

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE 8 MAI 1945, GUELMA

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE ET TELECOMMUNICATIONS

## THÈSE

*Pour obtenir le diplôme de*

**Doctorat en Sciences**

**Option : Génie Électrique**

*Présentée et soutenue publiquement*

*Le : 04/07/2018*

*Par :*

**M. Riadh DJABRI**

*Thème :*

---

**Synthèse d'un Prédicteur de Smith (SP) par  
l'utilisation des transferts d'ordre non entier**

---

*Devant le jury :*

Président :	M. BABOURI Abdesselam	Prof.	Université de 8 Mai 1945, GUELMA
Encadreur :	M. SEDRAOUI Moussa	Prof.	Université de 8 Mai 1945, GUELMA
Examineur :	M. LACHOURI Abderrazek	Prof.	Université de 20 Août 1955 SKIKDA
Examineur :	M. MEHENNAOUI Lamine	MCA	Université de 20 Août 1955 SKIKDA

**Année universitaire : 2017/2018**

# Remerciements

Avant tout, je remercie « ALLAH » tout puissant qui m'a aidé à réaliser ce travail de thèse et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ma vie.

Ce travail a été réalisé au département d'électronique et télécommunication au sein de l'université de 8 mai 1945 GUELMA, dirigé par Monsieur **Moussa SEDRAOUI**, professeur à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, que je remercie pour m'avoir accueilli au sein de son groupe de recherche et mis à ma disposition les moyens nécessaires pour mener cette thèse à son terme. Cette thèse n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

Je tiens à remercier également le président de jury **Pr. BABOURI Abdesselam**, de l'Université 08 Mai 1945 Guelma, d'avoir accepté de présider le membre de jury au but d'évaluer ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leur disponibilité :

- **M. LACHOURI Abderrazek** Professeur, Université 20 Août 1955 SKIKDA
- **M. MEHENNAOUI Lamine** Docteur, MCA, Université 20 Août 1955 SKIKDA

Enfin, un grand merci à mes *parents*, ma chère femme *Feriel* et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien, afin d'atteindre ce niveau.

« Une personne qui n'a jamais commis d'erreur ...  
... n'a jamais tenté d'innover »

RIADH DJABRI

# Résumé

Ce travail de thèse porte essentiellement sur la synthèse des contrôleurs robustes d'ordre non entier pour les systèmes à retard pur. En effet des nouveaux transferts d'ordre non entier seront proposés à la structure de SP afin d'améliorer la robustesse de stabilité et des performances du système bouclé. Les contributions principales de ce travail seront bâties autour de la proposition :

- D'une technique de conception d'un modèle d'ordre non entier, basé sur les algorithmes d'optimisation non linéaire, spécifiquement l'algorithme de PSO (particle swarm optimization). L'application de ce dernier, on peut minimiser la fonction objective (l'erreur de modélisation), sous contraintes de pondération fréquentielles, pour but de calculer les paramètres de modèle proposé.

- D'une technique de conception d'un contrôleur robuste d'ordre fractionnaire, basée sur la fonction idéale de Bode, et aussi le prédicteur de Smith, afin de réduire les effets du retard de contrôle en supprimant les termes de retard de l'équation caractéristique (c'est-à-dire que le spectre du système de contrôle en boucle fermée devient fini), cependant, il présente des limitations et inconvénients inhérents importants. Il peut être utilisé pour une classe très vaste de systèmes de retard, sa performance est très élevée aux erreurs de modélisation, pour l'évaluation des effets de ces erreurs et son rejet de perturbation est efficace.

## **Mots Clés :**

Prédicteur de Smith, Modélisation par des transferts Fractionnaires, Optimisation non-linéaire, Fonction idéale de Bode, Robustesse de stabilité et des performances, systèmes à retard.

# Abstract

This Thesis focuses on the synthesis of robust fractional controllers for pure delay systems. Indeed, the new non-integer order transfers are proposed to the SP structure in order to improve the robustness of the stability and the performance of the looped system. The main contributions of this work will be built around the following proposal :

- A technique for designing a non-integer order model, based on nonlinear optimization algorithms, specifically the particle swarm optimization (PSO) algorithm. The application of the latter, one can minimize the objective function (the modeling error), under frequency weighting constraints, for the purpose of calculating the proposed model parameters.

- A design technique of a robust fractional order controller, based on the ideal function of Bode, and also the Smith predictor, in order to reduce the effects of the control delay by removing the delay terms from the characteristic equation (ie, the spectrum of the closed-loop control system becomes finite), however, it has significant inherent limitations and disadvantages. It can be used for a very large class of delay systems, its performance is very high at modeling errors, for evaluating the effects of these errors and its disturbance rejection is effective.

**Key Words :**

Smith Predictor controller, Modelling using fractional transfers, Nonlinear Optimization, Bode's ideal function, Stability Robustness, and Systems with time delay.

## Résumé en Arabe

### ملخص

تعتبر الأنظمة المرفقة بتأخر زمني معتبر هي الأكثر استعمالاً في المجالات الصناعية، تركز هاته الأطروحة على دراسة طريقة مبتكرة وفعالة من أجل تصميم نظام تحكم قوي ومستدام معتمد بشكل أساسي على مصحح من نوع متبأ سميث وأيضاً على التحويلات ذات الدرجة العددية العشرية وذلك بهدف تحسين نتائج هذا المصحح التنبؤي في حالة وجود أخطاء مرفقة بالنموذج الرياضي الخطي الذي يصف ديناميكية النظام الفيزيائي الحقيقي المراد التحكم فيه. و بالتالي يمكننا التغلب على سلبيات التأخر الزمني المرفق بهذا النظام الفيزيائي محل الدراسة.

تتمحور المقترحات الرئيسة في هاته الأطروحة حول العناصر الآتية:

- تقنية تصميم نموذج ذو درجة عددية عشرية، تعتمد على خوارزميات التحسين غير الخطية، وهذا يقدم لنا افضل حلول لتصغير دالة الهدف المتعلقة مباشرة بخطأ النمذجة.
- تقنية تصميمية جديدة لوحدة تحكم قوية، تعتمد على تهجين دالة بود مع متبأ سميث. من أجل متانة الاستقرار و دقة التحكم.

### الكلمات المفتاحية:

الأنظمة ذات تأخر زمني، نظام تحكم متبأ سميث، النمذجة باستخدام التحويلات ذات الرتبة العشرية، الأمثلة الغير خطية، الدالة الوظيفية المثالية ل بود، و متانة الاستقرار و دقة التحكم.

# Liste des symboles et notations

$\mathbb{R}^+$	Ensemble des réels positifs
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\omega$	Pulsation (fréquence)
$s$	Opérateur de Laplace
$D_s$	Domaine de stabilité
$\Gamma$	Fonction Gamma
$S_d$	Sensibilité directe
$S_c$	Sensibilité complémentaire
$G_r$	Fonction de transfert du système réel
$G_m$	Fonction de transfert du modèle
$C$	Fonction de transfert du contrôleur
<i>PID</i>	Contrôleur Proportionnel, Intégral, Dérivé
<i>SP</i>	Prédicteur de Smith.
<i>PSO</i>	Optimisation par essaim de particule
<i>FOPTD</i>	Première ordre plus un temps de retard
<i>SOPTD</i>	Deuxième ordre plus un temps de retard
<i>FO-PID</i>	PID d'ordre non entier
<i>ITAE</i>	Integral Time Absolut Error

# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Liste des symboles et notations	v
Introduction générale	1
<b>I Modélisation et commandes conventionnelles des systèmes à retard</b>	<b>9</b>
I.1 <b>Introduction</b> . . . . .	9
I.2 <b>Les systèmes à reatrd</b> . . . . .	10
I.2.1 Exemples des systèmes à retard . . . . .	10
I.2.1.1 <i>Réseaux de communication</i> . . . . .	10
I.2.1.2 <i>Les biosystèmes</i> . . . . .	11
I.2.2 Modèles irrationnel de premier et de deuxième ordre plus retard pur	13
I.3 <b>Stabilité des systèmes à retard</b> . . . . .	13
I.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	13
I.3.1.1 <i>Notion d'état et de point d'équilibre</i> . . . . .	14
I.3.1.2 <i>Stabilité d'une solution générale</i> . . . . .	14
I.3.1.3 <i>Stabilité du point d'origine</i> . . . . .	14
I.3.1.4 <i>Attractivité</i> . . . . .	16
I.3.1.5 <i>Stabilité asymptotique</i> . . . . .	16
I.3.1.6 <i>Stabilité exponentielle</i> . . . . .	16
I.3.1.7 <i>Stabilité robuste</i> . . . . .	17
I.4 <b>Commandes conventionnelles des systèmes à retard</b> . . . . .	17
I.4.1 Approche basée sur la commande par retour d'état . . . . .	18
I.4.2 Contrôleur PID . . . . .	19

I.4.3	Approche basée sur le Prédicteur de Smith . . . . .	22
I.4.3.1	<i>Prédicteur de Smith (SP)</i> . . . . .	22
I.4.3.2	<i>Dérivation du prédicteur de Smith</i> . . . . .	23
I.4.3.3	<i>Exemple de limite de robustesse pour SP à contrôleur <math>C(s)</math></i> . . . . .	25
I.4.4	Approche basée sur la commande par modèle interne (IMC) pour le prédicteur de Smith . . . . .	26
I.4.4.1	<i>Règles d'ajustement du contrôleur par IMC pour prédicteur de Smith</i> . . . . .	26
I.4.4.2	<i>Processus de dominance à décalage</i> . . . . .	28
I.4.4.3	<i>Système à retard dominé</i> . . . . .	29
I.4.4.4	<i>Résumé des règles IMC pour le Prédicteur de Smith</i> . . . . .	30
I.4.5	Quelques contrôleurs de prédicteur de Smith . . . . .	30
I.4.5.1	<i>Contrôleur parallèle alternatif</i> . . . . .	30
I.4.5.2	<i>Contrôleur en cascade</i> . . . . .	31
I.4.6	Conversion des contrôleurs . . . . .	31
I.5	<b>Simulation</b> . . . . .	33
I.6	<b>Conclusion</b> . . . . .	40
<b>II Outils mathématiques pour la modélisation et la commande avancée des systèmes à retard</b> . . . . .		
		45
II.1	<b>Introduction</b> . . . . .	45
II.2	<b>Les systèmes fractionnaires</b> . . . . .	45
II.2.1	Définitions préliminaires . . . . .	46
II.2.1.1	<i>La fonction Gamma d'Euler :</i> . . . . .	46
II.2.1.2	<i>L'opérateur intègro-différentiel d'ordre non entier</i> . . . . .	46
II.2.1.3	<i>Définition de Grünwald-Letnikov (G-L)</i> . . . . .	47
II.2.1.4	<i>Définition de Riemann-Liouville (R-L)</i> . . . . .	47
II.2.1.5	<i>Définition de Caputo :</i> . . . . .	47
II.2.2	Méthodes d'approximation d'un transfert rationnel . . . . .	48
II.2.2.1	<i>Méthode de Mastuda</i> . . . . .	48
II.2.2.2	<i>Méthode de Charef</i> . . . . .	48
II.2.2.3	<i>Méthode d'Oustaloup</i> . . . . .	49
II.2.3	Stabilité des systèmes fractionnaires . . . . .	50
II.2.3.1	<i>Critère de commandabilité</i> . . . . .	50
II.2.3.2	<i>Critère d'observabilité</i> . . . . .	50

II.2.3.3	<i>Analyse de la stabilité</i>	51
II.3	<b>Les algorithmes d'optimisation sous contraintes</b>	51
II.3.1	Solution basée sur l'Optimisation par essaim de particule (PSO)	53
II.3.1.1	<i>Explication de l'idée</i>	53
II.3.1.2	<i>Principe de voisinage</i>	54
II.3.1.3	<i>Algorithme standard d'optimisation par essaim de particule</i>	56
II.4	<b>Conclusion</b>	59
 <b>III Les contrôleurs d'ordre non entier et les systèmes à retard</b>		 <b>60</b>
III.1	<b>Introduction</b>	60
III.2	<b>Représentation des contrôleurs d'ordre non entier</b>	60
III.2.1	Equation différentielle fractionnaire	61
III.2.2	Représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire	61
III.2.3	Fonction de transfert d'un contrôleur fractionnaire	62
III.3	<b>Réponses des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire</b>	63
III.3.1	Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler	63
III.3.2	Système d'ordre fractionnaire de relaxation	63
III.3.2.1	<i>Approximation par une fonction rationnelle</i>	64
III.3.2.2	<i>La réponse indicielle</i>	66
III.3.3	Système d'ordre fractionnaire oscillatoire	66
III.3.3.1	<i>Approximation par une fonction rationnelle</i>	67
III.3.3.2	<i>La réponse fréquentielle</i>	68
III.4	<b>Commande d'ordre non entier</b>	70
III.4.1	La commande CRONE	70
III.4.2	Contrôleur d'ordre non entier (fractionnaire) : $PI^\lambda D^\mu$	70
III.4.3	Contrôleur d'ordre non entier $TID$	71
III.4.4	Contrôleur avance-retard de phase d'ordre non entier	72
III.4.5	Commande avec référence de la fonction idéale de Bode	73
III.5	<b>Application de la commande fractionnaire simple sur les systèmes à retard</b>	73
III.6	<b>Conclusion</b>	78
 <b>IV Modélisation et commande avancée des systèmes à retard</b>		 <b>80</b>
IV.1	<b>Introduction</b>	80
IV.2	<b>Modélisation avancée des systèmes à retard</b>	81

IV.2.1 Proposition d'un modèle fractionnaire modélisant le système à retard	81
IV.2.2 Formulation du problème d'optimisation de la modélisation avancée	81
<b>IV.3 Commande avancée des systèmes à retard pur</b>	<b>82</b>
IV.3.1 Proposition d'une structure fractale pour le contrôleur fractionnaire à synthétiser	82
IV.3.2 Déterminations des paramètres du contrôleur fractionnaire	86
IV.3.2.1 <i>Approche basée sur la fonction de transfert idéal de Bode</i>	86
IV.3.2.2 <i>Approche basée sur la théorie de la commande robuste</i>	87
<b>IV.4 Simulations et discussion des résultats</b>	<b>89</b>
IV.4.1 Algorithme proposé pour la modélisation et la synthèse du contrôleur	89
IV.4.2 Simulation : Premier cas	90
IV.4.2.1 <i>Analyse fréquentielle</i>	92
IV.4.2.2 <i>Analyse temporelle</i>	94
IV.4.3 Simulation : Deuxième cas	97
IV.4.3.1 <i>Analyse fréquentielle</i>	99
IV.4.3.2 <i>Analyse temporelle</i>	100
<b>IV.5 Conclusion</b>	<b>104</b>
 <b>Conclusions et perspectives</b>	 <b>105</b>
 <b>A Les transferts d'ordre non entier</b>	 <b>107</b>
A.1 <b>Bref historique</b>	107
A.2 <b>Terminologie</b>	108
A.3 <b>Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires</b>	109
A.3.1 Outils de base de la transformée de Laplace	109
A.3.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	111
A.3.3 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo	112
A.3.4 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov	113
 <b>Bibliographie</b>	 <b>115</b>

# Liste des tableaux

I.1	Systemes et leurs controleurs internes PI ou PID en cascade de predicteur de Smith donne a partir de la derivation SP . . . . .	24
IV.1	Les performances de la reponse indicielle par le controleur <i>SP-fractionnaireproposetceluideW</i>	
IV.2	Les performances de la reponse indicielle par le controleur <i>SP-fractionnaireproposetceluideD</i>	

# Table des figures

I.1	Schéma bloc d'un réseau de communication [55] . . . . .	12
I.2	Stabilité au sens de Lyapouov pour un point d'équilibre $x_e$ [62] . . . . .	15
I.3	Schéma fonctionnel de commande par retour d'état . . . . .	19
I.4	Tracé des Amplitudes $S_d, S_s, G_c$ , et $G_c S_d$ [59] . . . . .	20
I.5	Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith . . . . .	22
I.6	Illustration graphique de la solution de l'équation (I.10- b) exprimée sur la forme $f(T_1, \Delta\theta)$ (surface rouge) avec $T_k$ (surface bleue) pour référence [59]. . . . .	29
I.7	Représentation graphique de $f(T_I, T_D)$ [59]. . . . .	31
I.8	Représentation graphique de $g(T_I, T_D)$ [59]. . . . .	32
I.9	Diagramme de Bode de $G_r(s)$ . . . . .	33
I.10	Interface graphique assurant la modélisation du processus réel. . . . .	35
I.11	Comparaison entre $G_r$ et $G_{m_0}$ . . . . .	36
I.12	Comparaison entre $G_r$ et $G_{m_1}$ . . . . .	37
I.13	Comparaison entre $G_r$ et $G_{m_2}$ . . . . .	38
I.14	Comparaison entre $G_r$ et $G_{m_W}$ . . . . .	39
I.15	Synthèse du contrôleur PID via le premier modèle d'ordre élevé. . . . .	40
I.16	Synthèse du contrôleur via la commande par le modèle interne de Wang. . . . .	41
I.17	Systèmes bouclés par les trois contrôleurs $C_{PID}(s)$ , $C_{IMC}(s)$ , et $C_W(s)$ . . . . .	42
I.18	Sorties fournies par les trois contrôleurs $C_{PID}(s)$ , $C_{IMC}(s)$ , et $C_W(s)$ . . . . .	43
I.19	Sorties fournies par les trois contrôleurs $C_{PID}(s)$ , $C_{IMC}(s)$ , et $C_\omega(s)$ . . . . .	44
II.1	Régions de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire dans le plan $s^\alpha$ [62]. . . . .	52
II.2	Essaim des oiseaux en formation $V$ [51]. . . . .	53
II.3	Voisinage géométrique [51]. . . . .	55
II.4	Voisinage en cercle à choix régulière [51]. . . . .	56
II.5	Voisinage en cercle à choix aléatoire [51]. . . . .	57

---

II.6 Schéma de principe du déplacement d'une particule [51]. . . . .	58
III.1 Distribution de la fonction de temps de relaxation $G(\tau)$ . . . . .	65
III.2 La réponse fréquentielle de (III.18) et (III.36) pour plusieurs valeurs de $\alpha$ . . .	69
III.3 Disposition du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ . . . . .	71
III.4 Réponse fréquentielle du contrôleur avance-retard de phase fractionnaire. . .	72
III.5 Réponse fréquentielle de la fonction idéale de Bode [58]. . . . .	74
III.6 Schéma block du premier critère assurant le premier objectif. . . . .	75
III.7 Schéma block du deuxième critère assurant le deuxième objectif. . . . .	76
III.8 L'évolution de la fonction cout durant le processus d'optimisation par le PSO	76
III.9 Comparaison entre les réponses temporelles des deux contrôleurs $C_{FO\_PID_1}(s)$ et $C_{PID}(s)$ . . . . .	77
III.10 Comparaison entre les réponses temporelles des deux contrôleurs $C_{FO\_PID_2}(s)$ , et $C_W(s)$ . . . . .	78
IV.1 Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Première phase . . . .	83
IV.2 Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Deuxième phase . . .	83
IV.3 Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Troisième phase . . .	84
IV.4 Schéma bloc du système de contrôle à retour d'état . . . . .	84
IV.5 Comparaison entre le modèle fractionnaire proposé et l'un de Wang pour le premier cas . . . . .	92
IV.6 Les deux fonctions de sensibilité obtenues par la méthode proposée et l'une de Wang pour le premier cas . . . . .	93
IV.7 La sensibilité inverse pour le premier cas pour les deux contrôleurs SP-fractionnaire et de Wang . . . . .	93
IV.8 Comparaisons entre les deux contrôleurs SP-fractionnaire proposé et de Wang dans le domaine temporel pour le premier cas. . . . .	95
IV.9 Modèle fractionnaire proposé et le modèle de Wang pour le premier cas . . .	96
IV.10 Modèle fractionnaire proposé comparé par l'un de Das pour le Deuxième cas	99
IV.11 Comparaison entre le contrôleur SP-fractionnaire et celui de Das Dans le do- maine fréquentiel pour le deuxième cas . . . . .	100
IV.12 Comparaison entre le modèle fractionnaire proposé et les modèles de Wang et Das pour le deuxième cas . . . . .	101
IV.13 La sensibilité inverse pour le deuxième cas (3 contrôleurs) . . . . .	102

---

IV.14 Réponse temporelle du contrôleur SP-fractionnaire proposé par apport l'un de Das pour deuxième cas . . . . .	102
IV.15 Réponses indicielles pour le deuxième cas des trois contrôleurs . . . . .	103

# Introduction générale

Le temps de retard (ou le temps mort) est le pire ennemi du contrôle [1], car il ajoute un déphasage qui affecte la stabilité de la boucle fermée. Pour cela, il est très difficile de commander les systèmes qui possèdent un temps de retard. Toutefois, les régulateurs classiques, et surtout le contrôleur fameux proportionnel intégral dérivé (PID) reste incapable de couvrir tous les besoins de performance dans le cas des processus industriels, généralement non linéaires, instables, et à grand retard pur [2], mais aussi lorsque les performances exigées par l'utilisateur sont très tendues : forte atténuation des perturbations, erreur de trainage nulle en poursuite, réponse en temps minimal, ceci amène à fonctionner sur des contraintes qui affectent soit les variables d'action, soit des variables internes du processus. Le PID basé sur le Prédicteur de Smith à compensation de retard utilise également un modèle, mais il ne fait pas de prédiction du futur.

Les transferts d'ordre non entier, c'est sujet de recherche scientifique depuis plus de 300 ans, la théorie du calcul fractionnaire a été développée dans la plupart du temps par des mathématiciens. Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au ce genre de calcul par l'application de ces concepts dans différents domaines de l'ingénierie. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes de réseaux de communication [3], les différents biosystèmes, et plusieurs d'autres exemples [4]. C'est seulement dans les dernières années que l'on peut trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande [5]. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

A notre connaissance, les premiers développements de l'intégration du calcul fractionnaire dans la commande des systèmes, ont été initiés par Oustaloup [6, 7], qui a développé la Commande Robuste d'Ordre non Entier (CRONE) et a appliqué cette technique dans divers domaines de commande des systèmes [8]. Depuis cette initiative, la commande d'ordre frac-

tionnaire a gagné l'intérêt de nombreux chercheurs. Podlubny a proposé le régulateur PID d'ordre fractionnaire [9, 10], une généralisation du correcteur PID classique [11].

La modélisation consiste à trouver un modèle paramétré dont le comportement dynamique approche celui du système, cette représentation est utilisée pour la simulation des systèmes dans le but de la conception et la commande des systèmes. Mais, si les systèmes à commander sont d'ordre fractionnaire, ou possèdent un temps de retard, leurs modèles associés doivent être aussi d'ordre fractionnaire [12].

Principalement, on a deux grandes classes de modèles qui sont : le modèle de connaissance et le modèle de comportement (expérimental) [13]. Ce classement est établi à propos des informations qui sont utilisées pour leurs constructions.

La conception des modèles de connaissance est basée sur l'analyse des systèmes physiques, chimiques, biologiques, . . . , etc. En appliquant les lois générales fondées sur des principes et lois de la mécanique, l'électromagnétisme, de la thermodynamique ...etc, [13, 14]. Toutefois, dans la pratique, on rencontre souvent des obstacles pour la construction des modèles de connaissance soit à cause de la complexité des processus, soit à cause des phénomènes qui sont mal connus. De plus, afin de simplifier les équations, on néglige quelques paramètres physiques, cela permet d'obtenir des modèles moins précis, ce qui nous pousse à la conception des modèles basés sur la mesure des entrées/sorties des systèmes à modéliser, c'est ce qu'on appelle les modèles à comportement.

La procédure de la conception des modèles à comportement, également appelée identification, consiste à poser une structure mathématique paramétrique qui représente une relation entre l'entrée et la sortie. Pour identifier les paramètres de l'équation, on utilise les mesures disponibles. On utilise alors des méthodes d'optimisation, afin d'estimer les paramètres du modèle choisi [15].

### *les systèmes à retard*

Un certain nombre de systèmes physiques peuvent être modélisés par une fonction de transfert incluant un retard pur, ou temps mort. Ces retards peuvent avoir une origine physique : prenons l'exemple d'une réaction chimique, il existe un retard intrinsèque du à la dynamique du mélange. Ces retards peuvent se retrouver dans d'autres situations ; bien souvent celui-ci peut être associé à un transport de matière : transport de l'eau dans une conduite avant d'arriver au niveau du capteur, ou bien un objet sur un circuit de convoyage en industrie.

Il est important de noter qu'un retard n'apparaît pas uniquement dans une fonction de transfert par une réalité physique. Dans bien des cas, afin de limiter l'ordre de la fonction de

transfert lors de la phase d'identification, on choisit d'inclure un retard. Ce retard permet alors de décrire une partie de la dynamique du système d'une manière plus simple qu'en utilisant un ordre plus élevé.

### *Le Prédicteur de Smith*

Du point de vue historique, le premier et probablement aussi le schéma de contrôle le plus réussi et le plus largement utilisé pour les systèmes qui possèdent un temps mort (temps de retard) est la structure, qui généralement connue sous le nom de Prédicteur de Smith en 1957, [16]. Cette stratégie de commande suppose que la fonction de transfert du système à retard contrôlé peut être exprimée comme une combinaison en série d'un système sans retard et d'un retard de transport.

Si la fonction de transfert du système contrôlé peut être factorisée de cette manière, il est possible de surmonter le retard en utilisant un modèle de la partie sans retard du système à prédire le comportement futur du système.

Depuis une boucle de retour évaluant la différence entre la valeur de consigne et la sortie du modèle seulement contrôlerait bien le modèle, mais pas la sortie du système, il est nécessaire d'ajouter une seconde boucle de retour contrôlant également la différence entre la sortie du système et la sortie du modèle retardée, pour compenser les inexactitudes et les perturbations de charge du modèle.

Ainsi, le terme supérieur est retiré de l'équation caractéristique, et l'effet du temps de retard est partiellement compensé. Le contrôleur conventionnel tel que PI ou PID peut ensuite être utilisé en fonction du système contrôlé. Cependant, le contrôleur complet qui comprend à la fois, le contrôleur (PI ou PID) et le modèle du système devient maintenant lui-même un système à retard. Le fait que ce contrôleur contient un temps de retard dans le cadre de sa structure cause des problèmes importants au moment où les contrôleurs ont été mis en œuvre avec des circuits analogiques.

Un équipement compliqué est nécessaire pour réaliser les retards considérablement limités l'application pratique de ce schéma de contrôle. Maintenant, ce n'est plus un problème parce que les contrôleurs numériques peuvent mettre en œuvre des retards assez facilement. Cependant, le prédicteur de Smith par rapport aux autres techniques qui ont plusieurs inconvénients et limites qui ne peuvent pas être simplement éliminés même par des progressions technologiques. Il ne peut être utilisé que pour une classe limitée de systèmes à retard. La fonction de transfert du processus réel correspondante à une description de l'espace d'état

avec un seul retard dans le contrôleur, et aucun retard d'état. Cependant, il existe de nombreux systèmes importants qui contiennent des boucles de retour d'état internes avec des retards considérables.

Les réacteurs chimiques avec flux de recyclage, échangeur de chaleur, et les réseaux de télécommunication, sont probablement les applications des systèmes à retard les plus connues dans la littérature. Leurs équations d'état incluent des retards purs d'état dont l'influence sur le comportement dynamique est considérablement plus complexe que le simple temps de décalage, et retard de phase, qui résulte des retards au niveau de la commande. Le prédicteur de Smith n'est pas une stratégie de contrôle appropriée pour cette classe de systèmes de retard. De même, il ne convient pas aux systèmes à décalage multiples et pour les systèmes à délais distribués.

De plus, le délai est compensé et le terme supérieur est retiré à partir de l'équation caractéristique seulement si la modélisation est parfaite. En raison d'incertitudes de modèle inévitable et des non-linéarités des processus réelles retarder, la compensation ne sera jamais parfaite et par conséquent l'équation caractéristique sera supérieure à un nombre infini de racines, et la performance du contrôleur sera différente de celle donnée par le cahier de charge. Cette différence elle-même provoque des problèmes importants. Puisque le prédicteur de Smith compense en partie les effets de retard, qui peut être accordé par des gains plus grands que les contrôleurs de rétroaction classique, sans perdre la stabilité.

Non seulement la performance mais aussi la stabilité peut être très sensible aux erreurs de modélisation [17]. Il a même été démontré que pour les gains élevés de contrôleur de Smith peut être déstabilisé par des erreurs de retard arbitraires.

Un problème qui est probablement encore pire que cette différence et la sensibilité elle-même est l'absence de tout cadre cohérent, qui permettrait de prendre en compte les informations d'incertitude disponibles explicitement, et concevoir le contrôleur assez robuste pour atteindre la stabilité et satisfaisante les performances dans toutes les conditions d'exploitation prévues et les changements dans les paramètres du système. Pour cette raison, l'analyse de robustesse des schémas de contrôle de prédicteur de Smith est à la plupart du temps, simple, et a des observations appropriées avec une généralisation relativement faible de Hocken et Al [18, 19].

Ainsi, il existe des modifications de schéma de prédicteur de base à un manière significative, voir par exemple les travaux de Shahrokhii [20], Landau [21, 22, 23], et Gao [24]). Une autre astuce possible pour résoudre ce type de problème est l'utilisation d'un prédicteur de Smith adaptatif, comme dans le travail de Malek-Zavarei et Jamshidi [25].

Le troisième problème avec le prédicteur de Smith réside dans le fait qu'il est un schéma de contrôle d'un seul degré de liberté. Cela fonctionne très bien si les signaux de référence et de perturbation sont similaires.

De plus, comme le signal de consigne est modifié par un signal échelon unité, les performances de prédicteur de Smith sont satisfaites pour des perturbations de sortie rapides. Cependant, ses performances se détériorent considérablement si ces signaux deviennent significativement différents.

Généralement, il y a souvent des changements dans la valeur de l'échelon pour l'entrée de référence et des changements lents de la charge, qui peuvent être approximés par des rampes, agissent comme des perturbations. Pour telles conditions, le prédicteur de Smith réglé pour un bon suivi de référence ayant un mauvais rejet de perturbations et vice versa. Ainsi, il est souvent rapporté que le prédicteur de Smith peut atteindre jusqu'à 30% de meilleures performances en termes de l'erreur de moindres carrés sur les contrôleurs PID pour les changements de point de consigne [26]. Cependant, le rejet de perturbations des SP modifiés pour les changements de point de consigne est souvent plutôt médiocre.

La situation est encore pire avec les systèmes astatiques. La valeur du temps de retard est également non nulle, il y aura une erreur d'état stable. Ceci est valable même si le contrôleur contient une action intégrale.

Pour cette raison, il est nécessaire de modifier la structure du prédicteur de base de Smith pour la rendre appropriée, afin de contrôler les systèmes astatiques. Ces modifications peuvent être représentées par des schémas à usage unique relativement simples, et spécialement conçus pour les systèmes avec intégrateur et à retard. Ce caractère a par exemple, l'approche proposée par Watanabe et Ito [27], qui a encore été améliorée par Astrom et al [28], et Zhang [29]. Ces améliorations ont diminué la sensibilité à la non-concordance du délai, et ont réduit le nombre de paramètres du contrôleur afin de simplifier les directives de réglage.

Une approche plus générale a également été proposée par Watanabe [30], l'auteur part du fait que les réponses lentes aux perturbations sont causées par la présence de modes incontrôlables mais observables qui sont générés par la connexion en parallèle du système contrôlé, et son modèle à la commande sont affectés par des perturbations. En utilisant la description de l'espace d'état du système et du compensateur et les critères d'observabilité correspondants, il conçoit un compensateur dynamique de sorte que les modes incontrôlables soient complètement inobservables à la sortie du système. Cette méthode est plus intéressante car elle peut, à être en principe étendue à d'autres structures de contrôle et à des classes de

systèmes plus générales. Conceptuellement, la même approche est utilisée pour concevoir une structure de contrôle à deux degrés de liberté pour un système à retard discret avec un retard de contrôle par Vandeursen [31].

### *Portée de la thèse*

Le schéma du Prédicteur de Smith (SP) est le schéma de control couramment utilisé pour les systèmes qui possèdent un temps mort [32, 33]. Cette stratégie de contrôle a été largement étudié dans des documents de recherche récents avec différentes propositions conduisant à un objectif [34]. Un contrôleur optimal basé sur un modèle optimal obtenu en deux étapes, qui sont : La première c'est l'étape de modélisation et la deuxième est concernant la synthèse du contrôleur [35]. Afin d'assurer un indice d'erreur de suivi peu élevé, un contrôle à faible coût et une moindre sensibilité aux bruits de capteur et aux signaux de perturbation de charge, au même temps [36, 37].

Il est bien connu que le développement des règles de réglage, pour les processus avec un temps mort, nécessite un modèle parfait qui fournit un modèle mathématique idéal avec des détails adéquats [38]. Ce modèle devrait fournir une description précise de la dynamique réelle du processus à contrôler. Malheureusement, un modèle mathématique parfait est rarement disponible en pratique en raison de la forte dynamique non linéaire du processus [39, 40]. Pour fournir une description exacte du système, le processus devrait être réduit dans un modèle approprié tel qu'un modèle de premier ordre à un temps de retard, noté FOPTD (en anglais : First Ordre Plus Time Delay) [41, 42], ou un modèle de deuxième ordre à temps de retard, noté SOPTD (en anglais : Second Ordre Plus Time Delay) [43]. Diverses méthodes de règle de réglage basées sur ces modèles ont été développées pour se rapprocher de la dynamique du processus et garantir la bonne marge de robustesse du système de contrôle de rétroaction. Parmi eux, Zhuang et Atherton [44], ont proposés une méthode de réglage pour les contrôleurs PID à ordre entier pour gérer le modèle FOPTD, ce qui est plutôt une approximation médiocre pour les processus d'ordre supérieur [45]. Palmor [17], a développé un algorithme d'auto-réglage pour le compensateur de temps mort par SP, en utilisant un modèle FOPTD pour des systèmes stables. Cet algorithme estime deux points sur le processus de la courbe Nyquist (analyse fréquentiel) par génération automatique des cycles limites contrôlés. Les points obtenus sont ensuite utilisés dans une procédure au moins carrée pour estimer les paramètres du modèle, dans lesquels un contrôleur de commande entier primaire a été conçu selon la méthode empirique de Zeigler-Nichols. Hang [46], a proposé une méthode pour l'auto réglage et l'auto-synchronisation du SP modifié en utilisant la stratégie des relais par retour d'état. D'autre part, Wang [41], a proposé une méthode analytique pour

concevoir une série de modèles FOPTD, dans lesquels le contrôleur obtenu est conçu par un seul d'entre eux. Kaya [47], a suggéré trois types de modèles d'ordre entier, qui sont : un SOPTD stable, un FOPTD intégrateur et un FOPTD instable. Malheureusement, ces modèles entiers peuvent générer des erreurs dans l'étape d'estimation des paramètres du modèle, en raison d'un retard de temps mort important et d'un processus de commande plus élevé. Baiyu [48], a utilisé la méthode de la fonction de base radiale, basée sur le réseau de neurone (en anglais, Radial Basis Function Neural Network, RBFNN) pour trouver les paramètres FOPTD pour un processus non linéaire [49, 50]. Cependant, cette méthode n'a pas produit une expression analytique pour le modèle. En conséquence, les paramètres du contrôleur ne sont pas faciles à concevoir en utilisant les stratégies précédentes [51, 52]. Notez que l'ordre fractionnel effectué sur l'opérateur de Laplace peut être approché dans la fonction de transfert d'entier habituel qui contient les pôles et les zéros infini. Par conséquent, de nombreuses stratégies de contrôle avancées bénéficient à la propriété précédente, dans laquelle le contrôleur fractionnaire robuste obtenu peut être synthétisé avec des paramètres moins inconnus [53]. Le contrôleur obtenu doit satisfaire plusieurs spécifications imposées lorsque les paramètres du modèle changent dans une large gamme.

Par conséquent, la taille du problème d'optimisation devient considérablement réduite assurant le succès de l'outil d'optimisation.

