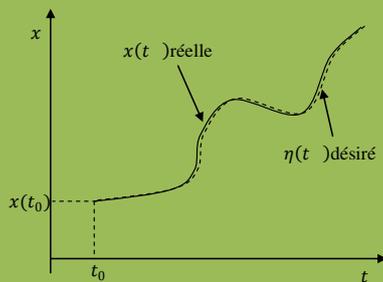




$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$



COMMANDE AVANCEE

POLYCOPIE DE COURS

$$J = \int_{t_0}^T u^2 dt$$

Réalisé par :

Dr ABDENNOUR SEBBAGH
Dr SIHEM KECHIDA
Dr MOHAMMED AIDOUD

2019

Table des Matières

Avant-propos	iii
Introduction	01
Chapitre I : Calcul Variationnel	03
I.1. Introduction.....	03
I.2. Extrémum d'une fonctionnelle.....	03
I.3. Equation d'Euler.....	04
I.4. Problème avec variation générale.....	05
I.5. Condition d'Evolman-Weierstrass (existence de discontinuité).....	07
I.6. Problème avec contrainte égalité.....	08
Chapitre II. Principe de Minimum	10
II.1. Introduction.....	10
II.2. Critère d'optimisation.....	10
II.2.1. Commande en temps minimal.....	11
II.2.2. Commande avec erreur terminale minimale.....	11
II.2.3. Suivre d'une trajectoire imposée $\eta(t)$ (problème de poursuite).....	12
II.2.4. Optimisation d'un régulateur.....	12
II.3. Condition d'optimalité.....	13
II.3.1. Equation d'Hamilton –Pontriaguine.....	13
II.3.2. Condition d'Evolman-Weierstrass.....	15
II.3.3. Principe de Minimum de Pontriaguine.....	15
II.4. Cas de contraintes de type inégalité.....	15
II.4.1. Principe de minimum de Pontriaguine.....	15
Chapitre III. Commande linéaire quadratique (LQ)	16
III.1. Introduction.....	16
III.2. Commande linéaire quadratique en temps continu.....	16

III.2.1. Cas de l'horizon fini.....	16
III.2.1.1 Méthode de résolution de l'équation de Riccati.....	18
III.2.2. Cas de l'horizon infini.....	21
III.3. Commande linéaire quadratique en temps discret.....	21
III.3.1. Cas de l'horizon fini.....	21
III.3.2. Cas de l'horizon infini.....	22
Chapitre IV. Commande Linéaire Gaussienne (LQG)	24
IV.1. Introduction.....	24
IV.2. Formulation du problème et principe de séparation	24
IV.3. Filtre de Kalman et commande stochastique.....	25
IV.3.1. Cas continu.....	27
IV.3.2. Cas discret.....	29
IV.4. Commande linéaire quadratique gaussien (LQG).....	29
Chapitre V : Commande Adaptative.....	31
V.1. Généralité sur la commande adaptative.....	31
V.2. Classification des approches de commande adaptative.....	31
V.2.1. Commande adaptative directe (Direct adaptive control).....	31
V.2.2. Commande adaptative indirecte (Indirect adaptive control).....	32
V.3. Commande Adaptative à modèle de référence (MRAC).....	33
V.3.1. Synthèse de MRAC par l'approche de gradient (MIT).....	34
V.3.2. Synthèse de MRAC par l'approche de la théorie de stabilité de Lyapunov.....	38
V.4. Commande adaptative à régulateur auto-ajustable	40
V.4.1. Approche Directe (Implicite).....	42
V.4.2. Approche Indirecte (Explicite).....	42
Bibliographie.....	44

Préface

Ce support de cours s'adresse en priorité aux étudiants de masters en Automatique et Informatique Industrielle (M2AII) concernés par l'étude de la commande avancée, il pourra également être utile aux étudiants de masters en Automatique et Système et de masters en Electromécanique et peut aussi constituer une aide très précieuse aux doctorants désirants compléter leurs connaissances dans le domaine de la commande des systèmes.

Cette polycopie s'articule autour de cinq chapitres :

- Le premier est dédié au problème de l'optimisation des fonctions dépendantes d'une ou plusieurs variables réelles suivi
- D'un chapitre sur le principe de minimum qui traite le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un système.
- Le troisième est consacré à la commande linéaire quadratique des systèmes dans le cas continu et le cas discret.
- En chapitre quatre les auteurs mettent en relief l'utilisation de la commande optimale stochastique.
- Le dernier chapitre aborde la commande adaptative et ses approches.

Introduction

Qu'est-ce que la théorie de contrôle ? La théorie de contrôle permet d'analyser les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard...etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologie, chimie, économie...

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'application sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, transport, etc.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison, la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation.

Un système de contrôle est dit « contrôlable » si on peut l'amener en temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, définie par le critère de Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère; on parle alors d'un problème de commande optimale. En mathématiques, la théorie de commande optimale s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue, après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la

dynamique du vol. Historiquement, la théorie de commande optimale est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, de Huygens, équations d'Euler-Lagrange). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguine, formulé par L. S. Pontriaguine en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales (voir [1] pour l'histoire de cette découverte). Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des systèmes optimaux, la découverte des liens entre les solutions d'un problème de commande optimale et des résultats de la théorie de stabilité de Lyapunov. Plus tard sont apparues les fondations de la théorie de commande stochastique et du filtrage de systèmes dynamiques, la théorie des jeux, le contrôle d'équations aux dérivées partielles.

Commande optimale moderne et applications : On considère que la théorie moderne de commande optimale a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontriaguine, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches à savoir : système de freinage ABS, assistance à la conduite, servomoteurs, thermostats, régulation hygrométrique, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, boursiers, fluviaux, barrages EDF, photographie numérique, filtrage et reconstruction d'images, lecteurs CD et DVD, réseaux informatiques, moteurs de recherche sur internet, circuits électriques, électroniques, télécommunications en général, contrôle des procédés chimiques, raffinage pétrolier, chaînes industrielles de montage, peacemakers et autres systèmes médicaux automatisés, opérations au laser, robotique, satellites, guidages aérospatiaux, bioréacteurs, distillation, ... La liste est infinie, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Chapitre I

Calcul Variationnel

I.1 Introduction

Dès que vous avez vu les bases de l'analyse, vous avez appris à répondre à la question suivante : comment trouver le point x pour lequel la fonction $f(x)$ est maximum (ou minimum) ? f est une machine qui prend un nombre en entrée et produit un nombre en sortie. La question ci-dessus en réalité est celle de trouver un extremum local : un point qui produit la sortie la plus grande (ou la plus petite) que tous ses voisins immédiats.

I.2. Extrémum d'une fonctionnelle

Définition : Soit E l'espace des fonctions de la variable de temps t

$$t \in \mathcal{R} \rightarrow x(t) \in E$$

La fonctionnelle définie, pour la trajectoire $x(t)$, est notée par $J(x(t))$.

$$x(t) \in E \rightarrow J(x(t)) \in \mathcal{R}$$

Variation première

Soit $x = \hat{x}$ avec $\hat{x} \in E \rightarrow J(\hat{x}) \in \mathcal{R}$ une trajectoire extrémale

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) \\ &= J(\hat{x}) + \delta J(\hat{x}).h + O(h)^2 - J(\hat{x}) \\ &= \delta J(\hat{x}).h + O(h)^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

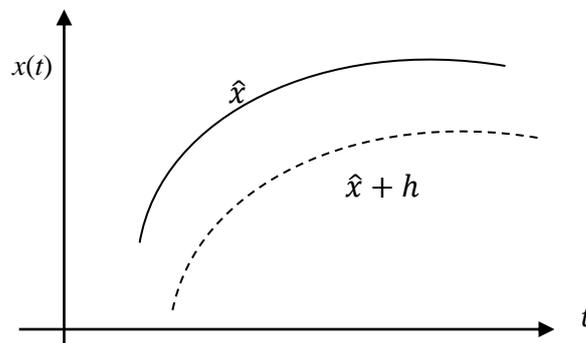


Figure 1.1. Trajectoire extrémale

$\delta J(\hat{x})$ représente la variation première de la fonctionnelle $J(\hat{x})$

Théorème : Condition nécessaire de stationnarité [2]

La condition nécessaire pour que la fonctionnelle $J(x)$ ait un extrémum pour $x = \hat{x}$ est $\delta J(\hat{x}) = 0, \forall h$ faible

I.3. Equation d'Euler

- **Problème sans Contraintes**

Objectif : déterminer une fonction continue $x(t)$, ($t \in [t_0, T]$) qui minimise

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1.2)$$

L : Fonctionnelle continument dérivable avec $x(t_0) = x_0$ et $x(T) = x_T$

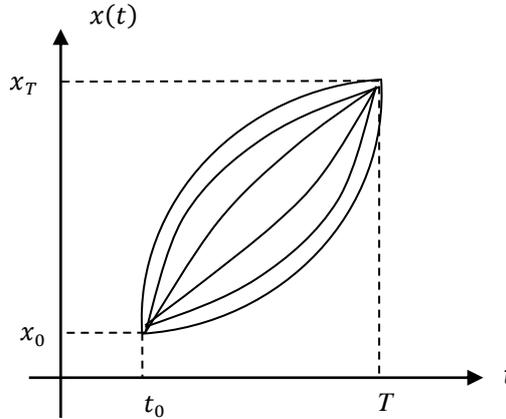


Figure 1.2. Fonction minimisante

Condition nécessaire d'extrémum (CNE)

On suppose que $x^*(t)$ est la fonction minimisante connue.

$$\Delta J = (J(x^*(t) + \delta x(t)) - J(x^*(t))) \geq 0 \quad \forall \delta x(t).$$

$\delta x(t)$ est une variation infiniment petite ou bien faible

$\delta x(t_0) = \delta x(T) = 0$, Avec : $J(x(t)) = \int_{t_0}^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$, d'où :

$$\Delta J = \int_{t_0}^T L(x^* + \delta x, \dot{x}^* + \delta \dot{x}) dt - \int_{t_0}^T L(x^*, \dot{x}^*) dt \quad (1.3)$$

Par développement en série de Taylor, on obtient :

$$\nabla J = \int_{t_0}^T \left(L(x^*, \dot{x}^*) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + O(\delta x)^2 + O(\delta \dot{x})^2 \right) dt - \int_{t_0}^T L(x^*, \dot{x}^*) dt$$

$$\nabla J = \int_{t_0}^T (L_x \delta x + L_{\dot{x}} \delta \dot{x} + O(\delta x)^2 + O(\delta \dot{x})^2) dt$$

$$\delta J = \nabla J = \int_{t_0}^T (L_x \delta x + L_{\dot{x}} \delta \dot{x}) dt = \int_{t_0}^T (L_x \delta x) dt + \int_{t_0}^T (L_{\dot{x}} \delta \dot{x}) dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\delta J = \int_{t_0}^T (L_x \delta x) dt + L_x \delta x|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \left(\frac{d}{dt} (L_{\dot{x}}) \right) \cdot \delta x dt$$

Mais $L_x \delta x|_{t_0}^T = 0$, car $\delta x(t_0) = \delta x(T) = 0$ variation infiniment petite

$$\delta J = \int_{t_0}^T \left(L_x - \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}}) \right) \delta x dt \tag{1.4}$$

Alors, la condition nécessaire d'extrémum est $\delta J = 0$, C'est-à-dire :

$$L_x - \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}}) = 0 \tag{1.5}$$

Dans le cas multivariable, cette condition devient :

$$\underline{L}_x - \underline{\dot{L}}_{\dot{x}} = 0$$

Ou bien :

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right) = 0$$

I.4. Problème avec variation générale

Objectif : Déterminer l'extrémum de la fonctionnelle

$$J(\underline{x}(t)) = \int_{t_0}^T L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) dt$$

