.

En 2001, Georgescu et al utilisent le changement de variable d'Euler pour résoudre l'équation de Reynolds dans le cas de deux disques inclinées et en rotation. Ils procèdent ensuite à un changement de variable non linéaire afin de découpler l'équation de Reynolds. Ils utilisent la méthode de séparation des variables pour résoudre le



problème qui devient linéaire. Ils proposent deux types des solutions, l'une est exponentielle pour la première méthode et l'autre est un produit d'une fonction sinusoïdale avec la fonction de Bessel de premier ordre.

Lors des 3^{ème} journées de la mécanique en 2002 à EMP à Alger, Boucherit et al présentent une étude sur les performances des paliers des turbines en régime transitoire puis en régime établie, ils comparent des différents cas de fonctionnement pour deux types des paliers l'un est avec rainure circonférentielle et l'autre avec rainure axiale.

L'étude est faite pour deux cas : palier aligné et palier mésaligné. Ils étudient l'influence de problème de mésalignement de l'arbre à l'intérieur du coussinet sur les trajectoires du centre de l'arbre et l'épaisseur du film. Ils concluent que le mésalignement a une forte influence sur les caractéristiques des paliers et modifie aussi les trajectoires de centre de l'arbre.

Lors du congrès français de la mécanique à Nice en 2003, Jeddi, Khlifi et Bonneau, présentent un travail sur l'influence des caractéristiques géométriques pour une rainure d'alimentation d'un palier hydrodynamique. Les résultats obtenus sont basés sur la résolution directe des équations bidimensionnelles de Navier Stokes et de la continuité afin de décrire l'écoulement dans la rainure d'alimentation. Ils ont introduits deux paramètres essentiels dans la modélisation qui sont la largeur et la profondeur de la rainure d'alimentation. Dans une autre partie ils étudient l'influence du positionnement du trou d'alimentation de la rainure sur l'écoulement. Ils concluent que la position du trou d'alimentation influence légèrement la nature de l'interaction entre les effets de la pression d'alimentation et de la vitesse de l'arbre, et que la profondeur de la rainure est le plus influente.

Lors des 6^{ème} journées de mécanique à EMP Bordj El Bahri à Alger, 15-16 Avril 2008, nous avons présenté une étude d'un rotor rigide supporté par un palier à film d'huile à suspension non linéaire en utilisant la modélisation non linéaire d'un palier court. La résolution simultanée de l'équation de Reynolds en régime dynamique et des équations du mouvement de l'arbre dans le palier (problème d'interaction fluide visqueux-structure ou problème couplé) s'effectue par un calcul pas à pas dans le temps. Nous notons, des résultats obtenus, que :

- la hauteur minimale du film augmente avec l'augmentation de la valeur de viscosité dynamique du lubrifiant
- le comportement dynamique d'un palier amortisseur est non linéaire et l'utilisation des paliers amortisseurs dans les turbomachines tournant à grande vitesse permet d'atténuer fortement les amplitudes de vibration de la ligne d'arbre.

Les conclusions de cette étude sont importantes du point de vue technologique car la diminution de l'épaisseur du film augmente sensiblement les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile.



I.3 Interaction fluide-structure

Les problèmes d'interaction fluide structure se sont posés très tôt aux ingénieurs en particulier avec le développement de l'aéronautique. C'est sous l'aspect aéroélasticité que ces travaux ont été menés. Les outils de calcul de l'époque ne permettaient qu'une modélisation simplifiée où les efforts du fluide sur la structure étaient modélisés au préalable de l'étude de la vibration de la structure. C'est avec le développement des outils de calcul numérique et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs que des algorithmes de couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure se sont développés dans les années 70.

Ces algorithmes étaient tributaires de l'efficacité des schémas de résolution des équations de la structure d'une part et de ceux du fluide d'autre part. L'utilisation d'algorithmes de couplage fluide/structure dans l'industrie est récente.

Cela nécessite des développements de méthodes sur plusieurs niveaux

- formalisme compatible des équations de la structure et du fluide
- description de l'interface entre les deux milieux continus,
- algorithmes de couplage entre le fluide et la structure (transmissions des conditions cinématique des efforts),
- techniques de maillage et de « remaillage ».

Récemment la résolution d'un certain nombre de problèmes en Mécanique des structures se démarque assez nettement des simulations habituelles où le chargement de la structure dû au fluide est approché par des modèles empiriques. Dans ces nouvelles simulations le fluide intervient par la résolution des équations hydrodynamiques, équations de Navier-Stokes, permettant de déterminer le chargement sur la structure. Actuellement de multiples nouveaux problèmes d'interaction fluide structure sont posés :

- Environnement :
 - transport des produits toxiques fluides
 - ballonnement, écoulement autour des pales d'éoliennes l'industrie automobile :
 - dynamique de gonflement des Airbags
- Ballonnement de fluide dans les réservoirs l'industrie aéronautique :
 - problèmes d'impact d'oiseaux

Impact d'hélicoptère dans l'eau l'industrie maritime :

- problèmes d'impact de bateau, 'Slamming'



- Ballotement dans les cuves de méthane l'industrie nucléaire:
 - rupture de tubes Générateurs de vapeur par vibration induite par les écoulements diphasiques eau vapeur
 - accidents sévères : dépressurisations réponses aux séismes (flambage de bidons de stockage)
- Modes de vibration de coeurs de réacteurs et la recherche en biomécanique :
 - déformations des vaisseaux sanguins en liaison avec le battement cardiaque
 - Ecoulement dans les faisceaux sanguins

I.4 Les différents régimes de lubrification

La lubrification concerne tous les contacts pour lesquels un film mince visqueux est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif (figure I.1). Les différents régimes de lubrification ont été présentés pour la première fois par Richard Stribeck en 1902 [10]. La courbe de Stribeck (figure I.2) représente la variation du coefficient de frottement en fonction de $\mu N/P$, cette courbe prend la même allure quelque soit le type de contact lubrifié. On distingue en général, trois zones correspondant chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact.

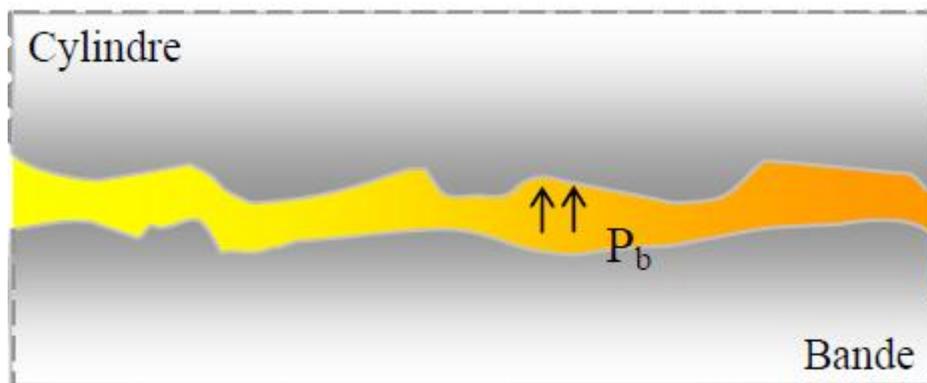
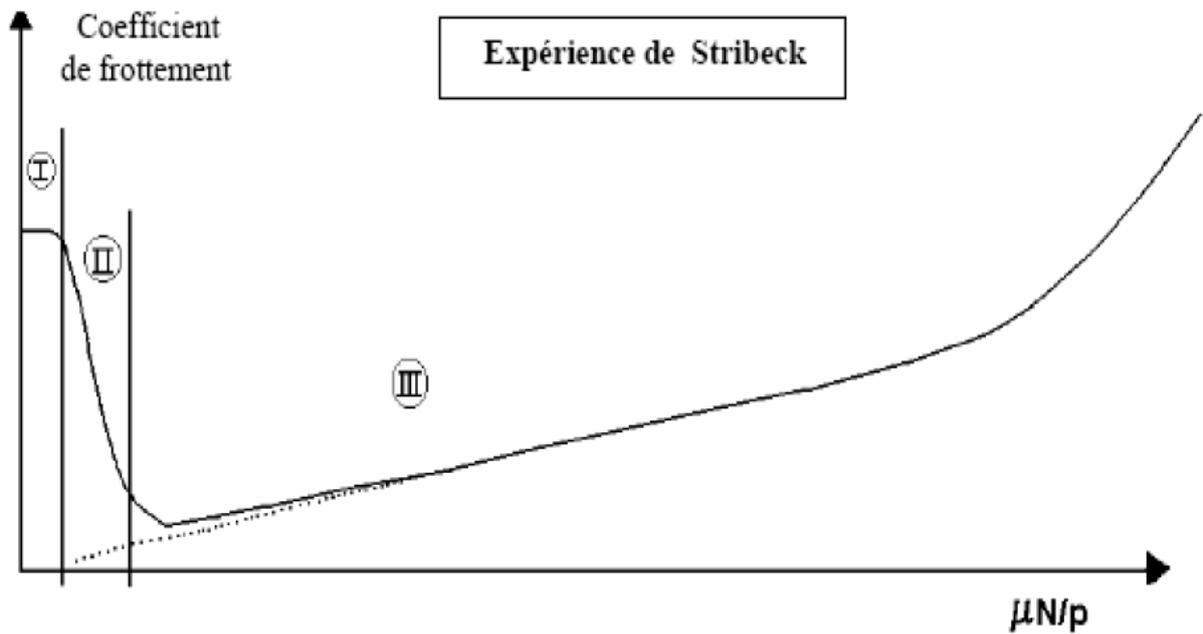


Fig. I. 1: Pour le régime hydrodynamique en film mince les rugosités perturbent l'écoulement du lubrifiant.





p : Rapport de la charge appliquée sur le palier rapportée à la surface projetée, μ : Viscosité du film lubrifiant, N : Vitesse de rotation de l'arbre.

Fig. I. 2: Courbe de Stribeck

I.4.1 Contacts à basse pression ($0.1 < P < 50$ MPa)

La zone (I)

Elle correspond à la lubrification limite ou onctueuse, la séparation des surfaces métalliques est assurée par des molécules d'huile adsorbées (figure I.3) par les surfaces métalliques. L'épaisseur de la couche moléculaire (empilement) est de l'ordre de 100 à 500 et la valeur du coefficient de frottement varie entre 0.05 et 0.15. Ce type de lubrification est rencontré à chaque démarrage du moteur, c'est à ce moment qu'il se produit l'usure la plus importante car les surfaces ne se sont pas complètement séparées. Dans ces conditions, l'onctuosité est la propriété prédominante du lubrifiant.

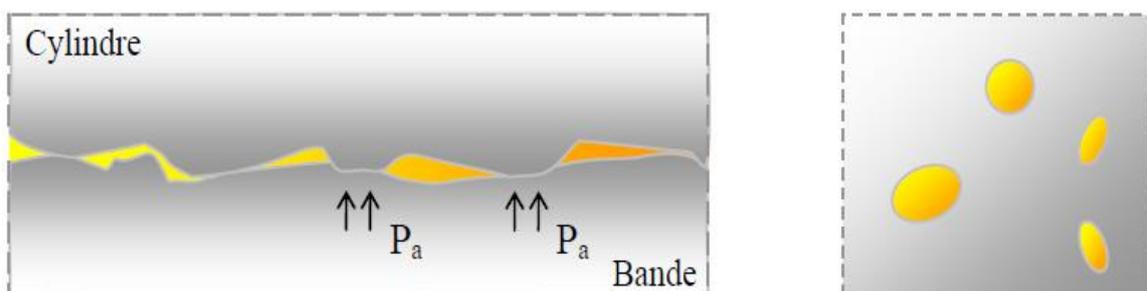


Fig. I. 3 : Régime limite



Zone (II) : Lubrification mixte

Ce régime de lubrification peut être considéré comme un régime de transition entre le régime onctueux et le régime hydrodynamique. L'effet hydrodynamique prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités (figure I.4). Dans cette zone, le coefficient de frottement varie de 0.001 à 0.20.

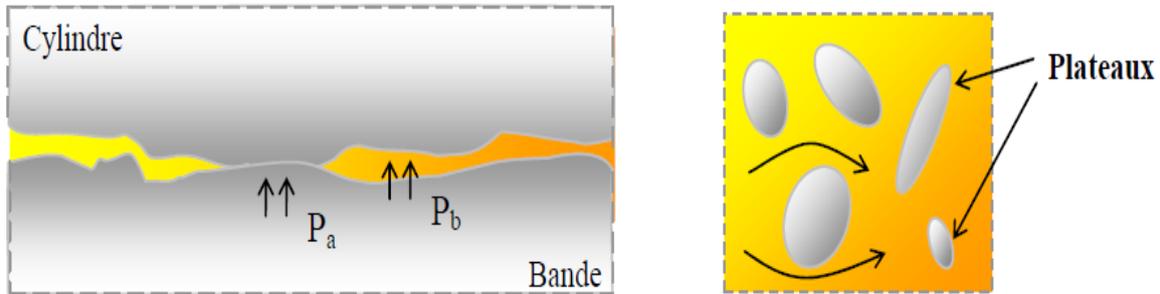


Fig. I. 4 : Régime mixte

Zone (III) : Lubrification hydrodynamique pure

L'étude du contact s'effectue à l'aide de l'équation de Reynolds, car le milieu est continu et les surfaces du contact sont totalement séparées par un film fluide (figure I.5). Dans cette zone, le coefficient de frottement varie de 0.002 à 0.001. Les régimes de lubrification (I) et (II) peuvent être supprimés si l'on injecte du lubrifiant sous pression dans le contact, on parle alors de lubrification hydrostatique.

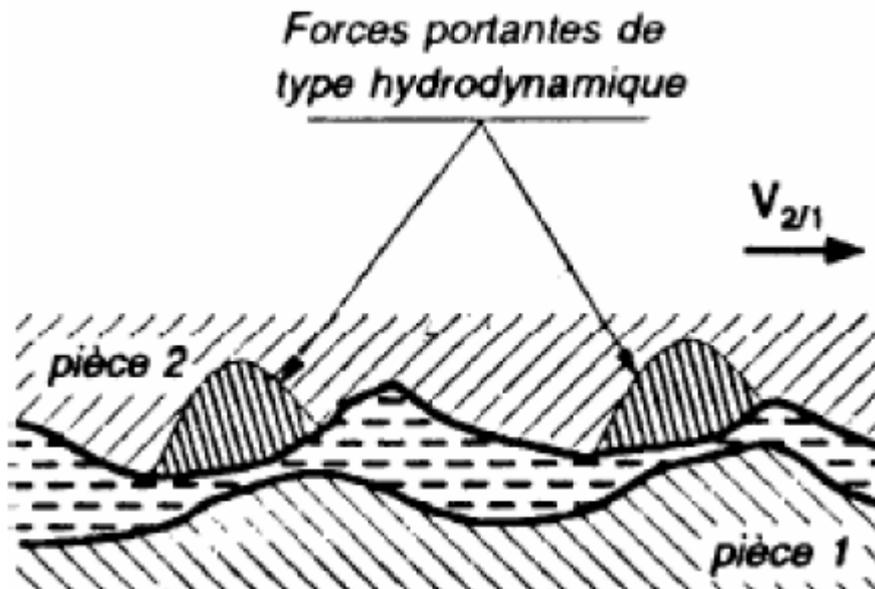


Fig. I. 5: Régime hydrodynamique



I.4.2 Contacts à haute pression (jusqu'à 3 GPa)

Ces contacts hertziens lubrifiés sont rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages.

Zone (I) Lubrification EP (Extrême Pression)

Les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus dans l'huile et activés par les pressions. Les contraintes de cisaillement et les températures existent dans le contact. Le coefficient de frottement varie de 0.02 à 0.2.

Zone (II) : Lubrification mixte

Comme pour les contacts faiblement chargés cette zone est une zone de lubrification mixte. Mais les phénomènes sont différents, c'est ici la transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique qui correspond à la zone (III) du diagramme de Stribeck.

La zone (III) : Lubrification élasto-hydrodynamique (E.H.D)

La lubrification EHD concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant. On parle de lubrification élasto-hydrodynamique lorsque les déplacements élastiques des surfaces solides en contact, dans le sens normal au contact, deviennent de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de film, voire bien supérieure. Dès lors, le couplage des équations de mécanique des fluides (Reynolds) et des solides (mécanique du contact élastique, théorie de Hertz) devient fort, et la solution va devenir de plus en plus dépendante de la déformation des solides. Des transformations radicales interviennent alors dans le comportement du film, par exemple la dépendance de son épaisseur par rapport aux conditions de contact (vitesses, charge appliquée...).

Ainsi, la déformation élastique dans un contact élastohydrodynamique est toujours grande devant l'épaisseur des films lubrifiants. Ces films séparant les surfaces ont typiquement une épaisseur de l'ordre du micromètre et une largeur de quelques centaines de micromètres d'un point à l'autre du contact, soumis à des fortes pressions. Ces hautes pressions engendrent des déformations élastiques importantes, influençant très fortement la géométrie du film. Ce phénomène s'accompagne d'une transformation de la rhéologie du lubrifiant, qui voit sa viscosité augmenter de plusieurs ordres de grandeurs. La génération d'un film EHD est donc la combinaison de trois principaux effets : la formation d'un film hydrodynamique, la modification de la géométrie par déformation élastique et l'accroissement de la viscosité du lubrifiant avec la pression (effet de piézo-viscosité).

Ce type de contact correspond au contact entre les bagues et les éléments roulants d'un palier de roulement à billes ou à rouleaux.



Dans ce type de lubrification, on a une présence simultanée de deux effets (figure I.6):

- effet hydrodynamique;
- -effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

Le coefficient de frottement varie de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

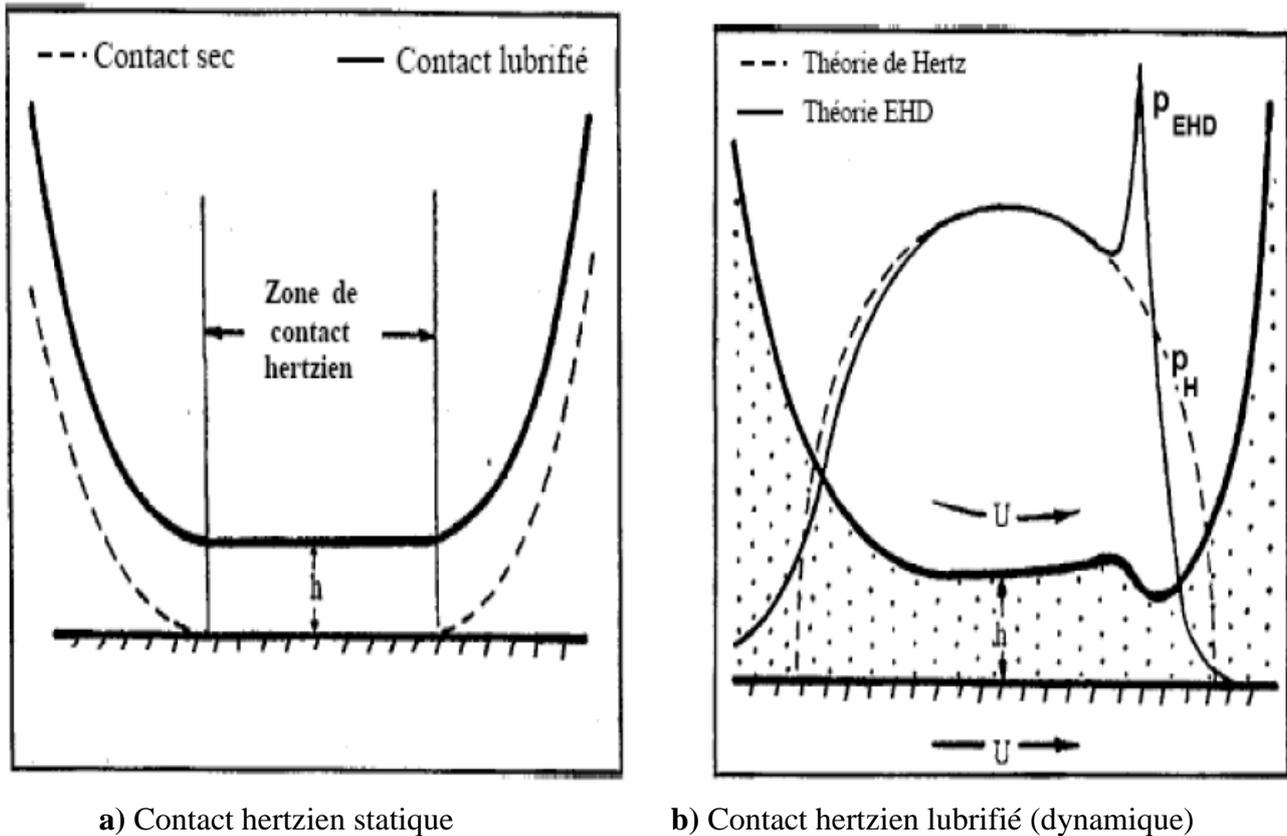


Fig. I. 6 : Répartition des pressions dans un contact hertzien

I.5 Les organes de supportage

L'objet essentiel de ce paragraphe est de présenter les différents supports utilisés pour le guidage des lignes d'arbres de machines tournantes. Le choix d'un type de support est une décision qui doit être prise dans la première phase du processus de conception. Le palier est un support ou guide qui détermine la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme.

Dans la pratique, les principaux supports sont :

- paliers de roulements,
- paliers secs,
- paliers poreux,
- paliers magnétiques,
- paliers et butées fluides (hydrodynamique, hydrostatique et hybride).



Nous avons jugé utile de présenter dans la première partie de ce chapitre, une description des différents régimes de lubrification rencontrés dans les différents systèmes lubrifiés.

I.5.1 Différentes classes de paliers

I.5.1.1 Paliers de roulements

Dans un palier à roulements le glissement de l'arbre sur le coussinet est remplacé par le roulement de corps intermédiaires (billes, rouleaux et aiguilles).

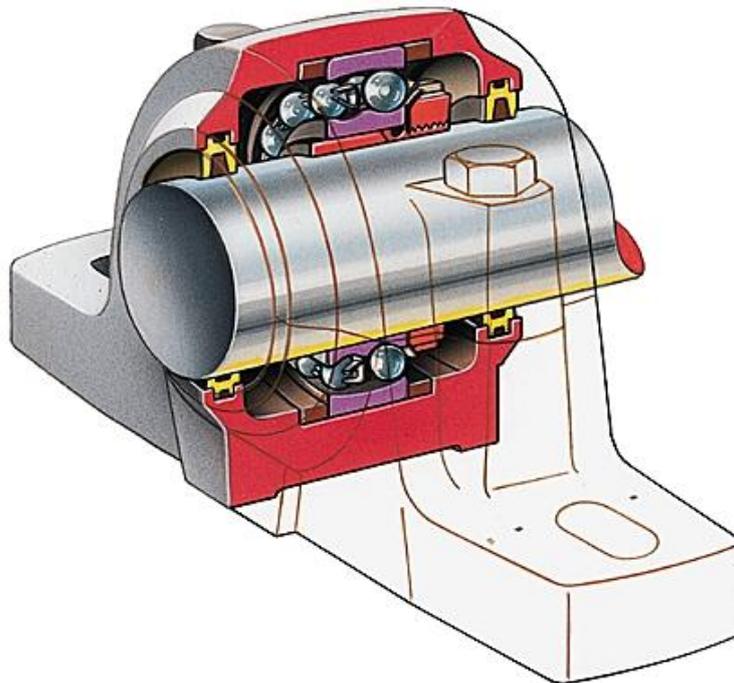


Fig. I. 7 : Palier à roulement

Ils supportent de plus fortes charges tout en réduisant l'usure et le frottement à cause de leur coefficient de frottement très faible au démarrage. Les avantages et inconvénients des paliers à roulements sont:

a) Avantages

- Installation simple et facile à remplacer,
- Durée de vie plus grande,
- Possibilité de graissage à vie,
- Possibilité de supporter des charges combinées,
- Faible coût,
- Supportent mieux les interruptions temporaires de lubrification,
- Assurent un meilleur alignement radial et axial,
- Pas de phénomène de fouettement (whirl),
- présentent un faible couple au démarrage même à basse température.



b) Inconvénients:

- Problèmes de fatigue plus importants,
- Faible capacité d'amortissement,
- Encombrement radial important,
- Générateur de bruits,
- Fréquence de rotation limitée,
- Diamètre nominal limité.

I.5.1.2 Paliers secs

Ces paliers sont généralement constitués d'une matrice (résine, métal, carbone) imprégnée de graphite. Ils sont utilisés sans apport extérieur de lubrifiant. Le frottement à sec est particulièrement dangereux pour les organes qui y sont soumis. Le dégagement de chaleur peut provoquer une amorce de fusion entre les surfaces en contact et aboutir au grippage. Ils ne sont utilisés que pour des systèmes fonctionnant rarement ou à vitesse réduite et faible charge, et doivent être envisagés dans toute application où la présence et le maintien du film lubrifiant est impossible (vide spatial, par exemple).

I.5.1.3 Paliers poreux

Les paliers à coussinets poreux sont dits auto-lubrifiants car c'est le coussinet imbibé d'huile qui joue le rôle de réservoir de lubrifiant. La couche auto-lubrifiée est constituée par une poudre frittée à haute température (bronze, fer, cuivre). Ces paliers comportent des pores remplis d'huile avec un volume qui représente de 16 à 36% du volume total. Dans un palier poreux, l'huile circule d'une part dans le jeu, circonférentiellement et axialement, et d'autre part dans le coussinet, de la zone de pression élevée vers la zone de basse pression (figure I.8). L'huile filtre au travers de la surface interne du coussinet, du film vers le coussinet dans la zone de pression élevée, du coussinet vers le film dans la zone de pression basse. L'utilisation de ces paliers est limitée par la température de fonctionnement.

Les avantages et les inconvénients de ce type de palier sont :

a) Avantages :

- L'absence de l'alimentation du lubrifiant permet d'avoir un montage simple,
- Faible coût de fabrication du coussinet.

b) Inconvénients:

- Ils ne supportent pas les grandes vitesses et les grandes charges,
- Un couple de démarrage faible,
- Ils nécessitent un grand couple au démarrage à des basses températures.



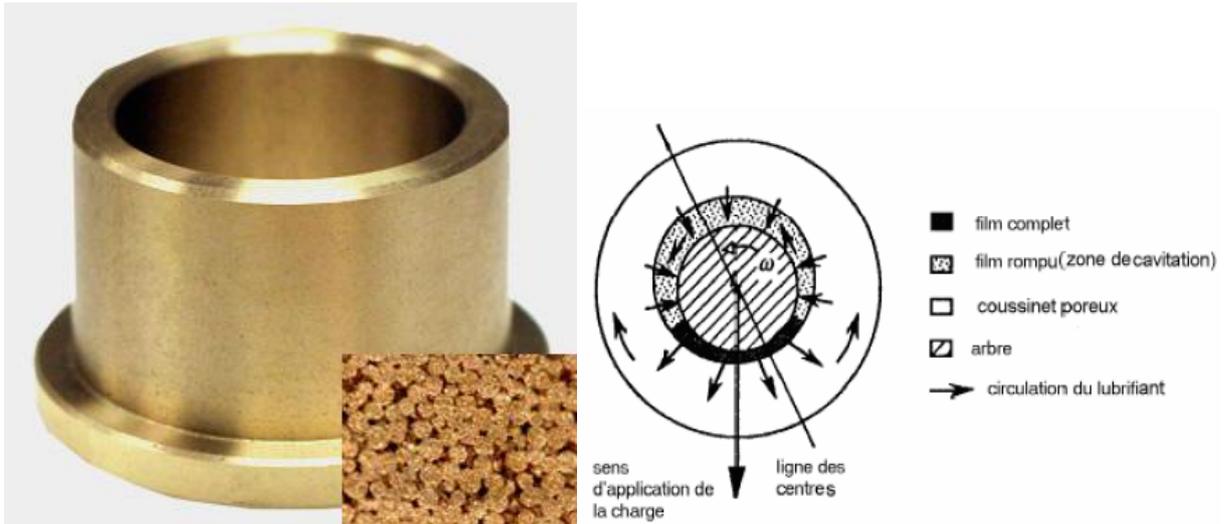


Fig. I. 8: Photographie d'un palier poreux et Coupe schématique d'un palier poreux

I.5.1.4 Paliers magnétiques

Les paliers magnétiques permettent de supprimer tout contact entre un arbre et un bâti, d'éliminer les lubrifiants et tous les problèmes de frottement. Ces paliers ont une très grande précision de guidage. Ils peuvent fonctionner dans le vide et sont utilisables dans une large gamme de températures (-200°C à 450°C) avec une dissipation d'énergie mécanique pratiquement nulle (figure I.9). Les principaux paliers magnétiques sont :

- Le palier magnétique passif

Ce palier est réalisé à partir d'aimants permanents ou d'électroaimants à courant d'excitation constante en utilisant soit les forces de répulsion, soit les forces d'alignement.