Le but de ce travail est d'améliorer les performances du schéma de prédicteur de Smith (SP) en boucle fermée pour les systèmes à temps mort. Pour atteindre cet objectif, un nouveau modèle à ordre fractionnaire a été proposé. En outre, une méthode de synthèse basée sur le schéma SP et un problème d'optimisation avec des contraintes réduites pour concevoir le contrôleur fractionné SP robuste proposé. Cette stratégie proposée garantit une bonne dynamique de rejet, une bonne dynamique de suivi des points de consigne et une bonne dynamique d'atténuation des bruits des capteurs pour deux systèmes différents.

Dans le reste de cette thèse on va présenter tous les développements mathématiques liés à cette méthode de contrôle, ainsi que notre méthode proposée.

### *Organisation de la thèse*

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de cette thèse sont présentés en quatre chapitres.

Le premier chapitre qui porte sur la théorie de systèmes à retard, et quelques exemples de ces systèmes, qu'ils existent dans la littérature. Ainsi les principaux modèles de systèmes à retards. Ensuite les techniques conventionnelles de modélisation et commande des systèmes à retard seront bien structurées afin de distinguer leurs limitations dans ce cas de systèmes.

Le deuxième chapitre sera divisé en deux parties, fera l'objet d'une exploitation des outils mathématiques nécessaires à la réalisation de ce travail de thèse, le calcul fractionnaire et une méthode d'optimisation non linéaire. Dans la première partie, nous donnerons les définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier, quelques méthodes d'approximation fractionnaire, les différentes représentations des systèmes fractionnaires et enfin les conditions de stabilité de ces systèmes. La deuxième partie focalisera sur la technique d'optimisation non linéaire de type méta-heuristique (l'optimisation par essaim de particules), en vue de l'obtention des paramètres optimales pour les méthodes proposées dans cette thèse.

Dans le troisième chapitre, la structure d'ordre non entier du fameux PID sera appliquée sur les systèmes à retard afin d'améliorer les performances de ces derniers. Pour atteindre cet objectif un problème d'optimisation sous contraintes doit être résolu par l'algorithme méta-heuristique (PSO).

Le quatrième chapitre, qui est le dernier chapitre de ce travail, englobera nos contributions. La première contribution porte sur la proposition d'un modèle d'ordre fractionnaire basée sur la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville. La deuxième est le développement d'un contrôleur d'ordre non entier basé sur le schéma modifier du Prédicteur de Smith (SP) et la fonction idéale de Bode fractionnaire. Dans ce chapitre, nous appliquerons notre méthode proposée sur des systèmes à retards pur. Nous commencerons par un système avec un grand temps de retard pour lequel on synthétise une loi de commande éliminera l'effet de retard. Ensuite, un deuxième exemple sous la forme d'un système multi lags à retard pour lequel nous montrerons l'efficacité de notre contribution, et la robustesse de ces méthodes proposées.

Enfin, nous conclurons sur ce travail de thèse et nous présenterons les perspectives possibles qu'il permet d'ouvrir la porte vers des solutions pertinentes dans le sujet de la commande des systèmes à retard.

# Chapitre I

## Modélisation et commandes conventionnelles des systèmes à retard

### I.1 Introduction

Qu'est-ce qu'un retard ?

Temps de retard est la propriété d'un système physique par lequel la réponse à une force appliquée (action) est retardée dans son effet [54]. Chaque fois que matérielle, renseignements ou l'énergie est transmis physiquement d'un endroit à l'autre, il y a un retard lié à la transmission.

La valeur du retard est déterminée par la distance et la vitesse de transmission. Certains délais sont courts, certains sont très longues. La présence de longs retards rend l'analyse de système et le contrôle de conception beaucoup plus complexe. Ce qui est pire, c'est que certains retards sont trop long à percevoir et le système est perçu comme un sans retards.

Temps morts (temps de retard) abondent dans le monde. Ils apparaissent dans divers systèmes tels comme des systèmes biologiques, écologiques, économiques, sociales, ingénieries etc. Par exemple, une surexposition aux rayonnements augmente le risque de cancer, mais l'apparition de cancer suit généralement une exposition aux rayonnements de nombreuses années. En économie, la banque centrale dans un pays souvent tente d'influencer l'économie par ajustement des taux d'intérêt ; l'effet d'un changement de taux d'intérêt prend des mois à se traduire par un impact sur l'économie. En politique, les politiciens doivent peu de temps pour prendre des décisions et ils devront attendre quelque temps avant ils découvrent si les décisions sont correctes ou non. En marche arrière d'une voiture autour d'un coin, le pilote doit attendre que la direction prenne effet. En ingénierie, à qui cette thèse met l'accent, il y

a beaucoup de systèmes avec des retards ; Voir la section suivante pour obtenir des exemples.

Une tendance générale en réponse à des erreurs dans un système doit réagir immédiatement aux erreurs et réagir plus si les erreurs ne sont pas atténuées ou éliminées dans le temps comme prévu. Toutefois, pour un système avec des retards, seulement après les retards inhérents seront les erreurs commencent à changer. Par conséquent, il est très important de bien comprendre l'existence de retards et de ne pas le faire réagir de façon excessive. Dans le cas contraire, le système est très probablement dépassé ou même devenir instable. Lorsqu'il s'agit des systèmes à retard pur, la patience est une vertu.

## I.2 Les systèmes à reatrd

Les systèmes qui possèdent des temps de retard abondent dans le monde. Une des raisons est que la nature est pleine des retards transparents. Une autre raison est que les systèmes de retardement sont souvent utilisés pour modéliser une large classe de systèmes d'ingénierie, où propagation et transmission de renseignements ou des documents sont impliqués. La présence des retards rend la conception analyse et contrôle des systèmes beaucoup plus complexes. Dans ce chapitre, quelques exemples de systèmes à retard sont présentés puis un bref aperçu sur le contrôle des systèmes de retard est donné.

Pour un retard donné avec une valeur de  $\theta \geq 0$ , la sortie  $y(t)$  correspondante à l'entrée  $u(t)$  est comme suit :

$$y(t) = u(t - \theta) \tag{I.1}$$

Par conséquent, la fonction de transfert d'un élément de retard est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\theta s} \tag{I.2}$$

### I.2.1 Exemples des systèmes à retard

Quelques exemples physiques des systèmes à retard en ingénierie sont présentés ici.

#### I.2.1.1 Réseaux de communication

Dans ces dernières années, les réseaux de communication ont été parmi la zone de dépression en ingénierie et il existe un intérêt croissant dans le contrôle des systèmes sur des réseaux de communication. Grâce à des réseaux à haut débit, le contrôle sur internet est maintenant

disponible [55]. Ces systèmes sont fréquemment modélisés du point de vue contrôle sous forme de systèmes retardés en raison des temps de retard de propagation inhérentes. Ces derniers sont cruciaux pour la stabilité de système et la qualité de service.

Une seule connexion entre une source contrôlée par un organisme de réglementation de l'accès et un nœud de destination lointaine, servi avec une capacité de transmission constante  $M$  est donné à titre d'exemple ici. Cela peut être décrit par le modèle de fluide, illustré à la figure I.1 (a). Au niveau du nœud de source, l'organisme de réglementation de l'accès contrôle la débit calorifique, selon l'état de congestion du nœud de destination.

L'état de congestion  $y(t)$  est défini comme la différence entre le courant contenu de la mémoire tampon  $u(t)$  et la cible  $\tilde{X}$ , comme suit :

$$y(t) = u(t) - \tilde{X} \quad (\text{I.3})$$

En raison du retard de propagation à partir du nœud de destination vers le nœud source, appelé le retard vers l'arrière  $\theta_b$ , cette situation arrive au niveau du nœud source (régulateur d'accès) qu'après ce retard. Il y a aussi un retard vers l'avant  $\theta_f$ , pour le paquet afin d'arriver au niveau du nœud de destination à partir du nœud de source. Les paquets arrivés sont stockées/accumulées dans la mémoire tampon et envoyée avec une capacité de transmission constante  $\mu$ . L'objectif de contrôle dynamique est de s'adapter  $u(t)$  à  $\mu$ , tout en conservant la mémoire tampon à un niveau acceptable. Le schéma est illustré à la figure I.1 (b).

Les réseaux de communication dans la réalité, qui sont construits à partir des connexions simples, sont beaucoup plus compliquées. Les retards sont souvent variables dans le temps et stochastique. Les informations transmises par l'intermédiaire de réseaux de communication sont codées et il existe ainsi des pertes de paquet.

### **I.2.1.2 Les biosystèmes**

Le temps de retard a été introduit au modèle biosystèmes à produire de meilleure cohérence avec la nature et les résultats de prédiction. L'objectif ultime est de mieux comprendre les systèmes et ensuite de les combattre. Les biosystèmes étudiés dans cette dynamique des populations de la couverture du champ, physiologie, épidémiologie, immunologie, réseaux de neurones et de la cinétique de la cellule.

Le modèle suivant de retard pour la dynamique des populations a été introduit dans [55], modifier le modèle de Verhulst [56], classique pour tenir compte des périodes de l'éclosion et la maturation :

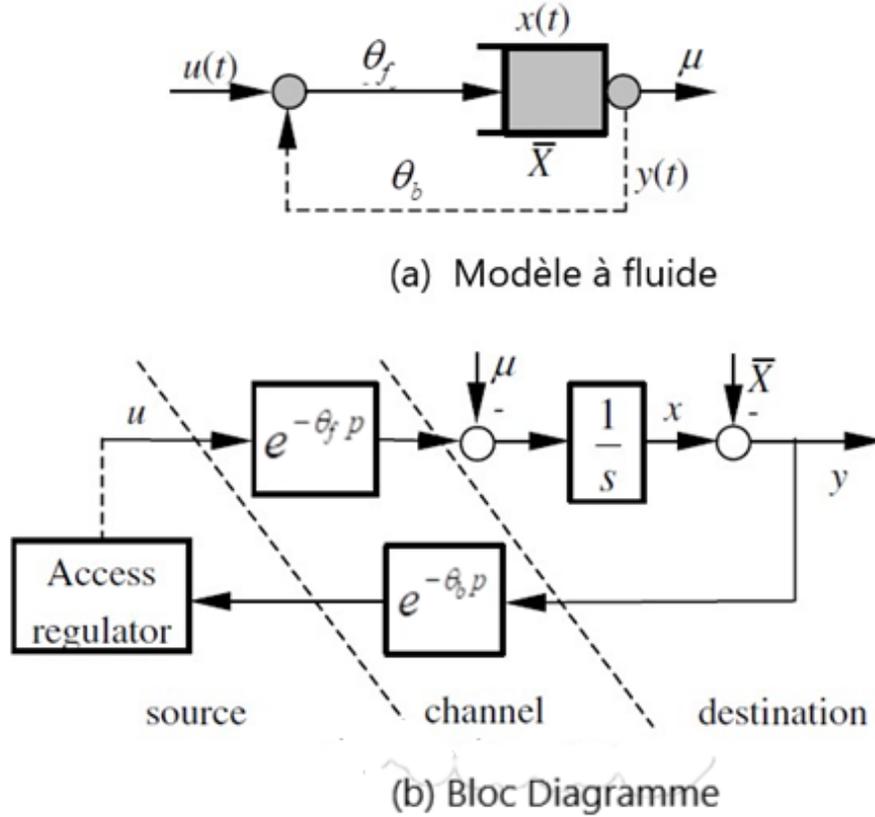


FIG. I.1 – Schéma bloc d'un réseau de communication [55]

$$\dot{y}(t) = \theta y(t) \left( 1 - \frac{y(t - \theta)}{k} \right) \quad (\text{I.4})$$

Ici, les paramètres non négatifs  $\theta$  et  $k$  sont, respectivement, l'intrinsèque taux de croissance et la capacité environnementale. Ce modèle simple peut expliquer le comportement oscillatoire observé dans une population d'une espèce unique, sans toute interaction prédateur d'autres espèces.

Un autre exemple simple est le modèle de croissance des populations de cellules, qui est donnée par la formule :

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t) + \beta y(t - \theta) \quad (\text{I.5})$$

La solution de l'équation  $\dot{y}(t) = 0$  devient instable lorsque la valeur de temp de retard dépasse la limite suivante :

$$\theta = \frac{\cos^{-1}(-\alpha/\beta)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad (\text{I.6})$$

On trouvera des exemples des biosystèmes en [57], et d'autres références à l'intérieur.

## **I.2.2 Modèles irrationnel de premier et de deuxième ordre plus retard pur**

Un autre point qui doit être mis en considération est l'estimation des systèmes du premier ordre à retard pur, appelés dans la littérature par FOPDT (First Order Plus Dead Time). Les modèles de ces systèmes ont reçu une grande attention en raison de l'utilisation répandue dans les techniques de réglage des contrôleurs PID. Souvent la détermination d'un modèle rigoureux est difficile en raison de la nature complexe de certains processus. Par conséquent, identifier ces systèmes par des modèles d'ordre inférieur à partir des données entrées-sorties est une solution très adoptée. Un modèle simple du FOPDT sous la forme suivante :

$$H = \frac{A.e^{-\theta s}}{1 + T.s} \quad (\text{I.7})$$

Où  $A$ ,  $T$ , et  $\theta$  représentent respectivement le gain, la constante du temps et le retard pur, domine pour la conception d'une commande dans les applications industrielles [58, 59]. En revanche, le modèle du FOPDT reste limité lorsque le système est non amorti ou la dynamique est d'ordre élevé. Ainsi, le modèle irrationnel de second ordre plus un temps de retard (SOPTD) est plus représentable que le modèle de premier ordre.

$$H = \frac{A.e^{-\theta s}}{(1 + T_1.s) \cdot (1 + T_2.s)} \quad (\text{I.8})$$

## **I.3 Stabilité des systèmes à retard**

Dans un premier temps on va s'intéresser aux différentes définitions liées à la stabilité des systèmes à retards, ensuite on présentera la seconde méthode de Lyapunov avec les approches de Razumikhin et de Krasovskii [60].

### **I.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov**

L'objectif de cette section est de définir les notions d'état d'équilibre, de point d'équilibre ainsi que les différents concepts de stabilité associés au cas des systèmes à retards. On considère dans la suite que les systèmes étudiés sont décrits sous la forme d'une équation d'état donnée par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (\text{I.9})$$

où  $x(t)$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$ , l'instant initial et l'état initial sont respectivement  $t_0$  et  $\phi_0$ . Le retard est noté  $\theta$ .

La solution à l'instant  $t$  est notée  $x(t; \phi_0, \theta)$ , la fonction d'état solution à l'instant  $t$  étant  $x_t(\phi_0, \theta)$ , qui désigne l'état à l'instant  $t$  qui passe par la fonction initiale  $\phi_0$  à l'instant  $t_0$ .

### **I.3.1.1 Notion d'état et de point d'équilibre**

Un état  $\phi_e$  élément de  $\mathbb{C}$ , est appelé état d'équilibre du système (I.9) si la solution  $x(t; t, \phi_e)$  existe et vérifie  $x_t(t, \phi_e) = \phi_e$  pour  $t \geq t_0$  [61].

Si  $\phi_e$  est un état d'équilibre alors il existe  $x_e \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $\phi_e(\tau) = x_e$ , avec  $\tau$  appartenant à l'intervalle  $[-\theta, 0]$ . Par définition,  $x_e$  est un point d'équilibre de l'équation (I.9).

### **I.3.1.2 Stabilité d'une solution générale**

Soi  $x(t; t_0, \phi_0)$  la solution de l'équation (I.9) pour l'état initial  $\phi_0$  à l'instant  $t_0$ .

*Définition 1*

La solution  $x(t; t_0, \phi_0)$  est dite stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $t_0$  et de  $\varepsilon$  tel que l'inégalité  $\|x(t; t_0, \phi) - x(t; t_0, \phi_0)\| < \varepsilon$  soit vérifiée pour toute condition initiale  $\phi_0$  vérifiant  $\|\phi - \phi_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ , pour tout instant  $t \geq t_0$  [5, 59].

Soit  $y(t)$  l'écart entre  $x(t; t_0, \phi)$  la solution de (I.9) et  $x(t; t_0, \phi_0)$  la trajectoire étudiée, ce qui implique :  $y(t) = x(t; t_0, \phi) - x(t; t_0, \phi_0)$ , alors  $y(t)$  est la solution du problème suivant :

$$\dot{y}(t) = g(t, y_t) \tag{I.10}$$

où,  $g(t, y_t) = f(t, y_t + x_t(t_0, \phi_0)) - f(t, x_t(t_0, \phi_0))$   $g(t, 0) = 0$ .

La stabilité de la solution  $x(t; t_0, \phi_0)$  de l'équation (I.9) est équivalente à celle de la solution nulle de l'équation (I.10). C'est pourquoi on suppose par la suite que  $f(t, 0) = 0$  pour tout instant supérieur ou égal à  $t_0$ , et on se restreint à l'étude de la trajectoire nulle (ou du point d'équilibre 0).

### **I.3.1.3 Stabilité du point d'origine**

Le système (I.9) étudié n'étant pas nécessairement stationnaire, les définitions sont relatives à l'instant initial  $t_0$  ou à un intervalle d'instant initiaux  $T_i \subseteq \mathbb{R}$ .

*Définition 2*

L'origine du système (I.9) est un équilibre stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $t_0$  et  $\varepsilon$  tel que pour toute condition initiale

$$\phi : \|\phi\|_\theta < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Cette définition est illustrée par la figure I.2.

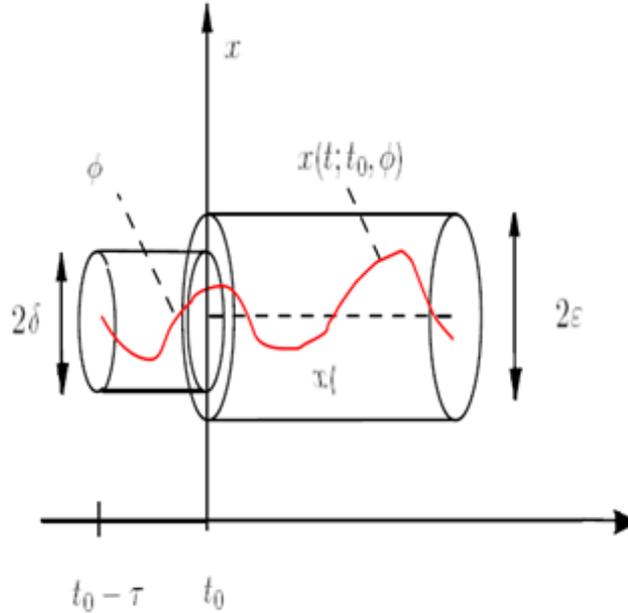


FIG. I.2 – Stabilité au sens de Lyaponov pour un point d'équilibre  $x_e$  [62]

### Définition 3

L'origine du système (I.9) est uniformément stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $\varepsilon$  tel que pour toute condition initiale  $\|\phi\|_\theta < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$ .

1.  $D_s(t_0)$  est le domaine de stabilité de la solution nulle de (I.9), si :
  - $D_s(t_0, \varepsilon)$  : est le plus grand voisinage connexe de  $\phi = 0$  inclus dans le domaine suivant :
 
$$\{\phi \in \mathbb{C} : (\forall t \geq t_0) (\|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon)\}$$
  - $D_s(t_0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_s(t_0, \varepsilon)$

Dans le cas où  $D_s(t_0) = \mathbb{C}$ , alors l'origine du système (I.9) est dite globalement stable. Elle est stable si elle est par rapport à  $\mathbb{R}$ .

La stabilité est dite *ID* (Independent of Delay) si elle est prouvée pour toute valeur du retard. Elle est dite *DD* (Delay Dependent) si elle n'est vérifiée que pour certaines valeurs de retard.

Dans les différentes définitions de stabilité, il est supposé que les conditions initiales soient continuées par morceaux mais afin de simplifier l'étude on peut les considérer comme continues [62].

### I.3.1.4 *Attractivité*

1. L'origine du système (I.9) est un équilibre attractif par rapport à  $t_0$ , s'il existe un réel positif  $\delta$  dépendant de  $t_0$  tel que, pour toute condition initiale

$$\phi : \|\phi\|_\theta < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \phi)\| = 0.$$

$D_s(t_0)$  est le plus grand voisinage connexe de  $\phi = 0$  tel que,  $\phi \in D_s(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \phi)\| = 0$

2. L'origine du système (I.9) est attractive par rapport à  $T_i$ , si elle est attractive par rapport à tout instant  $t$  de l'ensemble  $T_i$ .
3. L'origine du système (I.9) est attractive si elle est attractive par rapport à  $\mathbb{R}$ .

### I.3.1.5 *Stabilité asymptotique*

L'origine du système (I.9) est asymptotiquement stable par rapport à  $t_0$  (respectivement  $T_i$  ou  $\mathbb{R}$ ) si elle est stable et attractive par rapport à  $t_0$  (respectivement  $T_i$  ou  $\mathbb{R}$ ).

Le domaine de stabilité asymptotique  $D_{sa}(t_0)$  est l'intersection des domaines de stabilité et d'attractivité;  $D_{sa}(t_0) = D_s(t_0) \cap D_a(t_0)$ . Si ce domaine est l'espace  $\mathbb{C}$ , alors l'origine est dite globalement asymptotiquement stable [62].

### I.3.1.6 *Stabilité exponentielle*

L'origine du système (I.9) est exponentiellement stable par rapport à  $t_0$ , s'il existe trois constantes  $\delta$ ,  $a$  et  $b$  strictement positives telles que, pour tout  $\phi$  et pour tout  $t \geq t_0$  :

$$\|\phi\|_\theta < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < a\|\phi\|_\theta \times \exp(-b(t - t_0)).$$

Les constantes  $\delta$ ,  $a$  et  $b$  dépendent éventuellement de  $t_0$ . On appelle  $b$ , le taux de convergence exponentielle [62, 14].

Le domaine de stabilité exponentielle  $D_e(t_0, a, b)$  de l'équilibre  $x_e = 0$ , est défini comme le plus grand voisinage connexe de cet équilibre tel que, pour tout  $\phi \in D_e(t_0, a, b)$  et pour tout  $t \geq t_0$  :

$$\|x(t; t_0, \phi)\| < a\|\phi\|_\theta \times \exp(-b(t - t_0)).$$

### I.3.1.7 *Stabilité robuste*

La notion de "stabilité robuste" peut faire référence à différents types de robustesse. Un système à retard est dit  $H - robustement$  stable si son équilibre est asymptotiquement stable et ceci pour toute fonction  $\theta(t)$  dans un domaine  $H$ . Un système incertain est dit *robustement* stable si son équilibre est asymptotiquement stable pour toutes les incertitudes admissibles sur les paramètres du modèle. La stabilité robuste peut être définie aussi comme la propriété d'un système à maintenir son équilibre asymptotiquement stable sous de "petites perturbations" [62].

## I.4 Commandes conventionnelles des systèmes à retard

Le premier système de contrôle efficace pour les systèmes à retard est le prédicteur de Smith [16]. En introduisant une boucle de rétroaction interne d'un prédicteur, le problème de conception du contrôleur pour un système de retard est alors converti en un problème de conception pour un système sans retard. Cela a considérablement simplifié la conception du contrôleur. Cependant, le prédicteur classique de Smith ne peut pas être appliqué à des systèmes instables. Cela a motivé le prédicteur de Smith modifié et l'assignation à spectre fini.

Le contrôle  $H_\infty$  est une approche clé pour gérer la robustesse. Le problème de contrôle standard  $H_\infty$  pour les systèmes sans retard a été résolu à la fin Années 1980. Depuis lors, le contrôle robuste des systèmes de temporisation a attiré de nombreux chercheurs. Les approches impliquées sont principalement de trois sortes : méthodes de l'opérateur-théorie, méthodes d'espace d'état, et la méthode factorisation J-spectrale. Dans le contexte des méthodes de l'opérateur-théorie, qui sont souvent basé sur des méthodes de levage commutant ou biaiser la théorie de Toeplitz [63]. Le système à retard est traité comme un système général à dimension infinie. Très élégant des résultats ont été obtenus dans. Cependant, puisque le cadre général des systèmes à dimension infinie est utilisé, les solutions sont très compliquées, et difficiles à comprendre pour les ingénieurs. Dans le contexte des méthodes d'espace d'états, comme indiqué dans la théorie des jeux dynamiques [55], joue un rôle important. Dans le contexte de la technique de factorisation spectrale, telles que décrites dans, l'idée Meinsma-Zwart [55], c'est-à-dire, de convertir la factorisation spectrale d'une matrice de transfert de dimension infinie, à celle d'une matrice de dimension finie (l'idée principale).

Une autre contribution liée à ce domaine, illustrée dans [64, 65], où le problème de contrôle  $H$  infinie standard pour les systèmes à retard d'entrée/sortie multiple est résolu en

considérant le retard comme une contrainte de causalité sur le contrôleur, mais il reste le problème de la stabilité pour le système sans retard, ainsi que la réponse est lente.

Ce qui précède n'est qu'un bref aperçu sur le contrôle classique des systèmes à retard.

Par conséquent, l'approche basée sur la commande par retour d'état, ainsi que celle, basée sur le prédictor de Smith classique, et la commande par modèle interne, sont bien détaillées dans la prochaine section.

### I.4.1 Approche basée sur la commande par retour d'état

En théorie du contrôle, on distingue les arrangements en boucle ouverte (BO) et en boucle fermée (BF). Le schéma en boucle ouverte a l'avantage que la question de la stabilité du système est simple ; le système est stable lorsque le contrôleur et le processus sont stables. Les raisons fondamentales de l'utilisation du contrôle par rétroaction, décrites par Skogestad et Postlethwaite, sont résumées comme étant la présence d'une incertitude de signal sous la forme de perturbations inconnues, d'incertitude du modèle de processus et d'un système potentiellement instable.

Ici, un schéma de contrôle par retour d'état, illustré à la figure I.3, est appliqué comme décrit par [66]. L'entrée du régulateur est  $E_p = y_{ref} - y - \eta$ , où  $y$  est la sortie mesurée,  $y_{ref}$  est la référence ou la consigne, et  $\eta$  est le bruit de mesure. Sur cette figure,  $G_c$  désigne la fonction de transfert du contrôleur, tandis que  $G_r$  désigne la fonction de transfert de processus réel. La variable de transformation de Laplace  $s$  est omise des fonctions de transfert pour plus de commodité. La sortie du contrôleur noté  $u$ , et la perturbation d'entrée du processus est noté  $d$ . L'erreur de modélisation  $E_p$  est considérée comme le vrai décalage de sortie de la référence.

L'objectif ici est la réjection des perturbations, et comme un filtre de consigne supprime l'influence de la perturbation dans la boucle fermée, le filtre de référence est ignoré. On suppose que la fonction de transfert de perturbation est égale à l'unité et n'affecte pas le signal de perturbation  $d$ . Ainsi, la réponse en boucle fermée du modèle de processus réel avec un contrôleur à un degré de liberté peut être écrite par l'équation (I.11).

$$y = \underbrace{\frac{1}{1 + G_r G_c}}_{S_d} d + \underbrace{\frac{G_r G_c}{1 + G_r G_c}}_{S_c} y_{ref} - \frac{G_r G_c}{1 + G_r G_c} \eta \quad (\text{I.11})$$

Définir les fonctions :

$$S_d = \frac{1}{1 + G_r G_c}, S_c = \frac{G_r G_c}{1 + G_r G_c} \quad (\text{I.12})$$

où,  $S_d$  est la fonction de transfert de la sensibilité directe, et  $S_c$  représente la fonction de transfert de la sensibilité complémentaire. L'influence de la perturbation, la référence et le signal de bruit sur la réponse est identifiée comme suit :

$$u = G_c S_d (y_{ref} - d - \eta) \tag{I.13}$$

L'expression équivalente pour l'erreur est

$$E_p = S_d d - S_d y_{ref} - S_c \eta \tag{I.14}$$

La référence influence l'entrée de système à travers le produit  $G_c S_d$  et le décalage d'erreur à travers  $S_d$ . La sensibilité complémentaire indique l'amplification du bruit dans la boucle fermée. Par conséquent, si  $S_c > 1$ , le bruit finalement dominera l'erreur. Une illustration graphique fréquentielle du comportement de  $S_d$ ,  $S_c$ ,  $G_c$ , et le produit  $G_c S_d$  ( avec la fonction de transfert du processus réel utilisée dans cet exemple est :  $G_r = \frac{e^{-s}}{1+8s}$  ) sont donnés à la figure I.4. On remarque que le contrôleur n'est pas idéal, car le suivi de référence est médiocre, et le bruit est amplifié ( $S_c > S_d$ ). En ce qui concerne l'action du contrôleur, la courbe de  $G_c S_d$  indique que le contrôleur travaille fortement dans la région des hautes fréquences.

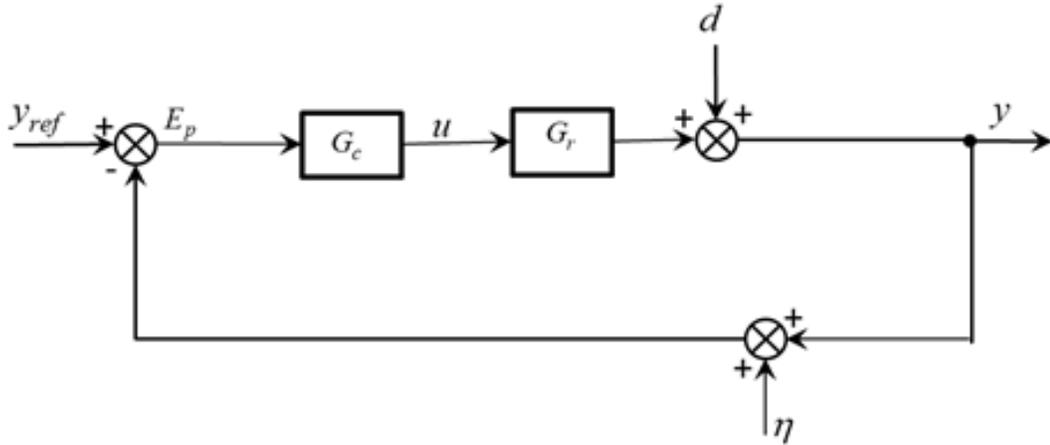


FIG. I.3 – Schéma fonctionnel de commande par retour d'état

### I.4.2 Contrôleur PID

Le contrôleur PID : Proportionnel Intégral Dérivé. C'est un organe de contrôle permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industriel. C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie, et il permet de contrôler un grand nombre de procédés.

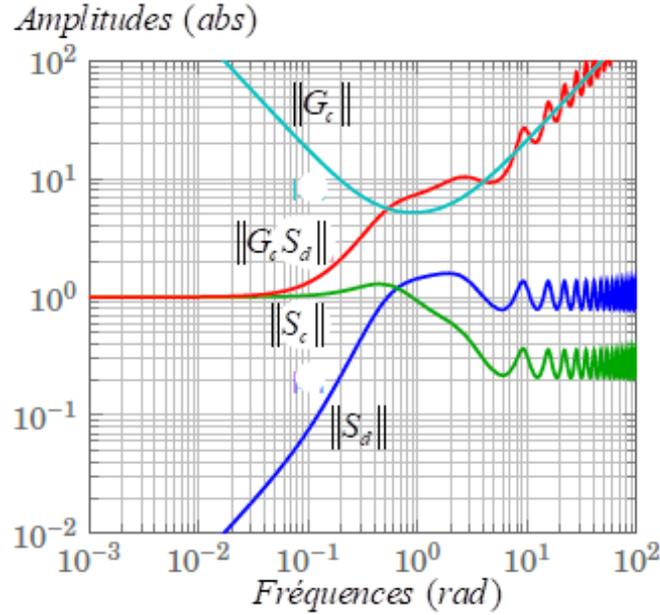


FIG. I.4 – Tracé des Amplitudes  $S_d, S_s, G_c,$  et  $G_c S_d$  [59]

L'erreur observée est la différence entre la consigne et la mesure. Le PID permet trois actions en fonction de cette erreur :

- *Une action Proportionnelle* : l'erreur est multipliée par un gain  $K_p$ .
- *Une action Intégrale* : l'erreur est intégrée sur un intervalle de temps  $s$ , puis divisée par un gain  $T_I$ .
- *Une action Dérivée* : l'erreur est dérivée suivant un temps  $s$ , puis multipliée par un gain  $T_D$ .

Il existe plusieurs architectures possibles pour combiner les trois effets (série, parallèle ou mixte).

Le réglage d'un PID consiste à déterminer ses coefficients, afin d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation. L'objectif est d'être robuste, rapide et précis. Il faut pour cela limiter le ou les éventuels dépassements.

La robustesse est sans doute le paramètre le plus important et délicat. On dit qu'un système est robuste si la régulation fonctionne toujours même si le modèle change un peu. Un régulateur doit être capable d'assurer sa tâche même avec ces changements afin de s'adapter à des usages non prévus/testés (dérive de production, vieillissement mécanique, environnements extrêmes...).

La rapidité du régulateur dépend du temps de montée et du temps de réponse (temps d'établissement du régime stationnaire).

Le critère de précision est basé sur l'erreur statique.

L'analyse du système avec un PID est très simple mais sa conception peut être délicate, voire difficile, car il n'existe pas de méthode unique pour résoudre ce problème. Il faut trouver des compromis, le régulateur idéal n'existe pas. En général on se fixe un cahier des charges à respecter sur la robustesse, le dépassement et le temps de réponse.

Les méthodes de réglage les plus utilisées en théorie sont la méthode de Ziegler- Nichols, la méthode de Naslin (polynômes normaux à amortissement réglable), la méthode du lieu de Nyquist inverse, utilise le lieu de Nyquist [11].

L'équation différentielle pour l'algorithme de contrôle PID sous la structure parallèle est :

$$G_c(t) = K_p \left( E_p(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t E_p(t) dt + T_D \frac{dE_p(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.15})$$

Appliquant la transformée de Laplace à cette équation différentielle, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$G_c(s) = \frac{u(s)}{E_p(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (\text{I.16})$$

Une représentation alternative du contrôleur parallèle avec un ensemble différent de paramètres d'ajustement. La fonction de transfert correspondante est :

$$\begin{cases} \frac{u}{E_p} = K_p \left( P + \frac{I}{s} + Ds \right) \\ P = 1 - I - D \geq 0 \\ I \geq 0, D \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Ici  $K_p, P, I$  et  $D$ , représentent respectivement le gain du contrôleur, l'action proportionnelle, l'action intégrale et l'action dérivée. La configuration alternative est motivée par la capacité de produire des contrôleurs, sans le gain (approche zéro) pour supprimer le terme proportionnel  $P$ . Un autre avantage est que le terme intégral n'aborde jamais l'infini, ce qui peut être le cas avec le paramétrage standard ou en cascade. Ce paramétrage a aussi l'avantage d'éviter d'avoir le terme intégral approche l'infini. Le terme proportionnel du contrôleur est défini par les coefficients des actions intégrale et dérivée, et le gain global est utilisé pour ajuster la sensibilité du contrôleur.

Contrôleur *PID* en cascade; Dans le passé, lorsque les contrôleurs étaient analogiques, il était pratique d'avoir l'élément *PI* et l'élément *PD* en série. C'est le cas du contrôleur en série (ou cascade). Cette structure est très utilisée dans l'industrie. La fonction de transfert

correspondante à ce contrôleur est :

$$\frac{u}{E_p} = K_p \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) (T_D s + 1) \quad (\text{I.18})$$

### I.4.3 Approche basée sur le Prédicteur de Smith

Le problème principal pour contrôler les systèmes à temp-mort est associé avec le temps déchéance avant que l'effet des perturbations, ou des actions de commande sont été appliqués. Le contrôleur sera être tentative pour corriger une situation qui s'est déroulée au passé. Les performances des systèmes de boucle fermée avec des temps morts peut être améliorée par l'application d'un prédicteur de correction [42].