Avec $(t_0, T, x(t_0), x(T))$ ne sont pas spécifiées

pour t fixe $\delta x(t) = h(t)$

$$\delta x(T) = h(T) + y$$

$$= h(T) + \tan(\alpha) \cdot \delta T$$

$$= h(T) + \dot{x}(T) \cdot \delta(T)$$

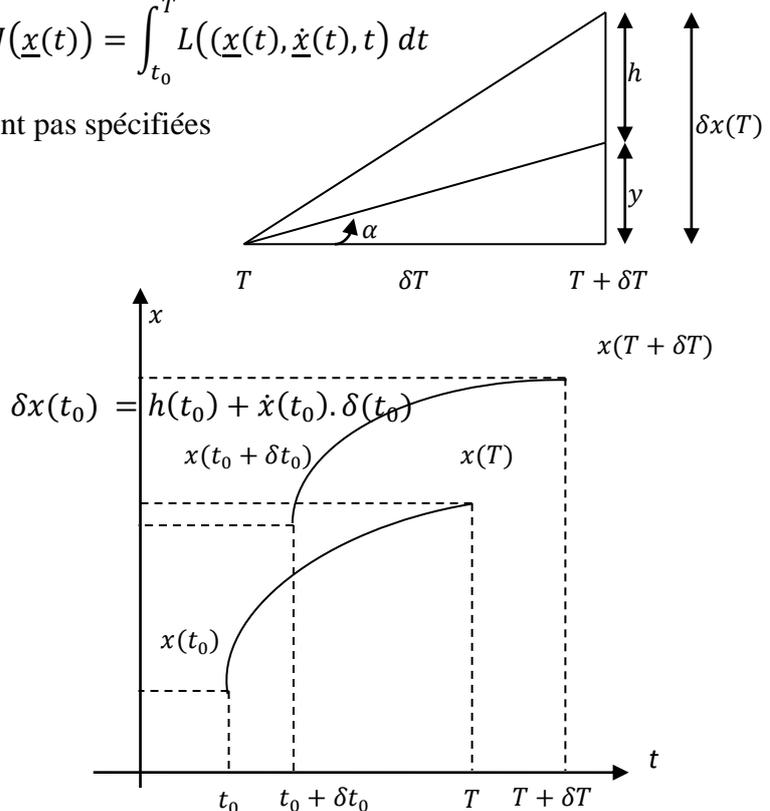


Figure 1.3. Extrémum d'une fonctionnelle

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0+\delta t_0}^{T+\delta T} L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt - \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt & (1.6) \\
\Delta J &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0} L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt + \int_{t_0}^T L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt \\
&\quad + \int_T^{T+\delta T} L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt - \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt \\
\Delta J &= - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt + \int_{t_0}^T L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt \\
&\quad + \int_T^{T+\delta T} L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt - \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt \\
\Delta J &= -L(\underline{x}(t_0), \underline{\dot{x}}(t_0), t_0) \delta t_0 + L(\underline{x}(T), \underline{\dot{x}}(T), T) \delta T \\
&\quad + \int_{t_0}^T L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt - \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt \\
\Delta J &= L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) \delta t \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T L(\underline{x} + \underline{h}, \underline{\dot{x}} + \underline{\dot{h}}, t) dt - \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt \\
\Delta J &= L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) \delta t \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{h} + \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{\dot{h}} + O(h)^2 + O(\dot{h})^2 \right] dt \\
\delta J &= L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) \delta t \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{h} dt + \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{\dot{h}} dt
\end{aligned}$$

On cherche :

$$\int_{t_0}^T \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{\dot{h}} dt$$

En utilisant l'intégration par partie comme suit :

On pose :

$$\begin{aligned}
U &= \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \Rightarrow dU = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T dt \quad \text{et} \quad dV = \underline{\dot{h}} \Rightarrow V = \underline{h} \\
\int_{t_0}^T \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{\dot{h}} dt &= \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{h} \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{h} dt \\
\delta J &= L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) \delta t \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \right)^T \cdot \underline{h} dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{h} \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} \right)^T \cdot \underline{h} dt
\end{aligned}$$

$$\delta x(T) = h(T) + \dot{x}(T) \cdot \delta T$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \cdot \underline{h} \Big|_{t_0}^T &= \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \cdot h(T) - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \cdot h(t_0) \\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T (\delta x(T) - \dot{x}(T) \cdot \delta T) - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T (\delta x(t_0) - \dot{x}(t_0) \cdot \delta t_0) \\
\delta J &= \int_{t_0}^T \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}}\right)^T - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \right) \cdot h \, dt + L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) \delta t \Big|_{t_0}^T \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T (\delta \underline{x}(t) - \dot{x}(t) \cdot \delta t) \Big|_{t_0}^T \\
\delta J &= \int_{t_0}^T \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}}\right)^T - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \right) \cdot h \, dt + \left(L(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \underline{\dot{x}}(t) \right) \delta t \Big|_{t_0}^T \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \delta \underline{x}(t) \Big|_{t_0}^T \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Donc

$$\delta J = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}}\right)^T - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \right) = 0 \dots \dots \dots \text{CNE} \quad (1.8)$$

$$\left(L - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \cdot \underline{\dot{x}} \right) \delta t = 0 \quad \text{en } t_0 \text{ et } T \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}\right)^T \delta \underline{x} = 0 \quad \text{en } t_0 \text{ et } T \quad (1.10)$$

Les équations (1.8) et (1.9) déterminent la solution extrémale pour toute combinaison du quadruplet $\{t_0, T, \underline{x}(t_0), \underline{x}(T)\}$.

I.5. Condition d'Evolman-Weierstrass (existence de discontinuité)

On considère la fonctionnelle

$$J = \int_{t_0}^T L(x, \dot{x}, t) dt$$

Soit les trajectoires admissibles possédant les points de cassures (coins), comportant un nombre fini de points où les dérivées ne sont pas continués.

Objectif : Trouver la solution (trajectoire) extrémale parmi les trajectoires admissibles ayant un point de cassure.

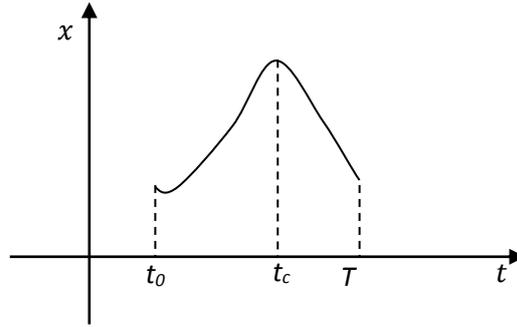


Figure 1.4. Point de cassure

Condition nécessaire d'extrémum (CNE) $\Leftrightarrow \delta J = 0$

$$J = \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt = \int_{t_0}^{t_c} L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt + \int_{t_c}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt \quad (1.11)$$

$$J = J_1 + J_2 \Rightarrow \delta J = \delta J_1 + \delta J_2$$

$$\delta J = 0 \Leftrightarrow \delta J_1 = 0 \text{ et } \delta J_2 = 0$$

$$\delta J_1 = \left[\left(\underline{L} - (\underline{L}_{\dot{x}})^T \cdot \dot{x} \right) \delta t + (\underline{L}_{\dot{x}})^T \cdot \delta x \right]_{t_0}^{t_c} + \int_{t_0}^{t_c} \left(\underline{L}_x - \frac{d}{dt} \underline{L}_{\dot{x}} \right) dt$$

$$\delta J_2 = \left[\left(\underline{L} - (\underline{L}_{\dot{x}})^T \cdot \dot{x} \right) \delta t + (\underline{L}_{\dot{x}})^T \cdot \delta x \right]_{t_c}^T + \int_{t_c}^T \left(\underline{L}_x - \frac{d}{dt} \underline{L}_{\dot{x}} \right) dt$$

CNE :

$$\left(\underline{L}_x - \frac{d}{dt} \underline{L}_{\dot{x}} \right) = 0 \text{ pour } t \in [t_0, T]$$

et les fonctions $H = \left(\underline{L} - (\underline{L}_{\dot{x}})^T \cdot \dot{x} \right)$ et $\lambda = \underline{L}_{\dot{x}}$ doivent être continues en tous points de cassures de la trajectoire extrémale.

Condition de Weierstrass

La condition nécessaire d'extrémum est définie par l'équation d'Euler- Lagrange.

La condition nécessaire pour que la solution extrémale $x(t)$ soit minimisante pour la fonctionnelle J est :

$$\underline{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0 \quad (1.12)$$

I.6. Problème avec contrainte égalité

Objectif : trouver l'extrémum de la fonctionnelle :

$$J = \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt, \quad \underline{x} \in \mathcal{R}^n$$

Avec des contraintes égalités $g(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) = 0$ pour $t \in [t_0, T]$, $\dim(g) = m \leq n$

$$\bar{J} = \int_{t_0}^T [L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) + \lambda^T g(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)] dt = \int_{t_0}^T \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) dt$$

Sachant que , $\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) = L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) + \lambda^T g(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)$

CNE est $\delta \bar{J} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\left(\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{\dot{x}}) \right) = 0 \quad \rightarrow \text{équation d'Euler}$$

$$\left[\left(\mathcal{L} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)^T \cdot \underline{\dot{x}} \right) \delta t + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)^T \delta x \right]_{t_0}^T = 0 \quad \rightarrow \text{condition de transversalité}$$

Chapitre II

Principe de Minimum

II.1. Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un système se résume comme suit :

Un système étant donné est défini par son modèle, l'objectif est de trouver, parmi les commandes admissibles, celle qui permet à la fois :

- d'optimiser un critère donné ;
- de vérifier des conditions initiales et finales ;
- de satisfaire des contraintes imposées.

II.2. Critère d'optimisation

Le problème de la commande optimale revient à trouver le signal de commande $u(t)$ admissible, capable de conduire le système vers l'état désiré tout en minimisant un critère qui représente une fonction coût.

L'objectif est de faire passer le système vers un état final imposé en minimisant le coût énergétique donné par ;

$$\begin{aligned} MIMO^1 \quad J &= \int_{t_0}^T U^T U dt \\ SISO^2 \quad J &= \int_{t_0}^T u^2 dt \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'élaboration de la commande $u(t)$ nécessite une dépense d'énergie,

Avec l'instant initiale t_0 , l'état initial $x(t_0)$, l'instant final T et l'état final $x(T)$ sont imposés.

¹MIMO : système multivariable (en anglais : Multi Input Multi Output)

²SISO : système monovariable (en anglais : Single Input Single Output)

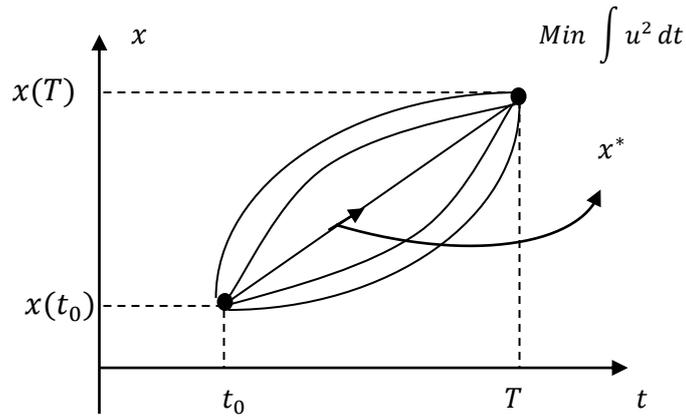


Figure 2.1. Commande optimale

II.2.1. Commande en temps minimal

L'objectif est d'atteindre l'état final en un temps minimal en partant de l'état initial donné

$$J = \int_{t_0}^T dt \tag{2.2}$$

L'instant initial et l'état final sont imposés, l'instant final T est à déterminer.

