

**Université du 8 mai 1945 – Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin d'étude présenté en vue de**  
**L'obtention d'un diplôme de Master**

Présenté par : Soualah Ahmima Salah Eddine

**Master**

**Option : Conception et Production Industrielle**

=====  
**Contribution à L'étude du Comportement**  
**Dynamique Des Rotors Verticaux**  
=====

Sous la Direction de :

**Dr. KRIBS Nabil**

**Co. Encadreur: Pr. BOUTABBA. S**

**Année universitaire 2014/2015**

# Remerciement

*« Je remercie dieu tous puissant qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour achever ce modeste travail. Mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire monsieur*

*KRIBES NABILE*

*docteur à l'université de 8 MAI A945 a guelma pour sa patience, son soutien et ses encouragements continuels qui ont permis l'aboutissement de ces efforts en dépit des difficultés rencontrées dans ce travail. Mes remerciements également à tous ceux qui m'ont apporté leur aide de près ou de loin à l'élaboration de mon projet de fin d'étude.»*

*Salah Eddine*

## *Dédicace*

*Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Allah qui m'a guidé sur la bonne voie.*

*Je tiens à rendre hommage à mon père, et à celle qui a su et avoir pu faire de moi l'homme que je suis, « à maman » pour son indéfectible assistance et son soutien tout le long de ma formation ; les mots ne peuvent exprimer mon entière gratitude et ma reconnaissance pour tout leurs sacrifices, à mes frères et mes sœurs.*

*Encore une fois, un grand merci à toute ma famille à qui je dédie ce présent travail.*

*à tous mes ami(e) s sans exception.*

*Je pris Allah de leurs accorder longue vie et bonne santé*

*Salah Eddine*

## **SOMMAIRE**

### **Chapitre I**

# Bibliographie

Bibliographie.....	1
I.1 Introduction.....	3
I.2 Notions sur les rotors industrielles.....	3
I.2.1 Définition.....	3
I.2.2 Classifications des rotors.....	4
I.2 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible.....	5
I.3.1 Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell	5
I.3.2 L'orbite modale.....	7
I.3.3 L'analyse de stabilité.....	7
I.3.4 La dynamique de rotor.....	8
I.3.5 Aspect numérique.....	8
I.3.6 Sources d'excitation .....	8
I.4 Caractéristiques des éléments de rotor.....	9
I.4.1 Système arbre –disque.....	9
I.4.2 Le support.....	9
I.4.2.1 Type de palier.....	10
I.4.2.2 L'influence des dissymétries .....	11
II. SYNTHESE DES REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....	14
Problématique.....	23

## Chapitre II

### Equations fondamentales de la dynamique des rotors

II.1 Introduction.....	25
II.2 Modélisation du rotor.....	25
II.2.1. le disque.....	26
II.2 .2 L'arbre.....	28
II.2.2.1 L'énergie cinétique .....	28
II.2.2.2 Energie de déformation .....	28
II.2.3 Paliers.....	30
II.3 Modèle simple.....	32
II.3.1. Description du modèle.....	32
II.3.2 Elément de disque .....	33
II.3.3 Elément de l'arbre.....	33
II.3.4. Paliers à roulement.....	34
II.4.Equation du mouvement.....	34
II.4.1.Energie potentielle et énergie cinétique.....	34
II.4.1.1.Energie potentielle.....	35
II.4.1.2.Energie cinétique .....	35
II.4.2.Système des équations.....	36
II.4.3.Effet gyroscopique.....	36
II.4.4.Résolution de système des équations.....	39
II.5 .Conclusion.....	40

## Chapitre III

### Modélisation des rotors par élément fini

Introduction.....	42
III.1. Elément fini de rotor.....	42
III.1.1 Disque.....	42
III.1.2 L'arbre.....	43
III.1.3.Paliers.....	47
III.2.Système d'équations.....	47
III.3.Résolution des équations.....	48
III.4.Conclusion.....	48

## Chapitre IV

### Simulation numérique

IV.1 Introduction.....	50
IV.2 Les procédures et les étapes de simulation numérique.....	52
VI .3 Conditions aux limites.....	52
IV.4 Résultats et interprétations.....	52
IV.4.1- Résultats pour l'acier .....	53
IV.4.2-Résultats pour l'alliage-aluminium.....	57
IV.4. 3- Résultats pour L'Aluminium .....	60
IV.4.4- Résultats pour la bronze.....	63
IV.4.5- Résultats pour le Duralumin.....	66

## Chapitre V

### Modélisation des fréquences et les déplacements maximaux

V.1 Modélisation de la fréquence .....	71
V. 1-modelisation des fréquences réels $F_1$ en fonction $(\rho, E, d)$ .....	71
V.1.1.1.Comparaison entre le critère de la Fréquences réel simulée et estimée.....	74
V .1.2-modélisation des déplacements réel $D_1$ en fonction $(p, E, d)$ .....	75
V.1.2.1-Comparaison entre le critère de la déplacement réel simulée et estimée.....	77
V.1.3 modélisation des fréquences imaginaires $F_2$ en fonction $(\rho, E, d)$ .....	78
IV .1.3.1- Comparaison entre le critère de la Fréquences imaginaires simulée et estimée	80
V .1.4-Modélisation des déplacements imaginaires $D_2$ en fonction $(p, E, d)$ .....	81
V 1.4.1- Comparaison entre le critère de la déplacements imaginaires simulée et estimée.....	83

## Introduction général

Ces jours-ci tout le monde vise d'aller plus loin dans les énergies renouvelables après la flambée des prix des ressources naturels tel que le pétrole et le gaz naturel ; ainsi que les craintes d'épuisement de ces puits. Des recherches très poussé pour aller vers l'avant dans l'industrie du vent et de énergie solaire.

Dans ce contexte notre étude va être consacré a utilisation du vent pour produire de l'électricité a travers des éoliennes a axe verticale du type savonius, qui est en quelques sorte un rotor vertical composé d'un disque arbre et ailette demi circulaire. Notre mémoire va comporté cinq chapitre :

Dans le premier on va exposé un recherche bibliographique dans le domaine des rotor.

Le deuxième chapitre on va exposé les équations fondamentales de la dynamique des rotors.

Le troisième chapitre va être consacré a la modélisation des rotors par la méthode des éléments finis.

Nous présentent dans le quatrième chapitre la simulation numérique de notre problème qui consiste à déterminer les fréquences propres et les déplacements maximaux en utilisant le logiciel Ansys.

Dans le dernier chapitre qui le cinquième, une modélisation par les méthodes statistiques est établie pur mieux apprécier la variation de la fréquence propre et de déplacement maximale en fonction des facteurs module d'Young, la masse volumique et la distance entre les deux paliers.

En termine notre mémoire avec une conclusion générale.

## **CHAPITRE**

---

# *Chapitre I*

## *Bibliographie*

### I.1 Introduction

L'étude du comportement dynamique et vibratoire des rotors occupe une place importante dans l'histoire de la science, notamment dans la dynamique des structures et des machines. Il est considéré parmi les phénomènes les plus complexes dont la modélisation et la simulation exigent des moyens numériques très efficaces et rapides ; ainsi que la réalisation des expériences et des essais plus performant.

Le comportement dynamique et vibratoire des rotors a été étudié en détail, depuis les premiers travaux fondateurs de Rankine [1]. Depuis ces premières tentatives, nous avons rassemblé plusieurs travaux traitant ce type de phénomène. Ce problème continue d'attirer l'attention des ingénieurs, chercheurs et savants jusqu'à nos jours malgré le nombre considérable de travaux théoriques, expérimentaux et numériques qui lui ont été consacrés. Dans cette synthèse bibliographique, on propose d'examiner quelques travaux (les plus importants) afin de préciser notre contribution dans l'ensemble des recherches consacrées à ce type de phénomène.

### I.2 Notions sur les rotors industrielles

#### I.2.1 Définition

Par définition, un rotor est un élément tournant autour d'un axe fixe. Le champ d'application des rotors est vaste, nous les trouvons dans les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre, dans les machines tournantes industrielles qui constituent des structures assez complexes à analyser. Le rôle principale des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique, ...etc), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses. Les différents organes intervenant dans une machine tournante sont classés comme ci- dessous :

- Les arbres (éléments principaux des machines tournantes).
- Les éléments de support et de positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulement, paliers magnétiques, ...etc).



- Les éléments de transmission de mouvement (engrenages, courroies, joints d'accouplement, embrayages, ...etc) .
- Les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices,.. etc )

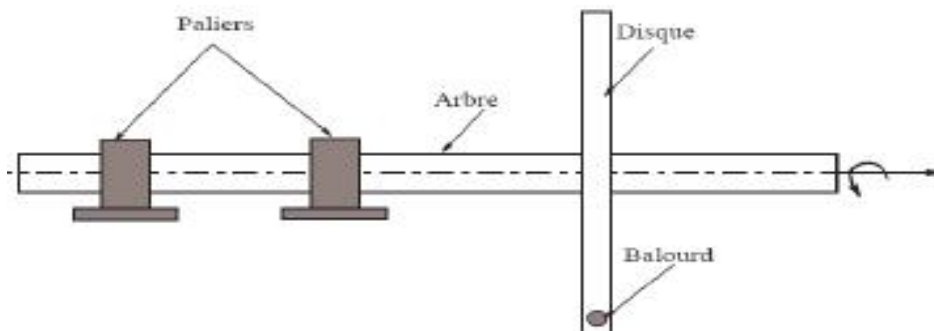


Figure I.1 Modèle d'un rotor industriel

### I.2.2 Classifications des rotors

#### 1. Selon le paramètre géométrique:

**Modèle usuel à long arbre :** les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, ...etc.). La majorité des travaux de recherche concernant l'étude de comportement vibratoire et dynamique des machines industrielles sont focalisées sur ce modèle.

**Modèle de disque rotor :** les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre. Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement dynamique de quelques que machine industrielle par exemple, un disque dur d'un ordinateur, micro turbine, turbine hydraulique..etc. .

**Modèle de rotor aubagé :** ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubagé (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle...etc). L'étude de comportement dynamique de ce modèle reste assez compliquée, car le mode vibratoire du rotor est liée aux différents phénomènes combinatoires (aérodynamique, aéroélasticité, hydrodynamique...etc)

**Modèle de rotor libre :** ce modèle de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support). Il est bien attiré l'attention des chercheurs dans les

dernières années pour développer et étudier le comportement dynamique des projectiles, satellites géostationnaire.

### **2. Suivant les paramètres mécaniques on distingue les modèles suivants :**

**Modèle de rotor rigide :** un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre. Outre la simplicité du modèle découlant d'une telle hypothèse, la réalisation de calculs pour un rotor rigide est intéressante d'un point de vue de dimensionnement de bâti.

En effet, puisque les éléments tournants ne se déforment pas, la charge dynamique est entièrement transmise au palier. Ce modèle ne sera pas traité dans notre travail.

**Modèle de rotor de Jeffcott [2] :** c'est un modèle simple utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielle, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopique. Ce modèle est très souvent utilisé par les chercheurs dans un but phénoménologique, car il permet une interprétation plus directe de l'influence de quelque phénomène sur le comportement dynamique de système.

**Modèle de rotor réel :** la combinaison entre le modèle de rotor rigide et le modèle de rotor de Jeffcott ne représente que de manière très approximative la dynamique d'un rotor réel, c'est le modèle de rotor flexible quand il tourne avec des vitesses supérieur à la première vitesse critique en flexion . Ce modèle a été l'objet d'étude de plusieurs chercheurs et l'objet de notre étude.

### **I.2 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible**

Toute machine tournante en fonctionnement généré des vibrations dont les amplitudes dépendent essentiellement :

- de la géométrie du rotor ;
- de la raideur des paliers et de son support ;
- de l'amortissement apporté par ces mêmes paliers ;

- des sources d'excitation, tel que le balourd par exemple ;
- de la vitesse de rotation du rotor.

L'étude de comportement dynamique et vibratoire d'un rotor flexible nécessite de connaître la notion de vitesse critique et les techniques d'analyse de stabilité.

### **I.3.1 Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell**

Nelson [3], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin de XVIII siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournant, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. Dans notre jour la notion de vitesse critique a évolué d'une manière à se rattacher d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant « la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système ».

L'analyse dynamique de système montre que pour un système (rotor) conservatif en rotation, les modes propres due aux effets gyroscopique ont des formes complexe deux a deux conjugué et dont les pulsations et les fréquences sont purement imaginaires avec une forte dépendance de la vitesse de rotation . Ce dernier nous permet de construire un outil de base pour déterminer les vitesses critiques de façon a tracé le graphe représentant l'évolution de fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation, ce graphe s'appel le diagramme de Campbell [4].

Le diagramme de Campbell illustré sur la figure I.2 est caractérisé un rotor axisymétrique. La fréquence propre au repos est double : du fait de la symétrie, il existe deux modes de vibration de déformées identique qui sont dans deux plans orthogonaux qui s'intersectent sur l'axe longitudinal du rotor. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à une mode direct excitable par la force de balourd et un mode rétrograde non sollicité par l'excitation synchrone.

L'excitation majeure par les forces synchrone des balourds, permet nous de détecter les phénomènes de résonance et donc les vitesses critiques en reportant la droite d'équation  $f = \omega$ , appelée droit d'excitation synchrone, sur le diagramme de Campbell. Les points d'intersection avec les courbes des fréquences

propres directes fournissent les vitesses auxquelles les résonances ont lieu donc les vitesses critiques de système. Les points d'intersection avec les fréquences propres rétrogrades n'ont pas d'intérêt à première vue puisqu'elles ne peuvent être excitées par un balourd.

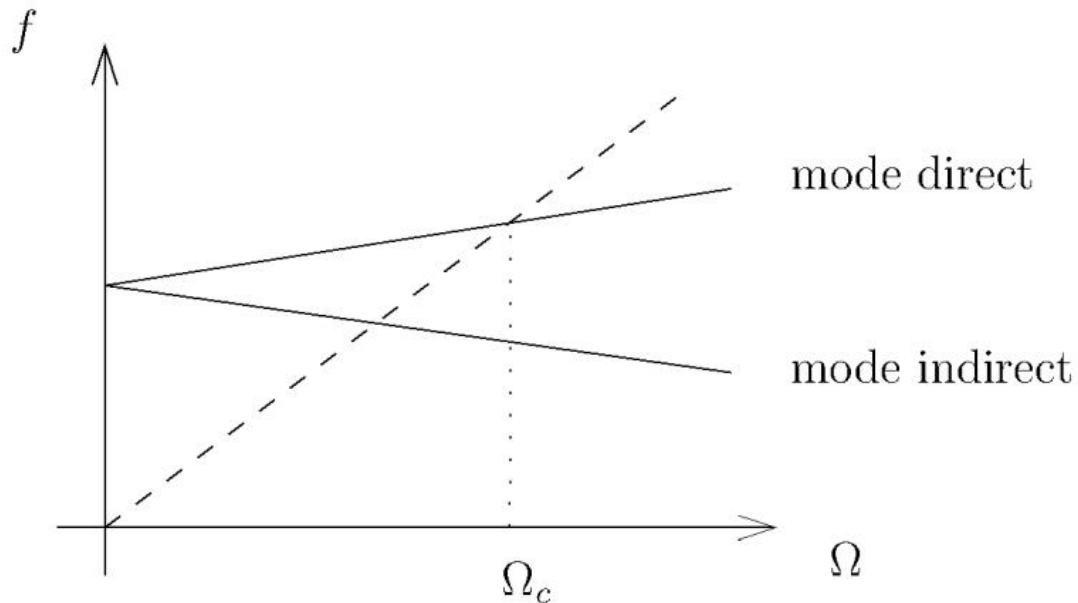


Figure I.2 - Diagramme de Campbell

### I.3.2 L'orbite modale

Les points situés dans l'axe générateur de rotor décrivent par le mouvant de rotation de rotor et due au mode propre des orbites qui ont des formes suivant le phénomène auxquelles envisagée (circulaire pour un rotor symétrique non amorti, elliptique pour un rotor dissymétrique non amorti...). Ces orbites sont engendrées selon deux précessions possibles :

- une précession directe où les orbites sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation de rotor, dans ce cas là sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.

- une précession rétrograde (inverse), où les orbites sont décrites dans le sens inverse que le sens de la vitesse de rotation de rotor, de qui engendre un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.

### I.3.3 L'analyse de stabilité

L'analyse de stabilité dans l'étude de comportement vibratoire et dynamique d'un rotor flexible est nécessaire puisqu'il a considéré comme un système dynamique régit par des systèmes d'équation différentielle. La définition de stabilité recouvre la définition de Laypunov pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre et la définition de Poincaré pour la notion de stabilité orbitale [5].

On peut prédire les seuils de l'instabilité d'un système dynamique et en particulièrement en dynamique des rotors à partir des divers technique :

- signe de la partie réelle des valeurs propres complexe du système d'équations en mouvement libre. Si la fréquence propre est donnée par  $S = -\alpha \pm j\beta$ , le seuil d'instabilité est déterminé quand  $\alpha$  devient négatif (partie réelle positive) [4]. Avec ce critère on peut estimer la fréquence ainsi que le mode pour lequel le système deviendra instable.
- Le critère de Routh-Hrwitz permet d'analyser la stabilité de systèmes autonomes [6]. L'utilisation de ce critère est intéressante pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, pour lesquels des expressions analytiques du polynôme caractéristique associé au mouvement perturbé peuvent être déduites. Elle devient, toutefois, complexe pour des systèmes comportant un nombre élevé de degrés de liberté. De plus, ce critère ne fournit pas la fréquence d'instabilité

### I.3.4 La dynamique de rotor

Dans ce qui suit on présente les différents recherches dédiées pour l'étude le comportement vibratoire d'un rotor flexible d'une manière générale, en exposant les principaux résultats trouvé par les chercheurs son tient compte l'influence des caractéristiques des éléments principales de rotor

### I.3.5 Aspect numérique

L'utilisation des techniques numériques est primordiale pour l'analyse en dynamique des structures notamment en dynamique des rotors et surtout dans large progresse des utiles informatiques. Il existe deux méthodes qui sont souvent employé pour l'analyse dynamique des rotors, la méthode de la matrice de transfert et la méthode des éléments finis.

### **I.3.6 Sources d'excitation :**

Le rotor en rotation est soumis à des excitations diverses, d'amplitudes et de fréquences très différentes. Ces excitations peuvent d'être de nature périodique, aléatoire ou a impulsion, nous traitons en particulière quelle mode d'excitation directe à la machine.

**Les forces de balourd :** sont des forces périodique propre aux machines tournantes, il correspond aux forces d'inertie générée par le mouvement rotatif des masses excentrées et non équilibrées de rotor. Lorsqu' une pièce d'un rotor possède des axes principaux d'inertie transversale non orthogonaux à l'axe de rotation, une couple est aussi produite. On le qualifie de balourd dynamique, par opposition à balourd statique usuellement employé pour désigner la force. L'origine des efforts de balourd est variée. Il peut s'agir soit de problèmes d'usinage, de montage, voire de gradients thermiques qui peuvent induire un fléchissement de l'arbre.

**Les forces de fluide :** l'étude de l'influence des forces de fluide agissant sur le comportement dynamique de rotor, nous conduit à travailler dans le domaine de l'interaction fluide structure, ces forces sont propres aux machines tournantes, elles sont de nature périodique ou aléatoire et très important surtout dans le cas de présence des instabilités de fluide (écoulement turbulent, phénomène de cavitation, phénomène de pompage..etc). Deux types des forces que l'on peut rencontrer dans la majorité des études des machines tournantes, les forces aérodynamiques et les forces hydrodynamiques. Ces forces on réalité soit ont des influences directes sur le comportement dynamique de rotor si elles sont concentrées par exemple dans les joint, les paliers et les butées hydrodynamique, ou d'un arbre fonctionne directement dans un fluide, soit ont des influences indirectes via les structures aubagé qui peuvent être envisagé en deux façons. La premier concerne le comportement dynamique des structure fonctionnant dans des fluides lourds, dans ce cas, le fluide apporte masse et amortissement ajoutés

et l'effet de confinement de fluide est important, la deuxième concerne les fluides légers et la possibilité d'apparition du flottement.

### **I.4 Caractéristiques des éléments de rotor :**

Les éléments de rotor (arbres, disque, support, autre) dont les caractéristiques mécanique et géométrique, ont des influences directes sur le comportement dynamique global de rotor, suivant le phénomène qui lui envisagées. Le changement des ces caractéristiques engendre dans la plus part des cas des forces non linéaire influent directement sur les équations dynamique de système (rendre en système non linéaire). Nous traitons quelques caractéristiques des éléments de rotor suivants les recherches qui ont été envisagées.

#### **I.4.1 Système arbre –disque**

Les paramètres géométriques de l'arbre et de disque qui peuvent être influé sur le comportement dynamique de rotor on a :

- L'uniformité de l'arbre (arbre axisymétrique ou non, variations de diamètre) ;
- L'épaisseur de disque ;
- Présence de discontinuité (rotor fissuré).

Les paramètres mécaniques des éléments arbre et disque qui peuvent être influé sur le comportement dynamique de rotor sont :

- La rigidité ou la flexibilité de disque (disque rigide ou déformable) ;
- L'effet de souplesse de disque ;
- La nature de matériau de l'arbre (arbre en matériau composite par exemple ;
- L'effet de l'amortissement tournant structurel (arbre viscoélastique) .

#### **I.4.2 Le support**

L'influence des caractéristiques mécaniques et géométrique des supports dans le comportement dynamique des rotors, fait l'objet de plusieurs chercheurs depuis longtemps parce qu'il y a un lien direct entre l'arbre et le support. Les paramètres qui peuvent être définis les caractéristiques de support sont :

- La nature et les types des paliers (roulement à bille, à rouleau, palier magnétique, palier hydrodynamique, palier lisse, palier à patin oscillant, à patin pivot, amortissement de type squeeze film...etc) ;
- L'isotropie et l'anisotropie (effet de dissymétrie) ;
- Le mouvement de support (effet d'embarquement).

### **I.4.2.1 Type de palier**

On s'intéresse sur quatre types des paliers qui sont souvent l'objet des chercheurs, les roulements à bille, paliers à butée, les paliers magnétiques et l'amortissement de type squeeze film.

#### **a) Roulement à bille**

La majorité des recherches sur l'étude de comportement dynamique d'un rotor monté sur un support de type roulement à bille sont basées sur l'identification des phénomènes non linéaire qui provient généralement de jeu radial et le contact de Hertz

#### **b) Palier à butée**

Les paliers à butée sont utilisés dans les machines tournantes pour supporter les vibrations axiales qui sont généralement dus au chargement axiale

#### **c) Palier magnétique**

Les paliers magnétiques actifs permettent la sustentation sans contact d'un rotor tournant à très haute vitesse et très haute température. Cette technologie de pointe est beaucoup utilisée dans divers domaines de la technologie, surtout pour des applications où toute lubrification est interdite (exemple : turbocompresseurs à applications dans le vide)

#### **d) Palier aérodynamique**

Les paliers à aérodynamique (à air, à gaz) ont reçu dans ces dernières décennies une attention considérable et trouvent des applications de plus en plus nombreuses dans les cas où des vitesses élevées, de faibles charges et une grande précision sont nécessaires. Les applications aéronautiques concernant principalement des groupes auxiliaires de puissance et des machines de conditionnement d'air. L'utilisation des paliers aérodynamique présente un certain nombre d'avantages par rapport à celle des paliers hydrodynamiques :



affranchissement de circuit de lubrification (solution économique), faible viscosité (bonne rendement), peu sensible pour les grandes températures. Mes par contre présente de certaines désavantage : faible capacité de charge des mécanismes, problème de conception et de fabrication et problème d'instabilité des mouvements de rotor.

### e) Amortissement de type squeeze film

L'amortissement de type squeeze film ou également appelé film fluide amortisseur ou l'amortisseur à film écrasé, constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces trente dernières années, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité d'amortissement. Il consiste en une lame fluide interposée entre des paliers de la machine et le bâti, comme illustré dans la (figure I.3).

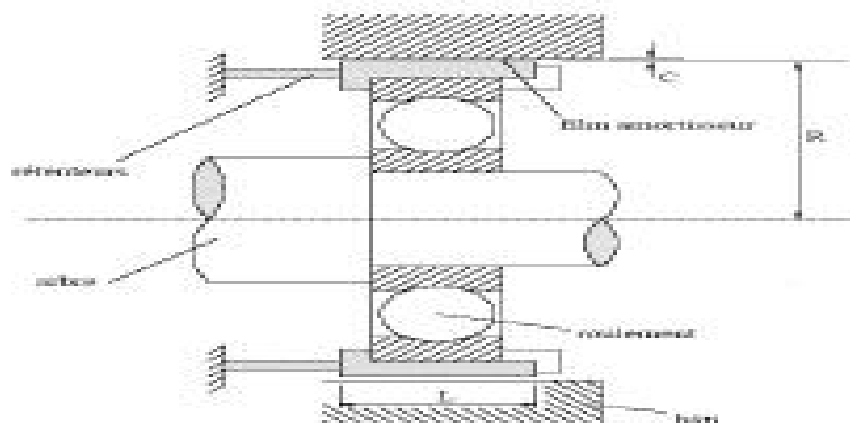


Figure I.3 Amortisseur de type squeeze film.

Les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du fluide, généralement une huile, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor, d'améliorer la stabilité du système et réduire la transmissibilité.

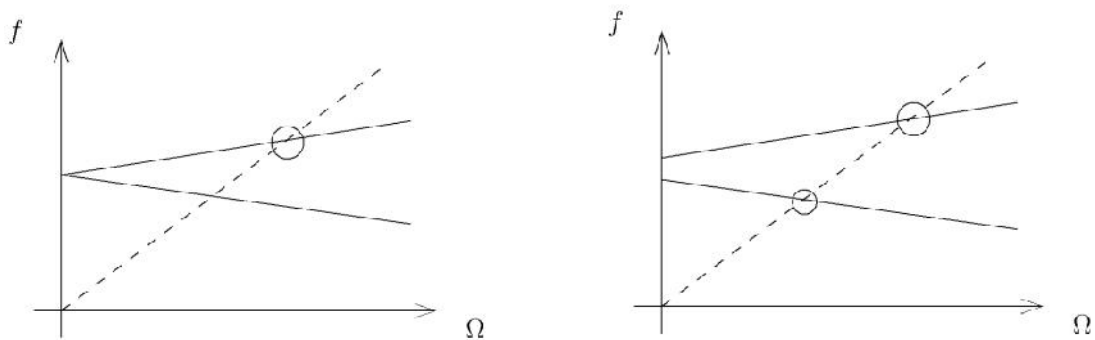
#### I.4.2.2 L'influence des dissymétries :

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrie de forme bien sûr mais aussi en comportement (pour des rotors en matériaux composites par exemple), il n'en est pas

de même pour les stators : la présence d'éléments juxtaposés aux carters, la fixation avec l'aile,...créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est bien documentée. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes

classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle), avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux une vitesse critique existe [7]. Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non plus un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, split résonances dans la littérature anglo-saxonne) : le mode rétrograde est excité(**figure I.4**).



(a) cas axisymétrique

(b) cas non axisymétrique

**Figure I.4**

Dans certaines plages de vitesse de rotation, on observe alors un mouvement de précession rétrograde du rotor, engendrant ainsi des contraintes axiales normales alternées dans le rotor qui peuvent s'avérer nuisible (diminution de la durée de vie à cause de la fatigue cyclique, apparition de fissures). Cependant, ces plages sont relativement étroites et se trouvent aux alentours de vitesses critiques, i. e. des zones dans lesquelles les opérations prolongées sont naturellement prohibées (afin d'éviter

les phénomènes d'implication dynamique). Les mouvements rétrogrades apparaissent donc de manière transitoire, lors des passages de vitesses critiques.