#### I.4.3.1 Prédicteur de Smith (SP)

Il existe des techniques avancées pour la compensation de ce retard significatif. Le prédicteur de Smith est une méthode où le temps de retard est théoriquement éliminé de la fonction de transfert en boucle fermée. Le SP utilise un modèle de processus pour prédire le comportement de système et améliorer ainsi les performances du contrôleur. La base pour l'amélioration des performances, c'est que le contrôleur n'a pas pu attendre la réponse du système, en supposant qu'un modèle de prévision parfaite. Un schéma fonctionnel du prédicteur de Smith est donné dans la figure I.5.

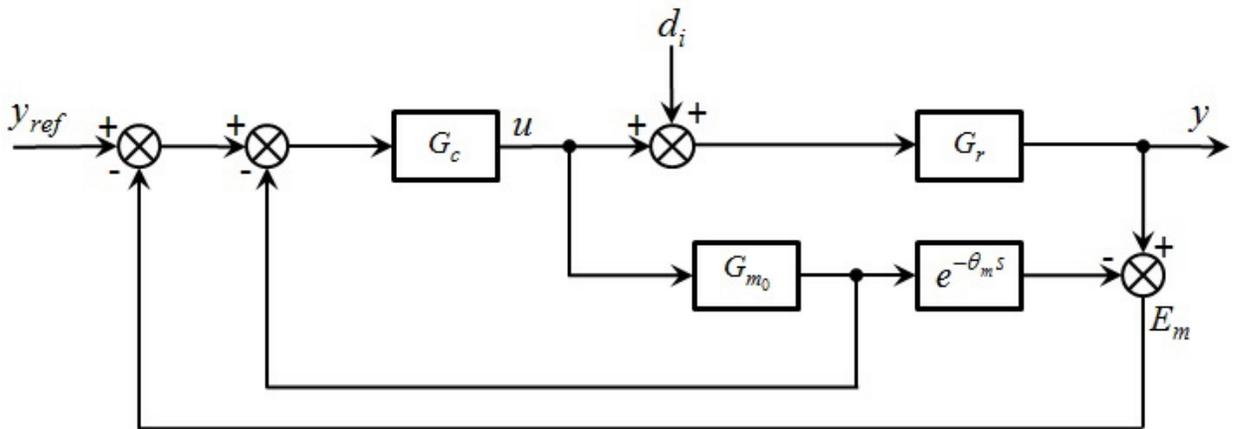


FIG. I.5 – Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith

Où  $y$ ,  $u$ ,  $y_{ref}$ , et  $d_i$  désignent, respectivement, la sortie de processus, le signal de commande, le signal de référence et la perturbation d'entrée de l'usine. En outre,  $G_r$  est le processus réel,  $G_c$  est le contrôleur fractionnaire,  $G_m$  est le modèle fractionnaire, il peut être défini pour un système FOPDT ou SOPTD comme suit :

$$G_m = G_{m_0} e^{-\theta_m s} \quad (\text{I.19})$$

avec,  $G_{m_0}$  est la partie libre de temps de retard du modèle, et  $\theta_m$  représente le temps de retard du modèle.

La fonction de boucle fermée est donnée par

$$\frac{y}{y_{ref}} = \frac{G_c G_r}{1 + G_c (G_{m_0} - G_m + G_r)} \quad (\text{I.20})$$

Si le modèle est parfait c-a-d;  $G_m = G_r$ , cette fonction de transfert se réduit à

$$\frac{y}{y_{ref}} = \frac{G_c G_r}{1 + G_c G_{m_0}} = \frac{G_c G_{m_0} \cdot e^{-\theta s}}{1 + G_c G_{m_0}} \quad (\text{I.21})$$

En plus, puisque l'erreur de modélisation  $G_r - G_m$  est multipliée par  $G_c$  dans l'équation caractéristique :

$$1 + G_c G_{m_0} + G_c (G_r - G_m) = 0 \quad (\text{I.22})$$

Cette caractéristique de prédicteur de Smith peut facilement être montrée à partir des fonctions de transfert du système de contrôle en boucle fermée.

L'idée du correcteur basé sur le prédicteur de Smith est de synthétiser un régulateur pour le procédé auquel on a enlevé le retard pur et dans un deuxième temps, de calculer un correcteur adapté au procédé avec retard, à partir du correcteur calculé auparavant. Ainsi, les calculs sont beaucoup plus simples car le retard pur peut introduire un nombre de pôles à l'origine important et donc, des transferts d'ordre élevé à manipuler.

La dérivation du prédicteur de Smith est basée sur la fonction de sensibilité complémentaire  $S_c$ , avec une réponse préférée de premier ordre en boucle fermée aux changements de la consigne, où,  $G_{m_0}$  contient la dynamique sans retard du modèle. Pour le prédicteur de Smith.

### ***1.4.3.2 Dérivation du prédicteur de Smith***

Le contrôleur basé sur le prédicteur de Smith est dérivé et analysé pour les modèles de processus de type FOPTD et SOPTD. La limite inférieure de robustesse mesurée par la valeur maximale de pic de la fonction de sensibilité directe est dérivée. Un petit exemple pour illustrer la limite lors de l'application d'un primaire contrôleur proportionnel est alors donné. Considérons un contrôleur, , et un processus , qui donnent la réponse en boucle fermée du premier ordre.

Systeme $G$	Contrôleur $K$	paramètre $T_I$	paramètre $T_D$
FOPTD : $\frac{A.e^{-\theta s}}{1+T.s}$	$A \times \frac{1+T.s}{T_K.s}$	$T_I = T_K = T$	$T_D = 0$
SOPTD : $\frac{A.e^{-\theta s}}{(1+T_1.s).(1+T_2.s)}$	$A \times \frac{(1+T_1.s).(1+T_2.s)}{T_K.s}$	$T_I = T_K = T_1$	$T_D = T_2$

TAB. I.1 – Systèmes et leurs contrôleurs internes PI ou PID en cascade de prédicteur de Smith donné à partir de la dérivation SP

$$S_c = \frac{KG_r}{1 + KG_r} = \frac{e^{-\theta s}}{1 + T.s} \quad (\text{I.23})$$

où la réponse du premier ordre a un gain  $K$ , un paramètre de temps  $T_k$ , et un temps de retard  $\theta$ . La résolution dy système pour obtenir le contrôleur, donne :

$$K = \frac{S_c}{G_r - G_r S_c} \quad (\text{I.24})$$

Supposant que  $K$  a une temporisation égale à  $T$ , et  $G_r$  peut être exprimé par  $G_{m_0}e^{-\theta m s}$ .

Ainsi, l'expression de l'équation (I.24) peut être écrite comme suit :

$$K = \frac{\frac{1}{1+T.s}}{G_{m_0} - G_{m_0} \frac{e^{-\theta m s}}{1+T.s}} = \frac{\frac{1}{G_{m_0}} \frac{1}{T.s}}{1 + \frac{1}{T.s} (1 - e^{-\theta m s})} \quad (\text{I.25})$$

Si  $G_r$  est un système de premier ordre, le numérateur de l'équation (I.25) est un contrôleur  $PI$ , et pour un processus de second ordre, le numérateur est un  $PID$  en cascade.

Le contrôleur donné par le tableau I.1, est souvent synthétisé comme le contrôleur primaire du prédicteur de Smith.

À partir de l'équation (I.25), la structure de contrôleur complète pour le prédicteur de Smith est obtenue en reconnaissant que  $KG_{m_0} = \frac{1}{T_k s}$  et en désignant le modèle de système  $G_m$  comme étant le modèle de prédicteur de Smith. Alors,

$$C = \frac{K}{1 + KG_{m_0} (1 + e^{-\theta m s})} \quad (\text{I.26})$$

Il convient de noter que, à partir de la spécification de la réponse du contrôleur, les valeurs de sensibilité directe  $S_d$  et de sensibilité complémentaire  $S_c$  sont limitées à :

$$Pic_{\max}(S_c) - 1 \leq Pic_{\max}(S_d) \leq Pic_{\max}(S_c) + 1 \quad (\text{I.27})$$

et

$$Pic_{\max}(S_c) = 1, \text{ pour } G = \frac{e^{-\theta s}}{1 + T_k s} \quad (\text{I.28})$$

Ainsi, les valeurs de  $Pic_{\max}(S_d)$  pour le prédictiveur de Smith sont limitées à  $Pic_{\max}(S_d) \leq 2$

Ceci est illustré pour un processus de retard pur avec un régulateur proportionnel dans l'exemple suivant.

### **I.4.3.3 Exemple de limite de robustesse pour SP à contrôleur $C(s)$**

Considérons le système à retard pur  $G_r(s) = e^{-s}$ . La structure de contrôleur de prédictiveur Smith correspondant à un contrôleur  $C$  est :

$$C(s) = \frac{K_p}{1 + K_p(1 - e^{-s})} \quad (\text{I.29})$$

où,  $K_p$  est le gain du contrôleur  $P$ , et le modèle du système est  $G_m = 1$ . La fonction de sensibilité directe pour le système en boucle fermée (BF) est

$$S_d = \frac{1}{1 + G_m C} = \frac{1 + K_p(1 - e^{-s})}{1 + K_p} \quad (\text{I.30})$$

Comme  $s = j\omega$ , la relation suivante obtenue de la formule d'Euler

$$e^{-s} = e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j \sin(\omega) \quad (\text{I.31})$$

Qui a remplacé dans  $S_d$ , on se trouve :

$$S_d = \frac{1 + K_p - K_p(\cos(\omega) + j \sin(\omega))}{1 + K_p} \quad (\text{I.32})$$

En séparant la partie imaginaire et réel de cette fonction complexe, et en appliquant certaines formulés trigonométriques, la norme de  $S_d$  peut être exprimée comme :

$$\|S_d\| = \frac{K_p}{1 + K_p} \sqrt{\frac{1}{K_p^2} + \frac{2}{K_p}(1 + \cos(\omega)) + 2 \cos(\omega) + 2} \quad (\text{I.33})$$

Comme une augmentation du gain du contrôleur augmente, le temps de réponse, peut réduire la robustesse du système, la limite où,  $K_p \rightarrow \infty$  est intéressant. Par conséquent, la valeur  $Pic_{\max}(S_d)$  pour  $G(s) = e^{-s}$  est :

$$Pic_{\max}(S_d) = \max_w \left( \lim_{K_p \rightarrow \infty} \|S_d\| \right) = 2 \quad (\text{I.34})$$

La sensibilité complémentaire pour le système à retard pur, peut être montrée d'une manière similaire à toujours être :

$$Pic_{\max}(S_c) = \max_w \left( \lim_{K_p \rightarrow \infty} \|S_c\| \right) = 1 \quad (\text{I.35})$$

Indépendamment de la pulsation  $\omega$ . De la relation  $S_d + S_c = 1$ , il est confirmé que pour le système à retard pur est une structure de prédicteur de Smith avec un contrôleur proportionnel  $P$ , pour tous valeurs de la pulsation  $\omega$ .

#### **I.4.4 Approche basée sur la commande par modèle interne (IMC) pour le prédicteur de Smith**

Dans plusieurs papiers de recherche et surtout de Murata et al [52]. Une introduction basique au contrôle par modèle interne peut également être trouvée dans des manuels standard sur le contrôle de processus (par exemple, Seborg et al., 1989). Le système de contrôle contient deux parties : le contrôleur et le modèle de processus. Si le modèle de processus est parfait, la différence entre la sortie du processus et la sortie du modèle (c'est-à-dire le signal de retour) n'est pas affectée par l'action des variables manipulées, mais elle est donnée uniquement par l'influence des perturbations. Par conséquent, le système de commande est effectivement en boucle ouverte et le contrôleur joue le rôle d'une action directe.

Ce fait a des implications importantes. L'ensemble des contrôleurs qui donnent lieu à des systèmes de contrôle stables peuvent être caractérisés très simplement. Si l'installation contrôlée est stable, alors l'ensemble des contrôleurs pour lesquels le système de contrôle est stable est l'ensemble du produit scalaire de toutes les fonctions de transfert de processus réel et du correcteur stables.

De plus, les fonctions de transfert importantes de la sensibilité et la sensibilité complémentaire dont la forme est directement liée au point de consigne et à la réponse perturbatrice sont utilisées pour améliorer la robustesse du contrôleur.

##### ***I.4.4.1 Règles d'ajustement du contrôleur par IMC pour prédicteur de Smith***

Une analyse pour trouver des limites pour la constante de temps en boucle fermée  $T_k$  lors de l'application des règles de réglage par IMC dans le but de régler un prédicteur de Smith, est effectuée.

Les règles de réglage IMC sont données dans l'équation (I.28).

Le critère de stabilité de Routh est supposé effectuer une analyse de stabilité du système interne de rétroaction non retardée de Smith. L'analyse est basée sur les travaux de Grimholt [67].

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{A} \frac{T_1}{(T_k + \theta)} \\ T_I = \min(T_1, (T_k + \theta)) \\ T_D = T_2 \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

$K_p$ , est le gain du contrôleur.  $T_I$ , et  $T_D$  sont les paramètres correspondant aux actions intégrale et dérivée du *PID*, respectivement.

$A$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , et  $\theta$  sont : le gain de système, les constantes de temps du premier et du deuxième ordre, et le temps de retard, respectivement.

La structure de contrôleur de prédicteur de Smith est dérivée précédemment, est donné comme suit :

$$C = \frac{K}{1 + KG_{m_0}(1 + e^{-\theta_m s})} \quad (\text{I.37})$$

Ici,  $C$  est la structure complète du contrôleur de prédicteur de Smith,  $K$  désigne le contrôleur primal et le modèle de processus est  $G_m = G_{m_0}e^{-\theta_m s}$ .

Supposons que le comportement du processus de sous-couche soit connu de telle sorte que la partie dynamique du modèle soit parfaite, alors  $G_m = G_{m_0}$ . Le temps de retard de modèle est  $\theta_m$ , et le temps de retard du système réelle est noté  $\theta$ . Supposons l'approximation de Taylor du premier ordre de  $e^{-\theta s} \simeq 1 - \theta s$ . La fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) pour un schéma block par retour d'état à un degré de liberté est la suivante :

$$FTBF = \frac{CG_r}{1 + CG_r} \quad (\text{I.38})$$

Substituer  $C$  à partir de l'équation (I.37), et réarranger les résultats dans la fonction en boucle fermée.

$$FTBF = \frac{CG}{1 + CG} = \frac{KG}{1 + KG_{m_0}(1 + e^{-\theta s} - e^{-\theta_m s})} = \frac{KG}{1 + KG_{m_0}(1 + \theta_m s - \theta s)} \quad (\text{I.39})$$

où, l'écart entre les temps de retards réel et modélisé est :  $\Delta\theta = \theta - \theta_m$ .

### I.4.4.2 *Processus de dominance à décalage*

Envisager un modèle de système nominal dominé comme un deuxième ordre plus un temps de retard (SOPTD)

$$G_m = G_{m_0} \cdot e^{-\theta_m s} = \frac{A e^{-\theta_m s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (\text{I.40})$$

Les règles de IMC sont pour contrôler  $G_{m_0}$ , ce qui donne les paramètres du contrôleur  $PID$  en cascade.

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{A} \frac{T_1}{T_k} \\ T_I = 4T_k \\ T_D = T_2 \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Alors,

$$\begin{aligned} KG_{m_0} &= \left( \frac{1}{A} \frac{T_1}{T_k} \right) \left( \frac{4T_k s + 1}{4T_k s} \right) \left( \frac{A}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \right) \\ &= \frac{T_1(4T_k s + 1)}{4T_k^2 s(T_1 s + 1)} \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

Notez que cela n'a pas d'importance si l'on considère le contrôleur  $PI$  d'un processus FOPTD ou le contrôleur  $PID$  d'un processus SOPTD, car le terme dérivé annule le terme de second ordre du modèle de processus.

Le critère général de stabilité stipule qu'un système en boucle fermée ne sera stable que si toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Le critère de stabilité de Routh indique « une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de l'équation caractéristique ayant des parties réelles négatives est que tous les éléments de la colonne gauche du tableau de Routh sont positifs » [11]. L'équation caractéristique est dans ce contexte le dénominateur de l'équation (I.39),

$$1 + KG_{m_0} (1 - \Delta\theta s) = 0 \quad (\text{I.43})$$

En remplaçant l'équation (I.42) par l'équation (I.43), on obtient :

$$a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0 \quad (\text{I.44})$$

où

$$\begin{cases} a_2 = 4T_1 T_k^2 - 4T_1 T_k \Delta\theta \\ a_1 = 4T_k^2 + 4T_1 T_k - T_1 \Delta\theta \\ a_0 = T_1 \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

où,  $a_0$ ,  $a_1$ , et  $a_2$  sont les coefficients de Routh, supposés strictement positifs.

Le critère de stabilité est donc :

$$a_2 > 0 \Rightarrow 4T_1T_k^2 - 4T_1T_k\Delta\theta > 0 \quad (\text{I.46})$$

$$a_1 > 0 \Rightarrow 4T_k^2 + 4T_1T_k - T_1\Delta\theta > 0 \quad (\text{I.47})$$

$$a_0 > 0 \Rightarrow T_1 > 0 \quad (\text{I.48})$$

Les équations (I.46) et (I.48) donnent  $T_k > \Delta\theta > 0$ . L'équation (I.47) est résolue explicitement en termes de  $T_k$ , une illustration graphique de  $T_k > f(T_1, \Delta\theta)$ , avec  $T_1, \Delta\theta \in [0, 5]$ , est donnée dans la figure I.6. Le plan bleu de  $T_k$ , qui est ajouté pour référence. Il est clair que l'équation (I.47) satisfaite si  $T_k > \Delta\theta$ .

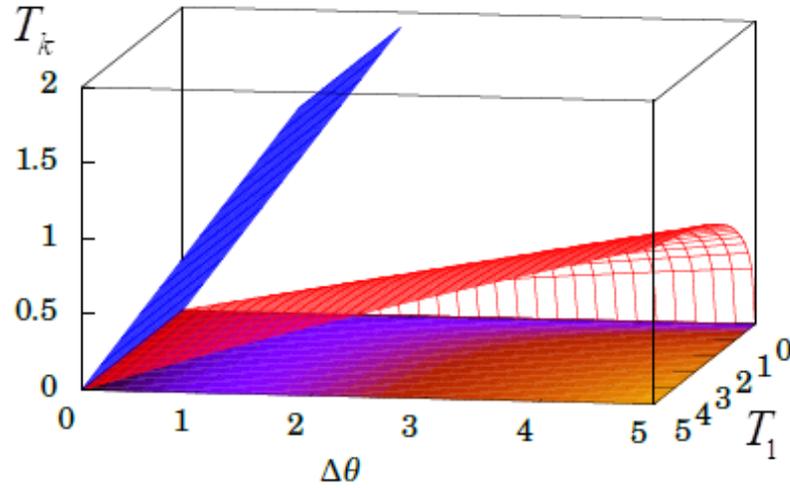


FIG. I.6 – Illustration graphique de la solution de l'équation (I.10- b) exprimée sur la forme  $f(T_1, \Delta\theta)$  (surface rouge) avec  $T_k$  (surface bleue) pour référence [59].

#### I.4.4.3 Système à retard dominé

Comme vue précédemment, le contrôleur en cascade produit par les règles IMC est défini par ces trois actions, comme suit :

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{A} \frac{T_1}{T_k} \\ T_I = T_1 \\ T_D = T_2 \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

qui résulte l'équation caractéristique suivante :

$$(T_k - \Delta\theta)s + 1 = 0 \quad (\text{I.50})$$

Afin d'atteindre un système stable, il faut que  $(T_k - \Delta\theta) > 0$ , donc  $T_k > \Delta\theta$ .

#### I.4.4.4 Résumé des règles IMC pour le Prédicteur de Smith

Les règles de réglage par IMC peuvent être utilisées pour ajuster une structure de prédicteur de Smith avec un modèle de la forme de FOPTD ou SOPTD. En déterminant l'erreur de modélisation de retard maximum  $\Delta\theta$ , et en laissant la constante de temps en boucle fermée  $T_k > \Delta\theta$ , les règles d'ajustement IMC pour un prédicteur de Smith sont :

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{A} \frac{T_1}{T_k} \\ T_I = \min [4T_k, T_1] \\ T_D = T_2 \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

### I.4.5 Quelques contrôleurs de prédicteur de Smith

#### I.4.5.1 Contrôleur parallèle alternatif

La fonction de transfert de contrôleur dans le domaine de Laplace est

$$\frac{u}{\varepsilon} = K \left( (1 - I - D) + \frac{1}{s} + D.s \right) \quad (\text{I.52})$$

où  $K, I$ , et  $D$  sont respectivement les actions proportionnelle, intégrale et dérivée pour un contrôleur  $PID$ . En identifiant les termes du contrôleur, la fonction de transfert de ce contrôleur prend la forme d'un polynôme du second ordre dont l'opérateur de Laplace, la résolution par rapport, on obtient :

$$s = \frac{-(1 - T_I - T_D) \pm \sqrt{(1 - T_I - T_D)^2 + 4T_I T_D}}{2T_D} \quad (\text{I.53})$$

où, le terme  $(T_I - T_D - 1)^2 - 4T_D$ , représente l'équation d'un cylindre parabolique  $f(T_I, T_D)$ . Une représentation graphique de  $f(T_I, T_D)$ , avec  $T_I, T_D \in [0, 1]$ , est illustrée dans la figure I.7,

et il est évidemment que l'intervalle utilisé donne des solutions négatives. Ainsi les solutions de contrôleur peuvent être complexes, ce qui implique  $s \in \mathbb{C}$ .

#### I.4.5.2 Contrôleur en cascade

La fonction de transfert de contrôleur dans le domaine de Laplace est la suivante :

$$\frac{u}{\varepsilon} = K_p \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) (T_D s + 1) \quad (\text{I.54})$$

A partir des mêmes arguments que dans la section précédente, le terme carré dans la solution du polynôme de deuxième ordre, prend la forme d'un cylindre parabolique  $g(T_I, T_D) = (T_I - T_D)^2$ . L'allure de  $g(T_I, T_D)$ , où,  $T_I, T_D \in [-1, 1]$ , est donné dans la figure I.8. Comme  $g \geq 0, \forall (T_I, T_D)$ , les solutions de sont toujours réelles, c'est donc,  $s \in \mathbb{R}$ .

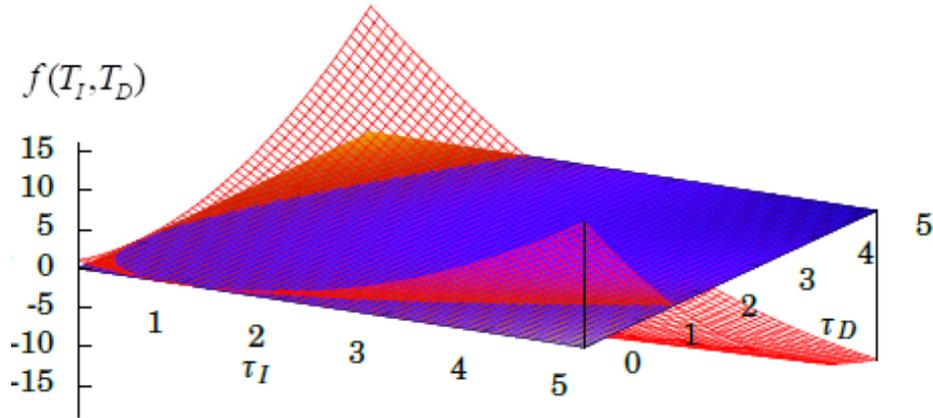


FIG. I.7 – Représentation graphique de  $f(T_I, T_D)$  [59].

#### I.4.6 Conversion des contrôleurs

Les différents paramètres des contrôleurs donnent également des réglages différents. Même ainsi, les contrôleurs doivent être égaux indépendamment du paramétrage choisi. Ce n'est pas le cas lorsque les zéros de contrôleur parallèle sont complexes, car le paramétrage du contrôleur en cascade ne permet pas pour des solutions complexes de contrôleur.

Pour transformer un contrôleur en un autre, les paramètres du contrôleur doivent être comparés, afin de vérifier les règles de conversion.

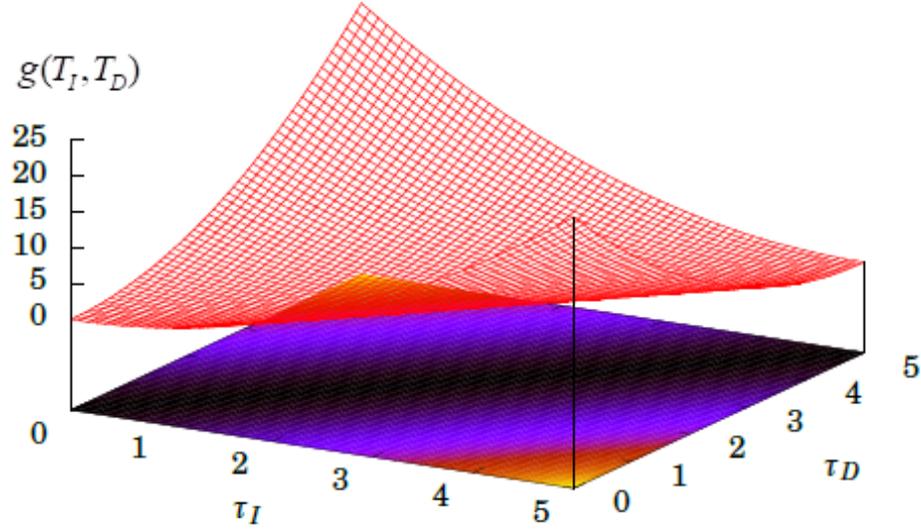


FIG. I.8 – Représentation graphique de  $g(T_I, T_D)$  [59].

Paramétrage de la structure parallèle vers une structure alternative parallèle. La conversion entre les paramètres de réglage pour le contrôleur PID standard à structure parallèle et l'une alternative est effectuée par :

$$\begin{cases} K_p^T = K(1 - I - D) \\ T_I^T = \frac{1-I-D}{I} \\ T_D^T = \frac{D}{1-I-D} \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

où,  $K_p^T$ ,  $T_I^T$ , et  $T_D^T$  sont les paramètres transformés correspondant aux trois actions du contrôleur.

Conversion à partir de structure en cascade. L'idée de calcul est l'égalité entre le paramétrage parallèle alternatif et le paramétrage en cascade.

$$K \cdot \left( (1 - I - D) + \frac{1}{s} + D \cdot s \right) = K_p \left( \frac{T_I s + 1}{T_I s} \right) (T_D s + 1) \quad (\text{I.56})$$

En résolvant l'équation (I.56) par rapport aux paramètres de la structure parallèle alternative, les relations suivantes donnent :

$$\begin{cases} K = K_p \left( 1 + \frac{1+T_D(1+T_I)}{T_I} \right) \\ I = \frac{1}{T_I+T_D(1+T_I)+1} = \frac{K_p}{K T_I} \\ D = \frac{T_I T_D}{T_I+T_D(1+T_I)+1} = \frac{K_p T_D}{K} \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

## I.5 Simulation

Cette partie a pour but de modéliser et commander un processus industriel modélisé par un modèle linéaire à retard pur. Pour atteindre cet objectif, la réponse fréquentielle de ce processus est supposée connue au long de l'intervalle  $\omega \in [10^{-4}, 10^{+4}]$  radians/secondes, et cela par l'application de commande du Matlab *frd.m* sur le transfert ci-dessous :

$$G_r(s) = \frac{e^{-4s}}{(1+s)^5} \quad (\text{I.58})$$

La modélisation basée sur cette réponse fréquentielle est effectuée par des approches classiques d'estimation avec lesquelles on peut développer plusieurs modèles linéaires à savoir, modèle linéaire d'ordre élevé, modèle d'ordre réduit à retard pur, . . . , etc.

Avant de procéder cette étape, la réponse fréquentielle citée précédemment est présentée par le diagramme de Bode comme suit :

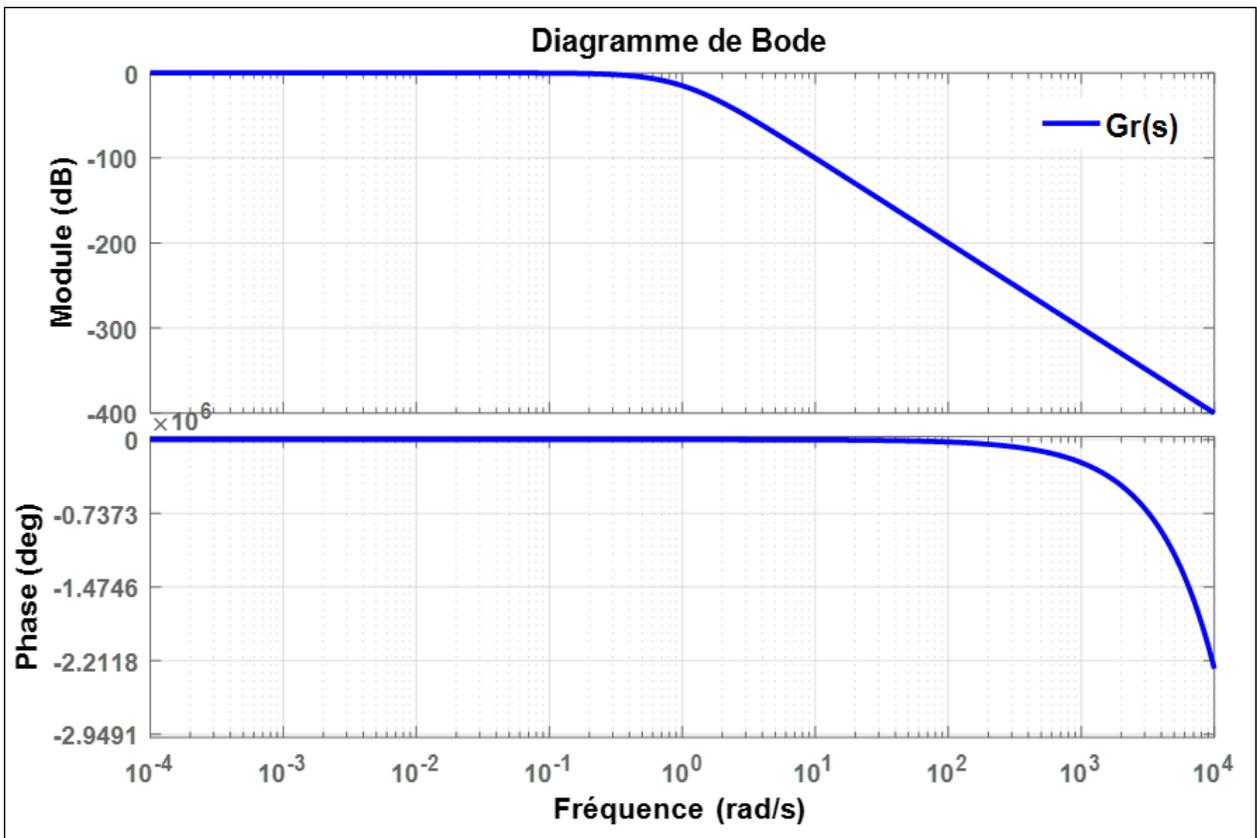


FIG. I.9 – Diagramme de Bode de  $G_r(s)$

Dans la pratique, la synthèse du contrôleur stabilisant le processus industriel précédent

nécessite souvent le développement d'un modèle linéaire adéquat avec lequel la détermination des paramètres du contrôleur est assurée par des méthodes de synthèse où chaque méthode de celles-ci nécessitant une structure adéquate proposée au contrôleur à synthétiser. En général, la synthèse basée sur un modèle à retard pur nécessite a priori l'approximation de ce retard en un transfert irrationnel fourni par la méthode de Padé. Cette approximation est définie comme suit :

$$e^{-\theta.s} = \frac{1 + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{-\theta.s}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \right\}}{1 + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{\theta.s}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \right\}} \quad (\text{I.59})$$

Le premier modèle proposé, dans cette partie, est composé par la partie sans retard du processus cité précédemment multiplié par le transfert irrationnel généré par l'approximation d'ordre 5 du retard pur  $e^{-4s}$ . Par conséquent, la modélisation est assurée par une erreur d'estimation  $\varepsilon_0 = 0.000823$  fournissant ainsi le modèle global final  $G_{m_0}(s)$  d'ordre 10 présenté par le transfert ci-dessous :

$$G_{m_0}(s) = \frac{-(s - 1.459)(s^2 - 2.682 \times s + 2.284)(s^2 - 1.86 \times s + 2.905)}{(1 + s)^5(s + 1.459)(s^2 + 2.682 \times s + 2.284)(s^2 + 1.86 \times s + 2.905)} \quad (\text{I.60})$$

Toutefois, la modélisation basée sur l'approximation ci-dessus la capacité de fournir des modèles mathématiques linéaires très précis. En revanche, un ordre élevé de cette approximation conduit souvent à des modèles d'ordre très élevé compliquant, par conséquent, la phase de synthèse du contrôleur souhaité. C'est pour cette raison qu'on a cherché à d'autre technique assurant un modèle de synthèse d'ordre très réduit.

A cet effet, les modèles restants, proposés dans la suite de ce travail, sont présentés par un transfert d'ordre réduit plus un retard pur. Les paramètres de ces modèles proposés sont estimés à partir de l'exploitation de la réponse fréquentielle précédente dans l'environnement graphique du Matlab assuré par la commande « *ident* ». L'interface graphique de cette commande est illustrée par la figure I.10 comme suit :

L'interface présentée par la figure I.10 à la capacité de fournir plusieurs types des modèles en l'occurrence : modèle du premier ordre plus retard pur (i.e., FOPDT), modèle du second ordre plus retard pur (i.e., SOPDT), les modèles linéaires ARMA, ARMAX, . . . , etc.