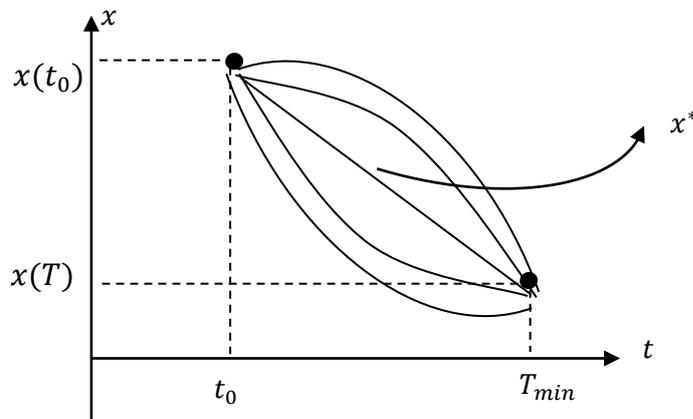


Figure 2.2. Commande en temps minimal

II.2.2. Commande avec erreur terminale minimale

Le problème consiste à amener le système à un état proche d'un état désiré x_d . Sachant que le critère est imposé par la forme ci-dessous :

$$J = \int_{t_0}^T [x(T) - x_d]^T [x(T) - x_d] dt \tag{2.3}$$

Avec t_0 et $x(t_0)$ sont fixes, $x(T)$ est indéterminé et l'instant final T peut être imposé ou libre, voir la figure ci-dessous.

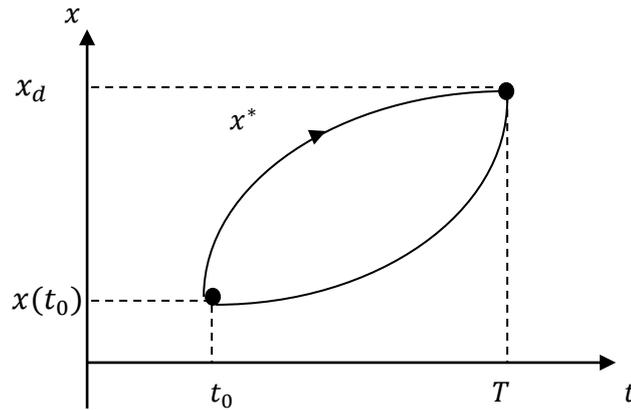


Figure 2.3. Commande avec erreur terminale

II.2.3. Suivre d'une trajectoire imposée $\eta(t)$ (problème de poursuite)

$$J = \int_{t_0}^T [x(t) - \eta(t)]^T [x(t) - \eta(t)] dt \tag{2.4}$$

t_0 et $x(t_0)$ sont fixes

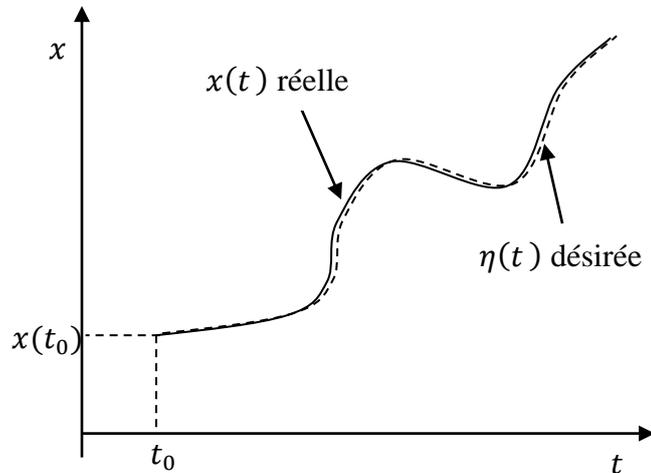


Figure 2.4. Suivre de trajectoire

II.2.4. Optimisation d'un régulateur

Toutes les formes quadratiques qu'on a vu précédemment peuvent être groupées en un seul critère comme suit:

$$J = \frac{1}{2} [x(T) - \eta(T)]^T F [x(T) - \eta(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x(t) - \eta(t)]^T Q [x(t) - \eta(t)] + u^T R u dt \tag{2.5}$$

Avec F, Q et R des matrices réelles symétriques, R définie positive, F et Q semi définies positives. La forme générale de (2.5) peut être exprimée comme suit :

$$J = G(\underline{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\underline{x}, \underline{u}, t) dt.$$

Avec $G(\underline{x}(T), T)$ représente le coût final à $t = T$.

II.3. Condition d'optimalité

II.3.1. Equation d'Hamilton –Pontriaguine

L'objectif est de trouver la commande $u(t)$ qui minimise le critère de performance de Pontriaguine [3, 4]

$$J = G(\underline{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt \quad (2.6)$$

Avec T fixe.

Compte tenu des contraintes égalités différentielles

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (2.7)$$

et la condition initiale $\underline{x}(t_0) = x_0$ et supposant que les fonctions minimisantes $u^*(t)$ et $x^*(t)$ sont connues et liées par l'équation (2.7).

Pour des variations infiniment petites $\delta \underline{u}(t)$ et $\delta \underline{x}(t)$, on a :

$$\Delta J = J(\underline{u}^* + \delta u) - J(\underline{u}^*) \geq 0 \quad \forall \delta \underline{u}(t) \text{ et } \delta \underline{x}(t) \quad (2.8)$$

En tenant compte des contraintes égalités de l'équation (2.7), on obtient :

$$J = G(\underline{x}(T), T) + \int_{t_0}^T [L(\underline{x}, \underline{u}, t) + \lambda^T(t)(f(\underline{x}, \underline{u}) - \dot{\underline{x}})] dt \quad (2.9)$$

Soit : $H(\underline{x}, \underline{u}, t) = L + \underline{\lambda}^T f$ l'Hamiltonien

De l'équation (2.7) et (2.9), on obtient:

$$J = G(\underline{x}(T), T) + \int_{t_0}^T (H - \lambda^T \dot{\underline{x}}) dt \quad (2.10)$$

Alors :

$$\delta J = \delta G(\underline{x}(T), T) + \delta \int_{t_0}^T (H - \lambda^T \dot{\underline{x}}) dt = 0 \quad (2.11)$$

avec : $\delta G(\underline{x}(T), T) = \frac{\partial G^T}{\partial \underline{x}(T)} \cdot \delta \underline{x}(T) + \frac{\partial G}{\partial T} \cdot \delta T$

et $\delta(H - \lambda^T \dot{\underline{x}}) = \delta H - \lambda^T \delta \dot{\underline{x}} = H^T_{\underline{x}} \cdot \delta \underline{x} + H^T_{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} - \lambda^T \delta \dot{\underline{x}}$

Donc :

$$\delta J = \frac{\partial G^T}{\partial \underline{x}(T)} \cdot \delta \underline{x}(T) + \frac{\partial G}{\partial T} \cdot \delta T + \int_{t_0}^T (H^T_{\underline{x}} \cdot \delta \underline{x} + H^T_{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u} - \lambda^T \delta \dot{\underline{x}}) dt$$

$$\int_{t_0}^T (-\lambda^T \delta \dot{\underline{x}}) dt = -\lambda^T(t) \cdot \delta \underline{x}(t) \Big|_{t_0}^T + \int_{t_0}^T (\dot{\lambda}^T \cdot \delta \underline{x}(t)) dt$$

Alors :

$$\delta J = \frac{\partial G^T}{\partial \underline{x}(T)} \cdot \delta \underline{x}(T) + \frac{\partial G}{\partial T} \cdot \delta T - \lambda^T(T) \cdot \delta \underline{x}(T) + \lambda^T(t_0) \cdot \delta \underline{x}(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^T [(H^T_{\underline{x}} + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + H^T_{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u}] dt$$

Avec $\frac{\partial G}{\partial T} \cdot \delta T \rightarrow 0$ et $\lambda^T(t_0) \cdot \delta \underline{x}(t_0) \rightarrow 0$

$$\delta J = \left[\frac{\partial G^T}{\partial \underline{x}(T)} - \lambda^T(T) \right] \delta \underline{x}(T) + \int_{t_0}^T [(H^T_{\underline{x}} + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + H^T_{\underline{u}} \cdot \delta \underline{u}] dt = 0$$

$$\delta J = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(T) = \frac{\partial G}{\partial \underline{x}(T)} \\ \dot{\lambda} = -H_{\underline{x}} \\ H_{\underline{u}} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

En résumé :

$$\begin{cases} J = G(\underline{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt \\ \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \text{ avec } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \text{ et } t_0 \text{ donné} \end{cases}$$

La condition nécessaire d'optimalité est :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -H_{\underline{x}} \\ H_{\underline{u}} = 0 \end{cases} \quad \text{Equation d'Hamilton-Pontriaguine}$$

avec : $H = L + \lambda f$

et la condition de transversalité est :

$$\lambda(T) = \frac{\partial G}{\partial \underline{x}(T)} \text{ avec } T \text{ fixe}$$

II.3.2. Condition d'Evolman-Weierstrass

En présence des points de discontinuité, les conditions d'Evolman-Weierstrass sont λ et H continues en tout point de discontinuité de \dot{x} et u .

II.3.3. Principe de Minimum de Pontriaguine

- Dans le cas où l'ensemble des commandes admissibles est ouvert, c'est-à-dire, en absence des contraintes agissant sur la commande, alors :

$$\Rightarrow H_{\underline{u}} = 0$$

- Dans le cas où l'ensemble des commandes admissibles est fermé alors :

$$\not\Rightarrow H_{\underline{u}} = 0$$

on doit trouver la commande qui minimise l'Hamiltonien H tel que :

$\text{Min}_u H(u(t))$ la commande qui rend l'Hamiltonien minimal)

II.4. Cas de contraintes de type inégalité

II.4.1. Principe de minimum de Pontriaguine

Soit \mathcal{U} l'ensemble des commandes admissibles fermé $\mathcal{U} \in \mathcal{R}^m$ pour un ensemble de contraintes $g(x, u, t) \geq 0$, avec $\dim(g) \leq m$.

Les contraintes inégalités agissant sur la commande $u(t)$ peuvent être exprimées par :

$$\begin{aligned} u_{min}^j \leq u_j \leq u_{max}^j \quad , \quad j = 1, \dots, m \\ -u^j \leq u_j \leq +u^j \\ \left(-1 \leq \frac{u_j}{u^j} \leq +1 \right) \end{aligned}$$

La condition nécessaire pour un minimum du critère J donné par le minimum de l'Hamiltonien par rapport à u appartenant à son domaine admissible est :

$$\begin{cases} \text{pour } \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) \text{ donnée} \\ H = L + \lambda f \end{cases} \stackrel{CN}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda = -H_x \\ \min_u H \quad u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.13)$$

La commande u doit minimiser le critère quadratique classique :

$$J = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (3.2)$$

Où les matrices F et Q sont symétriques, semi définies positives, tandis que R est symétrique, définie positive.

Le problème du contrôleur linéaire quadratique consiste à trouver la matrice du correcteur K qui minimise le critère de performance J .

