Existence et unicité de la valeur propre principale pour un système quasilinéaire elliptique

Abdelfettah Bourara

Département de Mathématiques

Université de Guelma

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES

18 juin 2009

Table des matières

.

Remerciements

Je remercie vivement Monsieur **M. Z. Aissaoui**, Maître de conférence au département de mathématiques de l'université 8 mai 1945 de Guelma, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude et ma reconnaissance à l'égard de Monsieur **A. Djellit,** Professeur au département de mathématiques de l'université Badji-Mokhtar Annaba, pour avoir dirigé cette recherche. Ses conseils, ses critiques mais aussi son soutien moral et sa disponibilité permanente ont été indispensables à l'accomplissement de ce travail.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur **A. Moumeni**, Maître de conférence au département de mathématiques de l'université Badji-Mokhtar Annaba et Monsieur **N. Boussetila**, Maître de conférence au département de mathématiques de l'université 8 mai 1945 de Guelma, qui ont accepté d'être les examinateurs de ce mémoire et de faire partie du jury de soutenance.

Enfin, je remercie mes parents qui m'ont encouragé dans ce que je faisais, mes frères, ma soeur et son fils Aziz. Mais aussi mes amis et ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront.

Résumé

Nous étudions dans ce travail un système elliptique quasilinéaire défini sur $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a\ (x)\ \ |u|^{p-2}\ u \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b\ (x)\ \ |v|^{q-2}\ v \ \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Ici a et b sont des fonctions-poids positives bornées telles que $a \in \mathbb{L}^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{L}^{\frac{N}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.
L'opérateur $\Delta_p u = \text{div }(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u)$ désigne le p-Laplacien, $1 < p, q < N$.
L'objectif principal de cette étude est la caractérisation de la première valeur propre λ_1 et d'examiner ses différentes propriétés (λ_1 est-elle simple, isolée, principale ?) . Nous allons montrer que le système (S_λ) admet une valeur propre principale, positive et unique. L'outil essentiellement utilisé est l'inégalité de Diaz.

Mots clés :

- Fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement, espace à poids, exposant critique, opérateur compact, injection de Sobolev.

Notations

H' dual de H.

$< .,. >$ crochet de dualité entre H et H'.

p.p. presque partout.

Supp u support de la fonction u.

$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, ..., n$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \operatorname{grad} u.$

$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_N^{\alpha N}} u, \ \ |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} =$ Laplacien de u.

$\frac{\partial u}{\partial n}$ dérivée normale extérieure.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domaine de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega = \Gamma =$ frontière de Ω.

$B_{R,N} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ / \ \|x\| < R \right\}.$

$C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continue} \}.$

Pour $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$,

$C^k(\Omega) = \left\{ v \in C^{k-1}(\Omega), D^\alpha v \in C(\Omega), |\alpha| = k \right\}.$

$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$

$C_c(\Omega) = \{ v \in C(\Omega) \text{ tel que le supp } (v) = K \text{ soit un compact} \}.$

$\quad = \{ v \in C(\Omega) \text{ tel que } v(x) = 0 \text{ sur } \Omega \backslash K, K \text{ compact dans } \Omega \}.$

$C_c^k(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega), k \geq 1.$

$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$ muni de sa norme usuelle.

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \ f \text{ mesurable et } \sup |u(x)| < \infty, \text{p.p. sur } \Omega \}$ muni de sa norme usuelle.

$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f, \ f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \}.$

$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in \left(L^p(\mathbb{R}^N) \right)^N \right\}$

muni de la norme $\|u\|_{1,p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$

On sait qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $u \in D^{1,p}$

$$\|u\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}} \leq K \|u\|_{D^{1,p}} .$$

Pour $K \subset \Omega$ compact, $D_K(\Omega)$ désigne l'ensemble $\{\varphi \in D(\Omega) / \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\}$,

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\varphi \in D(\Omega)$ on note $P_\alpha(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $0 < \alpha \leq 1$, on note

$$C^{o,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ v \in C\left(\overline{\Omega}\right), \sup_{(x,y), x \neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha} \text{ est fini} \right\}.$$

muni de la norme

$$\|v\|_{0,\alpha} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v| + \sup_{(x,y), x \neq y} \left\{ \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}.$$

Introduction

Nous considérons un système elliptique faisant intervenir le p-laplacien de la forme

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a\ (x)\ \ |u|^{p-2}\ u \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b\ (x)\ \ |v|^{q-2}\ v \ \text{ dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Cet opérateur sous forme divergence est elliptique dégénéré lorsque $p \neq 2$ et est équivalent à l'opérateur de Laplace lorsque $p = 2$. Il apparaît aussi bien en mathématiques pures par exemple dans les problèmes de géométrie riemannienne, qu'en mathématiques appliquées. En effet, il intervient dans de nombreux domaines en sciences expérimentales : problèmes de réactions-diffusion non linéaires, élasticité non linéaire, dynamique des populations, écoulements dans les milieux poreux, écoulements de fluides non-newtoniens, etc... En particulier, dans sa thèse de doctorat en 1975 [37] , M.C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant apparaître le p-Laplacien. L'auteur explique sa présence par le fait que la glace peut-être considérée comme un fluide pseudo-plastique et satisfait une loi de déformation non linéaire.
Dans la littérature on trouve de nombreux travaux dédiés à l'étude théorique de telles équations et systèmes d'équations. En fait, l'étude de ce type de problèmes a effectivement commencé au milieu des années 1980 par M. Ôtani [35] en dimension un, puis par F. de Thélin [41] en dimension N, qui ont obtenu les premiers résultats en examinant une équation de la forme $\Delta_p u = \lambda u^{\gamma-1}$. F. de Thélin [41] et W.M. Ni & J. Serrin [34] ont démontré indépendamment l'existence et l'unicité des solutions radiales dans $\mathbb{R}^N$, ensuite Ôtani [36] a généralisé ce résultat à des ouverts quelconques. En 1987, F. de Thélin [42] a étendu ces résultats pour des équations de type $\Delta_p u = g(x, u)$ où la fonction g vérifie des conditions de croissance. Parallèlement, d'autres auteurs, précurseurs de l'analyse des problèmes aux valeurs propres elliptiques comme G. Barles [5] , S. Sakaguchi [38] et A. Anane [3] , ont étudié les équations du type

$$-\Delta_p u = \lambda\ \ |u|^{p-2}\ u \quad \text{dans un domaine borné } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^N.$$

En 1990, P. Lindqvist [32] a établi différents résultats sur ce type d'équations qui font suite à l'article de A. Anane [3]. D'autre théorèmes d'unicité ont été énoncés par J.I. Díaz et J.E. Saa dès 1987 pour une équation du type $-\Delta_p u = f(x, u)$ sous la condition que l'application $r \to \dfrac{f(x,r)}{r^{p-1}}$ est décroissante. Le problème de bifurcation lié à la première valeur propre a été abordé par R.F. Manásevich et M. A. Del Pino [33], tandis que les problèmes de non résonance associés au p-Laplacien ont été étudiés par A. Anane et J. P. Gossez [4]. Dans ce qui précède, les auteurs ont étudié des équations aux dérivées partielles dans des domaines bornés ; dans le cas des ouverts non bornés, nous citons les travaux de P. Drabek [21], P. Drabek X.Y. Huang [22] et A. Bechah, K. Chaïb, F. de Thélin [14]. En particulier certains résultats d'existence de solutions ou d'états fondamentaux figurent dans les travaux de A. Djellit-S. Tas [19] .

Les travaux sur les systèmes où intervient le p-Laplacien ont été initiés par F. de Thélin [43] où il a montré l'existence et l'unicité de la première valeur propre du système

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \ |u|^{\alpha-1} \ u \ |v|^{\beta+1} \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \lambda \ |u|^{\alpha+1} \ |v|^{\beta-1} \ v \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

sous la condition de criticalité $\frac{\alpha+1}{p^*} + \frac{\beta+1}{q^*} = 1$. Le cas d'un système variationnel a été traité par P. Felmer, R.F. Manàsevich et F. de Thélin [25] où les auteurs ont étudié l'existence et l'unicité de la solution positive d'un système variationnel (ou dérivant d'un potentiel)

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \dfrac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \dfrac{\partial H}{\partial v}(x,u,v) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

généralisant ainsi au cas des systèmes, les résultats de J.I. Díaz et J.E. Saa [20]. Puis, F. de Thélin, J. Vélin [44] et J. Chabrowski [13] ont poursuivi l'étude de tels problèmes variationnels et ont commencé une approche du cas non variationnel en faisant des hypothèses sur la croissance des non linéarités. Tous ces travaux concernant le cas variationnel ont été généralisés pour le cas de domaines non bornés par J. Fleckinger, R.F. Manáevich, N.M. Stavrakakis et F. de Thélin [26] et A. Bechah, K. Chaïb et F. de Thélin [14] . L'étude des systèmes dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$ a été inspirée par celle faite sur les systèmes faisant intervenir le Laplacien (voir M.F. Bidaut-Véron [9]). Il faut aussi noter que l'existence de solutions pour des systèmes non variationnels a été établie par ph. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri et F. de Thélin [16] et ph.Clément, R.F. Manáevich E. Mitidieri [17] pour des domaines bornés. Et ce n'est que récemment que ces résultats ont été étendus par A. Bechah [6] [7].