- Le palier magnétique actif

Ce palier travaille toujours en attraction avec des électroaimants à excitation variable commandée par des détecteurs de déplacement.





Fig. I. 9 photographie d'un palier magnétique

I.6 Paliers fluides ou paliers à film d'huile

Dans la pratique, il existe deux grandes classes de paliers fluides :

- les paliers hydrodynamiques où la portance résulte de la géométrie du film lubrifiant et de la cinématique des surfaces
- les paliers hydrostatiques où la portance est principalement due à l'existence d'une source extérieure de fluide sous pression.

I.6.1 Paliers hydrodynamiques

Dans ce cas, un fluide visqueux sépare totalement les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou un gaz compressible. La pression dans le film est créée par le déplacement relatif des surfaces et la géométrie du contact.

Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales, pour le guidage des rotors de dimensions importantes. Ces paliers sont conçus pour fonctionner dans des conditions sévères (charges et fréquences de rotations élevées). Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus.

Il existe deux types de configuration de paliers hydrodynamiques :

- Paliers à géométrie fixe;
- Paliers à géométrie variable.



I.6.1.1 Paliers à géométrie fixe :

A.1 Paliers lisses cylindriques

Les paliers lisses sont fréquemment utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet complet (amplitude angulaire 360°). Ces deux éléments sont totalement séparés par un film lubrifiant (figure I.10). Dans certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs,etc.



Fig. I.10 : Palier lisse cylindrique

Caractéristiques géométriques

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre de rayon a R et le coussinet de rayon c R et de longueur L (figure I.11). Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs

- Le jeu radial ($C = R_c - R_a$)
- Le jeu relatif (C/R) est de l'ordre de 0.001,
- Le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier.



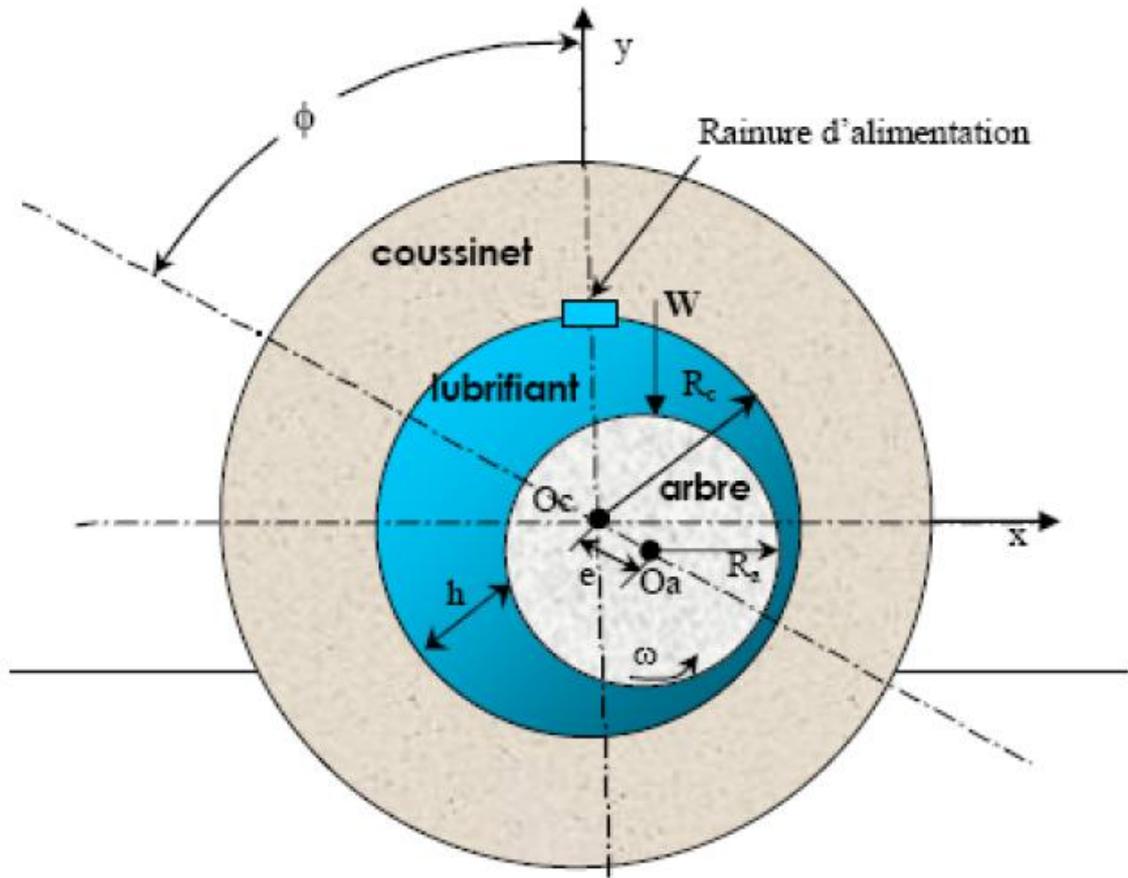


Fig. I.11 : Section droite d'un palier lisse

Phases de travail d'un palier lisse :

Lors de la mise en route sous charge d'un palier, on observe les trois phases représentées dans (la figure I.12). Les points O_1 et O_2 représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet, tandis que \vec{F} désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre. A l'arrêt, l'arbre et le coussinet sont en contact. La génératrice commune est opposée à la charge et la distance $O_1 O_2$ est égale au jeu radial C (figure I.12 (a)). Au démarrage l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet et le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (figure I.12(c)).



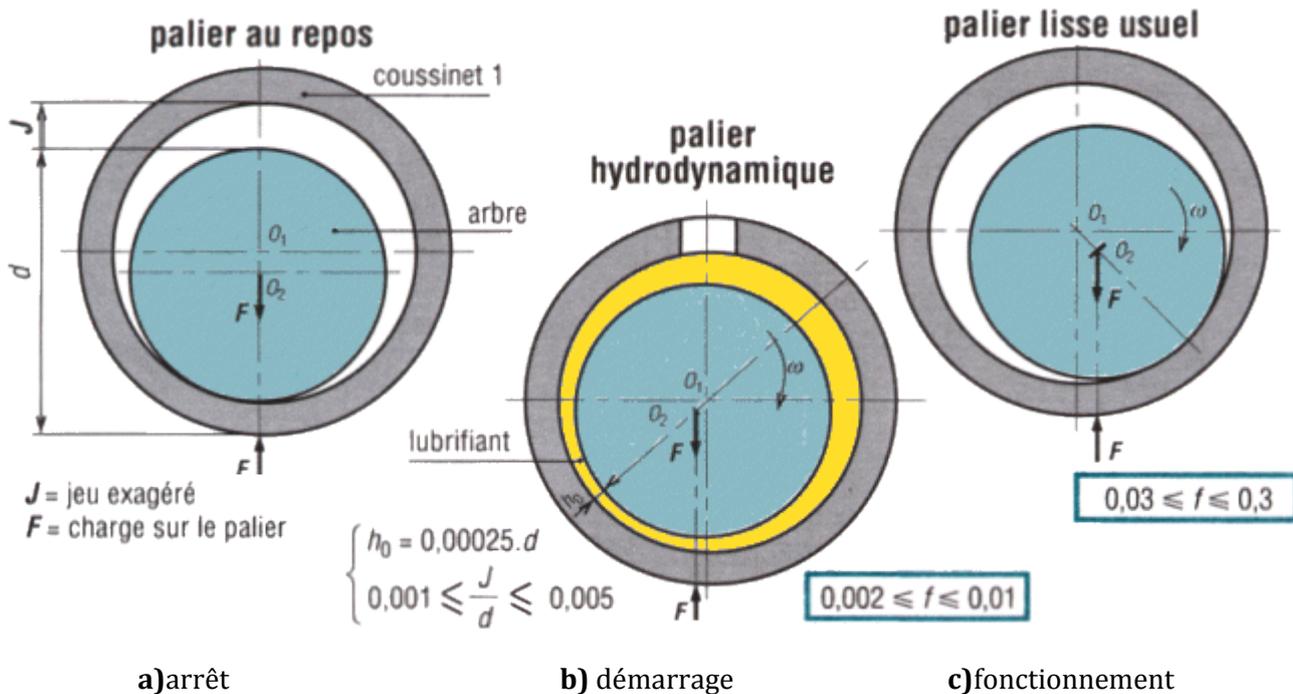


Fig. I. 12 : Phases de travail d'un palier lisse

Pour une vitesse de rotation stable et une charge \vec{F} constante, le centre de l'arbre occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet appelée point de fonctionnement. Si le torseur des forces se réduit à une force unique \vec{F} qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles.

Deux paramètres sont alors nécessaires pour positionner O_1 par rapport à O_2 :

- La distance $e = |\overline{O_1 O_2}|$ appelée excentricité,
- L'angle φ que fait la direction de la charge \vec{F} avec la ligne des centres $\overline{O_1 O_2}$ appelés angle de calage.

A.2 Palier à arc partiel

Le calcul de ce type de palier est similaire à celui d'un palier circulaire complet, la pression d'entrée du palier est imposée. (La figure I.15) représente la section droite d'un palier à arc partiel, O_1 et O indiquent respectivement le centre de l'arbre et le centre géométrique du palier.

O représente aussi dans ce cas le centre de courbure de l'arc partiel ou du lobe. Comme pour le palier lisse, deux paramètres sont nécessaires pour repérer le centre de l'arbre O_1 vis-à-vis du centre de coussinet O qui sont e et φ .

Le début du lobe est repéré par l'angle α_1 , et sa fin par l'angle $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$ où β représente l'amplitude circonférentielle de l'arc. Les paliers lisses cylindriques ou à arc partiel faiblement chargés à vitesse élevée présentent de grands risques d'instabilités. L'idée d'améliorer la stabilité du palier en modifiant son profil de manière à augmenter l'excentricité de fonctionnement, c'est-à-dire du préchargé, date des années 1934. En



effet, Newkirk et Grobel [11] ont vérifié expérimentalement que l'existence d'une discontinuité dans la géométrie à la surface du coussinet pouvait améliorer la stabilité du palier.

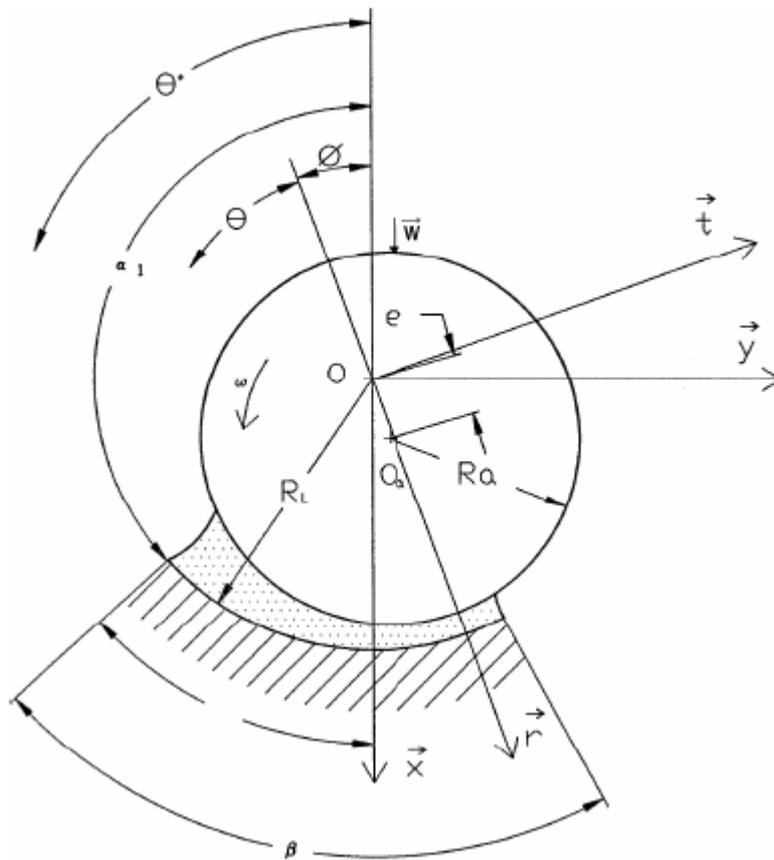


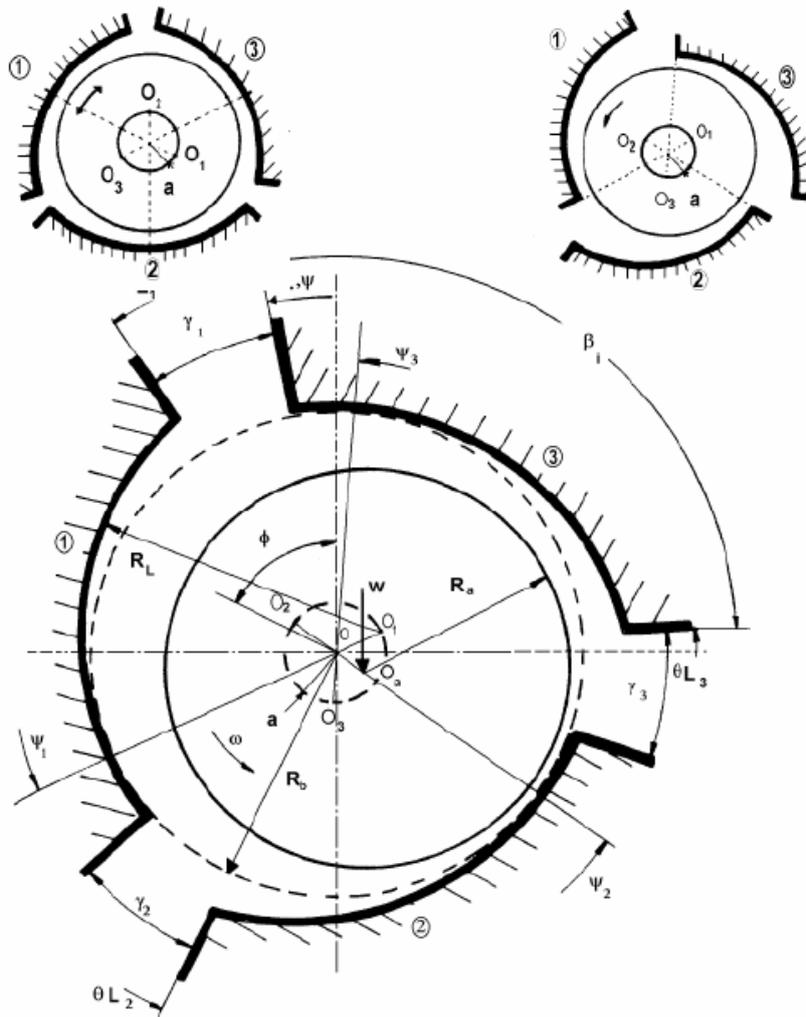
Fig. I.13 : Schématisation d'un palier à arc partiel

A. 3 Paliers multilobes

La figure I.13 représente un palier à trois lobes pour deux conditions de fonctionnement différentes : positions centrée (figures I.14 (a) et I.14 (b)) et excentrée (figure I.14 (c)). Le coussinet est constitué de trois lobes d'amplitude circonférentielle β_i de longueur axiale L , de rayon de courbure R_L et de centre de courbure O_i . Les centres de courbure O_i des lobes sont situés sur un cercle de rayon a et de centre O , centre géométrique du palier. Le palier est dit préchargé géométriquement d'une valeur a . Le rôle de ce préchargé géométrique apparaît clairement sur (les figures I.14 (a) et I.14 (b)) en position centrée.

Il existe toujours une suite d'espaces convergent-divergents répartis autour de l'arbre, ce qui entraîne une succession de coins d'huile qui vont opposer une certaine résistance à tout déplacement du centre de l'arbre. L'arbre étant en position centrée, on définit deux types de paliers à lobe selon le lieu de la ligne des centres O_i O vis-à-vis des lobes. Si cette ligne des centres est l'axe de symétrie du lobe, le palier est dit à lobes symétriques (figure I.14 (a)), dans le cas contraire il est dit à lobes asymétriques (figure I.14 (b)).





a) Lobes symétriques (palier centré) b) Lobes asymétriques (palier centré) c) Cas général : Palier excentré

Fig. I. 14 : Schématisation d'un palier à trois lobes

Caractéristiques géométriques :

La caractérisation géométrique d'un palier à lobes impose la définition des grandeurs suivantes (figure I.16 (c)) :

- Le nombre de lobes n ,
- Les amplitudes circonférentielle β_i et axiale L des lobes,
- Les rayons de courbure des lobes R_L , de l'arbre R_a et du cercle inscrit au coussinet R_b ,
- La préchargé géométrique a qui correspond à la distance entre le centre géométrique du palier et le centre de courbure du lobe,



- La position des lobes vis-à-vis d'une direction fixe arbitraire (\overline{Ox}) (direction de la charge, par exemple) caractérisée par les coordonnées θ_{L_i} et ψ_i où θ_{L_i} positionne le début du lobe (i) et ψ_i repère sa ligne des centres en position centrée $O_i O$,
- L'amplitude circonférentielle γ_i (et éventuellement axiale) des rainures de découplages.

La connaissance de ces grandeurs permet de définir:

- Le jeu radial d'usinage : $C_L = R_L - R_a$,
- Le jeu radial d'assemblage : $C_b = R_b - R_a$,
- Le coefficient de précharge géométrique : $m = a/C_L$
- Les coefficients d'asymétrie $\alpha_i = (\psi_i - \theta_{L_i}) / \beta_i$ qui caractérisent le rapport de l'amplitude de la région convergente à celle du lobe.

Si $m = 0$, le palier n'est pas préchargé, c'est un palier circulaire à n rainures axiales, tandis que la valeur $m=1$ représente le cas limite où il y a contact permanent entre l'arbre et chacun des lobes.

Si $\alpha_i = 0.5$, le lobe est symétrique.

Si $\alpha_i = 1$, toute la région est convergente.

Cartes de stabilité :

Les cartes de stabilité des différents paliers à géométrie fixe sont représentées sur la (figure I.17).

Pour des faibles excentricités de fonctionnement, c'est-à-dire aux faibles charges et aux grandes vitesses de rotation, le palier à deux lobes asymétriques ($\alpha = 1$) est le plus stable. La précharge géométrique m a un effet stabilisant. Dans le cas des charges modérées ($S \rightarrow \infty$), le palier à deux lobes décalés est moins stable que le palier à trois lobes décalés.

On remarque qu'il n'y a pas de type de palier à stabilité optimale quelles que soient les conditions de fonctionnement. Cependant le comportement du palier à trois lobes décalés ($\alpha = 1$) est remarquablement stable quelque soit le nombre de Sommerfeld (S) surtout vis-à-vis du palier circulaire classique qui est le palier le moins stable (courbe en trait discontinu).

On peut conclure que les paliers à lobes sont plus stables que les paliers cylindriques ou circulaires. L'effet stabilisant est dû à l'existence de la précharge géométrique et de l'asymétrie des lobes à faibles charges.



- Le rayon de l'arbre R_a ,
- Le rayon de cercle des pivots R_b ,
- L'amplitude angulaire β , la largeur L , le rayon de courbure R_p , la masse équivalente de chaque patin ($M = IR_p$) où I est le moment d'inertie du patin par rapport à son pivot,
- La position des pivots ψ_i ,
- Le jeu d'usinage du patin $C_p = R_p - R_a$
- Le rapport α/β qui définit la position angulaire du pivot,
- La distance a qui sépare le centre géométrique du palier du centre de courbure du patin,
- Le coefficient de précharge géométrique $m = a / C_p$.

Sous charge nulle, les centres de l'arbre O_a et du palier O sont confondus (figure I.17 (a)). Si le coefficient de précharge géométrique m est nul, il n'y a pas de génération de pression hydrodynamique. Les patins sont alors en position d'équilibre. Il y a alors un risque de contact entre l'extrémité du patin et l'arbre. Par contre, lorsque le coefficient de précharge géométrique m est différent de zéro, tous les patins sont hydrodynamiquement chargés.



Fig. I.16: Photographie d'un palier à patins oscillants

Le paramètre de précharge géométrique est donc très important puisqu'il assure, comme dans le cas des paliers à géométrie fixe, une bonne rigidité du système sous charge nulle. Lorsque le palier est chargé, l'arbre est excentré (figure I.17 (b)). Les patins quant à eux tournent autour de leurs pivots. Ils occupent alors une position d'équilibre statique telle que l'action hydrodynamique exercée sur chaque patin passe par son pivot et



que la résultante de toutes les forces F_r soit égale et opposée à la charge statique extérieure \vec{W}_0 supportée par le palier.

En régime dynamique, les patins peuvent suivre le mouvement de l'arbre, ce qui est à l'origine du palier.

Stabilité d'un palier à patins oscillants :

Les résultats présentés sur la figure (I.18) dans le cas d'une précharge géométrique $m=0.5$ montrent l'évolution de la masse critique adimensionnée M_c du rotor et de la fréquence de fouettement γ_c en fonction du nombre de Sommerfeld S et ce pour différentes valeurs de la masse équivalente adimensionnée M_p du patin.

Il existe deux régions où la stabilité du palier est infinie.

La zone instable correspond au cas où la masse équivalente critique du patin P_m est voisine de la masse équivalente critique du patin M_{pc} qui est elle même fonction de la fréquence de fouettement γ_c et du nombre de Sommerfeld.

On observe les mêmes tendances que dans le cas du palier non chargé, c'est-à-dire

- Le palier devient infiniment stable lorsque la masse équivalente du patin est faible,
- La frontière de stabilité tend vers celle correspondant à un palier à lobes fixes lorsque la masse équivalente devient très grande,
- La fréquence de fouettement γ_c est voisine de $\frac{1}{2}$

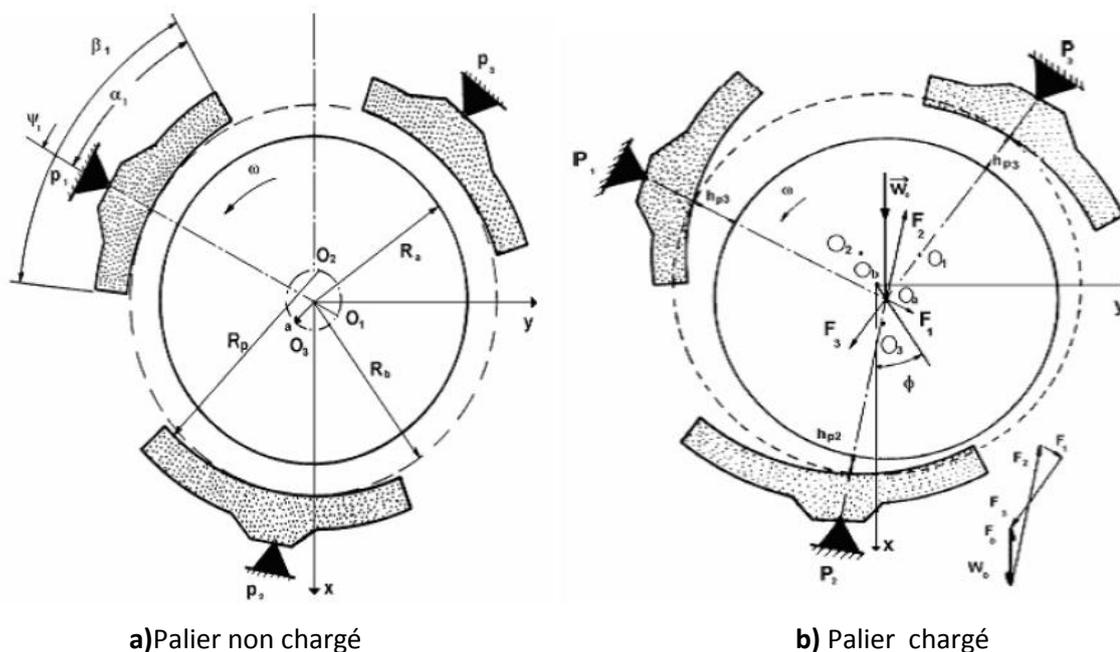


Fig. I. 17 : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants



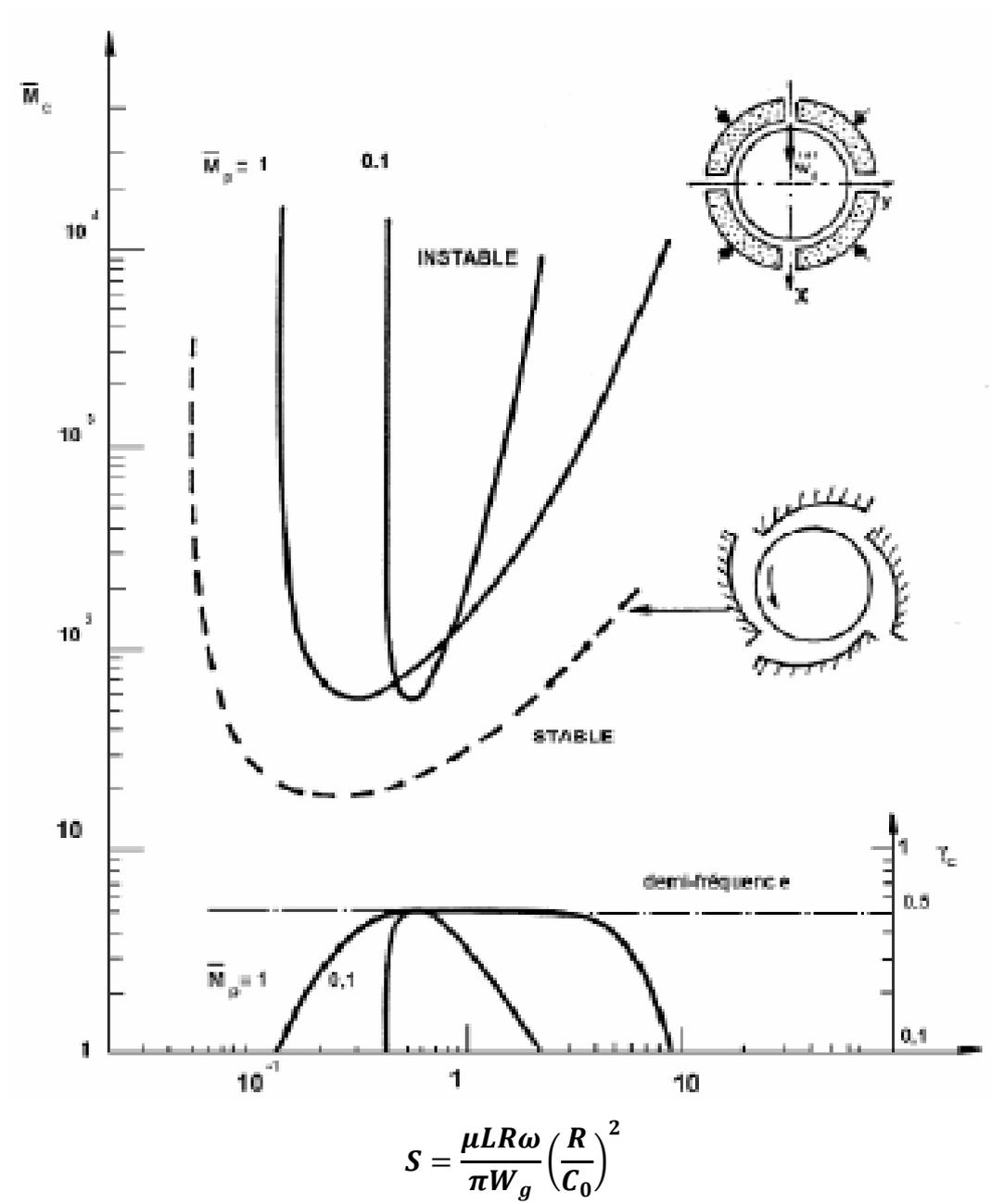
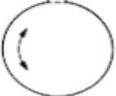
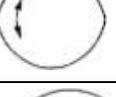
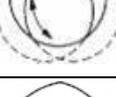
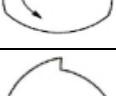
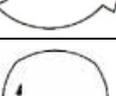
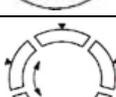
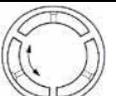


Fig. I. 18 : Comparaison des cartes de stabilité d'un palier à quatre lobes asymétriques et d'un palier à quatre patins oscillants (palier chargé, $m=1/2$, $\alpha/\beta = 1/2$, $L/D = 1$)

Tableaux 1 : Comparaison de différents types de palier [12]

Type de palier	Configuration géométrique	Capacité de charge	Rigidité	Amortissement	Stabilité	Aptitude à supporter une charge tournante	Réalisation	Remarques
Palier circulaire avec rainure axiale		élevée	faible	faible	mauvaise	mauvaise	simple	plusieurs rainures peuvent exister. Instable à faible charge
Palier circulaire avec rainure circonférentielle		moyenne	faible	Faible	mauvaise	bonne	simple	idéal pour les charges dynamiques
Palier à poches (Pocket bearing)		moyenne	très moyenne	moyen	moyenne	mauvais	e assez simple	
Palier à saut (step bearing)		élevée	très moyenne	très moyen	moyenne	mauvaise	assez simple	plusieurs sauts peuvent exister
Palier à deux lobes (citron)		assez élevée	moyenne	très moyen	moyenne	mauvaise	simple	très faible rigidité dans la direction horizontale
Palier à deux lobes décalés (offset halves)		assez élevée	élevée	Elevé	très bonne	à faible charge mauvaise	assez simple	
Palier cylindrique composé (camella bearing)		moyenne	élevé	élevée	bonne	bonne	simple	
Palier à trois lobes symétriques		moyenne	élevée	Elevé	bonne	mauvaise	Moyennement difficile	
Palier à trois lobes asymétriques (tilted lobes)		assez élevée	très élevée	très élevé	très bonne	mauvaise	difficile	
Palier à quatre lobes symétriques		faible	élevée	élevé	bonne	mauvaise	Moyennement difficile	
Palier à patins oscillants		assez élevée	élevée	élevé	excellente	mauvaise	difficile	risque de détérioration des pivots à charges dynamiques
Palier à pivots hydrostatiques		assez élevée	élevée	très élevé	excellente	moyenne Rateau	difficile	de conception très récente Mechanical Technology Incorporated



Chapitre II

Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluides newtonien et non newtonien

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les équations de base gouvernant le problème de la lubrification hydrodynamique dans le cas d'un palier lisse fonctionnant en régime isotherme. Après avoir rappelé les lois fondamentales de la MMC, nous dérivons l'équation de base de la lubrification hydrodynamique appelée équation de Reynolds classique à partir d'une analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide incompressible et newtonien. Nous présentons ensuite une autre forme de l'équation de Reynolds appelée équation de Reynolds modifiée pour prendre en considération à la fois les couples de contrainte et le phénomène de la turbulence.