Par l'application du principe de Pontriaguine, l'Hamiltonien est donnée par :

$$H = L(x, u, t) + \lambda^T f = \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) + \lambda^T [A x(t) + B u(t)] \quad (3.3)$$

La condition nécessaire d'optimalité est donc définie par:

$$\begin{cases} H_u = 0 \\ \dot{\lambda} = -H_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R u(t) + B^T \lambda = 0 \\ \dot{\lambda} = -(Q x(t) + A^T \lambda) \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$R u(t) + B^T \lambda = 0 \quad (3.4)$$

de l'équation (3.4), on peut tirer la commande optimale comme suit:

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (3.5)$$

La condition de transversalité est :

$$\lambda(T) = \frac{\partial G}{\partial x(T)} = \frac{\partial}{\partial x(T)} \left(\frac{1}{2} x^T(T) F x(T) \right) = F x(T) \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A x(t) - B R^{-1} B^T \lambda(t) \\ \dot{\lambda} = -Q x(t) - A^T \lambda(t) \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} \lambda(T) = F x(T) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La structure linéaire de (3.6) permet de poser :

$$\begin{cases} \lambda(t) = F x(t) \\ \dot{\lambda}(t) = \dot{F}(t) x(t) + F(t) \dot{x}(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \dot{F}(t) x(t) + F(t) (A x(t) - B R^{-1} B^T \lambda(t)) = -Q x(t) - A^T \lambda(t) \\ \Leftrightarrow \dot{F} x(t) + F A x(t) - F B R^{-1} B^T F x(t) = -Q x(t) - A^T F x(t)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \dot{F} + FA - F(t)BR^{-1}B^T F = -Q - A^T F \\ &\Leftrightarrow -\dot{F} = Q + FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F \end{aligned} \quad (3.8)$$

l'équation (3.8) est appelée « équation de Riccati continue ».

Résumé :

La commande qui minimise le critère J est donnée par :

$$\underline{u}^\circ(t) = -R^{-1}B^T F \underline{x}(t) = -K(t)\underline{x}(t) \quad (3.9)$$

Avec K est un gain donné en fonction de temps t .

F est la solution de l'équation de Riccati continue, cette solution doit se faire à partir de l'instant T .

$H_{uu} = R > 0$ donc la commande u° est minimum

F est une matrice symétrique car F^T est aussi solution de l'équation de Riccati.

Le coût optimal est donné par :

$$J^*(\underline{x}(0)) = \frac{1}{2} \underline{x}^T(0) F(0) \underline{x}(0) \quad (3.10)$$

III.2.1.1 Méthode de résolution de l'équation de Riccati

$$\text{Soit } \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \dot{\underline{\lambda}} = -Q\underline{x}(t) - A^T \underline{\lambda}(t) \end{cases} \quad \text{avec } \underline{\lambda}(t) = F(t)\underline{x}(t)$$

$$\Rightarrow F(t) = \lambda(t)\underline{x}^{-1}(t)$$

On pose $F(t) = M(t)N^{-1}(t)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{N}(t) = AN(t) - BR^{-1}B^T M(t) \\ \dot{M}(t) = -QN(t) - A^T M(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{N}(t) \\ \dot{M}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(t) \\ M(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{cases} M(T) = F(T) \\ N(T) = I \end{cases}$$

Exemple 3.1 : Soit un système décrit par :

$$\dot{x} = u \text{ avec } x(0) = x_0$$

et soit le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2) dt$$

- 1/ Ecrire l'équation de Riccati et faire sa résolution
- 2/ déterminer la commande optimale du système en boucle fermée
- 3/ pour $T \rightarrow \infty$ trouver J_{min} ?

Solution 3.1:

- 1/ l'équation de Riccati et sa résolution

$$\dot{x} = u \quad / \quad x(0) = x_0$$

$$A = 0, \quad B = 1$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2) dt$$

$$Q = 1, \quad R = 1$$

$$-\dot{F} = Q + FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F -$$

En remplaçant (A, B, Q et R) on obtient :

$$-\dot{F} = -F^2 + 1$$

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = AN(t) - BR^{-1}B^T M(t) \\ \dot{M}(t) = -QN(t) - A^T M(t) \end{cases} = \begin{cases} -M(t) \\ -N(t) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} M(T) = 0 \\ N(T) = I \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \dot{N}(t) = -M(t) \\ \dot{M}(t) = -N(t) \end{cases} \Rightarrow \ddot{N}(t) = N(t)$ (équation différentielle de second ordre)

$$\Rightarrow N(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$M(t) = -\dot{N}(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} N(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ M(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(T) = c_1 e^T + c_2 e^{-T} = 1 \\ M(T) = -c_1 e^T + c_2 e^{-T} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} e^T \text{ et } c_1 = \frac{1}{2} e^{-T}$$

$$N(t) = \frac{1}{2} e^{(t-T)} + \frac{1}{2} e^{-(t-T)} = Ch(t-T).$$

$$M(t) = -\frac{1}{2} e^{(t-T)} + \frac{1}{2} e^{-(t-T)} = -sh(t-T).$$

$$\begin{cases} N(t) = Ch(t - T) \\ M(t) = -sh(t - T) \end{cases}$$

$$F(t) = M(t)N^{-1}(t) = -\frac{sh(t - T)}{ch(t - T)} = -Th(t - T)$$

Donc $F(t) = -Th(t - T)$ solution de l'équation de Riccati.

2/ la commande en boucle fermée

$$u^\circ(t) = -R^{-1}B^T F(t)x(t) = +th(t - T)x(t).$$

Pour $T \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} th(t - T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{sh(t - T)}{ch(t - T)} = -1$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{sh(t - T)}{ch(t - T)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{(t-T)} - e^{-(t-T)}}{e^{(t-T)} + e^{-(t-T)}} = \frac{-e^{-(t-T)}}{e^{-(t-T)}} = -1$$

Donc lorsque $T \rightarrow \infty$

$$u^\circ(t) = -x(t).$$

$$\dot{x} = u = -x(t)$$

$$\dot{x}(t) = -x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = ce^{-t}$$

Et $x(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad u^\circ(t) = -x_0 e^{-t}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + u^2) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T 2x^2 dt + \int_0^T x^2 dt$$

$$= x_0^2 \int_0^T e^{-2t} dt = x_0^2 \frac{-1}{2} e^{-2t} \Big|_0^T$$

$$J_{min} = \frac{x_0^2}{2} (1 - e^{-2T}) \text{ lorsque } T \rightarrow \infty \Rightarrow J_{min} = \frac{x_0^2}{2} (1 - e^{-2T}) = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\text{donc } J_{min} = \frac{x_0^2}{2}$$

III.2.2. Cas de l'horizon infini

A l'horizon infini, le critère s'écrit comme suit :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)]dt \quad (3.11)$$

Avec $Q \geq 0$ et $R > 0$

Si $T \rightarrow \infty$ (régime permanent), on aura :

$$\bar{F} = \lim_{T \rightarrow \infty} F(t) \Rightarrow \dot{F} = 0$$

L'équation de Riccati devient :

$$\bar{F}A + A^T\bar{F} - \bar{F}BR^{-1}B^T\bar{F} + Q = 0 \quad (3.12)$$

$$\underline{u}^0(t) = -R^{-1}B^T\bar{F}\underline{x}(t) \quad (3.13)$$

III.3. Commande linéaire quadratique en temps discret

III.3.1. Cas de l'horizon fini

Objectif : L'objectif est de trouver une séquence de commande $\{u_i\}$, pour $i = 0, \dots, N - 1$ et qui minimise le critère[3] :

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N)F\underline{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{x}^T(i)Q\underline{x}(i) + \underline{u}^T(i)R\underline{u}(i)) \quad (3.14)$$

Où F, Q symétrique et $\geq 0, R > 0$ et N donnée fini, et compte tenu des équations :

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad (3.15)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad \underline{x}(0) \text{ donnée.}$$

Application de la programmation dynamique

$$V_k(\underline{x}(k)) = \text{Min}_{\underline{u}(k)} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k)Q\underline{x}(k) + \underline{u}^T(k)R\underline{u}(k)) + V_{k+1}(\underline{x}(k+1)) \right\} \quad (3.16)$$

Initialisée par : $V_N(\underline{x}(N)) = \frac{1}{2} \underline{x}^T(N)F\underline{x}(N)$

$$V_k(\underline{x}(k)) = \frac{1}{2} \underline{x}^T(k)F(k)\underline{x}(k) \quad (3.17)$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \underline{x}^T(k)F(k)\underline{x}(k) = \text{Min}_{\underline{u}(k)} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k)Q\underline{x}(k) + \underline{u}^T(k)R\underline{u}(k)) + \frac{1}{2} \underline{x}^T(k+1)F(k+1)\underline{x}(k+1) \right\}$$

$$\frac{1}{2} \underline{x}^T(k)F(k)\underline{x}(k) =$$

$$\text{Min}_{\underline{u}(k)} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k) Q \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) R \underline{u}(k)) + \frac{1}{2} (A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k))^T F(k+1) (A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k)) \right\} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{ \}}{\partial \underline{u}(k)} &= R \underline{u}(k) + B^T F(k+1) (A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k)) = 0 \\ \Rightarrow \underline{u}^\circ(k) &= -(R + B^T F(k+1) B)^{-1} B^T F(k+1) A \underline{x}(k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\underline{x}^\circ(k) = -\underline{K}(k) \underline{x}(k)$$

on remplace $\underline{u}^\circ(k)$ dans $\{ \}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{x}^T(k) F(k) \underline{x}(k) &= \\ \frac{1}{2} \underline{x}^T(k) \{ Q + A^T F(k+1) A - A^T F(k+1) B (R + B^T F(k+1) B)^{-1} B^T F(k+1) A \} \underline{x}(k) \end{aligned}$$

Alors, l'équation de Riccati pour le cas discret est définie par :

$$F(k) = Q + A^T F(k+1) A - A^T F(k+1) B (R + B^T F(k+1) B)^{-1} B^T F(k+1) A \quad (3.20)$$

Initialisé par $F(N) = F$

L'équation (3.20) représente l'équation de Riccati discrète

Le coût optimal est donné par :

$$J_{min} = \frac{1}{2} \underline{x}^T(0) F(0) \underline{x}(0) \quad (3.21)$$

III.3.2. Cas de l'horizon infini

Le critère de performance à minimiser est

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\underline{x}^T(i) Q \underline{x}(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i)) \quad (3.22)$$

$\dim \underline{x} = n$, $\dim \underline{u} = m$

Si la paire (A, B) est commandable et si la paire (A, C) est observable, la séquence de commande optimale $\{u_k\}$, $k \in [0, +\infty[$ qui minimise le critère J compte tenu des équations d'état est donnée par :

$$\underline{u}^\circ(k) = -(R + B^T \bar{F} B)^{-1} B^T \bar{F} A \underline{x}(k) \quad (3.23)$$

Où \bar{F} est une matrice ≥ 0 vers laquelle converge l'équation de récurrence :

$$F(k) = Q + A^T F(k+1) A - A^T F(k+1) B (R + B^T F(k+1) B)^{-1} B^T F(k+1) A$$

Quand $k \rightarrow \infty$, et ce quelque soit l'initialisation $F(N) = F \geq 0$

La valeur du coût optimal est donné par :

$$J^* = \frac{1}{2} \underline{x}^T(0) \bar{F} \underline{x}(0)$$

Et le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

Chapitre IV

Commande Linéaire Gaussienne (LQG)

IV.1. Introduction

En commande linéaire quadratique, les états sont supposés parfaitement connus. En revanche, l'existence des états connus est souvent très rare dans la plupart des applications industrielles. Il est donc nécessaire d'estimer les états pour utiliser leur estimation dans le modèle de commande.

En comparaison avec la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20^{ème} siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation des lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariés. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet.

L'aspect aléatoire dans un système stochastique est dû :

- soit à une entrée (consigne) aléatoire
- soit à une perturbation aléatoire
- soit à une évolution aléatoire (état initial aléatoire, paramètres incertains...etc)

IV.2. Formulation du problème et principe de séparation

Dans un système aléatoire, le vecteur d'état correspondant est en général supposé aléatoire. Cependant, ses caractéristiques statistiques à savoir : moyenne, variance,...etc., sont toujours supposées connues. Dans ce cas, on dit qu'on a devant un problème formulé par un critère sans expression.