Ce phénomène est classique et peut être inhibé lorsque l'amortissement est suffisant. De nombreuses études numériques et expérimentales ont permis de le mettre en évidence. Un point moins connu mais pourtant bien réel est l'existence simultanée de la précession directe et de la précession rétrograde. C.R<sub>AO</sub> et al. ainsi que A.M<sub>USZYNSKA</sub> ont mené avec succès des expériences durant lesquelles ce cas de figure s'est manifesté [8,7].

C. R<sub>AO</sub> et al. Ont étudié un rotor de type Jeffcott supporté par des paliers hydrodynamiques soumis à l'influence de la gravité, avec différentes valeurs de jeu radial pour les paliers. Ils ont constaté, pour un jeu dans un certain intervalle, un dédoublement du pic de résonance, avec le rotor qui orbite dans un sens au niveau du disque et dans l'autre partout ailleurs sur l'arbre. Il s'avère que le mouvement de précession rétrograde est effectivement initié au niveau du disque, et, qu'avec l'augmentation de la vitesse de rotation, il s'étend progressivement le long de l'arbre puis diminue de nouveau avant de disparaître totalement.

De son côté, A. Muszynska s'est intéressée à l'étude d'un rotor vertical monté sur roulement à billes et possédant un battement total. L'anisotropie des paliers est assurée par des ressorts de raideurs différentes pour le maintien des bagues extérieures de roulement. Le rotor possède un disque en extrémité qui génère des effets gyroscopiques. Les essais ont révélé l'existence de vitesses de rotation pour lesquelles l'extrémité de l'arbre accouplée avec le moteur d'entraînement orbite dans le sens direct et le disque à l'autre extrémité orbite dans le sens rétrograde.

La dérivation d'un modèle simplifié lui permet d'analyser les contraintes dans l'arbre, révélant ainsi la décomposition de celles-ci en une composante constante et une composante harmonique d'ordre 2 (i.e. dont la dépendance en temps est en  $2t$ , étant la vitesse de rotation de l'arbre). Une analyse paramétrique à partir de ce modèle recalé confirme les rôles du balourd et de l'amortissement dans l'apparition de ce phénomène. Comme c'est précisé au départ, la dissymétrie des rotors est beaucoup plus rare, mais elle peut exister. Il s'agit principalement de dissymétries d'inertie (anisotropie des inerties diamétrales) ou de dissymétries de raideur (pour les rotors en matériaux composites par exemple). En raison de la rotation propre, les équations

décrivant la dynamique du système comportent alors des termes en fonction du temps, qui peuvent dans certaines circonstances générer des instabilités. Le mouvement d'un tel rotor même parfaitement équilibré, peut donc diverger, il a été démontré que les zones d'instabilité se trouvent entre les vitesses critiques dédoublées [9] et qu'elles peuvent disparaître en présence de non-linéarités [10]. Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue. La présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes.

Autre les éléments principales de rotor (arbre, disque, palier), les rotors des machines industrielle fonctionnent en interaction avec d'autre élément tel que, le stator, les joints d'étanchéité, l'accouplement, les fondations et d'autre. On examine quel quelque travaux traité l'interaction de ces derniers éléments avec le rotor flexible.

Dans le cadre de l'interaction rotor stator, l'existence de forces de couplage entre le rotor et le stator peut conduire dans certains cas à des amplitudes de déformation considérables. Il est possible de les classer en trois grandes catégories selon la nature des forces d'interaction entre les deux structures :

- Les forces d'interaction proviennent de variation de pression aérodynamique sans contact ;
- Les forces d'interaction se réduisent à un unique point de contact mécanique sur la circonférence entre rotor et stator ;
- Les forces se situent simultanément en plusieurs points de contact mécanique sur la circonférence entre rotor et stator.

## II. SYNTHÈSE DES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Parmi les recherches effectuées sur ce modèle, nous évoquons par exemple les travaux tentative au début de **H.Lamb et R.Southwell** [11], ils ont traité le comportement dynamique d'un disque en rotation à l'aide de la théorie des vibrations des membranes. Récemment on trouve les travaux de **G.Genta et A.Tonoli** [12] qui étudiés en détail, analytiquement et numériquement le comportement vibratoire en torsion, en flexion et axiale d'un disque rotor.

**P.Hughes[13]** et **P.W.Fortescue** et **J.Stark[14]** sont considéré parmi les premiers chercheurs qui lui étudier le comportement dynamique de ce genre de rotor, la majorité des travaux qui sont suivi sont faites par les méthodes de simulation numérique. La validation des résultats jusqu'à nos jours reste difficile de raison de complexité de réalisé des bon d'essais expérimentale.

Le premier travail sur l'étude de comportement dynamique de rotor comme il a été mentionné auparavant a été faite par **W.J.M.Rankine [1]** en 1869, il a été utilisé la deuxième loi de Newton sur l'étude de stabilité de mouvement d'un arbre en rotation, il conclut que l'équilibre d'un rotor sans friction est uniformément perturbé autour de sa position initiale, et le mouvement de rotor dont la vitesse de rotation est impossible de dépassé la première vitesse critique. En 1895 **S.Dunkerley** publié un article dans laquelle, il a développé expérimentalement les formules des vitesses critiques et les vitesses supercritiques d'un rotor en fonction de leur diamètre et leur poids de disque [15].

La méthode de la matrice de transfert historiquement a été développé par **N. Myklestad [16]** et **M.A.Prohl[17]** pour calculer les fréquences naturelles et les modes propre d'un rotor en régime sou critique. **W.Lund** et **F.K.Orcutt [18]** diversifié le domaine d'utilisation de cette méthode en présentant un algorithme pour calculer la réponse linaire d'un force synchrone (balourd) d'un rotor flexible supporté sur un palier hydrodynamique. **A.Liew [19]** développé cette méthode dans le cas d'utilisation pour un problème non linéaire.

Les premiers travaux utilisant la méthode des éléments finie pour la modélisation ont été publiés par **H.D.Nelson** et **J.M.McVaugh [20]**. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'effort gyroscopique. Cette modélisation a été complétée par **E.S.Zaezi** et **H.D.Nelson [21]** pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Plusieurs travaux ont suivi, confirmant la maturité et la fiabilité de cette méthode

**D.S.Hiatt [22]** étudié d'une manière détaillé et par deux méthodes comparatives sous Matlab la réponse a une charge aérodynamique d'un rotor d'hélicoptère, l'une connue par la méthode de Myklestad et l'autre est la méthode des éléments fini

**Jeffcott H.H. [2]** a examiné l'effet du balourd sur les amplitudes du mouvement rotatif et les forces transmises aux roulements. Il a étudié le cas d'un rotor uniforme soutenu sur des roulements à ses extrémités et porte un disque mince. Il a supposé que le moment de l'inertie du disque peut être négligeable. Ce modèle a été utilisé plus tard sous le nom du modèle de Jeffcott. Une théorie complète a été développée pour expliquer le comportement du rotor au passage par la vitesse critique. Il a également identifié qu'avec une marge de séparation de 10% de chaque côté d'une vitesse critique, l'amplitude de la vibration ne serait pas excessive.

**Nelson H. et McVaugh J. [20]** ont prolongé le modèle d'éléments finis d'un rotor en tenant compte de l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et les charges axiales.

**Ruhl R. [23]** a présenté des modèles basés sur les éléments finis des rotors flexibles pour calculer les vitesses critiques et les modes propres du rotor. Ces modèles n'ont pas tenues compte des effets gyroscopiques et des charges axiales.

**Pauline, Aurélien B, Thibaud M et Michel M [24]** ont étudié l'aérodynamique instationnaire d'un rotor éolienne Savonius, mise en évidence de l'influence de la portance.

Dans cette étude des simulations numériques instationnaires ont été réalisées avec le logiciel StarCCM+ pour mieux comprendre le fonctionnement de l'éolienne Savonius, notamment en comparant les résultats statiques instationnaires (éolienne immobile) et dynamiques (éolienne en rotation).

En effet, l'éolienne Savonius est couramment dite de <trainée > car son couple serait maximal lorsque les aubes sont perpendiculaires au sens de l'écoulement. Ce fait est effectivement vérifié en étude statique. Cependant, une étude dynamique montre que le couple maximal est obtenu lorsque l'axe des aubes est parallèle au vent, Ainsi que cette étude ouvre de nouvelles perspectives quant à l'optimisation des rotors Savonius.

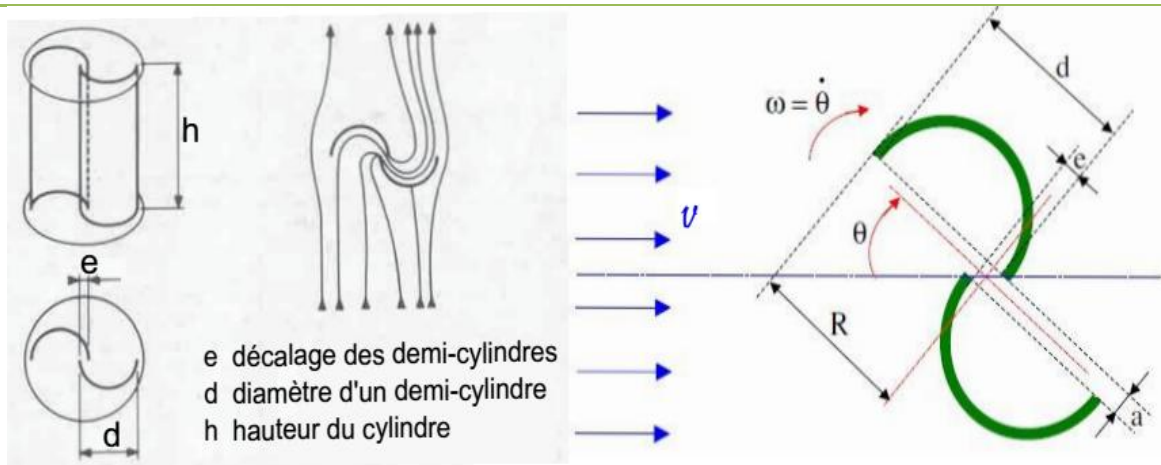


Figure I.5 - Éolienne a axe vertical Savonius

les résultats trouvées par les autres sont comme Suits :

- L'analyse dynamique de son fonctionnement montre l'influence de la portance.
- La Savonius ne peut pas réellement être classée dans l'une ou l'autre de ces catégories. Son efficacité au démarrage est en effet essentiellement due à la traînée, mais son maintien en rotation, lui est principalement dû à la force de portance.

-Pour finaliser l'étude numérique, il est nécessaire d'effectuer une simulation tridimensionnelle afin de vérifier qu'aucun aspect 3D n'apparaît dans l'écoulement.

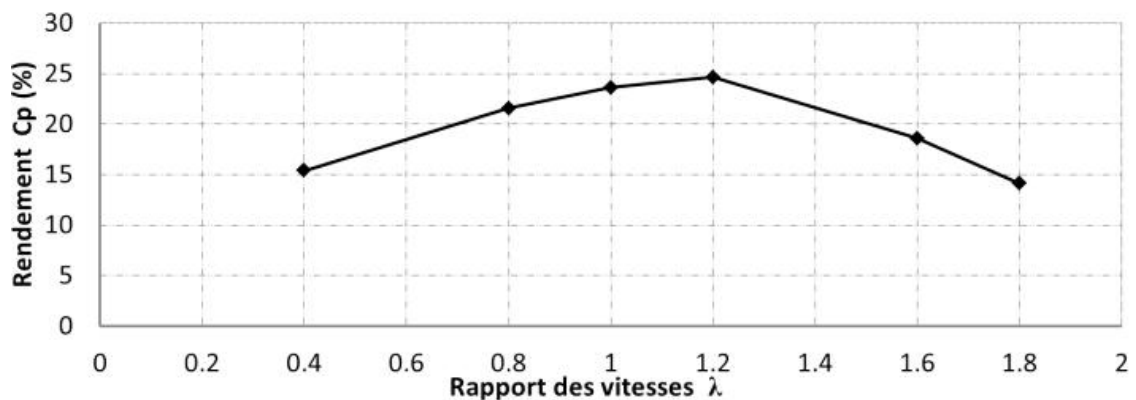


Figure I.6 - Coefficient de puissance  $C_p$  d'une Savonius simple en fonction de

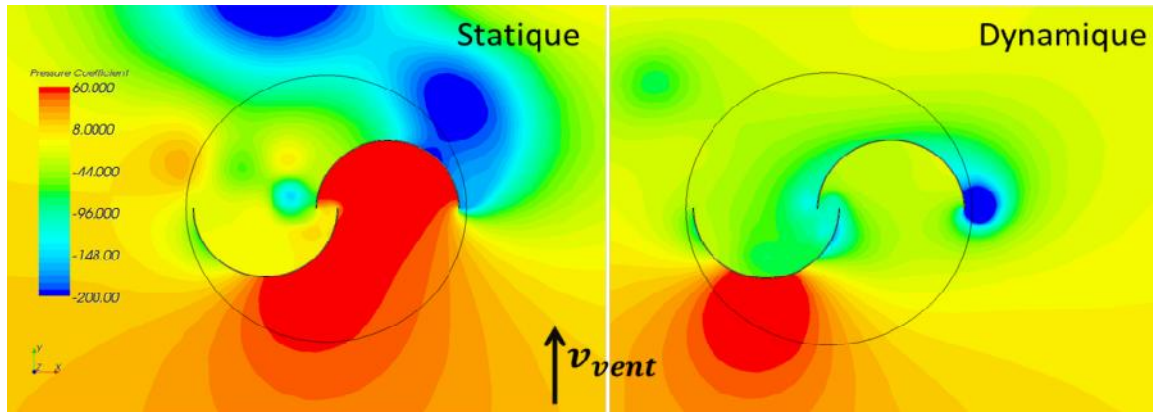


Figure I.7 Distribution des pressions face au vent en statique et en dynamique ( $\sigma = 1$ )

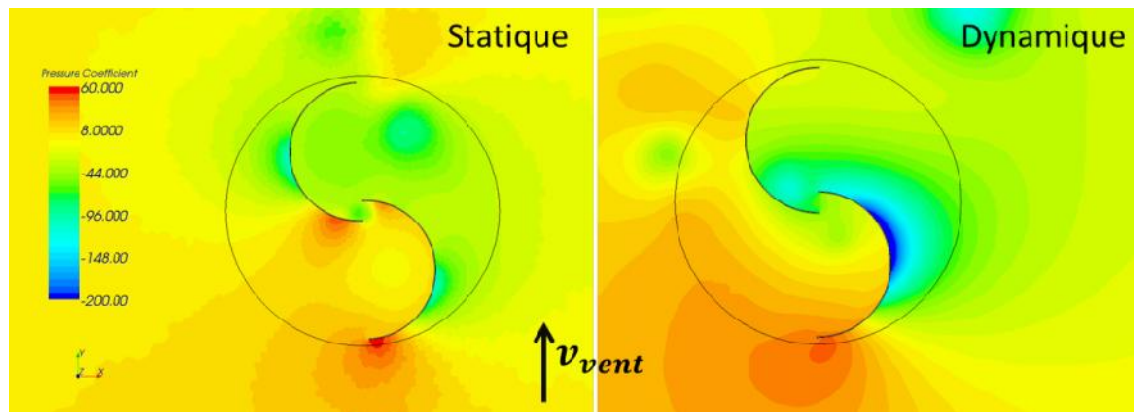


Figure I.8 Distribution des pressions dans le vent en statique et en dynamique ( $\sigma = 1$ )

Jean-Luc Menet, Nachida Bourabaa [25] ont fait une étude expérimentale sur les simulations numériques de l'écoulement autour de rotors dérivés du rotor Savonius, dont l'objectif est d'augmenter la valeur du moment et d'en améliorer la stabilité. Pour cela, ils ont ajusté plusieurs paramètres géométriques, en particulier le recouvrement des aubages et leur agencement. Ensuite, les autres ont étudié des rotors à voilures désaxées. Un rotor Savonius dérivé a ensuite été testé, ce qui leur a permis de proposer un angle d'inclinaison des aubes :  $\approx 55^\circ$ , et ils ont ensuite testé plusieurs configurations de rotors à voilures.

-Les résultats tirés de plusieurs configurations montrent que le rotor à deux voilures, que nous appelons rotor à contrevoiles, semble le plus performant.



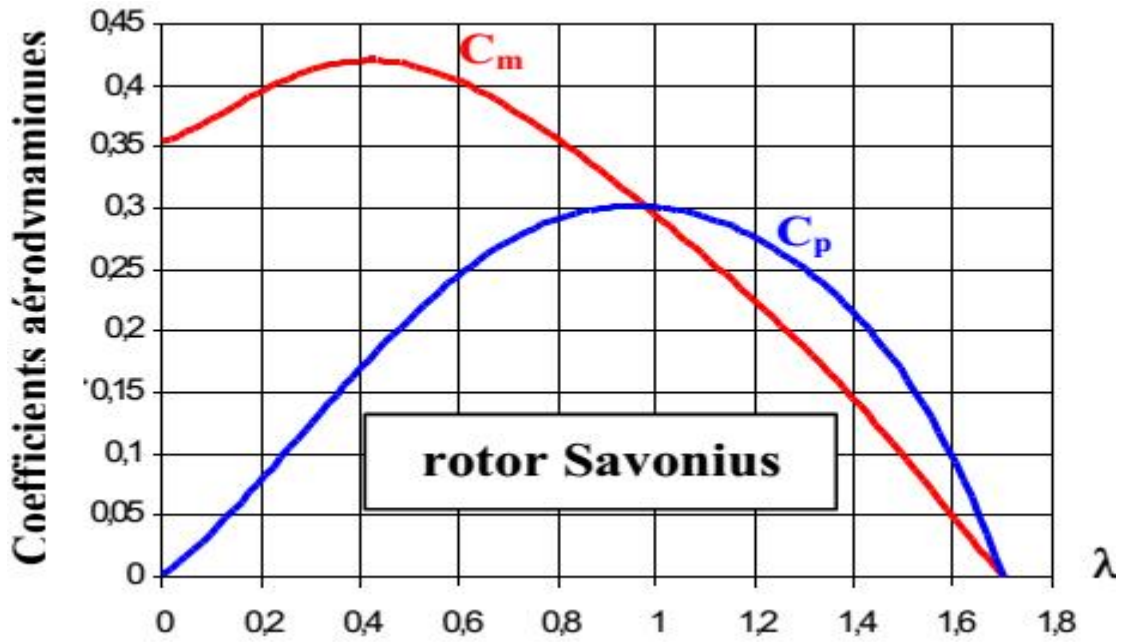


Figure I.9 coefficients aérodynamiques

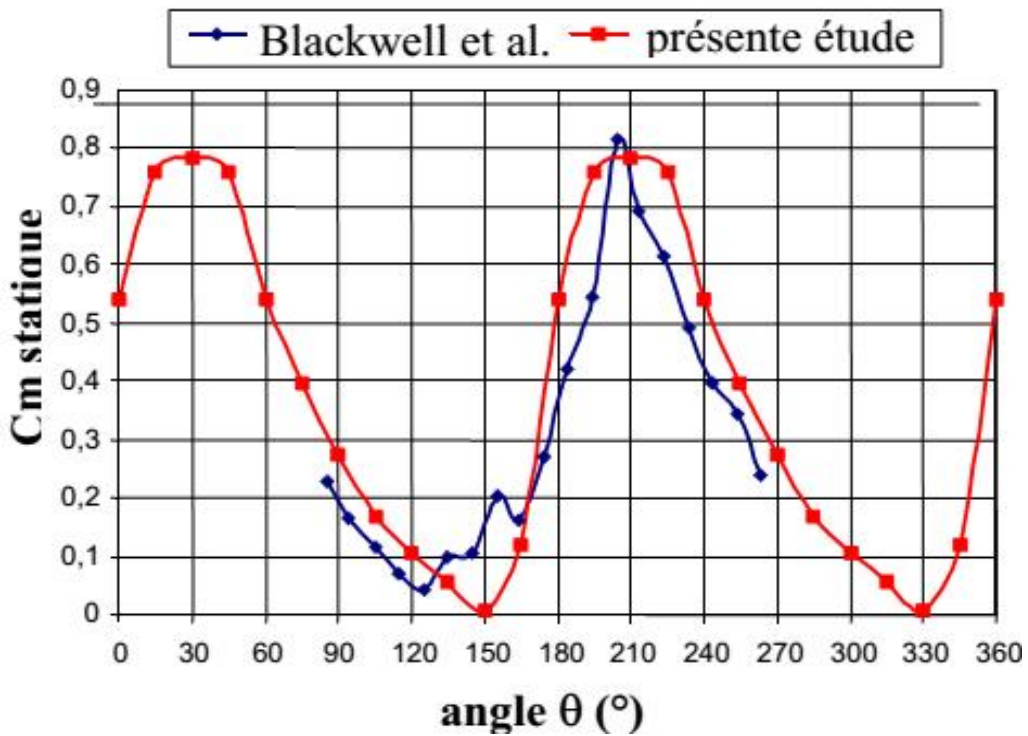


Figure I.10 Coefficient de moment statique

Jean-Luc Harion, Jean-Philippe Vermeulen et Alain Burlot [26] ont étudié Simulations numériques des performances d'une nouvelle géométrie d'éolienne à axe vertical. Cette communication présente des simulations numériques réalisées sur cette nouvelle géométrie afin d'en évaluer les

performances. Une première série de simulations bidimensionnelles a été réalisée dans le plan horizontal médian de l'éolienne. Ces simulations, réalisées à l'aide d'un maillage tournant, ont permis de tester l'influence du maillage, ainsi que différentes géométries de pales. Une simulation tridimensionnelle, incluant un maillage tournant, a ensuite été réalisée pour quantifier les performances de la géométrie en termes de couple et de coefficient de puissance.

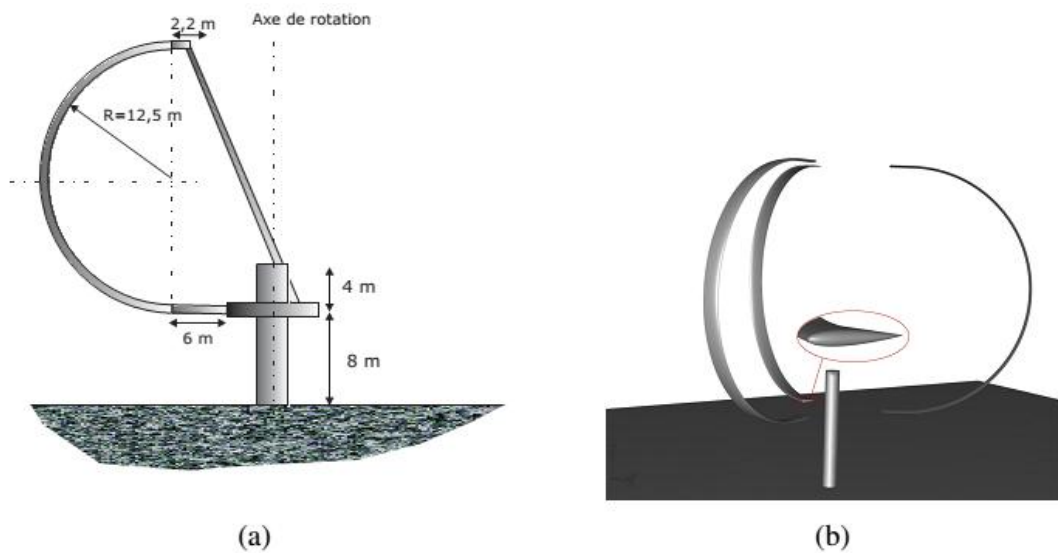
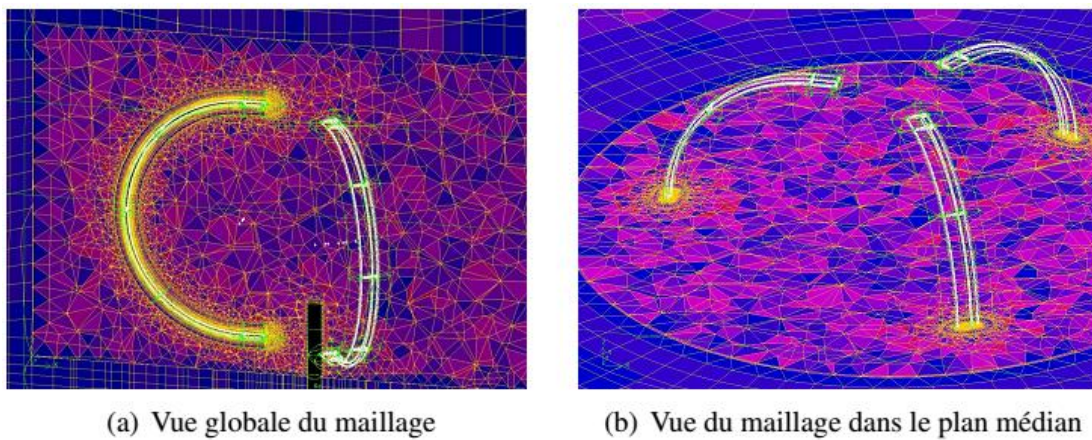


Figure I.11 Schéma de l'éolienne à axe vertical simulée



(a) Vue globale du maillage

(b) Vue du maillage dans le plan médian

Figure I.12 Élément de maillage du domaine calcul

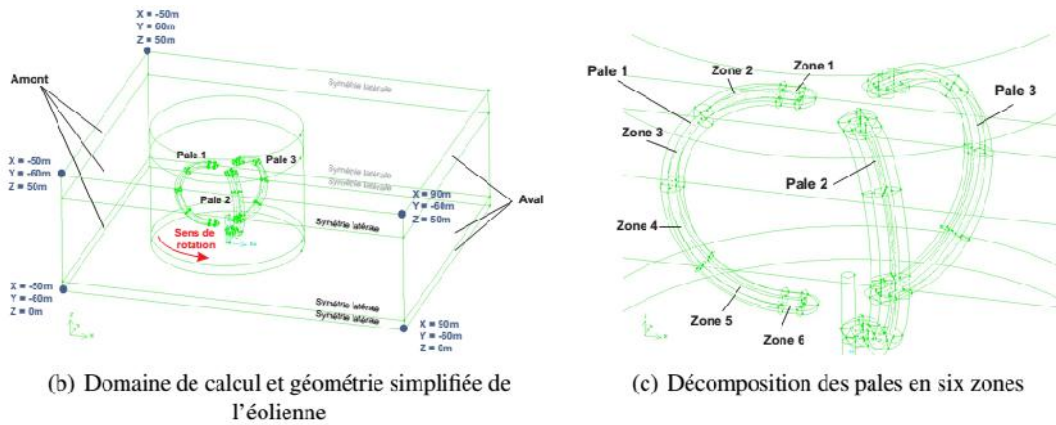


Figure I.13 schéma de la configuration du calcul tridimensionnel

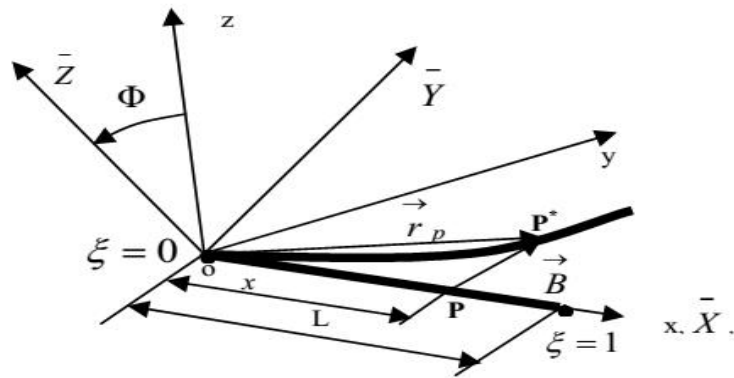
Les autres ont trouvées les résultats suivants :

- le profil de pale le mieux adapté et de quantifier la puissance motrice fournie par ce rotor.
- Le calcul tridimensionnel a permis d'évaluer les efforts aérodynamiques appliqués sur les pales ainsi que leurs évolutions temporelles.