Actuellement, de nombreuses recherches sont en cours, en particulier sur le principe de l'antimaximum de Ph. Clément et L.A. Peletier [18] comme l'article en préparation de T. Godoy, J.P. Gossez et S. Paczka [30] dans lequel ils complétent les résultats déjà obtenus par N.M. Stavrakakis, F. de Thélin [40] et J. Fleckinger, P. Takac [28] . Évidemment, l'historique que nous venons de dresser ci-dessus est loin d'être exhaustif, néanmoins il est à la base de notre travail dans ce mémoire.
Avant d'engager les développements sur notre sujet de recherche, décrivons un problème aux valeurs propres de la forme

$$-\Delta_p u = \lambda g(x) |u|^{p-2} \ u \ \text{ dans } \ \mathbb{R}$$

qui peut être résolu de façon explicite. En effet, on peut trouver la fonction propre positive correspondant à la première valeur propre.
Cela revient à résoudre un problème de la forme :

$$\begin{cases} -\left(|u'|^{p-2} u'\right)' = \lambda g(x) |u|^{p-2} \ u \ \text{ dans } \ \mathbb{R} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

D'après les résultats de K.J. Brown, C. Cosner et J. Fleckinger [12] pour $p = 2$ et de X.Y. Huang [31] pour $p > 1$, la fonction poids g doit changer de signe dans $\mathbb{R}$ pour garantir l'existence d'une telle solution positive. Nous verrons par la suite que ces deux résultats ainsi que le fait que la valeur propre principale pour un poids positif est unique, pourrons être démontrés de façon plus élégante grâce au résultat du chapitre 2. De fait, nous allons choisir la fonction poids changeant de signe, autrement dit

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [-T_0, T_0] \\ -1 & \text{si } \ |x| > T_0 \end{cases}$$

où T_0 sera déterminé par la suite. De prime abord, nous divisons $\mathbb{R}$ en deux parties $[-T_0, T_0]$ et $[-T_0, T_0]^c$ et nous examinons chacun des problèmes auxiliaires.
Commençons par étudier cette solution sur $[-T_0, T_0]^c$. En choisissant $u(x) = e^{-|x|}$ sur $[-T_0, T_0]^c$ nous constatons aisément que u vérifie bien l'équation avec $\lambda = p - 1$.

Ensuite, sur l'intervalle $[-T_0, T_0]$ l'équation devient :

$$(\varepsilon_q) \qquad -\left(|u'|^{p-2} u'\right)' = \lambda g(x) |u|^{p-2} \ u \qquad \text{sur } \ [-T_0, T_0]$$

avec pour conditions au bord :

$$(\varepsilon_c) \quad \begin{cases} u(T_0) = u(-T_0) = e^{-T_0} \\ -u'(T_0) = u'(-T_0) = e^{-T_0}. \end{cases}$$

Pour trouver une fonction qui satisfait l'équation (ε_q) nous nous inspirons de l'article de M. Del Pino, P. Drabek et R. Manásevich [23]. Ces auteurs définissent une fonction $\sin_p$ (et un réel π_p) solution du problème :

$$(\varepsilon_0) \quad \begin{cases} -\left(|u'|^{p-2} u'\right)' = (p-1)u^{p-1} & \text{sur } \ [0, \pi_p] \\ u(0) = u(\pi_p) = 0. \end{cases}$$

Choisissons comme solution une fonction de la forme $u(x) = \alpha \sin_p(t+\beta)$ où $\sin_p$ est définie sur $[0, \pi_p/2]$ par la donnée de sa fonction réciproque $\arcsin_p$:

$$\arcsin_p t = \int_0^t \frac{ds}{(1-s^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Des raisons de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées imposent que $\beta = \pi_p/2$.
Il est à noter que l'on retrouve une certaine analogie au cas $p = 2$. En effet, dans le cas $p = 2$, nous aurions pris une solution de la forme $\alpha \cos t$ qui n'est rien d'autre que $\alpha \sin(t + \pi/2)$. Par contre, $\alpha \cos t := (\alpha \sin_p t)'$ n'est pas solution de (ε_0) ce qui souligne la particularité du cas $p = 2$.
A présent, il ne reste plus qu'à vérifier les égalités (ε_c) qui nous donneront un raccordement C^1 avec la solution sur $[-T_0, T_0]^c$. La définition de la fonction $\sin_p$ nous donne déjà

$$\sin_p(t+\pi_p/2) = \sin_p(\pi_p/2 - t) \quad \text{et} \quad \sin_p'(t+\pi_p/2) = -\sin_p'(\pi_p/2 - t).$$

Pour le reste, il faut déterminer les valeurs de α et T_0 appropriées :

$$\begin{cases} \alpha \sin_p(\pi_p/2 - T_0) = e^{-T_0} \\ \alpha \sin_p'(\pi_p/2 - T_0) = e^{-T_0}. \end{cases}$$

Comme $\sin_p$ est croissante et bijective de $[0, \pi_p/2]$ dans $[0,1]$ et $\sin_p'$ est décroissante et bijective de $[0, \pi_p/2]$ dans $[0,1]$, il existe une valeur π_0 telle que $\sin_p \pi_0 = \sin_p' \pi_0$. Choisissons $T_0 \in (0, \pi_p/2)$ tel que $\pi_p/2 - T_0 = \pi_0$. On arrive alors à

$$\alpha = \frac{e^{\pi_0 - \pi_p/2}}{\sin_p(\pi_0)}.$$

De plus, on a $\sin_p^p\pi_0 + \sin_p'^p\pi_0 = 1$ et $\sin_p\pi_0 = \sin_p'\pi_0$, donc $\sin_p\pi_0 = 2^{-1/p}$.
Ainsi, la fonction propre positive associée à la valeur propre $p-1$ et au poids g a pour expression

$$u(x) = \begin{cases} 2^{1/p} e^{\pi_0 - \pi_p/2} \sin_p(\pi_p/2 + x) & \text{si } x \in [\pi_0 - \pi_p/2, \pi_p/2 - \pi_0] \\ e^{-|x|} & \text{si } |x| > \pi_p/2 - \pi_0 \end{cases}$$

avec $\pi_p = \dfrac{2\pi}{p\sin(\pi/p)}$ et $\pi_0 = \displaystyle\int_0^{2^{-1/p}} \frac{ds}{(1-s^p)^{\frac{1}{p}}}$.

Voici quelques représentations graphiques des fonctions propres associées à $p-1$ et au poids g selon les valeurs du paramètres p :