Dans ce chapitre le critère quadratique est supposé le même que celui cité en chapitre précédent, cependant dans ce cas on minimise son espérance mathématique.

$$\min_{u(t)} E \left\{ J = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t) Q x(t) + u^T R u) dt \right\} \quad (4.1)$$

E : l'espérance mathématique

Pour résoudre ce problème de commande stochastique, il sera presque toujours nécessaire d'insérer un reconstruteur d'état (tel que le filtre de Kalman) entre les mesures et l'optimisateur. Ce dernier peut être schématisé par la figure 4.1. comme suit :



Fig.4.1. Reconstruteur d'état

Théorème de séparation

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom du théorème de séparation. Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée \hat{x} de x qui est non biaisée et à variance minimale,
- la commande par retour d'état $u = -K\hat{x}$ à appliquer à \hat{x} où K est calculé en considérant le problème LQ correspondant.

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples et déjà résolus : celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [5, 6].

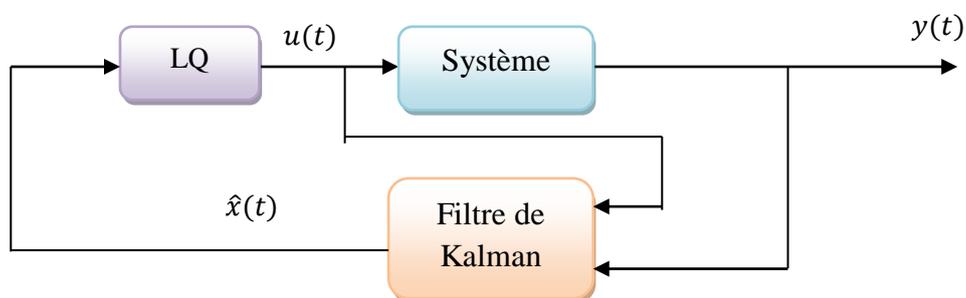


Fig.4.2. Commande LQG (Observateur de Kalman+LQ)

IV.3. Filtre de Kalman et commande stochastique

a) Position de problème

Soit le système aléatoire donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + w(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Où $v(t)$ et $w(t)$ des bruits blancs gaussiens centrés, de covariances $Q_v \cdot \delta(\tau)$ et $R_w \cdot \delta(\tau)$ telque :

$$Q_v = Q_v^T \geq 0 \text{ et } R_w = R_w^T \geq 0$$

$x(0) = x_0$ est un état aléatoire de moyenne \bar{x}_0 et de covariance Σ_0 . Le problème consiste à trouver la commande $u^*(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = E \left[\frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \right] \quad (4.3)$$

Le principe est de trouver la solution du problème de commande optimale en boucle fermée, où l'état aléatoire $x(t)$ est remplacé par son estimé $\hat{x}(t)$. Ceci permet de reformulé (4.3) comme suit :

$$\min_{u(t)} E[J] \rightarrow u^*(t) = -R^{-1} B^T p(t) \cdot \hat{x}(t) \quad (4.4)$$

b) Filtre de Kalman

Reprenons le modèle d'état :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) + w(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

(A, C) est observable.

Les signaux $v(t)$ et $w(t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés (moyennes nulles) et de densités spectrales de puissance Q_v et R_w , c'est-à-dire :

$$E[v(t) \cdot v^T(t + \tau)] = Q_v \delta(\tau)$$

$$E[w(t) \cdot w^T(t + \tau)] = R_w \delta(\tau)$$

$v(t)$ et $w(t)$ sont indépendant (incorréable) c'est-à-dire :

$$E[v(t) \cdot w^T(t + \tau)] = 0$$

Remarque

Bien que la théorie du filtre de Kalman soit valable pour le cas non stationnaire, on suppose que le système est invariant dans le temps.

Le filtre de Kalman (observateur dans le cas stochastique) est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

Soit $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$, avec $e(t)$ représente l'erreur d'estimation, d'où ::

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

$$= (A - L \cdot C)x(t) - (A - L \cdot C)\hat{x}(t) + v(t) - L \cdot w(t)$$

$$\dot{e}(t) = (A - L \cdot C)e(t) + v(t) - L \cdot w(t)$$

Puisque $v(t)$ et $w(t)$ sont gaussiennes implique que $e(t)$ est gaussienne, on s'intéresse donc à la moyenne de $e(t)$:

$$E[\dot{e}(t)] = (A - L \cdot C) \cdot E[e(t)] + E[v(t)] - L \cdot E[w(t)]$$

$$E[v(t)] = 0, E[w(t)] = 0$$

Si $(A - L \cdot C)$ est stable alors : $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\dot{e}(t)] = 0$

On s'intéresse à déterminer L qui minimise la covariance de l'erreur d'estimation :

$$\min_L E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] \Leftrightarrow \min_L E[e \cdot e^T] \tag{4.6}$$

Soit $p(t)$ la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$p(t) = E[e \cdot e^T] \text{ Symétrique}$$

D'autre part, on a :

$$E \left[\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^T(t + \tau) & w^T(t + \tau) \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q_v & 0 \\ 0 & R_w \end{bmatrix} \cdot \delta(\tau) \tag{4.7}$$

IV.3.1. Cas continu

Soit le système linéaire :

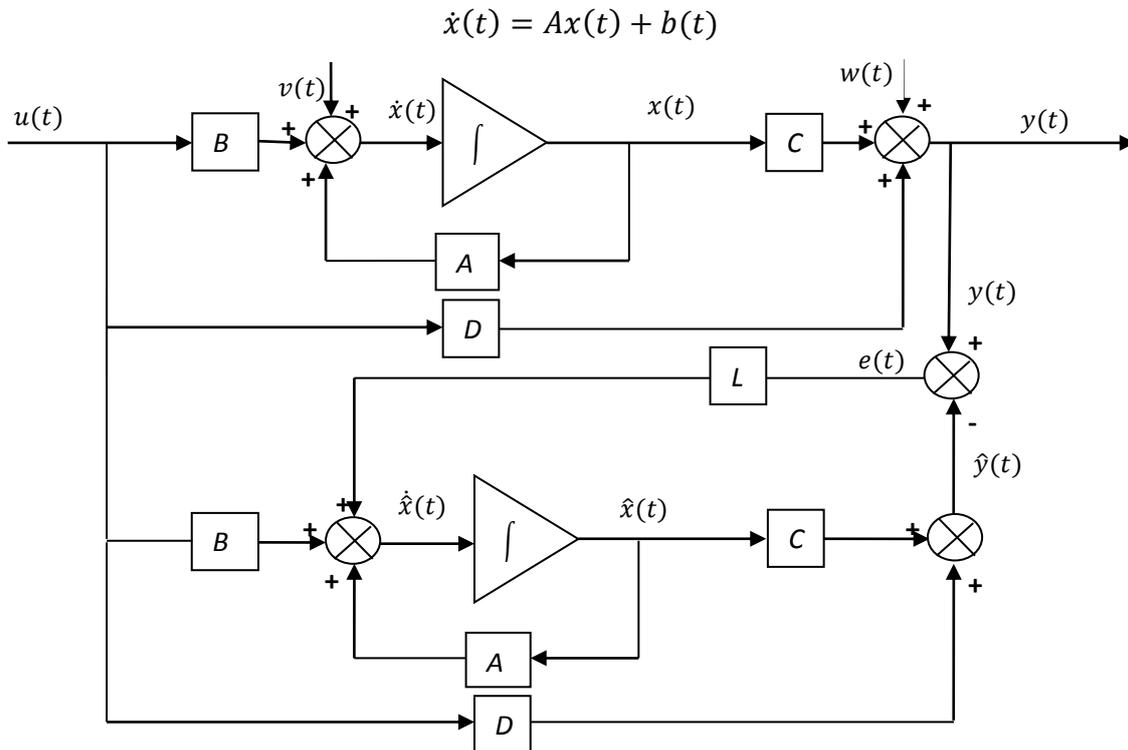


Fig.4.3. Structure du filtre de Kalman

$b(t)$ est un bruit blanc gaussien stationnaire de covariance $W \cdot \delta(\tau)$, \bar{x}_0 et $p(t_0)$ représentent la moyenne et la covariance de $x(t_0)$ respectivement

Alors $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien de moyenne

$$\mu_x = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)} \cdot \bar{x}_0$$

Et de covariance :

$$p(t) = E[(x - \mu_x)(x - \mu_x)^T]$$

Vérifiant l'équation :

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + p(t)A^T + W$$

En appliquant ce théorème, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= (A - LC)p(t) + p(t)(A - LC)^T + [I_{n \times n} \quad -L] \begin{bmatrix} Q_v & 0 \\ 0 & R_w \end{bmatrix} \\ &= (A - LC)p(t) + p(t)(A - LC)^T + Q_v + LR_wL^T \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour minimiser $\frac{p(t)}{L}$, il suffit de minimiser $\text{trace}(\dot{p}(t)/L)$.

$$\frac{\partial(\text{trace}(\dot{p}))}{\partial L} = \frac{\partial p}{\partial L} = -pC^T - pC^T + 2LR_w = 0$$

R_w : matrice de covariance symétrique

$$\Rightarrow L = p(t)C^T R_w^{-1} \quad (4.9)$$

On remplace (4.9) dans l'équation (4.8), on obtient l'équation de Riccati :

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + p(t)A^T - p(t)C^T R_w^{-1} Cp(t) + Q_v \quad (4.10)$$

L'intégration de cette équation de Riccati est initialisée par :

$$p(t_0) = E[(x(t_0) - \hat{x}(t_0))(x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T]$$

Résumé du Filtre de Kalman

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

$$L = p(t)C^T R_w^{-1}$$

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + p(t)A^T - p(t)C^T R_w^{-1} Cp(t) + Q_v$$

Régime permanent du filtre de Kalman

Une fois le régime transitoire passé dans un système invariant (dû aux erreurs d'initialisations), l'erreur d'estimation devient un signal stationnaire, c'est-à-dire :

$$\dot{p}(t) = 0 \Rightarrow p(t) = c^{te} \quad (4.11)$$

L'équation de Riccati devient :

$$Ap(t) + p(t)A^T - p(t)C^T R_w^{-1} Cp(t) + Q_v = 0$$

$p(t)$: matrice constante semi définie positive.

IV.3.2. Cas discret

On considère le système discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k) \\ y(k) = Cx(k) + w(k) \end{cases} \quad (4.12)$$

Où $v(k)$, $w(k)$ sont des bruits blancs gaussiens non corrélés

$$\begin{cases} E[v(k)] = 0 \\ E[v(k)v^T(i)] = \delta(k-i) \cdot Q_v \end{cases}, \quad \begin{cases} E[w(k)] = 0 \\ E[w(k)w^T(i)] = \delta(k-i) \cdot R_w \end{cases}$$

et avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} E[x(0)] = \bar{x}_0 \\ E[x(0)x^T(0)] = p(0) \end{cases}$$

L'algorithme du filtre de Kalman discret peut être résumé comme suit [7]:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k) &= A\hat{x}(k/k) + Bu(k) \\ \hat{x}(k+1/k) &= A\hat{x}(k/k) + Bu(k) \\ \hat{y}(k+1/k) &= C\hat{x}(k+1/k) \\ p(k+1/k) &= Ap(k/k)A^T + Q_v \\ L(k+1) &= p(k+1/k)C^T [Cp(k+1/k)C^T + R_w]^{-1} \\ \hat{x}(k+1/k+1) &= \hat{x}(k+1/k) + L(k+1)(y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)) \\ p(k+1/k+1) &= [I - L(k+1)C]p(k+1/k) \end{aligned}$$

IV.4. Commande linéaire quadratique gaussienne (LQG)

Considérons le système régi par les équations d'état et de mesure ci-dessous:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = Cx(t) + w(t) \end{cases}$$

Où $v(t)$ et $w(t)$ sont des bruits gaussiens caractérisés par :

$$E[v(t)] = E[w(t)] = 0$$

On s'intéresse à développer une commande optimale par retour d'état optimal minimisant le critère donné par :

$$J = E \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \right] \quad (4.13)$$