Dans cette partie, le modèle FOPDT est via la fenêtre « *Estimate* », en choisissant l'option « *Process models* ». Par conséquent, le processus d'estimation est achevé, après 12 itérations, par l'erreur d'estimation  $\varepsilon_1 = 0.01184$  ainsi que le modèle présenté par le transfert  $G_{m_1}(s)$  suivant :

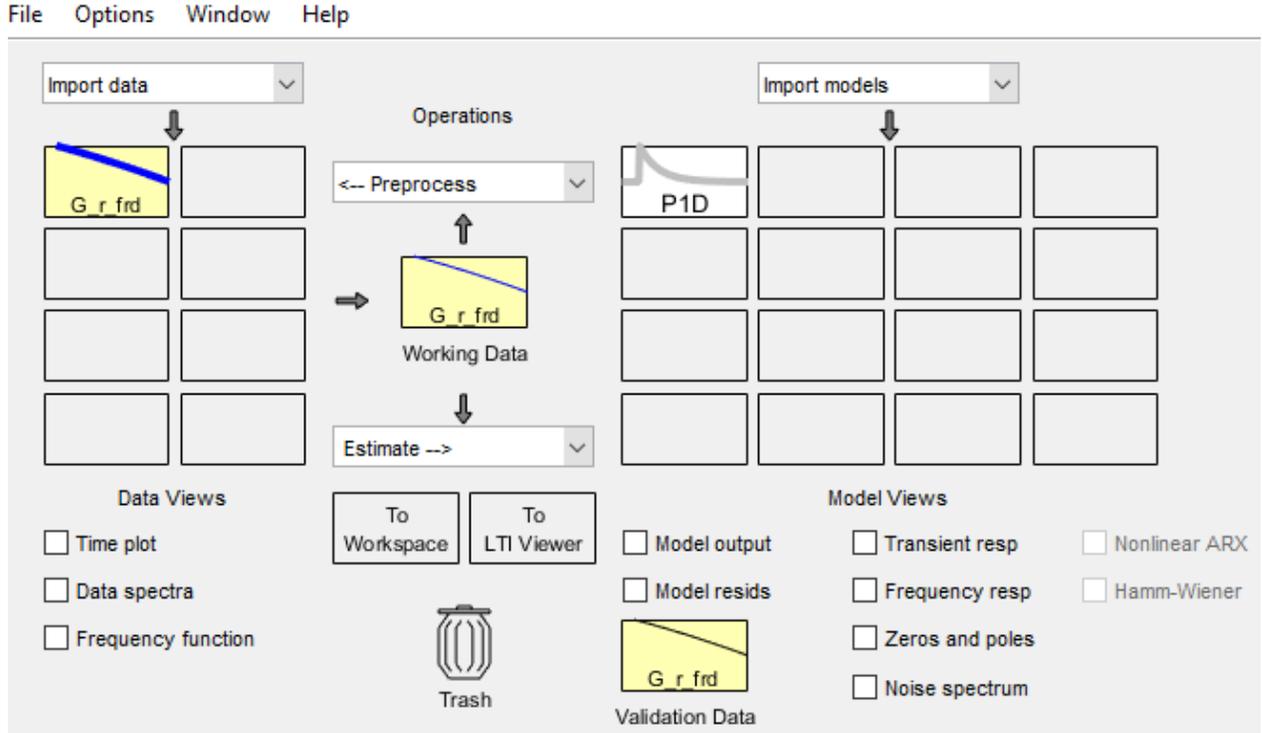


FIG. I.10 – Interface graphique assurant la modélisation du processus réel.

$$G_{m_1}(s) = \frac{1.0194 \times e^{-5s}}{1 + 5.3706 \times s} \quad (\text{I.61})$$

En faisant la même procédure précédente, en choisissant l'estimation par un modèle SOPTD. Le processus d'estimation est achevé, après 18 itérations, par l'erreur d'estimation  $\varepsilon_2 = 0.02101$ , fournissant, également, le modèle présenté par le transfert  $G_{m_2}(s)$  suivant :

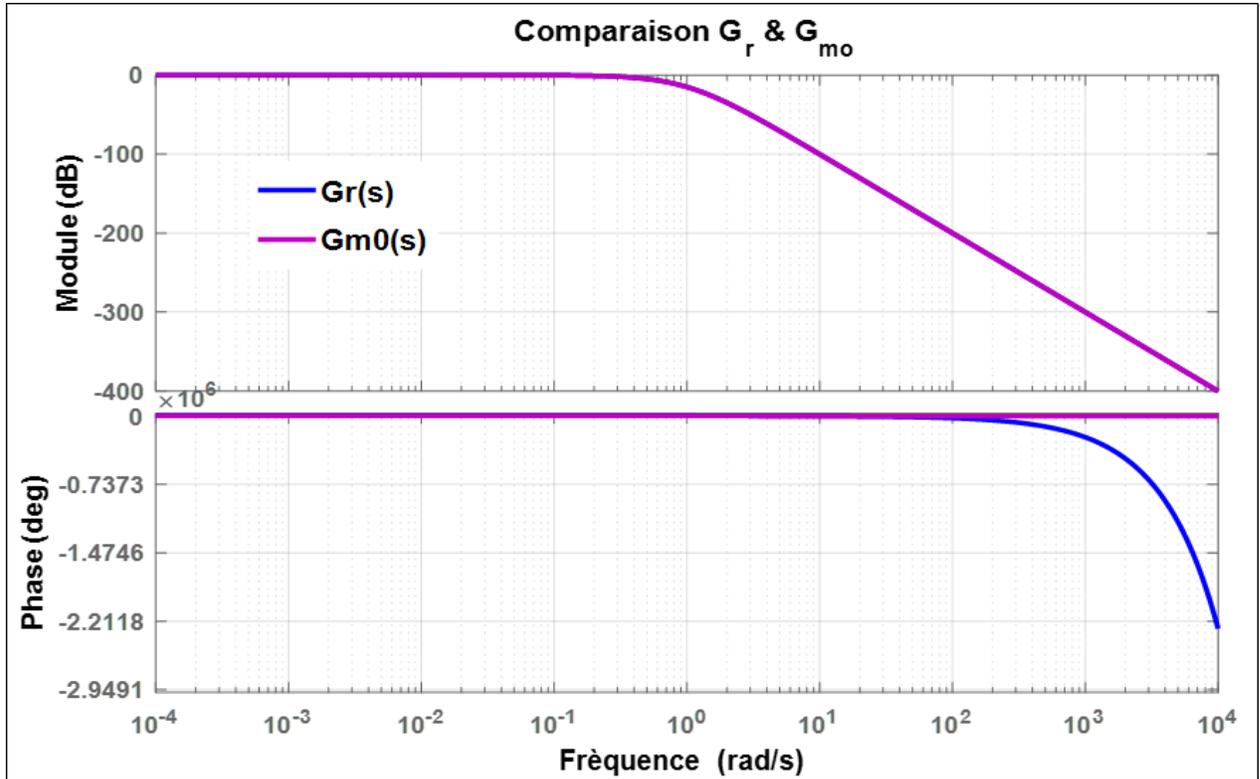
$$G_{m_2}(s) = \frac{0.98193 \times e^{-4.964s}}{(1 + 3.7792 \times s)(1 + 3.6224 \times s)} \quad (\text{I.62})$$

Dans la suite de cette section, un autre modèle SOPDT proposé par Wang est utilisé lors de la synthèse du contrôleur stabilisant la boucle de commande. Ce modèle est défini comme suit :

$$G_{m_W}(s) = \frac{e^{-5.79s}}{(0.999 + 1.64 \times s)^2} \quad (\text{I.63})$$

Les réponses fréquentielles fournies par les modèles précédents sont comparées, à celui obtenue par le système réel. On obtient donc les figures ci-dessous :

D'après les figures précédentes, on constate nettement que tous les modèles proposés ont la capacité d'assurer des erreurs de modélisation très réduite en basses fréquences, en


 FIG. I.11 – Comparaison entre  $G_r$  et  $G_{m_0}$ 

particulier dans la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-4}, 10^4]$  radians/seconds.

Dans la suite ce travail, la synthèse du contrôleur souhaité s’articule sur l’environnement graphique du Matlab fournit par la commande « *rltool* ». Cette interface graphique à la capacité d’élaborer, d’une manière systématiquement, plusieurs types des contrôleurs dont les paramètres sont obtenus par des l’application des méthodes de synthèse utilisant les approches conventionnelles de commande comme : la commande par la méthode de Ziegler-Nichols, la commande par la méthode de Chien-Hrones-Reswick, la commande par la méthode linéaire gaussienne (LQG), la commande par la méthode du modèle interne (IMC) . . . , etc.

Sachant que toutes ces méthodes de commande nécessitent a priori à un modèle linéaire de synthèse. A cet effet, la synthèse du contrôleur souhaité s’articule seulement sur les deux modèles suivants : modèle d’ordre élevé  $G_{m_0}(s)$  et modèle SOPDT proposé par Wang  $G_{m_w}(s)$ .

Pour le premier modèle, le contrôleur souhaité repose sur le choix de la structure PID irrationnelle dont les paramètres sont obtenus par la commande utilisant le réglage proposé par Ziegler-Nichols. Dans ce cas, le réglage est précédé par le tracé du lieu des pôles et des zéros de la boucle ouverte dont la correction est effectuée par le contrôleur initial proportionnel

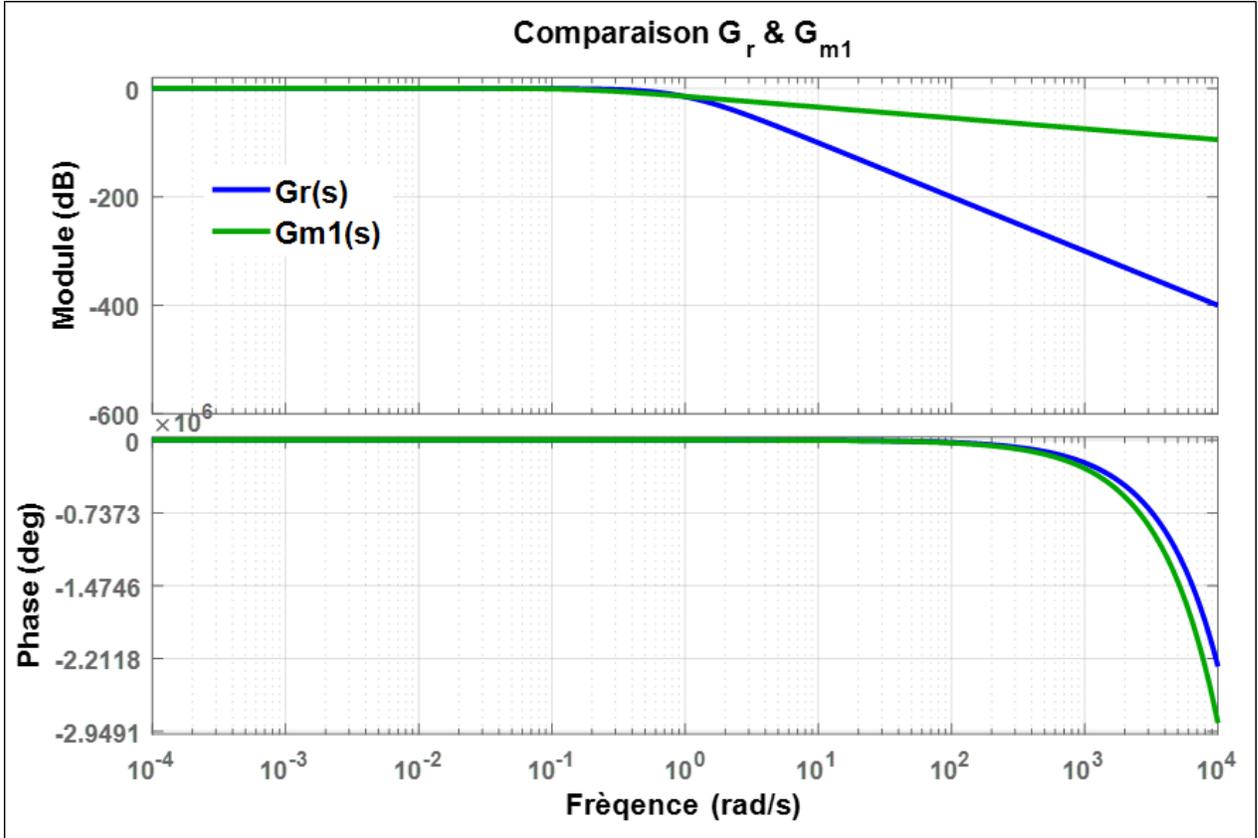


FIG. I.12 – Comparaison entre  $G_r$  et  $G_{m_1}$

$C_0 = 1$ . Par conséquent, l'éditeur du lieu des racines est illustré par la figure I.15.

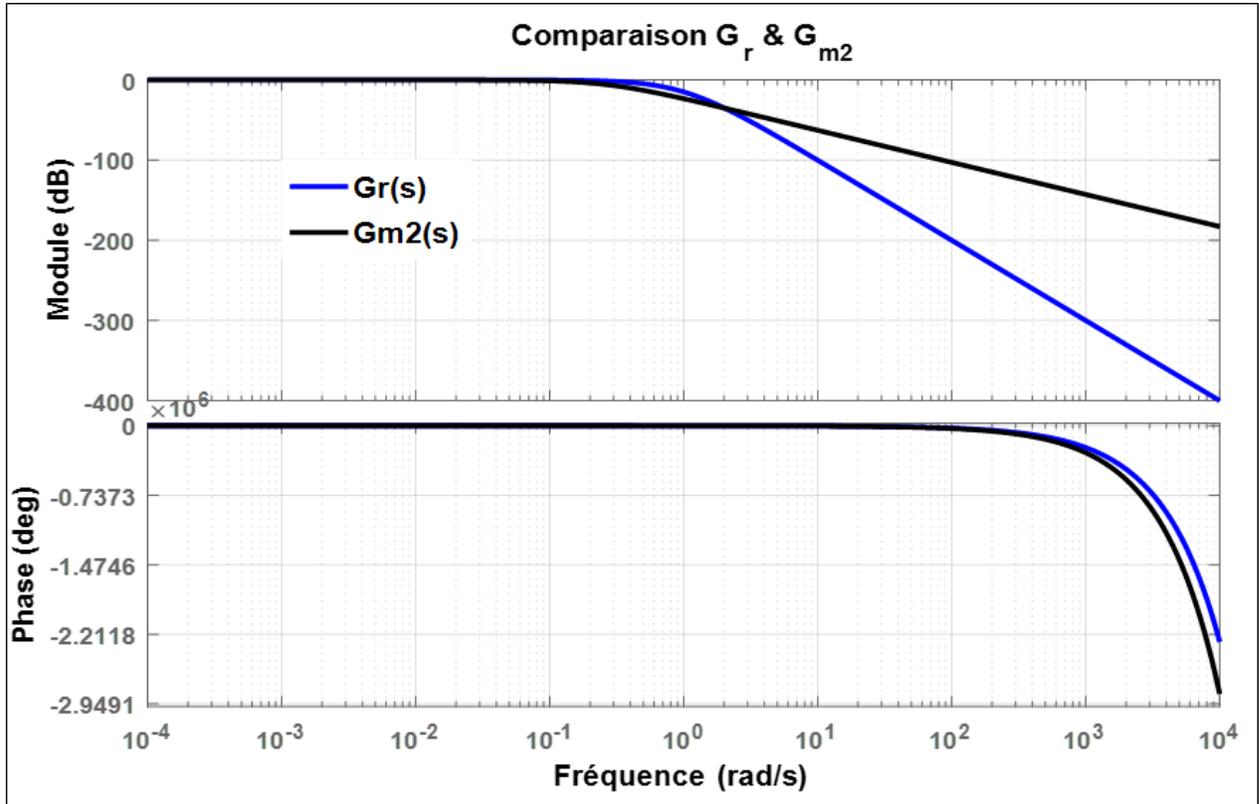
Le réglage systématique basé sur le choix de la structure PID parallèle est achevé par l'obtention du transfert suivant :

$$C_{PID}(s) = 0.08345 \times \frac{(1+2.6s)(1+13s)}{s(1+11s)} \quad (\text{I.64})$$

Concernant le second modèle, la synthèse du contrôleur est fondée sur la commande IMC dont la boucle de commande est présentée par la figure I.16.

Pour une raison de faisabilité de cette interface graphique, le transfert  $G_2(s)$  doit être présenté par la multiplication des deux transferts : le premier représente la partie sans retard du modèle SOPDT de Wang (*i.e.*  $\frac{1}{(0.999+1.64s)^2}$ ), tandis que le second transfert est généré par l'approximation d'ordre 5 du retard pur  $e^{-5.79s}$ .

La détermination des paramètres du contrôleur IMC est basée sur le choix a priori d'un pôle dominant  $T_{BF}$  décrivant la correction désirée de la boucle fermée. Dans cette simulation, le choix de  $T_{BF} = 1.76623$  secondes est effectué à travers la visualisation de la réponse indicielle du système corrigé, d'où, on obtient le contrôleur IMC suivant :


 FIG. I.13 – Comparaison entre  $G_r$  et  $G_{m2}$ 

$$C_{IMC}(s) = 0.86217 \times \left( \frac{s + 0.6091}{s + 0.5662} \right)^2 \quad (\text{I.65})$$

Notons ici qu'un autre contrôleur caractérisé par la structure  $PID$  a été proposé par Wang dont les paramètres sont obtenus par une approche analytique basée sur le principe du Prédicteur de Smith. Ce contrôleur est présenté par la fonction de transfert suivante :

$$C_w(s) = \frac{(3.06 + 5.03s)}{s(2.48 + s)} \quad (\text{I.66})$$

Les systèmes bouclés par les trois contrôleurs  $C_{PID}$ ,  $C_{IMC}$ , et  $C_w$  sont présentés par la figure I.17.

A partir de cette configuration, chaque système bouclé est excité par deux entrées. La première entrée est une entrée de consigne donnée sous forme d'échelon unitaire. En revanche, la deuxième entrée est une entrée de perturbation donnée sous forme d'échelon d'amplitude 0.2 appliquée à partir de l'instant 65 secondes. La comparaison des réponses temporelles est effectuée au long de l'intervalle du temps  $t \in [0, 120]$  secondes, d'où, on obtient les sorties et

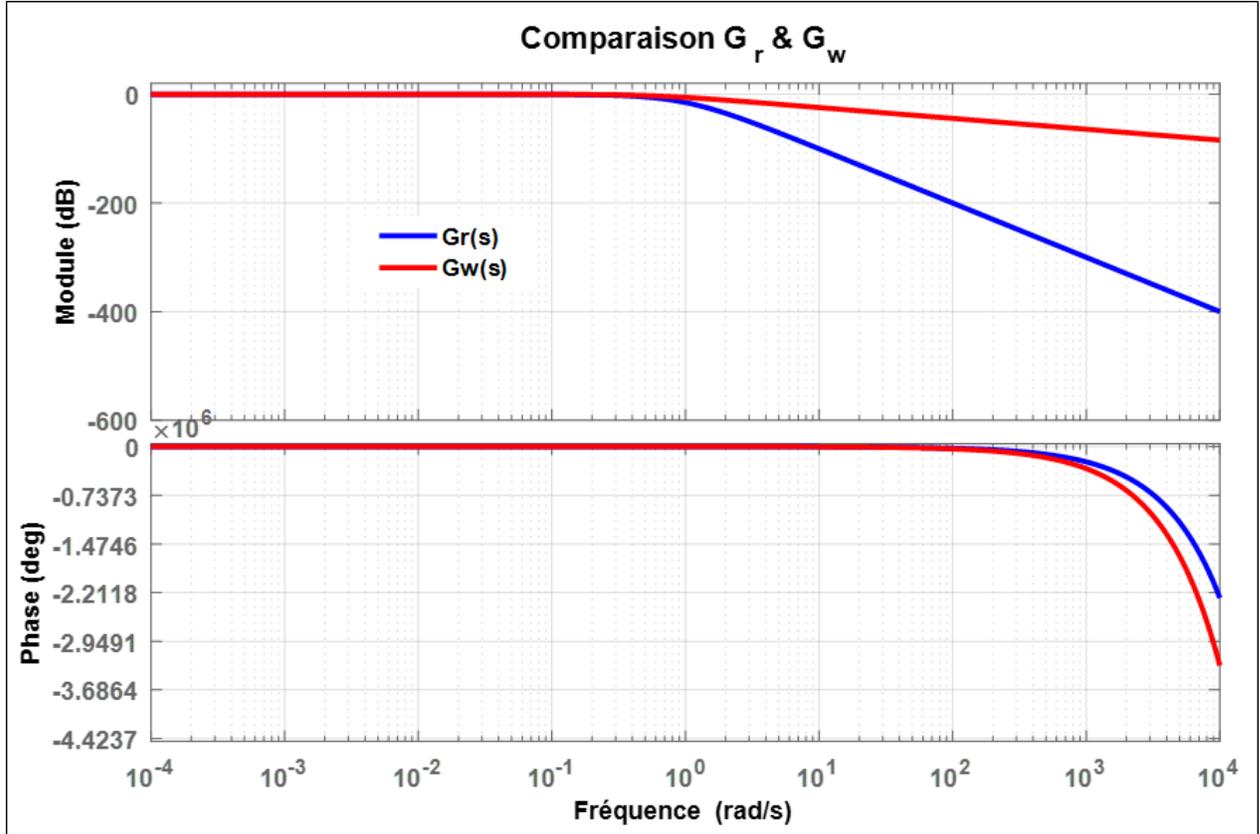


FIG. I.14 – Comparaison entre  $G_r$  et  $G_{mW}$

les commandes correspondantes présentées par les deux figures I.18 et I.19 respectivement.

D'après les figures précédentes, on peut remarquer que le contrôleur à la capacité d'assurer un meilleur comportement de poursuite de la trajectoire de référence et cela dans les deux régimes transitoire et permanent. Il fournit également une meilleure robustesse de rejection des perturbations. Cette rejection est assurée dans un intervalle du temps très réduit. Toutefois, ces meilleures caractéristiques temporelles présentent la supériorité de ce contrôleur par rapport aux autres contrôleurs restants. Néanmoins, les deux dynamiques citées précédemment nécessitent une énergie de commande très élevée ce qui peut conduire à l'infaisabilité d'implémenter ce contrôleur dans la pratique.

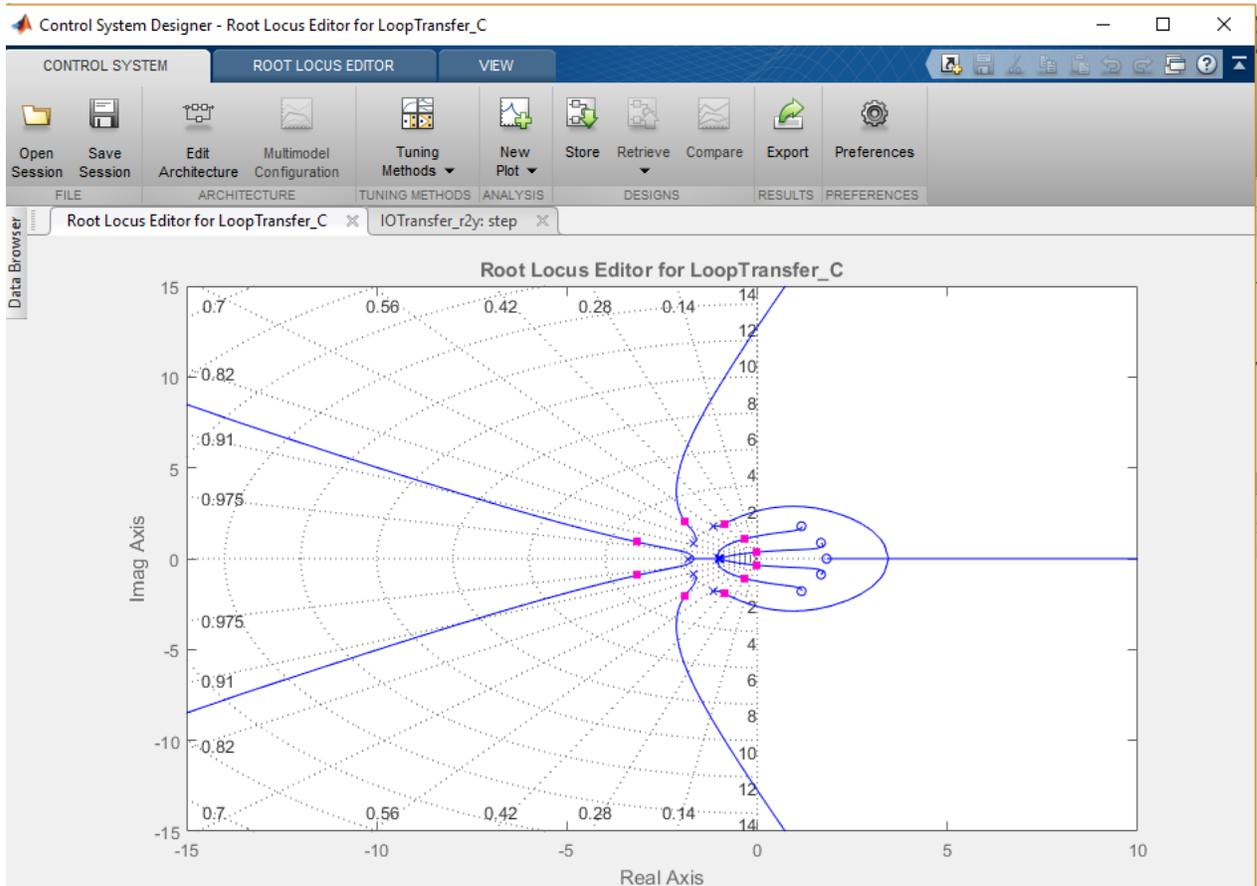


FIG. I.15 – Synthèse du contrôleur PID via le premier modèle d'ordre élevé.

## I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques notions générales sur la modélisation des systèmes à retard sont présentées, en l'occurrence : Le modèle du premier ordre plus un retard pur, modèle du deuxième ordre plus un retard pur, et le modèle d'ordre élevé. De plus, les techniques conventionnelles couramment utilisées pour commander les systèmes à retard, sont également détaillées, dont les modèles développés ainsi que les contrôleurs synthétisés sont fondés sur les transferts d'ordre entier. Ensuite, la définition de la stabilité du système bouclé au sens de Lyapunov a été présentée. Cependant, l'analyse fréquentielle basée sur les différentes fonctions de sensibilité est également détaillée. Finalement, ce chapitre est achevé par une partie de simulation dans laquelle les notions théoriques de ces approches d'ordre entier sont validées sur un système physique monovariante. La comparaison des résultats obtenus confirme que la commande utilisant le principe de SP à la capacité de fournir des meilleures dynamiques de poursuite et de robustesse en comparaisons à celles fournies par les autres

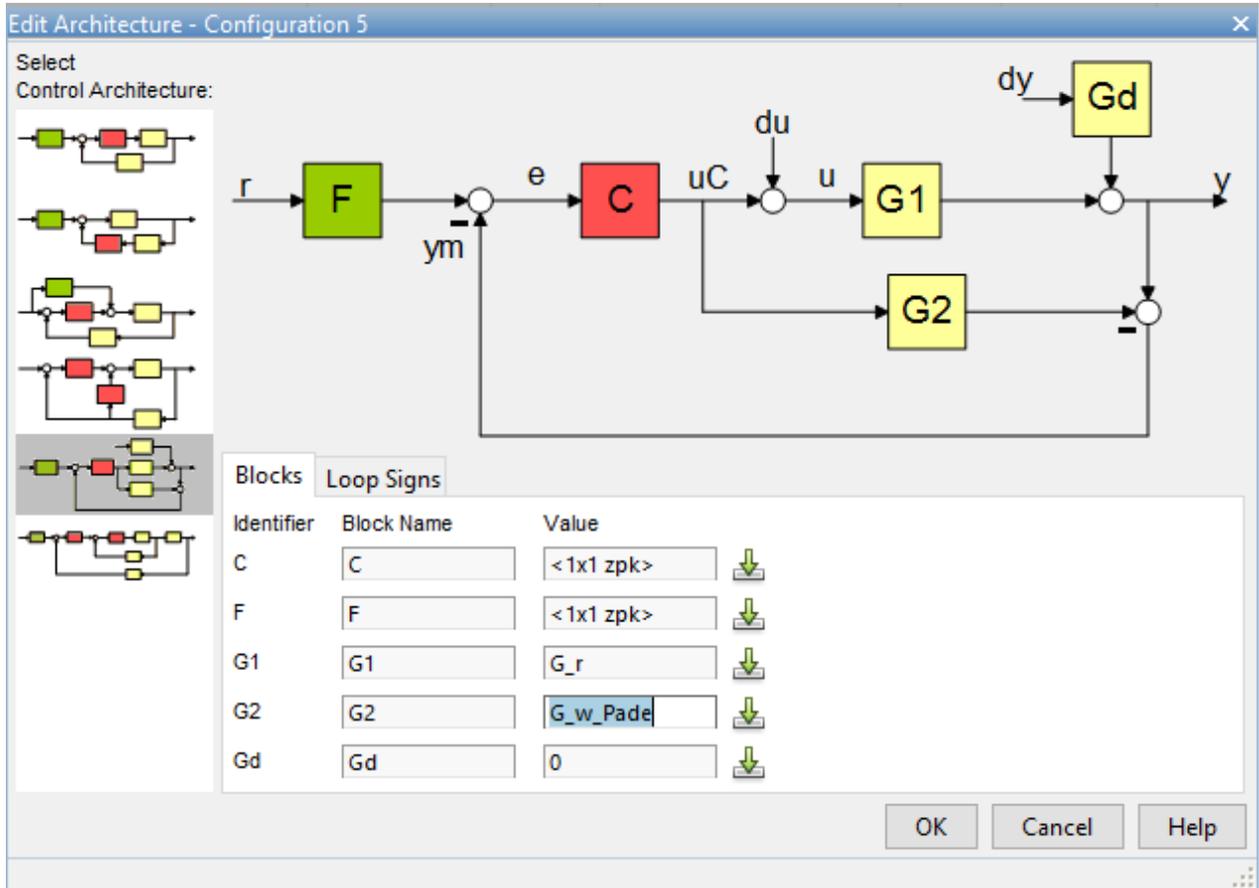


FIG. I.16 – Synthèse du contrôleur via la commande par le modèle interne de Wang.

méthodes de commande. Cependant, ces deux dynamiques nécessitent des commandes coupeuses ce qui peut conduire à saturer les actionneurs installés dans la boucle de commande.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les outils mathématiques nécessaires assurant la modélisation avancée et la commande moderne des systèmes physiques à retard.

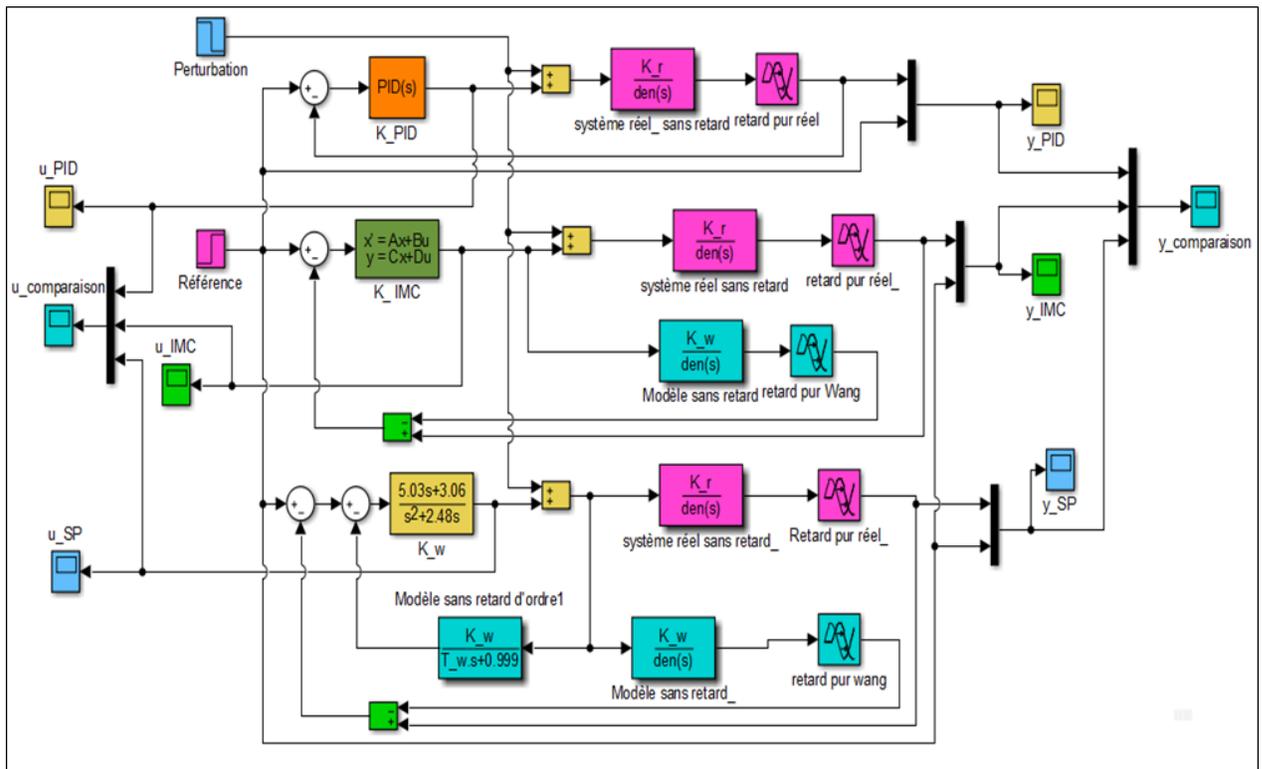


FIG. I.17 – Systèmes bouclés par les trois contrôleurs  $C_{PID}(s)$ ,  $C_{IMC}(s)$ , et  $C_W(s)$

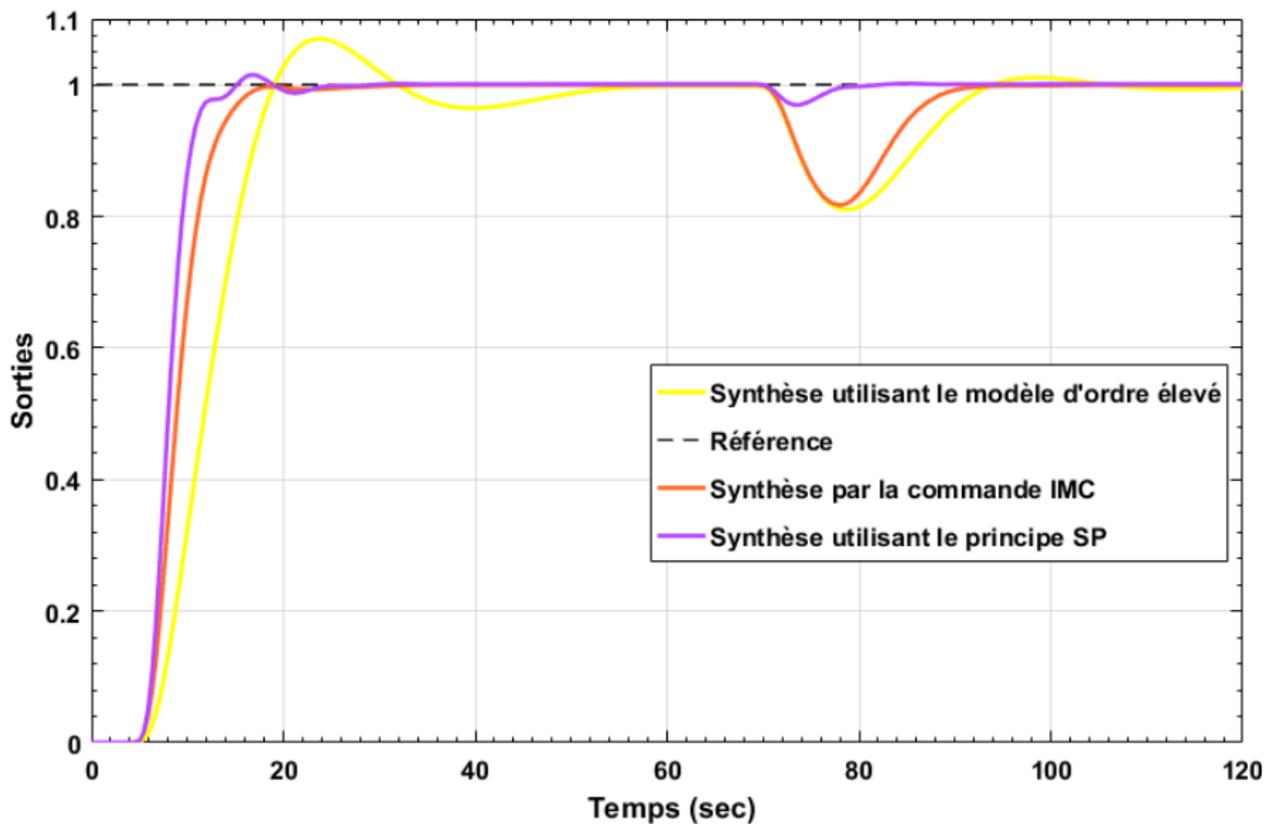


FIG. I.18 – Sorties fournies par les trois contrôleurs  $C_{PID}(s)$ ,  $C_{IMC}(s)$ , et  $C_W(s)$

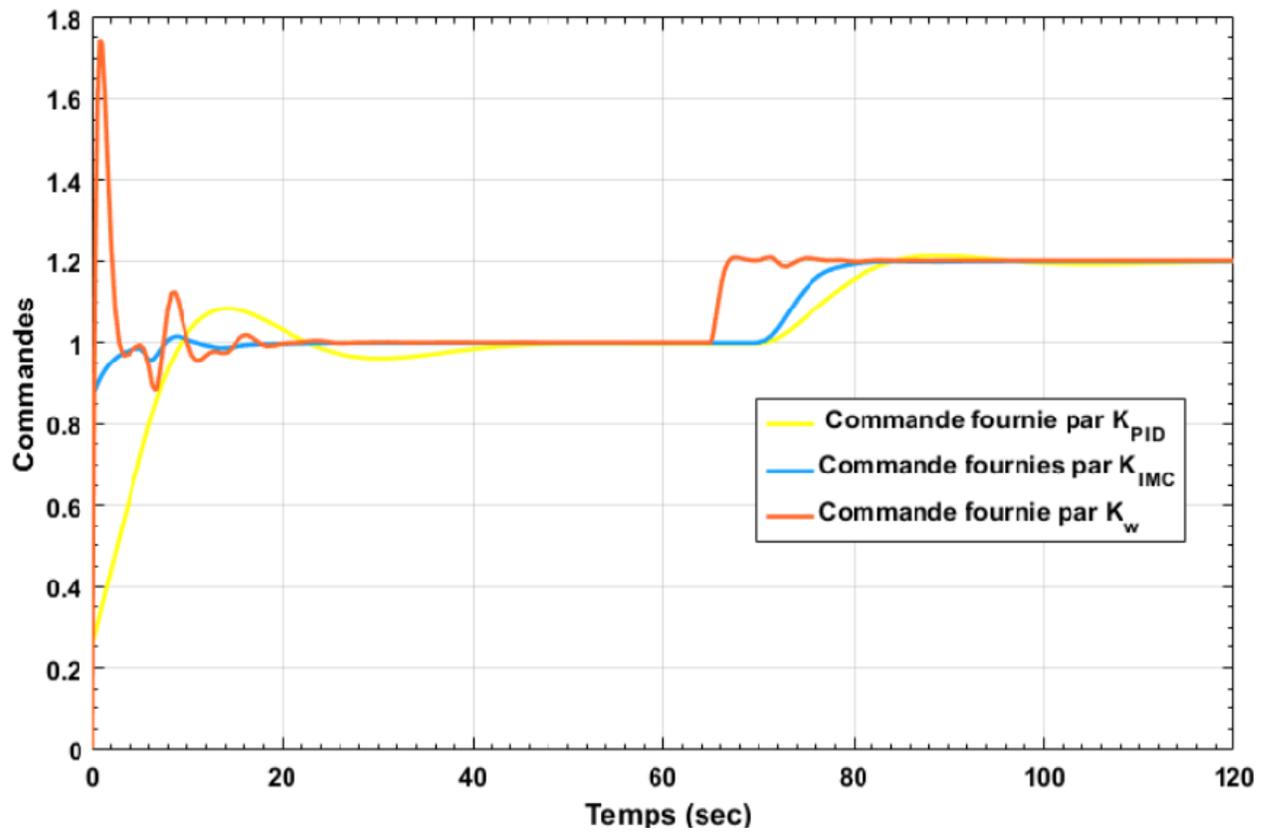


FIG. I.19 – Sorties fournies par les trois contrôleurs  $C_{PID}(s)$ ,  $C_{IMC}(s)$ , et  $C_w(s)$ .