**Boukhalfa. A, Hadjoui. A, Hamza cherif. S.M.[27]** ont étudié Modélisation du comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides dans le cas des grands déplacements

Dans ce travail présenté concerne le comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides. Une étude théorique permet l'établissement des énergies cinétique et de déformation de l'arbre, nécessaires à l'aboutissement des équations du mouvement. Ces équations sont déterminées en tenant compte de l'effet de couplage

qui est dû essentiellement aux effets gyroscopiques et la non linéarité géométrique. La modélisation du système étudié est faite par la version -p de la méthode des éléments finis. Pour cela un élément fini hiérarchique de type poutre à cinq degrés de liberté par nœud est développé en vue d'élaborer un code de calcul, permettant de déterminer les fréquences propres d'un arbre tournant dans les cas linéaire et non linéaire. L'étude présentée montre les influences de l'effet gyroscopique et la non linéarité géométrique.



**Figure I.14** *Système de coordonnées fixes et mobiles*

La fréquence est donnée en fonction du paramètre de fréquence \* par la relation :

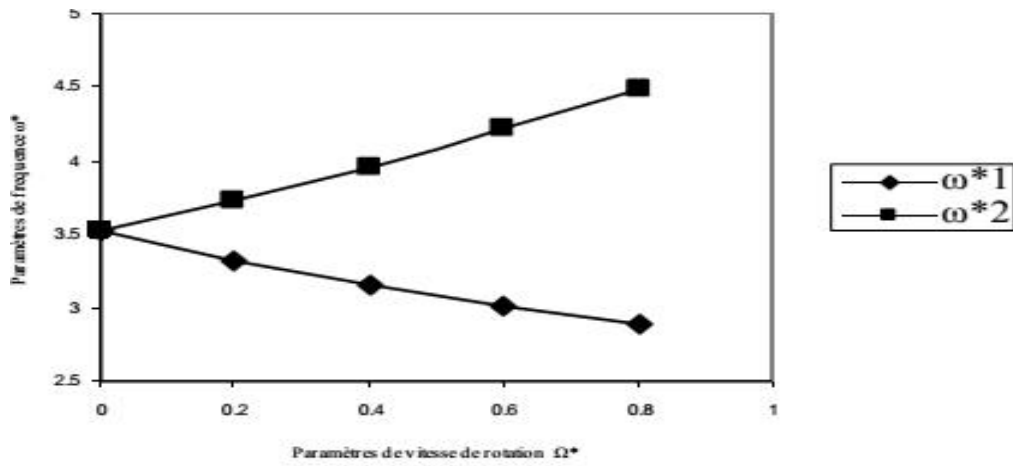
$$\check{S} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\dots S}} \check{S}^*$$

La vitesse de rotation est donnée en fonction du paramètre de vitesse de rotation \* :

$$\Omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\dots S}} \Omega^*$$

Dans le cette tableau, on compare respectivement le paramètre de fréquence fondamental du mouvement de flexion obtenu par notre programme avec le paramètre de fréquence calculé par la relation [9], pour une poutre avec la condition aux limite E-L, et ceci pour différentes paramètre de vitesses de rotation \*

## CHAPITRE



**Figure I.15** Paramètre de fréquence en fonction du paramètre de vitesse de rotation suivant  $V$  et  $W$  pour une poutre  $E-L$

Paramètres de Vitesses de rotation $\Omega^*$	Les paramètres de fréquence $\omega^*$ de flexion			
	$\omega^*1$	$\omega^*1$ [9]	$\omega^*2$	$\omega^*2$ [9]
0	3.5160	3.5160	3.5160	3.5160
0.2	3.3273	3.3391	3.7273	3.7023
0.4	3.1612	3.1715	3.9612	3.8979
0.6	3.0169	3.0131	4.2169	4.1027
0.8	2.8935	2.8638	4.4935	4.3166

Comparaison des  $\omega^*$  du mouvements de flexion calculés en utilisant la MEFHT avec [9] pour une poutre  $E-L$ .

$$E=7.10^{10}, S=4.10^{-6} \text{ m}^2, \rho=2778 \text{ kg/ m}^3, L=0.58, I_z=I_y=1.333(3).10^{-11} \text{ m}^4, P=10.$$

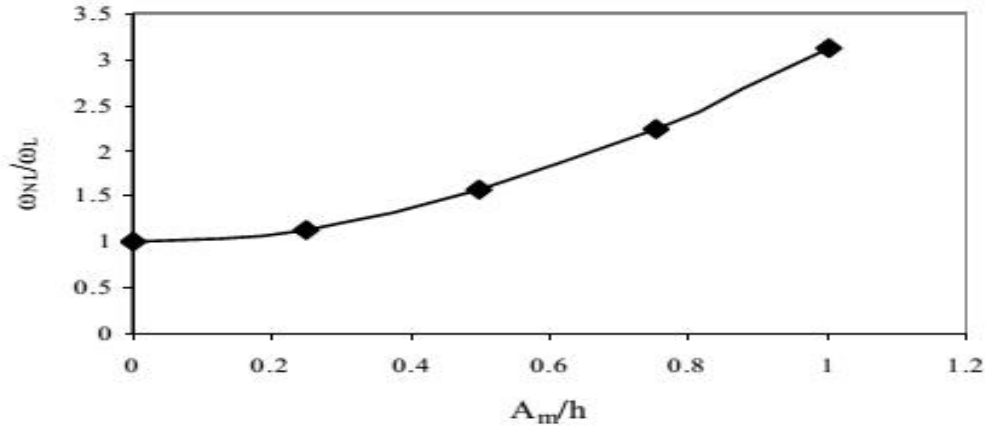


Figure I.16  $NL/ L$  en fonction de  $A_m/h$  une poutre E-E et  $\omega = 20$  rd/s.

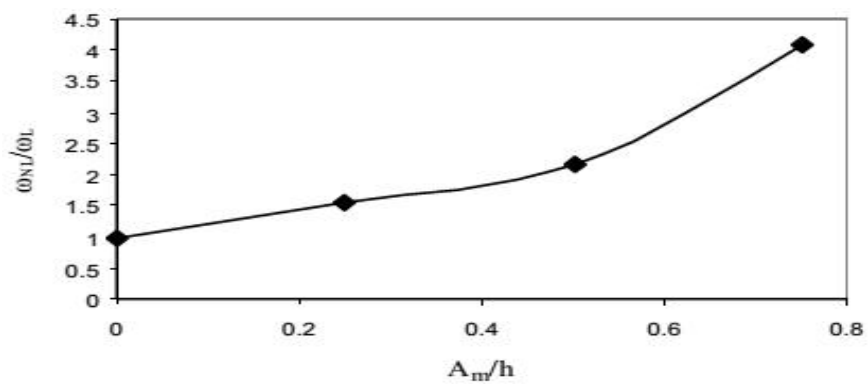


Figure I.17  $NL/ L$  en fonction de  $A_m/h$  une poutre E-E et  $\omega = 90$  rd/s.

Dans Cette étude les autres trouvées les résultats suivants :

- Pour toutes forme géométrique des poutres et différentes conditions aux limites, la convergence des solutions est assurée par l'élément poutre à deux nœuds avec des résultats en concordance avec les solutions exactes.
- L'effet gyroscopique provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences en rotation en deux branches (mode en précession directe et mode en précession inverse). Cet effet a une influence importante sur les comportements des arbres tournants. Ce couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession–directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre –
- L'effet non linéaire est lié à l'état de contraintes dans la structure et augmente la raideur, il couple les déplacements orthogonaux à l'axe de rotation.
- La variation de la vitesse de rotation a une influence sur l'amplitude maximale des déplacements de la structure lors de montée en vitesse.
- Les arbres tournants doivent traverser plusieurs vitesses critiques en montée et en ralentissement.

## Problématique

Dans le cadre de notre étude intitulé contribution à l'étude d'un rotor à axe vertical et en se basant sur les études faites par les chercheurs, notre problématique va être

## CHAPITRE

---

consacrée sur les rotors à axes verticales qui jouent un très grand rôle dans le domaines des énergies renouvelables; on va essayer d'apporter notre contribution à son étude comportant essentiellement la modélisation le calcul de résistances aux différentes contraintes qu'il supporte



## *Chapitre II*

### *Equations fondamentales de la dynamique des rotors*

## II.1 Introduction

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développés. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base.

## II.2 Modélisation du rotor

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle Éléments Finis à usage plus général.

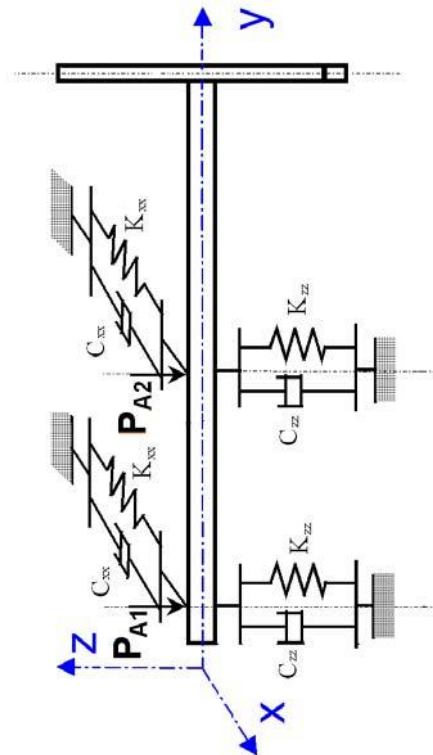


Figure II.1 Exemple de rotor[27]

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et (figure II.1).

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- l'énergie cinétique  $T$  , l'énergie de déformation  $U$  , et le travail virtuel  $W$  sont calculés pour tous les éléments de système.

- Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée aux systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.
- Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (2-1)$$

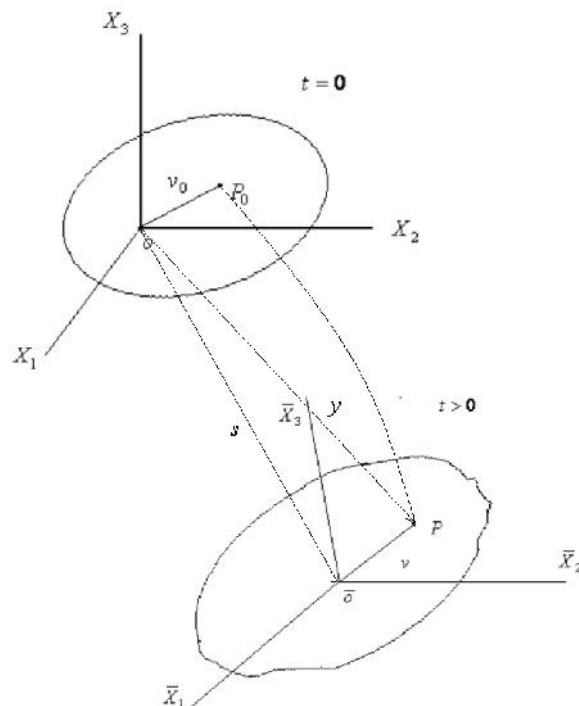
$N$  ( $1 \leq i \leq N$ ) Représente le nombre de degrés de liberté.

$q_i$  : sont les coordonnées généralisées indépendantes.

$Fq_i$  : est le vecteur forces généralisées.

### II.2.1. le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient  $R_0(X, Y, Z)$  un repère fixe et  $R(X, Y, Z)$  un repère tournant lié au disque (Figure II.2). Le système de coordonnées  $x, y$  et  $z$  est relié au système de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  par l'intermédiaire des angles  $\alpha_x, \alpha_y$  et  $\alpha_z$ . Pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle  $\alpha_z$  autour de l'axe  $Z$ , puis d'un angle  $\alpha_x$  autour du nouvel axe  $x$ , noté  $x_1$ , enfin d'un angle  $\alpha_y$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .



**Figure II.2** Configuration déformée[27]

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère R s'écrit

$$\check{S}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (2-2)$$

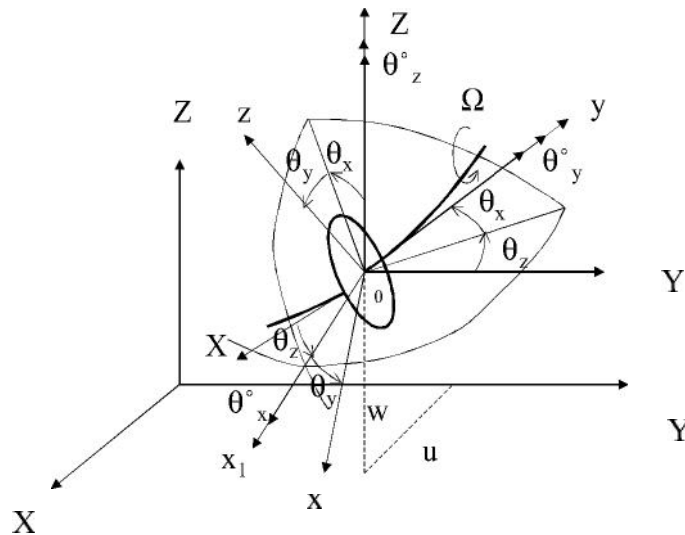
Où  $\vec{Z}$ ,  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}$  sont les vecteurs unitaires suivant les axes  $\vec{OZ}$ ,  $\vec{Ox}_1$  et  $\vec{Oy}$ . L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse  $O$  est calculée dans le repère tournant R. Le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\check{S}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \check{S}_x \\ \check{S}_y \\ \check{S}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (2-3)$$

$\check{S}_x$ ,  $\check{S}_y$  et  $\check{S}_z$  étant les composantes du vecteur de rotation instantanée suivant x ,y et z .soient u et w les coordonnées du centre du disque O suivant OX , OZ dans  $R_0$  ;les coordonnées suivant OY restant constante .la masse de disque et m .le tenseur d'inertie est noté :

$$I_{IO} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (2-4)$$

$I_{dx}$  ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont les moment d'inertie suivant les axes x, y et z.



**Figure II.3** Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque  $T_d$  s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \dot{\xi}_x^2 + I_{dy} \dot{\xi}_y^2 + I_{dz} \dot{\xi}_z^2) \quad (2-5)$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique  $I_{dx}=I_{dz}$ .

Lorsque les angles  $\xi_x$  et  $\xi_z$  sont petits et la vitesse angulaire constante  $\dot{\xi}_y = \Omega$ , l'équation (2-5) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\xi}_x^2 + \dot{\xi}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\xi}_x \dot{\xi}_z) \quad (2-5)$$

Le terme  $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ , qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme

$I_{dy} \Omega \dot{\xi}_x \dot{\xi}_z$  représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

## II.2.2 L'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique et potentielle.

### II.2.2.1 L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation 2.5). Pour un élément de longueur L, de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \dots S_a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \dots I_a \left[ \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega J_a \left[ \xi_z \frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \xi_x \frac{\partial \xi_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (2-7)$$

est la masse volumique,  $S_a$  est la section,  $I_a$  est le moment d'inertie transverse,  $J_a$  est le moment d'inertie polaire.

La première intégrale de l'équation (2.7) correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

### II.2.2.2 Energie de déformation

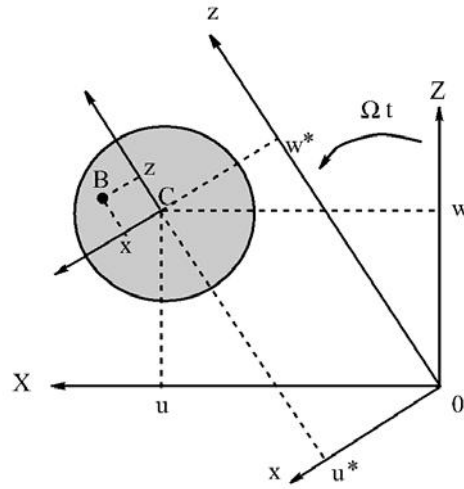
L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, (en néglige les effets de cisaillement).

Les notations suivantes sont utilisées (figure II.4) :

C est le centre géométrique de l'arbre, B(x,z) est un point typique de section,

E est le module d'Young du matériau,  $\epsilon$  et  $\sigma$  représentent la déformation et la contrainte,  $u^*$  et  $w^*$  sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes x et z (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.



**Figure II.4** Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor[27]

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans R est  $v = v_l + v_{nl}$  avec :

Déformation linéaire

$$v_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2-8)$$

Déformation non linéaire

$$v_{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (2-9)$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{v\}^t [t] d\ddagger \quad (2-10)$$

où  $\int_v$  est le volume de l'arbre et  $[t]$  est la contrainte de flexion. La relation entre contraintes et déformations est:  $[t] = E \epsilon$ , donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_v (v_l^2 + 2v_l v_{nl} + v_{nl}^2) d\ddagger \quad (2-11)$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et y :

$$\int_v v_{nl} v_l d\ddagger = 0 \quad (2-12)$$

Le troisième terme de l'intégrale (2.11) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (2.8):

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \iint_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (2-13)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \iint_S \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (2-14)$$

Par symétrie, le troisième terme de (2.14) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (2-15)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS$$

$$\int_S xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2-16)$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de  $U$  et  $w$  composantes du déplacement dans  $R_0$ . Le passage de  $u^*$ ,  $w^*$  à  $u$ ,  $w$  s'écrit (Figure. II.4) :

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t - w \cos \Omega t \end{cases} \quad (2-17)$$

En remplaçant  $u^*$  et  $w^*$  par leurs valeurs (2.17)

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned} U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \\ + I_x \left( \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \end{aligned} \quad (2-19)$$

pour un arbre symétrique (où.  $I_x = I_z = I_a$  .) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \cos^2 \Omega t + \sin^2 \Omega t \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \sin^2 \Omega t + \cos^2 \Omega t \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (2-20)$$

Finalemnt :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2-21)$$

### II.2.3 Paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (Figure II.5). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère  $R_s$ ). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_0$ .

Le travail virtuel  $uW_p$ , des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$uW_p = -k_{xx} u u - k_{xz} w u - k_{zx} u w - k_{zz} w w - c_{xx} \dot{u} u - c_{xz} \dot{w} u - c_{zx} \dot{u} w - c_{zz} \dot{w} w \quad (2-22)$$

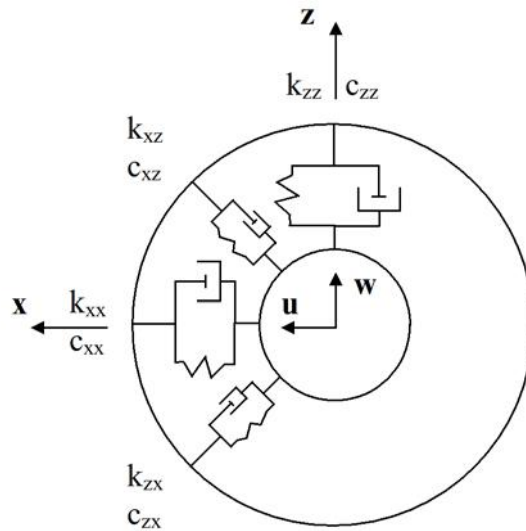


Figure II.5 Amortissement et raideur des paliers[27]

Ou sous une forme plus compacte :

$$u w = F_u u + F_w w \quad (2-23)$$

Où  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure II.5). En utilisant les deux équations (2.22) et (2.23) il vient:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$



**Remarque :** ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère R. Ces dernières ne font intervenir que  $k_{xx}$  et  $k_{zz}$  sont obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

$$uW_p = -k_{xx}(u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t)(uu^* \cos \Omega t + uw^* \sin \Omega t) - (-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t)(-uu^* \sin \Omega t + uw^* \cos \Omega t) \quad (2-25)$$

$$\partial W_p = - \left[ (k_{xx} \cos^2 \Omega t + k_{zz} \sin^2 \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) w^* \right] uu^* - \left[ (k_{xx} \sin^2 \Omega t + k_{zz} \cos^2 \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) u^* \right] uw^* \quad (2-26)$$

L'équation (2.26) montre que, si  $k_{xx} \neq k_{zz}$  la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

### II.3 Modèle simple

Notre objectif est de présenter la mise en place d'un modèle de calcul permettant, à l'aide d'une approche simplifiée, de déterminer le comportement dynamique d'un rotor vertical pas à pas dans le temps. Ainsi, après avoir validé le modèle sur des exemples de référence, nous pourrions évaluer l'influence de l'action non linéaire d'un palier à air sur le comportement de l'ensemble.

#### II.3.I. Description du modèle

Le modèle retenu est issu de [31]. Il s'agit d'un modèle simple mais réaliste, permettant de rendre compte des phénomènes de base de la dynamique des rotors.

$R_0(X, Y, Z)$  est le repère initial, l'axe du rotor au repos étant porté par la direction Y. La vitesse de rotation est constante. Afin de pouvoir simplifier les calculs, un seul degré de liberté est utilisé pour les déplacements dans les directions X et Z.

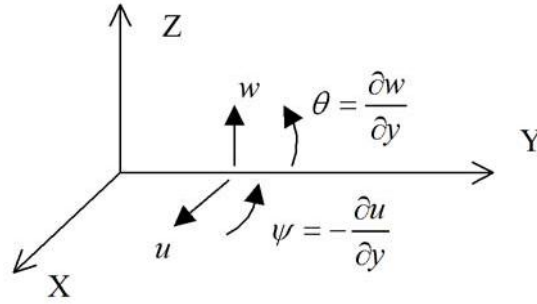
Les expressions des déplacements dans les directions X et Z sont respectivement mises sous la forme (méthode de séparation des variables)

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \quad (2-27)$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des coordonnées indépendantes généralisées. Etant donné, que les déplacements angulaires  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}$ , Figure II.6, sont petits, ils sont approchés par :

$$\left( \begin{array}{l} \mathbb{E} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \\ \mathbb{E} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \end{array} \right. \quad (2-28)$$



**Figure II.6** Représentation des coordonnées

Le second ordre des dérivées des déplacements  $u$  et  $w$  est nécessaire pour exprimer l'énergie élastique de l'arbre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = h(y) q_1 \quad (2-29)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = h(y) q_2$$

La fonction de déplacement  $f$  est choisie pour représenter exactement la forme du premier mode d'une poutre de section constante en flexion sur deux appuis situés à ses extrémités.

$$f(y) = \sin \frac{fy}{L} \quad (2-30)$$

D'où

$$g(y) = \frac{f}{L} \cos \frac{fy}{L} \quad (2-31)$$

$$h(y) = \left( \frac{f}{L} \right)^2 \sin \frac{fy}{L} \quad (2-32)$$

Dans ce qui suit toutes les expressions seront données en fonction des coordonnées généralisées  $q_1$  et  $q_2$  et de leurs dérivées.

Les constituants de la ligne d'arbre à prendre en compte sont:

- le(s) disque(s)
- le rotor (section circulaire pleine ou creuse)
- le(s) roulement(s), (palier(s) à action linéaire)
- le(s) palier(s) aérodynamique(s), (palier(s) à action non linéaire)
- le(s) balourd(s)

### II.3.2 Élément de disque

Le disque est considéré comme étant parfaitement axisymétrique. Son énergie cinétique  $T_D$ , peut s'écrire de la façon suivante:

$$T_D = \frac{1}{2} [M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{disk})] (q_1^2 + q_2^2) - I_{Dx} \Omega g^2(y_{disk}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (2-33)$$

Le disque est considéré rigide, son énergie de déformation est donc nulle.

### II.3.3 Elément de l'arbre

Le rotor est lui aussi considéré axisymétrique. L'expression de son énergie cinétique,  $T_s$ , est la suivante:

$$T_s = \frac{1}{2} \left[ \dots S \int_0^L f^2(y) dy + \dots I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2 \dots I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (2-34)$$

L'énergie de déformation de l'arbre  $U_s$ , s'écrit:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) \quad (2-35)$$

Il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique  $T_{DS}$ , de l'ensemble disque-rotor.

$$T_{DS} = T_s + T_D = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (2-36)$$

Avec :

$$m = \left[ M_D f^2 + I_{Dx} g^2(y_{disk}) + \dots S \int_0^L f^2(y) dy + \dots I \int_0^L g^2(y) dy \right]$$

Et

$$a = I_y g^2(y_{disk}) + 2 \dots \int_0^L g^2(y) dy$$

### II.3.4 Paliers à roulement

La ligne d'arbre peut éventuellement recevoir des paliers à roulement.

L'expression du travail virtuel des forces exercées sur la ligne d'arbre s'écrit de la façon suivante :

$$u_w = F_1 q_1 u q_1 + F_2 q_2 u q_2$$

Nous n'avons pris en compte ici que les termes directs de la matrice de raideur qui sont dans un premier temps assez représentatifs du comportement des roulements. En plus de la géométrie du palier et de la déformation de sa structure, il prend en compte la position de l'arbre à l'intérieur du palier qui peut être due au déplacement et à la déformation du rotor.

### II.4. Equation du mouvement

Tous les systèmes physiques sont continus représentant un nombre des degrés de liberté infinie.

Soit une modélisation simple de système tournante : rotor vertical + disque. On considère les déformations de l'arbre libre dans le plan X O Z et Y O Z. On suppose que la courbure dans la poutre est constante pour  $0 \leq z \leq L$

Pour simplifier le problème, on adopte pour notre étude un système de poutre avec deux nœuds.

On doit tenir compte des approximations suivantes :

- 1)- le système dynamique est linéaire.
- 2)- toute la masse de rotor est concentrée en trois points.
- 3)- la partie de l'arbre entre les points à une flexibilité mais de masse négligeable.

Les deux masses se déplacent suivent les axes X et Y, et on a un déplacement angulaire.

Les coordonnées généralisées du système sont :  $q = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \theta_x, \theta_y\}$

#### **II.4.1. Energie potentielle et énergie cinétique**

Pour calculer l'énergie potentielle et énergie cinétique on considère les déformations sur l'arbre sont dans le plan X O Z et Y O Z.

Energie potentielle :

La flexion du rotor produit un travail intérieur provoqué par la dilatation des fibres pour une poutre soumis à une flexion plan.

##### **II.4.1.1. Energie potentielle**

L'énergie potentielle exprime l'énergie de déformation emmagasinée dans l'arbre due à la flexion de ce dernier .elle à pour expression

$$U = \int_0^{2L} \frac{M_x z^2 + M_y z^2}{2EI} dz \quad , (2-37)$$

Maintenant supposons que la section de l'arbre est uniforme, homogène et isotrope donc :

$$\begin{aligned} M_x &= EI \ddot{x} \\ M_y &= EI \ddot{y} \end{aligned} \quad (2-38)$$

E : module de Young

I : moment d'inertie polaire de la section droite vue à l'axe neutre.