La solution de ce problème est obtenue en combinant la commande linéaire quadratique (LQ) avec le filtre de Kalman, les étapes à suivre sont donc données par :

1. résoudre le problème de la commande LQ qui minimise le critère J

$$u^*(t) = -Kx(t)$$

2. résoudre le problème de l'estimation optimale par filtre de Kalman

3. prendre le retour d'état optimal :

$$u^*(t) = -K\hat{x}(t)$$

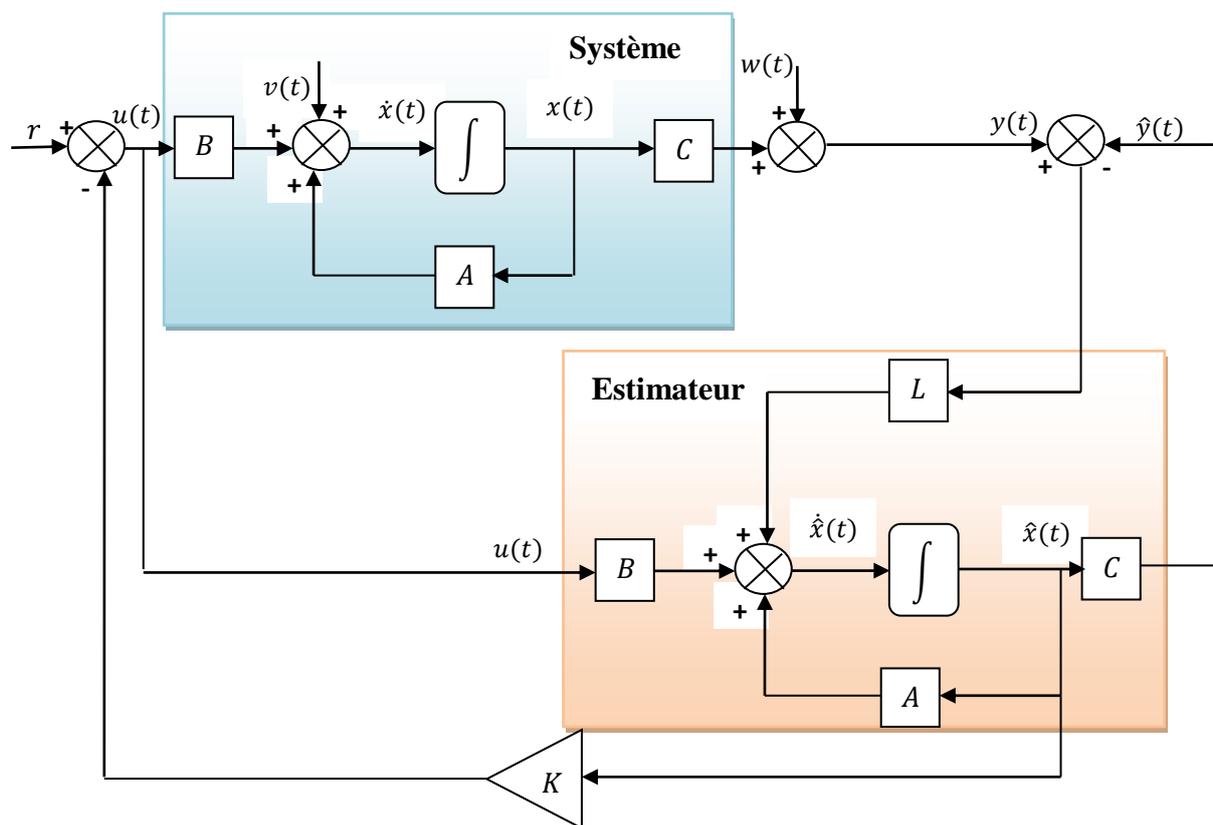


Fig. 4.4. Structure de la commande LQG

Chapitre V

Commande Adaptative

V.1. Généralité sur la commande adaptative

La commande adaptative initiée dans les années cinquante trouve sa motivation dans le problème de variation des paramètres des systèmes à commander (en particulier dans le domaine de l'aéronautique). En effet, le contrôleur synthétisé via un modèle donné n'arrive plus à réaliser son objectif lorsque ses paramètres changent dans le temps.

L'idée de base de la commande adaptative est de trouver un moyen pour faire ajuster les paramètres du contrôleur lorsque le système à commander subit à des changements; autrement dit, le contrôleur doit s'adapter aux variations du système. L'objectif principal est donc de trouver un mécanisme d'adaptation plus adéquat assurant les performances imposées par un tel cahier de charge ou d'électricité. A cet effet, Plusieurs mécanismes ont été développés, cependant, on peut fondamentalement relever deux approches :

- La commande adaptative à modèle de référence (Model reference adaptive control (MRAC)).
- La commande auto-ajustable ou auto-adaptative (self tuning).

V.2. Classification des approches de la commande adaptative

Les approches de la commande adaptative peuvent être répertoriées en de classes qui sont:

V.2.1. Commande adaptative directe (Direct adaptive control)

Une commande adaptative est dite directe si les paramètres du contrôleur sont ajustés en une seule étape, parmi ces commandes, on trouve le MRAC proposé par Whitaker en 1958 et sa première application remonte au début des années 70. La figure 5.1 présente un schéma descriptif du MRAC.

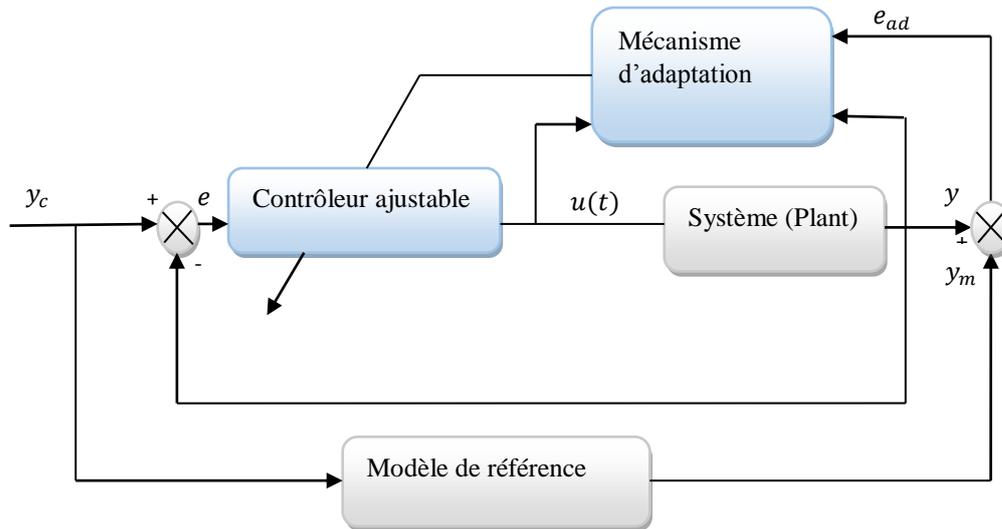


Figure 5.1. Commande adaptative directe

Avec - y_c : Représente la référence

- y_m : Sortie du modèle de référence (désirée)

- e : Erreur entre sortie du système et celle désirée.

V.2.2. Commande adaptative indirecte (Indirect adaptive control)

Une commande adaptative est dite indirecte si les paramètres du contrôleur sont adaptés en deux étapes [8, 9]:

Etape 1 : Estimation des paramètres du modèle du procédé.

Etape 2 : Calcul des paramètres du contrôleur à partir des paramètres estimés.

La technique élaborant un régulateur auto-ajustable (Self Tuning Regulator STR) est une commande adaptative indirecte. Elle est initialement proposée par Kalman en 1958 et la première application industrielle est concrétisée au début des années 70, le principe cette technique peut être schématisé par :

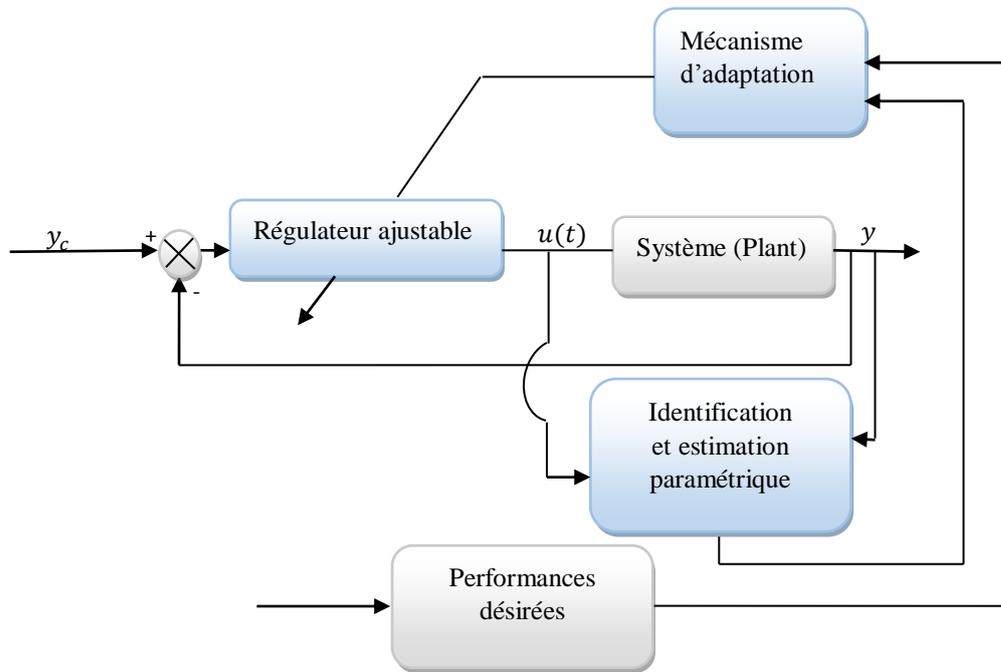


Figure 5.2. Commande adaptative indirecte

V.3. Commande Adaptative à modèle de référence (MRAC)

La commande adaptative à modèle de référence a été développée aux USA représente l'une des commandes adaptatives les plus connues [8, 10, 11]. Elle a été originalement adoptée pour résoudre un problème dans lequel les spécifications de performances sont données en termes d'un modèle de référence, ce dernier donne une indication sur comment la sortie du système doit idéalement répondre à un signal de commande. Son principe de base consiste à adapter les paramètres du contrôleur de telle sorte l'erreur entre le système et le modèle de référence soit minimale

La figure 5.3. représente le principe de fonctionnement de cette stratégie de commande

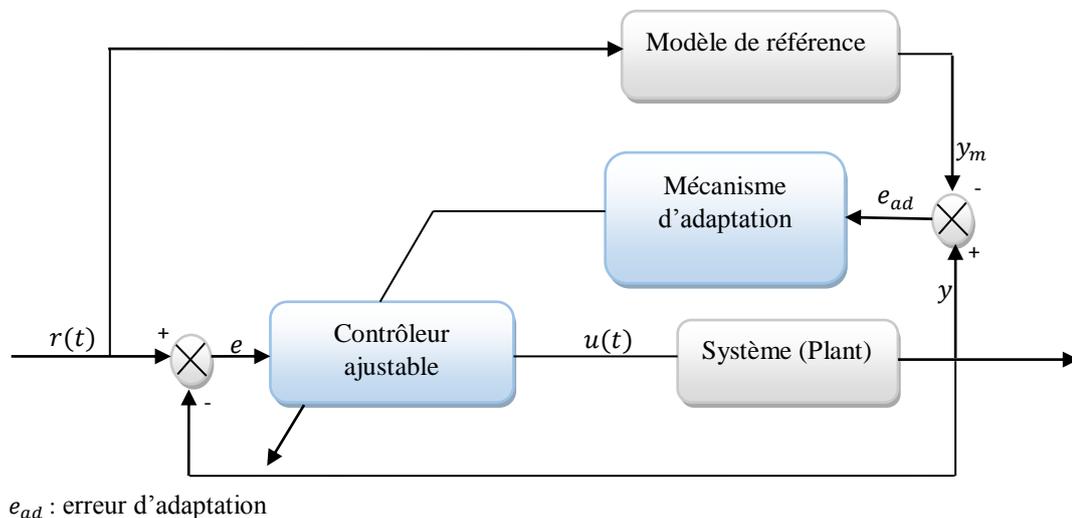


Figure 5.3. Structure de la commande adaptative à modèle de référence

Plusieurs approches ont été développées pour la solution du MRAC. Parmi lesquelles et les plus populaires, on peut citer:

- Approche basée sur le gradient
- Approche basée sur la théorie de la stabilité de Lyapunov

V.3.1. Synthèse de MRAC par l'approche de gradient (MIT)

L'idée fondamentale du MRAC est d'ajuster les paramètres du contrôleur de façon à minimiser l'erreur d'adaptation $e_{ad} = y - y_m$. Mathématiquement il s'agit alors de trouver les paramètres du contrôleur assurant la minimisation du critère donné par l'expression suivante :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e_{ad}^2 \quad (5.1)$$

Où θ représente le vecteur qui contient les paramètres du contrôleur à synthétiser.