# Chapitre II

## Outils mathématiques pour la modélisation et la commande avancée des systèmes à retard

### II.1 Introduction

Avant d'exploiter les techniques avancées pour commander les systèmes à retard. Il est nécessaire de faire une tournée sur des notions préliminaires concernant les outils mathématiques utilisés dans les prochains chapitres de ce travail.

Le premier outil est le calcul fractionnaire, c'est le sujet d'intérêt pendant plus de trois siècles. Le nombre d'applications où le calcul fractionnaire a été utilisé est en plein essor. Le modèle mathématique fractionnaire obtenu peut décrire un objet réel avec plus de précision que le modèle conventionnel entier.

Le deuxième outil est présenté comme un algorithme d'optimisation méta-heuristique, sous le nom de l'optimisation par essaim de particules (PSO).

### II.2 Les systèmes fractionnaires

L'identification des systèmes dynamiques par des modèles d'ordre fractionnaire est l'une des applications de la théorie du calcul fractionnaire qui a connu un grand développement au cours de ces deux dernières décennies. Les phénomènes physiques présentant une mémoire longue et une structure de dimension infinie peuvent être modélisés par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans les modèles mathématiques du système. En effet, la dérivée

fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier.

### II.2.1 Définitions préliminaires

Plusieurs chercheurs ont publié dans le sujet de la dérivation d'ordre non entier et nombreuses définitions de l'opérateur fractionnaire ont flottés à la surface. Les plus familières sont celles de Riemann-Liouville, de Grünwald-Letnikov et de Caputo.

Afin de comprendre ces définitions, nous présentons quelques fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire.

#### II.2.1.1 La fonction Gamma d'Euler :

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, notée  $\Gamma$ . Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel de  $n$ , elle permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières.

La définition intégrale de la fonction Gamma est donnée par l'équation suivante [68] :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0 \quad (\text{II.1})$$

Elle est plus souvent utilisée même si elle est restreinte aux valeurs positives de  $x$ .

L'intégration par partie de (II.1) conduit à la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (\text{II.2})$$

Puisque  $\Gamma(1) = 1$ , en utilisant la relation (II.2), nous obtenons pour  $x = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n \cdot \Gamma(n) \\ &= n(n - 1)! \\ &= n! \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

En plus l'autre propriété importante de la fonction Gamma est que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

#### II.2.1.2 L'opérateur intègro-différentiel d'ordre non entier

Le Calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et la différentiation vers l'opérateur d'ordre fractionnaire  ${}_a D_t^\alpha$ , avec,  $a, t$  sont les limites, et  $\alpha \in \mathbb{R}$  représente l'ordre

de l'opération. L'opérateur intègro-différentiel continu est défini comme suit, [68] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \alpha > 0 \\ 1 \alpha = 1 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

### II.2.1.3 Définition de Grünwald-Letnikov (G-L)

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction  $f(t)$  d'ordre  $\alpha$ . La définition de G-L est donnée par l'équation suivante, [68] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[t-a/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (\text{II.5})$$

Où,  $[t - a/h]$  désigne la partie entière.

### II.2.1.4 Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Soient,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n$  un entier positif, et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ . La dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure est définie par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\varphi)}{(t-\varphi)^{\alpha-n+1}} d\varphi \quad (\text{II.6})$$

où,  $(n-1) < \alpha < n$  et  $\Gamma(x)$ ; c'est la fonction Gamma d'Euler.

Pour plus de commodité, le domaine de Laplace est couramment utilisé pour décrire l'exploitation intégrale dérivée fractionnaire. Selon la définition de R-L, la transformée de Laplace de l'équation (II.6), sous des conditions initiales nulles, avec  $0 < \alpha < 1$ , est donnée par :

$$L[{}_a D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha \cdot F(s) \quad (\text{II.7})$$

### II.2.1.5 Définition de Caputo :

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit, [13] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (\text{II.8})$$

Avec  $n$  est un entier positif vérifiant l'inégalité :  $(n - 1) < \alpha < n$ .

$f^{(n)}(\tau)$ , étant la dérivée d'ordre entier  $n$  par rapport à  $\tau$ , de la fonction  $f(\tau)$ .

## II.2.2 Méthodes d'approximation d'un transfert rationnel

### II.2.2.1 Méthode de Mastuda

Cette méthode qui rapproche le dérivateur d'ordre non entier  $Q_d(s) = s^\alpha$  par le transfert rationnelle  $\widetilde{Q}_d(s)$  fourni par la méthode utilisant la *CFE*. De ce fait, les fréquences  $\omega_0 = \omega_b, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = \omega_h$  sont obtenues au moyen de la fonction *logspace* du Matlab, qui fournit un ensemble des fréquences espacées de manière logarithmique. Si le module de la fonction fractionnaire  $Q_d(\omega)$  est connu dans ces fréquences, la fonction irrationnelle  $\widetilde{Q}_d(\omega)$  est alors calculée comme suit :

$$T_{PPF}(s) = \frac{K_\omega}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha}, \text{ et } \omega_c \in [\omega_b, \omega_d] \quad (\text{II.9})$$

### II.2.2.2 Méthode de Charef

Le principe de cette méthode est basé sur le rapprochement de l'intégrateur fractionnaire  $s^{-\alpha}$  par le transfert d'ordre entier qui possède  $N$  zéros et  $N + 1$  pôles répartis dans la plage de fréquence  $[\omega_b, \omega_d]$ . A cet effet, le transfert  $T_{PPF}(s)$  peut être modélé par le pôle à puissance fractionnaire (*PPF*) suivant [69, 70] :

$$T_{PPF}(s) = \frac{K_\omega}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha}, \text{ et } \omega_c \in [\omega_b, \omega_d] \quad (\text{II.10})$$

avec  $K_\omega$ , et  $\omega_c$ , représentent le gain et la pulsation de coupure du pôle à puissance fractionnaire, représentent.

$$K_\omega = \left(\frac{1}{\omega_c}\right)^\alpha \quad (\text{II.11})$$

$$\omega_c = \sqrt{-1 + 10^{\frac{\varepsilon}{10\alpha}}} \quad (\text{II.12})$$

où,  $\varepsilon$  dénote l'erreur maximale entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur  $s^{-\alpha}$ , et le pôle à puissance fractionnaire  $T_{PPF}(s)$ , donné par l'équation (II.10). Le transfert d'ordre entier est donc défini comme suit :

$$s^\alpha = C_\alpha \frac{\prod_{u=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_{Z,u}}\right)}{\prod_{u=0}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_{P,u}}\right)} \quad (\text{II.13})$$

Les pulsations des pôles  $\omega_{P,u}$ , et des zéros  $\omega_{Z,u}$ , peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{P,u} = \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^u \cdot \sqrt{\varphi}, u = 0, \dots, N \\ \omega_{Z,u} = \psi \cdot \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^u \cdot \sqrt{\varphi}, u = 0, \dots, N - 1 \end{cases}$$

où,

$$\begin{cases} \psi = 10^{\frac{\varepsilon}{10(1-\alpha)}} \\ \varphi = 10^{\frac{\varepsilon}{10\alpha}} \\ N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{100\omega_d}{F_0}\right)}{\log(\psi\varphi)} \right\rceil + 1 \end{cases}$$

Avec la quantité  $\left\lceil \frac{\log\left(\frac{100\omega_d}{F_0}\right)}{\log(\psi\varphi)} \right\rceil$ , dénote la partie entière du nombre réel  $\frac{\log\left(\frac{100\omega_d}{F_0}\right)}{\log(\psi\varphi)}$ .

### II.2.2.3 Méthode d'Oustaloup

Cette méthode s'appelle aussi « approximation CRONE (Première génération) » [6]. Elle est basée sur l'approximation, en temps continu, de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$  par un transfert rationnel. Cette approximation utilise une distribution récursive de  $N$  zéros, et  $N$  pôles se trouvant dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_d]$ , à l'intérieure de laquelle l'approximation est valide. De ce fait, le transfert d'ordre entier est obtenu par la formule suivante :

$$s^\alpha = C_\alpha \prod_{k=-N}^{k=N} \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (\text{II.16})$$

Selon l'équation (II.16), gain, pôles et zéros sont respectivement donnés comme suit :

$$\omega'_k = \omega_d \left( \frac{\omega_b}{\omega_d} \right)^{\frac{k+N+0.5(1-\alpha)}{2N+1}} \quad (\text{II.17})$$

$$\omega_k = \omega_d \left( \frac{\omega_b}{\omega_d} \right)^{\frac{k+N+0.5(1+\alpha)}{2N+1}} \quad (\text{II.18})$$

et

$$C_\alpha = \left( \frac{\omega_b}{\omega_d} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \prod_{k=-N}^N \left( \frac{\omega_k}{\omega'_k} \right) \quad (\text{II.19})$$

Le problème de la mise en œuvre de  $s^\alpha$  (où,  $0 < \alpha < 1$ ), est résolu en considérant :

$$s^\alpha = s^{n+\psi} \quad (\text{II.20})$$

où,  $s^n$  est la partie entière de  $s^\alpha$ , et  $s^\psi$  (avec,  $0 < \psi < 1$ ) est déterminé par la méthode d'Oustaloup [7], utilisant l'équation (II.16).

### II.2.3 Stabilité des systèmes fractionnaires

Les conditions de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes fractionnaires d'ordre commensurable sont données avec démonstration dans [68]. Elles sont identiques à celles des systèmes d'ordre entier.

#### II.2.3.1 Critère de commandabilité

Le système d'ordre fractionnaire donné par l'équation est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$C = [A, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (\text{II.21})$$

où,  $n$  est le nombre des états, c'est aussi de rang plein.

#### II.2.3.2 Critère d'observabilité

Le système d'ordre fractionnaire donné par (I.30), est observable si et seulement si la matrice d'observabilité

$$O^T = [C, CA, \dots, CA^{n-1}] \quad (\text{II.22})$$

où,  $n$  est le nombre des états, c'est aussi de rang plein.

### II.2.3.3 Analyse de la stabilité

Les conditions de stabilité des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant sont différentes de celles des systèmes linéaires d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans le demi-plan droit du plan complexe, contrairement aux systèmes linéaires dont les racines sont à partie réelle strictement négative. Désignons par  $\lambda_i$  les valeurs propres de la matrice. Un système d'ordre non entier, est dit stable si la condition

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, 1 \leq i \leq n \quad (\text{II.23})$$

est satisfaite pour toutes les valeurs propres de la matrice  $A$ .

*Remarque :*

1. (a) Pour  $\alpha = 1$ , on retrouve la condition de stabilité des systèmes d'ordre entier.
- (b) Pour la représentation de la fonction de transfert, on note par  $p_i$  les pôles du système. Ces pôles sont définis comme étant solutions de l'équation matricielle  $(s^\alpha \cdot I - A) = 0$ . Ils sont donnés par l'expression (II.25).

$$p_i = \lambda_i^{1/\alpha}, 1 \leq i \leq n \quad (\text{II.24})$$

Alors, la condition de stabilité dans le sens entrée bornée/sortie bornée est réalisée si la condition suivante est satisfaite :

$$\arg(p_i) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.25})$$

## II.3 Les algorithmes d'optimisation sous contraintes

Les problèmes d'optimisation occupent actuellement une place importante dans la communauté des ingénieurs, des scientifiques et des décideurs. En effet, ce genre de problèmes intervient dans leurs domaines d'activité qui sont très divers, comme la conception de systèmes mécaniques, le traitement d'images, l'électronique ou la recherche opérationnelle.

Un problème d'optimisation est défini par un ensemble de variables, une fonction objective et un ensemble de contraintes. L'espace de recherche est l'ensemble des solutions possibles du problème. Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver la ou les meilleures solutions (en minimisant et/ou maximisant la/les fonctions objectifs du problème posé), tout en satisfaisant un ensemble de contraintes définies par l'utilisateur. Certains problèmes d'optimisation sont qualifiés de difficiles, et leur résolution dans un temps raisonnable nécessite

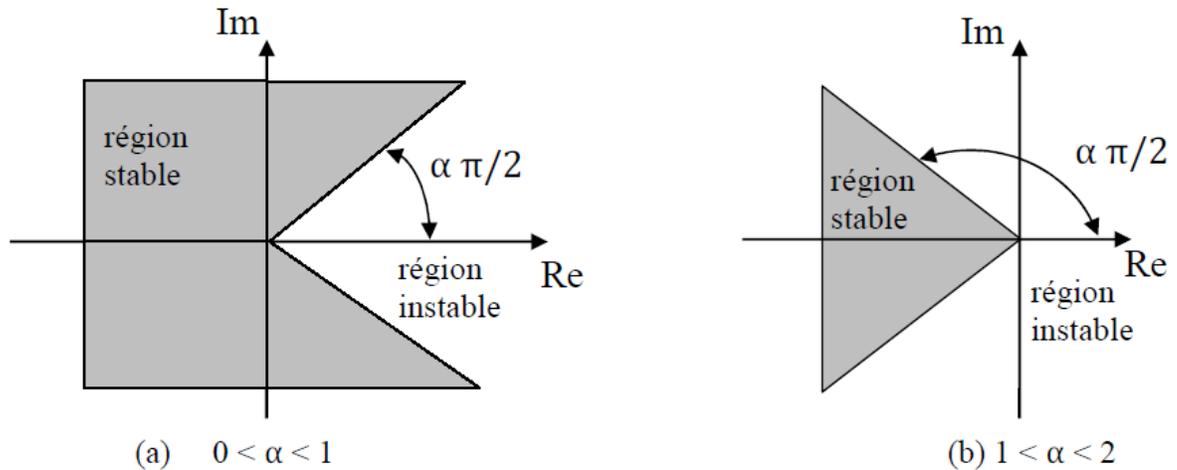


FIG. II.1 – Régions de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire dans le plan  $s^\alpha$  [62].

l'utilisation d'algorithmes sophistiqués, comme les méthodes approchées (Les heuristiques et les métaheuristiques). Parmi les métaheuristiques destinées à résoudre ces problèmes, plus précisément les problèmes à variables continues, l'optimisation par essaim particulaire (PSO) est apparue en 1995. C'est le sujet principal de ce travail de thèse.

PSO est une méthode d'optimisation stochastique qui est inspiré d'un comportement social des animaux évoluant en essaim. Ce comportement social est modélisé par une équation mathématique permettant de guider les « particules » durant le processus de déplacement.

Le déplacement d'une particule est influencé par trois composantes : la composante d'inertie, la composante cognitive et la composante sociale. Chacune de ces composantes reflète une partie de l'équation. PSO présente l'avantage d'être efficace sur une grande variété de problèmes, sans pour autant que l'utilisateur ait à modifier la structure de base de l'algorithme. Cependant, comme toutes les méthodes stochastiques, PSO présente des inconvénients, qui rebutent encore certains utilisateurs. Parmi ceux-ci, nous citons le problème de convergence prématurée, qui peut conduire les algorithmes de ce type à stagner dans un optimum local.

L'optimisation consiste à résoudre un problème en trouvant une solution optimale qui respecte certaines contraintes.

Elle est utilisée dans de nombreux domaines tel que les transports, le contrôle des réseaux, les bases de données ou encore la modélisation et l'identification d'un objet. Trouver une solution optimale à un problème signifie trouver la solution qui minimise ou maximise une certaine quantité.

## II.3.1 Solution basée sur l'Optimisation par essaim de particule (PSO)

### II.3.1.1 Explication de l'idée

L'Optimisation par Essaim de Particules, connu sous le nom anglophone comme : Particle Swarm Optimization (PSO), est un algorithme inscrit dans la famille des algorithmes évolutionnaires. Il a été proposé par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (socio psychologue) en 1995. Cette méthode trouve sa source dans les observations faites lors des simulations informatiques de vols groupés d'oiseaux et de bancs de poissons de Reynold [51], Heppner & Grenander. Autrement-dit, elle s'inspire fortement de l'observation des relations grégaires d'oiseaux migrateurs, qui pour parcourir de « longues distances » (migration, quête de nourriture, parades aériennes, etc.), doivent optimiser leurs déplacements en termes d'énergie dépensée, de temps, (etc.), comme par exemple la formation en forme de  $V$  présentée dans la figure II.2



FIG. II.2 – Essaim des oiseaux en formation  $V$  [51].

Le déplacement de ses oiseaux en essaim est complexe, sa dynamique obéit à des règles et des facteurs spécifiques qu'il se résume de :

- Chaque individu dispose d'une certaine intelligence « limitée » (qui lui permet de prendre une décision).
- Chaque individu doit connaître sa position locale et disposer d'information locale de chaque particule se trouvant dans son voisinage.

- Obéir à ces trois règles simples, « rester proche des autres individus », « aller dans une même direction » ou « voler à la même vitesse ».

Tous ses facteurs et règles sont indispensables pour le maintien de la cohésion dans l'essaim, ceci par l'adoption d'un comportement collectif complexe et adaptatif.

Pour être en mesure d'utiliser le PSO, il est indispensable de définir un espace de recherche (composé de particules) et une fonction "objectif" à optimiser. La méthode de l'algorithme consiste alors à déplacer ces particules de telle sorte qu'elles trouvent l'optimum (comme explicité précédemment), elles doivent disposer :

- De données relatives à leurs positions, connaître leurs coordonnées avec comme condition qu'elles soient comprises dans l'espace de définition.
- De la meilleure position qu'elles ont rencontrée.
- De la meilleure position rencontrée par leur voisinage et le résultat de leur fonction objectif.
- De leur vitesse qui leur permet de se déplacer et de changer de position au fil des itérations.
- D'un voisinage, c'est le sous-ensemble de particules qui interagit directement avec la particule (surtout celle possédant la meilleure position).
- D'après Maurice Clerc et Patrick Siarry [22], l'évolution d'une particule n'est finalement qu'une fusion de trois types de comportements :
  - Egoïste (se déplacer suivant sa vitesse actuelle).
  - Conservateur (revenir en arrière en prenant en compte sa meilleure performance).
  - Panurgien (suivre aveuglement le meilleur de tous en considérant sa performance).

Finalement on remarque un compromis psycho-social entre d'une part la confiance en soi et d'autre part l'influence des relations sociales.

### II.3.1.2 *Principe de voisinage*

Chaque particule dispose d'un sous-ensemble d'autres particules avec lequel elle est en interaction, c'est le voisinage de la particule. Cet entrelacement de rapports entre toutes les particules est assimilé à la sociométrie ou à la topologie de l'essaim. On dénombre deux types de voisinage :

Le premier type appelé le voisinage géographique : c'est un voisinage dynamique où les voisins sont les particules les plus proches. A chaque itération, les nouveaux voisins ou groupes doivent être réajustés en se référant à une distance prédéfinie dans l'espace de recherche. C'est donc bien un voisinage dynamique tel qu'illustré sur la figure II.3.

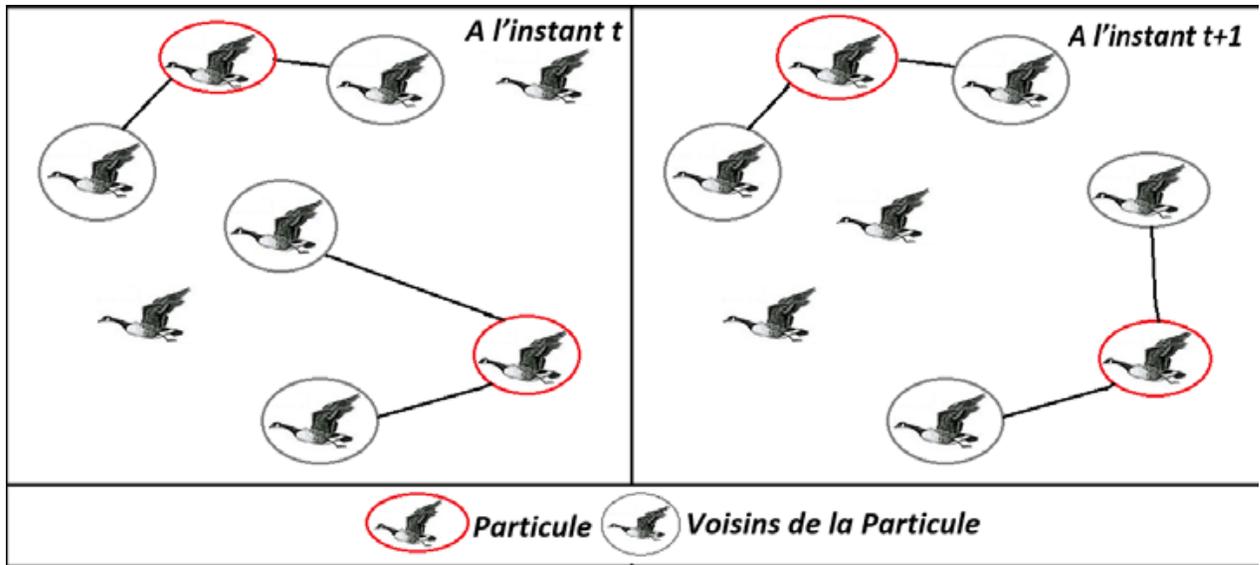


FIG. II.3 – Voisinage géométrique [51].

Dans cet exemple on va supposer que le voisinage d'une particule est un groupe formé des deux particules les plus proches. Dans la figure II.3, la notion de voisinage dynamique est mise en évidence puisque pour un même essaim à l'instant  $t$ , et à l'instant  $t + 1$ ; le voisinage n'est plus le même.

Le deuxième, c'est le voisinage social : ce type de voisinage est considéré comme statique, les voisins restent figés, autrement-dit, ils demeurent inchangés. C'est le voisinage auquel on a le plus souvent recours, en raison :

- De sa simplicité de programmation.
- Parce qu'il offre un meilleur rapport temps/coût, en termes de calcul.
- Dans un scénario de convergence, un voisinage social s'oriente forcément vers un voisinage géographique.

Dans la figure qui va suivre, les particules sont d'abord semées de manière fictive en forme de cercle, ensuite pour la particule étudiée, on insère au fur et à mesure dans ses informatrices, dans un 1er temps elle-même, dans un 2ème temps celles qui lui sont adjacentes, puis de proche en proche jusqu'à atteindre la taille souhaitée, ainsi que définie dans la figure II.4.

Dans cet exemple, la particule principale est placée en haut (en noir), ses informatrices correspondent aux deux particules directement à sa droite et à sa gauche (en rouge dans notre figure).

Dans l'ébauche ci-dessous par contre, les informatrices sont choisies de manière aléatoire, telle qu'exposée dans la figure II.5.

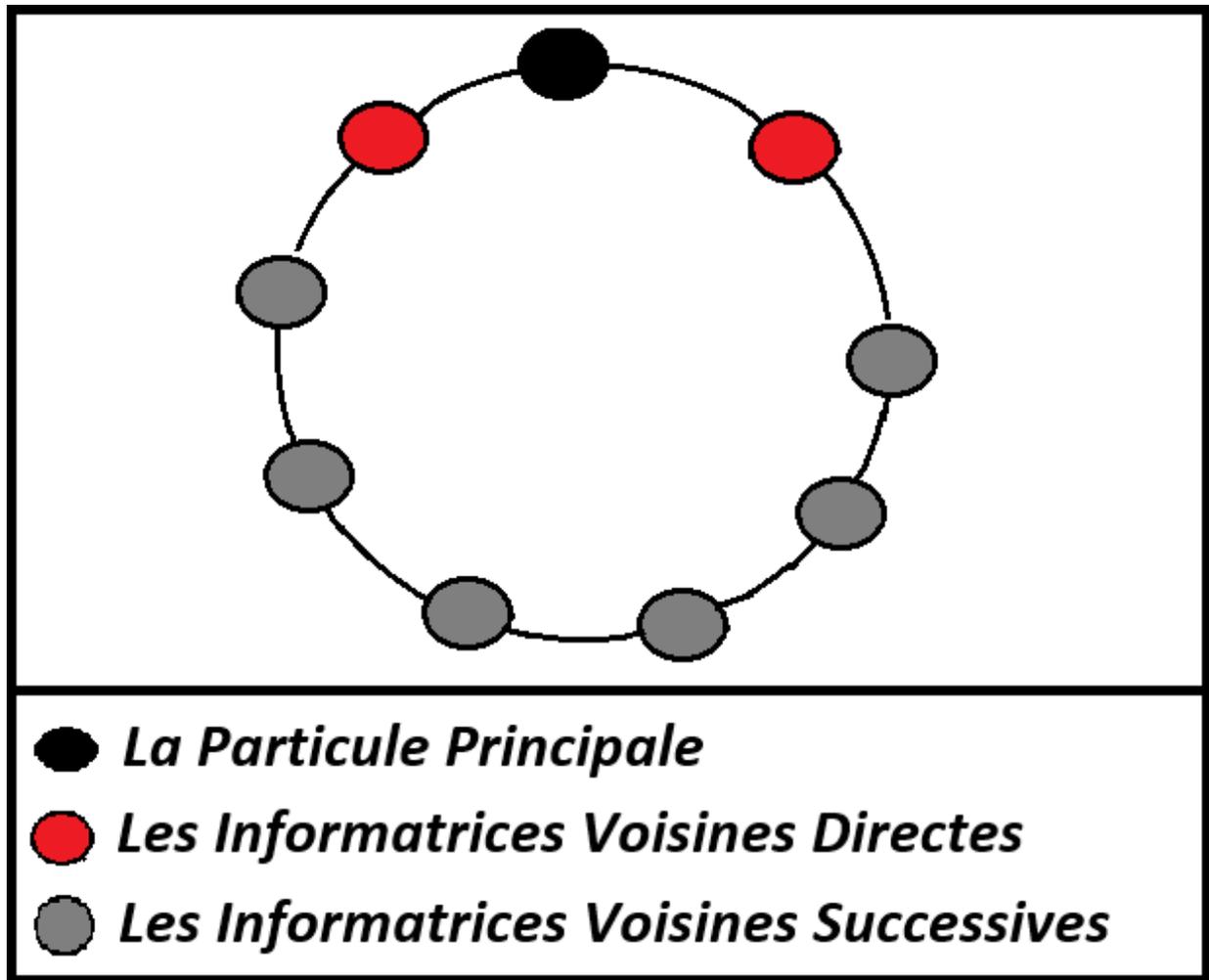


FIG. II.4 – Voisinage en cercle à choix régulière [51].

Ici, la particule principale est placée en haut (en noir) et ses informatrices sont choisies de façon aléatoire (en jaune par exemple dans notre figure).

### II.3.1.3 *Algorithme standard d'optimisation par essaim de particule*

L'optimisation par essaim de particules est une technique évolutionnaire qui utilise "une population" de solutions candidates pour développer une solution optimale au problème. Le degré d'optimalité est mesuré par une fonction fitness (aptitude) définie par l'utilisateur (Kennedy et al). La PSO diffère des autres méthodes de calcul évolutionnaire de façon que les membres de la population appelés "particules", sont dispersées dans l'espace du problème. Le comportement de l'essaim doit être décrit en se plaçant du point de vue d'une particule (Kennedy et al. [51]).

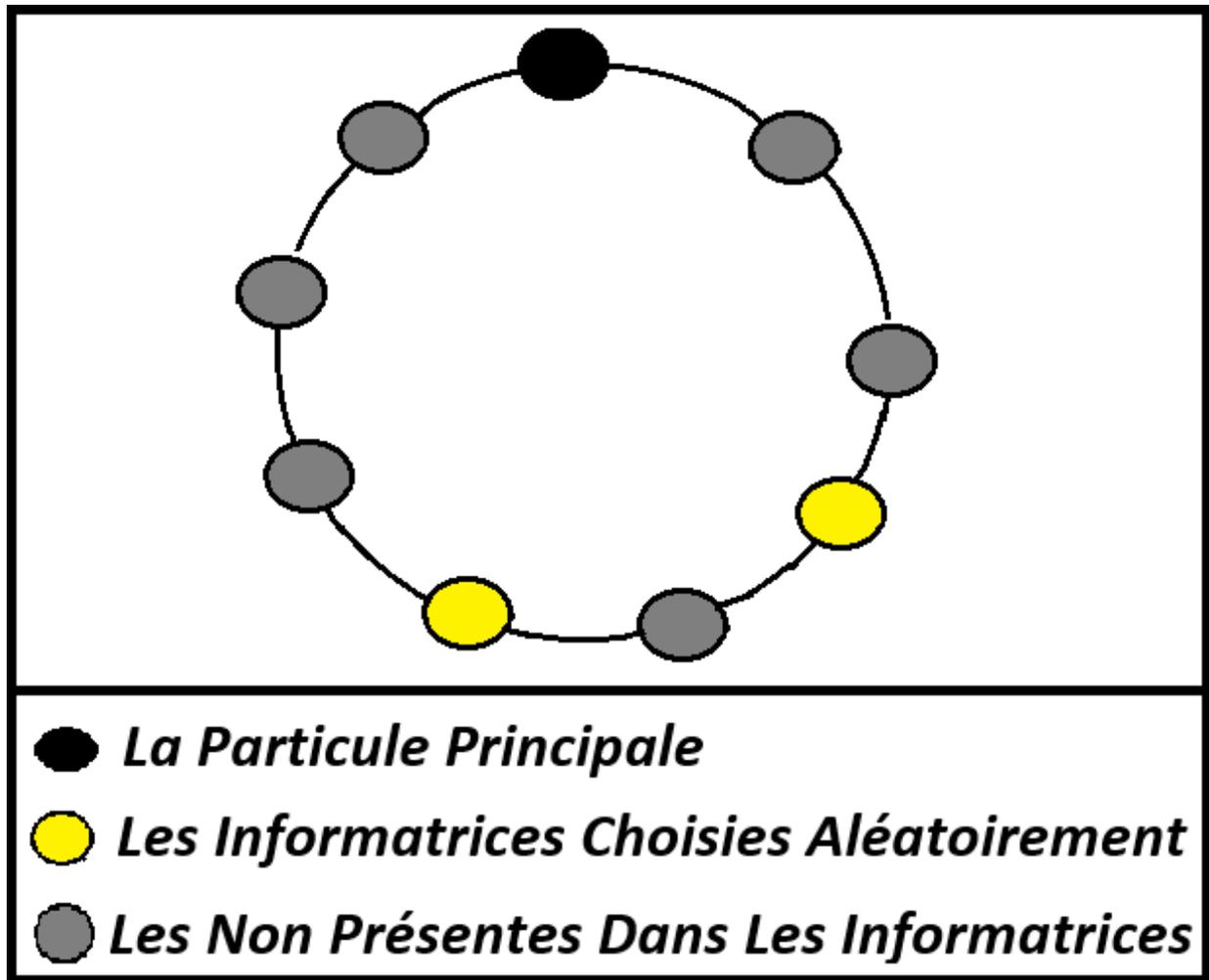


FIG. II.5 – Voisinage en cercle à choix aléatoire [51].

Au départ de l'algorithme, un essaim est réparti au hasard dans l'espace de recherche, chaque particule ayant également une vitesse aléatoire. Dans le contexte de PSO, la population est appelée un essaim et ses individus (les points de recherche) sont appelées particules. Chaque particule a trois caractéristiques principales : une vitesse adaptable avec laquelle elle se déplace dans l'espace de recherche, une mémoire où elle stocke la meilleure position qu'elle n'a jamais visité l'espace de recherche (la position de plus faible valeur de fonction), et le social partage de l'information, à savoir la connaissance de la meilleure position jamais visité par toutes les particules dans son voisinage. Les voisins sont généralement déterminés sur la base des indices des particules, donnant lieu à des deux principales variantes de PSO, à savoir la variante locale et globale.

A partir de quelques informations dont elle dispose, une particule doit décider de son

prochain mouvement. Pour ce faire, elle combine trois informations : sa vitesse actuelle, sa meilleure position actuelle, et la meilleure performance (vitesse et position) de ses voisins (Figure II.6).

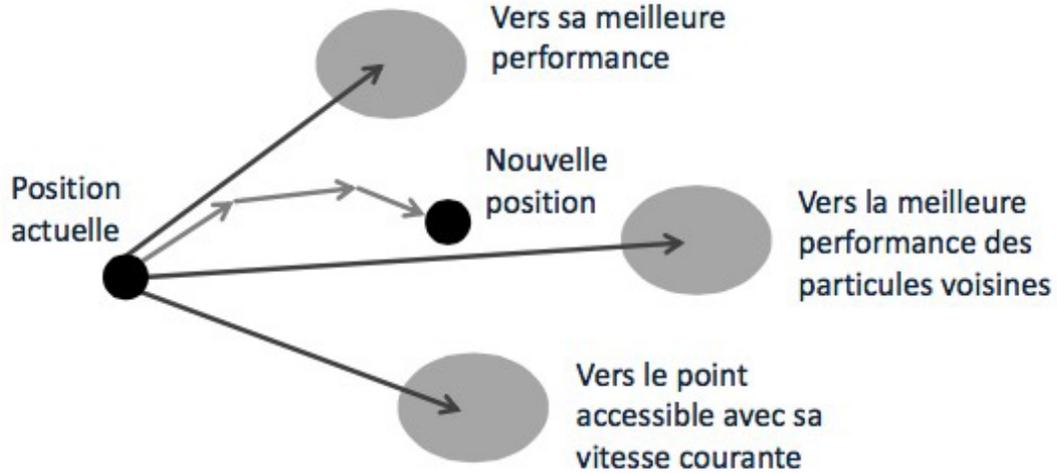


FIG. II.6 – Schéma de principe du déplacement d'une particule [51].

Le hasard joue un rôle, grâce à une modification aléatoire limitée des coefficients de confiance, ce qui favorise l'exploration de l'espace de recherche.