FIG. 1 – *Fonction propre pour* $p = 5/4$

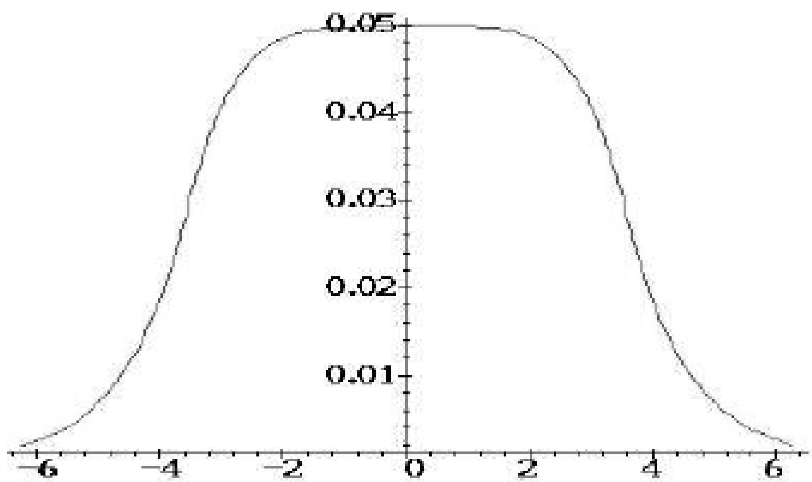


FIG. 2 – *Fonction propre pour* $p = 3/2$

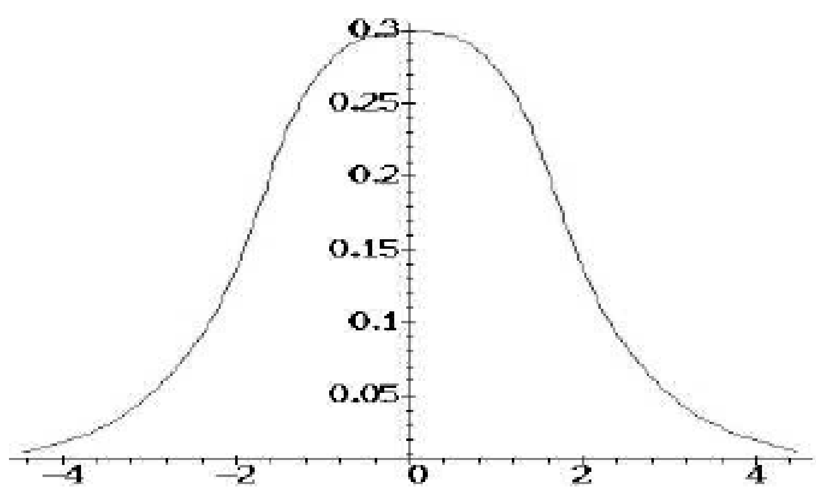


FIG. 3 – *Fonction propre pour* $p = 2$

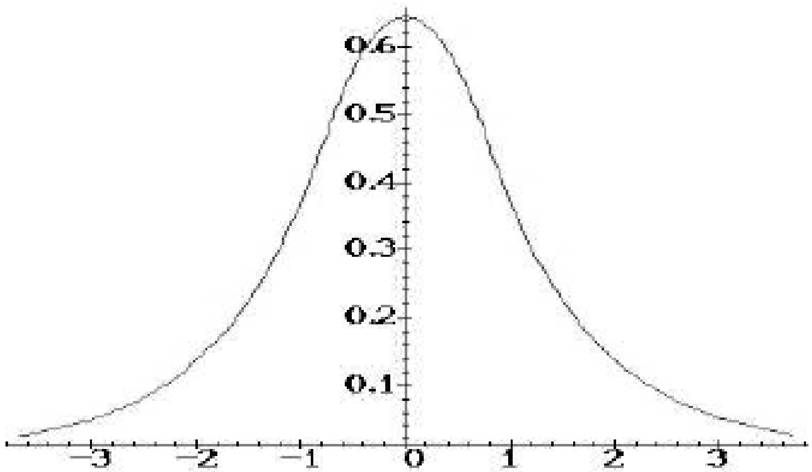
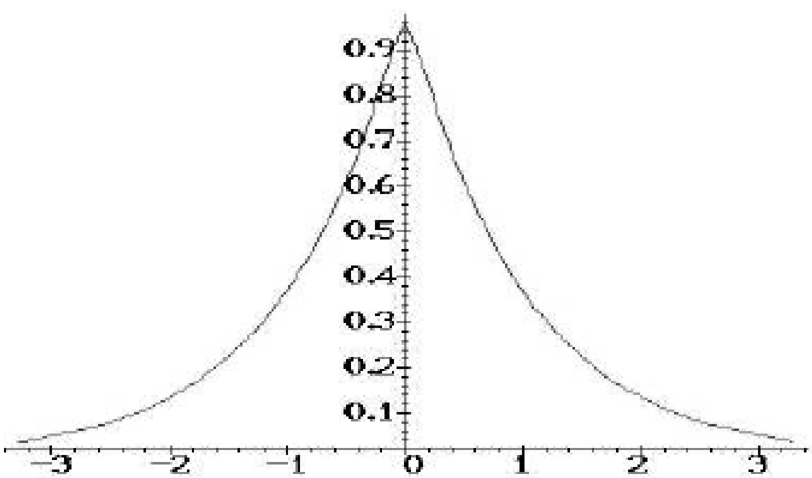


FIG. 4 – *Fonction propre pour* $p = 5$



Chapitre 1

Rappels généraux et définitions

Résumé

Ce chapitre est consacré à des rappels d'analyse fonctionnelle, principalement les espaces des fonctions intégrables, dérivées faibles, espaces de Sobolev, ainsi que les théorèmes de densité, trace, compacité, injections de Sobolev. La plupart des résultats sont seulement énoncés. Les démonstrations de ces résultats classiques figurent dans presque tous les ouvrages d'analyse fonctionnelle. La connaissance de l'ensemble de ces résultats facilite la compréhension de l'étude qui va suivre.

1.1 Espaces des fonctions intégrables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de bord Γ. On note par $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, l'espace des fonctions mesurables réelles définies sur Ω telles que :

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

On pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

$L^p(\Omega)$ est équippé de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est constitué des fonctions mesurables définies sur Ω telles qu'il existe un réel positif M tel que $|u(x)| \leq M$ presque partout dans Ω.
On note

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C\ ;\ \ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \, v(x) \ \ dx.$$

Clairement, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, v)^{1/2}$

Théorème 1.1.1

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.1.2

L^p est reflexif pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.1.1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit u et v deux fonctions de $L^2(\Omega)$; alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de Hölder.

Lemme 1.1.2

Soit u et v deux fonctions de $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ respectivement avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ et $1\leq p\leq\infty$. Alors le produit $u.v\in L^1(\Omega)$ et

$$\|u.v\|_{L^1(\Omega)}\leq\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Remarque 1.1.1

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder :
soient $f_1,f_2,...,f_k$ des fonctions telles que

$$f_i\in L^{p_i}(\Omega)\ \ 1\leq i\leq k\quad\text{avec}\quad\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_k}\leq 1.$$

Alors le produit $f=f_1f_2...f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p}\leq\|f_1\|_{L^{p_1}}...\|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

En particulier si $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ avec $1\leq p\leq q\leq\infty$, alors $f\in L^r(\Omega)$ pour tout $p\leq r\leq q$ et l'on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r}\leq\|f\|_{L^p}^{\alpha}\|f\|_{L^q}^{1-\alpha}\qquad\text{où}\quad\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{q}\quad(0\leq\alpha\leq 1).$$

1.2 Dérivées faibles

Lemme 1.2.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f,g\in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour toute fonction $\varphi\in D(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx=\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx \text{ alors } f=g \text{ presque partout.}$$

Définition 1.2.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $i\in[1,N]$. On dit que $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il existe $D_if\in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\forall\varphi\in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx=-\int_\Omega D_if(x)\varphi(x)\,dx.$$

Remarque 1.2.1

Par le lemme ci-dessus, si un tel $D_i f$ existe, il est unique. Néanmoins, il peut ne pas exister.

Définition 1.2.2

(i) On dit que $T \in D'(\Omega)$ (T est une distribution) si T : $D(\Omega) \to \mathbb{R}$ est linéaire et vérifie : pour tout K compact inclus dans Ω, il existe $C_K > 0$ et $m_k \in \mathbb{N}$ tels que $\forall \varphi \in D_K(\Omega)$,

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} P_\alpha(\varphi).$$

(ii) Pour $i \in [1, N]$ alors on définit la dérivée de $T \in D'(\Omega)$ dans la direction i comme étant la distribution $D_i T$ vérifiant

$$\langle D_i T, \varphi \rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Définition 1.2.3

S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse choisir $m_K = m$ pour tout $K \subset \Omega$ compact, alors on dit que T est d'ordre inférieur à m. Une mesure de Radon est une distribution d'ordre 0.
Il est facile de voir que si $T \in D'(\Omega)$ est d'ordre m alors $D_i T \in D'(\Omega)$ est d'ordre $m+1$.
La topologie sur $D'(\Omega)$ peut être définie par la convergence des suites. Expressément soit $(T_n) \in D'(\Omega)$ et $T \in D'(\Omega)$ alors $T_n \overset{D'}{\to} T$ si $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $< T_n, \varphi > \to < T, \varphi >$
On a alors $T_n \overset{D'}{\to} T$ implique $D_i T_n \overset{D'}{\to} D_i T$.

Définition 1.2.4

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors on définit la distribution d'ordre 0 : $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx$. on appelle alors dérivée faible (au sens des distribution) de f dans la direction i la distribution $D_i T_f$ que l'on note $D_i f$.

Remarque 1.2.2

Si f est dérivable au sens faible dans la direction i alors $D_i T_f = T_{D_i f}$.

Proposition 1.2.1

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors f est lipschitzienne. De plus, $\forall i \in [1, N], D_i f \in L^\infty(\Omega)$.

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.1

Les espaces de Sobolev sont, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, des espaces vectoriels de la forme :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \right\}$$

munis de la norme $\|u\|_{W^{m,p}} = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p$.
En particulier pour $p = 2$, on écrit $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ qu'on munit du produit scalaire $(u, v) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)$.

Remarque 1.3.1

$D_i f$ étant une distribution, $D_i f \in L^2$ signifie qu'il existe $g \in L^2$ telle que

$$D_i f = T_g : \forall \varphi \in D(\Omega), \ < D_i f, \varphi >= \int_\Omega g\varphi \, d\mu.$$

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont de Banach, séparables pour $p < +\infty$, réflexifs pour $1 < p < +\infty$.
Bien évidemment $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.3.2

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$, où l'adhérence est prise pour la topologie de $W^{m,p}(\Omega)$.
En particulier

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ / \ u = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

où Ω est supposé "régulier" (de frontière C^∞ par exemple)

Proposition 1.3.1

Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et $\tilde{u}$ est définie par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \Omega^c \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$.

Lemme 1.3.1 (*inégalité de Poincaré*) .

On suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.
L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est borné dans une seule direction.

Définition 1.3.3

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $1 < p \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on définit $W^{-1,p}(\Omega) = \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)'$. Et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$.
Si $L \in H^{-1}(\Omega)$ alors on note pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $L(v) = < L, v >_{H^{-1},H_0^1}$.

Remarque 1.3.2

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $L \in H^{-1}(\Omega)$ alors $L_{|D(\Omega)} \in D'(\Omega)$ (distribution d'ordre 1) et la connaissance de L sur $D(\Omega)$ entraîne, par densité, celle de L sur tout $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.2

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $L \in D'(\Omega)$ alors :

$$\begin{aligned} L \in H^{-1}(\Omega) &\Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega) \text{ on a } |< L, \varphi >_{D',D}| \leq C \|\varphi\|_{H^1}. \\ &\Leftrightarrow \exists (g_1, ..., g_N) \in L^2(\Omega) \text{ telles que } L = \sum_{i=1}^N D_i g_i. \end{aligned}$$

La dérivé $D_i g_i$ est au sens des distribution. Si l'on considère $G = (g_1, ..., g_N)$, alors on note souvent $L = \operatorname{div} G$. La proposition reste vrai pour $W^{-1,p}$.