Dans le plan X O Z :

$$\ddot{x} = \frac{3}{L^3} \begin{cases} (x_1 - x_2 + \theta_y L) \dots \dots \dots 0 \leq z \leq L \\ (x_3 - x_2 - \theta_y L) \dots \dots \dots L \leq z \leq 2L \end{cases} \quad (2-39)$$

Dans le plan Y O Z

$$\ddot{y} = \frac{3}{L^3} \begin{cases} (y_1 - y_2 + \theta_x L) \dots \dots \dots 0 \leq z \leq L \\ (y_3 - y_2 - \theta_x L) \dots \dots \dots L \leq z \leq 2L \end{cases} \quad (2-40)$$

Substituons ces équations dans l'expression On obtient l'expression finale de l'énergie potentielle

$$U = \frac{3EI}{L^3} (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_{1''}L - 2x_{3''}L + 2''^2yL^2 + y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_{1''}L + 2''^2xL^2) \quad (2-41)$$

#### II.4.1.2. Energie cinétique :

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des points constituant le système.

$$T = \sum_{i=1}^{n=2} T_i$$

$$T = 1/2 \left[ \sum_{i=1}^{n=2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \sum_{i=1}^{n=2} \check{S}^2 m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] + 1/2 I_t (\dot{''}_x^2 + \dot{''}_y^2) \quad (2-42)$$

Développant la formule de l'énergie cinétique :

$$T = 1/2 [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \check{S}^2 m_1 (x_1^2 + y_1^2) + \check{S}^2 m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \check{S}^2 m_3 (x_3^2 + y_3^2) ] + 1/2 I_t (\dot{''}_x^2 + \dot{''}_y^2) \quad (2-43)$$

#### II.4.2. Système des équations

Appliquant la formulation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2-44)$$

On aboutit au système d'équations différentielles qui caractérise le mouvement :

$$\begin{cases}
 m_1 \ddot{x}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} \ddot{u}_y = 0 \\
 m_1 \ddot{y}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \ddot{u}_x = 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \check{S}^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \check{S}^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} \ddot{u}_y = 0 \\
 m_3 \ddot{y}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \ddot{u}_x = 0 \\
 I_t \ddot{u}_x + \frac{8EI}{L} \ddot{u}_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\
 I_t \ddot{u}_y + \frac{8EI}{L} \ddot{u}_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0
 \end{cases} \quad (2-45)$$

### II.4.3. Effet gyroscopique

L'existence d'un moment d'inertie polaire donne naissance à un moment gyroscopique.

D'après la deuxième loi de Newton pour les corps solides (non déformables) en rotation on a :

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}$$

$\vec{M}$  : Moment des forces extérieures

$\vec{H}$  : Moment cinétique

$$\vec{H} = \dot{u}_x I_1 \vec{i} + \dot{u}_x I_2 \vec{j} + \check{S} I_3 \vec{k} \quad (2-46)$$

On note que la vitesse angulaire est constante.

Le moment d'inertie d'un disque est :

$$I_p = I_3 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_1 = I_2 = I_t = \frac{1}{4} M R^2$$

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{Bmatrix} M_{zx} \\ M_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_t \ddot{u}_x + \check{S} I_p \dot{u}_y \\ I_t \ddot{u}_y - \check{S} I_p \dot{u}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \check{S} I_p \\ -\check{S} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{Bmatrix} \quad (2-47)$$

Dans cette expression il y a deux termes distincts.

Le premier terme est déjà pris en considération dans les équations du mouvement

Alors que le second tient compte de l'effet gyroscopique :

On le note :

$$\begin{cases} M_{zx}^G = \check{S} I_{p''x} \dot{\cdot} \\ M_{zy}^G = \check{S} I_{p''y} \dot{\cdot} \end{cases} \quad (2-48)$$

Par contre les moments gyroscopiques exercés sur l'arbre par le disque sont :

$$\begin{cases} Q_{zy}^G = \check{S} I_{p''x} \dot{\cdot} = -M_{zx}^G \\ Q_{zy}^G = \check{S} I_{p''y} \dot{\cdot} = -M_{zy}^G \end{cases}$$

Finalement on introduit l'effet gyroscopique dans les équations du mouvement on trouve :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} u_y = 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} u_x = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \check{S}^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \check{S}^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} u_y = 0 \\ m_3 \ddot{y}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} u_x = 0 \\ I_t'' x + \check{S} I_{p''x} \dot{\cdot} + \frac{8EI}{L} u_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\ I_t'' y + \check{S} I_{p''y} \dot{\cdot} + \frac{8EI}{L} u_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \end{cases} \quad (2-49)$$

Ecrivons maintenant le système différentiel sous forme matricielle[29] :

**CHAPITRE**

---

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\cdot} \\ \ddot{\cdot} \\ \ddot{\cdot} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{S}I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{S}I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\cdot} \\ \dot{\cdot} \\ \dot{\cdot} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & BL \\ & A_1 & 0 & B_1 & 0 & 0 & -BL & 0 \\ & & C_2 & 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_2 & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ & & & & A_3 & 0 & 0 & -BL \\ S & Y & M & & & A_3 & BL & 0 \\ & & & & & & 2BL^2 & 0 \\ & & & & & & & 2BL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tel que :  $A_i$  ,  $B$  et  $C_i$  sont des constants a pour valeurs :

$$A_i = \frac{4EI}{L^3} - \check{S}^2 m_i$$

$$B = \frac{4EI}{L^3}$$

$$C_i = \frac{8EI}{L^3} - \check{S}^2 m_i$$

$i = 1,2,3.$

Les matrices d'amortissement  $[C]$  et la raideur  $[K_p]$  sont données par :



$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx}^1 & C_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{yx}^1 & C_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{xx}^2 & C_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{yx}^2 & C_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{S}I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\check{S}I_p \end{bmatrix}$$

ET

$$[K_p] = \begin{bmatrix} K_{xx}^1 & K_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{yx}^1 & K_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{xx}^2 & K_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{yx}^2 & K_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement on trouve les équations du mouvement sous la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K] + [K_p] - \check{S}^2[M])\{q\} = \{0\} \quad (2-50)$$

#### II.4.4. Résolution de système des équations

Donc la solution de l'équation peut être donnée comme suite :

$$\{q\} = \{a\}\sin(\Omega_t/2) + \{b\}\cos(\Omega_t/2) \quad (2-51)$$

Substituant l'expression (2-51) dans (2-50) on aboutit à :

$$\begin{aligned} & [-[M]\frac{\Omega^2}{4}\{a\}\sin(\Omega_t/2) - [M]\frac{\Omega^2}{4}\{b\}\cos(\Omega_t/2) + [C]\{a\}\cos(\Omega_t/2) - [C]\{b\}\frac{\Omega}{2}\sin(\Omega_t/2) + \\ & + ([K] + [K_p] - \check{S}^2[M])\{a\}\sin(\Omega_t/2) + ([K] + [K_p] - \check{S}^2[M])\{b\}\cos(\Omega_t/2) \} \{q\} = \{0\} \end{aligned} \quad (2-52)$$

Dans l'expression (2-52) on additionne les termes de même harmonique :

$$\begin{cases} \left[ \left[ [K] - [M] \left( \frac{\Omega^2}{4} + \dot{\xi}^2 \right) \right] \{a\} + \left[ -\frac{\Omega}{2} [C] \right] \{b\} \right] = \{0\} \\ \left[ \left[ -\frac{\Omega}{2} [C] \right] \{a\} + \left[ [K] - [M] \left( \frac{\Omega^2}{4} + \dot{\xi}^2 \right) \right] \{b\} \right] = \{0\} \end{cases}$$

La solution simple  $a = b = 0$  est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de la matrice.

$$D = \left[ [K] - [M] \left( \frac{\Omega^2}{4} + \dot{\xi}^2 \right) \right]^2 + \frac{\Omega^2}{4} [C]^2 \quad (2-53)$$

Si  $D = 0$  on a les pulsations de l'instabilité dynamique

Et si  $D \neq 0$  on a la zone de stabilité pour les quelles le rotor peut tourner.

## II.5 .Conclusion

Les équations de mouvement de rotor ont été bien développées dans ce chapitre. A partir d'un développement analytique des équations de mouvement régies un système déformable quelconque en rotation, on focalise notre étude sur un rotor simple en déterminant leurs énergies cinétiques et énergies potentiels. Enfin en simplifiant notre modèle en introduisant le modèle de Rayleigh Ritz, les équations de Lagrange sont bien adaptées pour trouver les équations de mouvements.

## *Chapitre III*

# *Modélisation des rotors par élément fini*

# CHAPITRE

## III.1. Introduction

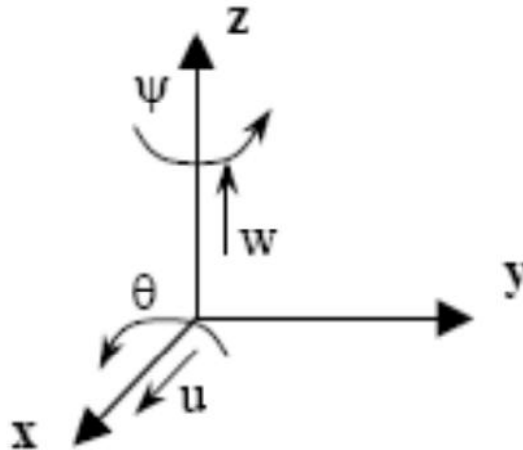
La méthode des éléments finis est connue parmi les méthodes les plus importantes et le plus efficace pour modéliser et résoudre les problèmes complexes dans les sciences de l'ingénieur, et en particulier en dynamique des rotors. On développe dans ce chapitre les équations de mouvement de rotor à l'aide de cette méthode en explicitant les matrices élémentaires des différents éléments de rotor (arbre, disque, palier et balourd), après avoir présenté les éléments de modélisation dans leur rotor, il a semblé intéressant de réfléchir à la méthode de résolution du système d', après avoir présenté les éléments de modélisation dans leur rotor, il a semblé intéressant de réfléchir à la méthode de résolution du système d'équations obtenu.

## III.2. Élément fini de rotor

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : disques, arbres, paliers et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

### III.2.1 Disque

La modélisation de disque par élément fini présenté ici c'est la modélisation correspond le cas où le disque est symétrique et ne souple pas. On peut modéliser le disque par un nœud possède quatre degrés de liberté : deux translations  $u$  et  $w$  suivant  $x$  et  $z$ , et deux rotations  $\theta$  et  $\psi$  autour de  $x$  et  $z$ .



**Figure III.1:** Degrés de liberté d'un élément de disque.[29]

Le vecteur déplacement nodal de centre de disque est pris de la forme :

$$u = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (3-1)$$

## CHAPITRE

On applique les équations de Lagrange sur l'expression de l'énergie cinétique de disque, on trouve les différents matrices et vecteur de disque (matrices de masse, matrices d'amortissement, matrice de raideur et vecteur force).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = [M_d] \{\ddot{u}\} + [c_d] \{\dot{u}\} + [k_d] \{u\} \quad (3-2)$$

avec  $[M_d]$  et  $[C_d]$  respectivement sont la matrice de masse et la matrice de l'effet gyroscopique, qui ont pour expression :

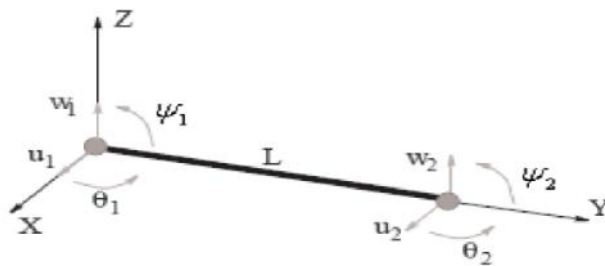
$$M_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{dx} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

et

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

### III.2.2 L'arbre

L'arbre est discrétisée en plusieurs éléments finie, chaque élément utilisé est un élément de poutre de section circulaire constante à deux nœuds.



**Figure III.2 :** Degrés de liberté d'un élément d'arbre.

Les matrices sont donc d'ordre 8 puisqu'elles sont construites à partir de quatre déplacements et quatre pentes (rotations). Les relations entre déplacement et pentes sont :

## CHAPITRE

$$\begin{cases} u = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \mathbb{E} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (3-5)$$

Et le vecteur de déplacement nodal est :

$$u = [u_1, w_1, u_1, \mathbb{E}_1, u_2, w_2, u_2, \mathbb{E}_2] \quad (3-6)$$

Ce vecteur est séparé par deux vecteurs de déplacement  $u_u$  et  $u_w$  correspondant respectivement aux mouvements selon X et Z, leur expression est :

$$\begin{aligned} u_u &= [u_1, \mathbb{E}_1, u_2, \mathbb{E}_2]^T \\ u_w &= [w_1, u_1, w_2, u_2]^T \end{aligned} \quad (3-7)$$

L'élément fini de l'arbre est constitué en exprimant les déplacements u et w par :

$$\begin{aligned} u &= N_1(y)u_u \\ w &= N_2(y)u_w \end{aligned} \quad (3-8)$$

où  $N_1(y)$  et  $N_2(y)$  sont les vecteurs des fonctions de forme classique d'un élément de poutre en flexion.

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\ N_2(y) &= \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \end{aligned} \quad (3-9)$$

Les matrices élémentaires de l'arbre de l'ordre 8\*8 sont obtenues en substituant u, w par leur expression dans chacune contient l'expression des fonctions de forme  $N_1(y)$  et  $N_2(y)$ , et  $u, \mathbb{E}$  par leur expression dans l'expression de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'arbre puis on applique les équations de Lagrange.

- **L'énergie cinétique** : L'énergie cinétique de l'arbre est exprimée sous la forme compacte :

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{\dots S}{2} \int_0^L [u\dot{u}^t N_1^t N_1 u\dot{u} + u\dot{w}^t N_2^t N_2 u\dot{w}] dy + \frac{\dots I}{2} \int_a^L \left[ u\dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} u\dot{u} + u\dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} u\dot{w} \right] dy \\ &- 2\dots I \left| \int_0^L u\dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} u\dot{w} dy + \dots I L \right|^2 \end{aligned} \quad (3-10)$$

## CHAPITRE

---

En substituant les fonctions de déplacement et leur dérivée, on obtient :

$$T_a = \frac{1}{2} \mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}' M_1 \mathbf{u} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \dot{\mathbf{w}}' M_2 \mathbf{u} \dot{\mathbf{w}} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}' M_3 \mathbf{u} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \dot{\mathbf{w}}' M_4 \mathbf{u} \dot{\mathbf{w}} + \left| \mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}' M_5 \mathbf{u} \dot{\mathbf{w}} + \dots IL \right|^2 \quad (3-11)$$

Où les matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont les matrices de masse classiques,  $M_3$  et  $M_4$  donnent l'influence des effets d'inertie de rotation et  $M_5$  donne l'effet gyroscopique. Comme il a pu être observé précédemment, le dernier terme qui est une constante n'est pas considéré par la suite ( $= \text{cte}$ ).

En appliquant l'opérateur différentiel de Lagrange sur l'expression de l'énergie cinétique on trouve [28] :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{u}} = (M + M_a) \ddot{\mathbf{u}} + C \dot{\mathbf{u}} \quad (3-12)$$

Où  $M$  et  $M_a$  sont obtenues respectivement à partir de  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , et la matrice  $C$  vient de  $M_5$ . Ces matrices s'expriment[29] :

$$M = \frac{\dots SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$c = \frac{\dots I}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -3L & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^3 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

## CHAPITRE

$$c = \frac{...I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & -4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

- **L'énergie de déformation** : en introduisant les fonctions de forme dans l'expression de l'énergie de déformation on obtient :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ uu' \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} uu + uw' \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} uw \right] dy \quad (3-16)$$

Après intégration on obtient

$$T_a = \frac{1}{2} uu' K_1 uu + \frac{1}{2} uw' K_2 uw \quad (3-17)$$

Où  $K_1$  et  $K_2$  sont les matrices de raideur classiques. Il est fréquent de prendre en compte l'effet de cisaillement caractérisé par la quantité

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (3-18)$$

Avec le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3-19)$$

$\nu$  est le coefficient de poisson et  $S_r$  est l'aire réduite de la section. L'influence de l'effet de cisaillement qui donne une matrice  $K_s$  dont la démonstration est n'est pas traitée, mais son influence est incluse dans la matrice de raideur classique. La matrice de raideur classique vient de  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_s$

En appliquant l'opérateur différentiel de Lagrange sur l'expression de l'énergie de déformation on trouve[28] :

$$\frac{\partial U}{\partial u} = ku \quad (3-20)$$

Avec  $K = K_c$  la matrice de raideur dont l'expression :



## CHAPITRE

$$k_c = \frac{EI}{(1+a')L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

On ajoute les matrices de raideur  $K_i$  et d'amortisseur  $C_i$  de l'amortissement interne qui sont définies comme suivant :

La matrice de raideur due à l'amortissement interne  $K_i$  :

$$C_i = \frac{EIS}{(1+a')} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -(4+a')L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2+a')L^2 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -(2+a')L^2 & -6L & 0 & 0 & -(4+a')L^2 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

$$C_i = \frac{EIS}{(1+a')} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2+a')L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a')L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2+a')L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a')L^2 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

### III.2.3. Paliers

Les caractéristiques principales relient les forces et les déplacements. L'influence des pentes et des moments de flexion est négligée.

$$\begin{aligned} F_u &= -k_{xx}u - k_{xz}w - C_{xx}\dot{u} - C_{xz}\dot{w} \\ F_w &= -k_{zx}u - k_{zz}w - C_{zx}\dot{u} - C_{zz}\dot{w} \\ F_x &= F_y = 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

## CHAPITRE

---

Et comme  $F_r = F_E = 0$ , on a :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_r \\ F_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ r \\ E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} & 0 & 0 \\ C_{zx} & C_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \\ \dot{E} \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement visqueux. Ces matrices sont généralement asymétriques et les termes de ces matrices peuvent varier de façon significative avec la vitesse de rotation.

### III.3. Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant les équations de Lagrange. Le système d'équation générale est :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{effort\} \quad (3-26)$$

Il convient de le réécrire en dissociant les équations en forces et en moments :

$$\begin{cases} [M_F]\{\ddot{q}\} + [C_F]\{\dot{q}\} + [K_F]\{q\} = \{F_{ext}\} \\ [M_M]\{\ddot{v}\} + [C_M]\{\dot{v}\} + [K_M]\{v\} = \{F_{ext}\} \end{cases} \quad (3-27)$$

Avec  $\{q\}$  le vecteur des inconnues en déplacement et  $\{v\}$  le vecteur des inconnues angulaires. Les équations de mouvements pour un système en tenant compte l'effet de l'amortissement interne s'écrit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([C] + [C_i])\{\dot{u}\} + ([K] + [K_i])\{u\} = \{effort\} \quad (3-28)$$

### III.4. Résolution des équations

Il existe nombreuse méthode pour la résolution de système d'équation, chacun a son intérêt suivant le phénomène auxquelles traité. La méthode de Newmark est une méthode de résolution itérative pas à pas de façon que le déplacement et la vitesse sont développés en série de Taylor à l'aide des 2 paramètres indépendants  $a$  et  $b$  ainsi que du pas de temps  $\Delta t$ . Si l'on considère que le rotor est découpé en  $n$  éléments finis, à 4 degrés de liberté, le système obtenu présente ainsi  $4(n+1)$  inconnues, compte tenu de la taille du système matriciel, la résolution par cette méthode dans le temps risque de demander un temps de calcul important, de plus la convergence numérique du calcul peut être difficile à obtenir. La méthode pseudo-modèle, à répondre bien a ce problème, elle permet notamment de réduire d'ordre du système d'équations ce qui autorise un gain important en temps de calcul et en place

## CHAPITRE

---

mémoire. De plus, il est possible d'introduire dans les équations, de l'amortissement modal[29].

### III.5.Conclusion

Nos efforts dans ce chapitre se sont portés sur la modélisation de comportement dynamique d'un rotor flexible à l'aide de la méthode des éléments finie qui est une méthode très robuste et efficace pour résoudre des systèmes réels car elle est plus précise et permet d'étudier l'ensemble des modes des vibrations du rotor. Le modèle à élément fini est obtenu de façon à appliquer les équations de Lagrange sur les énergies des éléments du rotor en sortant les différentes matrices caractéristiques du système (matrice masse, matrice raideur et matrice amortisseur). Le système obtenu est résolu à l'aide de méthodes de résolution notamment la méthode de Newmark et la méthode pseudo modale. La méthode pseudo modale est bien utilisée pour étudier un comportement vibratoire d'un rotor en présence de l'effet d'amortissement interne.

## *Chapitre IV*

### *Simulation numérique*

# CHAPITRE

---

## IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons procéder au calcul des fréquences propres et des déplacements maximums du rotor pour différents matériaux et différentes positions des paliers, des résultats seront exposés et interprétés afin de comprendre l'influence de ces paramètres sur les fréquences et les déplacements.

La simulation numérique a connue depuis longtemps, l'une des utiles les plus importants pour le calcul en dynamique des structures et vibration, notamment après le progrès et le développement des machines de calcul et informatique. Dans notre jours, il existe plusieurs logiciels permettant de calculer et simuler en dynamique des structures tel que, matlab/femlab, nastran, abaqus, cosmos, ansys...

Pour mener notre étude par une simulation numérique, on utilise le code de calcul numérique ANSYS, qui est l'un des codes les plus efficaces dont l'analyse est basée sur la méthode des éléments finis. Le code de calcul ANSYS comprend plusieurs composantes telles que : ANSYS/Professionnel, ANSYS/Mechanical, ANSYS/Structural, ANSYS /Dynamical, ANSYS/Multiphysics...etc. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur et les processus adéquats ( type d'élément, conditions aux limites, tracés). Dans notre analyse, on utilise le module analyse dynamique dans ANSYS/Structural, qui permet de traiter la majorité des problèmes de la dynamique des structures et vibration.

L'analyse dynamique peut se présenter comme étant une technique utilisée pour déterminer le comportement dynamique d'une structure ou d'un composant, quand l'inertie de la structure (effet de la masse) et son amortissement jouent un rôle important. Dans le code de calcul Ansys, il y a quatre types d'analyse dynamique :

- **L'analyse modale** : cette méthode permet de prédire bien le comportement vibratoire d'une structure, en analysant les fréquences et les modes propres de système. Pour appliquer cette méthode dans notre cas pour l'étude de comportement dynamique d'un rotor flexible, on admet que le système est linéaire et dont la discrétisation par élément fini l'ensemble des degrés de liberté totale sont égales aux nombres de nœuds multiplier par le nombre de degré de liberté pour chaque nœud.
- **L'analyse harmonique** : cette méthode permet nous d'étudier la réponse des structures à une force harmonique dont la variation est sinusoïdale dans le temps.
- **L'analyse transitoire** : l'analyse transitoire utilisée pour prédire un comportement dynamique d'une structure sous chargement varié aléatoirement dans le temps.

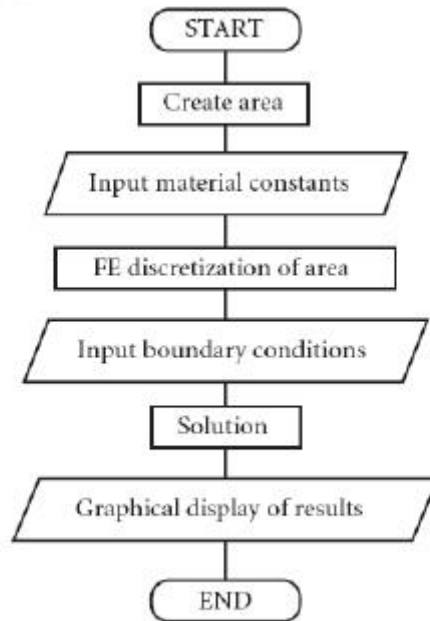
Le modèle de rotor présenté pour la simulation numérique est similaire d'un rotor d'une turbine à gaz dont la géométrie est structurée par une longue arbre et portant deux disques et supporté dans les deux extrémités par des paliers supposés rigide pour la simplification.

L'objectif principal dans cette partie d'étude, est d'une part comprendre le comportement vibratoire et dynamique d'un rotor flexible et d'autre part de maîtriser le code de calcul ANSYS.

#### **IV.2 Les procédures et les étapes de simulation numérique**

Les procédures et les étapes de simulations pour l'analyse dynamique d'un rotor flexible sont les suivants :

- ✚ Définition du type d'analyse : pour notre cas le type d'analyse c'est Structural
- ✚ Entrée des valeurs numériques des paramètres (caractéristiques physiques des matériaux et paramètres géométrique)
- ✚ Définition des éléments à utiliser pour le maillage.
- ✚ Création de la géométrie du modèle et entrée des différents types de matériaux.
- ✚ Association des matériaux et des surfaces/valeurs correspondants.
- ✚ Création du maillage.
- ✚ Entrée des conditions aux limites et chargement (forces, pression...)
- ✚ Résolution.
- ✚ Affichage des résultats en terme (détermination des déplacements, des contraintes au niveau de chaque nœud, de chaque élément ainsi que leurs fréquences naturels correspondantes)



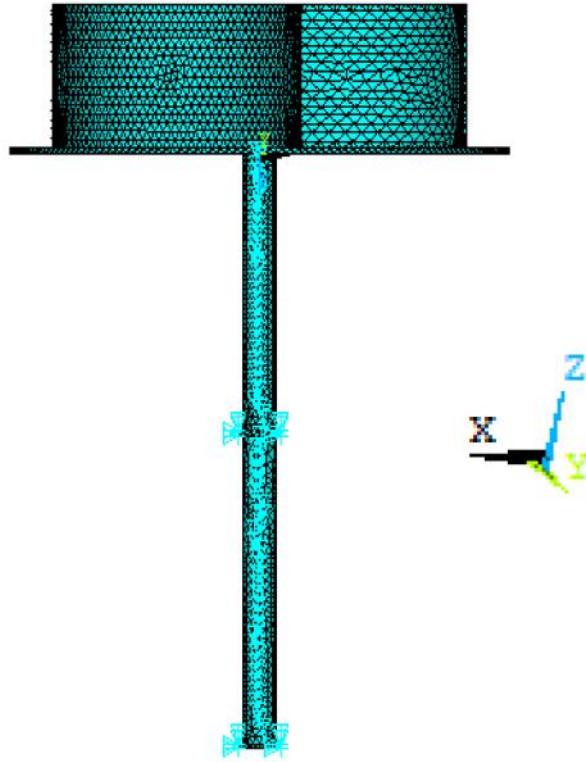
**Figure IV.1 :** Organigramme pour l'analyse dynamique des structures par ANSYS.

### VI.3 Conditions aux limites

Maintenant que nous avons modélisé le rotor, on va présenter la méthode de caractérisation des conditions aux limites. La caractérisation de la structure peut se faire par sa décomposition en éléments finis flexibles et donc étudier nœud par nœud les conditions aux limites.

Lors du mouvement, la ligne moyenne de l'arbre ne reste pas confondue avec la droite initiale soient  $(U_x, U_y, U_z)$  les déplacements de l'arbre,  $U_y$  et  $U_x$  sont variables alors que  $U_z$  est considéré comme constant puisque seuls les mouvements de flexion de l'arbre sont étudiés.

Donc pour les nœuds des deux paliers on annule tous les degrés de libertés. Pour les nœuds propres au rotor on annule les degrés de liberté de translation et de rotation suivant l'axe  $z$ , il ne reste que quatre degrés de liberté par nœud deux rotations suivant  $y$  et  $x$ , et deux translations suivant  $y$  et  $x$ .