II.2 Rappel des lois fondamentales de la MMC

L'application de la loi de Newton du mouvement à un élément fluide infinitésimal satisfaisant l'hypothèse du continuum [13] aboutit à l'équation de mouvement de Cauchy,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} \quad (\text{II.1})$$

où la dérivée matérielle, $\frac{Du_i}{Dt}$, comprend les termes suivants [14],

$$\underbrace{\frac{Du_i}{Dt}}_{\text{Partie totale}} = \underbrace{u_1 \frac{\partial u_i}{\partial X_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial X_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial X_3}}_{\text{Partie convective}} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{Partie instationnaire}} \quad (\text{II.2})$$

Partie totale

Partie convective

Partie instationnaire

ρ : Masse volumique du fluide

$\{V\} \equiv \mathbf{V} = \{U_1, U_2, U_3\}^t$: Vecteur vitesse de la particule fluide,

$\{f\} \equiv \mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}^t$: Vecteur des forces de volume,

$[\tau]$: Tenseur des contraintes de Cauchy,



$\{X\} = \{X_1, X_2, X_3\}^t$: Système de coordonnées spatiales dans la configuration actuelle de l'élément fluide.

La partie instationnaire correspond à l'accélération locale d'une particule fluide et est nulle pour des écoulements en régime permanent. L'accélération convective représente le changement de vitesse résultant du transport de la particule d'un emplacement à un autre où la vitesse est différente.

Pour un fluide dit newtonien, l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les Contraintes et le taux de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijmn}D_{mn} \quad (\text{II.3})$$

$$i, j, m, n = 1, 2, 3$$

Le terme $-p\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, correspond à la partie sphérique des contraintes.

Dans le cas d'un fluide compressible (gaz), la grandeur p est approchée par la pression thermodynamique, laquelle est liée à la masse volumique ρ et à la température T par une équation d'état de la forme $f(p, \rho, T) = 0$. Bien que des quantités thermodynamiques ne soient définies que pour des états d'équilibre, ce qui n'est pas obligatoirement le cas d'un fluide en mouvement, les erreurs dues à cette approximation sont négligeables, pourvu que le temps de relaxation des molécules du fluide soit faible devant l'échelle temporelle de l'écoulement [15].

Dans la partie anisotropique, $[\tau]$, du tenseur de Cauchy, on identifie le tenseur taux de déformation:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (\text{II.4})$$

Puisque $[\tau]$ est un tenseur symétrique, K_{ijmn} doit l'être également. Si l'on suppose en plus que le milieu est isotopique, on démontre que deux termes seulement de K_{ijmn} sont non nuls et que l'équation constitutive peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} \quad (\text{II.5})$$



Où μ et λ sont deux constantes scalaires appelées les coefficients de Navier, et

$D_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u_m}{\partial X_m}$ est le taux de déformation volumétrique.

En définissant la pression moyenne, $-\bar{p}$, comme la moyenne des termes diagonaux de $[\sigma]$, lorsque l'on pose $i = j$, la somme sur les indices répétés de [2.5] fournit :

$$p - \bar{p} = \kappa \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (\text{II.6})$$

Où $\kappa = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)$ est une constante de proportionnalité appelée coefficient de viscosité volumique. Dans la majorité des problèmes de la mécanique des fluides, l'hypothèse de Stokes,

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0 \quad (\text{II.7})$$

s'avère correcte [14]. L'équation constitutive d'un fluide newtonien (II.5) devient donc :

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V}\right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II.8})$$

Où la constante μ est appelée la viscosité dynamique du fluide.

En reportant l'équation constitutive d'un fluide newtonien (II.8) dans l'équation de mouvement de Cauchy (II.1), on obtient l'équation vectorielle de Navier-Stokes dont la i ème composante s'écrit :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.9})$$

Bien que la viscosité soit une fonction de la pression et de la température qui caractérisent l'état thermodynamique du fluide, dans la théorie classique de la lubrification, cette propriété est supposée constante. Sous cette hypothèse, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \quad (\text{II.10})$$

Où $\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_3^2}$ est le laplacien de u_i .



Pour des fluides incompressibles, le taux de déformation volumétrique ou le taux de dilatation cubique, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, est nul. Si l'on suppose encore que le vecteur des forces de volume, \mathbf{f} , est négligeable, l'équation précédente se ramène à :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial X_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (\text{II.11})$$

L'écoulement d'un fluide newtonien, incompressible et isovisqueux est entièrement décrit par l'équation de Navier-Stokes simplifiée, équation (II.11), et par l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \xrightarrow{\text{incompr.}} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Les équations (II.11) et (II.12) peuvent être simplifiées davantage pour le cas d'un palier hydrodynamique, au travers d'une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, nous adopterons le système de repérage de (la figure II.1), qui présente une vue en coupe du palier. Afin d'uniformiser notre notation par rapport à celle communément utilisée dans la littérature scientifique, nous désignerons désormais $\{V_1, V_2, V_3\} = \{u, v, w\}$ et $\{X_1, X_2, X_3\} = \{x, y, z\}$. Selon la référence [16], on définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\hat{x} = \frac{x}{R}; \hat{y} = \frac{y}{C}; \hat{z} = \frac{z}{R}; \hat{u} = \frac{u}{V_c}; \hat{v} = \frac{v R}{V_c C}; \hat{\omega} = \frac{\omega}{V_c}; \hat{p} = Re \frac{C}{R} \frac{p}{\rho V_c^2}; \hat{t} = \omega t$$

Où

R: rayon du palier,

C: jeu radial du palier,

V_c : vitesse caractéristique du système,

$Re = \frac{\rho V_c C}{\mu}$: nombre de Reynolds moyen,

ω : vitesse angulaire de l'arbre.



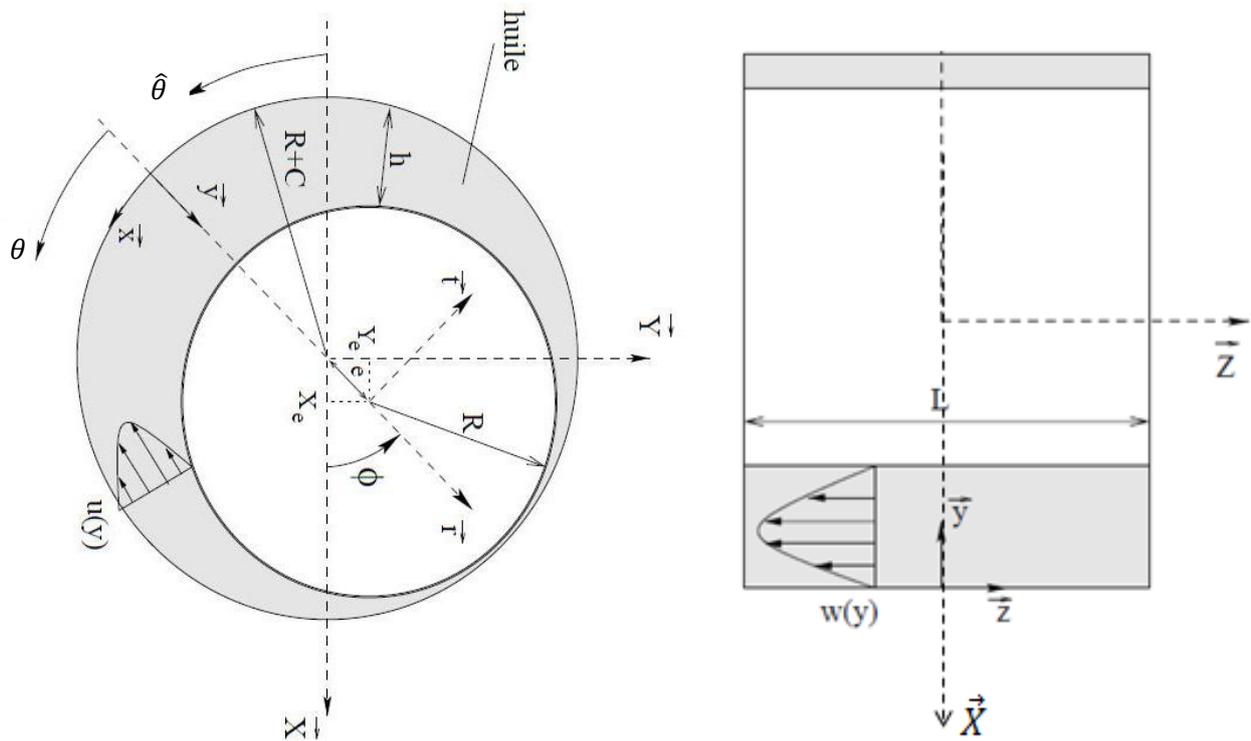


Fig. II.1 : Géométrie et système de repérage d'un palier lisse

Il convient de préciser que la vitesse caractéristique du système est $V_c = \omega R$.

L'introduction des variables adimensionnelles dans l'équation de Navier-Stokes (II.11) conduit à [16]:

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{c}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{u}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

$$\left(\frac{C}{R}\right)^2 \left[\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{c}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{v}) - \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} - \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2}\right) \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{c}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{w}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}\right) + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2}$$



Dans le cas des paliers hydrodynamiques, le rapport $\frac{c}{R}$ est de l'ordre de 10^{-3} [17]. Cela permet, en supposant que toutes les quantités des équations ci-dessus sont de l'ordre de l'unité, de tronquer tous les termes multipliés par $\left(\frac{c}{R}\right)^2$:

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{u}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{c}{R} (\hat{\mathbf{V}} \cdot \nabla \hat{w}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2}$$

Dans la théorie classique de la lubrification, les termes d'inertie sont considérés comme négligeables. Pour $\frac{c}{R} \rightarrow 0$, on conclut à la lumière de l'équation (II.14), que cette approximation est raisonnable si l'on admet que $\omega = O(V_{C/R})$ et que Re est borné [16]. Dans ce cas, en reprenant l'utilisation des variables dimensionnelles, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (\text{II.17})$$

h étant l'épaisseur du film d'huile illustrée dans (la figure II.1), la double intégration des équations (II.15) et (II.17) suivant y , avec les conditions aux limites,

$$u(x, h, z) = U_2 \quad w(x, h, z) = W_2 \quad \text{en} \quad y = h \quad (\text{II.18})$$

$$u(x, 0, z) = U_1 \quad w(x, 0, z) = W_1 \quad \text{en} \quad y = 0$$

fournit les profils de vitesse classiques de la lubrification [18] :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (U_2 - U_1) + U_1 \quad (\text{II.19})$$

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (W_2 - W_1) + W_1$$

On identifie dans ces expressions l'écoulement dû à l'effet de Poiseuille, induit par les différentiels de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$, et l'écoulement dû à l'effet de Couette, associé aux vitesses U_1 , U_2 , W_1 et W_2 des surfaces.



En intégrant l'équation de continuité (II.12) suivant y , après l'introduction des profils de vitesse (II.19), on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \mu \left[\frac{(U_1 - U_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_1 - W_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + v \Big|_{y=0}^{y=h} \right] \quad (\text{II.20})$$

Sachant que :

$$v \Big|_{y=0}^{y=h} = V_2 - V_1 = \frac{dh}{dt} - 0 = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{II.21})$$

Compte tenu de l'équation (II.21), l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \mu \left[\frac{(U_2 + U_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_2 + W_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (\text{II.22a})$$

Qui peut s'écrire aussi sous une forme plus compacte :

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) = 12 \mu [\nabla \cdot h \mathbf{U}] \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_2 + U_1 \\ W_2 + W_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22b})$$

Ce qui correspond à l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible newtonien et isovisqueux. Il est intéressant de remarquer que la suppression des effets d'inertie rend le problème stationnaire d'un point de vue hydrodynamique.

Une forme plus générale de l'équation de Reynolds peut être obtenue si l'on revient sur les hypothèses d'incompressibilité et d'isoviscosité faites auparavant [6] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \left[\frac{(U_2 + U_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{(W_2 + W_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right] \quad (\text{II.23})$$

Dans le cas d'un SFDB, l'équation (II.23) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

Pour un palier cylindrique indéformable, délimité par des surfaces rigides et aligné, c'est à dire dont l'axe est parallèle à celui de l'arbre, l'épaisseur h du film d'huile s'écrit :

$$h = C + X \cos \theta + Y \sin \theta \quad (\text{II.25})$$

Cependant, la déflexion de la structure, notamment dans des rotors montés en porte-à-faux, peut rendre l'épaisseur du film fonction de la coordonnée axiale, z , également [19]. L'effet du mésalignement devient plus important lorsque le balourd, l'amplitude de l'orbite et le rapport de la longueur, L , sur le



jeu radial, C , du palier augmentent [19]. Le mésalignement peut engendrer une élévation des efforts transmis au bâti, les forces hydrodynamiques calculées par le modèle de palier aligné étant dans ce cas sous-estimées [19].

Pour un fluide incompressible et isovisqueux, en négligeant pour l'instant le phénomène de cavitation, l'équation de Reynolds donnée par l'expression (II.23) ou (II.24) est linéaire. Elle ne possède tout de même pas de solutions analytiques. Par conséquent, le calcul du champ de pression doit s'effectuer soit en faisant des hypothèses supplémentaires afin de la simplifier soit à l'aide de méthodes semi-analytiques ou numériques. Les simplifications les plus courantes s'appuient sur les approximations palier court et palier long pour lesquels l'écoulement est unidimensionnel (1-D). Elles consistent à négliger l'écoulement du fluide dans les directions circonférentielle et axiale, respectivement, de manière à réduire le nombre de variables indépendantes du problème. Il est important de souligner que ces approximations peuvent s'appliquer directement à l'équation de Navier-Stokes simplifiée (II.15-II.17). Lorsque le palier n'est ni long ni court, il est dit de longueur finie. La méthode de résolution de l'équation de Reynolds utilisée sera exposée en détails dans le troisième chapitre.

La validité de l'équation de Reynolds (II.23) ou (II.24) est restreinte aux hypothèses explicitées plus haut. Cependant, il existe des paliers auxquels ces hypothèses, ou une partie d'entre elles, ne s'appliquent pas. Ainsi, nous présentons ci-après d'autres formulations de l'équation de Reynolds dans le cas des fluides non newtoniens en écoulement non laminaire.

II.3 Equation de Reynolds modifiée

II.3.1 Fluides non newtoniens

L'hypothèse que le fluide est newtonien peut être mise en défaut dans le cas de quelques lubrifiants modernes auxquels sont ajoutés des chaînes de polymères afin d'améliorer leurs propriétés sous différentes conditions d'opération [20-22]. Le comportement non linéaire qui en résulte change sensiblement les caractéristiques du fluide, d'où la nécessité de théories tenant compte des effets non newtoniens en l'occurrence les effets de la présence de couple de contrainte.

Outre la non linéarité engendrée par l'ajout d'additifs, des fluides ayant un comportement non newtonien peuvent être utilisés à dessein comme des fluides intelligents. Il est le cas des fluides électro-rhéologiques, dont les propriétés changent lors de l'application d'un champ électrique. Cette caractéristique permet l'utilisation du palier en tant qu'un amortisseur actif, ce qui explique l'intérêt porté sur ce type de fluide.



II.3.1.1 Fluide à couples de contraintes

Dans la dérivation de l'équation de mouvement de Cauchy (II.1), les efforts extérieurs exercés sur l'élément fluide sont schématisés, suivant le postulat de Cauchy [23], par une répartition surfacique de forces. Lors de l'application de la loi de Newton, la densité de forces massiques est également prise en compte. Une schématisation différente fondée sur la théorie du microcontinuum de Stokes permet d'introduire, outre les forces massiques et surfaciques, des couples de contraintes et des couples de volume. Pour un fluide incompressible, cela conduit à l'équation suivante [20] :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = f - \nabla p + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \psi) + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 \cdot V \quad (\text{II.26})$$

Où ψ est le vecteur densité de couple et η est une propriété constante du fluide associée aux couples de contraintes.

En négligeant le vecteur densité de couple et les forces de volume, l'application à l'équation (II.26) d'une procédure analogue à celle menée lors de la simplification de l'équation de Navier-Stokes fournit les profils de vitesse suivants :

$$u(x, y, z) = \underbrace{U_2 \frac{y}{h}}_{\text{terme de Couette}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\}}_{\text{terme de Poiseuille}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.27})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\}}_{\text{terme de Poiseuille}} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Ces profils de vitesse, lorsque reportés dans l'équation de continuité (II.12), conduisent à la déduction d'une équation de Reynolds modifiée donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[G(h, l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G(h, l) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.28})$$

Où : $U_2 = \omega R$, $G(h, l) = h^3 - 12hl^2 + 24 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$ et $l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$

II.3.2 Écoulements turbulents ou non laminaires

Si le nombre de Reynolds ou le nombre de Taylor de l'écoulement s'accroît davantage, l'écoulement peut perdre sa stabilité et devenir instable ou turbulent. C'est le cas des paliers ayant un jeu radial important, opérant avec un fluide de faible viscosité et incorporés dans des machines tournant à des vitesses élevée sont particulièrement susceptibles de développer des écoulements turbulents.



Les écoulements turbulents sont caractérisés par des fluctuations aléatoires, par la non linéarité, par l'importante diffusivité de moment et de chaleur, par la formation de vortex et par la forte capacité dissipative. L'écoulement turbulent instantané obéit toujours aux équations de Navier-Stokes, mais il est difficile, voire impossible, de prédire son évolution de manière précise [15]. Il est ainsi plus convenable de le décrire en utilisant la décomposition de Reynolds, selon laquelle les vitesses et la pression sont représentées par la somme des moyennes temporelles locales et des termes de fluctuation stochastique :

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{v}} \text{ ou } U_i = \bar{U}_i + v_i \quad ; \quad i = 1,2,3$$

$$p = \bar{p} + \hat{p} \tag{II.28}$$

avec,

$$\bar{V} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} V(t + \tau) d\tau \tag{II.29}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p(t + \tau) d\tau \tag{II.30}$$

où t_0 doit être compris entre deux échelles de temps distinctes, l'une associée aux fluctuations lentes de l'écoulement et l'autre à des variations très rapides de nature stochastique. Ce paramètre ne doit être ni trop grand, de manière à ce que la moyenne ne soit pas locale, ni trop faible, ce qui pénaliserait la précision des moyennes.

Sachant que la moyenne des termes aléatoires est nulle, en négligeant les forces massiques, l'équation du mouvement pour l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible et isovisqueux devient:

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \tag{II.31}$$

Avec l'équation constitutive donnée par :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{\hat{v}_i \hat{v}_j} \tag{II.32}$$

Où $\overline{\hat{v}_i \hat{v}_j}$ est la corrélation entre \hat{v}_i et \hat{v}_j . Par rapport à l'équation constitutive d'un fluide newtonien,

Équation (II.5), on constate l'existence de contraintes supplémentaires associées au terme $-\rho \overline{\hat{v}_i \hat{v}_j}$, qui correspond au tenseur de contraintes de Reynolds. Dans un écoulement turbulent, ces contraintes peuvent être considérablement plus importantes que celles relatives à la contribution visqueuse, à part au voisinage des parois, où les fluctuations sont plus faibles. Sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation de continuité s'écrit:



$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad ; i=1, 2, 3 \quad (\text{II.33})$$

pour le flux moyen et :

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad ; j=1, 2, 3 \quad (\text{II.34})$$

pour le champ turbulent.

L'équation (II.31) peut être simplifiée compte tenu des dimensions caractéristiques du palier. On obtient au travers d'une analyse dimensionnelle similaire à celle réalisée précédemment dans le cas laminaire :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{u}\hat{v}} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{v}\hat{w}} \right)$$

Il est important d'observer dans l'équation (II.35), que les effets d'inertie sont négligés devant les contraintes visqueuses et turbulentes. Pour des jeux radiaux plus importants néanmoins, en admettant que $\left(\frac{V}{\bar{v}}\right)^2 = O(C/R)$ et que $\left(\frac{C}{R}\right)^2 \rightarrow 0$, une forme alternative à l'équation (II.35) est obtenue :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{u}\hat{v}} \right) + \rho \frac{D\bar{u}}{Dt}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho \overline{\hat{v}\hat{w}} \right) + \rho \frac{D\bar{w}}{Dt}$$

L'inspection de cette équation conduit à la conclusion que les effets d'inertie ne peuvent pas être négligés dans un écoulement turbulent.

Les premières tentatives de modélisation d'écoulements turbulents dans le domaine de la lubrification utilisent l'équation (II.35) comme point de départ. Le noyau du problème concerne la définition des contraintes ou les tensions de Reynolds. NG et PAN [24] emploient le concept de viscosité turbulente de Boussinesq, selon lequel les contraintes de Reynolds s'écrivent [15] [13]:

$$-\overline{\hat{u}\hat{v}} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad -\overline{\hat{v}\hat{w}} = \mu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (\text{II.37})$$



où la viscosité turbulente μ_t n'est pas une propriété du fluide, mais une fonction des conditions de l'écoulement.

La description des contraintes turbulentes en fonction des vitesses moyennes de l'écoulement permet d'arriver, en partant de l'équation (II.35), à une forme modifiée de l'équation de Reynolds qui s'écrit [16] :

-Cas du SFDB

Equation de Reynolds classique :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.38a})$$

Equation de Reynolds modifiée :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(h,l)}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(h,l)}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.38b})$$

où les coefficients k_x et k_z dépendent des nombres de Reynolds locaux de Poiseuille, définis par $Re_{lx} = h\rho \frac{\bar{v}_x}{\mu}$ et $Re_{lz} = h\rho \frac{\bar{v}_z}{\mu}$. La limite inférieure $k_x = k_z = 12$ représentant le cas d'un écoulement laminaire, il en résulte qu'un SFDB en régime turbulent génère un champ de pression plus important et, par conséquent, des forces hydrodynamiques plus élevées [16]. L'allure des fonctions k_x et k_z doit être déterminée expérimentalement. Pour des écoulements avec $2000 < Re_l < 10^5$, CONSTANTINESCU [25] en déduit les expressions suivantes :

$$k_x = \frac{Re_{lx}^{0,681}}{6,8} \quad k_z = \frac{Re_{lz}^{0,681}}{6,8} \quad (\text{II.39})$$

Il est à noter que la modélisation des paliers fluides en régime turbulent reste un sujet de recherche très ouvert. Le critère de la transition d'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent, par exemple, n'est pas encore consensuelle [16].

-Cas du palier lisse

Dans ce cas, les équations de Reynolds classique et modifiée deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.40a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(h,l)}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(h,l)}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.40a})$$



Avec :

$$\begin{cases} k_x = 12 + 0.0136R_h^{0.90} , & k_z = 12 + 0.0043R_h^{0.96} \\ k_x = k_z = 12 & \text{en régime laminaire} \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

et $R_h = \frac{\rho U_z h}{\mu}$ qui est le nombre de Reynolds local.

Les relations k_x et k_z peuvent être utilisées pour des nombres de Reynolds locaux variant de 10^3 à 50000 [26]

Selon Frêne [12], le critère de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent est :

$$T_h > 2T_c \quad (\text{II.42})$$

Où :

$T_h = R_h \sqrt{\frac{h}{R}}$ et $T_c(\varepsilon) = 63.3\varepsilon^2 - 38\varepsilon + 41.2$ qui sont respectivement les nombres de Taylor local et critique. $\varepsilon = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}$ étant l'excentricité relative de fonctionnement.

Ou remarque bien que lorsque le palier n'est pas chargé ($\varepsilon = 0$), le nombre de Taylor critique vaut 41.2 correspondant à l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux.

Il convient de noter aussi que le régime d'écoulement non laminaire comprend aussi un régime de transition caractérisée par l'apparition des tourbillons de Taylor (figure II.2).

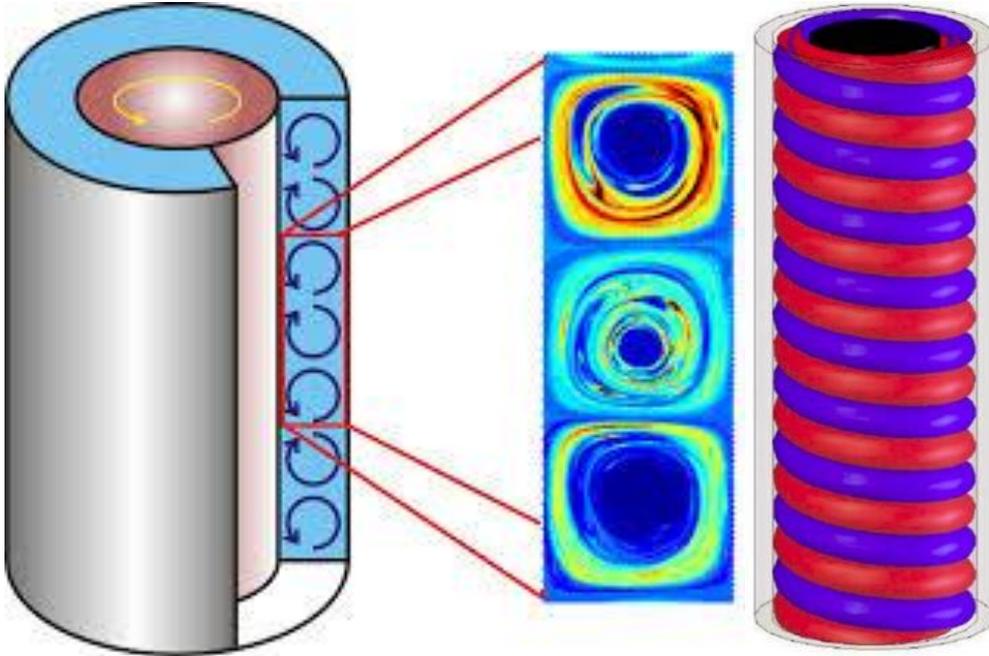


Fig. II.2 Représentation des tourbillons de Taylor



CHAPITRE III

Perturbation de l'équation de Reynolds modifiée en régime transitoire

III.1 Introduction

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Il est souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages ou des roues de turbines, par exemple. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre ; c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

Un palier est en fonctionnement dynamique ou instationnaire si :

1° La charge appliquée est stationnaire mais l'arbre est écarté de sa position d'équilibre statique par une perturbation, le problème est de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable. C'est le cas des paliers de lignes d'arbre équilibrées de machines tournantes (rotating machinery).