1.4 Théorèmes de densité

Théorème 1.4.1

Si $1 \leq p < +\infty$ alors $D\left(\mathbb{R}^N\right)$ est dense dans $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on pose $C_c^\infty\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u_{|\Omega}, u \in D\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$.

Théorème 1.4.2

Si $\mathbb{R}_+^N = \left\{(x_1, y) \in \mathbb{R}^N \ / \ x_1 > 0, y \in \mathbb{R}^{N-1}\right\}$ et $1 \leq p < +\infty$ alors :

(i) $C_c^\infty \left(\overline{\mathbb{R}_+^N}\right)$ est dense dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^N\right)$.

(ii) Il existe une application linéaire continue $P : W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^N\right) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que $\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^N\right)$, $P(u) = u$ sur $\mathbb{R}_+^N$.

On a en fait $W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^N\right) = \left\{u_{|\mathbb{R}_+^N}, u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$

Définition 1.4.1

Un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(O_0, O_1, ..., O_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et des applications $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ telles que :

(i) $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{n} O_i$ et $O_0 \subset \Omega$,

(ii) $\varphi_0 : O_0 \to B_{1,N}$ est bijective avec $\varphi_0, \varphi_0^{-1}$ lipschitzienne

(iii) Pour tout $i \geq 1$, $\varphi_i : O_i \to B_{1,N}$ est bijective avec $\varphi_i, \varphi_i^{-1}$ lipschitzienne et $\varphi(O_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N, \varphi(O_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \left\{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\right\}$.

Théorème 1.4.3

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p \leq +\infty$ alors :

(i) $C_c^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Il existe une application linéaire continue $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u) = u$ sur Ω.

1.5 Trace

Théorème 1.5.1

Si $1 \leq p < \infty$ et Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne alors l'application

$$\gamma_0 \begin{cases} C_c^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \subset W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \\ \qquad u \to u_{|\partial\Omega} \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge donc en une unique application linéaire continue $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$: c'est l'opérateur trace.

Remarque 1.5.1

Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ alors $L^p(\partial\Omega) = L^p\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$. En fait, pour démontrer la continuité de γ_0 on le fait pour $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et on ramène Ω borné à frontière lipschitzienne.

Remarque 1.5.2

Pour définir une intégrale sur $\partial\Omega$, on prend $(\alpha_i)_{i\in[0,n]}$ une approximation de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement (O_i), et on écrit $\int_{\partial\Omega} f(x)\,d\sigma(x) = \sum \int_{O_i\cap\partial\Omega} \alpha_i(x) f(x)\,d\sigma(x)$. On est donc ramené à calculer $\int_{O_i\cap\partial\Omega} \alpha_i(x)\,g(x)\,d\sigma(x)$; pour cela, on paramétrise $O_i \cap \partial\Omega$ par $\gamma(y) = \varphi_i^{-1}(0,y)$ $(y \in B_{1,N-1})$ et pose

$$\int\limits_{O_i\cap\partial\Omega} g(x)\,d\sigma(x) = \int\limits_{B_{1,N-1}} g(\gamma(y)) \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}} \right\| dy$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne et $a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$ est le produit mixte dans $\mathbb{R}^N$.

Proposition 1.5.1

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x alors, pour tous $(u,v) \in H^1(\Omega)$ et $i \in [1,N]$, on a

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\,D_i v(x)\;\;dx = \int\limits_{\partial\Omega} \gamma u(y)\,\gamma v(y)\,n_i(y)\;\;d\sigma(y) - \int D_i u(x)\,v(x)\;\;dx.$$

Remarque 1.5.3

Ce théorème d'intégration par parties est aussi valable si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Dans ce cas, le vecteur normal extérieur à $\partial\mathbb{R}_+^N$ est constant : $n = (-1, 0, \dots, 0)$.

1.6 Compacité

Théorème 1.6.1 $(Kolmogorov)$:

Si $1 \le p < \infty$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $B \subset L^p(\Omega)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) B est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$,

(ii) Il existe un opérateur $P : B \to L^p(\Omega)$ tel que :

1. $\forall u \in B,\ Pu = u$ sur Ω,

2. $\{Pu, \ u \in B\}$ est borné dans $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$,
3. $\sup_{u\in B} \|\tau_h Pu - Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quand $h \to 0$..

Théorème 1.6.2 (*Rellich*) :

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < \infty$ alors toute partie bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.
Autrement dit l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte. Le théorème reste valable pour $W_0^{1,p}$ si Ω est quelconque.

Définition 1.6.1

Une application linéaire est compacte si l'image de tout borné est relativement compacte.

Théorème 1.6.3

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compacte .
Ce théorème est faux pour $p = 1$, puisque $\gamma : W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ est surjective.

Théorème 1.6.4

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compacte.

1.7 Injections de Sobolev

Théorème 1.7.1

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne ou si $\Omega = \mathbb{R}^N$ on a :

(i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.

(ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.

(iii) Pour tout $q \in \left]N, +\infty\right[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Le théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}$ par $W_0^{1,p}$; dans ce cas, si $N > 1$, le (iii) est même valable pour tout $q \in [1, +\infty[$

1.8 Théorie variationnelle elliptique dans les espaces de Hilbert

Sauf mention du contraire, on considère dans toute la section un espace de Hilbert V de dual(topologique) V′ ; on identifiera V à V′ grâce au théorème de Riesz si nécessaire. On note $\|.\|_V$ la norme de V.

1.8.1 Théorème de Lax-Milgram

On suppose connues les propriétés élémentaires des fonctions et fonctionnelles convexes ainsi que la notion de différentiabilité au sens de Gâteaux (voir [24] par exemple). Nous rappelons toutefois une propriété importante de semi-continuité des fonctionnelles convexes

Définition 1.8.1

Une fonction J de V dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (sci) sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{u \in V \ / \ J(u) \leq a\}$ est fermé

(ii) $\forall \overline{u} \in V, \quad \lim_{u \to \overline{u}} \inf J(u) \geq J(\overline{u})$.

Théorème 1.8.1

Toute fonction convexe sci pour la topologie forte (celle de la norme) de V est encore sci pour la topologie faible de V.
En pratique ce résultat s'utilise sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 1.8.1

Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ sci (par exemple continue) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V faiblement convergente vers v alors

$$J(v) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf J(v_n).$$

Commençons par un résultat très général de minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un ensemble convexe fermé de V.

Théorème 1.8.2

On suppose que V est un Banach réflexif. Soit J une fonctionnelle de V dans $\overline{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. On suppose que J est propre (c'est-à-dire qu'il existe un élément v_0 de K tel que $J(v_0) < +\infty$). Alors le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ J(u) = \inf \{J(v) \ / \ v \in K\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

admet au moins une solutions dans l'un des cas suivants :

(i) soit J est coercive i.e. $\lim\limits_{\|v\|_V \to +\infty} J(v) = +\infty$

(ii) soit K est borné

Si, de plus, J est strictement convexe la solution est unique.

Théorème 1.8.3

Soient K un sous-ensemble convexe, non vide de V et J une fonctionnelle de K vers $\mathbb{R}$ convexe et Gâteaux-différentiable sur K. Soit u dans V ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est solution du problème (1.1).

(ii) $u \in K$ et $\forall v \in K, \quad \nabla J(u).(u - v) \geq 0$.

Une application très importante de ces deux théorèmes est le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 1.8.4

Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue sur V$\times V$. On suppose que a est v-elliptique (ou coercive), i.e :

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V \quad a(u, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 . \tag{1.2}$$

Soit $L \in V'$. Alors le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V \quad a(u, v) = L(v) \end{cases} \tag{1.3}$$

a une solution unique.