Supposons une fonction à dimension  $n$  ;  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et un essaim de  $N$  particules  $S = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ . La  $i^{\text{ème}}$  particule  $X_i \in S$ , sa vitesse  $V_i$ , sa meilleure position  $P_i \in S$ , sont des vecteurs de dimension  $n$ . Un voisinage de rayon  $r_{neib}$  de  $X_i$  consiste en les particules  $X_i - r_{neib}, \dots, X_i, \dots, X_i + r_{neib}$ . Assumer  $b_i$  comme indice de la particule qui atteint la meilleure position précédente parmi toutes les particules dans le voisinage de  $X_i$ , et  $t$  désigne le compteur des itérations. Puis, selon la version de PSO par les coefficients de construction, l'essaim est mis à jour en utilisant les équations suivantes [51] :

$$V_i(t+1) = \chi [V_i(t) + c_1 r_1 (P_i(t) - X_i(t)) + c_2 r_2 (P_{b_i}(t) - X_{b_i}(t))] \quad (\text{II.26})$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1) \quad (\text{II.27})$$

où  $i = 1, \dots, N$ , et  $\chi$  le coefficient de constriction,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives, appelées paramètres cognitifs et sociaux, respectivement.  $r_1$ , et  $r_2$  sont des vecteurs aléatoires avec les composants uniformément réparties dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Les valeurs par défaut de  $\chi$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés dans l'analyse théorique de Clerc et Kennedy [7].

La performance majeure d'un algorithme basé sur la population est fortement tributaire de l'arbitrage entre l'exploration et l'exploitation des capacités, c'est à dire, sa capacité à explorer de vastes zones de l'espace de recherche et sa capacité à converger rapidement vers les solutions les plus prometteuses, respectivement. La variante globale de PSO favorise l'exploitation car toutes les particules sont attirées par la meilleure position entraînant une convergence rapide vers le même point. D'autre part, la variante locale possède des propriétés d'exploration meilleures par contre la meilleure position de chaque voisinage est communiquée au reste de l'essaim par des particules voisines. Par conséquent, l'attraction à des points spécifiques est plus faible. Évidemment, la sélection appropriée de la taille du voisinage affecte le compromis entre exploration et exploitation. Toutefois, la sélection de la taille du voisinage est fortement basée sur l'expérience de l'utilisateur.

## **II.4 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté Les outils scientifiques purement mathématiques, qui nous permettent à bien étudier les techniques avancées afin de synthétiser notre contrôleur proposé. Dans un premier temps nous avons étudié le calcul non entier. Les différentes définitions de calcul de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire ainsi que les définitions de Reimann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov ont été exploitées. Nous avons aussi développé la modélisation des systèmes avec des modèles d'ordre fractionnaire. Nous avons également présenté deux exemples de simulation pour les systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire.

Pour la simulation des systèmes, nous avons utilisé la définition de Reimann-Liouville et pour la validation, nous avons choisis la méthode d'Oustaloup. De plus, nous avons présenté l'algorithme d'optimisation méta-heuristique, qui s'appelle, optimisation par essaim de particule (PSO). Ces outils seront utilisés afin d'améliorer les performances de la dynamique du système bouclé. Ces améliorations peuvent être abouties par l'introduction de l'ordre non entier dans les transferts utilisés dans la phase de synthèse de contrôleur, qui sera détaillé dans le prochain chapitre.

# Chapitre III

## Les contrôleurs d'ordre non entier et les systèmes à retard

### III.1 Introduction

Malgré le grand challenge dans le domaine de commande des systèmes industrielles, le contrôleur PID reste le premier choix jusqu'aujourd'hui, grâce à sa simplicité. Mais malheureusement dans le cas des systèmes à un temps de retard important, ce fameux contrôleur perd son efficacité.

Dans ce chapitre, et pour résoudre ce problème, on va essayer d'appliquer les notions de calcul fractionnaire sur le contrôleur PID simple, afin d'améliorer les performances du système bouclé.

Enfin, on remarquera les résultats de simulation, et répondre à la question : Est-ce que cette solution est valable et peut surmonter notre problématique.

### III.2 Représentation des contrôleurs d'ordre non entier

Un contrôleur d'ordre non entier (fractionnaire), est généralement, représenté par des modèles non entiers. De ce fait, la dynamique réelle de celui-ci est souvent décrite par l'un des trois modèles : Soit par l'équation différentielle fractionnaire généralisée, ou, par sa représentation d'état fractionnaire ou bien, par la fonction de transfert fractionnaire.

### III.2.1 Equation différentielle fractionnaire

Le comportement réel d'un contrôleur fractionnaire pluridimensionnel est souvent représenté par l'équation différentielle fractionnaire (III.1) :

$$A_{k_n} D^{\alpha_n} [u(t)] + \dots + A_{k_0} D^{\alpha_0} [u(t)] = B_{k_m} D^{\mu_m} [e(t)] + \dots + B_{k_0} D^{\mu_0} [e(t)] \quad (\text{III.1})$$

où,  $u(t)$  et  $e(t)$  sont respectivement les vecteurs des signaux de commandes et des erreurs.

$D^{\alpha_i}$  représente l'opérateur de la dérivée d'ordre  $\alpha_i$  où  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ .

$D^{\mu_j}$  représente l'opérateur de la dérivée d'ordre  $\mu_j$  où  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  et  $\mu_m > \mu_{m-1} > \dots > \mu_0$ .

$A_{k_i}$  et  $B_{k_j}$  sont des matrices réelles à des coefficients constantes.

Quand les ordres de dérivées fractionnaires  $\alpha_i$  et  $\mu_j$  sont multiples du même nombre réel ;  $\alpha_i = i \times \alpha$ ,  $\mu_j = j \times \mu$  et  $0 \leq \alpha = \mu \leq 1$ . Alors, le contrôleur résultant est un contrôleur fractionnaire dit « commensurable ». A cet effet, l'équation (III.1) est réécrite comme suit :

$$\sum_{i=0}^n (A_{k_i} D^{i,\alpha} [u(t)]) = \sum_{i=0}^m (B_{k_i} D^{i,\alpha} [e(t)]) \quad (\text{III.2})$$

Un contrôleur fractionnaire est dit non commensurable si la condition  $(\alpha_k, \mu_k) \neq k, \forall k \in \mathbb{N}^*$  n'est pas remplie.

### III.2.2 Représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire

De l'équation (III.2), la représentation d'état d'un contrôleur fractionnaire commensurable est définie comme dans le cas entier, on remplace seulement la dérivée d'ordre 1 par la celle d'ordre fractionnaire  $\alpha$ . On obtient donc :

$$\begin{cases} D^\alpha [x(t)] = A_k x(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k x(t) + D_k e(t) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$D^\alpha [x(t)] = (D^\alpha [x_1(t)], D^\alpha [x_2(t)], \dots, D^\alpha [x_n(t)])^T$ , représente le vecteur de la dérivée d'ordre  $\alpha$ . ■

### III.2.3 Fonction de transfert d'un contrôleur fractionnaire

La transformée de la Laplace basée sur la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo est appliquée sur l'équation (III.3). On aura donc :

$$\begin{cases} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x(t_0) = A_k X(s) + B_k E(s) \\ U(s) = C_k X(s) + D_k E(s) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A_k)^{-1} B_k E(s) + (s^\alpha I - A_k)^{-1} s^{\alpha-1} x(t_0) \\ U(s) = C_k X(s) + D_k E(s) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

ou,  $E(s)$ ,  $U(s)$ , et  $X(s)$  représentent respectivement la transformée de Laplace des signaux  $e(t)$ ,  $u(t)$  et  $x(t)$ . Notons ici que la définition de Caputo est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états à l'instant  $t_0 = 0$ . Dans le cas où ces conditions sont nulles, l'équation (III.5), est reformulée comme suit :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I - A_k)^{-1} B_k E(s) \\ U(s) = (C_k (s^\alpha I - A_k)^{-1} B_k + D_k) E(s) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Par ailleurs, la matrice de transfert du contrôleur fractionnaire est obtenue par la relation (III.7) :

$$K(s) = C_k (s^\alpha I - A_k)^{-1} B_k + D_k = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & \dots & K_{1m}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) & \dots & K_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}(s) & K_{n2}(s) & \dots & K_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où, chaque transfert  $K_{ij}(s)$  est peut-être défini par :

$$K_{ij}(s) = \frac{K_{N_{ij}, p_{ij}} s^{\alpha p_{ij}} + K_{N_{ij}, (p_{ij}-1)_{ij}} s^{\alpha(p_{ij}-1)} + \dots + K_{N_{ij}, 0}}{K_{D_{ij}, q_{ij}} s^{\alpha q_{ij}} + K_{D_{ij}, (q_{ij}-1)_{ij}} s^{\alpha(q_{ij}-1)} + \dots + K_{D_{ij}, 0}}, \quad \begin{cases} p_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{N} \\ q_{ij} \geq p_{ij} \\ i, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

D'après l'équation (III.8), si  $\vartheta = s^\alpha$ , on obtient le transfert irrationnel par rapport à la variable  $\vartheta$  comme suit :

$$K_{ij}(\vartheta) = \frac{\sum_{k=0}^{p_{ij}} K_{N_{ij}, k} \vartheta^k}{\sum_{k=0}^{q_{ij}} K_{D_{ij}, k} \vartheta^k} \quad (\text{III.9})$$

Afin de juger la stabilité des systèmes d'ordre non entier, on utilise les théorèmes de Lyapunov (voir le Chapitre II pour plus de détail).

## III.3 Réponses des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

### III.3.1 Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler

Pour une analyse plus générale dans le domaine temporel des systèmes d'ordre fractionnaires, un outil efficace appelé la fonction de Mittag-Leffler [6], a été introduite. La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres  $E_{\alpha,\beta}(z)$  est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (\text{III.10})$$

Sa  $P^{\text{ème}}$  dérivée est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha p + \beta)}, (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{III.11})$$

Il est plus convenable d'introduire la fonction [68] :

$$\varepsilon_p(t, y, \alpha, \beta) = t^{\alpha p + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(p)}(yt^\alpha) \quad (\text{III.12})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $\varepsilon_p(t, y, \alpha, \beta)$  est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} \varepsilon_p(t, y, \alpha, \beta) e^{-st} dt = \frac{p!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \pm y)^{p+1}}, \text{ avec } (\Re\{s\} > |y|^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (\text{III.13})$$

Une autre propriété convenable de est sa simple différentiation fractionnaire :

$${}_0D_t^\lambda \varepsilon_p(t, y, \alpha, \beta) = \varepsilon_p(t, y, \alpha, \beta - \lambda), (\lambda < \beta) \quad (\text{III.14})$$

### III.3.2 Système d'ordre fractionnaire de relaxation

Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire simple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour  $0 < \alpha < 1$  [39] :

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t) \quad (\text{III.15})$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \quad (\text{III.16})$$

### III.3.2.1 Approximation par une fonction rationnelle

Dans l'étude des diélectriques, K. S. Cole et al ont constaté que les fonctions de transfert de relaxation d'un grand nombre de matériaux peuvent être modélées par l'équation suivante :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha}, (0 < \alpha < 1) \quad (\text{III.17})$$

où,  $\frac{1}{\tau_0}$  est la fréquence caractéristique de relaxation,  $s = j\omega$  est la fréquence complexe, et  $\alpha$  un nombre réel tel que,  $0 < \alpha < 1$ . Il est aussi connu que la fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  peut être obtenue directement de la fonction de transfert comme :

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1 + \tau s} d\tau \quad (\text{III.18})$$

Appliquant la méthode de l'équation (III.18); K. S. Cole et R. H. Cole ont trouvé que la fonction de distribution des temps de relaxation pour leur modèle de l'équation (III.17) est [39] :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1 + \tau s} d\tau \quad (\text{III.19})$$

avec :

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1 - \alpha)\pi}{\left\{ \cosh \left[ \alpha \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1 - \alpha)\pi} \right] \quad (\text{III.20})$$

La figure III.1 montre le tracé de cette fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$ ; pour  $\alpha = 0.2$ , et  $\tau_0 = 10$ .

L'approximation de la fonction de transfert de l'équation (III.16) par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation  $G(\tau)$  de l'équation (III.20) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique  $[0, \omega_G]$ , en points égaux sur une échelle logarithmique  $\tau_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ ) comme suit :

$$G(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{III.21})$$

où,  $\tau_i = \tau_N \times \lambda^{N-i}$  pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ , et  $\lambda$  un nombre constant plus grand que l'unité, est défini comme rapport d'un pôle et le pôle précédent.

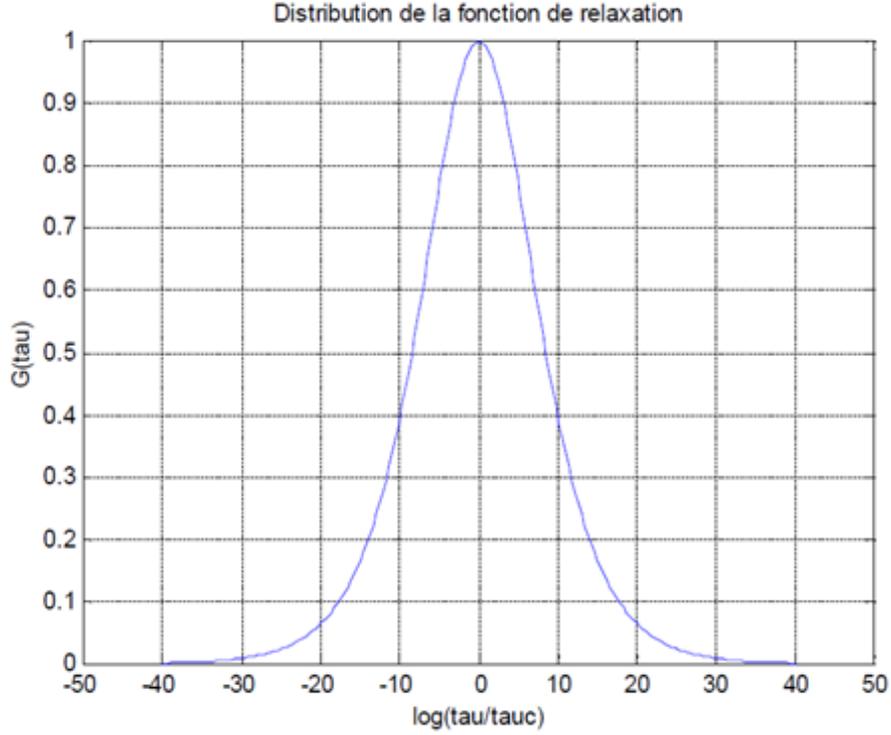


FIG. III.1 – Distribution de la fonction de temps de relaxation  $G(\tau)$ .

$$\lambda = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} = \frac{p_{i+1}}{p_i}, i = 1, 2, \dots, 2N - 1 \quad (\text{III.22})$$

avec les pôles  $p_i = \frac{1}{\tau_i}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ . Substituant l'équation (III.20) dans (III.18), on obtient :

$$H(s) = \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + \tau s} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + \tau_i s} \quad (\text{III.23})$$

On peut écrire alors :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{1 + \tau_i s} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{K_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (\text{III.24})$$

où,  $p_i$  sont les pôles de l'approximation donnée par :

$p_i = \frac{1}{\tau_i} = \lambda^{i-N} \cdot p_0$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ . Les  $K_i$  sont les résidus des pôles donnés par la relation suivante :

$$K_i = G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1 - \alpha)\pi}{\left\{ \cosh \left[ \alpha \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1 - \alpha)\pi} \right] \quad (\text{III.25})$$

Pour une fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ , qui peut être choisie ;  $1000 \times \omega_G$ , avec l'intervalle  $[0, \omega_G]$  est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre  $N$  est déterminé par la relation :

$$N = \text{Integer} \left( \frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1 \quad (\text{III.26})$$

### III.3.2.2 La réponse indicielle

La réponse indicielle du système de la fonction (III.17) est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{G(\tau_i)}{s(1 + \tau_i s)} \quad (\text{III.27})$$

donc la réponse indicielle est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} G(\tau_i) (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (\text{III.28})$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha}, \quad (1 < \alpha < 2) \quad (\text{III.29})$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \approx \frac{(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \quad (\text{III.30})$$

### III.3.3 Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Ici le système d'ordre fractionnaire oscillatoire est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire donnée par l'équation (III.17) pour  $1 < \alpha < 2$ .

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \quad (\text{III.31})$$

### III.3.3.1 Approximation par une fonction rationnelle

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire fondamental est :

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \approx \frac{(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \quad (\text{III.32})$$

$1 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < 2 - \alpha < 1$ , et  $(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}$ , c'est un zéro à puissance fractionnaire.

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (III.31) par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer pour une bande de fréquence limitée  $[0, \omega_G]$ , sa fonction de transfert irrationnelle de l'équation (III.31) par une fonction rationnelle. Pour cela on doit approximer le zéro à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle dans la même bande de fréquence  $[0, \omega_G]$ , comme suit [8] :

$$(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{III.33})$$

$H(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1}$ ; c'est la forme canonique d'un système du deuxième ordre.  
où :

$$\begin{aligned} z_0 < p_0 < \dots < z_N < p_N \\ z_i &= z_0 (AB)^i, p_i = A z_0 (AB)^i \\ z_0 &= \omega_c \sqrt{B}, A = 10^{(Y/10(1-(2-\alpha)))}, B = 10^{(Y/10(2-\alpha))}, N = \text{Integer} \left( \frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(AB)} \right) + 1 \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

En remplaçant l'approximation du zéro dans l'équation (III.32) on obtient :

$$H(s) = \frac{(1 + \tau_0 s)^{2-\alpha}}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \approx \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \times \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \quad (\text{III.35})$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$H(s) = \frac{c_1 s + c_2}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{K_i}{1 + s/p_i} \quad (\text{III.36})$$

Par identification, on se trouve les constantes  $c_1, c_2$ , et  $K_i$ , comme suit :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N K_i p_i, \text{ et } \tau_0 = \frac{1}{\omega_n} \\
 c_2 &= 1 - \sum_{i=0}^N K_i \\
 K_i &= H(s)|_{s=p_i} = \frac{\prod_{j=0}^N (1-A(AB)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1-(AB)^{i-j})} \times \frac{1}{(A\sqrt{B}(AB)^i)^2 + 2\xi(A\sqrt{B}(AB)^i) + 1}
 \end{aligned} \tag{III.37}$$

### III.3.3.2 La réponse fréquentielle

Après l'exécution des mêmes démarches de la section précédente, la réponse fréquentielle de (III.18) et (III.36) pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  est illustrée dans la figure III.2.

Dans la figure III.2 on remarque que la réponse fréquentielle de la fonction (III.18) et son approximation (III.31), du système d'ordre fractionnaire oscillatoire que les pentes sont entre  $-20dB$  et  $-40dB$  en variant l'ordre ■.

Les deux courbes de la fonction (III.18) et son approximation (III.31) sont presque les mêmes, ce qui signifie la bonne approximation de la fonction (III.31).

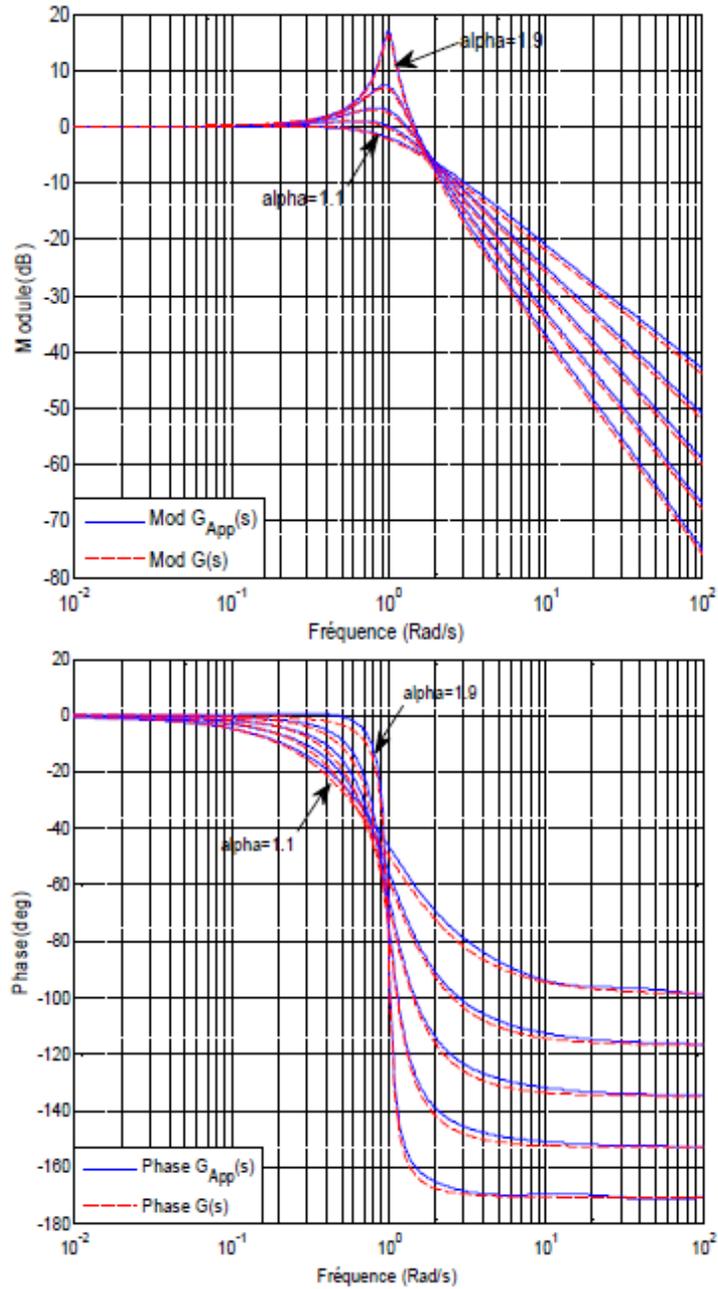


FIG. III.2 – La réponse fréquentielle de (III.18) et (III.36) pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ .

## III.4 Commande d'ordre non entier

Parmi les applications remarquables de calcul d'ordre non entier, la théorie de la commande des systèmes a la plus grande partie des travaux de recherche.

Généralement, pour une boucle fermée de commande des systèmes, il existe quatre cas principaux :

- Système d'ordre entier avec contrôleur d'ordre entier
- Système d'ordre entier avec contrôleur d'ordre non entier
- Système d'ordre non entier avec contrôleur d'ordre entier
- Système d'ordre non entier avec contrôleur d'ordre non entier

Pratiquement, il existe uniquement le cas du système d'ordre entier, et on peut utiliser un contrôleur d'ordre non entier.

Du point de vue mathématique, la commande d'ordre non entier est simplement une généralisation de la théorie de commande d'ordre entier (classique) qui pourrait mener à une modélisation plus adéquate et des performances de commande plus robuste. En effet, l'intérêt majeur de la commande d'ordre non entier est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de calcul fractionnaire.

La première tentative d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes peut être trouvée dans [68]. Du point de vue historique, il existe dans la littérature quelques structures principales de commande d'ordre non entier [53], [68].

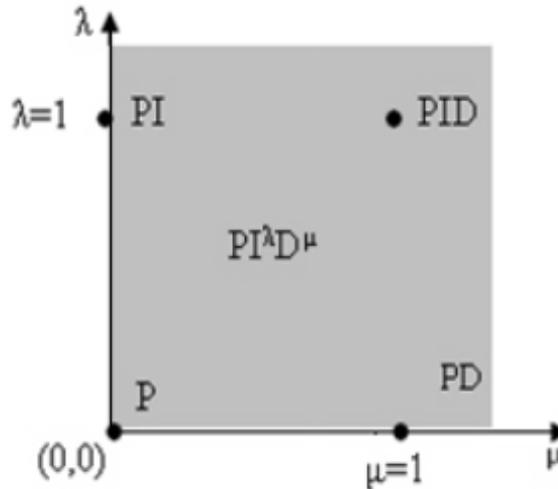
### III.4.1 La commande CRONE

Le contrôleur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) a été proposé par Oustaloup au début des années 1990 [6]. La supériorité des performances du contrôleur CRONE en comparaison avec le contrôleur PID classique a été détaillée dans [6].

Ce contrôleur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. Ce type de contrôleur est caractérisé par l'effet de l'avance de phase dans une bande limitée.

### III.4.2 Contrôleur d'ordre non entier (fractionnaire) : $PI^\lambda D^\mu$

Le contrôleur d'ordre non entier  $PI^\lambda D^\mu$ , est une généralisation du correcteur  $PID$  classique a été proposée par Podlubny en 1999. Sa fonction de transfert est donnée par [10] :


 FIG. III.3 – Disposition du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$ .

$$C(s) = K_p + \frac{T_I}{s^\lambda} + T_D \cdot s^\mu \quad (\text{III.38})$$

où  $K_p$ ,  $T_I$ , et  $T_D$  sont des coefficients réel.  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels positives.

De l'équation (III.38), on remarque que  $\lambda = \mu = 1$  pour le contrôleur d'ordre non entier devient le correcteur classique. La figure III.3 montre la disposition du contrôleur d'ordre non entier  $PI^\lambda D^\mu$  dans le plan  $(\lambda, \mu)$ .

D'après la figure III.3, on peut voir que tous les types de contrôleurs classiques  $PID$  et ses dérivés ( $P$ ,  $PI$ , et  $PD$ ), sont des cas spéciaux du contrôleur fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ . Depuis sa proposition, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'utilisation et à l'ajustement des paramètres de ce contrôleur fractionnaire. L'intérêt de ce genre de contrôleurs est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'en plus des trois paramètres classiques de réglage du  $PID$ , il possède deux autres paramètres de réglage ; l'ordre d'intégration  $\lambda$ , et l'ordre de différentiation  $\mu$ . Ces deux paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles ou d'autres conditions intéressantes dans la commande des systèmes asservis linéaires.

### III.4.3 Contrôleur d'ordre non entier $TID$

Le contrôleur  $TID$  a une structure semblable à un contrôleur  $PID$  classique, mais la composante proportionnelle  $P$ , est remplacée une composante ayant une fonction de transfert  $\frac{T}{s^{1/n}}$ , où  $T$  est une constante, et  $n$  est un nombre réel non nul, de préférence entre 0 et 2,

[70]. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{I}{s} + D.s \quad (\text{III.39})$$

Le contrôleur *TID* s'approche plus étroitement de la fonction idéale de Bode qui assure un meilleur rejet de perturbation, et minimise l'effet des variations des paramètres du système sur la réponse en boucle fermée par rapport aux contrôleurs *PID*.

### III.4.4 Contrôleur avance-retard de phase d'ordre non entier

Le contrôleur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire est une généralisation du contrôleur avance-retard de phase classique. Il a été proposé dans différents contextes dans [70].

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = k_c \left[ \frac{s + 1/\lambda}{s + 1/x\lambda} \right]^\alpha = k_c x^\alpha \left[ \frac{1 + \lambda s}{1 + x\lambda s} \right]^\alpha \quad (\text{III.40})$$

où,  $\lambda$  et  $\alpha$  sont deux réels positifs, et  $0 < x < 1$ .

Le comportement fréquentiel de ce contrôleur est illustré dans la figure suivante.

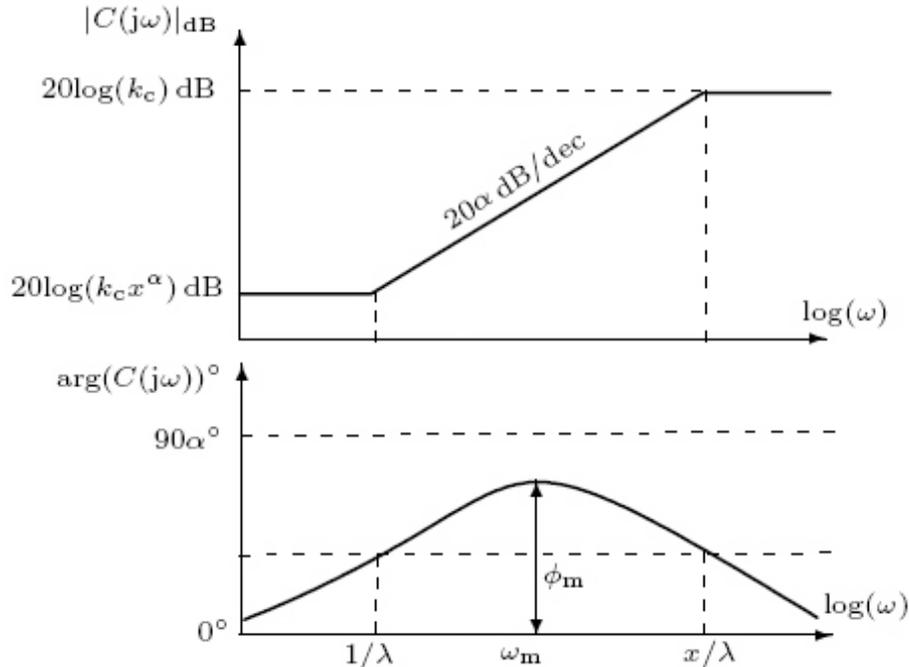


FIG. III.4 – Réponse fréquentielle du contrôleur avance-retard de phase fractionnaire.

Le contrôleur avance-retard de phase classique est une méthode de conception populaire des boucles de commande, alors le correcteur avance-retard de phase fractionnaire devrait aussi avoir sa valeur comparée aux contrôleurs CRONE, et  $PI^\lambda D^\mu$ .

### III.4.5 Commande avec référence de la fonction idéale de Bode

L'iso-amortissement est une propriété très désirable dans les systèmes asservis parce que le système asservi possédant cette propriété sera très robuste vis-à-vis des variations du gain.

Pour un système asservi à retour unitaire, la propriété de l'iso-amortissement se reporte au cas où la phase de sa fonction de transfert en boucle ouverte, dans le plan de Bode, est plate. Bode a été le premier qui a proposé une fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire garantissant la propriété de l'iso-amortissement [58]. Cette fonction connue sous le nom de fonction de Bode idéale est donnée par :

$$TF_{i\_Bode}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma} \quad (\text{III.41})$$

où,  $\omega_c$  est la fréquence de coupure désirée, et  $\gamma$  (où,  $0 < \gamma < 1$ ), représente la pente de la caractéristique idéale. La réponse fréquentielle du système asservi à retour unitaire de la fonction idéale de Bode est illustrée dans la figure III.5.

On note que, dans le plan de Bode, l'amplitude de cette fonction est une droite de pente constante  $-20\gamma \text{ dB/dec}$  et sa phase est une droite horizontale de  $\gamma \left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ rad/sec}$ . De même, la marge de phase est une constante  $M_\varphi = \pi \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)$ , pour toutes les valeurs de la fréquence.

Depuis sa proposition, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'utilisation de cette fonction comme fonction de référence dans la conception de la commande d'ordre non entier.

## III.5 Application de la commande fractionnaire simple sur les systèmes à retard

Cette section est pour but de synthétiser un contrôleur efficace pour la commande du système physique cité en chapitre I. Ce contrôleur doit assurer des bonnes dynamiques de poursuite et de régulation du système bouclé tout en assurant les objectifs ci-dessous :

1. (a) Amélioration des performances fournies par la synthèse basée sur le modèle linéaire d'ordre élevé  $G_{m_0}(s)$  : L'objectif ici est d'améliorer les caractéristiques

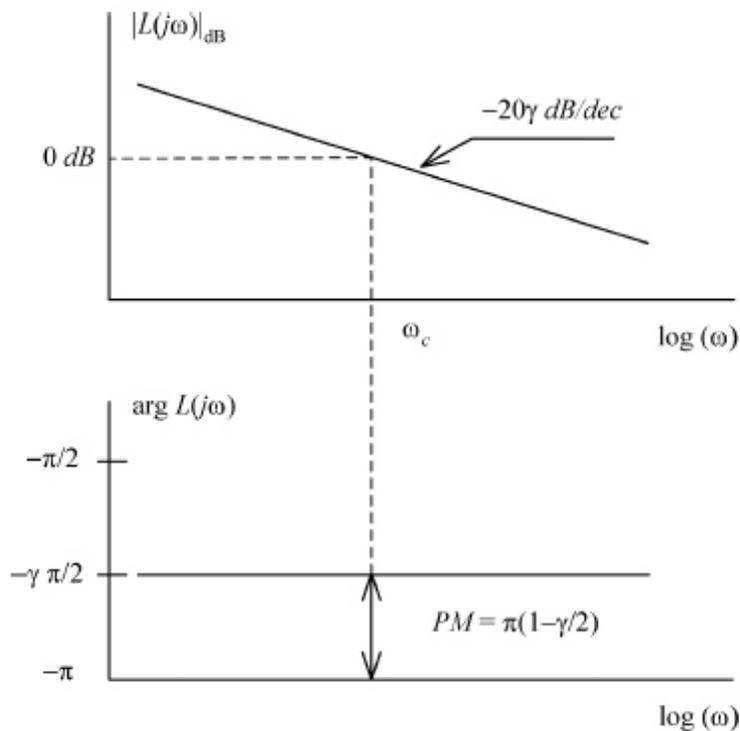


FIG. III.5 – Réponse fréquentielle de la fonction idéale de Bode [58].

temporelles fournies par la réponse du système bouclé notamment en régime transitoire.

- (b) Amélioration des performances obtenues via la synthèse basée sur le principe du SP assuré par le modèle de Wang [41] : L'objectif ici est d'améliorer le temps de réponse du système bouclé tout en assurant une commande économique.

Les deux objectifs cités ci-dessus peuvent réalisés par l'application des approches avancées de synthèse dans lesquelles la structure fractale est choisie pour le contrôleur à synthétiser et l'algorithme du PSO est utilisé pour optimiser ses paramètres. Dans ce cas, le problème de synthèse est formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes dont la fonction de coût représente l'intégral de la valeur absolue de l'erreur de poursuite ITAE (Integral Time Absolute Error) définie comme suit :

$$J = \min_x \int_0^{20} t |ITAE(t, x)| dt \quad (\text{III.42})$$

$$sc. x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

Ici,  $x$  est un vecteur contenant les paramètres du contrôleur à synthétiser. Sachant que la structure fractale choisie pour cette synthèse est celle décrivant la dynamique du  $PID$

fractionnaire (i.e.,  $PI^\lambda D^\mu$ ). Par conséquent, l'optimisation est effectuée par le vecteur  $x = [K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu]^T$  dont les limites supérieure et inférieure sont définies par :

$$\begin{cases} 0 < K_P < 1 \\ 0 < K_I < 1 \\ 0 < K_D < 1 \\ 0 < \lambda < 1 \\ 0 < \mu < 1 \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Pour chaque objectif mentionné précédemment, la formulation de la fonction de coût (à minimiser) est établie graphiquement en utilisant l'environnement SIMULINK (voir figures III.6 et III.7).

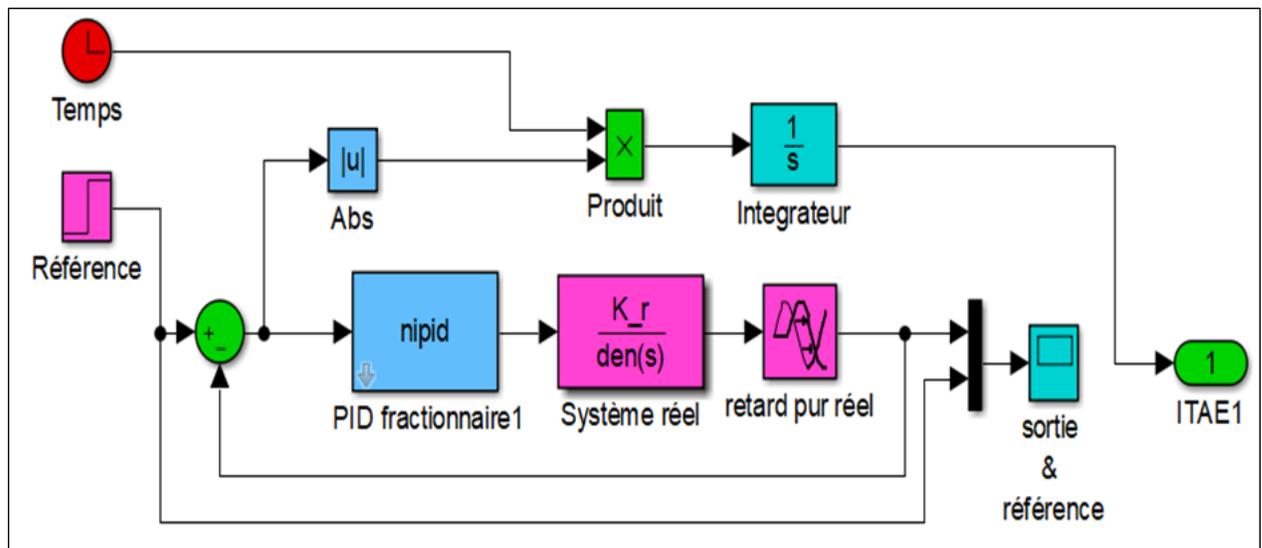


FIG. III.6 – Schéma block du premier critère assurant le premier objectif.