2° La charge appliquée W est une fonction du temps, dans ce cas on cherche la trajectoire, qui en résulte, du centre de l'arbre (rotor) dans le palier afin de déterminer la hauteur minimale du film lubrifiant et pouvoir éviter les avaries éventuelles. Ce cas correspond aux conditions de fonctionnement des paliers de moteurs à combustion (paliers de vilebrequin et de bielle) et des paliers de lignes d'arbre de machines tournantes déséquilibrées (balourds).



III.2 Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes

Dans ce type de mécanisme, la force extérieure est le poids de la ligne d'arbre à laquelle viennent se superposer des forces dynamiques d'amplitudes plus ou moins importantes (balourds, par exemple). On schématise la ligne d'arbre par un rotor rigide de masse $2M$ supporté de façon symétrique par 2 paliers identiques.

A chaque palier est attribué une masse M du rotor, une charge statique $\vec{W}_0 = W_0 \vec{X}$, une charge dynamique $\vec{W}(t)$ et une excitation synchrone due à un balourd caractérisé par son excentricité e_b dont le module est $Me_b \omega^2$. Lorsque l'équilibrage est parfait, le centre d'inertie G de l'arbre est confondu avec son centre géométrique. L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

-cas d'un rotor rigide :

$$\begin{cases} M\ddot{X} = W_0 + W_x(t) + Me_b \omega^2 \cos \omega t + F_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \\ M\ddot{Y} = W_y(t) + Me_b \omega^2 \sin \omega t + F_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

-cas d'un rotor flexible :

$$\begin{cases} m_r \ddot{X} + b_r \dot{X} + k_r X = m_r e_b \omega^2 \cos(\omega t) - a_{XX} X - a_{XY} Y - b_{XX} \dot{X} - b_{XY} \dot{Y} \\ m_r \ddot{Y} + b_r \dot{Y} + k_r Y = m_r e_b \omega^2 \sin(\omega t) - a_{YX} X - a_{YY} Y - b_{YX} \dot{X} - b_{YY} \dot{Y} \end{cases}$$

où $X(t)$ et $Y(t)$ représentent les coordonnées instantanées du centre de l'arbre, i.e.

$$\overrightarrow{OO_a} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \cos \phi \\ e \sin \phi \end{Bmatrix}$$

et $\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} p \begin{Bmatrix} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{Bmatrix} R d\hat{\theta} dz$ sont les composantes de l'action hydrodynamique

calculées à partir du champ de pression obtenu par intégration de l'équation de Reynolds non newtonienne :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{G(h, l)}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial \hat{\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(h, l)}{\mu k_z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial h}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III-2})$$

où $h(\hat{\theta}, z, t)$ est l'épaisseur du film définie par :

$$h = C + X(t) \cos \hat{\theta} + Y(t) \sin \hat{\theta} + U(\hat{\theta}, z, t) \quad (\text{III-3})$$



et $\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{X} \cos \hat{\theta} + \dot{Y} \sin \hat{\theta} + \dot{U}$ est la vitesse d'écrasement du film (squeeze velocity).

U et $\hat{\theta}$ étant respectivement le déplacement de la couche élastique et la coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur l'axe X (paramétrage X, Y).

En variables adimensionnelles, l'équation (III.2) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l})}{k_x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{\theta}} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l})}{k_z} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{où } \tilde{h} = \frac{h}{C}, \tilde{p} = \frac{p}{\mu \omega \left(\frac{R}{C} \right)^2}, \tilde{z} = \frac{z}{L}, \lambda = \left(\frac{R}{L} \right)^2 \text{ et } \tilde{t} = \omega t$$

La pression hydrodynamique sans dimension $\tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t})$ doit satisfaire l'équation différentielle (III.4) et les conditions limites suivantes :

(i) aux extrémités libres du palier :

$$\tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z} = -\frac{1}{2}, \tilde{t}) = \tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z} = \frac{1}{2}, \tilde{t}) = 0 \quad (\text{III.5})$$

(ii) la pression est continue et périodique suivant la direction circonférentielle, i. e.

$$\tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{p}(\hat{\theta} + 2\pi, \tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{III.6})$$

(iii) la prise en considération de la rupture du film (cavitation) conduit à annuler la pression et ses gradients, i.e.

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{pour } \hat{\theta} = \hat{\theta}_c(\tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{III.7})$$

Où $\hat{\theta}_c$ est l'angle de cavitation ou l'abscisse de rupture du film lubrifiant (leading edge of the cavitation zone) qui est une inconnue supplémentaire du problème.

Les conditions (III.7) proposées au début des années trente et connues sous le nom de conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber peuvent être satisfaites de façon directe à l'aide de l'algorithme de Christopherson. Depuis les années quarante, cet algorithme a été utilisé avec succès dans les études de simulation des problèmes de lubrification. Cependant, l'utilisation de l'algorithme de Christopherson conduit à une détermination



erronée de la frontière reformation du film (trailing edge of the cavitation zone). La continuité du débit massique n'est pas satisfaite. Il est utile de noter que les conditions de Reynolds sont fréquemment utilisées et donnent des résultats comparables à ceux obtenus expérimentalement ou à l'aide des algorithmes de conservation JFO, Elrod-Adams et Bayada sauf le débit.

III.3 Cas des petits mouvements : Modélisation linéaire

Le comportement dynamique d'une ligne d'arbre supportée par des paliers fluides est non linéaire. En effet, les forces hydrodynamiques F_x et F_y engendrées par le film lubrifiant sont des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre.

L'analyse exacte d'un système rotor-palier est donc très complexe. Puisqu'elle nécessite la résolution du système d'équations relatives au mouvement du rotor (III.1) et au comportement hydrodynamique des paliers décrit par l'équation de Reynolds (III.2).

Compte tenu des difficultés inhérentes à la résolution des problèmes non linéaires, une étude simplifiée peut être réalisée en linéarisant les équations du mouvement (III.1).

Dans le cas d'une ligne d'arbre soumise à des charges extérieures fixes en direction, cette étude peut comporter deux étapes :

- Une analyse statique permettant de déterminer la position d'équilibre de l'arbre (X_0, Y_0) à l'intérieur du palier par une méthode itérative.
- Une analyse dynamique linéarisée de la ligne d'arbre autour de la position d'équilibre statique.

Cette étude permet de modéliser le film lubrifiant par huit coefficients dynamique, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement.

Ces coefficients serviront comme des données pour :

- connaître la stabilité d'un point de fonctionnement ;



- introduire l'effet du film fluide sur la réponse de la ligne d'arbre à des sollicitations dynamique de faible amplitude (balourd résiduel, par exemple) ;
- rechercher les vitesses critiques du rotor.

III.3.1 Concept des coefficients dynamiques d'un palier

Ce concept a été introduit en 1959 par Hori [5] pour décrire le comportement d'un palier long.

Si on se limite à des petits déplacements X, Y et vitesses de déplacements \dot{X}, \dot{Y} au voisinage de la position d'équilibre statique X_0, Y_0 , on peut écrire (Développement Limité au 1^{er} ordre) :

$$\begin{cases} F_X(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) = F_X(X_0, Y_0, 0, 0) + X \left(\frac{\partial F_X}{\partial X} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial F_X}{\partial Y} \right)_0 + \dot{X} \left(\frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \right)_0 + \dot{Y} \left(\frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \right)_0 + \dots \\ F_Y(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) = F_Y(X_0, Y_0, 0, 0) + X \left(\frac{\partial F_Y}{\partial X} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial F_Y}{\partial Y} \right)_0 + \dot{X} \left(\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \right)_0 + \dot{Y} \left(\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \right)_0 + \dots \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Sous forme matricielle, la force additionnelle $\vec{f} = \vec{F} - \vec{F}_0$ est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) - F_X(X_0, Y_0, 0, 0) \\ F_Y(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) - F_Y(X_0, Y_0, 0, 0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{i,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} correspondant respectivement aux raideurs et aux amortissements dus à l'existence du film lubrifiant. On remarque que $F_X(X_0, Y_0, 0, 0)$ est équivalent à W_0 et que la composante $F_Y(X_0, Y_0, 0, 0)$ est nulle. Par identification des équations (III.8) et (III.9), on peut écrire :

$$a_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_0, \quad b_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j} \right)_0 \quad (\text{III.10})$$

Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement ou de la vitesse de déplacement. L'existence de termes croisés traduit le fait que dans un



palier, en général, la force hydrodynamique n'est pas colinéaire au déplacement comme dans le cas d'un palier de roulement.

III.3.2 : Méthode de perturbation : Calcul des coefficients dynamiques

Le calcul des coefficients dynamiques peut s'effectuer soit dans le repère fixe (O_c, \vec{X}, \vec{Y}) dans le cas d'une charge statique imposée (problème inverse) ou intermédiaire $(O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ lorsque l'excentricité de fonctionnement est imposée (problème direct) (figure III.1).

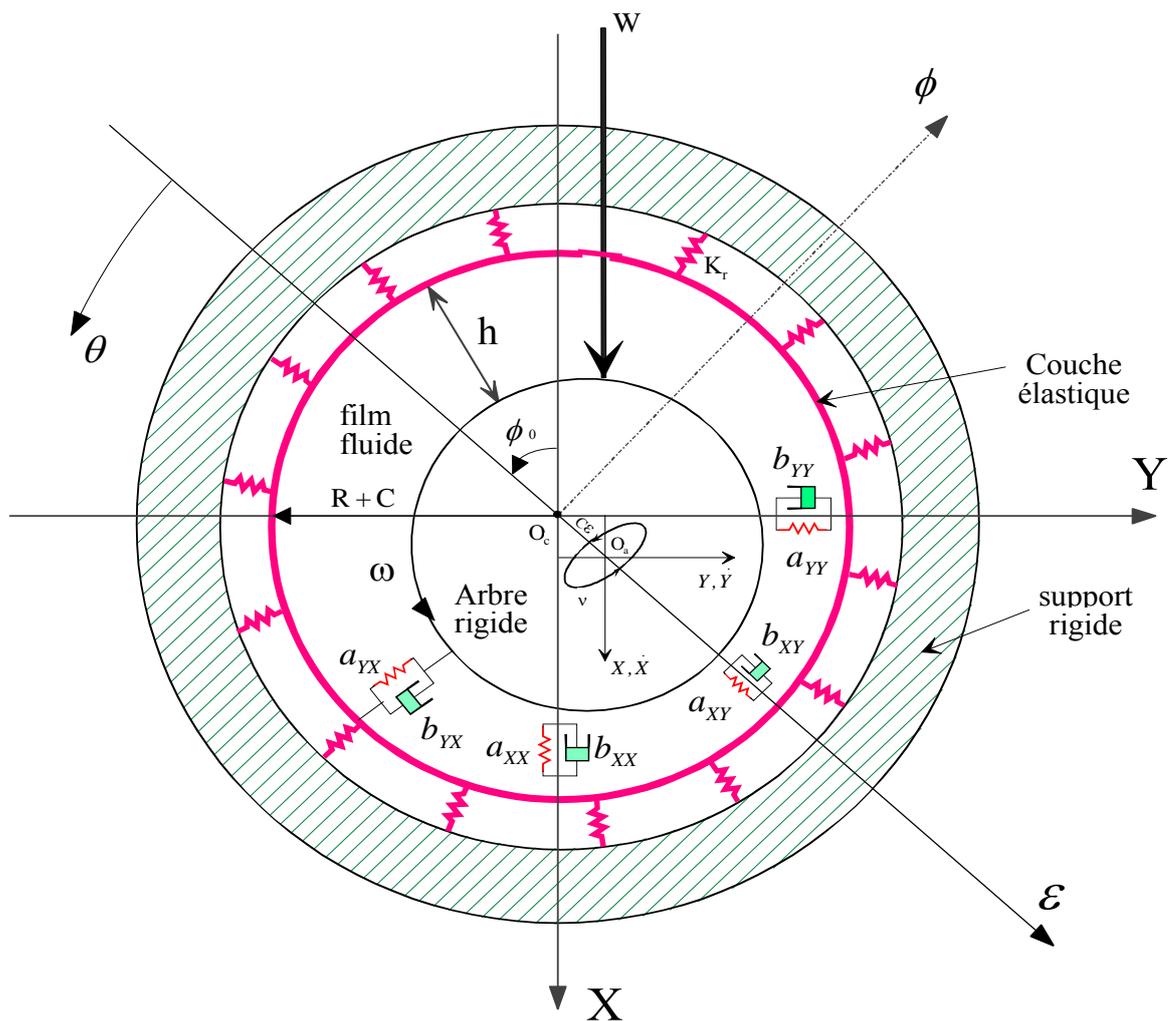


Fig. III.1 Modèle dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique Compliant

III.3.2.1 Cas d'une excentricité imposée : Paramétrage (ε, ϕ)

Dans le cas d'une excentricité imposée, il convient d'utiliser le paramétrage (ε, ϕ) pour calculer les coefficients dynamiques dans le repère intermédiaire. Un changement de base de rotation $(-\phi_0)$ permettra de les exprimer dans le repère fixe (O_c, \vec{X}, \vec{Y}) .

Lorsque le rotor est soumis à des vibrations harmoniques de faible amplitude de fréquence ν au voisinage de la position d'équilibre statique O_{a0} caractérisée par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) l'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \text{ et } \phi = \phi_0 + \phi_1 e^{i\gamma\tilde{t}} ; \quad |\varepsilon_1| \ll \varepsilon_0, |\phi_1| \ll \phi_0 \text{ et } i = \sqrt{-1} \quad (\text{III.11})$$

où $\gamma = \nu/\omega$ est la fréquence d'excitation relative, ε_1 et ϕ_1 sont respectivement les amplitudes complexes de l'excentricité relative et de l'angle de calage.

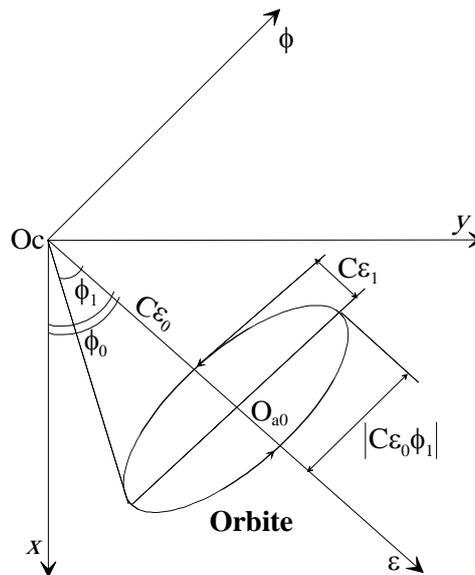


Fig. III.2: Systèmes d'axes et notations

En appliquant le principe de superposition, l'épaisseur du film adimensionnée s'écrit pour un palier compliant comme suit:

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_d + \tilde{U}_d \quad \left| \tilde{h}_d + \tilde{U}_d \right| \ll \tilde{h}_0 \quad (\text{III.12})$$



où $\tilde{h}_0 = \frac{h_0}{C}$ est l'épaisseur du film stationnaire incluant la déformation stationnaire de la couche élastique \tilde{U}_0 , $\tilde{h}_d = (\varepsilon_1 \cos \theta + \varepsilon_0 \phi_1 \sin \theta) e^{i\tilde{\gamma}}$ est la variation de l'épaisseur du film due au mouvement vibratoire du rotor, et $\tilde{U}_d = \tilde{U} e^{i\tilde{\gamma}} = (\varepsilon_1 \tilde{U}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 \tilde{U}_\phi) e^{i\tilde{\gamma}}$ est la déformation dynamique du palier causée par les pressions dynamiques où $\tilde{U}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon}$ et $\tilde{U}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi}$, et \tilde{U} est l'amplitude complexe.

Par conséquent, l'expression complète de l'épaisseur du film est :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + (\varepsilon_1 (\cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon) + \varepsilon_0 \phi_1 (\sin \theta + \tilde{U}_\phi)) e^{i\tilde{\gamma}} \quad (\text{III.13})$$

La pression instantanée sans dimension qui en résulte s'écrit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{Q} e^{i\tilde{\gamma}} \quad |\tilde{Q}| \ll \tilde{p}_0 \quad (\text{III.14})$$

où $\tilde{p}_0 \geq 0$ est la pression stationnaire, et $\tilde{Q} = \varepsilon_1 \tilde{Q}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 \tilde{Q}_\phi$ est la pression dynamique complexe où $\tilde{Q}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}$ et $\tilde{Q}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \phi}$.

L'utilisation du modèle de la couche élastique mince (MCEM) permet de calculer avec une précision suffisante les déformations stationnaires et dynamiques, i. e.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_0 \\ \tilde{U}_\varepsilon \\ \tilde{U}_\phi \end{Bmatrix} = \tilde{L}_0 \begin{Bmatrix} \tilde{p}_0 \\ \tilde{Q}_\varepsilon \\ \tilde{Q}_\phi \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Où

$$\tilde{L}_0 = \sigma_0 \tilde{C}_d \tilde{t}_h \quad (\text{III.16})$$

Dans l'équation (III.16), $\tilde{C}_d = \frac{\mu \omega (R/C)^3}{E}$ est le coefficient de déformation inversement proportionnel au module d'élasticité du matériau constituant la couche élastique, et $\tilde{t}_h = t_h / R$ est l'épaisseur relative de la couche.



Le report des Eqs (III.13) et (III.14) dans l'équation de Reynolds normalisée (III.4) et la prise en compte des termes en ε_1 et $\varepsilon_0 \phi_1$ du premier ordre conduit à un système de trois équations aux dérivées partielles couplées dont les inconnues sont \tilde{p}_0 , \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ :

$$\Re(\tilde{p}_0) = 6 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \quad (\text{III.17})$$

$$\Re(\tilde{Q}_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} (\cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} (\cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon) \right] = 6 \left[-\sin \theta + \frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial \theta} + 2i\gamma (\cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon) \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\Re(\tilde{Q}_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} (\sin \theta + \tilde{U}_\phi) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} (\sin \theta + \tilde{U}_\phi) \right] = 6 \left[\cos \theta + \frac{\partial \tilde{U}_\phi}{\partial \theta} + 2i\gamma (\sin \theta + \tilde{U}_\phi) \right] \quad (\text{III.19})$$

où :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos \theta + \tilde{U}_0 \quad (\text{III.20})$$

et $\Re(\bullet) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{G}_0}{k_{x_0}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{G}_0}{k_{z_0}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \tilde{z}} \right)$ qui est un opérateur différentiel.

Il est à souligner que l'équation (III.17) est une équation différentielle non linéaire car compte tenu des relations (III.15) et (III.20) \tilde{h}_0 dépend de \tilde{p}_0 tandis que les équations dynamiques complexes (III.18) et (III.19) sont linéaires en terme des pressions dynamiques complexes \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ . Les équations (III.17) et (III.20) sont alors résolues à l'aide d'un processus itératif permettant de coupler les deux parties structure et fluide du problème.

Dans le cas où seule la déformation stationnaire est prise en considération, les équations (III.18) et (III.19) deviennent :

$$\Re(\tilde{Q}_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \cos \theta \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \cos \theta \right] = 6[-\sin \theta + 2i\gamma \cos \theta] \quad (\text{III.21a})$$

$$\Re(\tilde{Q}_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \sin \theta \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right] = 6[\cos \theta + 2i\gamma \sin \theta] \quad (\text{III.21b})$$



La résolution des équations d'ordre un se fait de la même façon que celle de l'équation de Reynolds en régime stationnaire mais sans annulation des termes de pression négatif calculés.

La méthode de perturbation transforme aussi les conditions limites sur la pression (III.5) à (III.7), soit :

$$\tilde{p}_0 = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{z} = \pm \frac{1}{2} \quad (\text{III.22})$$

$$\tilde{p}_0(\theta = 0, \tilde{z}) = \tilde{p}_0(\theta = 2\pi, \tilde{z}) \quad (\text{III.23})$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \theta_{c_0}(\tilde{z}) \quad (\text{III.24})$$

Où θ_{c_0} est l'angle de cavitation stationnaire mesuré à partir de la ligne des centres.

$$\tilde{Q}_\varepsilon = \tilde{Q}_\phi = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{z} = \pm \frac{1}{2} \quad (\text{III.25})$$

$$\tilde{Q}_\varepsilon(\theta = 0, \tilde{z}) = \tilde{Q}_\phi(\theta = 2\pi, \tilde{z}) \quad (\text{III.26})$$

La relation (III.23) exprime les conditions de Reynolds stationnaires en supposant que les perturbations dues aux vibrations du rotor n'affectent pas l'étendue de la zone active du palier. Les équations dynamiques d'ordre un sont donc résolues sur le domaine définie de façon itérative en appliquant l'algorithme de **Christopherson [27]** lors de la résolution de l'équation de Reynolds stationnaire.

Il est intéressant de noter que l'équation (III.24) a été obtenue à partir de (III.7) en faisant un développement de la pression normalisée $\tilde{p}(\theta, \tilde{z})$ en série de Taylor limité à l'ordre un au voisinage de $(\theta_{c_0}, \tilde{z}_0)$, i.e.

$$\tilde{p}(\theta, \tilde{z}) = \tilde{p}(\theta_{c_0} + \Delta\theta, \tilde{z}_0 + \Delta\tilde{z}) \approx \tilde{p}(\theta_{c_0}, \tilde{z}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right)_0 \Delta\theta + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}\right)_0 \Delta\tilde{z} = 0 \quad (\text{III.27})$$

L'équation (III.14) peut s'écrire :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 \quad (\text{III.28})$$

où $|\tilde{p}_1| = |\tilde{Q}e^{i\gamma\tilde{z}}| \ll \tilde{p}_0$



En remplaçant (III.28) dans l'équation (III.27), il vient

$$\tilde{p}(\theta, \tilde{z}) \approx \tilde{p}_0(\theta_{c_0}, \tilde{z}_0) + \tilde{p}_1(\theta_{c_0}, \tilde{z}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_0 \Delta\theta + \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_0 \Delta\tilde{z} = 0 \quad (\text{III.29})$$

Cette relation montre que les conditions de Reynolds s'écrivent pour $\theta = \theta_{c_0}$ comme suit :

$$\tilde{p}_0 = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (\text{III.30a})$$

$$\tilde{p}_1 = 0, \text{ i.e. } \tilde{Q}_\varepsilon = \tilde{Q}_\phi = 0 \quad (\text{III.30b})$$

Les distributions complexes \tilde{Q}_ε and \tilde{Q}_ϕ sont obtenues à partir des Eqs (III.18) et (III.19) à partir desquelles les huit coefficients dynamiques peuvent être calculés dans le système d'axes intermédiaire (ε, ϕ) par intégration numérique :

$$A_{\varepsilon\varepsilon} + i\gamma B_{\varepsilon\varepsilon} = - \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{Q}_\varepsilon \cos \theta d\tilde{z} d\theta; \quad A_{\varepsilon\phi} + i\gamma B_{\varepsilon\phi} = - \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{Q}_\phi \cos \theta d\tilde{z} d\theta \quad (\text{III.31})$$

$$A_{\phi\varepsilon} + i\gamma B_{\phi\varepsilon} = - \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{Q}_\varepsilon \sin \theta d\tilde{z} d\theta; \quad A_{\phi\phi} + i\gamma B_{\phi\phi} = - \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{Q}_\phi \sin \theta d\tilde{z} d\theta$$

$$\text{où } A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \frac{C^3}{\mu\omega R^3 L} \text{ et } B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \frac{C^3}{\mu R^3 L}; \quad (\alpha, \beta) = (\varepsilon, \phi)$$

Les coefficients de raideur et d'amortissement dans le système d'axes (X, Y) peuvent être déterminés à partir des coefficients calculés dans le repère (ε, ϕ) en utilisant les relations de transformation des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de système d'axes :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top \begin{bmatrix} A_{\varepsilon\varepsilon} & A_{\varepsilon\phi} \\ A_{\phi\varepsilon} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (\text{III.32a})$$

$$\begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top \begin{bmatrix} B_{\varepsilon\varepsilon} & B_{\varepsilon\phi} \\ B_{\phi\varepsilon} & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (\text{III.32b})$$

Où $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix}$ est la matrice de passage ou la matrice rotation.

ϕ_0 étant l'angle de calage stationnaire calculé par la relation suivante:



$$\phi_0 = \arctg \left(- \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z}}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z}} \right) \quad (\text{III.33})$$

Compte tenu des relations (III.31), il vient :

$$A_{XX} = A_{\varepsilon\varepsilon} \cos^2 \phi_0 + A_{\phi\phi} \sin^2 \phi_0 - (A_{\varepsilon\phi} + A_{\phi\varepsilon}) \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

$$A_{XY} = A_{\varepsilon\phi} \cos^2 \phi_0 - A_{\phi\varepsilon} \sin^2 \phi_0 + (A_{\varepsilon\varepsilon} - A_{\phi\phi}) \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

$$A_{YX} = A_{\phi\varepsilon} \cos^2 \phi_0 - A_{\varepsilon\phi} \sin^2 \phi_0 + (A_{\varepsilon\varepsilon} - A_{\phi\phi}) \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

$$A_{YY} = A_{\phi\phi} \cos^2 \phi_0 + A_{\varepsilon\varepsilon} \sin^2 \phi_0 + (A_{\varepsilon\phi} + A_{\phi\varepsilon}) \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

et des relations similaires pour les termes d'amortissement B_{ij} .

Pour les coefficients dynamiques exprimés dans le repère fixe, on adopte l'adimensionnement suivant :

$$\begin{cases} A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0} \\ B_{ij} = b_{ij} \frac{C\omega}{W_0} \end{cases} ; (i, j) = (X, Y)$$

III.3.2.2 Cas d'une charge imposée : Paramétrage (X, Y)

Dans le cas d'une charge statique imposée, le calcul des coefficients dynamiques s'effectue directement dans le repère fixe (X, Y) lié à la charge.