L'évolution de chaque paramètre du vecteur θ est supposé constante ou lentement variable. Dans ce cas l'algorithme du gradient assurant la minimisation souhaitée de J peut être exprimé par la formule (5.2) ci-dessous :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \frac{\partial J}{\partial \theta} \quad (5.2)$$

Dans le domaine temporel, l'expression (5.2) peut être reformulée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\alpha \cdot e_{ad} \cdot \frac{\partial e_{ad}}{\partial \theta} \quad (5.3)$$

C'est la règle d'adaptation de MIT (règle la plus ancienne).

Exemple 5.1 :

Soit un système décrit par la fonction de transfert $G(s)$ telle que :

$$y = G(s) \cdot \theta \cdot u_c$$

Et soit le modèle de référence représenté par la fonction de transfert $G_m(s) = \theta^o \cdot G(s)$, sachant que :

$$y_m = G(s) \cdot \theta^o \cdot u_c$$

- Trouver la loi d'adaptation θ assurant la minimisation du critère $J = \frac{1}{2} e^2$?

Solution 5.1:



$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha \cdot e \cdot \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

Avec :

u_c : Consigne

θ : Paramètres ajustables

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2, e = y - y_m = G(s)u_c(\theta - \theta^\circ)$$

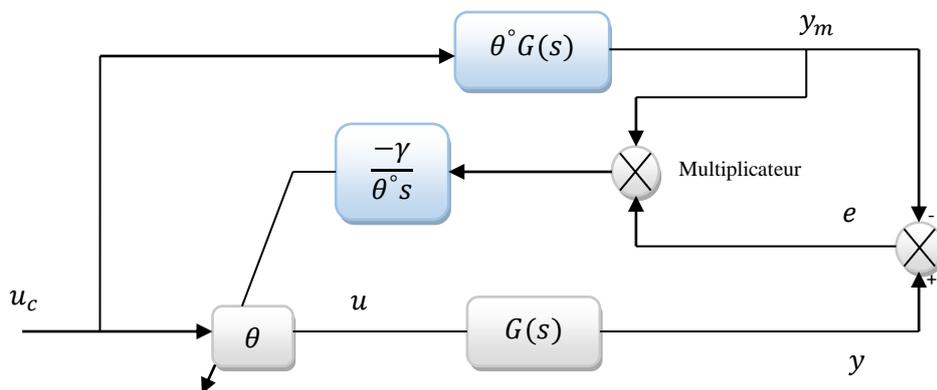
$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = G(s) \cdot u_c = \frac{y_m}{\theta^\circ}$$

Donc :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e / \theta^\circ$$

Et

$$\theta(s) = -\frac{\gamma}{\theta^\circ s} \cdot y_m \cdot e$$



Donc pour que $\theta G(s) \rightarrow \theta^\circ G(s)$ il faut que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\gamma \cdot y_m \cdot e}{\theta^\circ}$$

Exemple 5.2 :

Soit le système (à commander) présenté par l'équation d'état ci-dessous :

$$\dot{y} = -ay + bu,$$

avec a et b sont des variables inconnus, et soit le modèle de référence décrit par:

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m u_c(t)$$

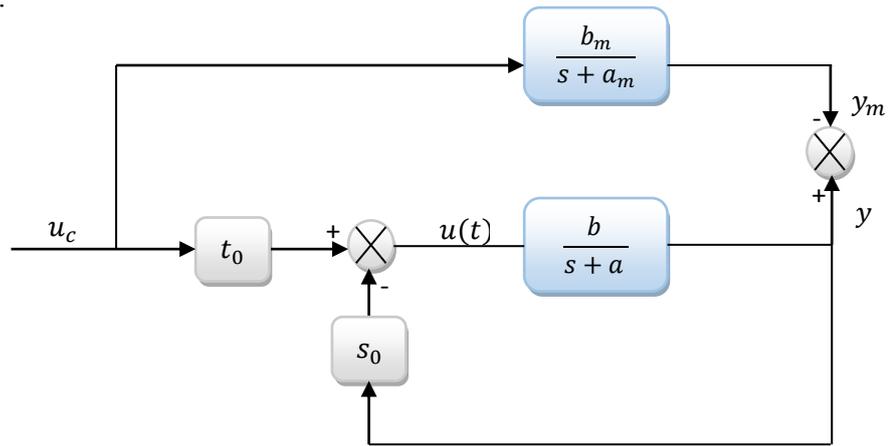
Avec a_m et b_m sont des paramètres supposés connus et u_c représente l'entrée de consigne à suivre.

On suppose que la structure de la loi de commande est imposée par :

$$u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t)$$

L'objectif est de trouver les lois d'adaptation de t_0 et s_0 assurant la bonne minimisation de l'erreur de poursuite.

Solution 5.2 :



$$\dot{y} = -ay + bu$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sy = -ay + bu \\ u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t) \end{cases}$$

$$sy = -ay + bt_0 u_c - bs_0 y$$

$$(s + a + bs_0)y = bt_0 u_c$$

$$\Rightarrow y = \frac{bt_0}{s + a + bs_0} u_c$$

et comme $e = y - y_m$, alors :

$$e = \frac{bt_0}{s + a + bs_0} u_c - \frac{b_m}{s + a_m} u_c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t_0} = \frac{b}{s + a + bs_0} u_c, \quad \frac{\partial e}{\partial s_0} = \frac{-b^2 t_0}{(s + a + bs_0)^2} u_c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial e}{\partial s_0} = \frac{-b}{s + a + bs_0} \cdot \frac{bt_0}{s + a + bs_0} u_c = \frac{-b}{s + a + bs_0} y$$

Le système en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence ayant la dynamique suivante :

$$s + a + bs_0 = s + a_m$$

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} t_0(t) \\ s_0(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \begin{cases} \frac{dt_0}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial t_0} = -\gamma e \frac{b}{s + a + s_0 b} u_c \\ \frac{ds_0}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial s_0} = +\gamma e \frac{b}{s + a + s_0 b} y \end{cases}$$

et comme

$$s + a + bs_0 = s + a_m$$

Alors on obtient les lois d'adaptations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dt_0}{dt} = -\gamma' e \frac{u_c}{s + a_m} = st_0 \\ \frac{ds_0}{dt} = +\gamma' e \frac{y}{s + a_m} = ss_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma' = \gamma \cdot b$$

$$t_0 = \frac{1}{s} \cdot \frac{-\gamma' e}{s + a_m} u_c \cdot$$

$$s_0 = \frac{1}{s} \cdot \frac{\gamma' e}{s + a_m} y \cdot$$

L'implémentation de ces derniers régulateurs peut être donnée par la figure ci-dessous

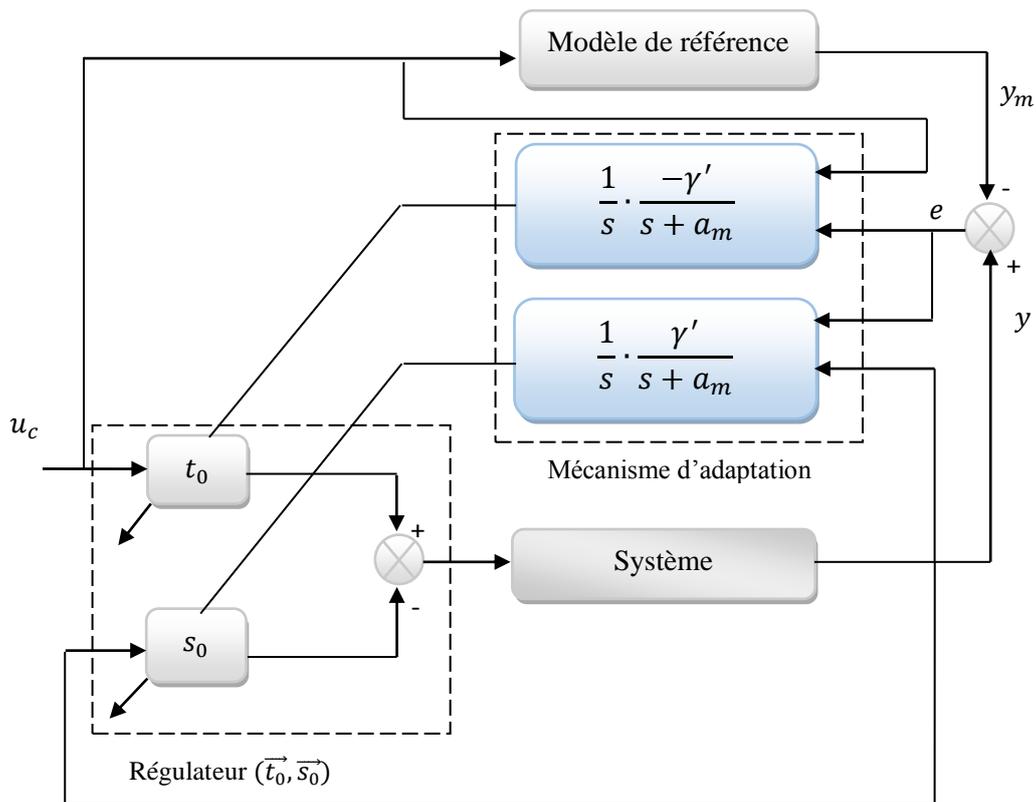


Figure 5.4 Schéma bloc des lois d'adaptation t_0 et s_0 de l'exemple 5.2

Remarques :

- L'erreur peut être nulle, alors que les paramètres ne sont pas ceux du suivi parfait, c'est-à-dire, les paramètres ne convergent pas nécessairement vers ceux du suivi parfait (paramètres optimaux).
- Le paramètre γ doit être petit ou bien faible .
- Pour assurer la convergence, le signal de référence $u_c(t)$ doit être suffisamment variable (excitation persistante).
- Des règles d'ajustement modifiées ont été proposées :

MRAC gradient

- Choix du critère J (J dépendra de e_{ad}).
- Choisir une structure de commande, exemple : $u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t)$.
- Calculer les gradients nécessaires pour obtenir la loi d'adaptation : $d\theta/dt$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta}$$

Ensuite calculer les lois d'adaptation.

Notons que les méthodes du gradient ne garantissent pas la stabilité en boucle fermée.

V.3.2. Synthèse de MRAC par l'approche de la théorie de la stabilité de Lyapunov

Contrairement à la méthode du gradient, la méthode que nous allons voir, construit un MRAC garantissant la stabilité. Ceci est réalisé en imposant une loi d'adaptation des paramètres du contrôleur telle que le système en boucle fermée reste stable.