**Figure VI .2 :** *Conditions aux limites*

#### **IV.4 Résultats et interprétations**

L'objectif de cette étude est de déterminer les fréquences propres réelles et imaginaires, ainsi que les déplacements maximaux équivalents à chaque mode. Elles concernent les fréquences propres et les déplacements maximaux équivalents à chaque matériau utilisée et la distance entre les deux paliers choisis à savoir les valeurs de la distances et les matériaux choisi sont regroupées dans le tableau IV.1 Les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux qui suivent selon le type du matériau choisi.

Type de Matériau	Masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )	Module de Young E (pascal)	Coefficient de poisson $\nu$
<b>Acier</b>	7850	$22^E10$	0.28
<b>Aluminium</b>	2700	$6.9^E10$	0.33
<b>Bronze</b>	8960	$10.6^E10$	0.33
<b>Alliage -Aluminium</b>	2810	$7.2^E10$	0.3
<b>Duralumin</b>	2650	$7.4^E10$	0.35

**Tableau IV.1:** *Caractéristiques des matériaux choisi pour l'arbre du rotor*

##### **IV.4.1- Résultats pour l'acier :**

Le premier matériau étudié est l'acier qui est le plus utilisé dans la réalité dans les caractéristiques sont cités ci-dessus .on a calculer les fréquences propres et les déplacements maximaux équivalents pour trois distances entre les deux paliers 300

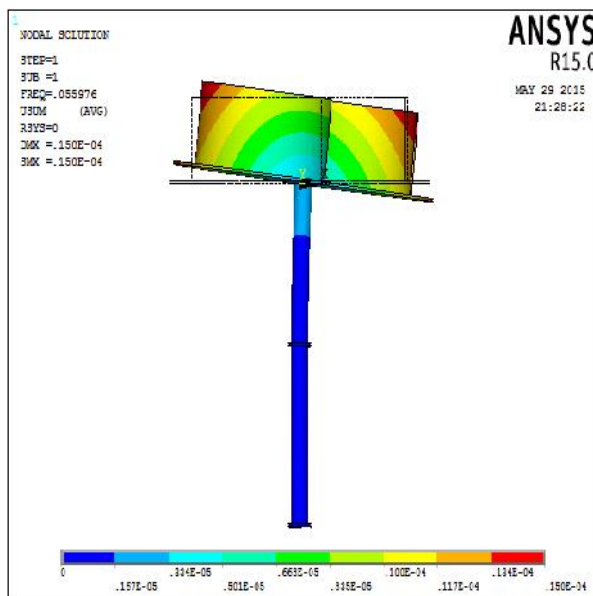


mm, 400 mm et 500mm. Les résultats pour chaque sont regroupés dans les tableaux suivants ainsi les déformés sont schématisés afin de bien voir et apprécier dans quels circonstance travail notre rotor et quels conditions sont défavorables.

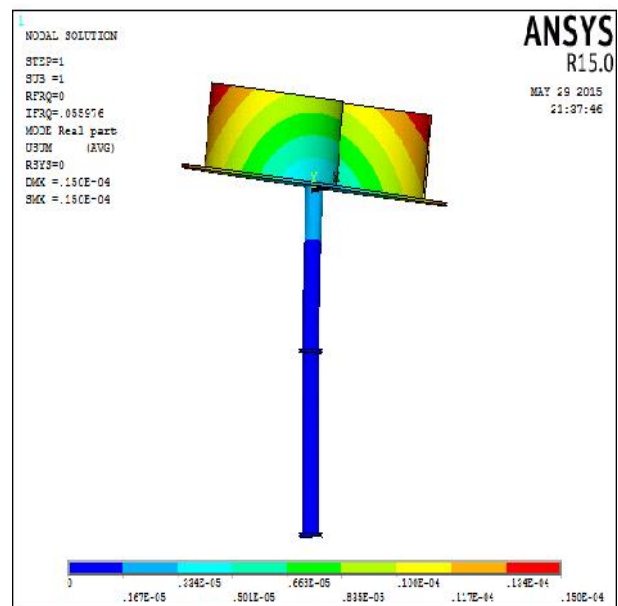
- **Distance entre les deux palies [300 mm]**

Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	Réel	0.55976	0.56190	0.77259	0.11923	0.13666
	imag	0.55976	-0.55976	0.56190	-0.56190	0.77259
Déplacement (Max)* E- 04(m)	Réel	0.150	0.121	0.165	0.123	0.147
	imag	0.150	0.150	0.121	0.121	0.165

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.077259 Hz avec une valeur de  $0.165 * 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.

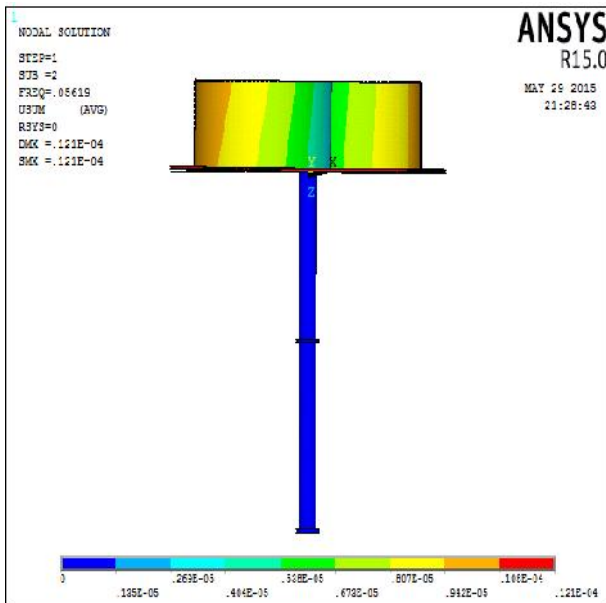


**Mode réel**  
( $f=0.55976E-01$  Hz ;  $D_{max}=0.150E^{-04}$ )



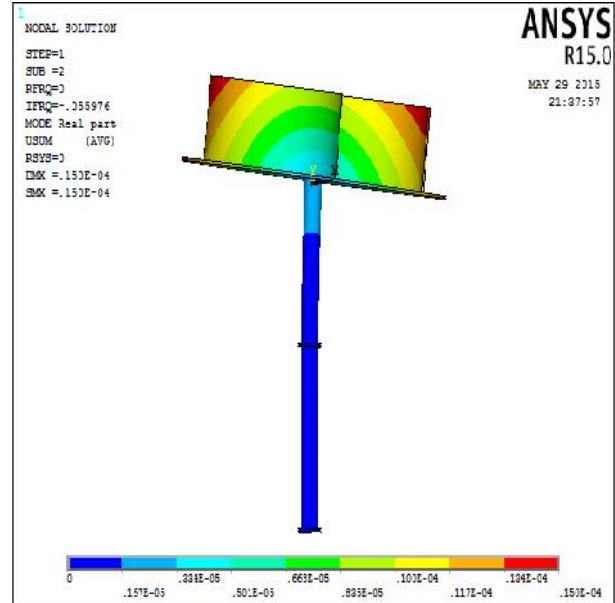
**Mode imaginaire**  
( $f=0.55976E-01$ Hz ;  $D_{max} =0.150E^{-04}$ )

**Figure VI .3 : premier mode (fréquence et déplacement maximal)**



**Mode réel**

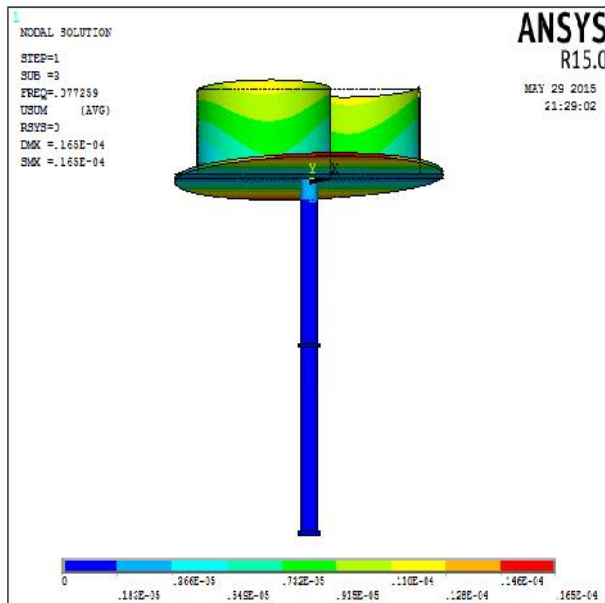
( $f=0.56190E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.121E^{-04}$ )



**Mode imaginaire**

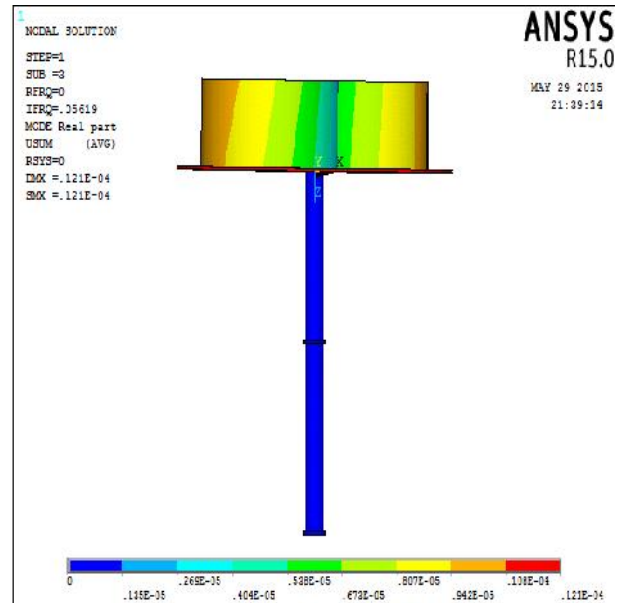
( $f= - 0.55976E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.150E^{-04}$ )

**Figure VI . 4 :Deuxième mode (fréquence et déplacement maximal)**



**Mode réel**

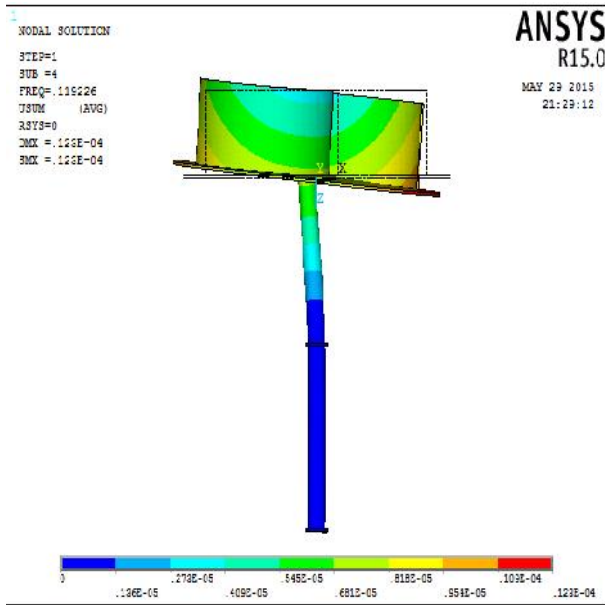
( $f=0.77259E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.165E^{-04}$ )



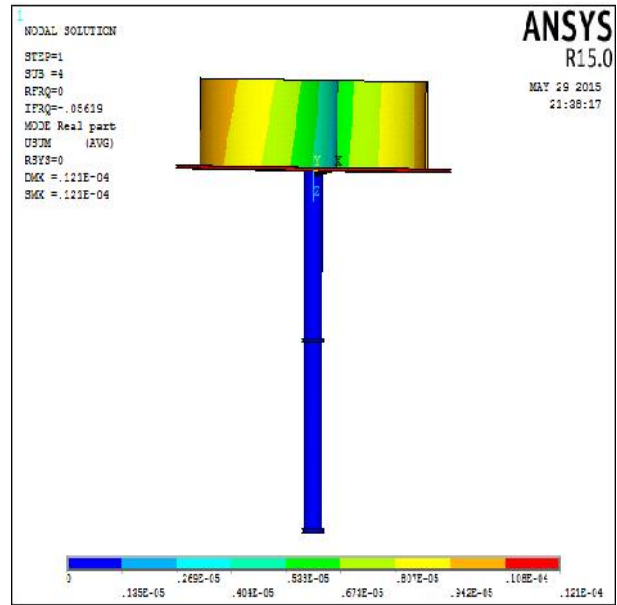
**Mode imaginaire**

( $f= 0.56190E-01$ ;  $D_{\text{max}}=0.121E^{-04}$ )

**Figure VI . 5 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

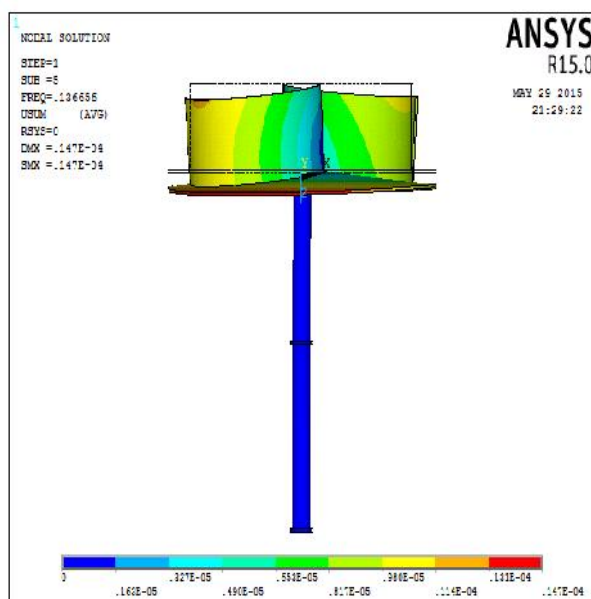


**Mode réel**  
( $f = 0.11923\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}} = 0.123^{\text{E}}-04$ )

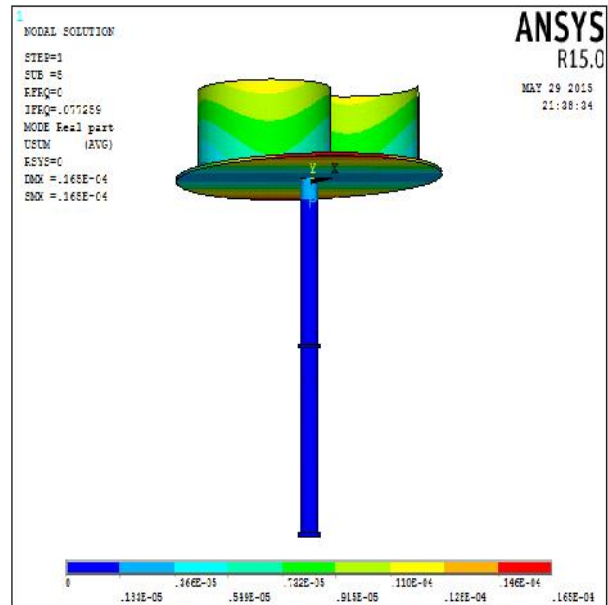


**Mode imaginaire**  
( $f = -0.56190\text{E}-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}} = 0.121^{\text{E}}-04$ )

**Figure VI .6 : quatrième (fréquence et déplacement maximal)**



**Mode réel**  
( $f = 0.13666\text{Hz}$ ;  $D_{\text{max}} = 0.147^{\text{E}}-04$ )



**Mode imaginaire**  
( $f = 0.77259\text{E}-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}} = 0.165^{\text{E}}-04$ )

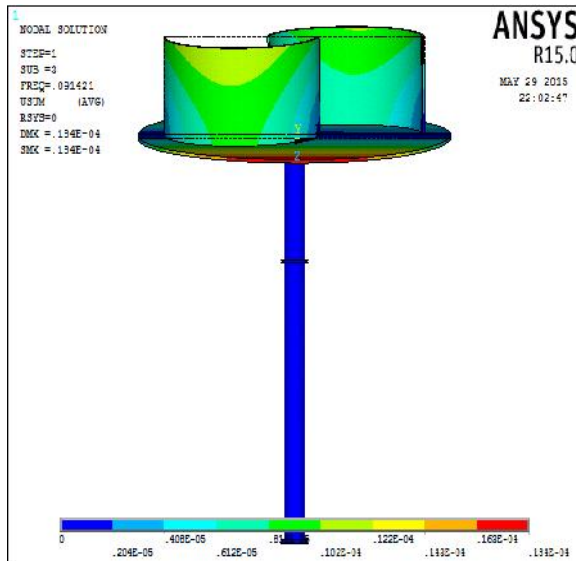
**Figure VI .7 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance entre les deux palies [400 mm]

Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	Réel	0.62180	0.67624	0.91421	1.3780	1.7374
	imag	0.62180	-0.62180	0.67624	-0.67624	0.9142

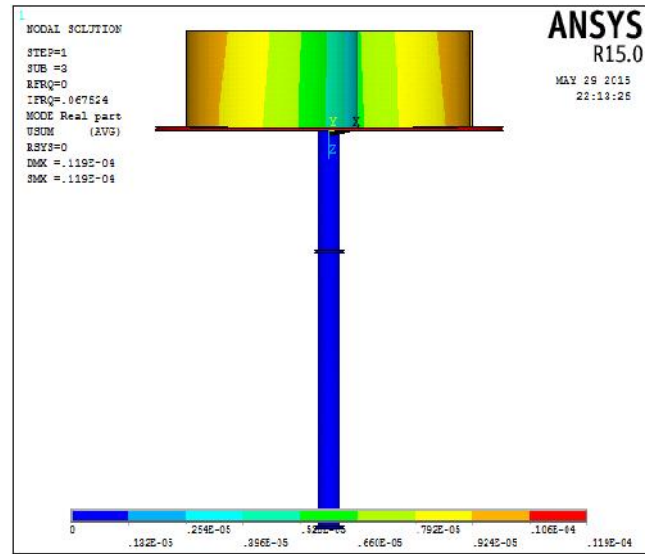
<b>Déplacement (Max)* E'04(m)</b>	Réel	0.157	0.119	0.184	0.141	0.110
	imag	0.157	0.157	0.119	0.119	0.184

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.91421Hz avec une valeur de  $0.184 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

(f=0.91421E-01Hz ; Dmax=0.184<sup>E</sup>-04)



**Mode imaginaire**

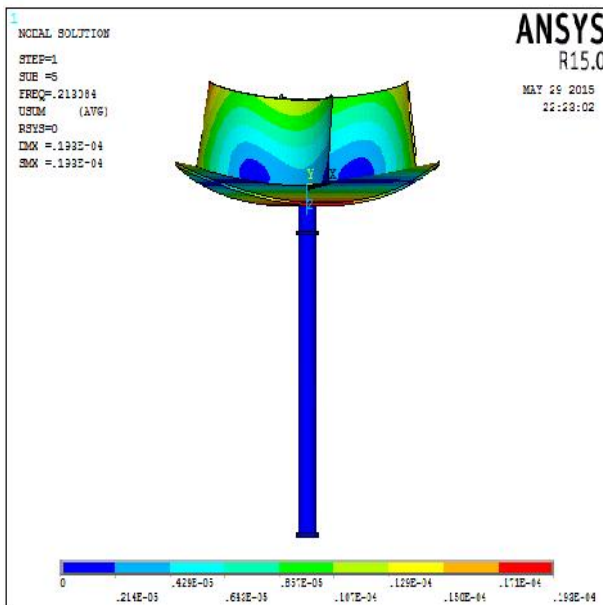
(f= 0.67624E-01Hz ; Dmax =0.119<sup>E</sup>-04)

**Figure VI .8: Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance entre les deux palies [500 mm]

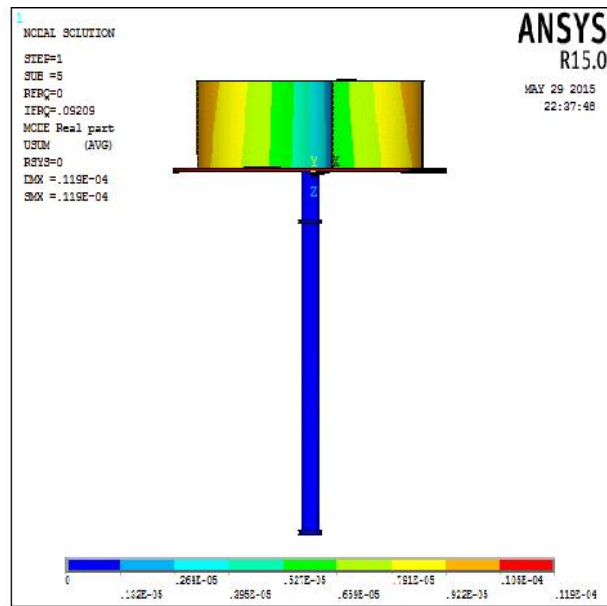
Mode		1	2	3	4	5
<b>Fréquence (Hz)* E-01</b>	réel	0.69081	0.85867	0.92090	1.3744	2.1308
	imag	0.69085	-0.69085	0.85868	-0.85868	0.92090
<b>Déplacement (Max)* E'04(m)</b>	réel	0.159	0.180	0.119	0.133	0.193
	imag	0.159	0.159	0.180	0.180	0.119

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 2.1308Hz avec une valeur de  $0.193 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f = 0.21308 \text{ Hz}$  ;  $D_{\text{max}} = 0.193 \text{ E}^{-04}$ )



**Mode imaginaire**

( $f = 0.92090 \text{ E}^{-01} \text{ Hz}$  ;  $D_{\text{max}} = 0.119 \text{ E}^{-04}$ )

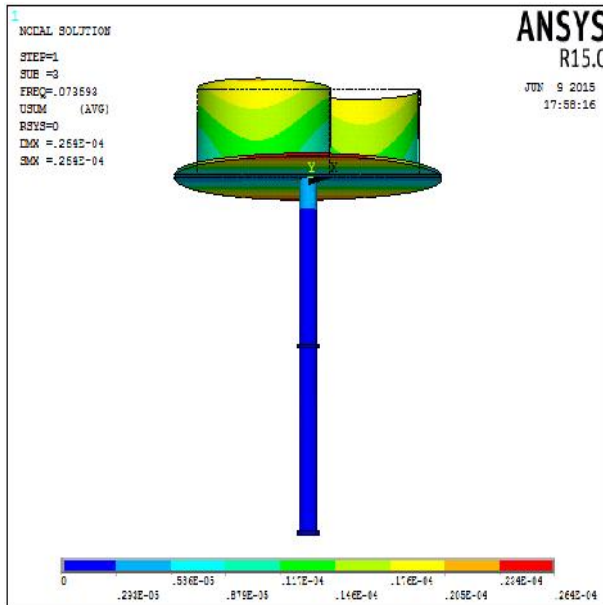
**Figure VI.9 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)**

**IV.4.2- Résultats pour l'alliage-Aluminium :**

- distance entre les deux palies [300mm]

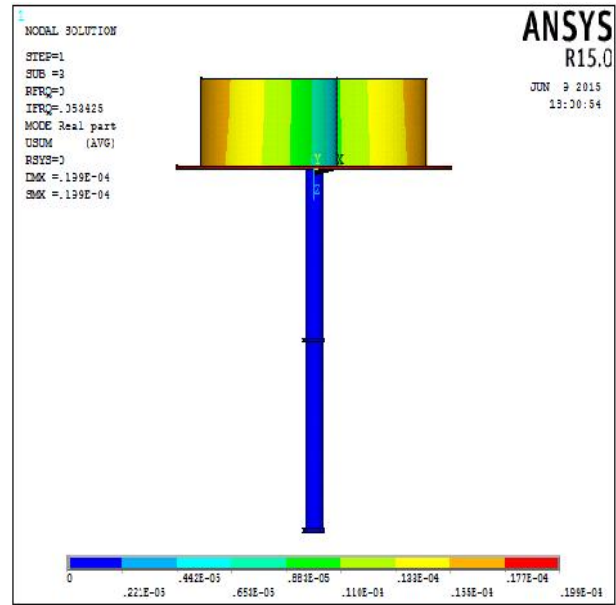
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.51065	0.53425	0.73693	1.0738	1.3099
	imag	0.51065	-0.51065	0.53425	-0.53425	0.73693
Déplacement (Max)* E-04(m)	réel	0.249	0.199	0.264	0.217	0.246
	imag	0.249	0.249	0.199	0.199	0.264

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.73693 Hz avec une valeur de  $0.264 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.73693E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.264^E-04$ )



**Mode imaginaire**

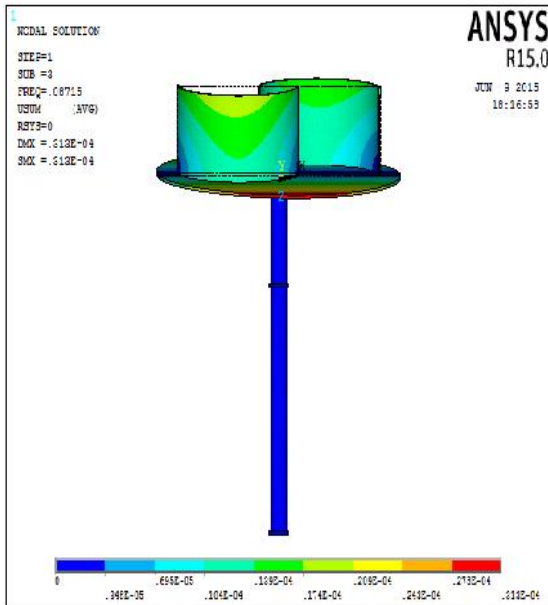
( $f=0.53425E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.199^E-04$ )

**Figure VI .10 : premier mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance entre les deux palies [300mm]

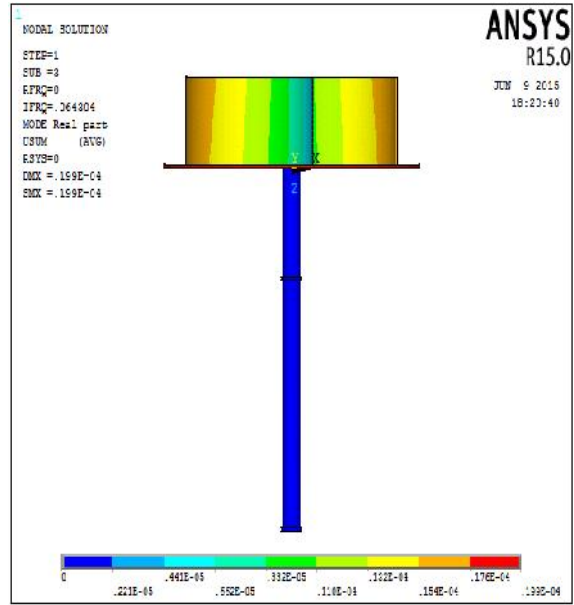
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.58132	0.64304	0.87150	1.3234	1.6460
	imag	0.58132	-0.58132	0.64304	-0.64304	0.87150
Déplacement (Max)* E-04(m)	réel	0.260	0.199	0.313	0.233	0.175
	imag	0.260	0.260	0.199	0.199	0.313

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.87150 Hz avec une valeur de  $0.313 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.87150E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.313^E-04$ )



**Mode imaginaire**

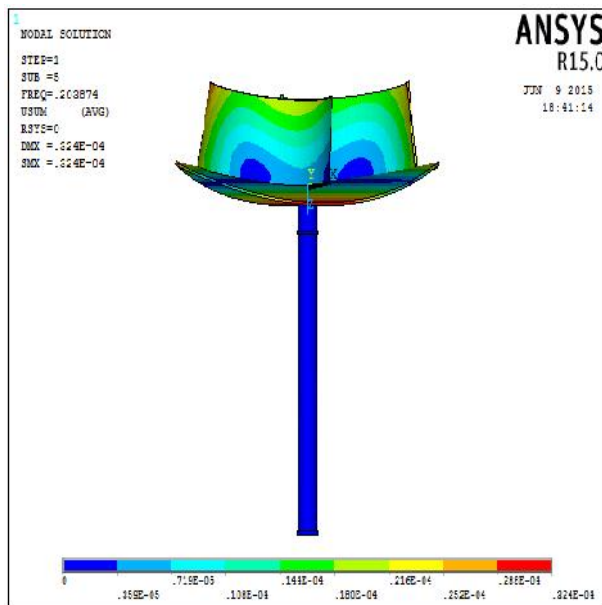
( $f= 0.64304E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}} =0.119^E-04$ )