Nous allons interpréter ce résultat. Soit u dans V et $A_u \in V'$ défini par :

$$V \to \mathbb{R}$$

$$A_u : v \longmapsto a(u,v).$$

Soit maintenant l'opérateur A de V dans V' défini par

$$\forall u \in V \qquad Au = A_u.$$

Il est facile de voir que A est linéaire et que le problème (1.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \qquad Au = L. \end{cases} \tag{1.4}$$

On a alors la proposition suivante, conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram :

Proposition 1.8.1

L'opérateur A est un isomorphisme (algébrique et topologique) de V dans V'.
Preuve. A est linéaire. Le théorème de Lax-Milgram prouve que A est un isomorphisme algébrique de V dans V'. La continuité de A provient de celle de a ; plus précisément, pour tout u de V :

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\langle Au, v\rangle_{V',V}\right|}{\|v\|_V} = \sup_{v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_V} \leq \|a\| \, \|u\|_V \, .$$

On conclut que A^{-1}est aussi continu grâce au théorème de l'application ouverte. ∎

1.8.2 Cas particulier important

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que V est inclus dans H avec injection continue.
On suppose également que V est dense dans H. On peut identifier H et H' par le théorème de Riesz et on a grâce à la densité :

$$V \subset H \subset V', \tag{1.5}$$

avec injections continues et denses. H s'appelle l'espace pivot.
IL est classique d'associer au triplet variationnel $(V, H, a(,))$ sa réalisation : l'opérateur A autoadjoint, positif, non borné dans H de domaine $D(A)$ défini par :

$$D(A) = \{u \in v, \quad Au \in H\}$$

$$(Au, v)_H = a(u,v) \qquad \forall u \in D(A) \qquad \forall v \in V.$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la première valeur propre

Résumé

Dans la première partie de ce chapitre, notre objectif sera d'utiliser l'identité de Picone présentée par W. Allegretto et X.Y. Huang dans [2] , cette identité nous permet d'établir une variante de l'inégalité de Diaz Saa définie sur un domaine non borné de $\mathbb{R}^N$. Cette inégalité pour $1 < p < N$ se présente sous la forme :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown \Phi|^p \, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p \, dx.$$

Dans la seconde partie, nous appliquerons cette inégalité pour obtenir un résultat d'unicité de la première valeur propre d'un système faisant intervenir le p-Laplacien, défini dans $\mathbb{R}^N$, de la forme :

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a\ (x)\ |u|^{p-2}\ u \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b\ (x)\ |v|^{q-2}\ v \ \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Ce travail fait suite à l'article de A.Anane [3] où il étudie le cas d'une seule équation et à celui de J. Fleckinger, R. F. Manásevich, N. M. Stavrakakis et F. de thélin [26] où un système légèrement différent est considéré. Dans ce dernier, une méthode locale est présentée afin d'éviter l'éventuelle explosion du quotient $\dfrac{z_i}{z_j}$ dans $\mathbb{R}^N$. Cependant, lors de l'intégration par parties, des intégrales sur le bord apparaissent ce qui alourdit la démonstration.

2.1 Identité de Picone généralisée pour le p-Laplacien

Proposition 2.1.1

Soient u, v différentiables et $v > 0$ p.p. sur Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. Pour $p > 1$ notons

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}u}{v^{p-1}} \nabla u. \nabla v \, |\nabla v|^{p-2} \ \ p.p. \ sur \ \Omega \\ R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2} \nabla v \ p.p. \ sur \ \Omega \end{aligned}$$

Alors $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$

De plus, $L(u,v) = 0$ p.p. sur Ω si et seulement si $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ p.p. sur Ω.

Preuve. Par simple développement de $R(u,v)$, on montre que $R(u,v) = L(u,v)$, car

$$\nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right) = p\frac{|u|^{p-2}u \nabla u}{v^{p-1}} - (p-1)\frac{|u|^p \nabla v}{v^p}.$$

Pour prouver la positivité de $L(u,v)$, on observe que

$$\frac{|u|^{p-2}u}{v^{p-1}} \nabla u. \nabla v \, |\nabla v|^{p-2} \leq \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| \tag{2.1}$$

et d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| &\leq \frac{p-1}{p}\left(\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p}|\nabla u|^p \\ &\leq \frac{p-1}{p}\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p + \frac{1}{p}|\nabla u|^p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| \leq (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p + |\nabla u|^p \tag{2.2}$$

En vertu de (2.1) et (2.2) , on obtient

$$|\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}u}{v^{p-1}} \nabla u. \nabla v \, |\nabla v|^{p-2} = L(u,v) \geq 0.$$

De plus, si $L(u,v) = 0$ alors d'après (2.1) et (2.2) .

$$|\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| = 0 \text{ p.p. sur } \Omega. \tag{2.3}$$

On définit l'ensemble $N := \left\{x \in \Omega \text{ tels que } \frac{|u|}{v}|\nabla v| = 0\right\} \subset \Omega.$

Sur N, on a grâce à l'équation (2.3)

$$\frac{|u|}{v}\,|\triangledown v| = |\triangledown u| = 0 \text{ p.p.} \Rightarrow \frac{u}{v} \triangledown v = \triangledown u \text{ p.p.}$$

et donc

$$\frac{u}{v} \triangledown v = \triangledown u \quad \text{presque partout sur N.} \tag{2.4}$$

Sur N^c, on pose $Q = \dfrac{|\triangledown u|}{|\triangledown v|\,\frac{|u|}{v}}$ et en substituant dans (2.3) on obtient

$$Q^p - pQ + p - 1 = 0 \Leftrightarrow Q = 1 \text{ car p} > 1$$

ainsi

$$|\triangledown u| = \frac{|u|}{v}\,|\triangledown v| \;\text{ p.p. sur } \mathrm{N}^c \tag{2.5}$$

Tenant compte du fait que $L(u,v) = 0$, l'égalité (2.5) entraîne

$$|\triangledown u|^p + (p-1)\,|\triangledown u|^{p-2}\,|\triangledown u|^2 - p \triangledown u. \triangledown v\frac{u}{v}\,|\triangledown u|^{p-2} = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{N}^c$$

$$\Rightarrow |\triangledown u|^2 + (p-1)\,|\triangledown u|^2 - p \triangledown u. \triangledown v\frac{u}{v} = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{N}^c$$

$$\Rightarrow \triangledown u.\left(\triangledown u - \triangledown v\frac{u}{v}\right) = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{N}^c$$

$$\Rightarrow \frac{u}{v} \triangledown v = \triangledown u \text{ p.p. sur } \mathrm{N}^c. \tag{2.6}$$

En effet $\triangledown v$ ne peut pas être orthogonal à $\frac{u}{v} \triangledown v - \triangledown u$ car ça reviendrait à dire que $\triangledown u$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $\frac{u}{v} \triangledown v$ et $\frac{u}{v} \triangledown v - \triangledown u$,
ce qui n'est pas possible car $\frac{u}{v}\,|\triangledown v| = |\triangledown u|$.

Par (2.4) et (2.6) on a

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} \triangledown v &= \triangledown u \text{ p.p. sur } \Omega \text{ et finalement,} \\ \triangledown \left(\frac{u}{v}\right) &= 0 \text{ p.p. sur } \Omega \end{aligned}$$

Il est facile de constater que dans l'identité de Picone, l'ensemble Ω peut être pris tout à fait quelconque, par exemple non connexe et non borné. Maintenant, nous sommes en mesure d'établir le théorème suivant dont la démonstration a pour argument principal l'identité citée ci-dessus. ∎

2.2 Inégalité de type Dìaz-Saa

Théorème 2.2.1

Pour $1 < p < N$, soient Φ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $z \geq 0$ $(\neq 0)$ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ toutes deux differentiables. Alors on a :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p \, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p \, dx, \tag{2.7}$$

si l'on suppose que $\dfrac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \epsilon \mathbb{L}^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.
De plus, si l'égalité (2.7) a lieu alors il existe C telle que $z = C\Phi$ sur $\mathbb{R}^N$.

Preuve.

Tout d'abord remarquons que $z \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est une solution non triviale du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \left(\dfrac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) v^{p-1} \\ \qquad v \geq 0 \end{cases} \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

comme $\dfrac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le principe du Maximum Fort de Vázquez ([46]) pour prouver que $z > 0$ sur $\mathbb{R}^N$. De plus, on utilise le théorème de régularité de P.Tolksdorf ([45]) pour montrer que pour tout $r > 0$, il existe $\alpha(r) > 0$ tel que $z \in C^{1,\alpha}(B_r)$.
Et en particulier pour Ω_0 un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $z \in C^{1,\alpha_0}(\Omega_0)$.

Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que Φ_n converge vers Φ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On applique l'identité de Picone aux fonctions Φ_n et z

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} L(\Phi_n, z)\, dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} R(\Phi_n, z)\, dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla \left(\frac{|\Phi_n|^p}{z^{p-1}} \right) |\nabla z|^{p-2} \nabla z dx. \end{aligned}$$

Or $\Phi_n \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $z > 0$ donc $\dfrac{\Phi_n^p}{z^{p-1}}$ est une fonction test admissible ; par intégration par parties on arrive à

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi_n|^p \, dx.$$

comme $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Φ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Φ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et $(|\Phi_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $|\Phi|^p$ dans $L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \left(|\Phi_n|^p - |\Phi|^p\right) dx\right| \leq \left\|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \left\||\Phi_n|^p - |\Phi|^p\right\|_{L^{\frac{p^*}{p}}} \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Donc

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown\Phi|^p\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi|^p\, dx$$

d'où le résultat

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown\Phi|^p\, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right) |\Phi|^p\, dx. \tag{2.9}$$

Considérons le cas de l'égalité

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown\Phi|^p\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right) |\Phi|^p\, dx.$$

Soit Ω_0 un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme précédemment.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_{\Omega_0} L\left(\Phi_n, z\right) dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} L\left(\Phi_n, z\right) dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown\Phi_n|^p\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi_n|^p\, dx \ \to 0 \text{ quand } n \to \infty \end{aligned}$$

Or $\int_{\Omega_0} L\left(\Phi_n, z\right) dx$ converge vers $\int_{\Omega_0} L\left(\Phi, z\right) dx$ quand $n \to \infty$ car Ω_0 est borné et $z \in C^{1,\alpha_0}\left(\Omega_0\right)$. Donc $L\left(\Phi, z\right) = 0$ p.p. sur Ω_0, l'ensemble Ω_0 étant pris de façon arbitraire dans $\mathbb{R}^N$ on peut donc conclure que $L\left(\Phi, z\right) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$.
Et d'après l'identité de Picone, il existe $C > 0$ tel que $\Phi = Cz$. ∎

Théorème 2.2.2

Pour $P \geq N$, soient Φ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $z \geq 0$ $(\neq 0)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ toutes deux différentiables. Alors on a :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown\Phi|^p\, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}}\right) |\Phi|^p\, dx \tag{2.10}$$

si l'on suppose que pour $p = N$, il existe $S \geq 1$ tel que $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \,\epsilon\, \mathbb{L}^s(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$

ou pour p $> N$, $\dfrac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \epsilon\ \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$.
De plus, si l'intégrale ci-dessus est nulle alors il existe C telle que $z = C\Phi$ sur $\mathbb{R}^N$.
La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 2.2.1.