Pour cela, on utilise la théorie de la stabilité de Lyapunov (plus exactement la 2^{ème} méthode de Lyapunov) [8, 12].

Rappelons le théorème de stabilité de Lyapunov

Théorème de Lyapunov

On considère un système décrit par :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad f(0, t) = 0$$

On définit la fonction de Lyapunov $V(x, t)$ telle que

$$V(0, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}. \quad \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$$

$V(x, t)$ est définie positive, c'est-à-dire, $\forall t, V(x, t) > 0$

Alors le système $\dot{x} = f(x, u, t)$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\dot{V}(x, t)$ est définie négative, c'est-à-dire, $\dot{V}(x, t) < 0, x \neq 0$ (condition suffisante).

Le calcul du MRAC basé sur la théorie ci-dessus, consiste à définir une fonction de Lyapunov stabilisant le système à commander. Celle-ci est assurée par la recherche à des lois d'adaptation vérifiant que \dot{V} soit définie négative.

La structure du contrôleur étant fixée.

Exemple 5.3:

Soit le système suivant :

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + bu(t)$$

Et soit le modèle de référence :

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_my(t) + b_mu_c(t)$$

Avec la structure de commande suivante :

$$u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t), \quad e = y - y_m$$

Il s'agit donc de trouver

$$\frac{dt_0}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{ds_0}{dt}$$

Tel que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable (en utilisant la fonction de Lyapunov)

Solution 5.3:

Fonction de Lyapunov (Candidate)

$$V(e, t, \theta) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{b\gamma} (bs_0 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (bt_0 - b_m)^2 \right)$$

Pour que V soit une fonction de Lyapunov, il faut que $\dot{V} < 0$ pour $e \neq 0$. Alors le système est asymptotiquement stable.

$$\frac{dV}{dt} = e \cdot \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (bs_0 + a - a_m) \frac{ds_0}{dt} + \frac{1}{\gamma} (bt_0 - b_m) \frac{dt_0}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = ?$$

Et comme $e = y - y_m$ alors :

$$\frac{de}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_m}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= (-ay + bu) - (-a_my_m + b_mu_c) \\ &= -ay + b(t_0 u_c(t) - s_0 y(t)) + a_my_m - b_mu_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(a + bs_0)y + a_my_m + (bt_0 - b_m)u_c \\
&= +a_my - a_my - (a + bs_0)y + a_my_m + (bt_0 - b_m)u_c \\
&= +a_my - (a + bs_0)y - a_m(y - y_m) + (bt_0 - b_m)u_c \\
&= -a_me + (a_m - a - bs_0)y + (bt_0 - b_m)u_c
\end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{dV}{dt} = -a_me^2 + \frac{1}{\gamma}(bs_0 + a - a_m)\left(\frac{ds_0}{dt} - \gamma ey\right) + \frac{1}{\gamma}(bt_0 - b_m)\left(\frac{dt_0}{dt} + \gamma eu_c\right)$$

$\dot{V} < 0$ si

$$\begin{cases} \frac{ds_0}{dt} - \gamma ey = 0 \\ \frac{dt_0}{dt} + \gamma eu_c = 0 \end{cases} \quad \text{avec } a_m > 0$$

Ce qui implique que les lois d'adaptation des paramètres du régulateur sont :

$$\begin{cases} \frac{ds_0}{dt} = \gamma ey \\ \frac{dt_0}{dt} = -\gamma eu_c \end{cases}$$

et donc le système est asymptotiquement stable

V.4. Commande adaptative à régulateur auto-ajustable

La commande adaptative à régulateur auto-ajustable fait partie des commandes adaptatives indirectes [8, 12]; fondamentalement, la commande self tuning consiste d'une façon ou d'une autre à ajuster les paramètres du régulateur en fonction des paramètres du modèle du système à commander. C'est une commande par ordinateur qui consiste à réaliser à chaque période d'échantillonnage une estimation des paramètres du système et un calcul des paramètres du régulateur. Le principe de base de cette stratégie de commande est décrit par la figure 5.5.

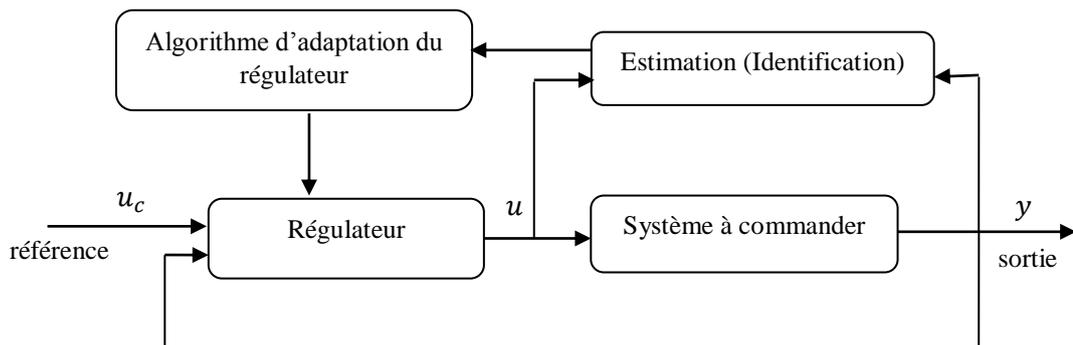


Figure 5.5. Principe de base de la commande Self Tuning

Pour construire une commande Self Tuning, il faut choisir à priori :

- Comment réaliser l'identification (algorithme d'identification)
- Comment calculer la commande (algorithme de commande).

On suppose qu'on dispose d'un modèle de synthèse pour le système, ce modèle est de la forme :

$$G(z^{-1}) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (5.4)$$

z^{-1} est l'opérateur de retard : $z^{-1}y(t) = y(t - 1)$

k est le retard entrée-sortie.

De plus on a un modèle pour le régulateur :

$$G_c(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{F(z^{-1})} \quad (5.5)$$

Sachant que

$$A(z^{-1}) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n_a}$$

L'identification consiste à déterminer à partir des signaux prélevés sur le système, les paramètres désirés, ceci nécessite un algorithme d'identification récursif efficace.

Le calcul du régulateur consiste à déterminer le signal de commande à partir des données d'entrées /sorties, il faut alors un algorithme de commande.

L'identification est généralement réalisée par l'algorithme des moindres carrés récursif. En revanche, plusieurs algorithmes ont été proposés pour le calcul de la loi de commande en mode self tuning, parmi lesquels :

- Loi de commande à variance minimale
- Loi de commande à variance minimale généralisée
- Loi de commande par placement de pôles
- Loi de commande par PID

La façon dont l'estimateur de paramètres est combiné avec la loi de commande donne lieu à deux approches différentes :

V.4.1. Approche Directe (Implicite)

Le système d'identification est paramétré en fonction des paramètres du régulateur souhaité, qui sont estimés directement (sans calcul intermédiaire impliquant des estimations des paramètres du système dynamique). Le principe de fonctionnement de cette approche est illustré comme suit :

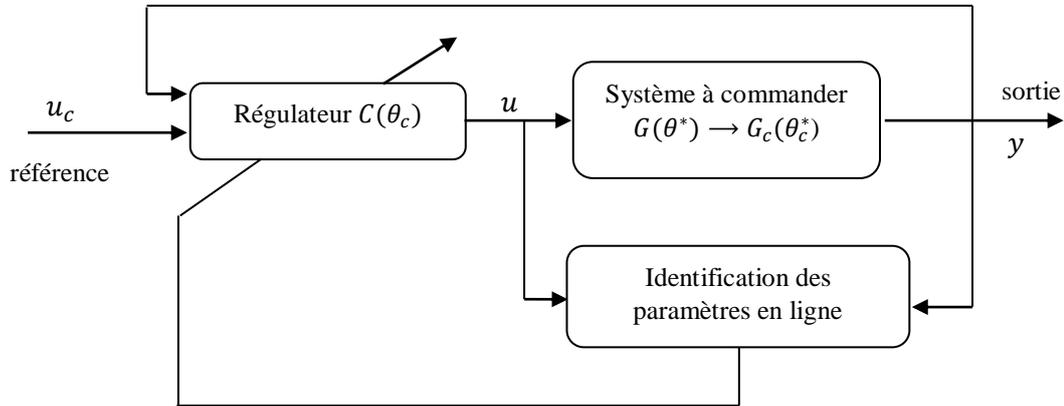


Figure 5.6. Approche Directe

V.4.2. Approche Indirecte (Explicite)

Dans ce cas, les paramètres du système à commander sont estimés en ligne et utilisés pour calculer les paramètres du régulateur.

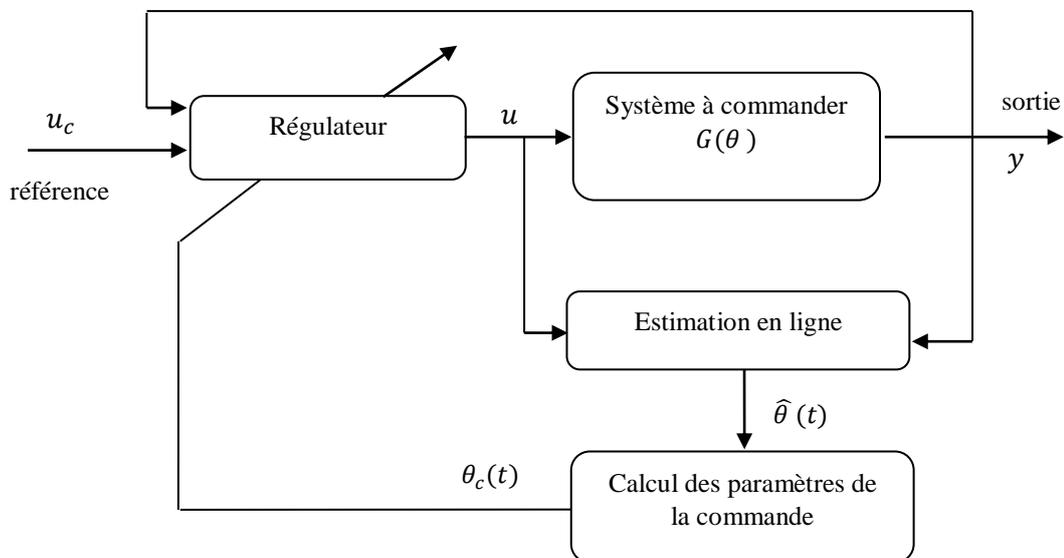


Figure 5.7. Approche Indirecte

A chaque instant t (période d'échantillonnage), le système estimé est formé et traité comme s'il était le véritable système à commander (à partir duquel on fait le calcul des paramètres du régulateur). Son principe de fonctionnement est illustré à la figure 5.7.

Bibliographie

- [1] R. V. Gamkrelidze, Discovery of the maximum principle, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, no. 4, 1999, 437-451.
- [2] O. Bolza, Calculus of variations, Chelsea Publishing Co., New York, 1973.
- [3] E. Laroche, Commande Optimale, Polycopié de cours, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2010.
- [4] L. Pontriaguine, V. Boltianski, G. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, Théorie Mathématique des Processus Optimaux, Moscou : Mir, 1974.
- [5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Optimal Control - Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, 1989.
- [6] M. H. A. Davis, Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, 1977.
- [7] D. Alazard, Introduction au filtre de Kalman, Notes de cours, Janvier 2005.
- [8] K. J. Astrom and B. Wittenmark, Adaptive control., Dover, 2008.
- [9] V. V. Chalam, Adaptive control systems: Techniques and applications, Marcel Dekker, 1987.
- [10] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, Addison Wesley Publishing Company, Twelfth edition, 2011.
- [11] J. L. Gonzales, Commande Adaptative à Modèle de Référence de Systèmes Discrets, Notes de cours, European Organization for Nuclear Research, 8 Novembre 1988.
- [12] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi, Adaptive control. Springer, 2011.