**Figure VI .11 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance entre les deux palies [500mm]

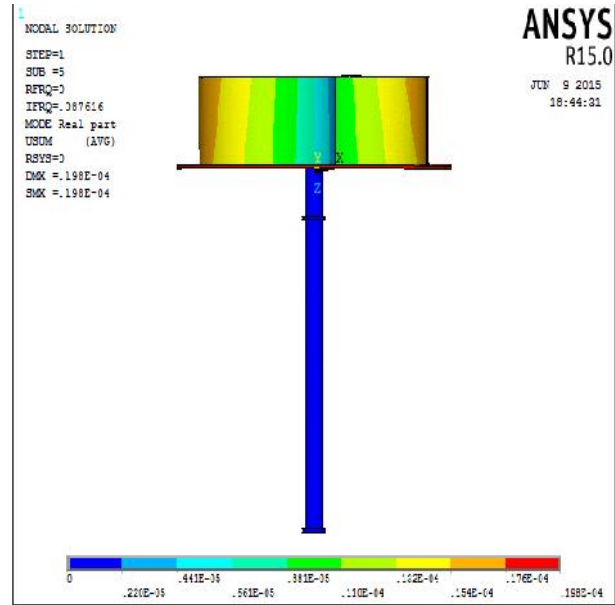
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.66567	0.82473	0.87616	1.3193	2.0387
	imag	0.66567	-0.66567	0.82473	-0.82473	0.87616
Déplacement (Max)* E'04(m)	réel	0.267	0.299	0.198	0.222	0.324
	imag	0.204	0.204	0.257	0.257	0.317

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 2.0387 Hz avec une valeur de  $0.324 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique,



**Mode réel**

(f= 0.20387Hz ; Dmax= 0.324<sup>E</sup>-04)



**Mode imaginaire**

(f= 0.87616E-01Hz ; Dmax =0.317<sup>E</sup>-4)

**Figure VI .12 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)**

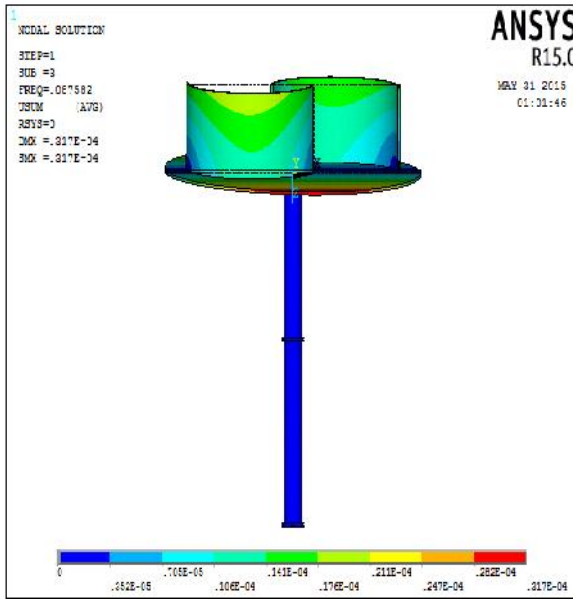
**IV.4.3- Résultats pour L'Aluminium :**

- **distance enter les deux palies [300mm]**

Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.52957	0.53749	0.87582	1.1450	1.3351
	imag	0.52957	-0.52957	0.53749	-0.53749	0.87582
Déplacement (Max)* E <sup>-04</sup> (m)	réel	0.204	0.257	0.317	0.198	0.235
	imag	0.204	0.204	0.257	0.257	0.317

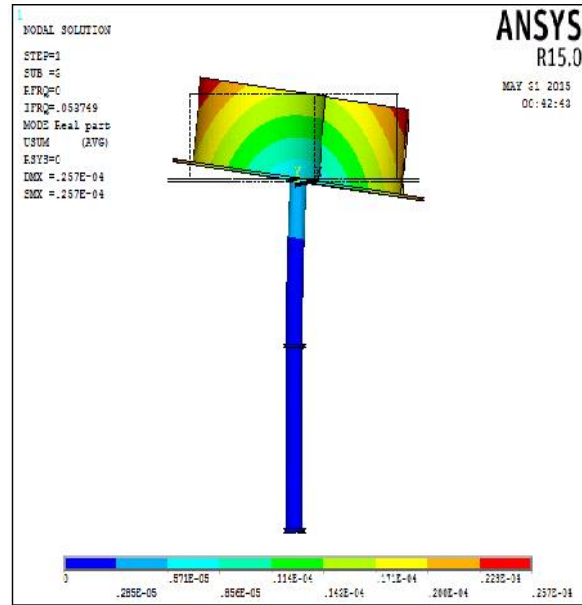
Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.87582 Hz avec une valeur de 0.317\*10<sup>-4</sup> m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.





**Mode réel**

( $f=0.87582E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.317^E-04$ )



**Mode imaginaire**

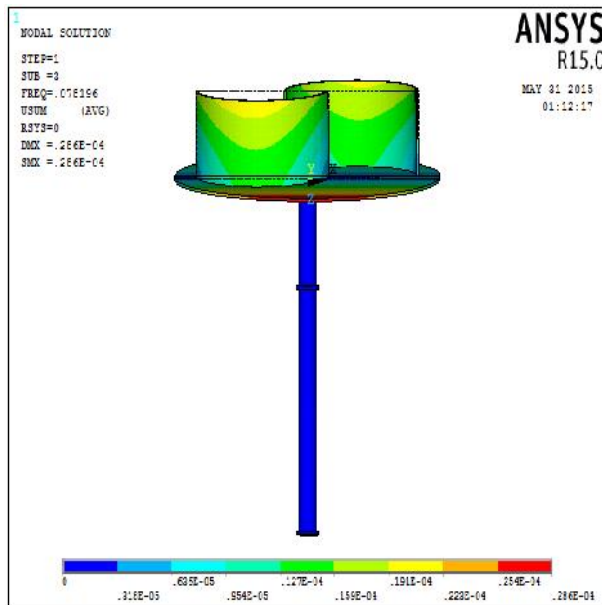
( $f=0.53749E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.257^E-04$ )

**Figure VI .13 :Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- **distance enter les deux palies [400mm]**

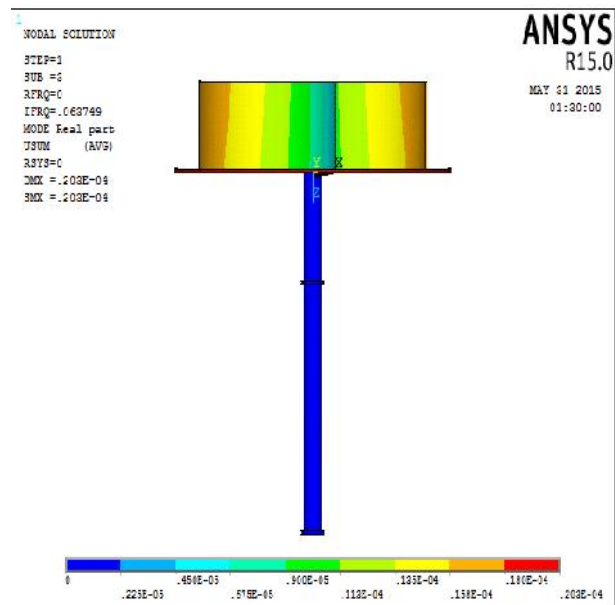
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.58763	0.63748	0.78196	1.3254	1.6278
	imag	0.58763	- 0.58763	0.63749	- 0.63749	0.78196
Déplacement (Max)* E <sup>-04</sup> (m)	réel	0.266	0.203	0.286	0.231	0.195
	imag	0.266	0.266	0.202	0.202	0.286

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.87196 Hz avec une valeur de  $0.286 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.87582E-01$ Hz ;  $D_{max}=0.286^E-04$ )



**Mode imaginaire**

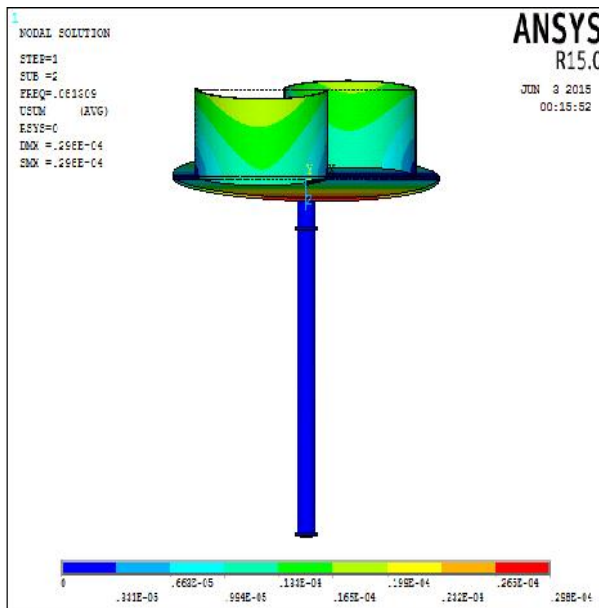
( $f= 0.53749E-01$ Hz ;  $D_{max} =0.202^E-04$ )

**Figure VI .14 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance enter les deux palies [500mm]

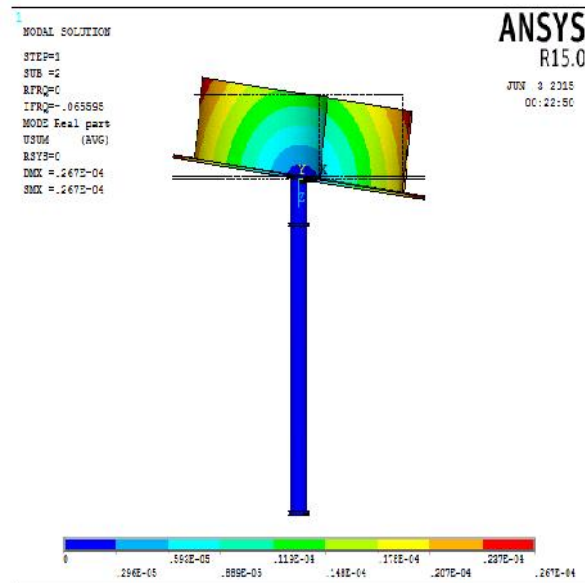
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.65594	0.81309	0.85216	1.3043	2.0036
	imag	0.65595	-0.65595	0.81309	-0.81309	0.85216
Déplacement (Max)* E-04(m)	réel	0.267	0.298	0.198	0.222	0.226
	imag	0.267	0.267	0.298	0.298	0.198

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.81309 Hz avec une valeur de  $0.298 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le Deuxième mode réel et pour le Troisième et quatrième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.81309E-01\text{Hz}$ ;  $D_{\text{max}}=0.298^E-04$ )



**Mode imaginaire**

( $f= -0.65595E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}} =0.267^E-04$ )

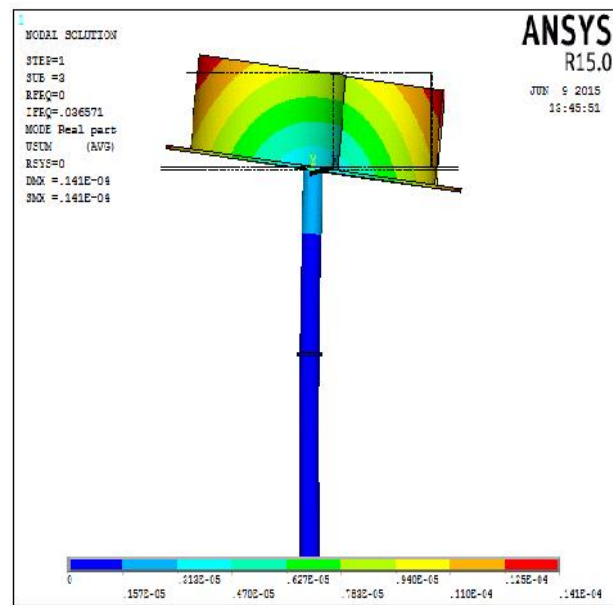
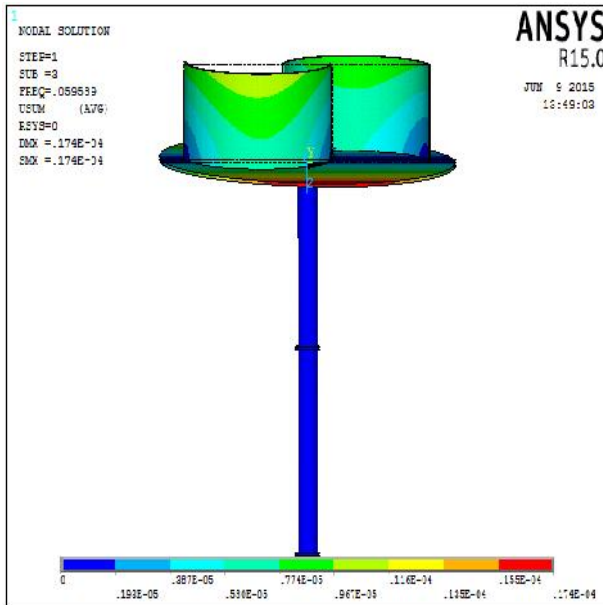
**Figure VI .15:** Deuxième mode (fréquence et déplacement maximal)

**IV.4.4- Résultats pour le Bronze :**

- distance entre les deux palies [300mm]

Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.36031	0.36570	0.59589	0.77906	0.90838
	imag	0.36032	-0.36032	0.36571	-0.36571	0.59590
Déplacement (Max)* E <sup>-04</sup> (m)	réel	0.112	0.141	0.174	0.109	0.129
	imag	0.112	0.112	0.141	0.141	0.109

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.59589E Hz avec une valeur de  $0.174 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le quatrième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.59589E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.174E-04$ )

**Mode imaginaire**

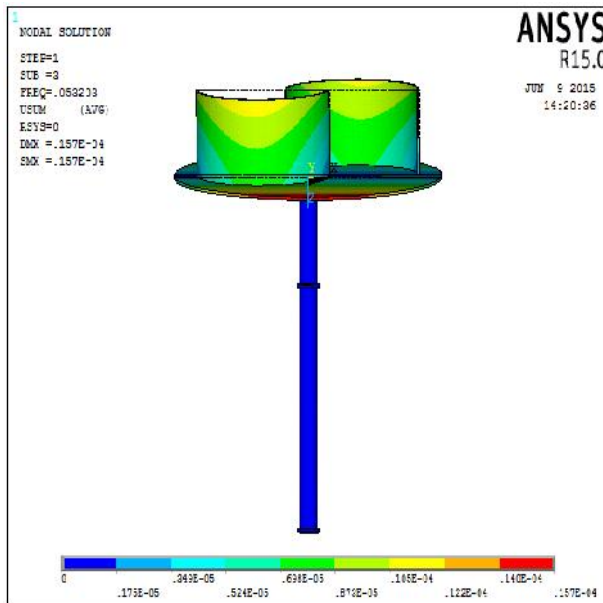
( $f=0.36571E-01\text{Hz}$  ;  $D_{\text{max}}=0.141E-04$ )

**Figure VI .16 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- **distance enter les deux palies [400mm]**

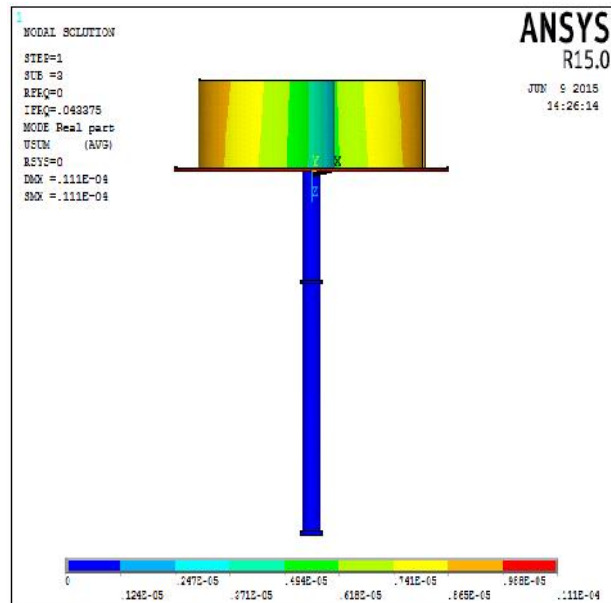
Mode		1	2	3	4	5
<b>Fréquence (Hz)* E-01</b>	réel	0.3998	0.43374	0.53203	0.90179	1.1075
	imag	0.39982	-0.39982	0.43375	-0.43375	0.53203
<b>Déplacement (Max)* E-04(m)</b>	réel	0.146	0.111	0.157	0.127	0.107
	imag	0.146	0.146	0.111	0.111	0.157

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.53203 Hz avec une valeur de  $0.157 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



### Mode réel

( $f=0.53203E-01$ Hz;  $D_{max}=0.157E-04$ )



### Mode imaginaire

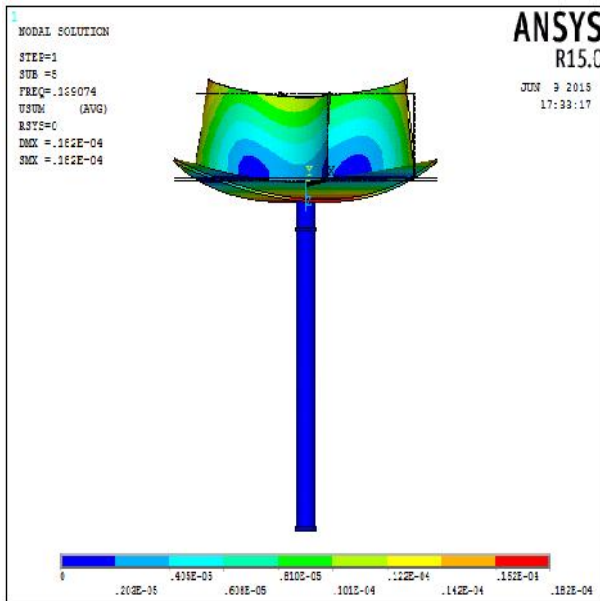
( $f=0.43375E-01$ ;  $D_{max}=0.111E-04$ )

**Figure VI .17 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance enter les deux palies [500mm]

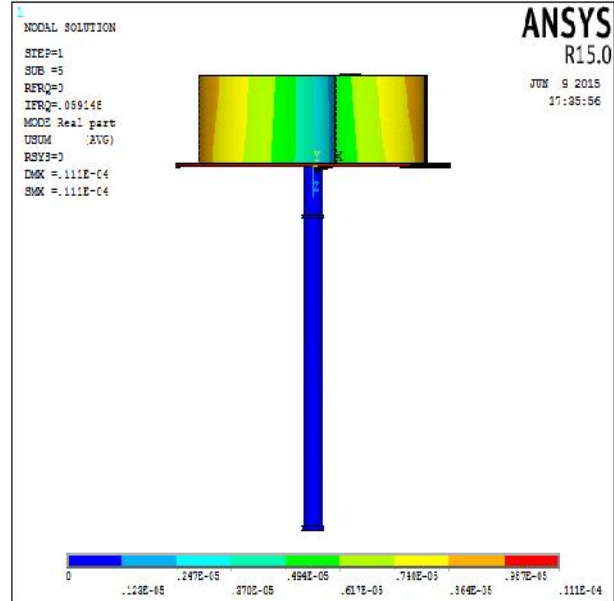
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.45279	0.56332	0.59148	0.90536	1.3907
	imag	0.45281	-0.45281	0.56333	-0.56333	0.59148
Déplacement (Max)* E-04(m)	réel	0.148	0.168	0.111	0.124	0.182
	imag	0.148	0.148	0.168	0.168	0.111

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 1.3907 Hz avec une valeur de  $0.182 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

(f= 1.3907Hz ; Dmax= 0.182<sup>E</sup>-04)



**Mode imaginaire**

(f= 0.59148E-01Hz ; Dmax =0.111<sup>E</sup>-04)

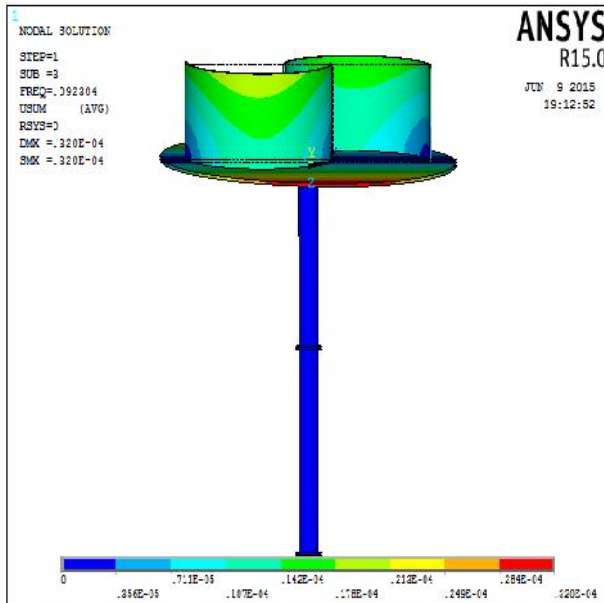
**Figure VI .18 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)**

**IV.4.5- Résultats pour le Duralumin :**

- distance entre les deux palies [300mm]

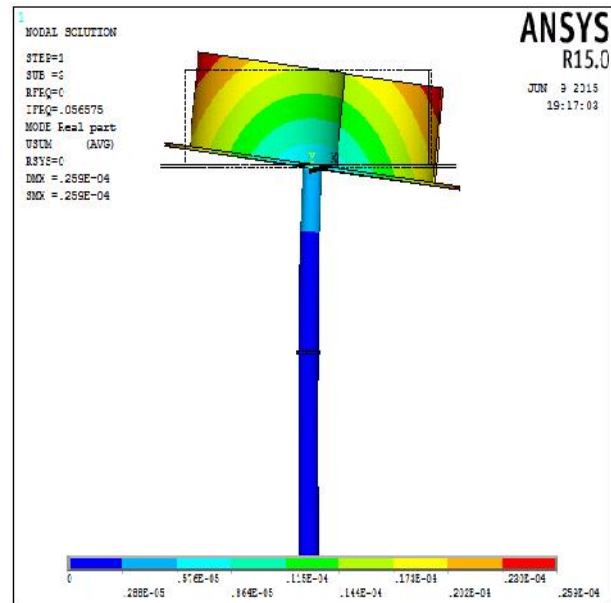
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.55128	0.56575	0.92304	1.2043	1.4095
	imag	0.55128	-0.55128	0.56575	-0.56575	0.92304
Déplacement (Max)* E <sup>-04</sup> (m)	réel	0.112	0.141	0.174	0.109	0.129
	imag	0.112	0.112	0.141	0.141	0.109

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.92304 Hz avec une valeur de  $0.174 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le quatrième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



### Mode réel

( $f=0.92304E-01$ Hz ;  $D_{max}=0.174E-04$ )



### Mode imaginaire

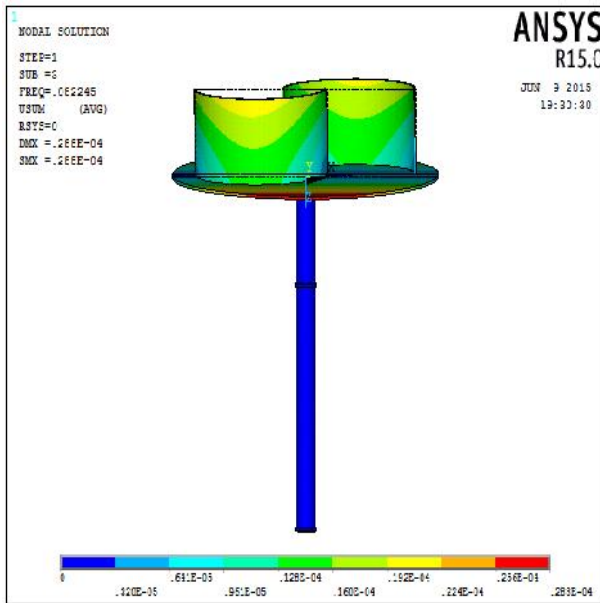
( $f=0.56575E-01$ Hz;  $D_{max} =0.141E-04$ )

**Figure VI .19 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- distance entre les deux palies [400mm]

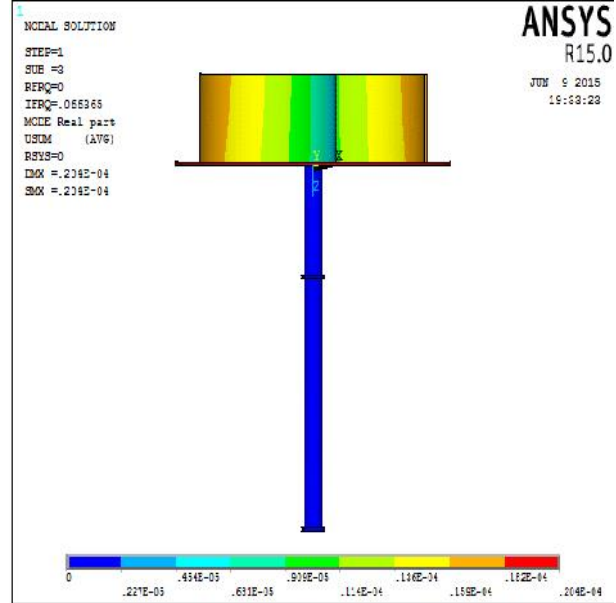
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	réel	0.61852	0.66365	0.82245	0.13991	0.17113
	imag	0.61852	-0.61852	0.66365	-0.66365	0.82245
Déplacement (Max)* E-04(m)	réel	0.269	0.204	0.288	0.234	0.197
	imag	0.269	0.269	0.204	0.204	0.288

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 0.82245 Hz avec une valeur de  $0.288 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.