Des résultats d'existence de solution dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour le p-Laplacien quand $p \geq N$ ont été établis par W.Allegretto et X.Y. Huang dans [1] .

Lemme 2.2.1

Soit $B : D^{1,p} \rightarrow \mathbb{R}$, *tel que* $B(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p\,dx$ *et* $g \in L^{\frac{N}{p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *alors :*

(i) Si $\{u_n\}$ est une suite dans $D^{1,p}$, avec $u_n \rightharpoonup u$ faiblement, alors il existe une sous suite qu'on note encore $\{u_n\}$, tels que $B(u_n) \rightarrow B(u)$.

(ii) Si $B'(u) = 0$ alors $B(u) = 0$.

Preuve. Voir lemme 2.2 dans [26] . ■

Lemme 2.2.2

On suppose que $u \in D^{1,p}$est une solution du problème :

$$-\Delta_p u = \lambda g\ (x)\ \ |u|^{p-2}\ u\ ,\quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.11}$$

Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int\limits_{\partial B_{R,N}} u\,|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{2.12}$$

Preuve. Soit u satisfaisant l'équation (2.11) . Multiplions les deux membres de (2.11) par u et intégrons sur B_R, on obtient

$$\int\limits_{B_{R,N}} |\nabla u|^p\,dx - \int\limits_{\partial B_{R,N}} u\,|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial n} dS = \lambda \int\limits_{B_{R,N}} g\,|u|^p\,dx. \tag{2.13}$$

Comme $|\nabla u| \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, et $g\,|u|^p \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, il s'ensuit que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int\limits_{\partial B_{R,N}} u\,|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial n} dS = L$$

existe et elle est finie.
Pour montrer que $L = 0$, il suffit de construire une suite $\{R_n\}$, avec $R_n \rightarrow +\infty$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} u\,|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0. \tag{2.14}$$

En effet, nous avons

$$\left|\int\limits_{\partial B_{R,N}} u\,|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial n}dS\right| \leq \left(R^{-\frac{p}{p'}}\int\limits_{\partial B_{R,N}} |u|^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}\left(R\int\limits_{\partial B_{R,N}} |\nabla u|^p\,dS\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{2.15}$$

où $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Comme $\nabla u \in \left(L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^{\mathbb{N}}$, et $u \in L^{\frac{Np}{N-p}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, il s'ensuit que l'intégrale

$$\int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_{\partial B_{R,N}} \left(|\nabla u|^p + |u|^{\frac{Np}{N-p}}\right) dS\right\} dR$$

est borné, et

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_R^{2R}\int\limits_{\partial B_{R,N}} \left(|\nabla u|^p + |u|^{\frac{Np}{N-p}}\right) dS\; dR = 0.$$

Par le théorème de la valeur moyenne, on peut trouver une suite $\{R_n\}$, avec $R_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, tel que

$$\lim_{R_n\to\infty} R_n \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |\nabla u|^p\,dS \;= 0 = \lim_{R_n\to\infty} R_n \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\,dS. \tag{2.16}$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^p\,dS \;&\leq\; \left(\int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\,dS\right)^{\frac{N-p}{N}}\left(\int\limits_{\partial B_{R_n,N}} 1dS\right)^{\frac{p}{N}} \\
&=\; KR_n^{\frac{(N-1)p}{N}}\left(\int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\,dS\right)^{\frac{N-p}{N}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$R_n^{-\frac{p}{p'}} \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^p \, dS \leq K \left(R_n \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} \, dS \right)^{\frac{N-p}{N}} R_n^{\frac{(N-1)p}{N} + \frac{p-N}{N} - \frac{p}{p'}}.$$

Nous obtenons

$$R_n^{-\frac{p}{p'}} \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^p \, dS \leq K \left(R_n \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} \, dS \right)^{\frac{N-p}{N}},$$

et par (2.16) $\lim\limits_{R_n \to \infty} R_n^{-\frac{p}{p'}} \int\limits_{\partial B_{R_n,N}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} \, dS = 0$. Donc l'inégalité (2.15) implique (2.14) , d'où le résultat. ■

2.3 Existence de la première valeur propre

Théorème 2.3.1

Le système (S_λ) admet une première valeur propre λ_1 définie par

$$\lambda_1 = \inf_{(u,v) \, \epsilon \, \Lambda} J(u,v) \qquad \textit{Où}$$

$$\Lambda = \left\{ (u,v) \, \epsilon \, Z : K(u,v) = \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x) \, |u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) \, |v|^q \, dx = 1 \right\}$$

$$\textit{tel que } Z = D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \textit{ et } J(u,v) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{1,q}^q$$

Preuve. La démonstration repose sur le théorème de Berger.
Pour tout $(u,v) \, \epsilon \, D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ nous définissons les fonctionnelles J et K par

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{1,q}^q \\ K(u,v) &= \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x) \, |u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) \, |v|^q \, dx \end{aligned} \tag{2.17}$$

Supposons que $(u,v) \, \epsilon \, D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ est un couple de fonctions propres du système (S_λ) associé à la valeur propre λ. Multiplions la première équation de (S_λ) par u et la deuxième équation par v et intégrons par parties sur $B_{R,N}$, on obtient

$$\begin{cases} \int\limits_{B_{R,N}} |\nabla u|^p \, dx - \int\limits_{\partial B_{R,N}} u \, |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \lambda \int\limits_{B_{R,N}} a \, |u|^p \, dx \\ \int\limits_{B_{R,N}} |\nabla v|^p \, dx - \int\limits_{\partial B_{R,N}} v \, |\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial n} dS = \lambda \int\limits_{B_{R,N}} b \, |v|^p \, dx \end{cases}$$

En vertu du lemme 2.2.2., nous obtenons, en faisant tendre $R \to +\infty$

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} a \, |u|^p \, dx \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} b \, |v|^p \, dx \end{cases}$$

Multiplions la première équation par $\frac{1}{p}$ et la deuxième équation par $\frac{1}{q}$, puis additionnons membre à membre, il s'en suit :

$$\frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx = \frac{1}{p} \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} a \, |u|^p \, dx + \frac{1}{q} \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} b \, |v|^p \, dx$$

Autrement dit

$$\frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{1,q}^q = \lambda \left(\frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x) \, |u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) \, |v|^q \, dx \right)$$

D'abord, nous allons montrer les quatres assertions suivantes pour pouvoir appliquer le théorème 6.3.2 de M. S. Berger.

(i) J est faiblement semi-continue inférieurement.

(ii) L'ensemble $\Lambda = \left\{ (u,v) \in Z : K(u,v) = \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x) \, |u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x) \, |v|^q \, dx = 1 \right\}$ est faiblement fermé.

(iii) J est coercive sur l'ensemble Λ.

(iv) Si $K'(u,v) = 0$ alors $(u,v) = 0$.

En effet, pour le point (i) il est aisé de voir que la fonction $(u,v) \to \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{1,q}^q$ est convexe continue, elle est donc faiblement semi-continue inférieurement.

Pour montrer le point (ii), on choisit une suite $(u_n, v_n) \in \Lambda$ telle que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v)$ faiblement dans Z.

On a bien

$$K(u_n, v_n) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|u_n|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\,|v_n|^q\,dx = 1$$

En vertu du lemme 2.2.1, le passage à la limite entraîne :

$$\lim_{n\to\infty} K(u_n, v_n) = K(u,v) = 1 \text{ c'est à dire que } (u,v) \in \Lambda$$

On en déduit alors que Λ est faiblement fermé.

Le point (iii) est évident, au regard de la définition de J.

Enfin le point (iv) est une conséquence du lien qui existe entre $K'(u,v)$ et $K(u,v)$.