Pour atteindre le premier objectif, l'algorithme du PSO est exécuté 10 fois dont la solution minimale est assurée par la valeur  $J_{\min} = 0.014298$  (voir la figure III.8),

Cette solution fournit le transfert d'ordre non entier suivant :

$$C_{FO\_PID_1}(s) = 0.3075 + \frac{0.089916}{s^{0.981}} + 0.002 \times s^{0.03} \quad (\text{III.44})$$

La réponse temporelle fournie par le système bouclé par le contrôleur fractionnaire  $C_{FO\_PID_1}(s)$  est comparée à celle fournie par le contrôleur irrationnel  $C_{PID}(s)$ , cité dans le chapitre I. On obtient donc la figure III.9.

Ensuite, pour atteindre le second objectif, la minimisation de la fonction de coût présentée par la figure III.7, est achevée par l'obtention du transfert fractionnaire ci-dessous :

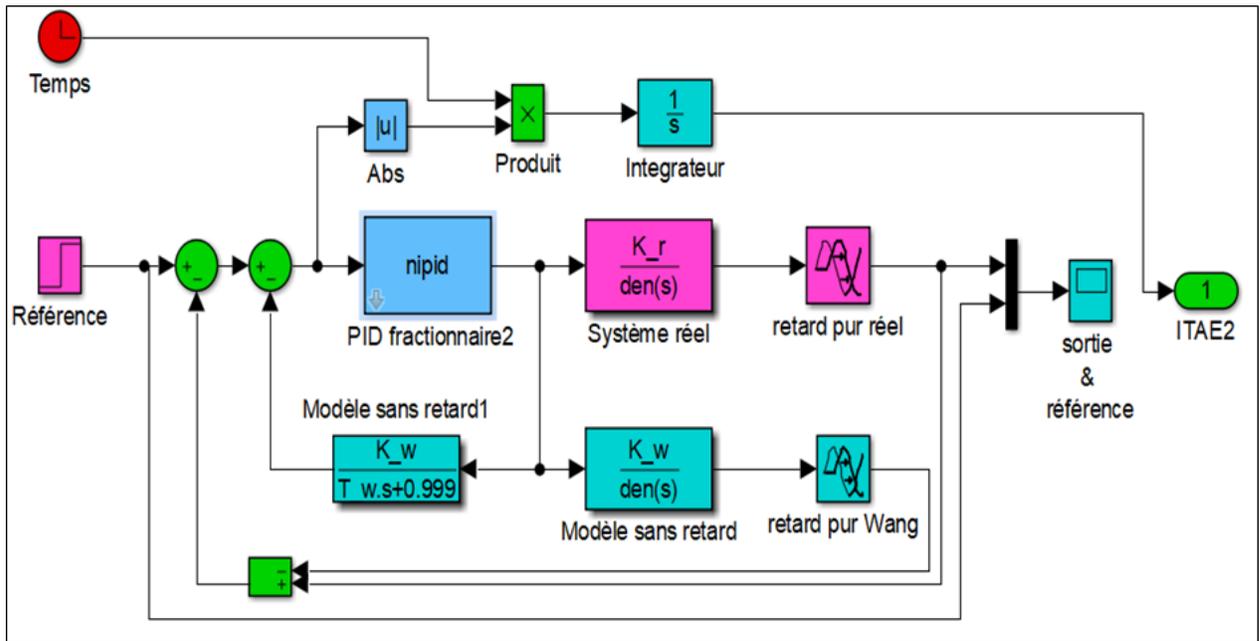


FIG. III.7 – Schéma block du deuxième critère assurant le deuxième objectif.

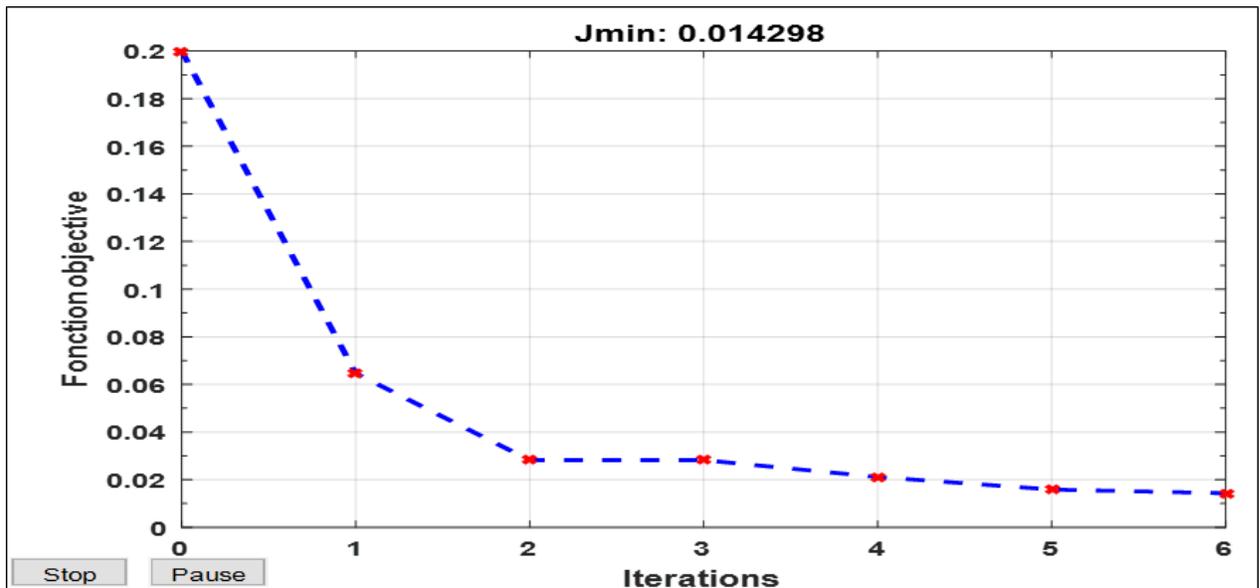


FIG. III.8 – L'évolution de la fonction cout durant le processus d'optimisation par le PSO

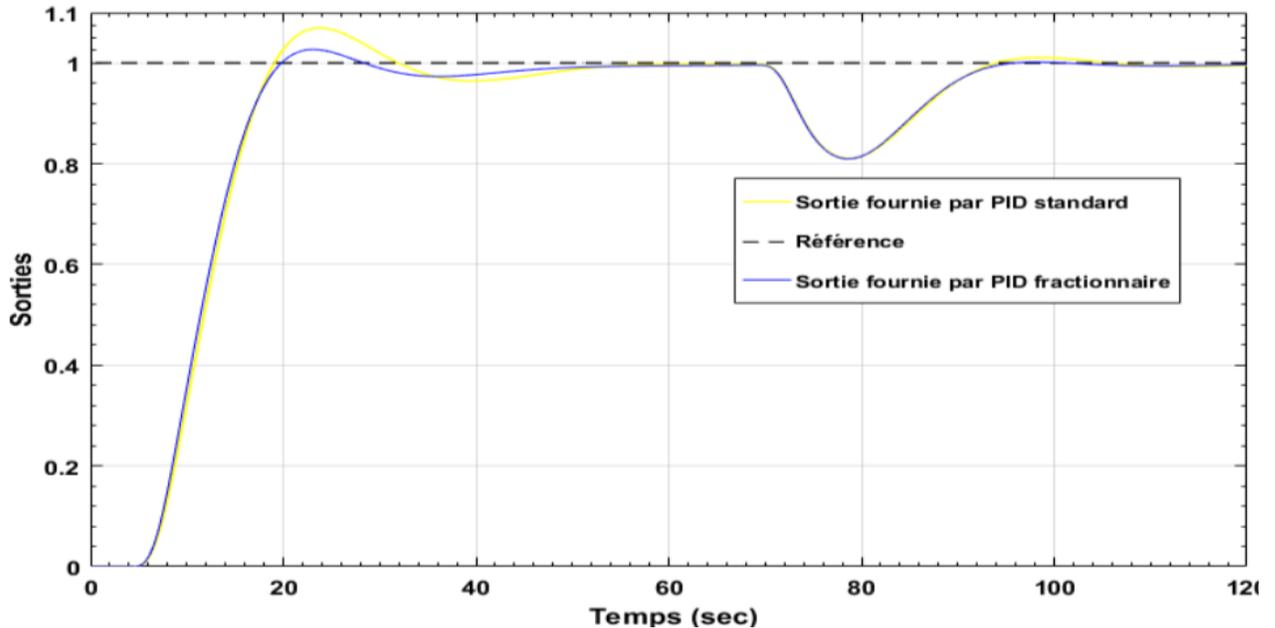


FIG. III.9 – Comparaison entre les réponses temporelles des deux contrôleurs  $C_{FO\_PID_1}(s)$  et  $C_{PID}(s)$

$$C_{FO\_PID_2}(s) = 0.295 + \frac{0.09}{s^{0.986}} + 0.062 \times s^{0.128} \quad (\text{III.45})$$

La réponse temporelle fournie par le système bouclé par le contrôleur fractionnaire  $C_{FO\_PID_2}(s)$ , est comparée à celle fournie par le contrôleur irrationnel  $C_W(s)$  cité dans le chapitre I. On obtient donc la figure III.10.

D'après la figure III.9, on remarque nettement que le contrôleur fractionnaire  $C_{FO\_PID_1}(s)$ , a la capacité d'atteindre l'amélioration souhaitée. Ceci est traduit par l'obtention d'une réponse temporelle caractérisée par un dépassement faible et un temps de réponse amélioré.

En revanche, d'après la figure III.10, l'amplitude du signal de commande fourni par le contrôleur fractionnaire  $C_{FO\_PID_2}(s)$ , est très réduite en comparaison à celle fournie par le contrôleur d'ordre entier  $C_W(s)$ .

Finalement, la comparaison des quatre réponses temporelles a montré l'efficacité et la supériorité de la synthèse basée sur les transferts fractionnaires ainsi que la configuration de commande utilisant le principe du SP.

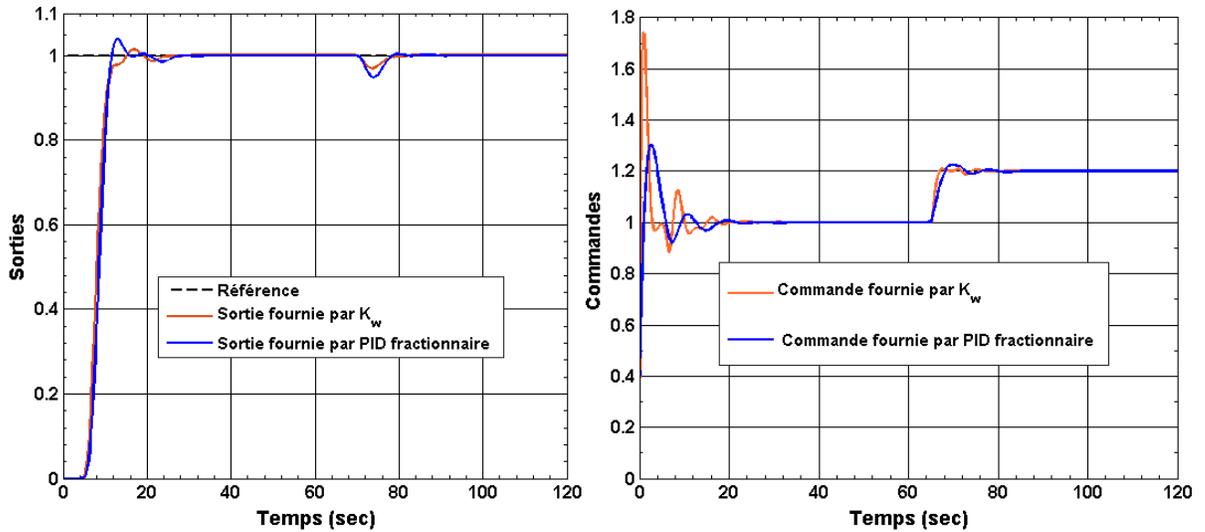


FIG. III.10 – Comparaison entre les réponses temporelles des deux contrôleurs  $C_{FO\_PID_2}(s)$ , et  $C_W(s)$ .

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de la commande utilisant le transfert d'ordre non entier pour la structure du contrôleur PID, ainsi que l'algorithme du PSO pour la détermination optimale de ses paramètres. Cette stratégie proposée à la capacité d'assurer des meilleures commandes pour stabiliser les systèmes physiques modélisés par des modèles à retard pur. Ces objectifs peuvent être réalisés en reformulant le problème de la commande en problème d'optimisation sous contrainte dont la fonction de coût est présentée graphiquement en utilisant l'outil de Simulink. Ce chapitre est achevé par une partie de simulation dans laquelle on a imposé deux objectifs. Le premier est d'améliorer les performances assurées par la synthèse basée sur le modèle d'ordre élevé. Cependant, le deuxième objectif repose sur l'amélioration des caractéristiques fournies par la sortie du système bouclé et cela par des commandes moins énergétiques. Finalement, la comparaison des résultats dans le plan temporel a confirmé que les performances de la synthèse fondée sur le principe du SP peut être améliorée par l'introduction de l'ordre fractionnaire dans la structure du contrôleur souhaité.

Dans la suite de ce travail, on présenterais les deux contributions proposées, nous verrons que l'utilisation de l'ordre fractionnaire dans la phase de modélisation peut améliorer les performances obtenues via la synthèse fondée sur le schéma du SP basé sur la fonction idéale de Bode d'ordre fractionnaire. Ces contributions ont la capacité d'améliorer les performances

temporelle et fréquentielle du système bouclé.

# Chapitre IV

## Modélisation et commande avancée des systèmes à retard

### IV.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans les chapitres précédents, les systèmes d'ordre entier à retard sont généralement décrits par des modèles mathématiques, avec une approximation de la partie de retard pur. La présence du retard dans la dynamique d'un système pourrait être la source d'instabilité et de mauvaises performances. Le problème de la stabilisation de tels systèmes a été alors un vrai challenge et a reçu une attention considérable. Afin de compenser l'effet du retard (pour un système à retard pur), plusieurs chercheurs ont traité le problème de commande via un prédicteur d'état. Ce travail consiste à développer une technique de commande par SP pour les systèmes linéaires à retard. La nouveauté dans cette thèse, est l'approche proposée pour résoudre le problème de commande de ce type des systèmes, par le prédicteur de Smith fractionnaire.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacrée à la proposition d'un modèle fractionnaire modélisant les systèmes à retard, puis l'identification des paramètres de ce modèle d'ordre non entier. La deuxième partie traitera la synthèse d'une loi de commande fractionnaire basé sur le Prédicteur de Smith pour les systèmes à retard pur.

Enfin, nous terminerons ce chapitre, avec l'étude de deux systèmes couramment utilisés dans la littérature, avec illustration des résultats de simulation, utilisant MatLab.

## IV.2 Modélisation avancée des systèmes à retard

### IV.2.1 Proposition d'un modèle fractionnaire modélisant le système à retard

La fonction de transfert du modèle fractionnaire proposé est choisie comme suit :

$$G_m(s) = G_{m_0}(s) \cdot e^{-\theta_m s} = \left( \frac{K_m}{1 + T_{m_1} s^{\alpha_m}} \right) \left( \frac{e^{-\theta_m s}}{1 + T_{m_2} s} \right) \quad (\text{IV.1})$$

où, les paramètres du modèle sont donnés par le vecteur  $x_m \in \mathbb{R}^5$ .

$$x_m = [K_m, T_{m_1}, T_{m_2}, \alpha_m, \theta_m]^T \quad (\text{IV.2})$$

Notez que le modèle fractionnaire ci-dessus, combine deux fonctions de transfert. La première, celui donné à droite, présente le modèle entier de premier ordre FOPTD qui est couramment utilisé dans l'étape de modélisation pour la méthode de conception du SP standard. Toutefois, la deuxième fonction de transfert, donnée à la gauche, présente le modèle fractionnaire stable de multi-lag, qui sera utilisé plus tard dans l'étape de la synthèse du contrôleur.

### IV.2.2 Formulation du problème d'optimisation de la modélisation avancée

Dans l'étape de modélisation, les paramètres du modèle fractionnaires sont déterminés à partir de résoudre le problème d'optimisation proposés à l'aide de l'algorithme d'optimisation PSO.

La fonction de coût est formulée utilisant le critère du minimum de l'erreur quadratique moyenne (LMSE)  $E_m$ , qui est donné par la valeur de l'écart entre les deux modules du système réel  $G_r$ , et du modèle fractionnaire proposé  $G_m$ , à chaque fréquence de l'espace logarithmique. En outre, les contraintes d'inégalité sont données par le biais de la valeur d'écart absolu entre les deux phases de processus réel et du modèle fractionnaire proposé, à chaque fréquence de l'espace logarithmique.

En outre, les paramètres du modèle fractionnaire proposées sont déterminés en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x_m} \|E_m\|_\infty &= \min_{x_m} \|G_r(s_i) - G_m(s_i, x_m)\|_\infty \\ \text{subject to } &: x_{\min} \leq x_m \leq x_{\max} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Selon les travaux de recherche précédentes, plusieurs méthodes ont été proposées pour reformuler le problème d'optimisation donné dans l'équation (IV.3). Parmi eux, le problème d'optimisation choisi est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{x_m} J_m(x_m) &= \min_{x_m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |E_m(s_i, x_m)|_{s_i=j\omega_i}^2 \\ \text{subject to } &: \begin{cases} h_{m_i}(x_m) = \left| \arg(E_{m_i}(s_i, x_m))_{s_i=j\omega_i} \right| - \varepsilon_m \leq 0 \\ x_{\min} \leq x_m \leq x_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

où,  $J_m$  désigne la fonction de coût à minimiser,  $n$  est le nombre de fréquences choisit parmi la gamme des fréquences  $\omega \in [\omega_{low}, \omega_{high}]$ ,  $\varepsilon_m$  est le scalaire positif qui présente la distance minimale qui doit exister entre les deux phases du système réel et le modèle fractionnaire proposé,  $x_{\min}$ , et  $x_{\max}$  sont les limites inférieures et supérieures pour le vecteur des paramètres à optimiser  $x_m$ .

$h_{m_i}$  avec,  $i = 1, \dots, n$ , sont les contraintes d'inégalité qui présentent l'erreur absolue entre les deux phases du système réel et du modèle proposé.

Sachant cela, la solution optimale du problème d'optimisation donnée par l'équation (IV.4) est difficile en raison du nombre élevé de contraintes d'inégalité. Pour résoudre cette difficulté, le problème d'optimisation sera transformé en problème d'optimisation des contraintes limitées en utilisant la même idée proposée dans [52]. Par la suite, les paramètres du modèle fractionnaire sont facilement déterminés à partir de sa solution optimale par l'algorithme de PSO.

## IV.3 Commande avancée des systèmes à retard pur

### IV.3.1 Proposition d'une structure fractale pour le contrôleur fractionnaire à synthétiser

Dans l'étape de la synthèse de contrôleur, le contrôleur fractionnaire proposé est conçu à l'aide de la même manière proposée par Wang [41]. Par conséquent, la partie libre de temps mort du modèle proposé  $G_m$ , peut être décomposée en deux fonctions de transfert tels que :

$$K(s, x_c) = \frac{G_c(s, x_c)}{1 + G_c(s, x_c) [g_{m01}(s) - g_{m01}(s) \cdot g_{m02}(s) \cdot e^{-\theta_m s}]} \quad (\text{IV.5})$$

où,  $g_{m01}$  et  $g_{m02}$ , sont les parties entier et fractionnaire respectivement, libres de temps mort du modèle fractionnaire proposé. Par conséquent, le schéma SP modifié de désadaptation est illustré à la figure IV.1.

Il peut être simplifié comme les schémas SP modifiés incompatibles, qui sont donnés par les figures IV.2 et IV.3.

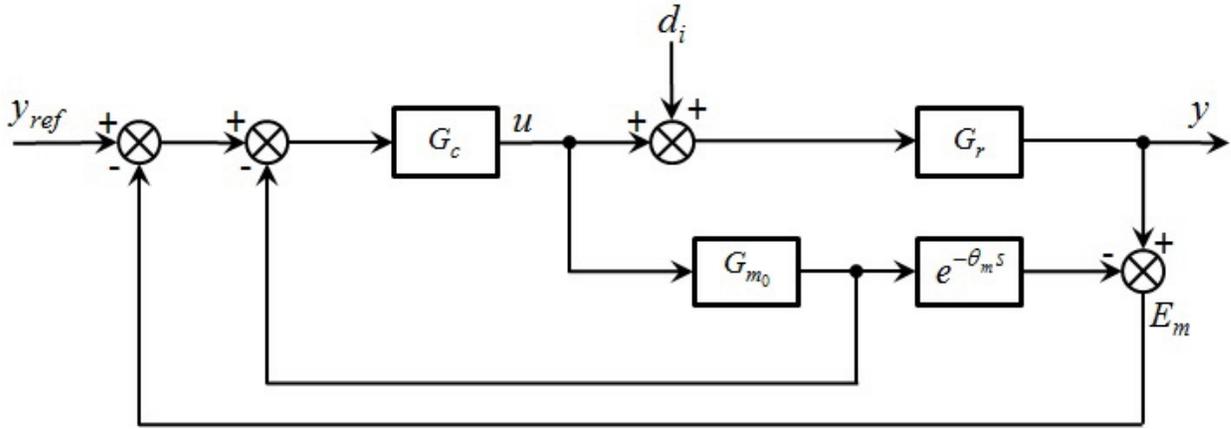


FIG. IV.1 – Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Première phase

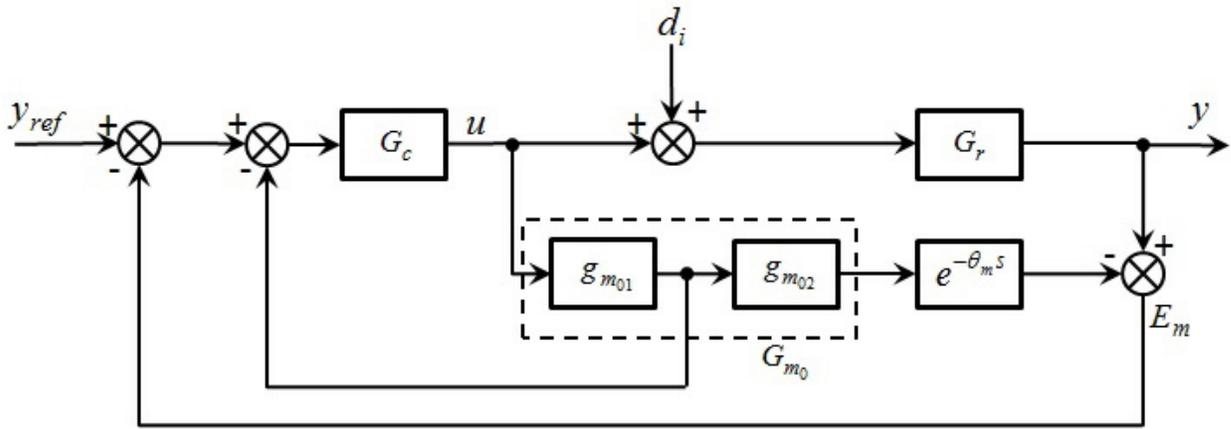


FIG. IV.2 – Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Deuxième phase

où,  $E_p$  indique l'erreur de suivi entre la sortie du processus et la référence du point de consigne.

Considérons maintenant le vecteur de paramètres du contrôleur  $x_c$ , qui définit la fonction de transfert du contrôleur fractionnaire proposé  $K(s, x_c)$ , qui est défini par :

$$K(s, x_c) = \frac{G_c(s, x_c)}{1 + G_c(s, x_c) [g_{m01}(s) - g_{m01}(s) \cdot g_{m02}(s) \cdot e^{-\theta_m s}]} \quad (\text{IV.6})$$

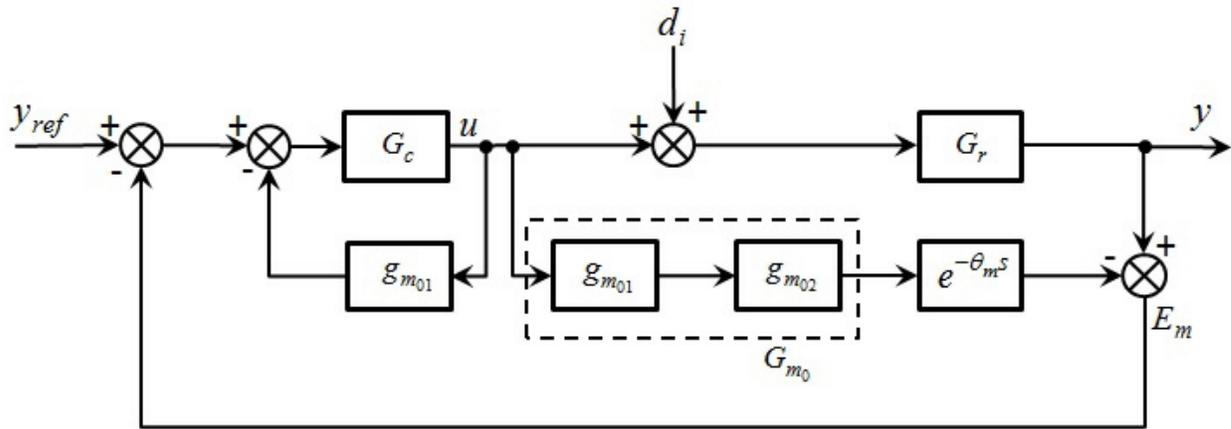


FIG. IV.3 – Schéma fonctionnel du Prédicteur de Smith modifier : Troisième phase

Selon la figure IV.3, le schéma général du système en boucle fermée peut être présenté comme suit :

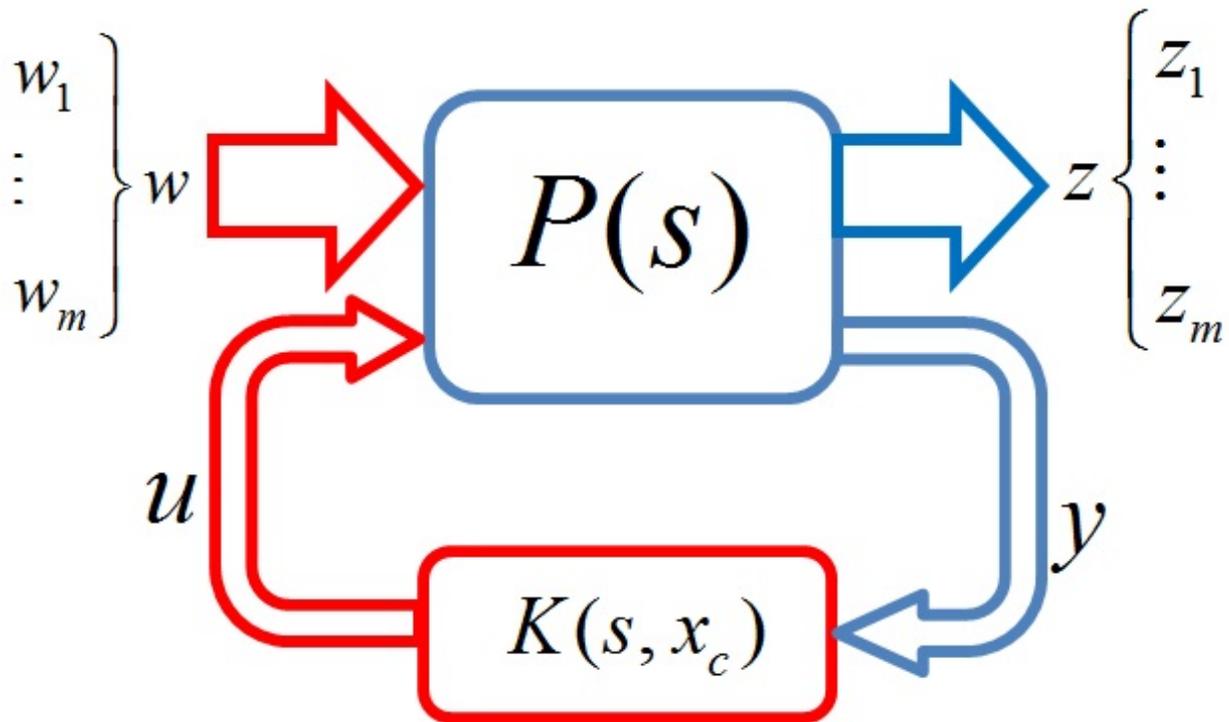


FIG. IV.4 – Schéma bloc du système de contrôle à retour d'état

où,  $P(s)$  est la fonction de transfert du système généralisée donnée par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = K(s, x_c) \quad (\text{IV.7})$$

Comme le montre la figure IV.4, le système en boucle fermée présente  $m$  entrées exogènes, qui sont présentées par le vecteur  $w = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ ,  $y$  compris diverses entrées exogènes telles que les bruits de capteurs, les perturbations d'entrée du système  $d_i$ , les perturbations de sortie de système  $d_o$ , et les références de consigne  $y_{ref}$ . En outre, il a également  $m$  résultats exogènes qui sont présentés par le vecteur  $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ , où toutes les caractéristiques imposées sont considérées. Le contrôleur fractionnaire proposé  $K(s, x_c)$ , utilise le vecteur de sortie mesuré  $y$  pour élaborer le vecteur de commande  $u$ , qui modifie le comportement naturel du système  $P(s)$ . Le contrôleur obtenu doit satisfaire certaines spécifications imposées telles qu'une bonne dynamique de suivi des références de points de consigne, une bonne atténuation de toutes les perturbations de charge et des bruits de capteurs. Ces exigences sont formulées comme le problème d'optimisation suivant [71] :

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_c(x_c) &= \min_{x_c} \|J_{w \rightarrow z}(s, x_c)\|_{\infty} \\ \text{subject to } &: x_{c_{\min}} \leq x_c \leq x_{c_{\max}} \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

où,  $J_{w \rightarrow z}$  désigne la matrice de transfert en boucle fermée entre les deux vecteurs exogènes d'entrée  $w$ , et de sortie  $z$ .

Le contrôleur fractionnaire robuste proposé est donné par la structure fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} G_c(s, x_c) &= G_{c_1}(s, x_c) \cdot G_{c_2}(s, x_c) \cdot G_{c_3}(s, x_c) \cdot G_{c_4}(s, x_c) \\ \text{avec, } \left\{ \begin{array}{l} G_{c_1}(s, x_c) = \text{Cons tan } t \\ G_{c_2}(s, x_c) = \left( \frac{1}{g_{m01}(s)} \right)_{s=0} \\ G_{c_3}(s, x_c) = \frac{1}{s^{\alpha_c}} \\ G_{c_4}(s, x_c) = \frac{1+T_c \cdot s^{\mu_c}}{1+\tau_c \cdot s} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

où chaque partie de ce contrôleur est bien détaillée dans [71]. Le contrôleur de conception est atteint en trouvant cinq variables, qui sont présentées par le vecteur  $x_c$  :

$$x_c = [G_{c_1}, T_c, \tau_c, \alpha_c, \mu_c]^T \quad (\text{IV.10})$$

En conséquence, l'utilisation de l'algorithme PSO, résulte les paramètres de réglage du contrôleur sont généralement effectués par un processus d'optimisation impliquant une opération de recherche complexe. Cela peut conduire à un mauvais contrôleur si la solution obtenue est piégée dans le problème des minimums locaux. Pour éviter cette difficulté du problème, la deuxième contribution de ce travail est de proposer une manière analytique qui

réduit la taille de l'espace de recherche du problème d'optimisation où les paramètres du contrôleur fractionnaire robuste proposé dépendent uniquement de trois arguments.

## IV.3.2 Déterminations des paramètres du contrôleur fractionnaire

### IV.3.2.1 Approche basée sur la fonction de transfert idéal de Bode

Une procédure similaire donnée dans [45], elle est utilisée pour réduire le nombre des variables de cette commande. L'idée proposée se résume comme suit :

Selon la figure IV.2, si l'erreur de modélisation est bien réduite (c.-à-d.,  $E_m = 0$ ), la fonction de transfert de boucle ouverte est déterminée à partir de la boucle interne de la figure IV.2, elle donne :

$$L_{ref} \equiv G_c \cdot g_{m01} \quad (\text{IV.11})$$

L'objectif principal est d'assurer par  $L_{ref}$ , le même comportement de la boucle ouverte du modèle de référence donné par :

$$G_c \cdot g_{m01} = \frac{\chi_1}{s^{\chi_2} \cdot (\chi_3 \cdot s + 1)} \quad (\text{IV.12})$$

où,  $\chi_1, \chi_2$ , et  $\chi_3$  ; sont les nouveaux paramètres réelles à déterminer par un algorithme d'optimisation adéquate.

Selon l'équation (IV.12), le modèle de référence d'ordre fractionnaire proposé ci-dessus comporte deux parties :

i) La première partie présente la fonction de transfert idéale de Bode définie par [71] :

$$L_{ref1} = \frac{\chi_1}{s^{\chi_2}} \quad (\text{IV.13})$$

ii) Le second correspond à la fonction de transfert ordinaire de premier ordre donnée par :

$$L_{ref2} = \frac{1}{\chi_3 \cdot s + 1} \quad (\text{IV.14})$$

Dans l'étape de synthèse du contrôleur proposée par Wang [41], la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle entier de référence est donnée par la formule :

$$L_{Wang} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (\text{IV.15})$$

où,  $\zeta$ , et  $\omega_n$  désignent, respectivement, le rapport d'amortissement et la fréquence naturelle de la boucle ouverte désirée.

Selon les équations (IV.12) et (IV.15). En plus si :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\omega_n}{2\zeta} \\ \chi_2 &= 1 \\ \chi_3 &= \frac{1}{2\zeta\omega_n} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Le modèle de Wang devient un cas particulier de notre modèle fractionnaire proposé. En outre, si  $\chi_3 = 0$ , le modèle Bode idéal devient également un cas particulier de notre proposition. En conséquence, notre proposition a la capacité de satisfaire un plus grand nombre de spécifications imposées que celle proposée par d'autres contrôleurs de synthèse dans la stratégie de contrôle du Prédicteur de Smith standard.

Sur la base des équations (IV.9) et (IV.12), la fonction de transfert du contrôleur fractionnaire robuste proposé est réécrite comme suit :

$$G_c = [\chi_1] \begin{bmatrix} 1 \\ K_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s^{\chi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + T_{m_1} \cdot s^{\alpha_m} \\ \chi_3 \cdot s + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Où les paramètres du contrôleur sont réduits aux trois degrés de liberté  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , et  $\chi_3$ . Ses valeurs optimales sont données par un algorithme d'optimisation adéquat, dans lequel certaines spécifications imposées de  $H_\infty$ , sont bien satisfaites.

### IV.3.2.2 *Approche basée sur la théorie de la commande robuste*

Dans la théorie du contrôle robuste, les conditions de robustesse imposent certaines contraintes. Ces contraintes présentent les grandeurs des fonctions de sensibilité avec de petites valeurs pour toutes les fréquences. En outre, le bruit du capteur et la perturbation de système doivent avoir de grandes valeurs.