En régime stationnaire, le centre de l'arbre (rotor) occupe une position d'équilibre caractérisée par ses coordonnées X_0 et Y_0 . L'épaisseur du film correspondant à cette position est :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \hat{\theta} + \tilde{Y}_0 \sin \hat{\theta} + \tilde{U}_0 \quad (\text{III.34})$$

Ou encore compte tenu de la relation (III.15) :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \hat{\theta} + \tilde{Y}_0 \sin \hat{\theta} + \tilde{L}_0 \tilde{p}_0 \quad (\text{III.35})$$

En régime dynamique, le centre du rotor est décrit par les coordonnées X et Y mesurées à partir de la position d'équilibre statique. Dans ces conditions, l'épaisseur du film prend la forme suivante :

$$\tilde{h}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) = 1 + \tilde{X}(\tilde{t}) \cos \hat{\theta} + \tilde{Y}(\tilde{t}) \sin \hat{\theta} + \tilde{U}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{III.36})$$



Avec $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \Delta\tilde{X}$; $\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \Delta\tilde{Y}$ et $\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{U}$

L'expression de $\Delta\tilde{U}$ est déterminée à partir développement en série de Taylor de \tilde{U} limité au premier ordre au voisinage de la position d'équilibre statique, i.e.

$$\tilde{U} \approx \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{X} \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \right|_0 + \Delta\tilde{Y} \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} \right|_0 + \Delta\tilde{X}' \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}'} \right|_0 + \Delta\tilde{Y}' \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}'} \right|_0$$

$$\text{ou encore } \tilde{U} \approx \tilde{U}_0 + \underbrace{\Delta\tilde{X} \tilde{U}_X + \Delta\tilde{Y} \tilde{U}_Y + \Delta\tilde{X}' \tilde{U}_{X'} + \Delta\tilde{Y}' \tilde{U}_{Y'}}_{\Delta\tilde{U}}$$

$$\text{Où: } \tilde{U}_X = \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \right|_0, \quad \tilde{U}_{X'} = \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}'} \right|_0, \quad \text{etc}$$

Soit par conséquent :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{h} + \Delta\tilde{U} \quad (\text{III.37})$$

$$\text{Avec } \Delta\tilde{h} = \Delta\tilde{X} \cos \hat{\theta} + \Delta\tilde{Y} \sin \hat{\theta}$$

Si on suppose que le mouvement de l'arbre (rotor) est harmonique, on peut écrire alors:

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma\tilde{t}} ; \Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma\tilde{t}} ; \Delta\tilde{U} = \Delta\tilde{U}^* e^{i\gamma\tilde{t}}$$

$$\text{Où } \Delta\tilde{X} ; \Delta\tilde{Y} \text{ et } \Delta\tilde{U} \in \mathbb{C}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{U} &= \Delta\tilde{X} \tilde{U}_X + \Delta\tilde{Y} \tilde{U}_Y + \Delta\tilde{X}' \tilde{U}_{X'} + \Delta\tilde{Y}' \tilde{U}_{Y'} \\ &= \underbrace{[\Delta\tilde{X}^* \tilde{U}_X + \Delta\tilde{Y}^* \tilde{U}_Y + i\gamma(\Delta\tilde{X}^* \tilde{U}_{X'} + \Delta\tilde{Y}^* \tilde{U}_{Y'})]}_{\Delta\tilde{U}^*} e^{i\gamma\tilde{t}} \text{ et } \Delta\tilde{h} = \underbrace{(\Delta\tilde{X}^* \cos \hat{\theta} + \Delta\tilde{Y}^* \sin \hat{\theta})}_{\Delta\tilde{h}^*} e^{i\gamma\tilde{t}} \end{aligned}$$

L'équation (III.37) devient :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma\tilde{t}} \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{\Delta\tilde{H}^*}{\tilde{h}_0} \right| \ll 1 \quad (\text{III.38})$$

$$\text{Avec } \Delta\tilde{H}^* = \Delta\tilde{X}^* (\cos \hat{\theta} + \tilde{U}_X + i\gamma\tilde{U}_{X'}) + \Delta\tilde{Y}^* (\sin \hat{\theta} + \tilde{U}_Y + i\gamma\tilde{U}_{Y'})$$

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, soit :

$$\tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{p}_0(\hat{\theta}, \tilde{z}) + \Delta\tilde{p}(\tilde{t}) \quad (\text{III.39})$$

L'expression de $\Delta\tilde{p}$ est déterminée à partir du développement limité de la pression :

$$\tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) \approx \tilde{p}_0(\hat{\theta}, \tilde{z}) + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}} \right)_0 \Delta\tilde{X} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}} \right)_0 \Delta\tilde{Y} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}'} \right)_0 \Delta\tilde{X}' + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}'} \right)_0 \Delta\tilde{Y}'}_{\Delta\tilde{p}(\tilde{t})}$$



Le mouvement étant harmonique, on peut écrire :

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\tilde{\gamma}t}; \Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\tilde{\gamma}t}; \Delta\tilde{X}' = i\gamma\Delta\tilde{X}^* e^{i\tilde{\gamma}t}; \Delta\tilde{Y}' = i\gamma\Delta\tilde{Y}^* e^{i\tilde{\gamma}t}$$

Soit :

$$\tilde{p} \approx \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\tilde{\gamma}t} \quad ; \quad \left| \frac{\Delta\tilde{p}^*}{\tilde{p}_0} \right| \ll 1 \quad (\text{III.40})$$

Avec

$$\Delta\tilde{p}^* = \tilde{p}_x \Delta\tilde{X}^* + \tilde{p}_y \Delta\tilde{Y}^* + i\tilde{\gamma}\tilde{p}_{x'} \Delta\tilde{X}^* + i\tilde{\gamma}\tilde{p}_{y'} \Delta\tilde{Y}^* \quad ; \quad \tilde{p}_x = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{X}}, \text{etc.}$$

Le report des équations (III.38) et (III.40) dans l'équation de Reynolds transitoire (III.4) conduit à un système de trois EDPs :

$$\Re(\tilde{p}_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\hat{\theta}} \quad (\text{III.41})$$

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{q}_X) + 3\tilde{L} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left[\frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \tilde{q}_X \right] + 3\lambda\tilde{L} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[\frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \tilde{q}_X \right] - \frac{1}{2}\tilde{L} \frac{\partial\tilde{q}_X}{\partial\hat{\theta}} - i\gamma\tilde{L}\tilde{q}_X = -\frac{1}{2} \sin\hat{\theta} + i\gamma \cos\hat{\theta} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\hat{\theta}} \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} - \\ 3 \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) - 3\lambda \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{q}_Y) + 3\tilde{L} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left[\frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \tilde{q}_Y \right] + 3\lambda\tilde{L} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[\frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \tilde{q}_Y \right] - \frac{1}{2}\tilde{L} \frac{\partial\tilde{q}_Y}{\partial\hat{\theta}} - i\gamma\tilde{L}\tilde{q}_Y = \frac{1}{2} \cos\hat{\theta} + i\gamma \sin\hat{\theta} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\hat{\theta}} \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} - \\ 3 \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) - 3\lambda \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

$$\text{avec } \Re(\bullet) = \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{G}_0}{k_{x_0}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial\hat{\theta}} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{G}_0}{k_{z_0}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial\tilde{z}} \right)$$

$$\text{et } \tilde{q}_X = \tilde{p}_X + i\gamma\tilde{p}_{X'}, \tilde{q}_Y = \tilde{p}_Y + i\gamma\tilde{p}_{Y'} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

Si la déformation dynamique de la couche élastique est ignorée, les EDPs (III.42) et (III.43) se réduisent à :

$$\Re(\tilde{q}_X) = -\frac{1}{2} \sin\hat{\theta} + i\gamma \cos\hat{\theta} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\hat{\theta}} \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} - 3 \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) - 3\lambda \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) \quad (\text{III.44})$$

$$\Re(\tilde{q}_Y) = \frac{1}{2} \cos\hat{\theta} + i\gamma \sin\hat{\theta} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_0^2 \frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\hat{\theta}} \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} - 3 \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\hat{\theta}}}{k_{x_0}} \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) - 3\lambda \frac{\tilde{G}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{k_{z_0}} \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin\hat{\theta}}{\tilde{G}_0} \right) \quad (\text{III.45})$$



La résolution des EDPs relatives aux perturbations permet de connaître les champs de pression dynamique \tilde{q}_x et \tilde{q}_y et d'en déduire les coefficients de raideur et d'amortissement du palier :

$$\begin{cases} A_{XX} \\ A_{YX} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_X \begin{cases} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{cases} d\hat{\theta} d\tilde{z}; \quad \begin{cases} A_{XY} \\ A_{YY} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_Y \begin{cases} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{cases} d\hat{\theta} d\tilde{z} \quad (\text{III.46})$$

$$\begin{cases} B_{XX} \\ B_{YX} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{X'} \begin{cases} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{cases} d\hat{\theta} d\tilde{z}; \quad \begin{cases} B_{XY} \\ B_{YY} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{Y'} \begin{cases} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{cases} d\hat{\theta} d\tilde{z}$$

avec

$$\tilde{p}_X = \text{Réal}(\tilde{q}_X); \tilde{p}_Y = \text{Réal}(\tilde{q}_Y); \tilde{p}_{X'} = \text{Imag}(\tilde{q}_X)/\gamma; \tilde{p}_{Y'} = \text{Imag}(\tilde{q}_Y)/\gamma$$

Les coordonnées de la position d'équilibre statique (X_0, Y_0) résultant de l'application de la charge statique $\mathbf{W}_0 = (W_{X0}, W_{Y0})$ sont déterminées à partir de la résolution des équations d'équilibre du rotor à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Dans le système de coordonnées (X, Y) , l'équilibre du rotor se traduit par les équations suivantes :

$$\tilde{W}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \hat{\theta} d\hat{\theta} d\tilde{z} \quad (\text{III.47a})$$

$$\tilde{W}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\tilde{z} \quad (\text{III.47b})$$

Ou encore :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{X0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{III.48a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{Y0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{III.48b})$$

Où \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont les composantes du vecteur résidu \mathbf{r} .

Le problème est bien entendu de trouver les valeurs adimensionnelles des coordonnées cartésiennes (\tilde{X}, \tilde{Y}) vérifiant simultanément les deux équations (III.48).



a) Méthode de Newton-Raphson

Soit $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ la solution approchée ou l'estimé initial proche de la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) . Si les deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont continués et continument différentiables, le développement en séries de Taylor des deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y au point $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ donne :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{III.49a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{III.49b})$$

Avec $\delta \tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{X}_0$ et $\delta \tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - \tilde{Y}_0$

Puisque (\tilde{X}, \tilde{Y}) est une solution du système d'équations non linéaires (III.48), il en résulte :

$$0 = \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{III.50a})$$

$$0 = \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{III.50b})$$

Soit sous forme matricielle :

$$-\begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{III.51})$$

En supposant l'existence de la matrice jacobienne inverse: $\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1}$, on a :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{III.52})$$



Ce qui donne pour la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{III.53a})$$

Ou encore

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.53b})$$

Lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur (t.o.s), la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)$ de la prochaine approximation, soit :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de Newton-Raphson pour deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.55a})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{III.55b})$$

avec

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}$$



L'inversion analytique de la matrice jacobéenne permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} & -\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \\ -\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} & \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} - \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \end{pmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}} \quad (\text{III.56})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas.

b) Méthode de Newton-Raphson amortie

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti qui converge plus vite que l'algorithme précédent s'écrit :

1. Etant donné ε_1 , un critère d'arrêt
2. Etant donné k_{\max} , le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$, une approximation initiale de la solution du système (III.48)
4. Résoudre le problème EHD non linéaire en régime stationnaire gouverné par les équations couplées (III.41) et (III.35) par itérations : Calcul de \tilde{h}_0 et \tilde{p}_0
5. Calculer les composantes de la portance hydrodynamique :

$$\tilde{F}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \hat{\theta} d\hat{\theta} d\tilde{z} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\tilde{z}$$

6. Calculer les composantes du vecteur résidu : \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y (Eqs III.48)
7. Evaluer les coefficients de la matrice jacobienne (dérivées partielles) par différentiation numérique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}; & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}; \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}; & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta} \end{aligned}$$



Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul des dérivées partielles de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide. Dans cette approximation, la valeur de δ est 10^{-4} .

8. Calculer les corrections $(\delta\tilde{X}_k, \delta\tilde{Y}_k)$ en utilisant l'équation (III.56)

9. Calculer les nouvelles approximations du système non linéaire :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \varpi^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}$$

Où $\varpi^{(k)}$ est le coefficient de relaxation

$\varpi^{(k)} = 1$: Méthode classique de *Newton*

$\varpi^{(k)} < 1$: Méthode de *Newton* dite amortie

10. Si

$$\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} & \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} \\ \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ ou } |\tilde{W}_X^{(k+1)}| + |\tilde{W}_Y^{(k+1)}| \leq \varepsilon_1$$

ou encore $\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \delta\tilde{X}_k & \delta\tilde{Y}_k \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}} / \sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{X}_{k+1} & \tilde{Y}_{k+1} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1$ et $k < k_{\max}$

où $\varepsilon_1 = 10^{-6}$

- convergence atteinte : Les valeurs de $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+1})$ correspondent aux coordonnées de la position d'équilibre statique qui en résulte de l'application de la charge statique W_0 .
- calculer l'angle de calage statique du palier par : $\phi_0 = \tan^{-1}(\tilde{Y}_{k+1}/\tilde{X}_{k+1})$
- arrêt

11. Si le nombre maximal d'itérations k_{\max} est atteint :

- convergence non atteinte en k_{\max} itérations
- arrêt

12. Sinon, poser $k \leftarrow k + 1$

13. Retour à l'étape 4 pour une autre itération.



III.5 Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées

III.5.1 Cas d'un rotor rigide

La trajectoire du centre de l'arbre (rotor) prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité e_b . Celle-ci est obtenue dans le cas d'un rotor rigide à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = me_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.57a})$$

En variable sans dimension, l'équation (III.57a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{M} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.57b})$$

Où : $\tilde{t} = \omega t$ et $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$

Le vecteur solution du système d'équation (III.57b) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos \tilde{t} + \begin{Bmatrix} \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin \tilde{t} \quad (\text{III.58})$$

En remplaçant (III.58) dans le système (III.57b) et en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$, on aura :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX} - \tilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX} - \tilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY} - \tilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY} - \tilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.59})$$

La solution du système (III.59) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{M} \varepsilon_b \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{M} \varepsilon_b \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_1 = \tilde{M} \varepsilon_b \frac{EC + FD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_2 = -\tilde{M} \varepsilon_b \frac{FC - ED}{C^2 + D^2} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$



Avec :

$$A = -\tilde{M} + A_{YY} - B_{XY}$$

$$B = A_{XY} + B_{YY}$$

$$C = \tilde{M}^2 - \tilde{M}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX})$$

$$D = -\tilde{M}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY}$$

$$E = -A_{YX} + B_{XX}$$

$$F = \tilde{M} - A_{XX} - B_{YX}$$

Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (III.58) du système (III.57b) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure III. 3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$: Demi-grand axe ;

$b = \tilde{b}C$: Demi-petit axe ;

φ : Angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement ;

δ : L'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X .

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse (o_{a0}, X^*, Y^*), l'équation de l'ellipse s'écrit :

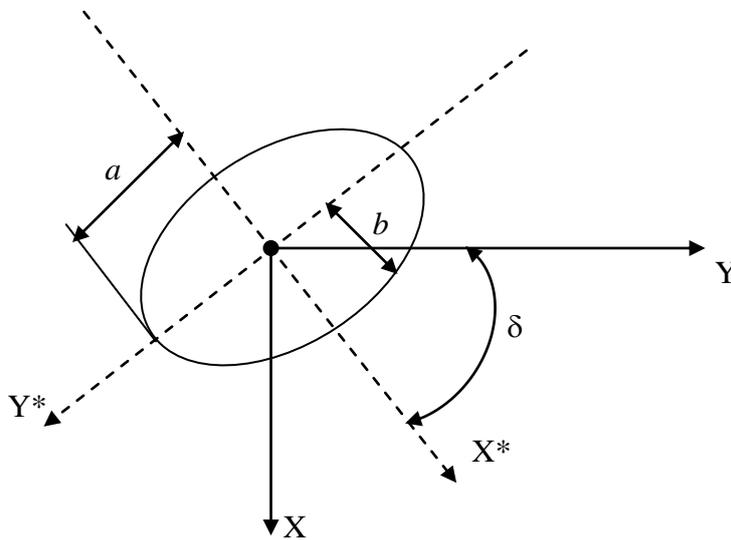


Fig. III.3 Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ \tilde{Y}^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases}$$

(III.61)

$$\text{Où : } (\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) = \frac{(X^*, Y^*)}{C}$$



Compte tenu de la relation (III.69), la projection sur (o_{a0}, X, Y) donne :

$$\begin{cases} \tilde{X} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Les équations (III.66) sont identiques aux équations (III.70), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{X}_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{Y}_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps \tilde{t} , il vient en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$:

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ \tilde{Y}_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ \tilde{Y}_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

La résolution des équations (III.64) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\begin{cases} \tilde{a} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} + \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \tilde{b} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} - \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \\ \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

III.5.2 Cas d'un rotor flexible

Dans le cas du rotor flexible, on utilise tout simplement le schéma explicite d'Euler pour intégrer les équations de mouvement linéarisées du rotor :

$$\begin{cases} m_r \ddot{X} + b_r \dot{X} + k_r X = m_r e \omega^2 \cos(\omega t) - a_{XX} X - a_{XY} Y - b_{XX} \dot{X} - b_{XY} \dot{Y} \\ m_r \ddot{Y} + b_r \dot{Y} + k_r Y = m_r e \omega^2 \sin(\omega t) - a_{YX} X - a_{YY} Y - b_{YX} \dot{X} - b_{YY} \dot{Y} \end{cases} \quad (\text{III.66})$$



ou encore :

$$\begin{cases} \ddot{X} = e \omega^2 \cos(\omega t) - X \frac{(a_{XX} + k_r)}{m_r} - \frac{a_{XY} Y}{m_r} - \dot{X} \frac{(b_{XX} + b_r)}{m_r} - \frac{b_{XY} \dot{Y}}{m_r} \\ \ddot{Y} = e \omega^2 \sin(\omega t) - \frac{a_{YX} X}{m_r} - Y \frac{(a_{YY} + k_r)}{m_r} - \frac{b_{YX} \dot{X}}{m_r} - \dot{Y} \frac{(b_{YY} + b_r)}{m_r} \end{cases} \quad (\text{III.67})$$

Les étapes de calcul sont résumées ci-dessous :

Etape 1 : $t = 0, X = X_0, Y = Y_0, \dot{X} = \dot{X}_0 = 0, \dot{Y} = \dot{Y}_0 = 0$

Etape 2 : calcule des accélérations \ddot{X} et \ddot{Y} à partir des équations de mouvements (III.67)

Etape 3 : calcule des nouvelles composants de la vitesse et de la position pour :

$$\dot{X}(t + \Delta t) = \dot{X}(t) + \ddot{X}(t)\Delta t$$

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \dot{X}(t + \Delta t)\Delta t$$

Et des relations similaires pour $\dot{Y}(t + \Delta t)$ et $Y(t + \Delta t)$

Etape 4 : poser $t = t + \Delta t$ et revenir à l'étape 2 tant que $t < t_{max}$



III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé et présenté de façon détaillée les équations de base et les relations permettant de calculer les paramètres de stabilité en utilisant le critère de stabilité de **Lund**, à savoir la masse critique et la fréquence de fouettement ainsi que les caractéristiques de la trajectoire elliptique décrite par le centre de l'arbre (rotor) dans le cas d'une charge statique imposée et d'une excitation synchrone de type balourd. Le calcul des coefficients dynamiques du film servant comme des données pour l'analyse de la stabilité et la réponse dynamique du système rotor-palier a été effectué en perturbant l'équation de Reynolds modifiée (non newtonienne) écrite en régime transitoire.



Chapitre IV

Traitement numérique des équations de Reynolds d'ordres zéro et un

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons procéder à la formulation numérique des équations de Reynolds obtenue par la technique de perturbation dans le chapitre précédent. La méthode numérique utilisée est celle des différences finies. La discrétisation spatiale de ces équations conduit à la résolution de deux systèmes d'équations algébriques linéaires par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation en vue de déterminer le champ de pression stationnaire et les pressions dynamiques complexes. La connaissance de ces pressions permettra de calculer les huit coefficients dynamiques du palier, à savoir : quatre coefficients de raideurs et quatre coefficients d'amortissement. Ces coefficients serviront pour l'étude de la réponse dynamique linéaire rotor-palier.

IV.2 Discrétisation de l'équation de Reynolds d'ordre zéro par différences finies

L'équation d'ordre zéro résultant de la perturbation de l'équation de Reynolds modifiée transitoire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\Psi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \quad \text{dans (D)} \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{avec : } \Phi_0 = \frac{\tilde{G}_0}{k_{x_0}} \quad , \quad \Psi_0 = \frac{\tilde{G}_0}{k_{z_0}} \quad , \quad \lambda = \left(\frac{R}{L} \right)^2 \quad , \quad \tilde{z} = \frac{z}{L} \quad \text{tel que } \left(-\frac{1}{2} \leq \tilde{z} \leq +\frac{1}{2} \right),$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\mu_0 \omega \left(\frac{R}{c} \right)^2} \quad , \quad \tilde{h}_0 = \frac{h_0}{c} = 1 + \tilde{X} \cos \theta + \tilde{Y} \sin \theta + \tilde{L} \tilde{p}_0 \quad \text{et } (\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{(x, y)}{c}$$

En un nœud (i, j) du maillage figure IV.1, l'équation (IV.1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right) \Big|_{i,j} + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\Psi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \Big|_{i,j}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{\Phi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \theta} = \frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \theta} =$$

$$\frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \frac{(\tilde{p}_{0,i+1,j} - \tilde{p}_{0,i,j})}{\Delta \theta} - \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \frac{(\tilde{p}_{0,i,j} - \tilde{p}_{0,i-1,j})}{\Delta \theta}}{\Delta \theta} \quad (\text{IV.2})$$



$$\text{où : } \Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\Phi_{0_{i,j}} + \Phi_{0_{i+1,j}}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}} = \frac{\Phi_{0_{i,j}} + \Phi_{0_{i-1,j}}}{2}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\Psi_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{\Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}} \frac{(\tilde{p}_{0_{i,j+1}} - \tilde{p}_{0_{i,j}})}{\Delta \bar{z}} - \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}} \frac{(\tilde{p}_{0_{i,j}} - \tilde{p}_{0_{i,j-1}})}{\Delta \bar{z}}}{\Delta \bar{z}} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{où : } \Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{\Psi_{0_{i,j}} + \Psi_{0_{i,j+1}}}{2} \quad \text{et} \quad \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}} = \frac{\Psi_{0_{i,j}} + \Psi_{0_{i,j-1}}}{2}$$

$$\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \Big|_{i,j} \approx \frac{\tilde{h}_{0_{i+\frac{1}{2},j}} - \tilde{h}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta \theta} \quad (\text{IV.4a})$$

$$\text{où : } \tilde{h}_{0_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\tilde{h}_{0_{i,j}} + \tilde{h}_{0_{i+1,j}}}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{h}_{0_{i-\frac{1}{2},j}} = \frac{\tilde{h}_{0_{i,j}} + \tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2}$$

ou encore :

$$\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \Big|_{i,j} \approx \frac{\tilde{h}_{0_{i+1,j}} - \tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta \theta} \quad (\text{IV.4b})$$

Par conséquent, l'équation de Reynolds stationnaire discrétisée s'écrit :

$$\frac{\Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}} (\tilde{p}_{0_{i+1,j}} - \tilde{p}_{0_{i,j}}) - \Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}} (\tilde{p}_{0_{i,j}} - \tilde{p}_{0_{i-1,j}})}{(\Delta \theta)^2} + \lambda \left[\frac{\Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}} (\tilde{p}_{0_{i,j+1}} - \tilde{p}_{0_{i,j}}) - \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}} (\tilde{p}_{0_{i,j}} - \tilde{p}_{0_{i,j-1}})}{(\Delta \bar{z})^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\tilde{h}_{0_{i+1,j}} - \tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta \theta} \right] \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Soit : } - \underbrace{\left(\frac{\Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}} + \Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{(\Delta \theta)^2} + \frac{\lambda (\Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}} + \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}})}{(\Delta \bar{z})^2} \right)}_{a_{i,j}} \tilde{p}_{0_{i,j}} + \underbrace{\left(\frac{\Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}}}{(\Delta \theta)^2} \right)}_{b_{i,j}} \tilde{p}_{0_{i+1,j}} + \tilde{p}_{0_{i-1,j}} \underbrace{\left(\frac{\Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{(\Delta \theta)^2} \right)}_{c_{i,j}} +$$

$$\tilde{p}_{0_{i,j+1}} \underbrace{\left(\frac{\lambda \Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}}{(\Delta \bar{z})^2} \right)}_{d_{i,j}} + \tilde{p}_{0_{i,j-1}} \underbrace{\left(\frac{\lambda \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{(\Delta \bar{z})^2} \right)}_{e_{i,j}} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\tilde{h}_{0_{i+1,j}} - \tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta \theta} \right)}_{f_{i,j}} = 0$$

Ou encore :

$$a_{i,j} \tilde{p}_{0_{i,j}} = b_{i,j} \tilde{p}_{0_{i+1,j}} + c_{i,j} \tilde{p}_{0_{i-1,j}} + d_{i,j} \tilde{p}_{0_{i,j+1}} + e_{i,j} \tilde{p}_{0_{i,j-1}} - f_{i,j} \quad (\text{IV.6})$$

Qui peut s'écrire aussi :

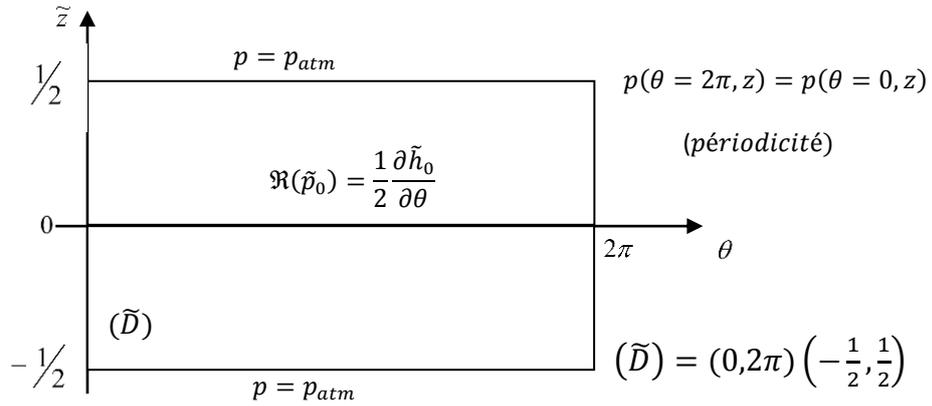
$$\tilde{p}_{0_{i,j}} = b'_{i,j} \tilde{p}_{0_{i+1,j}} + c'_{i,j} \tilde{p}_{0_{i-1,j}} + d'_{i,j} \tilde{p}_{0_{i,j+1}} + e'_{i,j} \tilde{p}_{0_{i,j-1}} - f'_{i,j}$$



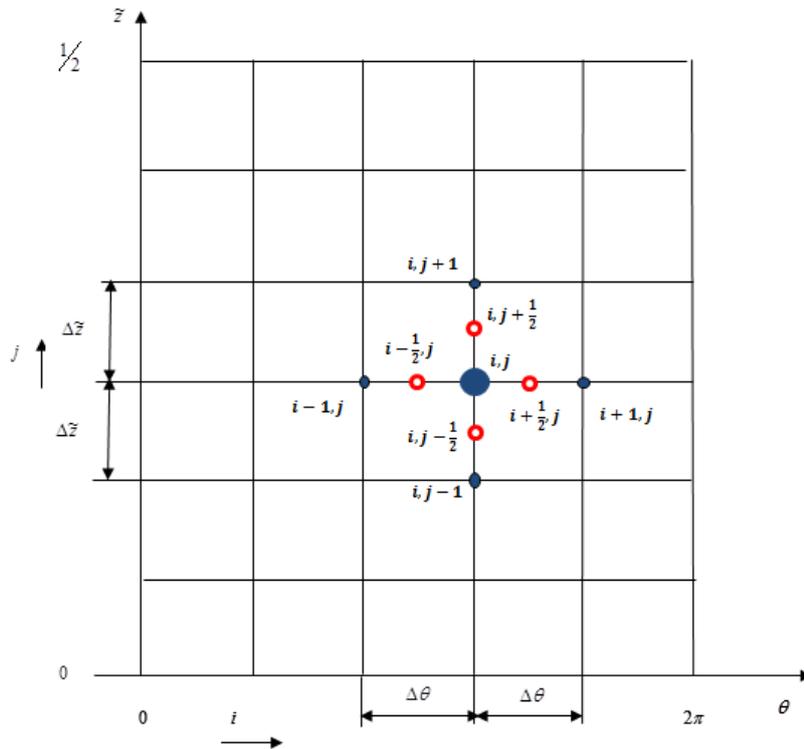
Avec : $b'_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{a_{i,j}}$; $c'_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{a_{i,j}}$; $d'_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{a_{i,j}}$; $e'_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{a_{i,j}}$ et $f'_{i,j} = \frac{f_{i,j}}{a_{i,j}}$

$$a_{i,j} = \frac{\Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}} + \Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{(\Delta\theta)^2} + \lambda \left(\frac{\Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}} + \Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{(\Delta\tilde{z})^2} \right) ; b_{i,j} = \frac{\Phi_{0_{i+\frac{1}{2},j}}}{(\Delta\theta)^2} ; c_{i,j} = \frac{\Phi_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{(\Delta\theta)^2}$$

$$d_{i,j} = \frac{\lambda\Psi_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}}{(\Delta\tilde{z})^2} ; e_{i,j} = \frac{\lambda\Psi_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{(\Delta\tilde{z})^2} \text{ et } f_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{h}_{0_{i+1,j}} - \tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right)$$



a) Problème continu



b) Problème discret

**Fig. IV.1 Représentation du domaine d'intégration (demi-palier)
et discrétisation par différences finies**



les caractéristiques du maillage sont :

N_θ : Nombre de mailles ou de cellules suivant la direction circonférentielle du palier

N_z : Nombre de mailles ou de cellules suivant la direction axiale du palier

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta} \quad , \text{ pas circonférentiel du maillage}$$

$$\Delta z = \frac{1}{N_z} \quad , \text{ pas axial du maillage}$$

En appliquant l'algorithme itératif de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation α , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{0,i,j}^{(k+1)} &= (1 - \alpha) \tilde{p}_{0,i,j}^{(k)} + \\ &\alpha \left(b'_{i,j} \tilde{p}_{0,i+1,j}^{(k)} + c'_{i,j} \tilde{p}_{0,i-1,j}^{(k+1)} + d'_{i,j} \tilde{p}_{0,i,j+1}^{(k)} + e'_{i,j} \tilde{p}_{0,i,j-1}^{(k+1)} - f'_{i,j} \right) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

où : k est le nombre d'itérations et $1 \leq \alpha < 2$. Si $\alpha = 1$, on obtient la méthode itérative de Gauss-Seidel classique.