En effet, Etant donné $z_1 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $z_2 \in D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, la dérivée au sens de Gâteaux de $K(u,v)$ est

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{K(u+tz_1, v+tz_2) - K(u,v)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{a(x)\left[|u+tz_1|^p - |u|^p\right]}{t}dx + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{b(x)\left[|v+tz_2|^q - |v|^q\right]}{t}dx$$

La fonction $t \in \mathbb{R} \to (|u+tz_1|^p)$ est de classe C^1 et sa dérivée au point t vaut

$$pz_1\,(u+tz_1)\,|u+tz_1|^{p-2}.$$

Car, les applications

$$t \to u + tz_1 \quad \text{et} \quad y \to |y|^p$$

sont de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$(|y|^p)' = p\;signe(y)\,|y|^{p-1} = py\,|y|^{p-2}.$$

D'après le théorème des accroissements finis sur $[0,t]$ pour $0 < t < 1$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$|u+tz_1|^p - |u|^p = tpz_1\,(u+\theta tz_1)\,|u+\theta tz_1|^{p-2}$$

On a donc

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|u+tz_1|^p - |u|^p}{t} = pz_1 u\,|u|^{p-2},$$

autrement dit

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{a(x)\left[|u+tz_1|^p - |u|^p\right]}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x) z_1 u\,|u|^{p-2}\,dx. \tag{2.18}$$

Et de la même façon pour

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|v+tz_2|^q - |v|^q}{t} = qz_2 v\,|v|^{q-2}\,,$$

autrement dit

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{b(x)\,[|v+tz_2|^q - |v|^q]}{t}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)z_2 v\,|v|^{q-2}\,dx \tag{2.19}$$

En combinant (2.18) et (2.19) on obtient

$$K'(u,v)(z_1,z_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)z_1 u\,|u|^{p-2}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)z_2 v\,|v|^{q-2}\,dx,$$

autrement dit

$$K'(u,v)(\frac{u}{p},\frac{v}{q}) = K(u,v).$$

D'où si $K'(u,v)=0$ alors $(u,v)=0$; par définition de $K(u,v)$.

En conséquence, d'après Berger, il existe un couple de solution $(u_{\lambda_1}, v_{\lambda_1})$ tel que

$$\lambda_1 = J\left(u_{\lambda_1}, v_{\lambda_1}\right) = \inf_{(u,v)\,\epsilon\,\Lambda} J(u,v).$$

■

2.4 Unicité de la valeur propre principale

Théorème 2.4.1

(i) *Si λ est une valeur propre de (S_λ) alors, il existe un couple de fonctions propres associé à λ strictement positive sur $\mathbb{R}^N$.*

(ii) *Tout couple de fonctions propres de (S_{λ_1}) est strictement positif sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve.

(i) On a $J(|u|\,,|v|) = J(u,v)$ et $K(|u|\,,|v|) = K(u,v)$

Si (u_λ, v_λ) vérifie l'équation

$$\frac{1}{p}\,\|u_\lambda\|_{1,p}^p + \frac{1}{q}\,\|v_\lambda\|_{1,q}^q = \lambda\left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|u_\lambda|^p\,dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\,|v_\lambda|^q\,dx\right]$$

alors $(|u_\lambda|\,,|v_\lambda|)$ vérifie aussi l'équation donc on peut considérer que $u_\lambda \geq 0, v_\lambda \geq 0$.

Par conséquent on a :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\lambda = \lambda a\ (x)\ \left|u_\lambda\right|^{p-2}\ u_\lambda \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v_\lambda = \lambda b\ (x)\ \left|v_\lambda\right|^{q-2}\ v_\lambda \ \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

il en découle alors que

$$\Delta_p u_\lambda \leq |\lambda| \, \|a\|_\infty \ \ |u_\lambda|^{p-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \tag{2.20}$$

et

$$\Delta_q v_\lambda \leq |\lambda| \, \|b\|_\infty \ \ |v_\lambda|^{q-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \tag{2.21}$$

En utilisant le principe du maximum fort de vásquez appliqué aux inéquations (2.20) et (2.21) , on obtient :

$$(u_\lambda > 0\ ) \quad \text{et} \ \ (v_\lambda > 0\ )\,.$$

(ii) Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions propres de (S_{λ_1}), soit $(\Phi_+, \Psi_+) \geq 0$ (respectivement $(\Phi_-, \Psi_-) \leq 0$) la partie positive (respectivement négative) de (Φ, Ψ) . Autrement dit.

$$(\Phi, \Psi) = (\Phi_+, \Psi_+) + (\Phi_-, \Psi_-)$$

alors

$$\Phi_+, \Phi_- \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ ; \ \Psi_+, \Psi_- \in D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \quad .$$

De plus,

$$J(\Phi, \Psi) = J(\Phi_+, \Psi_+) + J(\Phi_-, \Psi_-) \quad \text{ et } \quad K(\Phi, \Psi) = K(\Phi_+, \Psi_+) + K(\Phi_-, \Psi_-)$$

Il est facile de voir que

$$\max\left\{\frac{K(\Phi_+, \Psi_+)}{J(\Phi_+, \Psi_+)}, \frac{K(\Phi_-, \Psi_-)}{J(\Phi_-, \Psi_-)}\right\} \geq \frac{K(\Phi, \Psi)}{J(\Phi, \Psi)} = \frac{1}{\lambda_1}$$

On suppose de manière arbitraire que $\dfrac{K(\Phi_+, \Psi_+)}{J(\Phi_+, \Psi_+)}$ est le maximum alors

$$\lambda_1 K(\Phi_+, \Psi_+) \geq J(\Phi_+, \Psi_+)$$

Posons

$$(h_+, k_+) = \left(\frac{\Phi_+}{\mu}, \frac{\Psi_+}{\nu}\right) \ \text{ tel que } \mu = \left[K(\Phi_+, \Psi_+)\right]^{\frac{1}{p}}, \nu = \left[K(\Phi_+, \Psi_+)\right]^{\frac{1}{q}}$$

On a

$$K(h_+, k_+) = 1$$

et

$$J(h_+, k_+) = \frac{1}{p} \|h_+\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|k_+\|_{1,q}^q$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h_+|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla k_+|^q \, dx \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla \Phi_+|^p}{\mu^p} dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla \Psi_+|^q}{\nu^q} dx \\
&= \frac{1}{K(\Phi_+, \Psi_+)} \left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_+|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_+|^q \, dx \right] \\
&= \frac{J(\Phi_+, \Psi_+)}{K(\Phi_+, \Psi_+)} \leq \lambda_1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_1 K(h_+, k_+) \geq J(h_+, k_+)$$

(h_+, k_+) est un vecteur propre pour λ_1 et on a :

$$\begin{aligned}
-\Delta_p h_+ &= \lambda_1 a\ (x)\ |h_+|^{p-2}\ h_+ \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\
-\Delta_q k_+ &= \lambda_1 b\ (x)\ |k_+|^{q-2}\ k_+ \ \text{ dans } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\Delta_p h_+ \leq |\lambda_1| \, \|a\|_\infty \ |h_+|^{p-1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \tag{2.22}$$

$$\Delta_q k_+ \leq |\lambda_1| \, \|b\|_\infty \, |k_+|^{q-1} \ \text{ dans } \mathbb{R}^N. \tag{2.23}$$

Puisque $(h_+, k_+) \geq 0$, le principe du maximum de Vásquez appliqué aux inéquations (2.22) et (2.23) entraîne

$$(h_+, k_+) > 0 \ \text{ par conséquent } \ (h_-, k_-) = 0$$

Et finalement

$$(\Phi_-, \Psi_-) = 0 \text{ ainsi } (\Phi, \Psi) > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

■

2.4. Unicité de la valeur propre principale

Théorème 2.4.2

La valeur λ_1 est l'unique valeur propre réelle de (S_λ).

Preuve.

Soient (u,v) une solution propre positive associé à λ et (Φ,Ψ) une solution propre associé à λ_1.

D'après la définition de λ_1, il est claire que $\lambda_1 \leq \lambda$

On applique le théorème 2.2.1 aux couples (Φ,u) et (Ψ,v)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\triangledown\Phi|^p \, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}\right) |\Phi|^p \, dx, \tag{2.24}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\triangledown\Psi|^q \, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}\right) |\Psi|^q \, dx. \tag{2.25}$$

D'une part d'après la définition de (Φ,Ψ) on a :

$$\frac{1}{p}\|\Phi\|_{1,p}^p + \frac{1}{q}\|\Psi\|_{1,q}^q = \lambda_1 \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|\Phi|^p \, dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\,|\Psi|^q \, dx\right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|\Phi|^p \, dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\,|\Psi|^q \, dx\right] \\
&\leq \lambda \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{|\Phi|^p}{u^{p-1}} u^{p-1} dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{|\Psi|^q}{v^{q-1}} v^{q-1} dx\right] \\
&\leq \lambda \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{|\Phi|^p}{u^{p-1}} u^{p-2} u dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{|\Psi|^q}{v^{q-1}} v^{q-2} v dx\right] \\
&\leq \lambda \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\frac{|\Phi|^p}{u^{p-1}} |u|^{p-2} u dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{|\Psi|^q}{v^{q-1}} |v|^{q-2} v dx\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}\right) |\Phi|^p \, dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}\right) |\Psi|^q \, dx\right]. \tag{2.26}$$

D'autre part, tenant compte de (2.24) et (2.25) on a

$$\frac{1}{p}\|\Phi\|_{1,p}^p + \frac{1}{q}\|\Psi\|_{1,q}^q = \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\triangledown\Phi|^p \, dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\triangledown\Psi|^q \, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\Phi|^p\,dx+\frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\Psi|^q\,dx. \tag{2.27}$$

Par combinaison de (2.26) et (2.27) , il s'en suit

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\triangledown\Phi|^p\,dx+\frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\triangledown\Psi|^q\,dx=\frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\Phi|^p\,dx+\frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\Psi|^q\,dx$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\triangledown\Phi|^p\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\Phi|^p\,dx\\ \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\triangledown\Psi|^q\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\Psi|^q\,dx.\end{cases}$$

En appliquant encore une fois le théorème 2.2.1, on conclut l'existence de deux constantes C et $\widehat{C}$ telles que $u=C\Phi$ et $v=\widehat{C}\Psi$.