**Mode réel**

( $f=0.82245E-01$ Hz ;  $D_{max}=0.288E-04$ )



**Mode imaginaire**

( $f=0.66365E-01$ Hz ;  $D_{max}=0.204E-04$ )

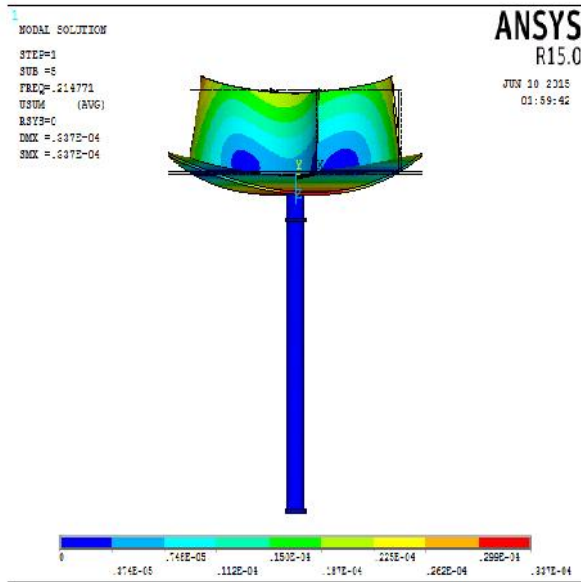
**Figure VI .20 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)**

- **distance entre les deux palies [500mm]**

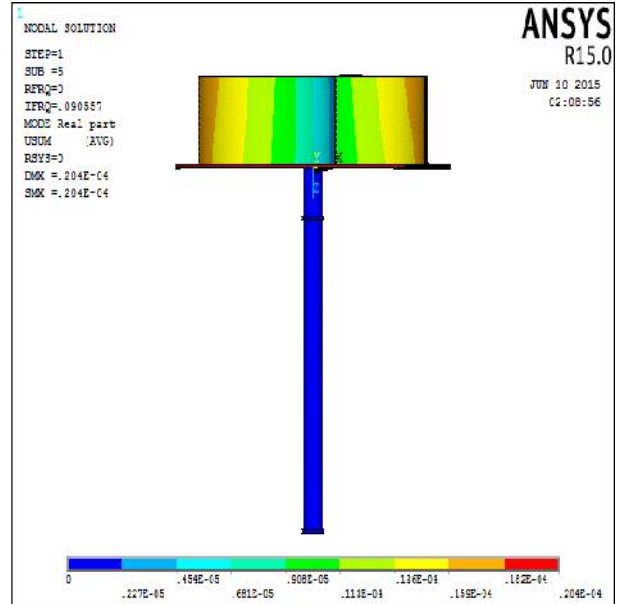
Mode		1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)* E-01	real	0.70038	0.87175	0.90557	1.4048	2.1477
	imag	0.70041	-0.70041	0.87176	-0.87176	0.90557
Déplacement (Max)* E-04(m)	real	0.273	0.308	0.204	0.228	0.337
	imag	0.273	0.273	0.308	0.308	0.204

Dans ce cas on remarque le déplacement est maximal pour la fréquence 2.1477 Hz avec une valeur de  $0.337 \cdot 10^{-4}$  m et représente une valeur critique, afin de localiser l'endroit où elle exercée nous avons tracé les déformations qui nous a permis de dire que cette valeur est localiser sur le disque pour le troisième mode réel et pour le cinquième mode imaginaire.





**Mode réel**  
 (f= 0.21477 Hz ; Dmax= 0.337<sup>E</sup>-04)



**Mode imaginaire**  
 (f= 0.90557E-01Hz ; Dmax =0.204<sup>E</sup>-04)

**Figure VI .21 :Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)**

## *Chapitre V*

### *Modélisation des fréquences et les déplacements maximaux*



Dans ce chapitre nous présentons une modélisation de la fréquence et le déplacement maximal en utilisant les méthodes statistiques sous le logiciel Minitab et ceci dans le but de déceler l'influence des divers facteurs qui influent sur ces derniers et faire une comparaison entre les valeurs trouvées par la simulation et la modélisation.

### V.1 Modélisation de la fréquence

Dans le tableau ci-dessous nous regroupons les valeurs obtenues par la simulation sous le logiciel ANSYS qui concerne les fréquences propres et déplacements réels et imaginaires

N° modes	P	E	d	F1	D1	F2	D2
1	7850	2,20000E+11	30	7,73E-02	1,65E-05	5,62E-02	1,21E-05
2	7850	2,20000E+11	40	9,14E-02	1,84E-05	6,76E-02	1,19E-05
3	7850	2,20000E+11	50	2,13E-01	1,93E-05	9,21E-02	1,19E-05
4	2700	6,90000E+10	30	8,76E-02	3,17E-05	5,37E-02	2,57E-05
5	2700	6,90000E+10	40	8,76E-02	2,86E-05	5,37E-02	2,02E-05
6	2700	6,90000E+10	50	8,13E-02	2,98E-05	6,56E-02	2,67E-05
7	8960	1,06000E+11	30	5,96E-02	1,74E-05	3,66E-02	1,41E-05
8	8960	1,06000E+11	40	5,32E-02	1,57E-05	4,34E-02	1,11E-05
9	8960	1,06000E+11	50	1,39E-02	1,82E-05	5,91E-02	1,11E-05

**Tableau V.1.**  
Résultats des fréquences et les déplacements maximaux en fonction des masses volumiques et les distances et les Modules de Young

Avec

F1 fréquence réel

F2 fréquence imaginaire

D1 Déplacement réel

D2 Déplacement imaginaire

masse volumique

d distance entre les deux paliers

E Module de Young

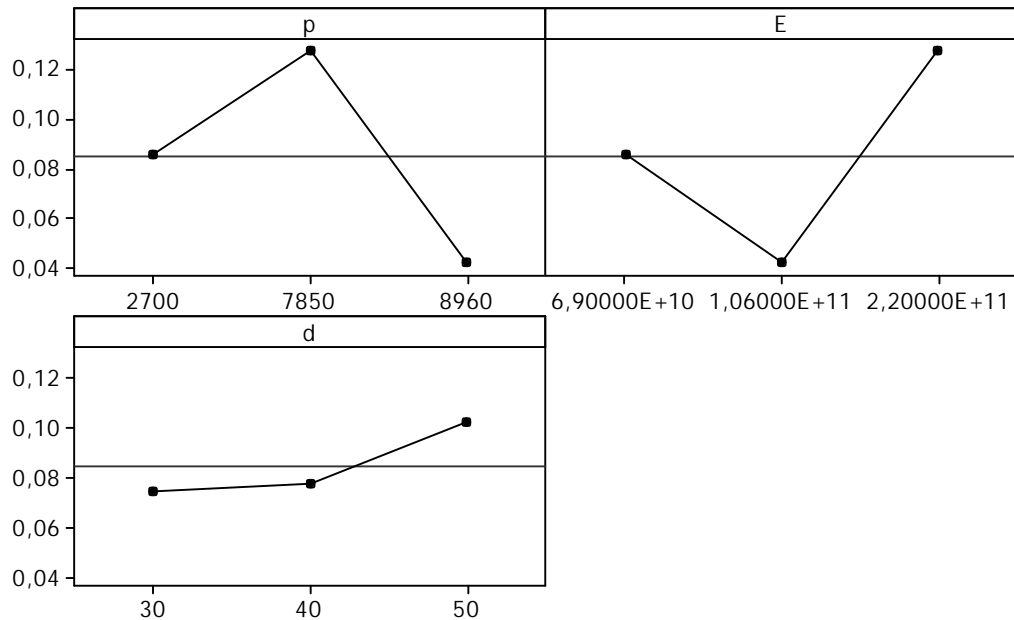
#### V. 1-modélisation des fréquences réelles F1 en fonction ( ,E, d)

En utilisant le logiciel MiniTab 16 on a modélisé les fréquences réelles en fonction des trois paramètres à savoir le module d'Young, la masse volumique et la distance entre les deux paliers et on a trouvé le modèle donné par l'équation suivante :

$$F1 = 2,28761e+014 - 2,84824e+010 p - 3328,75 E - 0,0291137 d + 0,383503 p^*E + 1,59518e-007 p^*d + 1,33968e-009 E^*E + 3,96038e-014 E^*d + 0,000341465 d^*d \quad (V. 1)$$

La valeur du coefficient de détermination pour le modèle de la fréquence réel  $FI$  est :  $R^2=93,21\%$ , ce qui montre que notre modèle est très fiable.

Concernant les facteurs influant sur notre réponse on remarque sur les graphiques des effets comment varie la réponse en fonction des différents paramètres.

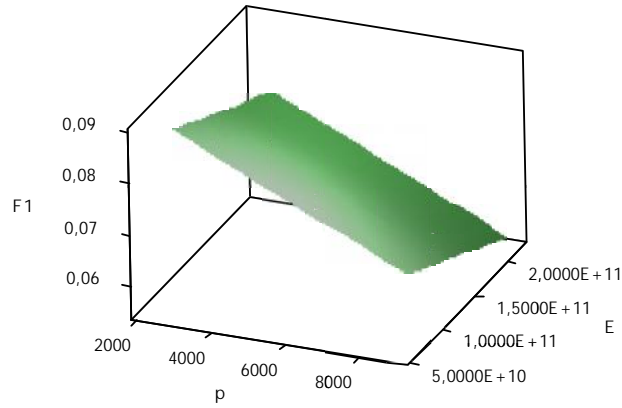


**Figure (V.1)** Graphique des effets principaux pour le critère de la fréquence  $FI$  en fonction de ( $p$ ,  $E$ ,  $d$ )

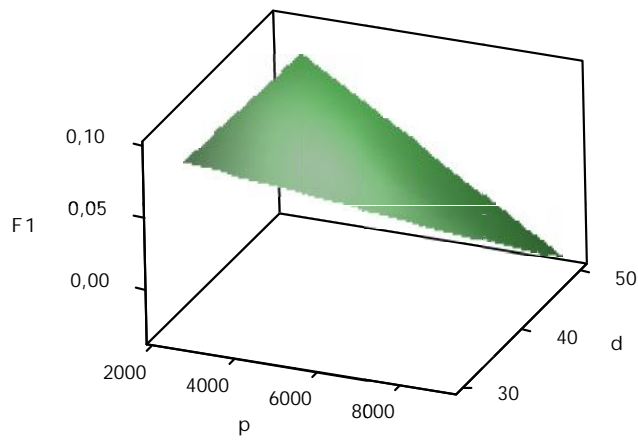
On constate que le facteur masse volumique la fréquence augmente et puis diminue et inversement pour le module d'Young tandis que pour la distance entre les deux paliers la fréquence est proportionnelle à la variation de la distance. et ceci conformément avec le calcul analytique car le module d'élasticité et la masse volumique agissent d'une façon contradictoire sur la fréquence.

Et pour apprécier l'influence de ses paramètres sur notre réponse qui dans notre cas la fréquence réelle on a tracé les graphes équivalents aux surfaces de réponses qui est un graphe en trois dimensions qui marquent l'influence de deux paramètres en même temps sur la réponse.

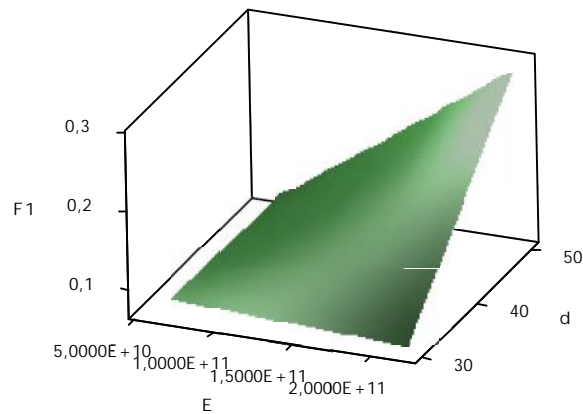
Sur les figures V.2, V.3 et V.4 nous constatons que la fréquence diminue avec la masse volumique et diminue puis augmente avec le module d'élasticité et elle est proportionnelle à la distance entre les deux paliers.



**Figure (V.2)** *diagramme de surface 3D pour la fréquence réel en fonction  $p$  et  $E$*



**Figure (V.3)** *diagramme de surface 3D pour la fréquence réel en fonction  $p$  et  $d$*



**Figure (V.4)** *diagramme de surface 3D pour la fréquence réel en fonction  $E$  et  $d$*

### V.1.1.1. Comparaison entre le critère de la Fréquences réels simulée et estimée

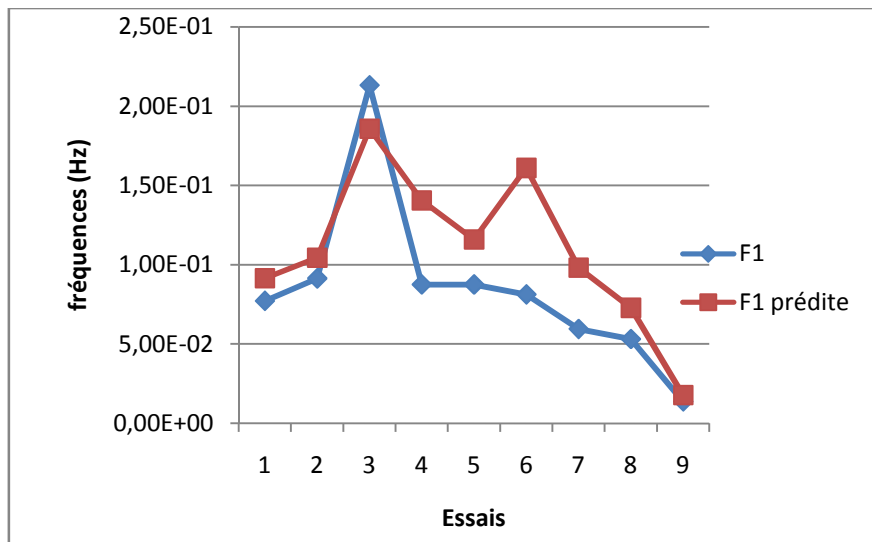
Et pour terminer nous avons dressé un tableau dans lequel figure les valeurs simulées et les valeurs obtenus par la modélisation afin de déterminer le pourcentage d'erreur entre les valeurs simulées et prédites de la fréquence réelle. Le pourcentage d'erreur est calculé de la façon suivante :

$$\% \text{ d'erreur} = \frac{\text{valeur simulée} - \text{valeur prédites}}{\text{valeur simulée}} * 100 \quad (\text{V. 2})$$

N° Essais	Valeurs simulée de Fr réel f1 (Hz)	Valeurs prédites de Fr réel f1 (Hz)	Erreurs %
1	7,73E-02	0,09156228	1,85E+01
2	9,14E-02	0,10448898	1,43E+01
3	2,13E-01	0,18570874	1,28E+01
4	8,76E-02	0,14048534	6,04E+01
5	8,76E-02	0,11592162	3,24E+01
6	8,13E-02	0,1610557	9,81E+01
7	5,96E-02	0,0981776	6,48E+01
8	5,32E-02	0,07287373	3,70E+01
9	1,39E-02	0,01791368	2,88E+01

**Tableau V.2:** Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites pour F1 en fonction de , E, d

Nous présentons sur la figure V.5 le graphe de variation des valeurs simulées et les valeurs modélisées. On remarque une légère dispersion entre les deux valeurs car le pourcentage d'erreurs n'excède pas les 10 %.



**Figure.( V.5).** Comparaison entre les valeurs simulée et prédites pour la fréquences réels F1(Hz)

### V.1.2-modélisation des déplacements réels D1 en fonction (p ,E,d)

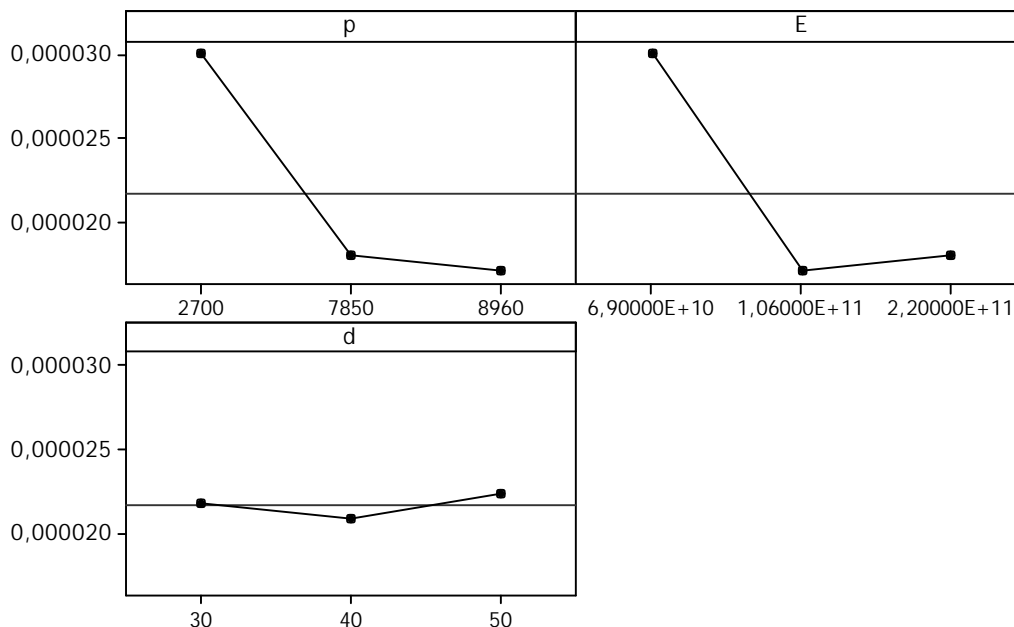
L'équation (V.3) exprime le modèle de déplacement réel D1 avec tous les facteurs principaux

Model complet :

$$D1 = -1,35602e+010 + 1,6797e+006 p + 0,197642 E - 2,24521e-007 d - 2,26528e-005 p * E - 3,7805e-011 p * d - 8,23395e-014 E * E + 2,97233e-018 E * d - 9,25881e-010 d * d \quad (V.3)$$

La valeur du coefficient de détermination pour le modèle de la Déplacement  $D1$  est :  $R^2=99,35\%$  ;  $R^2(\text{ajust})=98,48\%$ .

Concernant les facteurs influant sur notre réponse on remarque sur les graphiques des effets comment varie la réponse en fonction des différents paramètres.

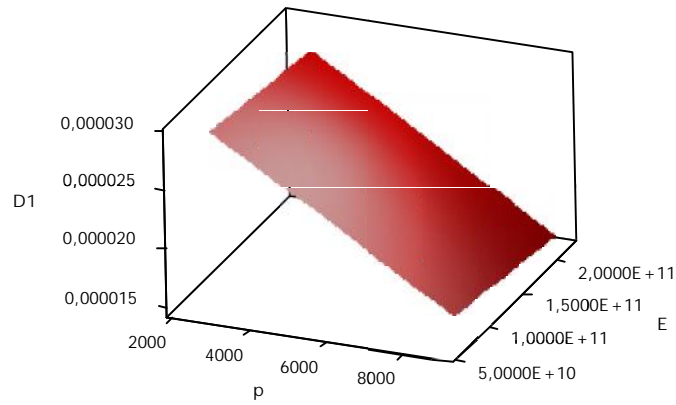


**Figure ( V.6) Graphique des effets principaux pour le critère de la déplacement D1 en fonction de ( ,E, d)**

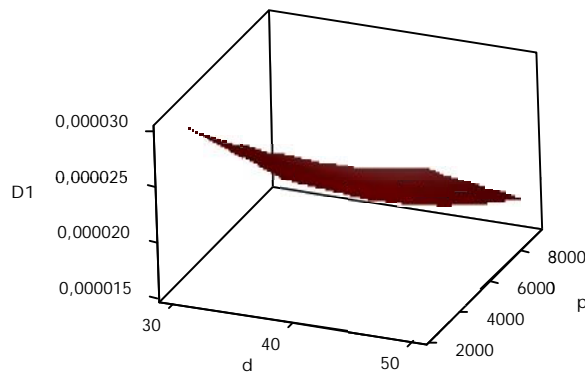
La figure( V.6) illustre les effets principaux des paramètre sur déplacement réel. On remarque que D1. L'effet de module d'Yong et la masse volumique sont prépondérant car ses pentes sont plus grandes.

Les figures V.7, V.8 et V.9, montrent l'effet de la masse volumique et module d'Yong et distance sur le déplacement réel D1. Elles illustrent l'effet significatives des paramètres .On remarque qu'avec l'augmentation de la masse volumique et module d'Yong le déplacement augment.

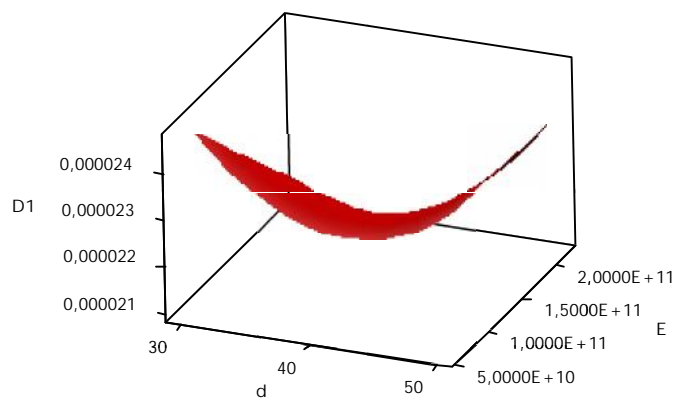




**Figure (IV.7)** diagramme de surface 3D pour le déplacement réel en fonction  $p$  et  $E$



**Figure (V.8)** diagramme de surface 3D pour le déplacement réel en fonction  $d$  et  $p$



**Figure (IV.9)** diagramme de surface 3D pour le déplacement réel en fonction  $d$  et  $E$

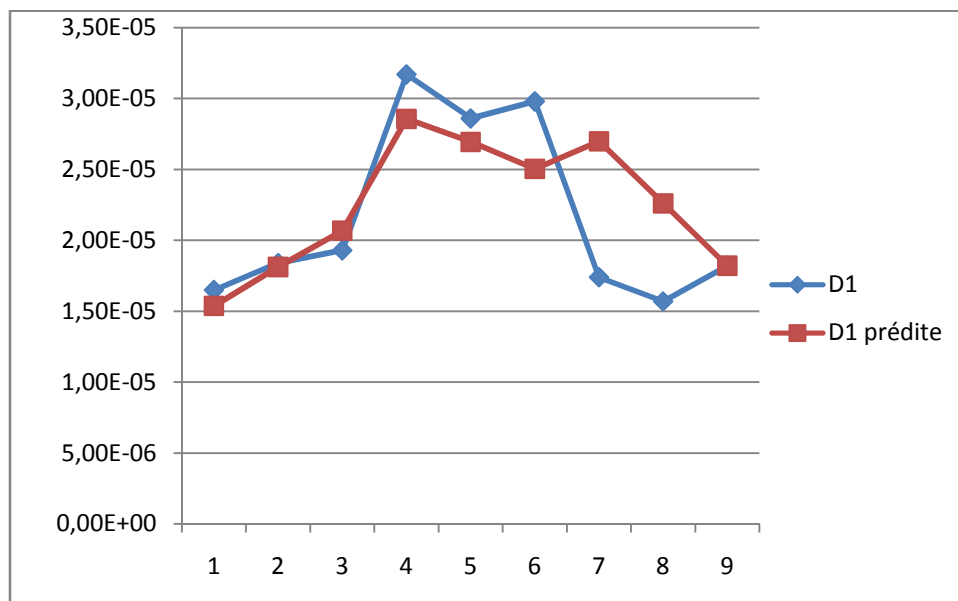
### V.1.2.1-Comparaison entre le critère de la déplacements réels simulée et estimée

illustre le pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites de la déplacements réel de surface D1. Le pourcentage d'erreur est calculé de la façon suivante :

$$\%d'erreur = \frac{\text{valeur simulée} - \text{valeur prédite}}{\text{valeur simulée}} * 100 \quad (V. 4)$$

N° Essais	Valeurs simulée de D1	Valeurs prédites de D1	Erreurs %
1	1,65E-05	1,5388E-05	6,74E+00
2	1,84E-05	1,8128E-05	1,48E+00
3	1,93E-05	2,0684E-05	7,17E+00
4	3,17E-05	2,856E-05	9,91E+00
5	2,86E-05	2,694E-05	5,80E+00
6	2,98E-05	2,5049E-05	1,59E+01
7	1,74E-05	2,6987E-05	5,51E+01
8	1,57E-05	2,2608E-05	4,40E+01
9	1,82E-05	1,8216E-05	8,54E-02

**Tableau V.3:** Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites pour D1 en fonction de , E, d



**Figure ( V.10).** Comparaison entre les valeurs simulée et prédites pour la déplacements D1

Nous présentons sur la figure V.10 le graphe de variation des valeurs simulées et les valeurs modélisées. On remarque une légère dispersion entre les deux valeurs car le pourcentage d'erreurs n'excède pas les 10 %.

### V.1.3 modélisation des fréquences imaginaires F2 en fonction ( ,E, d)

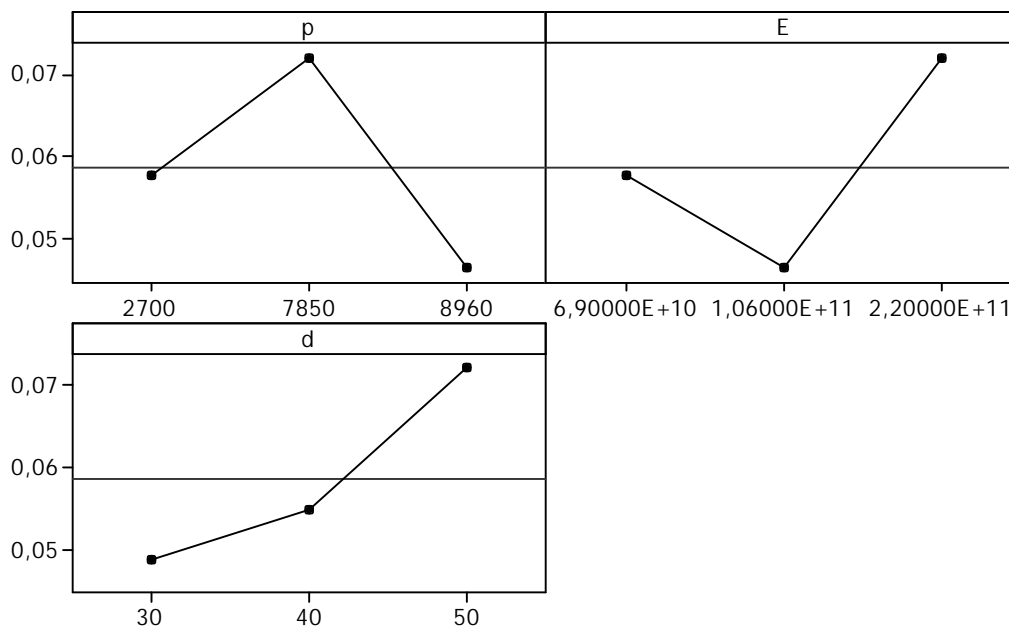
L'équation (V.5) exprime le modèle de fréquence imaginaire F2 avec tous les facteurs principaux .

Model complet :

$$F2 = -3,24342e+012 + 3,87058e+008 p + 47,8245 E - 0,00426342 d - 0,00528221 p * E + 3,59427e-008 p * d - 2,46693e-011 E * E + 6,78245e-015 E * d + 5,33126e-005 d * d \quad (V.5)$$

La valeur du coefficient de détermination pour le modèle de la fréquences imaginaires F2 est :  $R^2=99,93 \%$

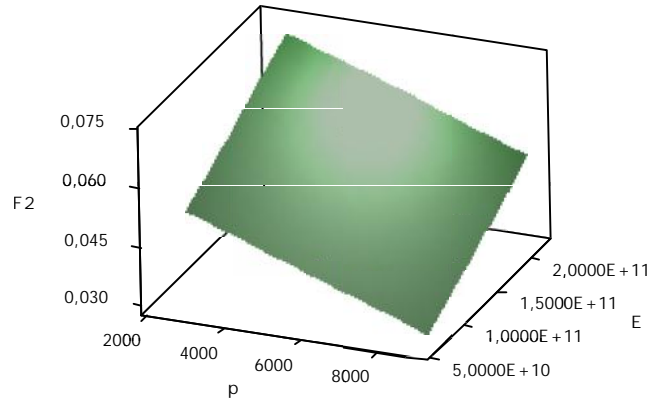
Concernant les facteurs influant sur notre réponse on remarque sur les graphiques des effets comment varie la réponse ne fonction des différents paramètres



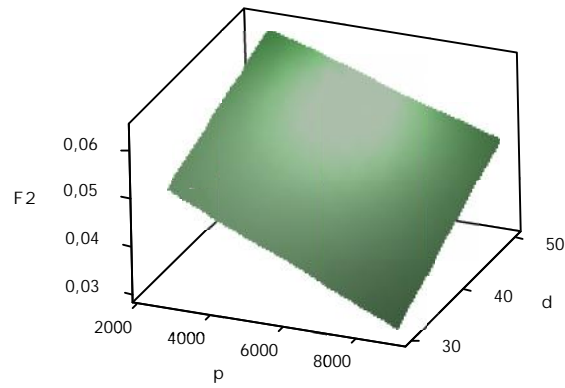
**Figure (V.11)** Graphique des effets principaux pour le critère de la fréquence F2 en fonction de ( ,E, d)

On constate que le facteur masse volumique la fréquence augmente et puis diminue et inversement pour le module d'Young tandis que pour la distance entre les deux paliers la fréquence est proportionnelle à la variation de la distance .et ceci conformément avec le calcul analytique car le module d'élasticité et la masse volumique agissent d'une façon contradictoire sur la fréquence.