La valeur optimale de α qui permet de converger vers la solution en un nombre minimal d'itérations est déterminée dans la pratique par expérimentation numérique .

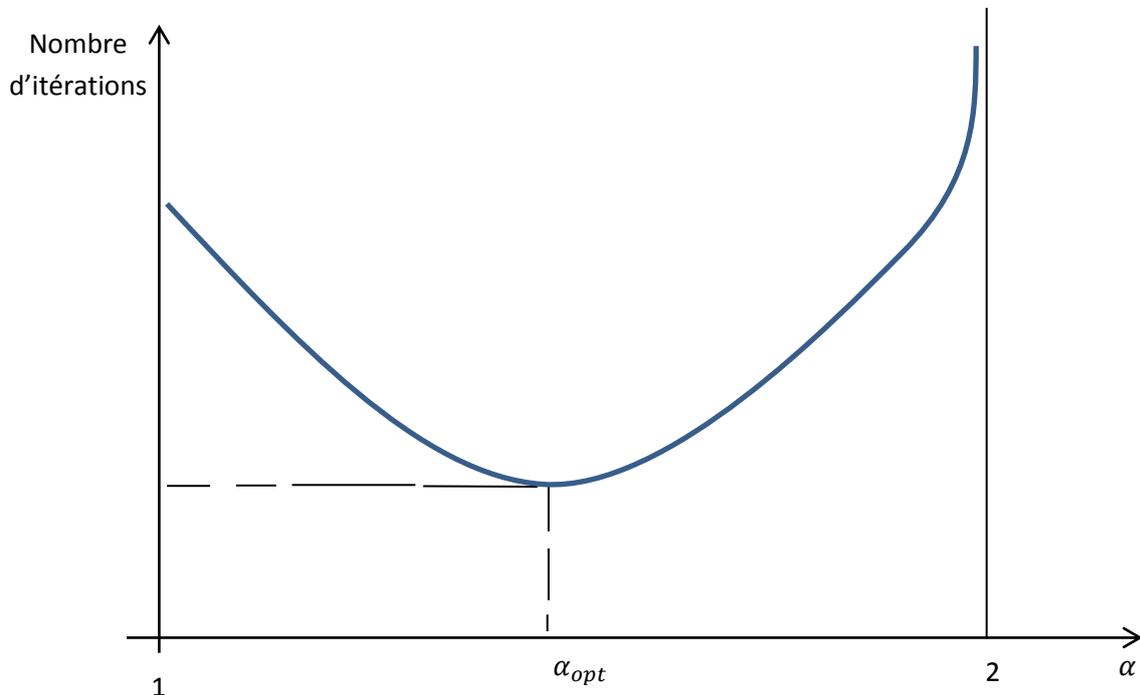


Fig. IV.2 Variation du nombre d'itérations en fonction du coefficient de relaxation :
détermination de la valeur optimale de α



Notons que pour $\alpha = 2$, le processus de calcul itératif de Gauss-Seidel diverge.

Dans la pratique, le coefficient α peut être calculé par la formule suivante :

$$\alpha_{opt} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \beta^2}} \quad \text{avec } \beta = \cos\left(\frac{\pi}{N_\theta}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N_z}\right) \quad (\text{IV.8})$$

Les simulations numériques effectuées ont montré que la valeur optimale de α s'échelonne entre 1.75 et 1.95.

IV.3 Discrétisation des équations de Reynolds d'ordre un par différences finies

En procédant de la même façon que pour l'équation de Reynolds d'ordre zéro, les équations aux différences finies associées aux deux équations de Reynolds d'ordre un (III.42 et III.43) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\Phi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \theta} \right] \Big|_{i,j} &\approx \frac{\Phi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \theta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \theta} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}} = \frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \theta} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \theta} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}} = \\ &= \frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\tilde{q}_{X,i+1,j} - \tilde{q}_{X,i,j}}{\Delta \hat{\theta}} \right) - \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\tilde{q}_{X,i,j} - \tilde{q}_{X,i-1,j}}{\Delta \hat{\theta}} \right)}{\Delta \hat{\theta}} = \\ &= \frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i+1,j} - \Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i,j} - \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i,j} + \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i-1,j}}{\Delta \hat{\theta}^2} = \\ &= \frac{-\tilde{q}_{X,i,j} \left(\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} + \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \right) + \Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i+1,j} + \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j} \tilde{q}_{X,i-1,j}}{\Delta \hat{\theta}^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\Psi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{i,j} &\approx \frac{\Psi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \bar{z}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} - \Psi_0 \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \bar{z}} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \bar{z}} = \frac{\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \bar{z}} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \bar{z}} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \bar{z}} = \\ &= \frac{\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{q}_{X,i,j+1} - \tilde{q}_{X,i,j}}{\Delta \bar{z}} \right) - \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{q}_{X,i,j} - \tilde{q}_{X,i,j-1}}{\Delta \bar{z}} \right)}{\Delta \bar{z}} = \\ &= \frac{-\tilde{q}_{X,i,j} \left(\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} + \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}} \right) + \Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} \tilde{q}_{X,i,j+1} + \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}} \tilde{q}_{X,i,j-1}}{\Delta \bar{z}^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[\frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2}{k_{x_0}} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}} \tilde{q}_X \right] \Big|_{i,j} &\approx \\ &= \frac{\left(\frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2}{k_{x_0}} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}} \tilde{q}_X \right)_{i+1,j} - \left(\frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2}{k_{x_0}} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}} \tilde{q}_X \right)_{i-1,j}}{2\Delta \hat{\theta}} = \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}} \right)_{i+1,j} \tilde{q}_{X,i+1,j} - 3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}} \right)_{i-1,j} \tilde{q}_{X,i-1,j}}{2\Delta \hat{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$



$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\frac{3\lambda \tilde{L} \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{k_{z_0}} \tilde{q}_X \right]_{i,j} \approx \frac{\frac{3\lambda \tilde{L} \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{k_{z_0}} \tilde{q}_X \Big|_{i,j+1} - \frac{3\lambda \tilde{L} \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{k_{z_0}} \tilde{q}_X \Big|_{i,j-1}}{2\Delta \tilde{z}} \quad (IV.11)$$

$$\text{et } \frac{\partial \tilde{q}_X}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{i,j} \approx \frac{\tilde{q}_X \Big|_{i+1,j} - \tilde{q}_X \Big|_{i-1,j}}{2\Delta \hat{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit par conséquent : } & -\tilde{q}_X \Big|_{i,j} \left[\frac{(\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} + \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j})}{\Delta \hat{\theta}^2} + \lambda \frac{(\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} + \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}})}{\Delta \tilde{z}^2} + i\gamma \tilde{L} \right] + \tilde{q}_X \Big|_{i+1,j} \left[\frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}^2} + \right. \\ & \left. \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}}}{2\Delta \hat{\theta} k_{x_0,i+1,j}} \Big|_{i+1,j} - \frac{\tilde{L}}{2} \frac{1}{2\Delta \hat{\theta}} \right] + \tilde{q}_X \Big|_{i-1,j} \left[\frac{\Phi_{0,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}^2} - \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}}}{2\Delta \hat{\theta} k_{x_0,i-1,j}} \Big|_{i-1,j} + \frac{\tilde{L}}{2} \frac{1}{2\Delta \hat{\theta}} \right] + \lambda \tilde{q}_X \Big|_{i,j+1} \left[\frac{\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \tilde{z}^2} + \right. \\ & \left. \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{2\Delta \tilde{z} k_{z_0,i,j+1}} \Big|_{i,j+1} \right] + \lambda \tilde{q}_X \Big|_{i,j-1} \left[\frac{\Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \tilde{z}^2} - \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{2\Delta \tilde{z} k_{z_0,i,j-1}} \Big|_{i,j-1} \right] = \\ & -\frac{1}{2} \sin \hat{\theta}_i + i\gamma \cos \hat{\theta}_i - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_{0i,j}^2 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{i,j} \cos \hat{\theta}_i}{\tilde{c}_{0i,j}} - 3\Phi_{0i,j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos \hat{\theta}}{\tilde{c}_0} \right) \right)_{i,j} - \\ & 3\lambda \Psi_{0i,j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \cos \hat{\theta}}{\tilde{c}_0} \right) \right)_{i,j} \quad (IV.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{q}_Y \Big|_{i,j} \left[\frac{(\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j} + \Phi_{0,i-\frac{1}{2},j})}{\Delta \hat{\theta}^2} + \lambda \frac{(\Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}} + \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}})}{\Delta \tilde{z}^2} + i\gamma \tilde{L} \right] + \tilde{q}_Y \Big|_{i+1,j} \left[\frac{\Phi_{0,i+\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}^2} + \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}}}{2\Delta \hat{\theta} k_{x_0,i+1,j}} \Big|_{i+1,j} - \frac{\tilde{L}}{2} \frac{1}{2\Delta \hat{\theta}} \right] + \\ & \tilde{q}_Y \Big|_{i-1,j} \left[\frac{\Phi_{0,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \hat{\theta}^2} - \frac{3\tilde{L}\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \hat{\theta}}}{2\Delta \hat{\theta} k_{x_0,i-1,j}} \Big|_{i-1,j} + \frac{\tilde{L}}{2} \frac{1}{2\Delta \hat{\theta}} \right] + \tilde{q}_Y \Big|_{i,j+1} \left[\frac{\lambda \Psi_{0,i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{3\lambda \tilde{L} \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{2\Delta \tilde{z} k_{z_0,i,j+1}} \Big|_{i,j+1} \right] + \\ & \tilde{q}_Y \Big|_{i,j-1} \left[\frac{\lambda \Psi_{0,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta \tilde{z}^2} - \frac{3\lambda \tilde{L} \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}}{2\Delta \tilde{z} k_{z_0,i,j-1}} \Big|_{i,j-1} \right] = \\ & \frac{1}{2} \cos \hat{\theta}_i + i\gamma \sin \hat{\theta}_i - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_{0i,j}^2 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{i,j} \sin \hat{\theta}_i}{\tilde{c}_{0i,j}} - 3\Phi_{0i,j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin \hat{\theta}}{\tilde{c}_0} \right) \right)_{i,j} - \\ & 3\lambda \Psi_{0i,j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_0^2 \sin \hat{\theta}}{\tilde{c}_0} \right) \right)_{i,j} \quad (IV.13) \end{aligned}$$

Les systèmes d'équations algébriques résultant de la discrétisation des deux équations dynamiques complexes sont résolus par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation appelée aussi méthode des sur-relaxations successives (S.O.R :Successive



Over Relaxation method) en vue de déterminer les pressions complexes $\tilde{q}_{X_{i,j}}$ et $\tilde{q}_{Y_{i,j}}$. Notons que ces équations sont résolues seulement aux nœuds appartenant au domaine pour lequel la pression stationnaire p_{0ij} est positive au moyen d'un codage des nœuds appartenant à ce domaine.

IV.4 Solution statique du problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée

Dans le cas d'une charge imposée, il convient d'utiliser le paramétrage (X,Y) pour l'écriture de l'équation de Reynolds et le calcul des coefficients dynamiques du palier. Il y a lieu de déterminer a priori les coordonnées de la position d'équilibre du centre de l'arbre (rotor) résultant de l'application de la charge statique à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Le processus de calcul comprend les étapes suivantes :

- 1- Lecture des données : $W_0, R/L, \tilde{\ell}, \tilde{t}_h, \tilde{C}_d, \sigma, N_\theta, N_z$, valeurs initiales des coordonnées du centre de l'arbre (X, Y), facteurs de relaxation, critères de convergence et le nombre maximal d'itérations
- 2- Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée dans le cas indéformable (rigide) ; c'est-à-dire lorsque $L=0$: $\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X} \cos \theta + \tilde{Y} \sin \theta$
- 3- Initialiser le compteur d'itération n à 0
- 4- Initialiser le champ de pression statique adimensionné, $\tilde{p}_0^{(n)} = 0$ et l'épaisseur du film adimensionnée, $\tilde{h}^{(n)} = \tilde{h}_0$
- 5- Calculer le champ de pression hydrodynamique statique adimensionné, $\tilde{p}_0^{(n+1)}$ par résolution de l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro (III-41)
- 6- Modifier l'épaisseur du film en tenant compte des déformations élastiques par l'équation suivante : $\tilde{h}^{(n+1)} = \tilde{h}_0 + \tilde{L}_0 \left((1 - \Omega) \tilde{p}_0^{(n)} + \Omega \tilde{p}_0^{(n+1)} \right)$, où Ω est le coefficient de sous-relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1.
- 7- vérifier le critère de convergence : $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \left| \frac{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)} - \tilde{p}_{0ij}^{(n)}}{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-6}$, où N est le nombre total de nœuds pour lesquels la pression est positive, si la convergence n'est pas atteinte, incrémenter le nombre d'itération de 1 et revenir à l'étape 5.
- 8- Si la convergence est atteinte, calculer les composantes de la portance hydrodynamique : $\tilde{F}_{x0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z}$, $\tilde{F}_{y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z}$
- 9- Vérifier les équations d'équilibre du rotor (III.48). Si ces équations ne sont pas vérifiées, calculer les nouvelles valeurs de X et Y par la méthode de Newton-Raphson et retourner à l'étape 2



- 10- Coder la région active du palier dans laquelle la pression statique \tilde{p}_0 est positive pour la définition du domaine d'intégration des deux équations différentielles d'ordre un (III-42 et III-43).
- 11- Calculer les gradients circonférentiel et axial de \tilde{p}_0 et \tilde{h}_0 par différentiation numérique.

IV.5 Solution dynamique du problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée: calcul des coefficients dynamiques synchrones et de la réponse dynamique du système à une excitation synchrone

Le processus de calcul est le suivant :

- 1- Poser $\gamma = 1$ (excitation dynamique synchrone, $v=\omega$)
- 2- Résoudre les deux équations aux dérivées partielles d'ordre un (III-42) et (III-43) sur la région active du film pour obtenir les pressions dynamiques complexes adimensionnées $(\tilde{q}_x, \tilde{q}_y)$ par la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R). Le critère d'arrêt des processus est similaire à celui utilisé pour le calcul du champ de pression hydrodynamique statique \tilde{p}_0 .
- 3- Calculer les coefficients dynamiques synchrones du palier (Eqs III-46).
- 4- Calculer la trajectoire elliptique décrite par le centre de l'arbre (rotor) dans le palier par intégration des équations de mouvement du rotor à l'aide du schéma d'Euler (III-66).

IV.6 Validation des programmes

Pour valider le programme de calcul développé pour l'étude du comportement dynamique linéaire des paliers compliants lubrifiés par des fluides polaires non newtoniens et fonctionnant en régime laminaire ou turbulent, il est nécessaire de faire une comparaison des résultats obtenus à partir de la présente étude avec ceux disponibles dans la littérature. Comme il est montré, dans le tableau IV-1, les résultats obtenus dans le cas d'un palier rigide sont en bonne concordance avec ceux calculés par le logiciel de calcul des paliers développé au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'université de Poitiers par M. Fillon. Les données du palier sont :

$$W_{x0}=12040 \text{ (N)}, W_{y0}=0, L=0.050 \text{ (m)}, R=0.025 \text{ (m)}, C=50.10^{-6} \text{ (m)}, \mu_0=30 \times 10^{-3} \text{ (Pa.s)},$$

$$\rho_0=850 \text{ (kg/m}^3\text{)}, \alpha=0. \text{ Pa}^{-1}, N=3000. \text{ (rpm)}$$



Tableau IV-1 Comparaison des caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier rigide de longueur finie $\left(\frac{R}{L} = 0,5\right)$

ε_0	0.700	(1)	Erreur relative (%)
	0.701	(2)	
			0.14
S	0.07789	(1)	0.03
	0.07786	(2)	
ϕ_0 (deg)	44.7	(1)	0.0
	44.7	(2)	
A_{XX}	3.50536	(1)	0.17
	3.49912	(2)	
A_{XY}	3.39343	(1)	0.12
	3.39766	(2)	
A_{YX}	-0.02897	(1)	0.75
	-0.02919	(2)	
A_{YY}	1.9087	(1)	0.29
	1.9143	(2)	
B_{XX}	6.10638	(1)	0.18
	6.09495	(2)	
$B_{XY} = B_{YX}$	2.01546	(1)	0.47
	2.02504	(2)	
B_{YY}	1.99769	(1)	0.52
	2.00822	(2)	

(1) Résultats de M. Fillon [28]; (2) Présente étude



IV.7 Etude paramétrique

L'étude paramétrique menée dans ce travail permet de mettre en évidence l'influence des couples de contrainte et du régime d'écoulement sur les caractéristiques et la réponse dynamiques d'un rotor flexible de type Jeffcott monté dans des paliers lisses à film d'huile fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique.

Les calculs des performances dynamiques linéaires dues à des faibles amplitudes de perturbation sont effectués en supposant que le changement de la structure (revêtement élastique mince) dans les conditions dynamiques est très faible.

Les différentes données de cette étude sont reportées dans le tableau IV-2.

Tableau IV-2: **Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement**

Caractéristiques géométriques	
- Diamètre du palier, L	$320 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Rayon de l'arbre, R	$250 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Jeu radial, C	$350 \times 10^{-6} \text{ m}$
Conditions de fonctionnement	
- Vitesse angulaire de l'arbre, ω	$100 \times \pi \text{ rad/s}$
Propriétés du lubrifiant, ISO VG 32 à 40°C	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, μ_0	0.015 Pa.s
- Masse volumique, ρ	870 kg/m^3
Caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement de surface	
- Module d'Young du matériau, E	0.9GPa
- Coefficient de Poisson, ν	0.35
- Epaisseur du revêtement mince, t_h	$1 \times 10^{-2} \text{ m}$

IV.7.1 Réponse d'un rotor rigide équilibré (sans balourd)

La figure (IV.3) montre les positions d'équilibre des centres des rotors rigide obtenue par la résolution des problèmes hydrodynamique inverse ; c'est-à-dire lorsque la charge est imposée à l'aide de la méthode itérative de Newton amortie. Les calculs ont été effectués dans le cas d'un fluide newtonien ($\tilde{l} = 0$) et non newtonien ($\tilde{l} = 0.3$) en écoulement laminaire et non laminaire. Les résultats obtenus montrent que la prise en considération des couples des contraintes et de la turbulence, pour une même charge statique appliquée, permet d'obtenir une excentricité de fonctionnement du palier plus faible que celle prédite dans le cas newtonien et laminaire. D'autre part, on remarque que la turbulence entraîne une augmentation de l'angle de calage ce qui pourrait conduire à une instabilité du système.



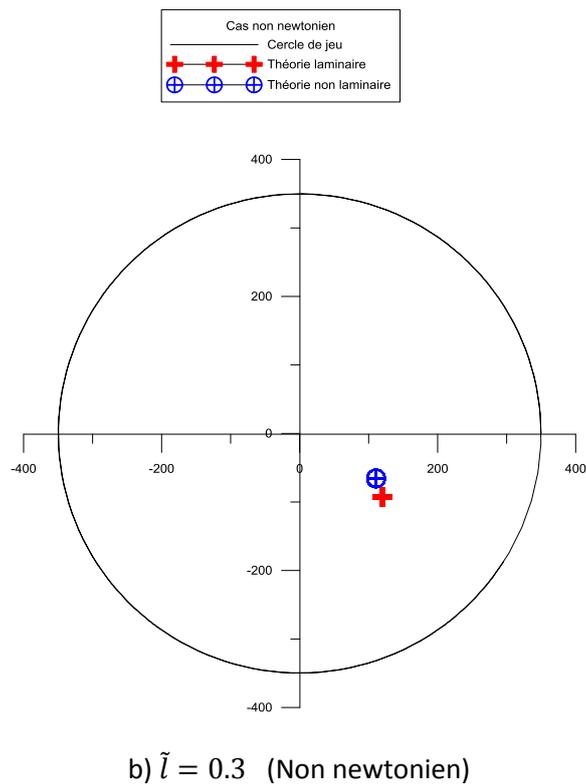
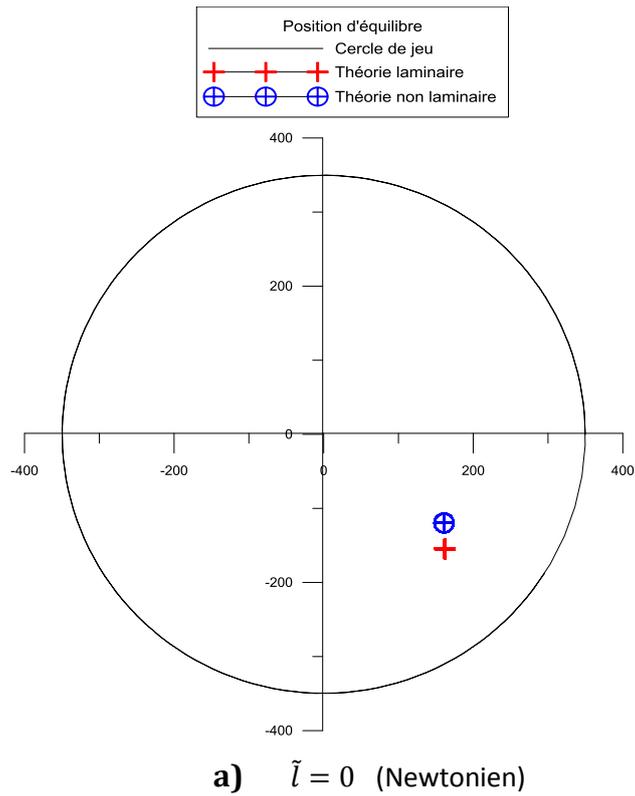


Fig. IV.3 Positions d'équilibre statique calculées par l'algorithme de Newton dans le cas newtonien et non newtonien en utilisant les théories laminaire et non laminaire



IV.7.2 Réponse d'un rotor rigide déséquilibré (avec faible balourd $\varepsilon_b = \frac{e_b}{c} = 0.1$)

La figure (IV.4) représente les orbites linéaires laminaire et non laminaire du centre du rotor à l'intérieur du palier calculées pour un fluide newtonien et non newtonien. Ces orbites sont obtenues à partir de la résolution des équations de mouvement linéarisées du rotor à l'aide du schéma explicite d'Euler. L'utilisation de l'approche dynamique linéaire basée sur la schématisation du film lubrifiant par quatre ressorts et quatre amortisseurs linéaires donne des orbites de forme elliptique aussi bien en théorie laminaire que non laminaire. La comparaison des orbites calculées en régimes laminaire et turbulent permet de déceler que la taille de l'orbite calculée en régime turbulent est plus importante que celle obtenue en laminaire. On peut conclure que la turbulence entraîne une augmentation des amplitudes de vibrations dues au balourd surtout dans le cas newtonien lorsque les couples de contrainte sont négligés.

Dans la figure (IV.5), on compare les orbites décrites par le centre du rotor calculées pour un fluide newtonien et non newtonien en utilisant les hypothèses d'écoulement laminaire et non laminaire. Les effets non newtoniens donnent des orbites plus aplaties suivant la direction de l'excentricité et plus allongées suivant la direction normale à celle de l'excentricité aussi bien en régime laminaire que turbulent. En outre, les effets non newtoniens permettent de déplacer le centre de l'orbite vers celui du palier.