Prenant (Φ,Ψ) solution de (S_{λ_1}) et (u,v) une solution positive de (S_λ) c'est à dire $u=C\Phi$ et $v=\widehat{C}\Psi$ donc on peut écrire :

$$(S_\lambda)\quad\begin{cases}-\Delta_p u=\lambda a\,(x)\ |u|^{p-2}\ u\ \text{ dans }\mathbb{R}^N\\ -\Delta_q v=\lambda b\,(x)\ |v|^{q-2}\ v\ \text{ dans }\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\left(|C|^{p-2}C\right)\Delta_p\Phi=\lambda a\,(x)\ |C|^{p-2}\ C\ \ |\Phi|^{p-2}\ \Phi\text{ dans }\mathbb{R}^N\\ -\left(\left|\widehat{C}\right|^{q-2}\widehat{C}\right)\Delta_q\Psi=\lambda b\,(x)\ \left|\widehat{C}\right|^{q-2}\widehat{C}\ \ |\Psi|^{p-2}\ \Psi\ \text{ dans }\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\Delta_p\Phi=\lambda a\,(x)\ |\Phi|^{p-2}\ \Phi=\lambda_1 a\,(x)\ |\Phi|^{p-2}\ \Phi\ \text{ dans }\mathbb{R}^N\\ -\Delta_q\Psi=\lambda b\,(x)\ |\Psi|^{q-2}\ \Psi=\lambda_1 b\,(x)\ |\Psi|^{q-2}\ \Psi\ \text{ dans }\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda=\lambda_1$$

■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés à l'existence et l'unicité de la première valeur propre d'un système elliptique quasilinéaire défini sur $\mathbb{R}^N$.
Nous avons montrer que cette première valeur propre est principale et unique.
La question de la simplicité reste toujours posée.
Dans l'avenir nous essayerons de répondre à cette question et nous étendrons notre étude à des systèmes non linéaires où les non linéarités vérifient des conditions de croissances c'est à dire des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x,u,v) \\ -\Delta_q v = \mu g(x,u,v) \end{cases}$$

Il s'agit de montrer l'existence d'un couple $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ associé à une solution propre $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ qui garde un signe constant.

Bibliographie

[1] **W. Allegretto Y. X. Huang**. Eigenvalues of the indefinite-weight p-Laplacian in weighted $\mathbb{R}^N$ spaces. *Funkc. Ekvac*, 38 :233-242, 1995.

[2] **W. Allegretto Y. X. Huang.** A Picone's identity for the p-Laplician and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appilacations*, 32(7) : $819-830, 1998$.

[3] **A Anane.** Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* Math. I(305) : $725-728, 1987$.

[4] **A Anane J.P. Gossez.** Strongly nonlinear elliptic problems near resonance : a variational approach. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(8) : 1141-1159, 1990.

[5] **G. Barles**. Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p-Laplacian. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 9(1) : 65-75, 1988.

[6] **A. Bechah**. Nontrivial positive solutions for systems with the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ involing critical exponents. *Rostock. Math. Kolloq.*, 55 :73-88, 2001.

[7] **A. Bechah.** Positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system in $\mathbb{R}^N$. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís.* Nat., 94(1) : 1-7, 2000.

[8] **M. S. Berger**. *Nonlinearity and Functional Analysis.* Academic Press,New-York, 1977.

[9] **M.F. Bidaut-Véron**. Local behavior of the solutions of a class of nonlinear elliptic systems. *Adv. Differential Equations*, 5(1-3) : 147-192, 2000.

[10] **H. Brézis**. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[11] **H. Brézis L. Oswald**. Remarks on sublinear elliptic equation. *Nonlinear Anal. TMA*, 10(1) :55-64, 1986.

[12] **K.J. Brown C. Cosner J. Fleckinger**. Principal eigenvalues for problems with indefinite weight function on $\mathbb{R}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1) :147-155, 1990.

[13] **J. Chabrowski**. On multiple solutions for nonhomogeneous system of elliptic equation. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 9(1) : 207-234, 1996.

[14] **K. Chaïb A. Bechah** and **F. Thélin**. Existance and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. *Revista de Matemáticas aplicadas*,21(1-2) : 1-18, 2000.

[15] **K. Chaïb.** Extension of Díaz-Saá's inequality in $\mathbb{R}^N$ and application to system of p-Laplacian. *Publ. Mat.* 46 (2002), 473-488.

[16] **Ph. Clément J. Fleckinger R.F. Manásevich F. de Thélin**. Existence of positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system. *J. Differential Equations*, 166(2) : 455-477, 2000.

[17] **Ph. Clément R.F. Manásevich E. Mitidieri**. Positive solutions for a quasilinear system via blow up. *Comm. Partial Differential equations*, 18(12) : 2071-2106, 1993.

[18] **Ph. Clément L. Peletier.** An antimaximum principle for second order elliptic operators. *J. Differential Equations*, 34 : 218-229, 1979.

[19] **A. Djellit S. Tas**. Existence of solutions for a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involing the p-Laplacian, *Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No. 56, pp. 1-8.*

[20] **J. I.Díaz J. E. Saa**. Existence et unicité de solutions positives pour certaines equations elliptiques quasilinéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* Math. I(305) :521-524, 1987.

[21] **P.Drábek**. Nonlinear eigenvalue problem for p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$. *Math. Nachr.*, 173 : 131-139, 1995.

[22] **P.Drábek Y.X. Huang.** Bifurcation problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1) : 171-188, 1997.

[23] **P.Drábek R.F. Manásevich M.A. del Pino.** The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one-dimentional p-Laplacian. *J. Differential Equations*, 151(2) :386-419, 1999.

[24] **I.Ekeland R. Temam**. Analyse convexe et problèmes variationnels, *Dunod, Gauthier-Villards, Paris, 1974.*

[25] **P. Felmer R.F. Manásevich F de Thélin**. Existence and uniqueness of positive solutions for certain quasilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(11-12) : 2013-2029, 1992.

[26] **J. Fleckinger R. F. Manásevich N. M. Stavrakakis F. de Thélin**. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$.*Adv. Differential Equations*,2(6) :981-1003, 1997.

[27] **J. Fleckinger J. Hernández P. Takác F. de Thélin**. Uniqueness and positivity for solutions of equations with the p-laplacian. In E. Mitidieri G. Caristi, editor, *Reaction diffusion systems* (*Trieste* 1995), number 194 in Lectures Notes in Pure and Appl. Mah., pages 141-155, 1998.

[28] **J. Fleckinger P. Takàč**. Maximum and antimaximum principles for some elliptic problems. *Advances in differential equations and mathematical phisics*, 217 : 19-32, 1998.

[29] **D. Gilbarg N. S. Trudinger**. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.

[30] **T.Godoy J.P. Gossez S. Paczka**. On the antimaximum principle for the p-Laplacian with indefinite weight. *.Nonlinear Analysis Volume 51, Issue 3, November 2002, Pages* 449-467*.*

[31] **Y.X. Huang**. Eigenvalues of the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with indefinite weight. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 36(3) :519-527, 1995.

[32] **P. Lindqvist**. On the equation $\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+\lambda\,|u|^{p-2}\,u=0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1) : 157-164, 1990.

[33] **R.F. Manásevich M.A. del Pino**. Global bifurcation from the eigenvaleus of the p-Laplacian. *J. Differential Equations*, 92(2) : 226-251, 1991.

[34] **W.M. Ni J. Serrin**. Existence and nonexistence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations of the anomamous case. *Acad. Naz. Lincei*, 77 : 231-287, 1986.

[35] **M. Ôtani**. On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type ineqalities. *Nonlinear Anal.*, 8(11) : 1255-1270, 1984.

[36] **M. Ôtani.** Existence and nonexistence of nontrivial solution of some nonlinear degenerate elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 76(1) : 140-159, 1988.

[37] **M.C. Pélissier**. Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie. Thése de doctorat de l'Université Paris XI. *Publication mathématiques d'Orsay*, 1975.

[38] **S. Sakaguchi**. Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 14(4) : 403-421, 1987.

[39] **J. Serrin**. Local behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Mathematica*, 111 :247-302, 1964.

[40] **N.M. Stavrakakis F. de Thélin**. Principal eigenvalues and antimaximum principle for some quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$. *Math. Nachr.*, 212 : 155-171, 2000.

[41] **F. de Thélin.** Quelques résultats d'existence et de non existence pour une EDP elliptique nonlinéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 229 Série I, 18 : 839-844, 1984.

[42] **F. de Thélin**. Résultats d'existence et de non existence pour la solution positive et bornée d'une EDP. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 3 : 375-389, 1987.

[43] **F. de Thélin**. Première valeur propre d'un système elliptique non linéaire. *Rev. Math. Apli.*, 13 (1) :1-8, 1992.

[44] **F. de Thélin J. Vélin.** Existence and nonexistence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic systems. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 6(1) : 153-194, 1993.

[45] **P. Tolksdorf**. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations.*, 51(1) : 126-150, 1984.

[46] **J.L Vásquez**. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3) : 191-202, 1984.