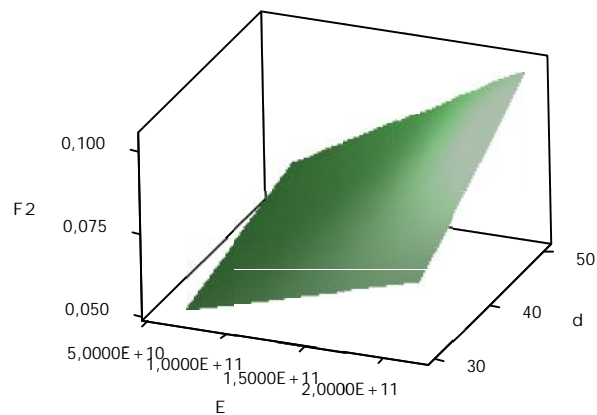
Les figures V.12, V.13 et V.14 nous constatons que la fréquence diminue avec la masse volumique et diminue puis augmente avec le module d'élasticité et elle est proportionnelle à la distance entre les deux paliers



**Figure (IV.12)** diagramme de surface 3D pour la fréquence imaginaire en fonction  $p$  et  $E$



**Figure (IV.13)** diagramme de surface 3D pour la fréquence imaginaire en fonction  $p$  et  $d$



**Figure (IV.14)** diagramme de surface 3D pour la fréquence imaginaire en fonction  $d$  et  $E$

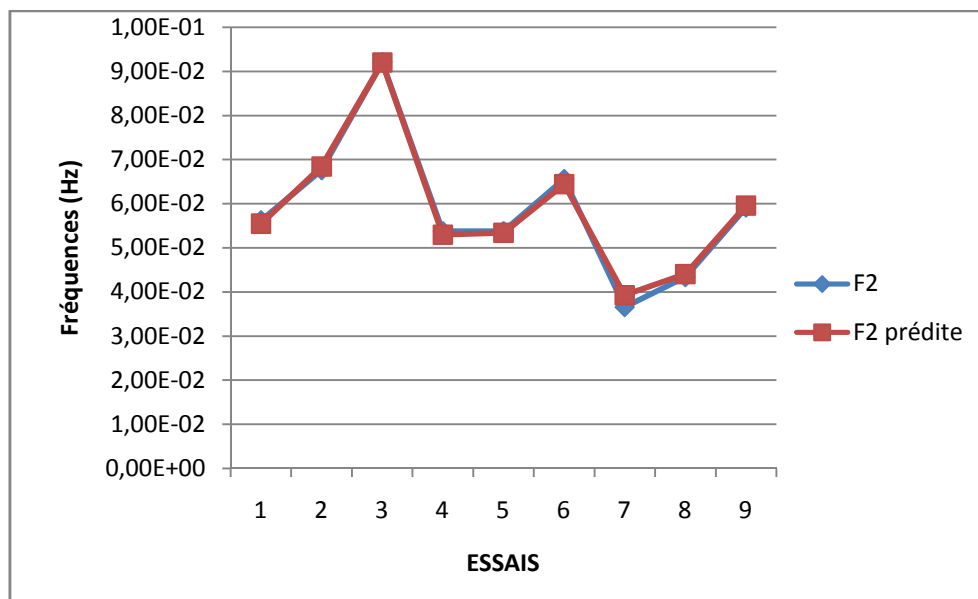
#### IV .1.3.1- Comparaison entre le critère de la Fréquences imaginaires simulée et estimée

illustre le pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites de la Fréquences imaginaires de surface F2. Le pourcentage d'erreur est calculé de la façon suivante :

$$\%d'erreur = \frac{\text{valeur simulée} - \text{valeur prédites}}{\text{valeur simulée}} * 100 \quad (V. 6)$$

N° Essais	Valeurs simulée de F2	Valeurs prédites de F2	Erreurs %
1	5,62E-02	0,05547508	1,27E+00
2	6,76E-02	0,06841383	1,17E+00
3	9,21E-02	0,0920151	8,13E-02
4	5,37E-02	0,0529911	1,41E+00
5	5,37E-02	0,05338641	6,75E-01
6	6,56E-02	0,06441838	1,79E+00
7	3,66E-02	0,03926448	7,37E+00
8	4,34E-02	0,04406598	1,59E+00
9	5,91E-02	0,05958174	7,33E-01

**Tableau V.4** Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites pour F2 en fonction de  $\rho$ , E, d



**Figure (V.15)** Comparaison entre les valeurs simulée et prédites pour la Fréquences F2

La figure (V.15) montre aussi que les valeurs simulée et les valeurs prédites sont très proches. donc on peut conclure que le modèle donne des résultats fiables.

### V.1.4-Modélisation des déplacements imaginaires D2 en fonction (p ,E,d)

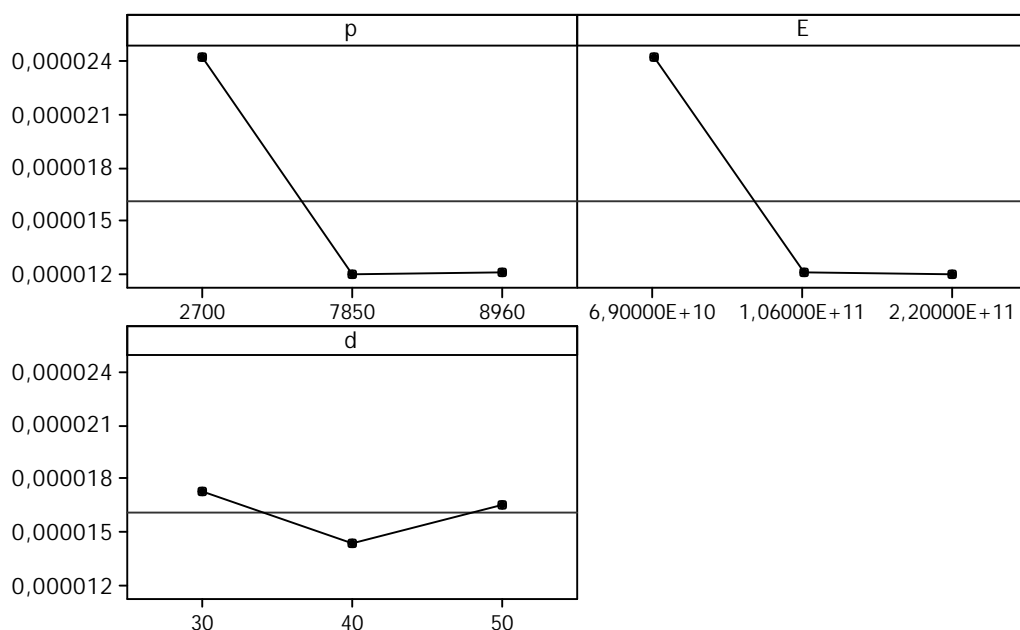
L'équation (V.7) exprime le modèle de déplacement imaginaire D2 avec tous les facteurs principaux .

Model complet :

$$D2 = -4,91958e+010 + 6,04934e+006 p + 0,718703 E + 1,59557e-006 d - 8,17713e-005 p * E - 2,2951e-010 p * d - 3,13783e-013 E * E + 7,92953e-018 E * d - 2,30353e-008 d * d \quad (V.7)$$

La valeur du coefficient de détermination pour le modèle de la déplacements imaginaire D2 est :  $R^2=99,87 \%$

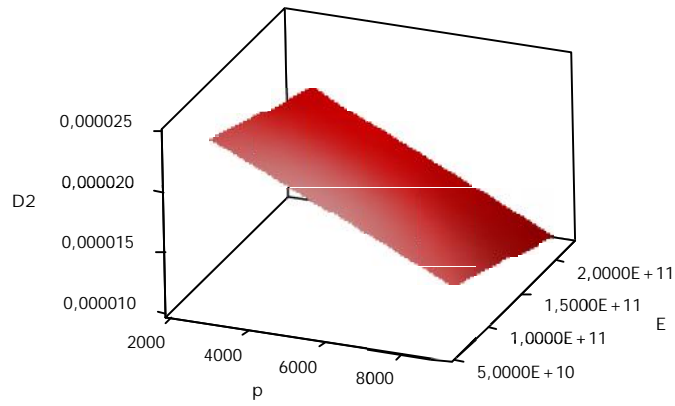
Concernant les facteurs influant sur notre réponse on remarque sur les graphiques des effets comment varie la réponse ne fonction des différents paramètres



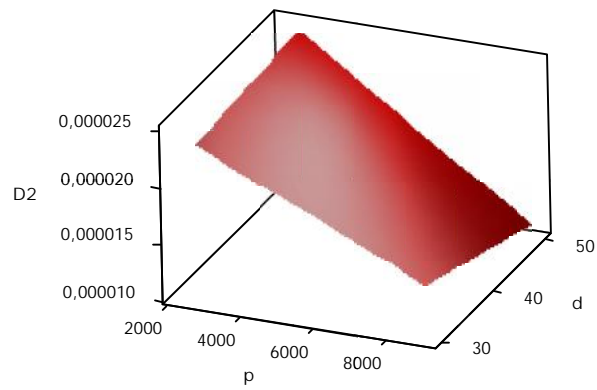
**Figure ( V.16 )** Graphique des effets principaux pour le critère de la déplacement D2 en fonction de ( ,E, d)

La figure (V.16) illustre les effets principaux des paramètre sur déplacement réel. On remarque que D2. L'effet de module d'Yong et la masse volumique sont prépondérant car ses pentes sont plus grandes.

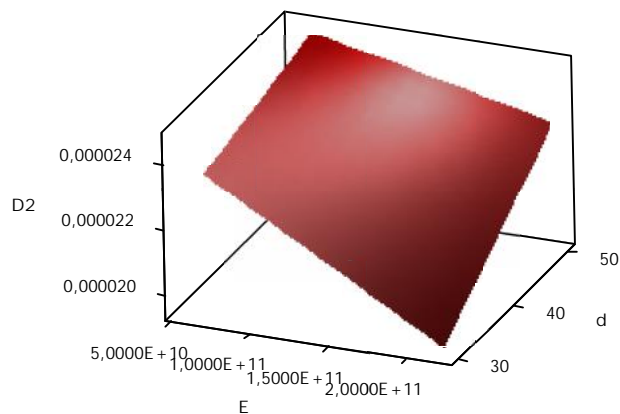
Les figures V.17, V.18 et V.19 montrent l'effets de la variation de la masse volumique et module d'Yong et la distance de passe sur le déplacement imaginaire D2 illustre l'effet significatives des paramètres.



**Figure (IV.17)** *diagramme de surface 3D pour la déplacement imaginaire en fonction  $p$  et  $E$*



**Figure (IV.18)** *diagramme de surface 3D pour la fréquence imaginaire en fonction  $p$  et  $d$*



**Figure (IV.19)** *diagramme de surface 3D pour la fréquence imaginaire en fonction  $d$  et  $E$*

### V 1.4.1- Comparaison entre le critère de la déplacements imaginaires simulée et estimée

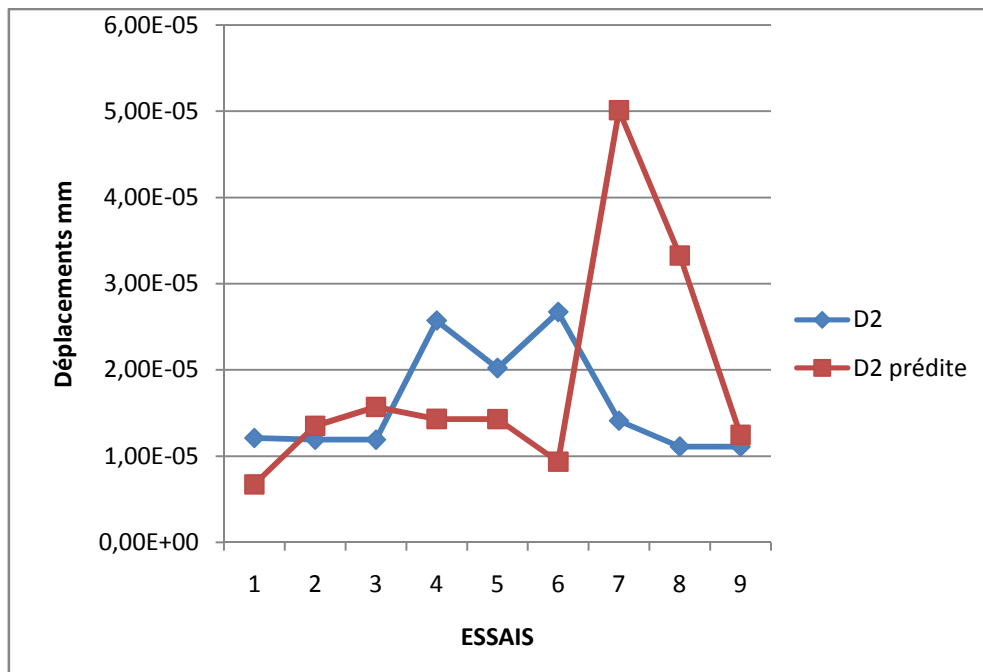
illustre le pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites de la déplacements imaginaires de surface D2. Le pourcentage d'erreur est calculé de la façon suivante :

$$\%d'erreur = \frac{\text{valeur simulée} - \text{valeur prédites}}{\text{valeur simulée}} * 100 \quad (V. 8)$$

N° Essais	Valeurs simulée de D2	Valeurs prédites de D2	Erreurs %
1	1,21E-05	6,7065E-06	4,46E+01
2	1,19E-05	1,3502E-05	1,35E+01
3	1,19E-05	1,5691E-05	3,19E+01
4	2,57E-05	1,4288E-05	4,44E+01
5	2,02E-05	1,4283E-05	2,93E+01
6	2,67E-05	9,3423E-06	6,50E+01
7	1,41E-05	5,0095E-05	2,55E+02
8	1,11E-05	3,3251E-05	2,00E+02
9	1,11E-05	1,2458E-05	1,22E+01

**Tableau V.5:** Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulée et prédites pour D2 en fonction de  $\omega$ ,  $E$ ,  $d$

Nous présentons sur la figure V.20 le graphe de variation des valeurs simulées et les valeurs modélisées. On remarque une légère dispersion entre les deux valeurs car le pourcentage d'erreurs n'excède pas les 7 %.



**Figure .(V.20)** Comparaison entre les valeurs simulée et prédites pour la fréquences réels  $F1$ (Hz)



## **Conclusion général**

L'étude menée sur le rotor savonius qui avait pour but de déterminer à partir de l'analyse modale les fréquences propres et les déplacements maximaux et en général les déformations propres. Comme le rotor savonius est en assemblage d'un arbre, un disque et les ailettes et les pales.

La détermination analytique des fréquences propres est difficile à trouver, un calcul par éléments finis sous le logiciel Ansys a été adapté pour ce calcul, et cela nous a permis de déterminer les fréquences propres et déplacements maximaux pour chaque mode.

Ces résultats nous conduisent à déceler l'endroit exact du déplacement maximal et les valeurs de la déformée en chaque point du rotor.

Afin d'améliorer les dimensions sur le matériau et ou la distance entre les deux pales, à savoir nous avons utilisé plusieurs types de matériaux et trois distances entre les deux pales. Pour mieux apprécier l'influence de ces diverses variables ou à modéliser la fréquence propre et déplacement maximal en utilisant la méthode statique en utilisant le logiciel Mini Tab 16.

Les résultats sont prometteurs et à travers on peut optimiser la fréquence et déplacement maximal à travers les facteurs qui suivent le module d'Young et la masse volumique et distance entre les deux pales.

## Résumé

Dans les dernières diseniens, les recherches dans les énergies renouvelables sont très poussées dans le but de remplacer les énergies issues du pétrole. Ses dérivés parmi ces recherches sont celle des éoliennes à rotors verticaux et horizontaux, c'est dans ce cadre qu'entre notre étude qui s'est basée sur l'étude du rotor à axe vertical du type savonius. Une analyse modale a été faite par une simulation sur Ansys pour déceler les fréquences propres et des déplacements maximaux en jouant sur la distance entre les deux paliers et du matériau et par la suite une modélisation par les méthodes statistiques est élaborée pour obtenir un modèle complet, les résultats sont prometteurs et une contribution a été apportée à cette étude .

**Mots clés :** rotors verticaux, savonius, énergies renouvelables, Ansys, fréquences propres, fréquences propres

## NOMENCLATURE

$a_G$	Accélération linéaire
A,B	réactions aux paliers
<b>C</b>	centre de masse
[C]	Matrice d'amortissement
$C_x$	Le coefficient de traînée
$C_{zm}$	Le coefficient moyen de portance
$d$	Distance de balourd du centre géométrique de l'arbre
$D_H$	La traînée
$E$	Module d'élasticité
$e$	Excentrement
$f_i$	Fréquence propre
$f(y)$	Fonction de forme
$F$	Force unitaire
$\vec{F}_N$	La poussée
$I$	Moment d'inertie
$I_p$	Moment d'inertie polaire
$i, j$	Nombres complexes
$J_a$	Moment d'inertie polaire de l'arbre
[ $J_p$ ]	Tenseur d'inertie
$K$	Moment cinétique
[ $K$ ]	Matrice de rigidité
[ $K_p$ ]	Matrice de rigidité de palier
$k$	Rigidité
$L$	Longueur
$L_H$	La portance
<b>M</b>	Masse
$\vec{M}$	Moment des forces
$M_z$	Moment
$M_s$	Moment statique de la pale
$m_a$	Masse de l'arbre
$m_d$	Masse de disque
$N_i(y)$	Fonction de forme
$N$	Vitesse de rotation
$P_r$	La puissance
$Q$	Quantité de mouvement
$\bar{Q}$	Débit massique
{ $q_i$ }	Cordonnées généralisés
$\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ et $q$	Vecteur accélération, vitesse et déplacements

$R(x, y, z)$	Repère tournant
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe
$R_H$	La force résultante
$S$	Surface
$S_a$	Section de l'arbre
$T$	Énergie cinétique
$T_b$	Énergie cinétique de disque
$t$	Temps
$U$	Énergie potentielle
$u$ et $w$	Coordonnées du centre géométrique de disque O dans le repère fixe
$u^*$ et $w^*$	Coordonnées du centre géométrique O dans le repère mobile
$V_i$	La vitesse induite
$V$	la vitesse de translation de l'appareil
$\vec{V}_0$	La vitesse à l'infini amont
$\vec{V}_1$	La vitesse dans le plan du disque rotor.
	La vitesse à l'infini aval.
$w_x, w_y$ et $w_z$	Vecteurs de rotation instantanées suivantes x, y et z
$W_p$	Travail virtuel
$x_c, y_c, z_c$	Coordonnées de centre de masse

### Symboles grecques

	Vitesse de rotation
	Pulsation propre
$c$	Pulsation critique
	Accélération angulaire
	Déformation
$b$	Facteur d'amortissement
	Contrainte de flexion
	Volume
	Vecteur des déplacements nodaux
	Masse volumique
$\cdot$	Déplacement angulaire
	Le battement
$T$	La traînée
$P$	Le pas

# *Liste de figures*

Figure I.1 Modèle d'un rotor industriel

Figure I.2 - Diagramme de Campbell

Figure I.3 Amortisseur de type squeeze film.

Figure I.4 (a) cas axisymétrique et (b) cas non axisymétrique

Figure I.5 - Éolienne à axe vertical Savonius

Figure I.6 - Coefficient de puissance  $C_p$  d'une Savonius simple en fonction de

Figure I.7 Distribution des pressions face au vent en statique et en dynamique ( $\lambda = 1$ )

Figure I.8 Distribution des pressions dans le vent en statique et en dynamique ( $\lambda = 1$ )

Figure I.9 coefficients aérodynamiques

Figure I.10 Coefficient de moment statique

Figure I.11 Schéma de l'éolienne à axe vertical simulée

Figure I.12 Élément de maillage du domaine calcul

Figure I.13 schéma de la configuration du calcul tridimensionnel

Figure I.14 Système de coordonnées fixes et mobiles

Figure I.15 Paramètre de fréquence en fonction du paramètre de vitesse de rotation suivant  $V$  et  $W$  pour une poutre E-L

Figure I.16  $NL/L$  en fonction de  $Am/h$  une poutre E-E et  $\omega = 20$  rd/s.

Figure I.17  $NL/L$  en fonction de  $Am/h$  une poutre E-E et  $\omega = 90$  rd/s.

Figure II.3 Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

Figure II.2 Configuration déformée

Figure II.1 Exemple de rotor

Figure II.4 Coordonnées du centre géométrique  $C$  et d'un point arbitraire  $B$  de la section du rotor

Figure II.5 Amortissement et raideur des paliers

Figure III.1: Degrés de liberté d'un élément de disque.

Figure III.2 : Degrés de liberté d'un élément d'arbre.

Figure IV.1 : Organigramme pour l'analyse dynamique des structures par ANSYS.

Figure VI .2 : Conditions aux limites

Figure VI .3 : premier mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .4 :Deuxième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .5 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .6 : quatrième (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .7 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .8: Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .9 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .10 : premier mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .11 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .12 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .13 :Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .14 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .15: Deuxième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .16 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .17 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .18 : Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .19 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .20 : Troisième mode (fréquence et déplacement maximal)

Figure VI .21 :Cinquième mode (fréquence et déplacement maximal)

## *Liste de tableaux*

Tableau IV.1: Caractéristiques des matériaux choisis pour l'arbre du rotor

Tableau V.1: Résultats des fréquences et les déplacements maximaux en fonction des masses volumiques et les distances et les Modules de Young

Tableau V.2: Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulées et prédites pour F1 en fonction de  $\rho$ , E, d

Tableau V.3: Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulées et prédites pour D1 en fonction de  $\rho$ , E, d

Tableau V.4: Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulées et prédites pour F2 en fonction de  $\rho$ , E, d

Tableau V.5: Pourcentage d'erreur entre les valeurs simulées et prédites pour D2 en fonction de  $\rho$ , E, d

# Références

- [1] W.J.M.Rankine (1869)“on the centrifugal force of rotating shaft”engineer, Vol.27, pp.249-249.
- [2] Jeffcott, H.H., “The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed—the effect of want of balance”, Phil. Mag., 37, 304, (1919).
- [3] Nelson, H.D., "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory" , Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, Vol. 102, pp.793-803.(1980).
- [4] Campbell R.Théorie Générale de l'Equation de Mathieu(et de quelques autres équations essentielles de la mécanique),Paris masson et cie,1955 ,271p
- [5] D.P. Atherton “ Nonlinear Control Engineering”. Van Nostrand Reinhold Company, 1975.
- [6] L.Meirovitch “elements of vibration analysis” Mac Graw Hill international editions, 1986
- [7] C. Rao, R. B. Bhat, and G. Xistris. “Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a Jeffcott rotor supported on identical journal bearings”. Journal of Sound and Vibration, 198(3):379-388, (1996)
- [8] .A. Muszynska. “Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor”. Journal of Sound and Vibration, 192(1) :207-222 ,(1996)
- [9] Y. Ishida.“Nonlinear vibrations and chaos in rotordynamics”.JSME International Journal. Series C, 37(2):237-245, (1994).
- [10] T. Yamamoto and Y.Ishida.“Linear and nonlinear rotordynamics”.JohnWiley & Sons, (2001).
- [11] H.Lamb and R.Southwell “the vibration of spinning disk” Proc.of the royal society of London, vol 99.pp.272-280,1921
- [12] G.Genta and A.Tonoli“a harmonic finite element for analysis of flexural,torsional, and rotordynamic behaviour of discs” journal of sound and vibration,vol,196,no1,pp19-43, 1996.
- [13] P.Hughes “space craft attitude dynamics” Wiley, New York 1986.
- [14] P.W.Fortesue and J.Starck “spacecraft systems engineering” Wiley, New York 1991.



- [15] Dunkerly, S., "On the whirling and vibration of shafts", *Phil. Trans. R. Soc., London A*, 185, 279, (1894).
- [16] N.Mgklestad "a new method for calculating natural nodes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams" *journal of aeronautical science*.Vol,11, pp 153-162, 1944.
- [17] M.A.Prohl "a general method for calculating critical speeds of flexible rotor" *Trans,ASME, journal of applied mechanics*, vol 12, pp142-148, 1945.
- [18] W.Lund and F.K.Orcutt "calculations and experiments on the unbalance response of flexible rotor" *trans, ASME, journal of engineering for industry*, vol 89, pp185-796, 1967
- [19] A.Lew "a study of rotor system with ball bearing induced non linearities and the development of transfer matrix technique suitable for analysing such systems" *Phd thesis , SMME, University of New South Wales*, 2002
- [20] Nelson, H. and McVaugh, J., "The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements", *Trans. ASME,J. Eng. Ind.*, 98, 593, (1976)
- [21] E.S.Zorzi and H.D.Nelson "finite element simulation of rotor bearing system with internal damping" *ASME, journal of engineering for power*, pages 71-76, 1977.
- [22] D.S.Hiatt "a study of helicopter rotor dynamics and modelling method" *master thesis, naval postgraduate school*, September 1995.
- [23] Ruhl, R.L. and Booker, J.F., "A finite element model for distributed parameter turborotor systems", *Trans.ASME, J. Eng. Ind.*, 94, 126, (1972).
- [24] Pauline BUTAUD, Aurélien BESNARD, ThibaudMARCEL et Michel MAYA , *E'tude aérodynamique instationnaire d'un rotor éolien de Savonius : mise en évidence de l'influence de la portance*, 21ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 26 au 30 août 2013
- [25] Jean-Luc Menet, Nachida Bourabaa, *Prévision des performances aérodynamiques d'un nouveau type d'éolienne à axe vertical : le rotor à contre voiles* La boratoire de Mécanique et d'Énergétique – Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis Le Mont Houy – 59313 Valenciennes Cedex 9 – France, 27-31 août 007,Grenoble
- [26] Jean-LucHarion, Jean-Philippe Vermeulen&AlainBurlot, *Simulations numériques des performances d'une nouvelle géométrie d'éolienne à axe vertical*, École desMines de

Douai Département Énergétique Industrielle 941, rue Charles Bourseul, BP10838,  
59508 Douai Cedex.

- [27] Boukhalfa. A, Hadjoui. A, Hamza cherif. S.M., Modélisation du comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides dans le cas des grands déplacements, Modélisation du comportement dynamique des arbres tournants sur paliers rigides dans le cas des grands déplacements .
- [28] P.Mejaard “stability of rotor with periodically angular velocity” school of mechanical, materials, manufacturing engineering and management, The University of Nottingham, University Park, Nottingham N672RD.U.K.
- [29] , Chellil Ahmed, Identification et modélisation par éléments finis des charges dynamiques du rotor principal d’hélicoptère