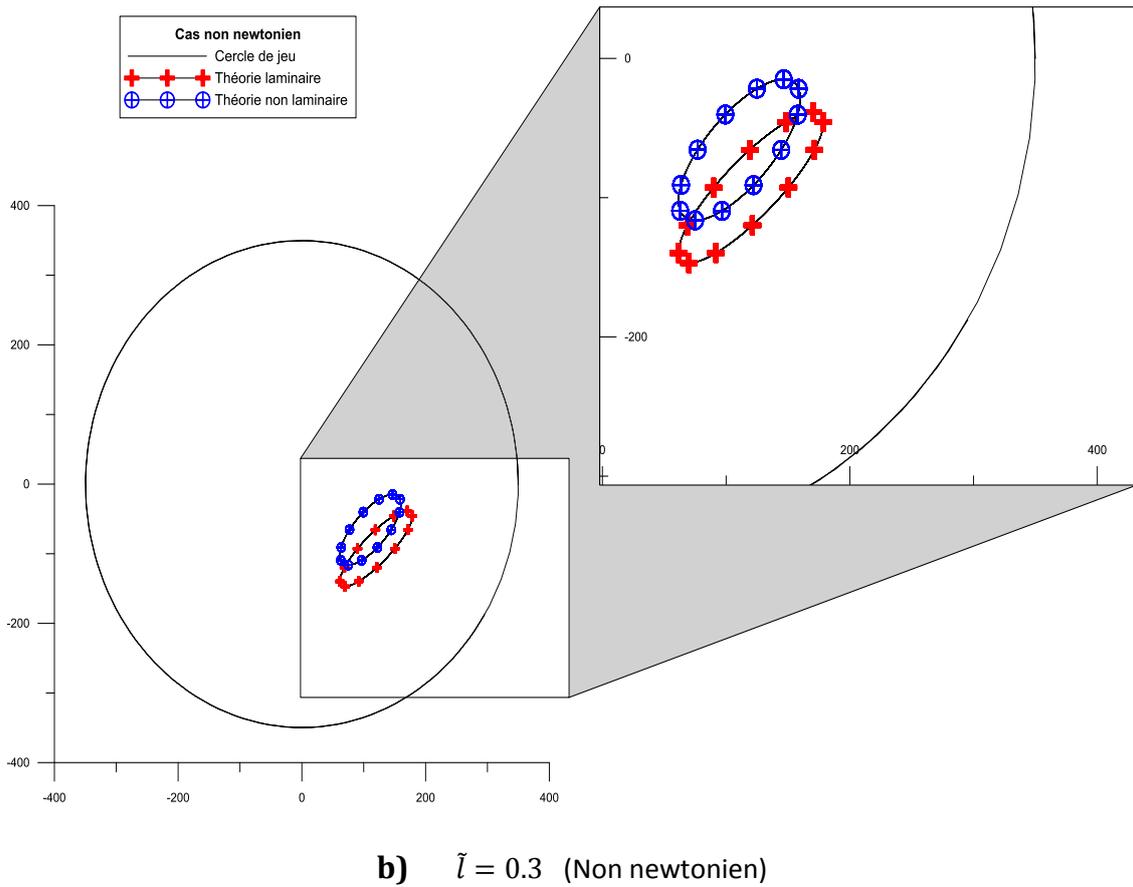
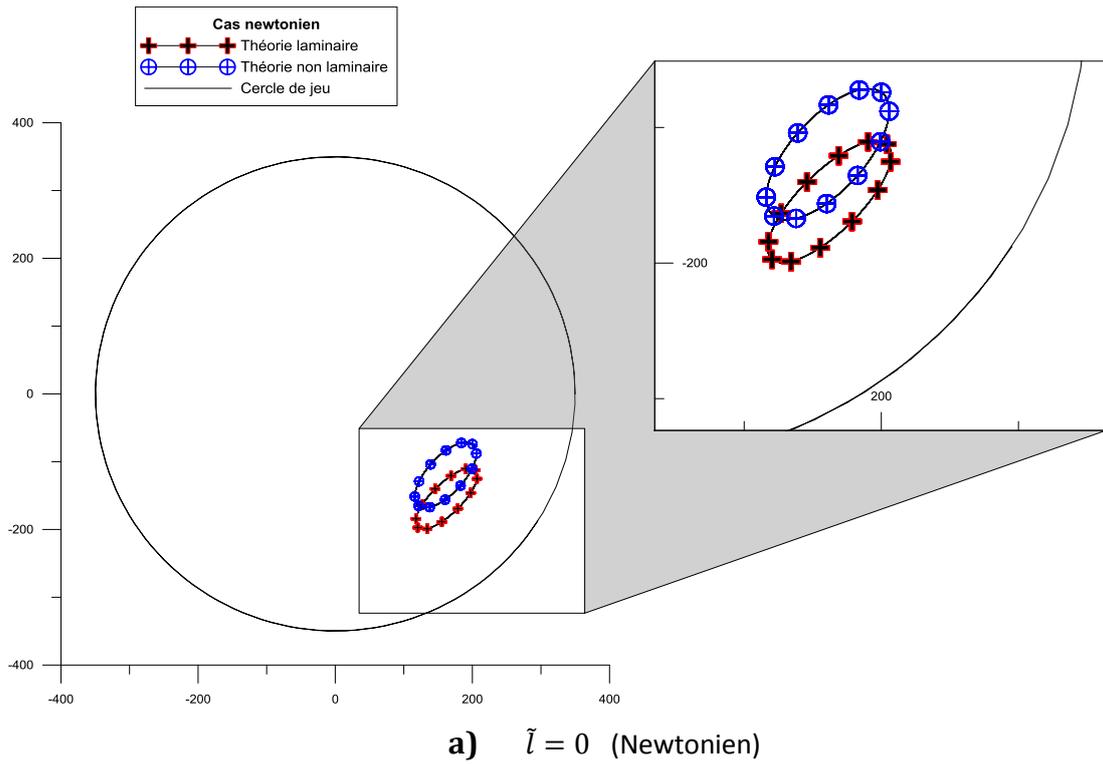
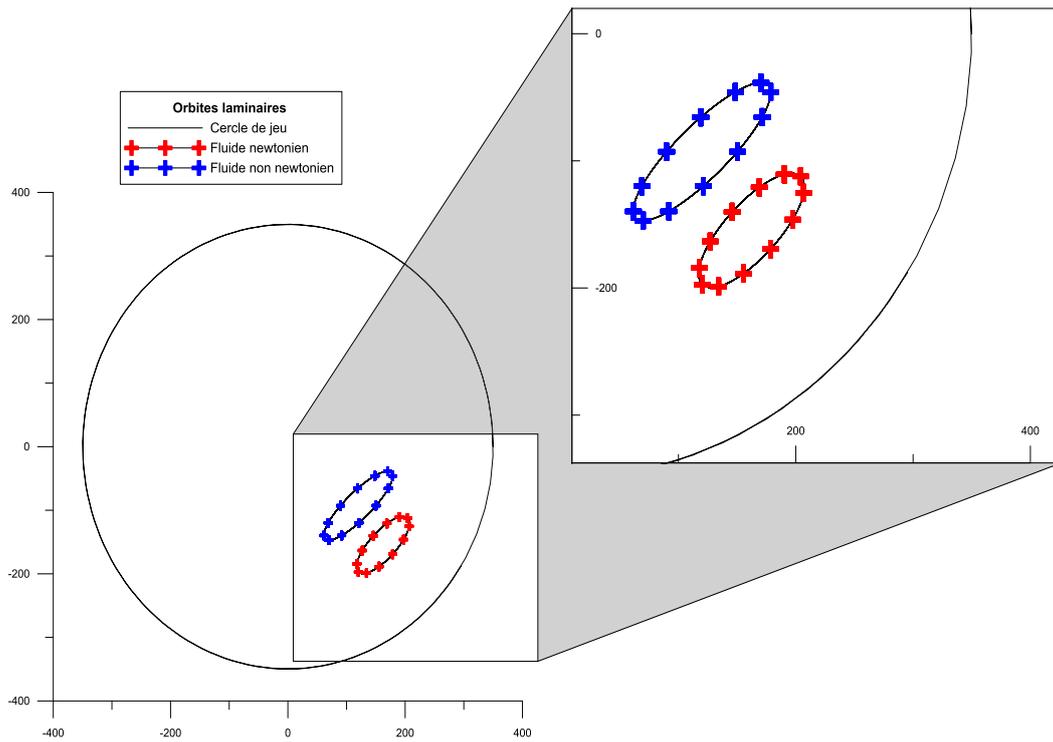
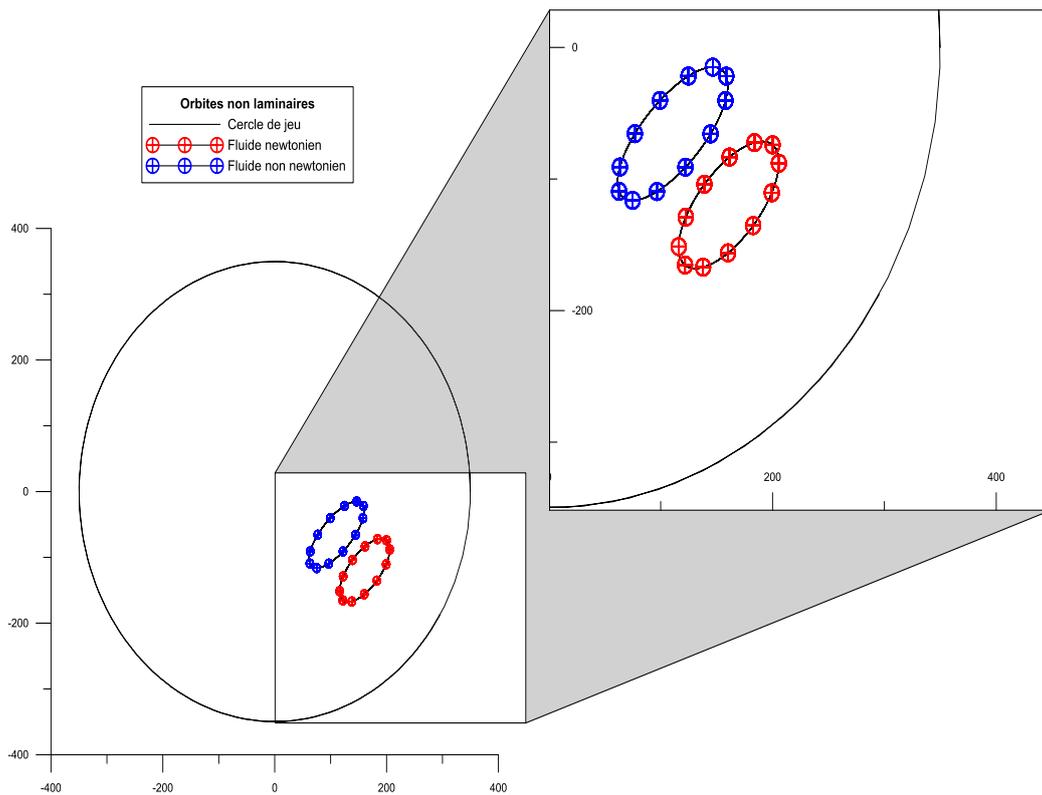


Fig. IV.4 Réponses dynamiques linéaires du rotor rigide déséquilibré





a) Régime laminaire



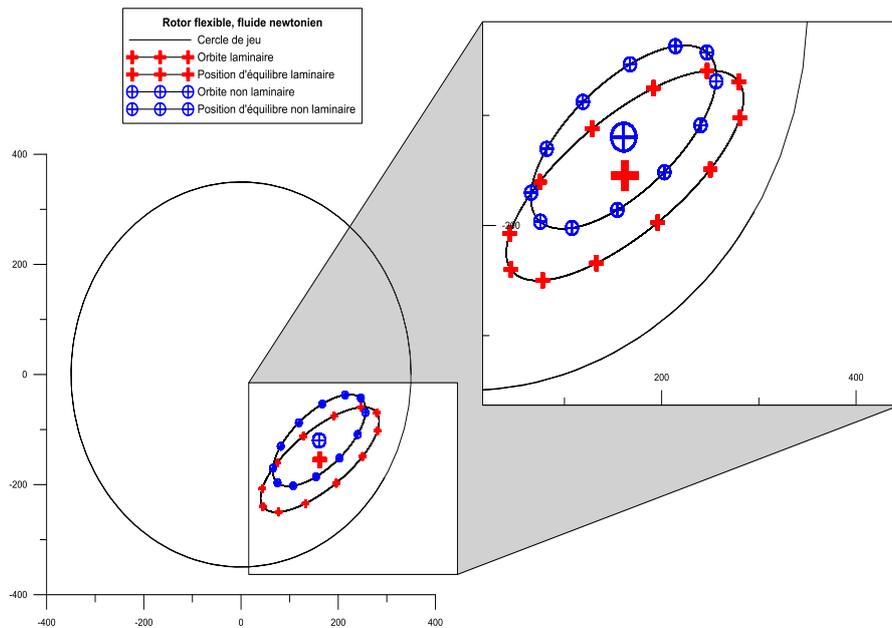
b) Régime non laminaire

Fig. IV.5 Réponse dynamique linéaire du rotor calculées en régime laminaire et non laminaire

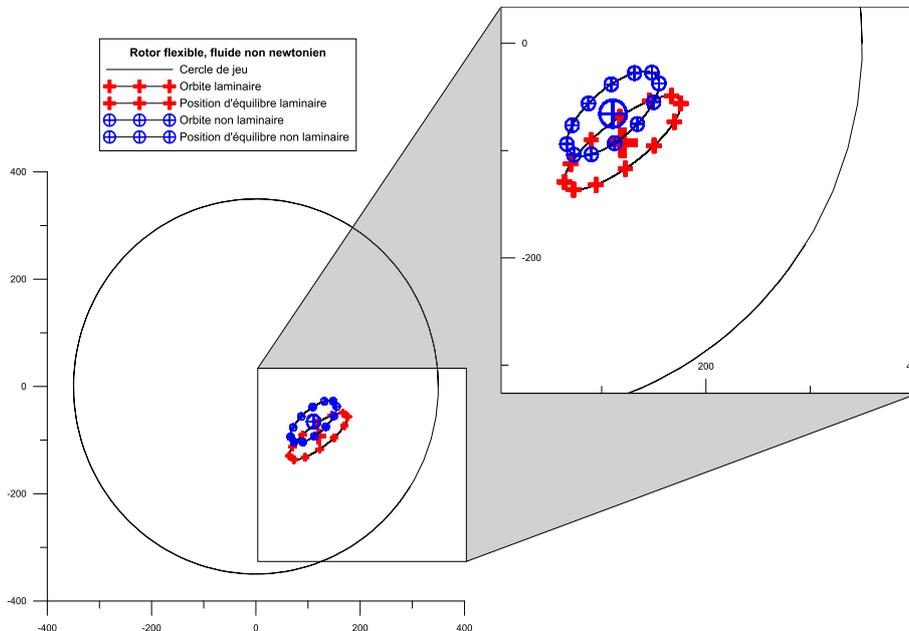


IV.7.3 Réponse d'un rotor flexible déséquilibré (avec faible balourd $\varepsilon_b = \frac{e_b}{c} = 0.1$)

Dans la figure (IV.6a), on représente les orbites calculées dans le cas d'un rotor flexible pour un fluide newtonien dont la taille est nettement plus grande que celles prédites dans le cas du rotor rigide figure (IV.4a). Par contre, la tendance inverse est observée dans le cas du fluide non newtonien figure (IV.6b).



a) Fluide newtonien



b) Fluide non newtonien

Fig. IV.6 Réponses dynamiques linéaires d'un rotor flexible

ANNEXE A

Equations géométrique du film pour un

La figure (1) montre un bel exemple de palier compliant d'ordre d'hélice marine dont le coussinet est muni d'une couche en élastomère

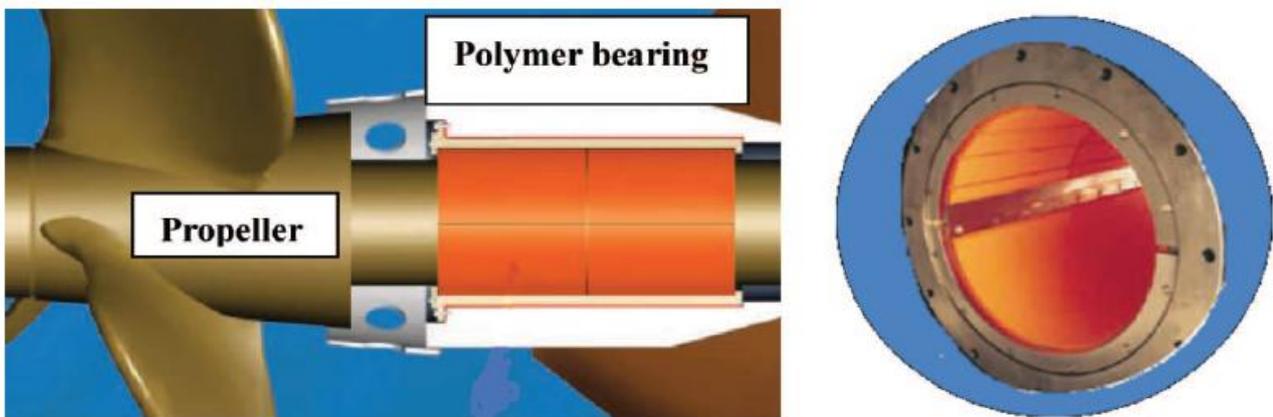


Fig. 1: vue d'un palier compliant d'hélice marine

La figure (2) montre schématiquement un palier lisse compliant aligné (les axes de l'arbre et du coussinet sou parallèles) où le centre de l'arbre O_{j_0} occupe la position d'équilibre définie par les coordonnées (ε_0, ϕ_0) . La configuration du palier rigide est représentée par le cercle de centre O_b et de rayon $(R + C)$. L'origine du système de coordonnée cartésienne (X, Y, Z) lie à la charge statique \vec{W}_0 est située au centre du coussinet rigide O_b . la coordonnée circonférentielle θ est mesurée à partir de la ligne des centres ou l'axe $O_b\vec{r}$. l'arbre de rayon , supposé rigide , donne avec une vitesse angulaire constante W autour de l'axe $O_b\vec{z}$

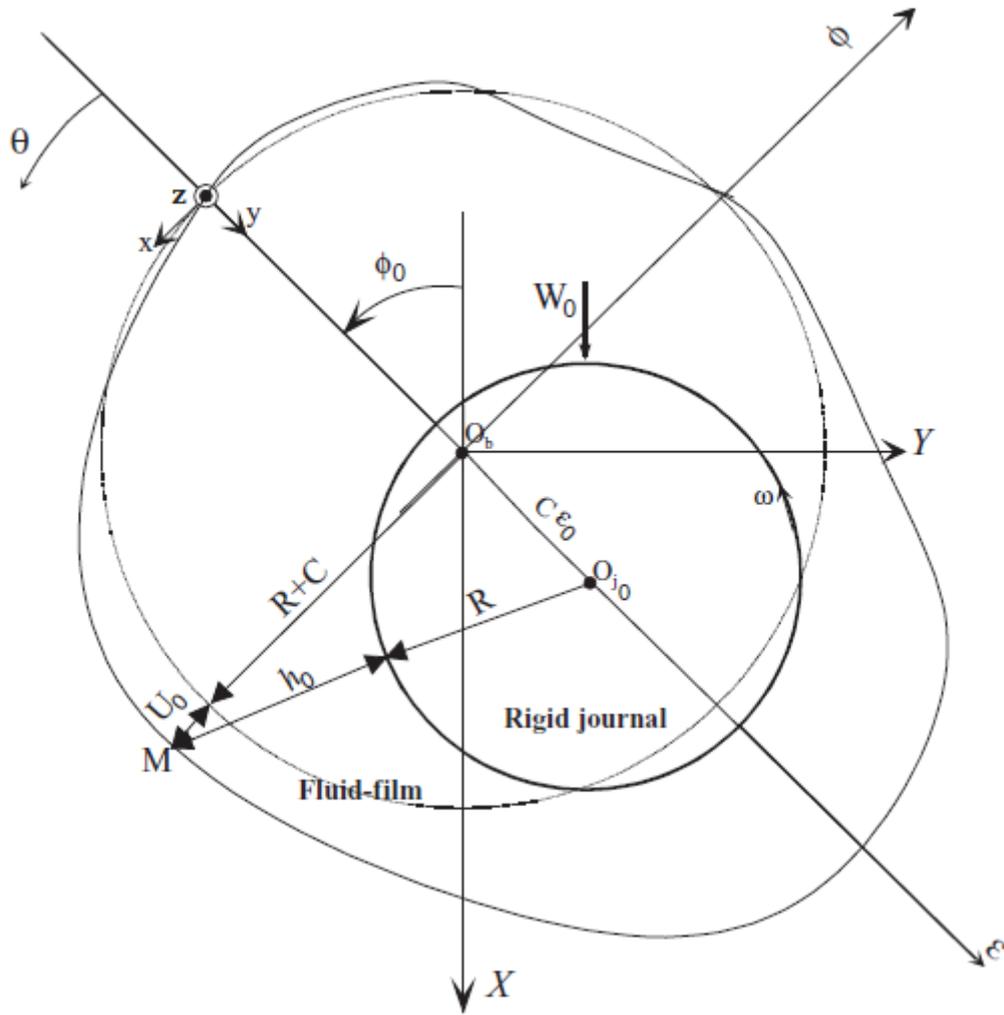


Fig. 2. schéma d'un palier lisse revêtu

L'équation géométrique du film peut être obtenue en appliquant la règle de cosinus au triangle de sommets O_b , O_{j0} et M :

$$(R + h_0)^2 = (R + C + U_0)^2 + e_0^2 - 2e_0(R + C + U_0) \underbrace{\cos(\theta - \pi)}_{= -\cos \theta} \quad (1)$$

Où :

$C = R_{\text{coussinet}} - R_{\text{arbre}}$ est le jeu radial du palier, h_0 : l'épaisseur du film, U_0 : le déplacement élastique radial de la couche et $e_0 = c\varepsilon_0$ l'excentricité

Eu divisant les deux membres de l'équation (1) par R^2 et en négligeant les termes en $\left(\frac{h_0}{R}\right)^2$, $\left(\frac{C}{R}\right)^2$, $\left(\frac{U_0}{R}\right)^2$ et $\left(\frac{e_0}{R}\right)^2$, l'équation (1) se réduit à

$$h_0 = C(1 + \varepsilon_0 \cos \theta) + U_0 \quad (2)$$

Ou encore en utilisant la coordonnée $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} h_0 &= C[1 + \varepsilon_0 \cos(\hat{\theta} - \phi_0)] + U_0 \\ &= C + X \cos \hat{\theta} + Y \sin \hat{\theta} + U_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Avec $X = C \varepsilon_0 \cos \phi_0$ et $Y = C \varepsilon_0 \sin \phi_0$

Dans les équations (2) et (3), le champ de déplacement radial se calcule par la relation suivante :

$$U_0 = \alpha_0 p_0 \quad (4)$$

Où l_0 est l'opérateur de compliance de la structure défini par

$$l_0 = \frac{X - 1}{X + 1} \frac{th}{G}$$

th : est l'épaisseur de la couche élastique ,

$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ est le module de cisaillement de coulomb (E :module d'élasticité d'Young et σ :le coéf de poisson)

χ :étant le paramètres d'élasticité qui s'exprime par :

-Hypothèse de déformation planes :

$$\chi = 3 - 4\sigma$$

-Hypothèse de contrainte

$$\chi = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$$

Dans le cas d'un palier , on utilise l'hypothèse de déformation planes .dans ce cas l_0 s'exprime par :

$$l_0 = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma} \frac{th}{E}$$

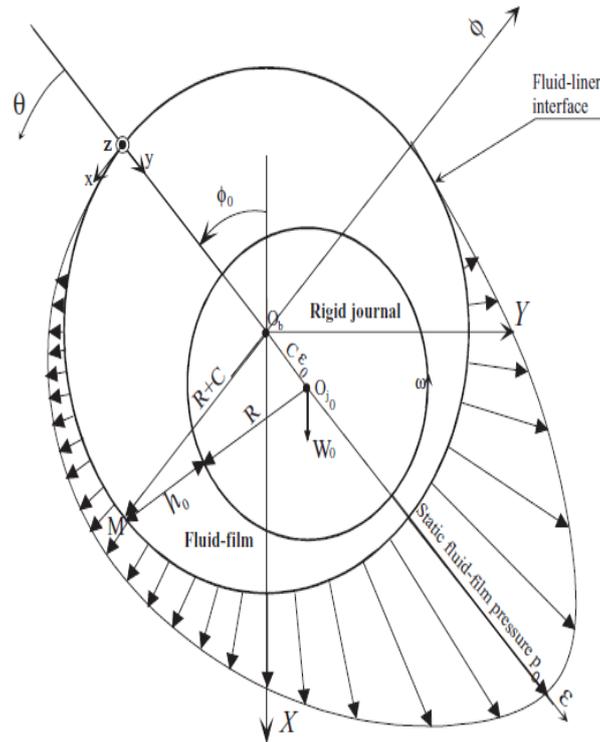


Fig 3. Schéma d'un palier lisse rigide (non revêtu)

Lorsque le palier est rigide (non revêtu), le module d'élasticité $E \rightarrow \infty$ ce qui conduit à l'annulation de α_0 .

Dans ces conditions ,les équations (2) et (3) de simplifient et s'écrivent :

$$h_0 = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (5)$$

Ou

$$h_0 = C + X \cos \hat{\theta} + Y \sin \hat{\theta} \quad (6)$$

Conclusion Générale

Notre travail est essentiellement consacré au développement d'une approche dynamique linéaire permettant de prendre en considération les effets combinés de la flexibilité des rotors, de la turbulence et des couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le fluide lubrifiant sur la réponse dynamique linéaire d'une ligne d'arbre flexible de type Jeffcott supportée par deux paliers hydrodynamiques. Dans cette approche, le rotor a été assimilé à une poutre en flexion simplement appuyée munie d'un disque rigide de masse $2m$ au milieu et caractérisée par une raideur $2k_r$ et un amortissement $2b_r$. D'autre part, le modèle de fluide de Vijay Kumar Stokes pour un écoulement non laminaire a été utilisé en vue de prendre en considération les effets non newtoniens dus à l'existence des couples de contraintes dans le lubrifiant.

L'utilisation de la théorie linéaire a permis de schématiser chaque palier par quatre ressorts et quatre amortisseurs. Les coefficients de raideur et d'amortissement sont calculés par une méthode de perturbation pour un mouvement vibratoire harmonique de faible amplitude du rotor.

La réponse dynamique du rotor a été déterminée à partir de l'intégration des équations de la dynamique des rotors linéarisées écrites dans le cas d'un rotor flexible à l'aide du schéma d'Euler.

Il nous semble que les objectifs fixés ont été atteints. En particulier, pour la résolution du problème de lubrification hydrodynamique inverse ; c'est-à-dire lorsque le palier fonctionne à charge imposée reflétant le fonctionnement réel des paliers. Dans ces conditions, la position d'équilibre statique du rotor est déterminée de façon itérative à l'aide de la méthode de Newton-Raphson amortie.

L'étude paramétrique a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de la flexibilité du rotor, de la turbulence et de la rhéologie des huiles lubrifiantes dopées sur la réponse dynamique du système rotor-palier. Il a été conclu ce qui suit :

- la prise en considération des couples des contraintes et de la turbulence, pour une même charge statique appliquée, permet d'obtenir une excentricité de fonctionnement du palier plus faible que celle prédite dans le cas newtonien et laminaire,
- la turbulence entraîne une augmentation de l'angle de calage ce qui pourrait conduire à une instabilité du système rotor-palier,

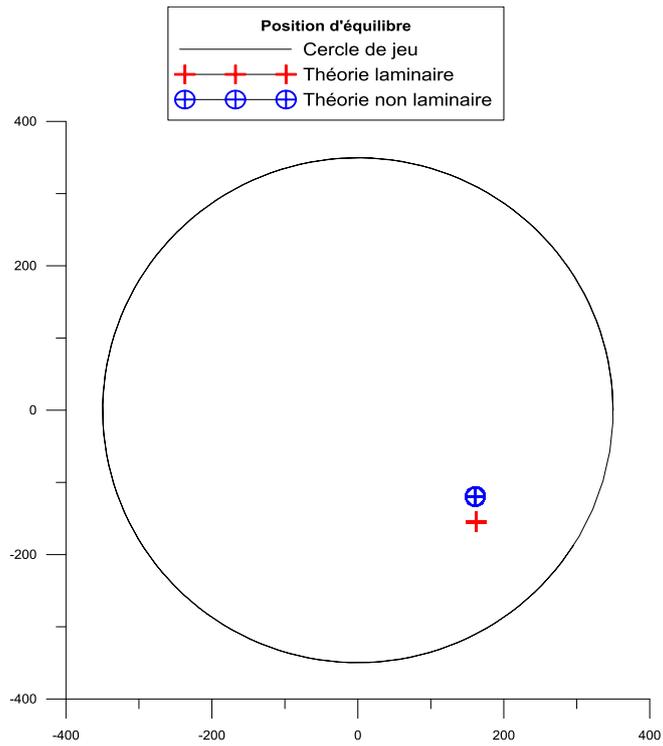


- la turbulence entraîne une augmentation des amplitudes de vibrations dues au balourd surtout dans le cas newtonien lorsque les couples de contrainte sont négligés,
- les effets des couples de contrainte permettent de déplacer le centre de l'orbite vers celui du palier et d'avoir des orbites elliptiques plus aplaties suivant la direction de l'excentricité et plus allongées suivant la direction normale à celle de l'excentricité,
- la prise en considération de la flexibilité du rotor permet d'obtenir des orbites elliptiques de taille plus grande que celles calculées dans le cas du rotor rigide.

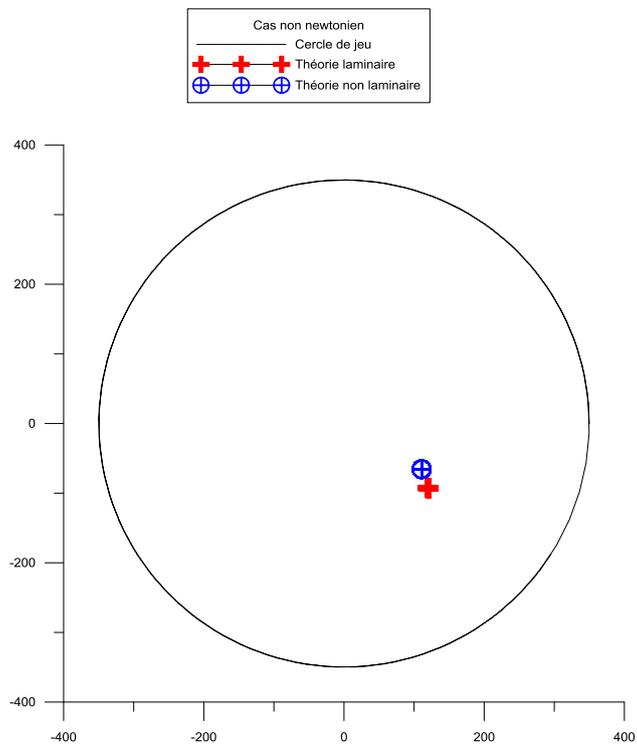
Les prolongements possibles de cette étude sont :

- utilisation de l'approche dynamique non linéaire car l'approche linéaire adoptée dans la présente étude s'avère insuffisante voire mise en défaut lorsque les charges dynamiques et les vitesses de rotation deviennent trop importantes ou lorsque le palier fonctionne dans une zone instable,
- prise en considération des déformations élastiques du revêtement de surface dues aux pressions hydrodynamiques.



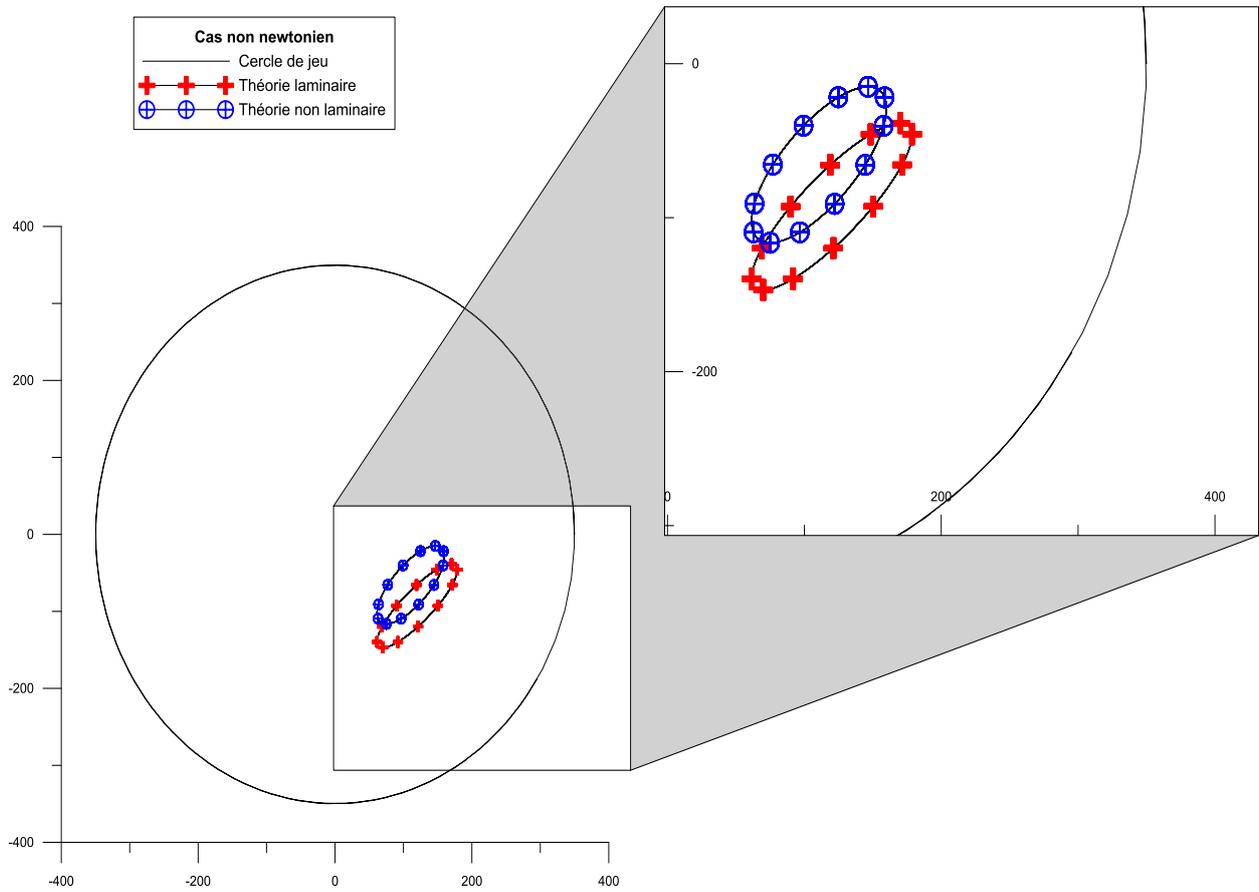
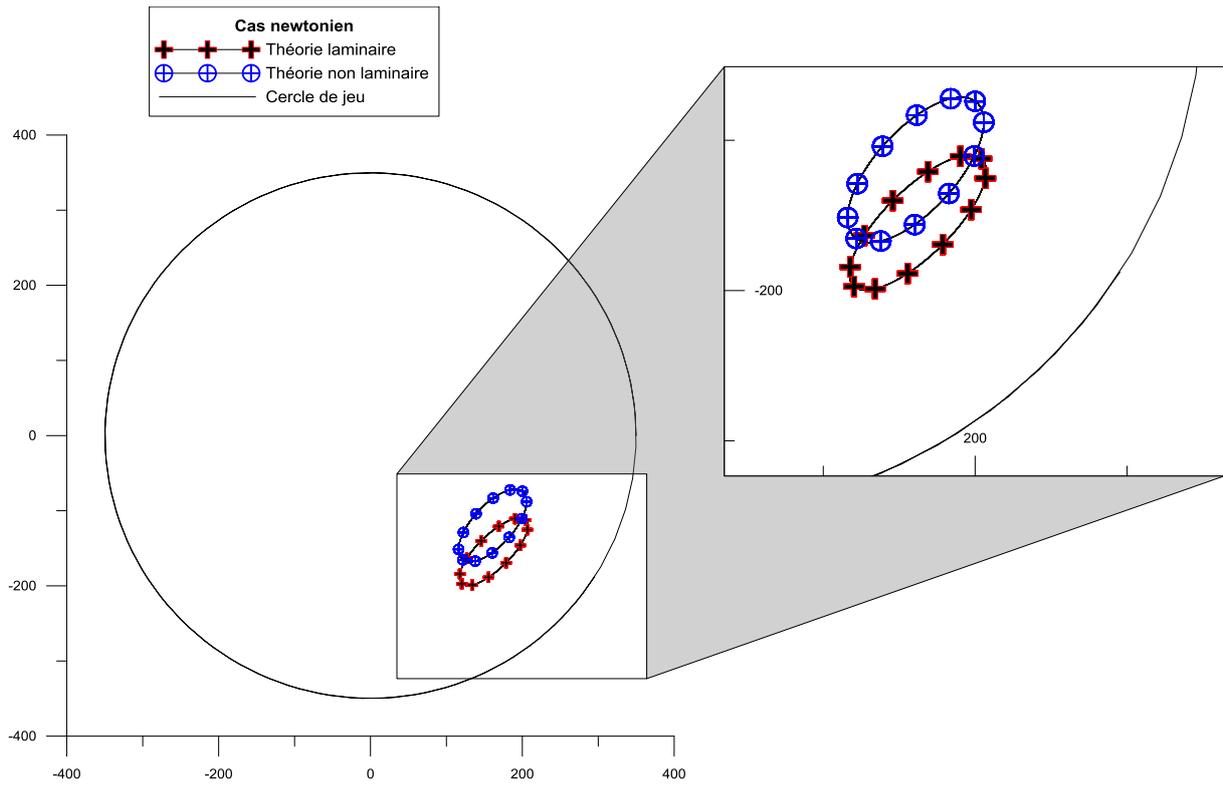


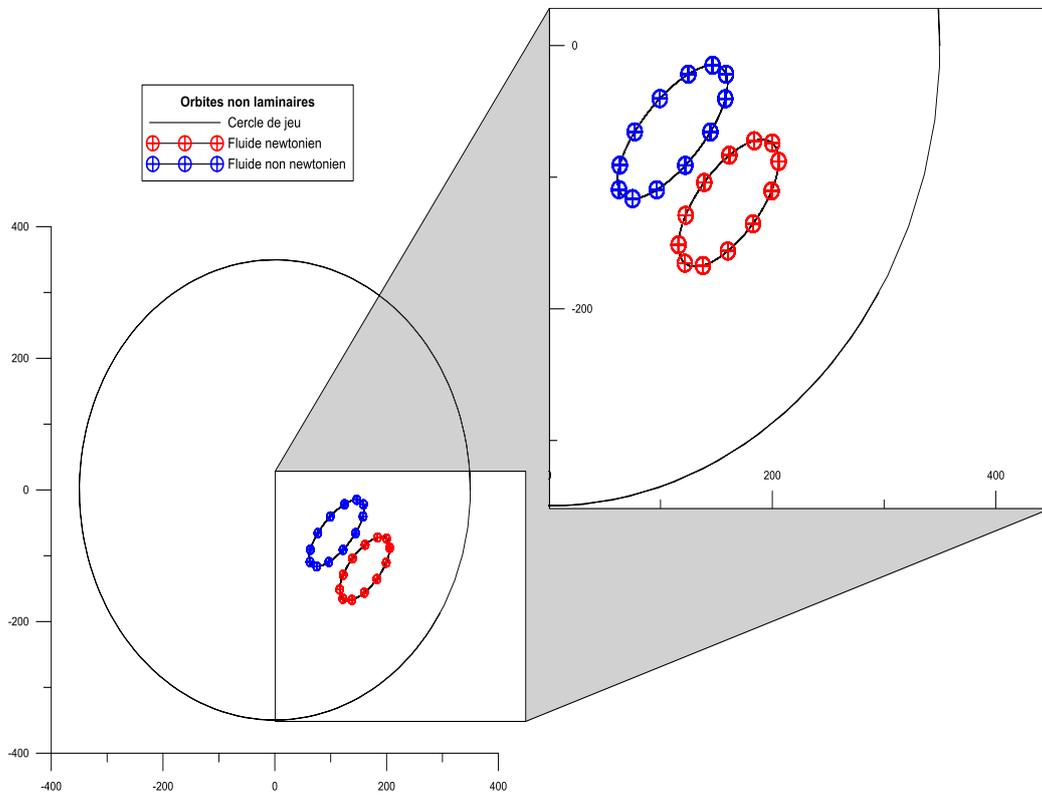
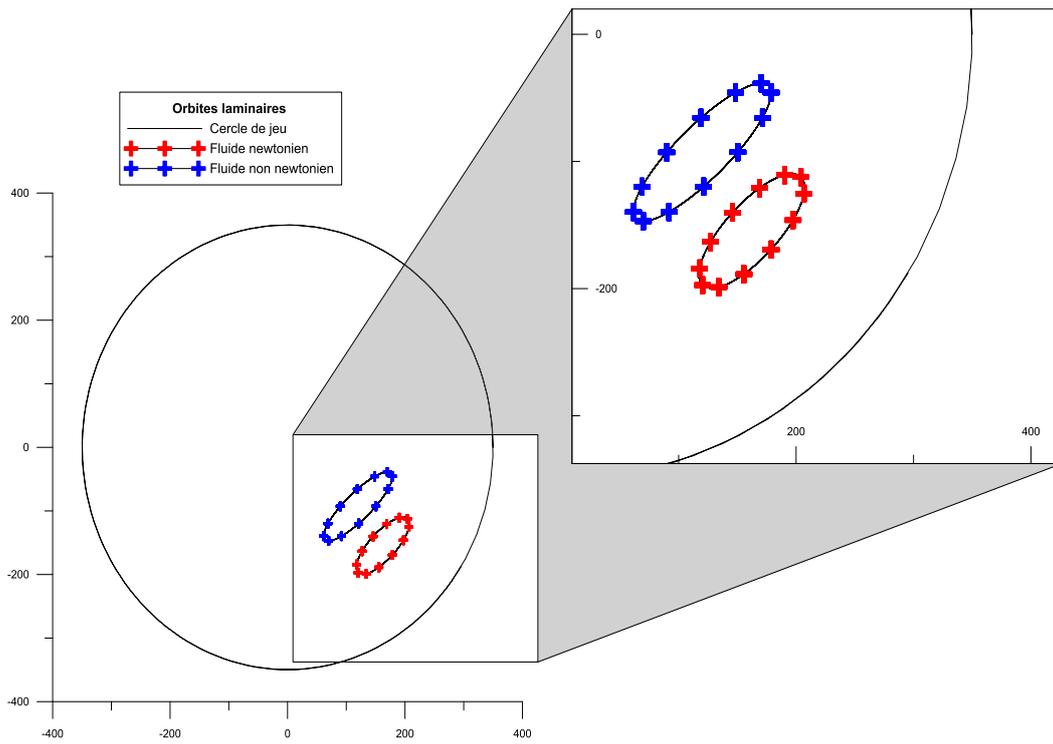
$\tilde{\lambda} = 0$ (Newtonien)

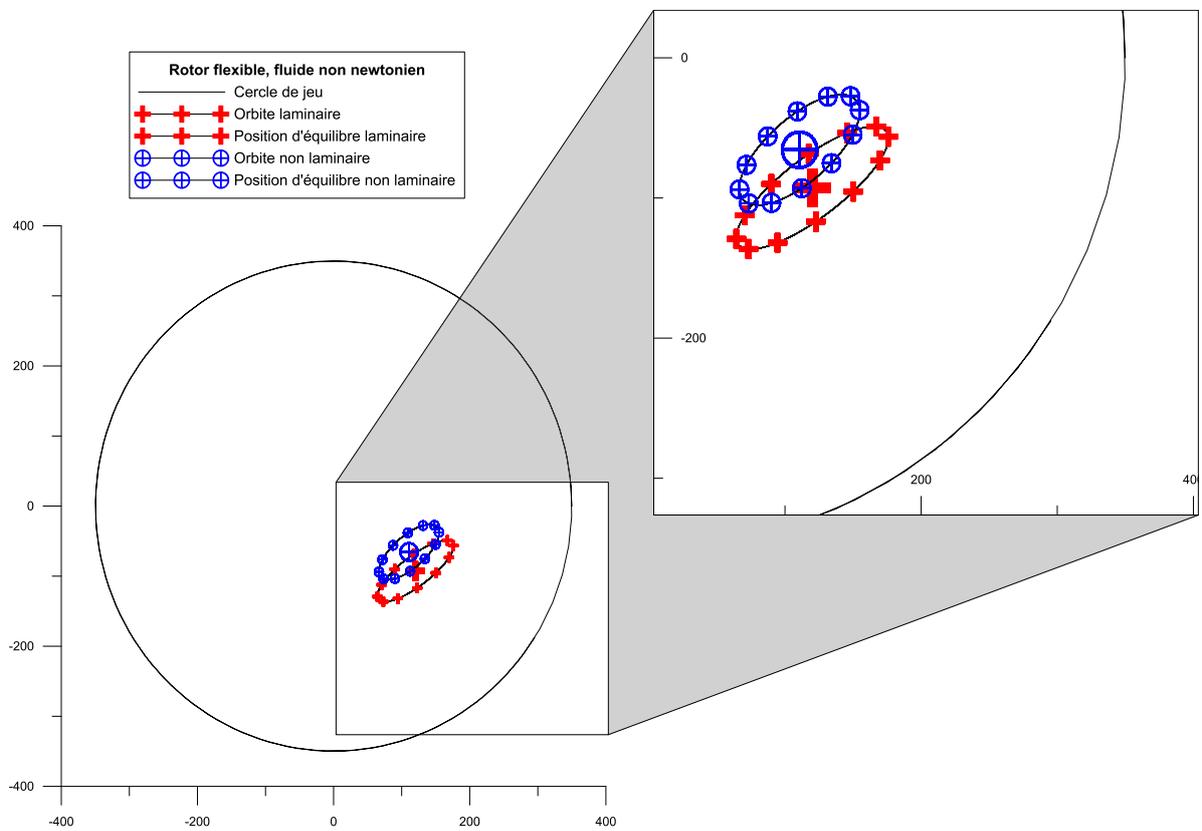
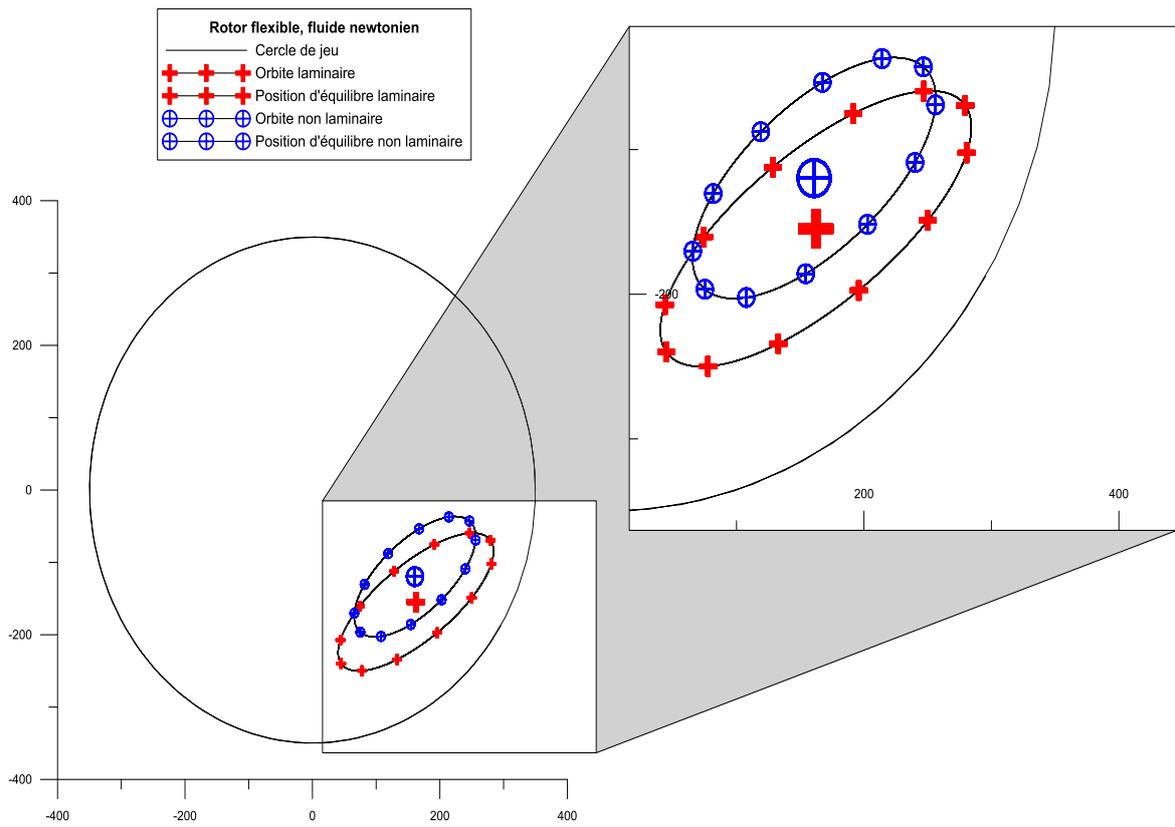


$\tilde{\lambda} = 0.3$ (Non newtonien)

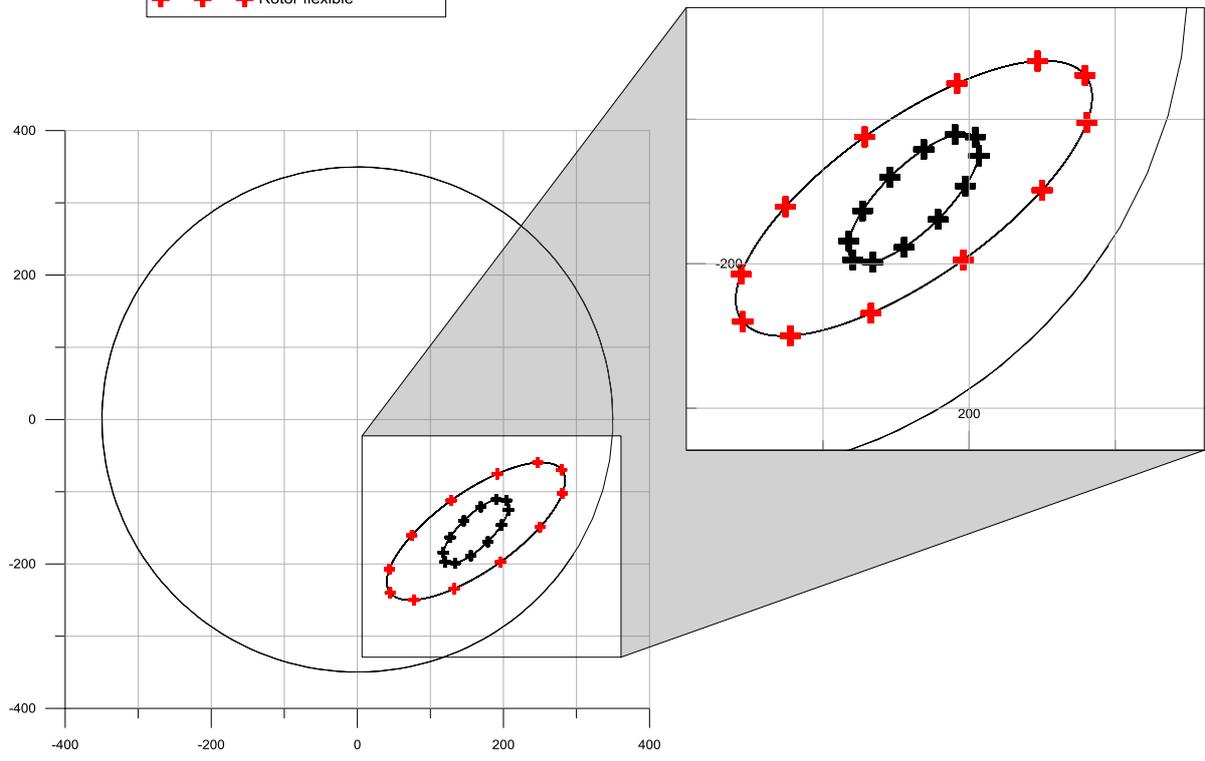
Fig. IV.



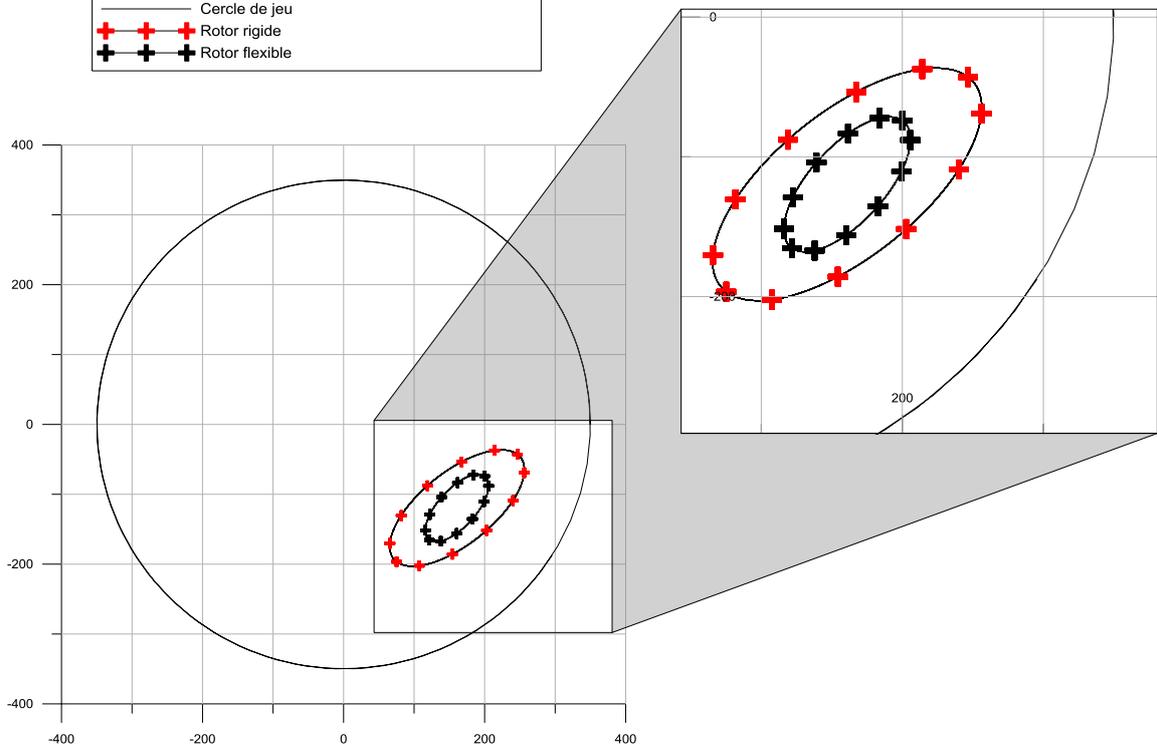




Comparaison des orbites laminaires



Comparaison des orbites newtoniennes et non laminaires



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] NEWKIRK B. L., Shaft whipping, General Electr. Rev., Vol. 27, 1924, pp. 169-178.
- [2] HUMMEL B. L., Kritische Drehzahlen als folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittelim lager, VDI-Forschift, 1926, p. 287.
- [3] NEWKIRK B. L., Whirling balance shafts, 3rd ICAM, Stockholm, 1930, Proc. 3, 1931, pp. 105-110
- [4] STODOLA A., Kritische Wellenstörung Infolge der Nachgiebigkeit des oelpolsters im lager, Schweizerische Bauzeitung, 1925, pp. 85-265.
- [5] HORI Y., A theory of oil whip, 5th Japan Nat. Cong. A. M., 1955, Proc. 395, 8(a) JAM 26, T 81, 1959, pp. 189-198.
- [6] HOLMES R., The vibration of rigid shaft in short sleeve bearings, J. Mech. Eng. Sci., Vol. 2, 1960, pp. 337-341.
- [7] STERNLICHT B., Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings, J. Basic Eng., Vol. 81, 1959, p. 101.
- [8] LUND J. W., The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible damped supports, ASME, J. of Applied Mechanics, Dec. 1965, p. 911.
- [9] STOKES V.K., Couple stresses in fluid, The physics of fluids, 1966, pp. 1709-1715.
- [10] Szeri A. S, Tribology: Friction, Lubrication and wear, Hemisphere publishing corporation, Megraw-hill Book company, 1979.
- [11] Newkirk B.L., Grobel. L.P, Oil-film whirl-A nonwhirling bearing, Tans. Am. Soc. Mech. Engrs, 59, 607, 1934.
- [12] Jean Frêne. Butées et paliers hydrodynamique
- [13] Massey B.S. *Mechanics of Fluids*. Van Nostrand Reinhold (International), 1989.
- [14] Fox R.W. and McDonald A.T. *Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 1992.
- [15] Kundu P.K. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [16] Szeri A.Z. Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds. *Journal of Tribology*, **109**: p21{36, 1987.

- [17] Szeri A.Z., Raimondi A.A., and Giron-Duarte A. Linear Force Coefficients for Squeeze-Film Dampers. *Journal of Lubrication Technology*, **105**: p326{334, 1983
- [18] Gohar R. *Elastohydrodynamics*. Ellis Horwood Series in Mechanical Engineering, 1988.
- [19] Cookson R.A., Feng X.H., and Kossa S.S. The Effect of Journal Misalignment on the Oil-Film Forces Generated in a Squeeze Film Damper. *Journal of Engineering for Power*, pages p560{564, 1983.
- [20] Lin J.R. Squeeze Film Characteristics of Finite Journal Bearings : Couple Stress Fluid Model. *ASLE Transactions*, **31**: p201{207, 1998.
- [21] Bou-Said B. and Ehret P. Inertia and Shear-Thinning Effects on Bearing Behavior With Impulsive Loads. *Journal of Tribology*, **116**: p535{540, 1994.
- [22] Usha R. and Vimala P. Fluid Inertia Effects in a Non-Newtonian Squeeze Film Between Two Plane Annuli. *Journal of Tribology*, **122**: p872{875, 2000.
- [23] Krempl E. Lai W.M., Rubin D. *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, 1993.
- [24] Ng C.W. and Pan C.H.T. A Linearized Turbulent Lubrication Theory. *Journal of Basic Engineering*, **87**: p675{688, 1965.
- [25] Constantinescu V.N. On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films. *Journal of Lubrication Technology*, **96**: p69{79, 1974.
- [26] M. Lahmar, A. Haddad, et D. Nicolas, An optimized short bearings theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent journal bearings, *European Journal of Mechanics A/Solids* 19,151-177, 2000.
- [27] Christopherson, D. G. (1941), "A New Mathematical Method for the Solution of Oil Film Lubrication Problems." *Proc. IMechE*, **141**, 126-135.
- [28] M. Fillon, Logiciel de calcul de paliers hydrodynamiques, Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS), université de Poitiers, France.
- Zerrouni Nassim, Mémoire Magistère, université de Boumerdes ,2009
- Zerti Abderrahmen, Mémoire Magistère, université de Guelma,2011
- FRENE J., NICOLAS D., Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées, Laboratoire de Mécanique des Solides, Cours de DEA, Université de Poitiers, 1987.