L'objectif de ce problème est d'obtenir cette robustesse avec des grandeurs minimales du signal de contrôle. Ainsi, les conditions ci-dessus sont formulées comme le problème d'optimisation multivariable suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_{c_1}(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [S_d(j\omega, x_c)] \\ \Leftrightarrow \|S_d(s, x_c)\|_\infty &\leq \gamma_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_{c2}(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [S_c(j\omega, x_c)] \\ &\Leftrightarrow \|S_c(s, x_c)\|_{\infty} \leq \gamma_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_{c3}(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [K(j\omega, x_c) S_d(j\omega, x_c)] \\ &\Leftrightarrow \|K(s, x_c) S_d(s, x_c)\|_{\infty} \leq \gamma_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_{c4}(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [G_r(j\omega, x_c) S_d(j\omega, x_c)] \\ &\Leftrightarrow \|G_r(s, x_c) S_d(s, x_c)\|_{\infty} \leq \gamma_4 \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

où,  $S_d$ , et  $S_c$  désignent, respectivement, les fonctions de la sensibilité et la sensibilité complémentaire, avec :

$$S_d(s, x_c) = [1 + G_r K(s, x_c)]^{-1} \quad (\text{IV.22})$$

$$S_c(s, x_c) = 1 - S_d(s, x_c) \quad (\text{IV.23})$$

En outre,  $\bar{\sigma} (*)$  présente la valeur maximale singulière de la fonction de transfert  $(*)$ . Sachant que,  $\min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [X_i(j\omega, x_c)]$ , est numériquement équivalent à la norme infinie de  $X_i(s, x_c)$ .

où,

$$\|X_i(s, x_c)\|_{\infty} \leq \gamma_i \quad (\text{IV.24})$$

avec  $\gamma_i$ ; présente le niveau positif fixé par l'utilisateur.

Afin d'éviter la complexité du calcul, et en fonction de la propriété donnée par l'équation (IV.24), nous avons essayé de simplifier le problème d'optimisation multi-objectif ci-dessus à un problème d'optimisation mono-objectif sous contraintes. Pour atteindre cet objectif, l'une des quatre fonctions objectives (voir les équations (IV.18) - (IV.21) doit être sélectionnée comme la fonction objectif principal et les autres sont considérées comme les contraintes d'inégalité. Ensuite, nous allons résoudre le problème d'optimisation obtenu, en utilisant l'algorithme PSO, pour déterminer le vecteur optimal des paramètres de contrôleur proposé  $x_c^*$ .

$$x_c^* = (\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3^*)^T \quad (\text{IV.25})$$

## IV.4 Simulations et discussion des résultats

### IV.4.1 Algorithme proposé pour la modélisation et la synthèse du contrôleur

Dans la phase de la modélisation, les paramètres du modèle fractionnaire sont déterminés selon les étapes suivantes, [72] :

– *Étape 1* :

1. Choisissez l'ensemble des limites inférieures et supérieures qui limitent le vecteur des variables de conception  $x_m$ , dans laquelle la condition suivante doit être satisfaite :  
 $x_{\min} < x_m < x_{\max}$ .
2. Ensuite, choisissez le scalaire positif  $\varepsilon_m$ , et passez à la prochaine étape.

– *Étape 2* :

1. Notez que les  $n$  réponses en fréquence du système réel  $G_r(j\omega_k)_{k=1,\dots,n}$ , sont généralement disponibles dans la société mondiale de contrôle. Ici, les réponses fréquentielles précédentes sont générées à l'aide de la commande Matlab "*logspace*", dans lequel, les  $n$  points logarithmiquement égaux entre les décennies  $10^{\omega_{\min}}$ , et  $10^{\omega_{\max}}$  peuvent être générés.
2. Réglez  $\ell = 0$  (le nombre des itérations), et passez à l'étape suivante.

– *Étape 3* :

1. Pour chaque itération  $\ell$  de l'algorithme de PSO, le vecteur de solution  $x_m$ , est généré dans la gamme  $[x_{\min}, x_{\max}]$ . Sur la base de cette solution, les  $n$  réponses fréquentielles du modèle fractionnaire proposé  $G_m(j\omega_k)_{k=1,\dots,n}$ , sont déterminées à l'aide de l'équation (IV.1). Par conséquent, la fonction de coût du problème d'optimisation (IV.4) (b), est déterminée par l'erreur absolue moyenne entre les gains du système réel et le modèle proposé. Cependant, les contraintes d'inégalité du problème d'optimisation (IV.4), sont déterminées par les  $n$  phases du processus réel et le modèle fractionnaire proposé où chaque valeur obtenue est comparée par le niveau positif  $\varepsilon_m$ .

– *Étape 4* :

1. Du problème d'optimisation précédent, le nouveau problème d'optimisation des contraintes bornées est déterminé en utilisant la même idée proposée dans [23].

– *Étape 5 :*

1. Le nouveau problème d’optimisation obtenu est résolu par la commande ‘‘particleswarm’’ de Matlab, disponible dans Matlab<sup>®</sup>2015a\toolbox\globaloptim. La syntaxe de cette commande est donné par :  $x_m = \text{particleswarm}(obj\_fun, nvar, x_{\min}, x_{\max})$ , où,  $obj\_fun$ ; représente la *M-function*, qui défini la fonction de coût du problème d’optimisation sous contraintes bornées,  $nvar = 5$ ; est le nombre des variables du modèle fractionnaire proposé.

– *Étape 6 :*

1. Si la condition d’arrêt est satisfaite, l’algorithme se termine avec le vecteur de solution optimale  $x_m^*$ .
2. Si non, réglez  $\ell \leftarrow \ell + 1$ , et revenez à l’étape 3.

Les mêmes étapes précédentes devraient être suivies pour déterminer les paramètres robustes du contrôleur fractionnaire, dans lesquels le problème d’optimisation peut être formulé par les équations (IV.18) à (IV.21), avec, sa solution optimale  $x_c^* = (\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3^*)$ , est trouvée par l’algorithme de PSO.

Dans la section suivante, deux système réels à retard seront choisis afin de valider le contrôleur fractionnaire proposé en fonction du modèle fractionnaire pour la stratégie de contrôle par le prédicteur de Smith proposée.

## IV.4.2 Simulation : Premier cas

Dans ce premier cas, en compte tenu du processus réel défini dans [41, 45], par la fonction de transfert suivante :

$$G_r(s) = \frac{1}{(1+s)^5} e^{-4s} \quad (\text{IV.26})$$

Ce système à retard pur est très utilisé dans le monde de recherche, afin de tester le déroulement d’une loi de commande dédié aux systèmes à retard pur.

Les données numériques nécessaires pour exécuter l’algorithme proposé dans la phase de modélisation, sont choisies comme suit :

- Les pondérations des paramètres du modèle proposé :  $0 < T_{m_1}, T_{m_2} < 3$ ,  $0 < K_m < 2$ ,  $0 < \alpha_m < 1$ , et  $0 < \theta_m < 6$ .
- Les paramètres du PSO :  $n = 200$ ,  $\omega \in [10^{-4}, 10^4]$ , et  $\varepsilon_m = 10^{-2}$  représentent respectivement la taille de swarm, l’intervalle de recherche de PSO, et l’écart.

Les paramètres du modèle fractionnaire proposé sont obtenus utilisant l'algorithme de PSO comme suit :

$$\begin{aligned} x_m &= [K_m, T_{m_1}, T_{m_2}, \alpha_m, \theta_m]^T \\ &= [0.9974, 1.6554, 1.8186, 0.982, 5.7449]^T \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Alors, le modèle fractionnaire proposé est le suivant :

$$G_{m\_proposé}(s) = \frac{0.9974}{(1 + 1.6554s^{0.982})(1 + 1.8186s)} e^{-5.7449s} \quad (\text{IV.28})$$

Notez que le modèle entier proposé par Wang [41], pour le même processus précédent, est défini par :

$$G_{m\_Wang}(s) = \frac{1}{0.999 + 1.64.s} e^{-5.79s} \quad (\text{IV.29})$$

Maintenant, dans l'étape de synthèse, le contrôleur robuste désiré devrait assurer une bonne réduction de l'effet de bruit du capteur, dans lequel le signal de commande obtenu doit être donné par une amplitude réduite. Ces exigences sont formulées comme le problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_c(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma} [kS_d] \\ \text{subject to : } h_c(x_c) &= \|S_c(j\omega_c, x_c)\|_{\infty} - \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

En outre, les données numériques telles que :

- Les pondérations des paramètres à optimiser  $0 < \chi_1, \chi_2, \chi_3 < 3$ .
- $\omega_c \in [0.1, 100]$ , et  $\gamma = 0.1$ , sont utilisées dans l'étape d'initialisation du PSO.

Après l'exécution de l'algorithme proposé, on obtient le vecteur des paramètres utilisées pour construire le contrôleur SP-fractionnaire proposé, comme suit :

$$x_c = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T = [0.906, 1.00, 0.711]^T \quad (\text{IV.31})$$

Ce qui est impliqué la fonctionnelle de contrôleur SP-fractionnaire suivante :

$$G_{c\_proposé}(s) = [0.906] \left[ \frac{1}{0.9974} \right] \left[ \frac{1}{s} \right] \left[ \frac{1 + 1.6554s^{0.982}}{0.711.s + 1} \right] \quad (\text{IV.32})$$

Par ailleurs, le contrôleur *PID* d'ordre entier proposé par Wang dans [11] est donné par :

$$G_{c\_Wang}(s) = \frac{5.03s + 3.06}{s(s + 2.48)} \quad (\text{IV.33})$$

#### IV.4.2.1 Analyse fréquentielle

Nous considérons dans un premier temps une simulation dans le domaine fréquentiel. Où, nous allons tester le contrôleur SP-fractionnaire proposé pour le premier cas, car l'analyse fréquentielle est riche en informations. Alors, pour atteindre ce but, la différence d'erreur de modélisation entre le modèle d'ordre non entier proposé et celui de Wang est illustrée dans la Figure 4 5. En outre, les valeurs singulières de la sensibilité directe et la sensibilité complémentaire obtenus par les deux contrôleurs, SP-fractionnaire proposé et de Wang sont montrées dans la figure IV.6

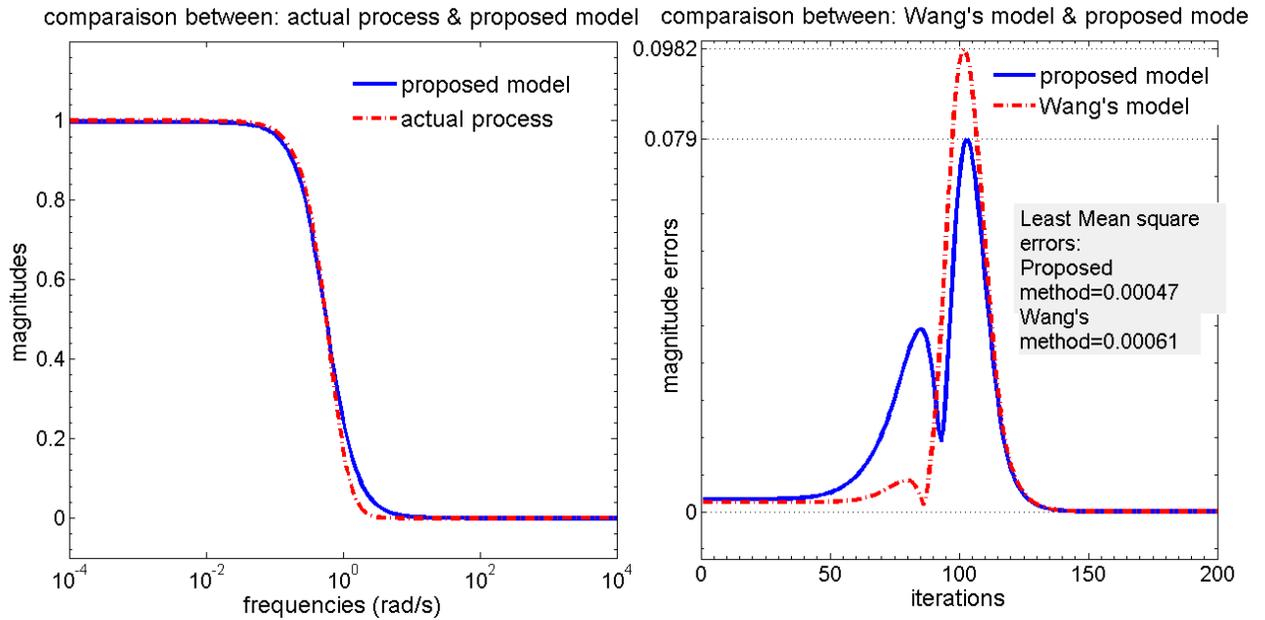


FIG. IV.5 – Comparaison entre le modèle fractionnaire proposé et l'un de Wang pour le premier cas

La fonction de transfert obtenue du modèle d'ordre fractionnaire proposé pour le premier cas est donnée par l'équation (IV.26).

Selon la figure IV.5, on peut voir que le modèle d'ordre non entier (fractionnel) proposé basé sur l'algorithme de PSO assure une bonne dynamique de suivi du système réel dans chaque point de fréquence. Par rapport au modèle de Wang, la méthode de modélisation proposée garantit une valeur coûteuse de l'amplitude d'erreur maximale  $\max |E_p| = 0,079$ , et une bonne minimisation de l'erreur moyenne des moindres carrés  $J_{\min} = 0,00061$ . De plus, les paramètres optimaux  $x_c$ , obtenus à partir de l'exécution de l'algorithme proposé sont donnés dans l'équation (IV.28), ces paramètres sont utilisés pour construire le contrôleur SP-fractionnaire proposé pour le premier cas.

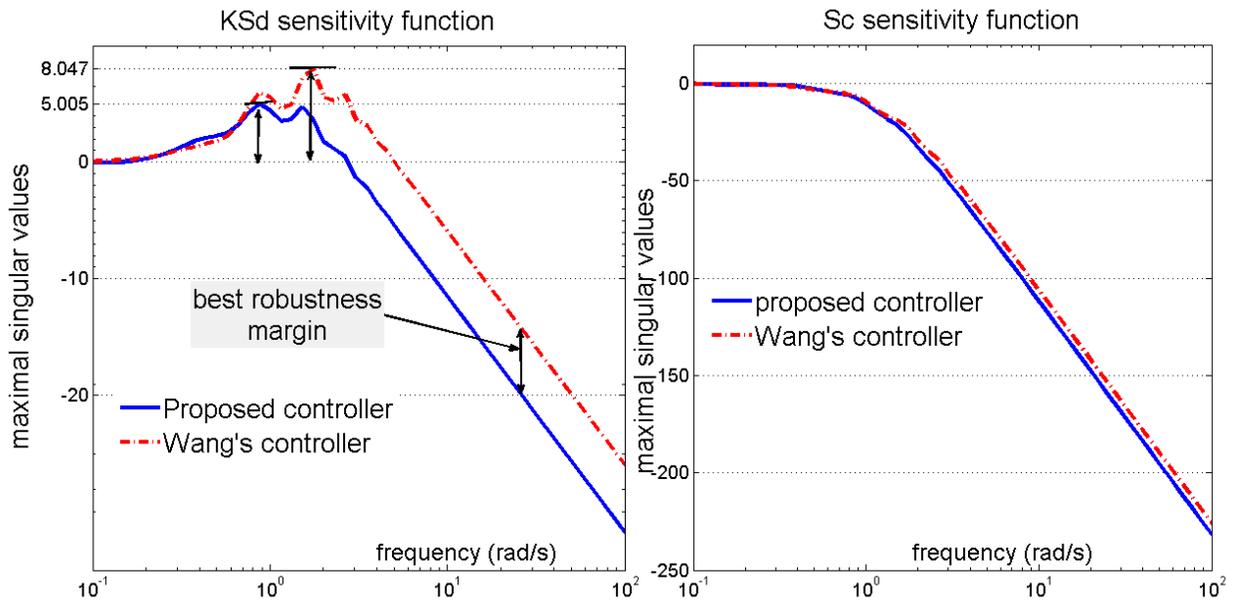


FIG. IV.6 – Les deux fonctions de sensibilité obtenues par la méthode proposée et l'une de Wang pour le premier cas

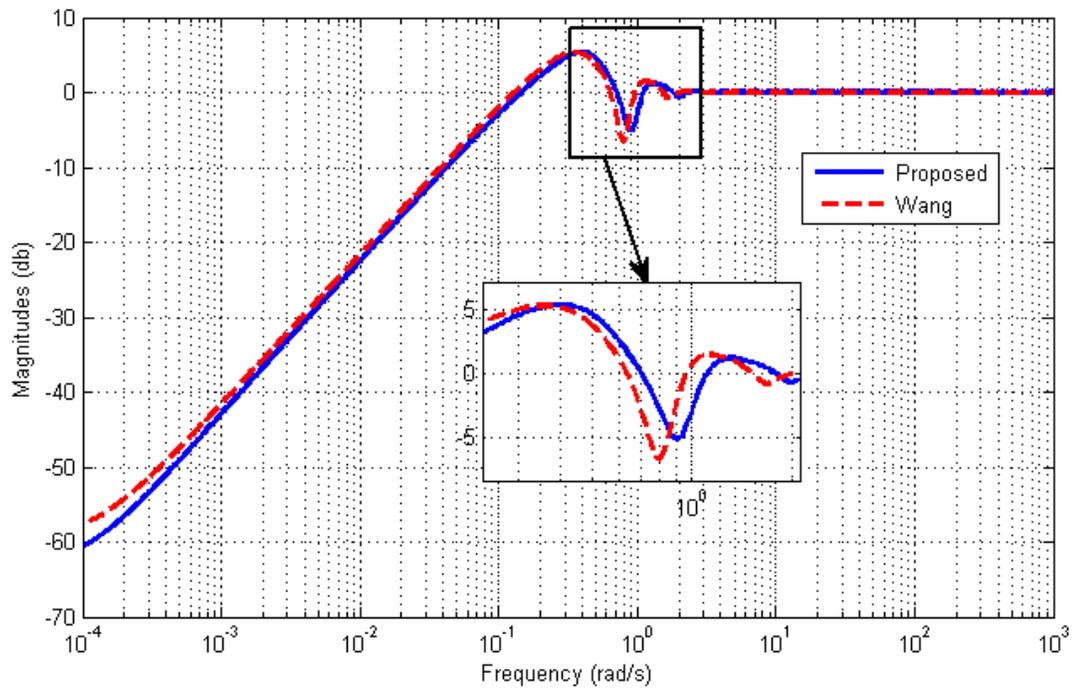


FIG. IV.7 – La sensibilité inverse pour le premier cas pour les deux contrôleurs SP-fractionnaire et de Wang

La figure IV.6 montre les valeurs singulières maximales des deux fonctions de sensibilité  $\bar{\sigma} [KS_d]$ , et  $\bar{\sigma} [S_c]$ , données par le contrôleur de Wang et le contrôleur SP-fractionnaire proposé.

Selon cette figure, en particulier du côté gauche, toutes les valeurs singulières de la fonction de sensibilité directe  $KS_d$ , données par les deux méthodes de synthèse, sont réduites dans toutes les fréquences. Cela garantit une énergie de contrôle moins appropriée. Cette figure montre également que la meilleure fonction de sensibilité obtenue est atteinte lorsque sa valeur d'amplitude maximale est le plus petit possible, donc la méthode proposée assure un meilleur signal de contrôle dans le domaine temporel par rapport à la méthode de Wang. En outre, on peut voir que selon le côté droit de la figure IV.6, les valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité complémentaire  $S_c$ , sont réduites à des fréquences qui sont au-delà de la bande passante du système, afin d'assurer la robustesse aux hautes fréquences. De plus, nous pouvons voir que la meilleure dynamique de minimisation de l'effet des bruits de capteurs est donnée lorsque les valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité complémentaire sont aussi faibles que possible dans les hautes fréquences.

Par conséquent, le contrôleur de modèle fractionnaire proposé offre une meilleure marge de robustesse.

Pour confirmer les résultats ci-dessus, en doit lancer une simulation temporelle.

#### IV.4.2.2 *Analyse temporelle*

Dans le domaine temporel, nous utilisons les trois entrées exogènes suivantes sur le système de contrôle par rétroaction. La première représente l'entrée de référence du point de consigne  $y_{ref}$ , qui est supposé un signal d'échelon unité. La seconde entrée représente l'entrée de perturbation de charge  $d_i$ , qui est supposée comme un signal échelon d'amplitude égal à  $-0.25$ , avec un temps de d'citation de 40 *secondes*. Enfin, la troisième entrée est représentée comme un signal de bruit de capteur  $\eta$ , qui est pris sous forme d'une distribution gaussienne aléatoire, où sa moyenne et sa variance sont 0 et 0.1 respectivement avec un instant de pénétration  $t = 60$  *secondes*.

Le résultat de ces trois entrées est la réponse indicielle illustrée dans la figure IV.8. Cette figure les réponses de la boucle fermée obtenues pour le système de premier cas présenté par l'équation (IV.26), des deux contrôleurs

D'après la figure IV.8, il est facile de voir que la minimisation la plus efficace aux effets des bruits de mesures en régime stationnaire est assurée par le contrôleur SP-fractionnaire proposé. Cette figure montre également un meilleur signal de commande, dont la valeur

minimale de l'amplitude est garantie par le contrôleur SP-fractionnaire proposé dans l'état transitoire, dans lequel il n'est pas bien assurée par la méthode de Wang.

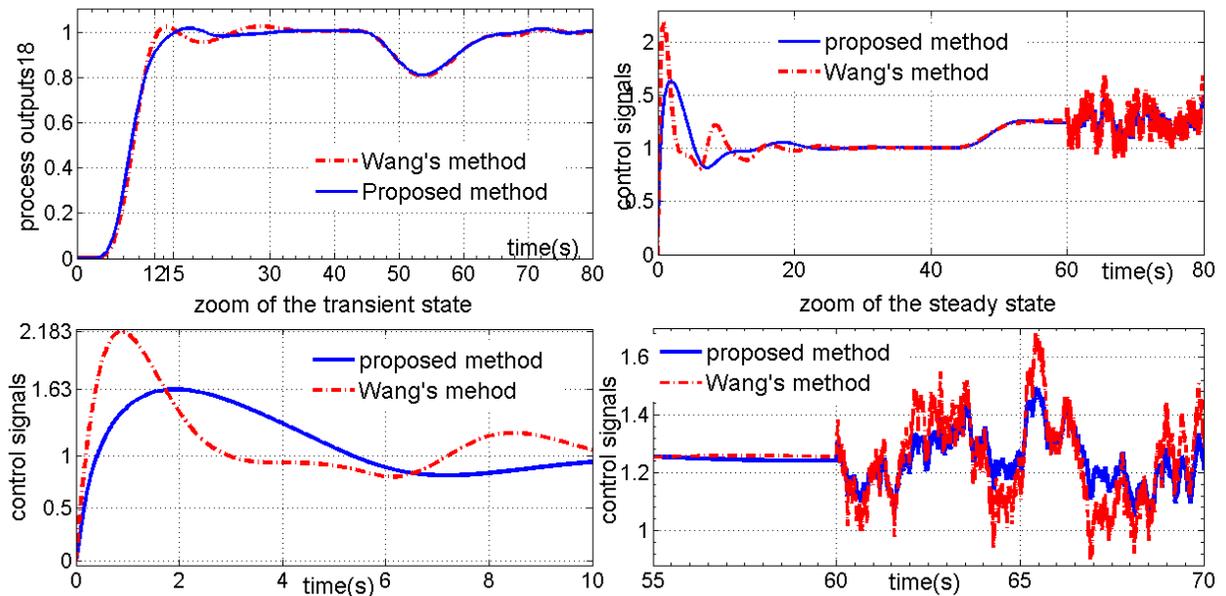


FIG. IV.8 – Comparaisons entre les deux contrôleurs SP-fractionnaire proposé et de Wang dans le domaine temporel pour le premier cas.

Comme indiqué précédemment, ces résultats sont obtenus utilisant MATLAB/SIMULINK, c'est pour cela, il faut connaître les paramètres par default de ce langage de simulation. Donc, les segments de ligne représentent les exigences de la réponse indicielle suivantes

- Amplitude inférieure ou égale à  $-0.01$  jusqu'à 5 *secondes* pour un sous-dépassement de 1%.
- Amplitude entre 0.9 et 1.2 jusqu'au temps de réponse de 15 *secondes*.
- Amplitude égale à 1,2 pour un dépassement de 20% jusqu'au temps de réponse de 15 *secondes*.
- Amplitude entre 0,99 et 1,01 au-delà du temps de réponse pour un règlement de 2%.

En outre les exigences de la simulation sous MATLAB : La sortie de système doit répondre aux exigences du réponse indicielle suivantes :

- Temps de montée inférieur à 2.5 *secondes*
- Temps de réponse inférieur à 30 *secondes*
- Dépassement inférieur à 5%

Les performances obtenues par le contrôleur SP-fractionnaire proposé sont comparés avec

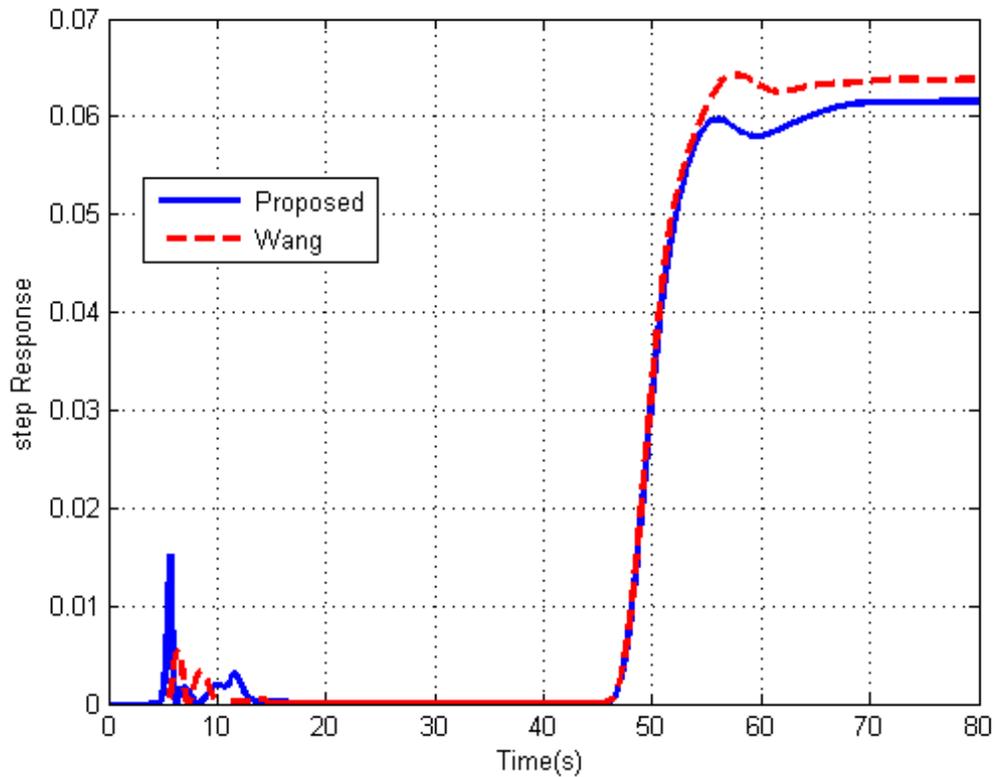


FIG. IV.9 – Modèle fractionnaire proposé et le modèle de Wang pour le premier cas

ceux donnés par Wang dans le Tableau 4 1. Ce tableau présente : Le temps de montée, et le temps de réponse en secondes, ainsi que les valeurs minimale et maximale de la réponse une fois que cette dernière a augmentée. On n'oublie pas le pourcentage de dépassement (par rapport à la valeur finale de la réponse), et finalement le pic (valeur absolue maximale de la réponse) et le temps dans lequel ce pic est atteint.

	<i>Contrôleur SP – fractionnaire Proposé</i>	<i>Contrôleur de Wang</i>
<i>Temps de montée (secondes)</i>	3.9236	4.0365
<i>Temps de réponse (secondes)</i>	60.4086	61.4317
<i>Dépassement (%)</i>	0.6077	1.4746
<i>Réponse – Min</i>	0.7845	0.7743
<i>Réponse – Max</i>	1.0092	1.0159
<i>Valeur de Pic</i>	1.0092	1.0159
<i>Temps de Pic (secondes)</i>	14.0195	16.7905

TAB. IV.1 – Les performances de la réponse indicielle par le *contrôleur SP – fractionnaire proposé* et *celui de Wang*.

D’après la figure IV.8, on peut remarquer que le contrôleur SP-fractionnaire proposé peut assurer un meilleur comportement de poursuite et d’interaction des signaux de références pour chaque voie du système bouclé. Ceci se traduit par l’obtention des sorties caractérisées par des meilleurs temps de réponses en régime transitoire ainsi que par des dépassements acceptables en régime transitoire. De plus, ce contrôleur peut fournir des meilleures dynamiques de rejection de perturbations et suppression des effets causés par les entrées des bruits de mesures.

### IV.4.3 Simulation : Deuxième cas

Cette fois ci, on appliquera la technique de commande proposé sur un processus réel à décalage multiple, défini dans [41, 68], par la fonction de transfert :

$$G_r(s) = \frac{1}{(1+s)^{10}} \tag{IV.34}$$

Les données numériques nécessaires pour exécuter l’algorithme proposé dans la phase de modélisation, sont choisies comme suit :

- Les pondérations des paramètres du modèle proposé :  $0 < K_m < 1.5$ ,  $0 < T_{m_1}, T_{m_2} < 4$ ,  $1 < \alpha_m < 2$ , et  $3 < \theta_m < 6$ .
- Les paramètres du PSO :  $n = 500$ ,  $\omega \in [10^{-4}, 10^4]$ , et  $\varepsilon_m = 10^{-2}$ , représentent respectivement la taille de swarm, l’intervalle de recherche de PSO, et l’écart.

Le vecteur des paramètres du modèle fractionnaire proposé est :

$$\begin{aligned} x_m &= [K_m, T_{m_1}, T_{m_2}, \alpha_m, \theta_m]^T \\ &= [1.00, 3.066, 3.7112, 1.2031, 4.6085]^T \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Alors, le modèle fractionnaire proposé est le suivant :

$$G_{m\_proposé}(s) = \frac{1}{(1 + 3.066s^{1.2031})(1 + 3.7112s)} e^{-4.6085s} \quad (\text{IV.36})$$

Notez que le modèle entier proposé par Das dans [8] est donné par :

$$G_{m\_Das}(s) = \frac{1}{(1 + 2.549809s)(1 + 2.661456s)} e^{-5.293009s} \quad (\text{IV.37})$$

Ensuite, le contrôleur proposé devrait satisfaire un bon compromis entre la robustesse de la stabilité et les performances nominales. Ce but est formulé comme le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x_c} J_c(x_c) &= \min_{x_c} \max_{\omega} \bar{\sigma}[S_d] \\ \text{subject to : } h_c(x_c) &= \|S_c(j\omega_c, x_c)\|_{\infty} - \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Pour déterminer le contrôleur SP-fractionnaire proposé, nous avons utilisés les données numériques suivantes :

- Pondération des paramètres du contrôleur :  $0 < \chi_1, \chi_3 < 1, 1 < \chi_2 < 2$ .
- $\omega_c \in [10^{-4}10^4]$ , et  $\gamma = 0.01$ , (paramètres de PSO)

Après l'exécution de l'algorithme proposé, on trouve les paramètres optimisés du contrôleur SP-fractionnaire, comme suit :

$$x_c = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T = [0.4304, 1.4999, 0.1272]^T \quad (\text{IV.39})$$

Ce qui est impliqué la fonctionnelle de contrôleur SP-fractionnaire suivante :

$$G_{c\_proposé}(s) = [0.4304] \left[ \frac{1}{s^{1.4999}} \right] \left[ \frac{1 + 3.066s^{1.2031}}{0.1272s + 1} \right] \quad (\text{IV.40})$$

De l'autre côté, le contrôleur PID à ordre fractal proposé par Das dans [8] est donné par :

$$G_{c\_Das}(s) = \frac{0.486645s + 0.109355}{s^{0.991345} + 0.754894s^{0.707808}} \quad (\text{IV.41})$$

En applique pour ce système de deuxième cas les mêmes démarches de l'analyse fréquentielle et temporelle comme dans le premier.

.

IV.4.3.1 Analyse fréquentielle

Comme d'habitude en commençant par examiner cette technique de commande proposée dans le domaine fréquentielle.

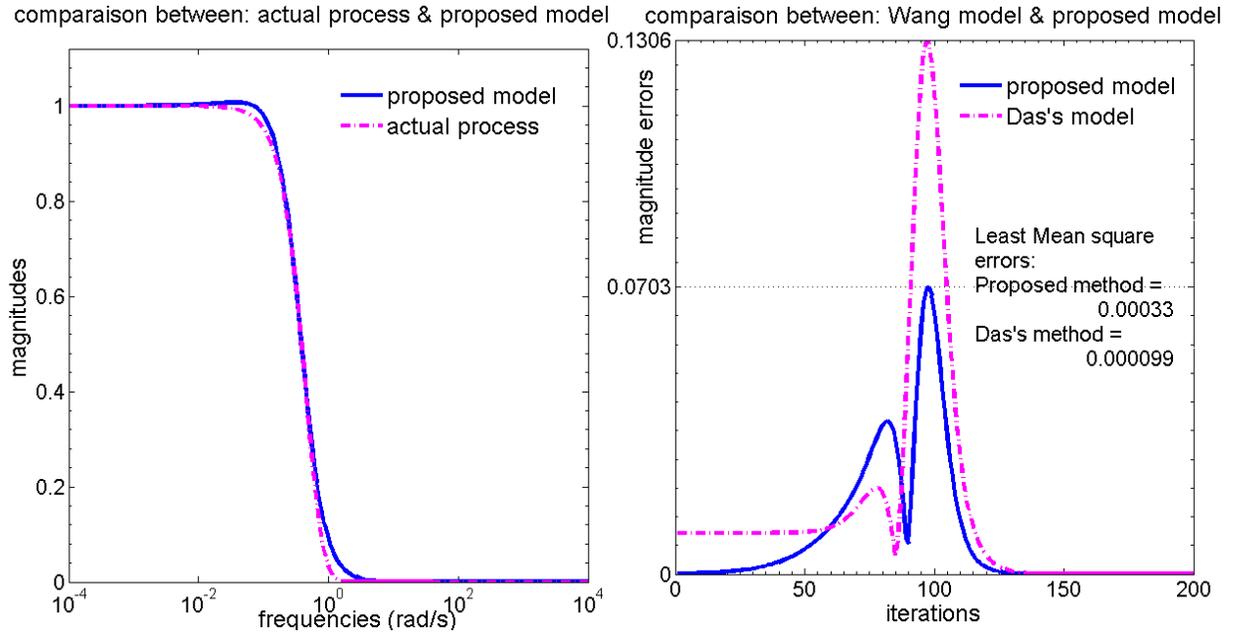


FIG. IV.10 – Modèle fractionnaire proposé comparé par l'un de Das pour le Deuxième cas

Les figures IV.10, et IV.11 comparent les performances en boucle fermée données par le contrôleur SP-fractionnaire proposé avec celles données par le contrôleur PID à ordre fractal proposé par Das.

La figure IV.10 compare les deux modèles dans le domaine fréquentiel pour le système présenté dans le deuxième cas. On peut voir que le modèle d'ordre non entier proposé assure une bonne dynamique de suivi du processus réel à retards multiples. Ce résultat s'explique par une valeur coûteuse de la grandeur d'erreur maximale  $\max |E_p| = 0.0703$ , et une meilleure minimisation de l'erreur quadratique moyenne  $J_{\min} = 3.3497 \times 10^{-4}$ . Dans la deuxième étape, selon la figure IV.11, il est facile de voir que le contrôleur SP-fractionnaire proposé garantit la meilleure marge de stabilité en régime permanent.

Les deux figures IV.12, et IV.13 montrent clairement que le contrôleur SP-fractionnaire proposé dans ce travail, assure la meilleur poursuite, et rapidité, ainsi que la réjection des perturbations.

Ces résultats sont expliqués dans le domaine temporel par une bonne minimisation de l'effet des bruits de capteurs en régime permanent.

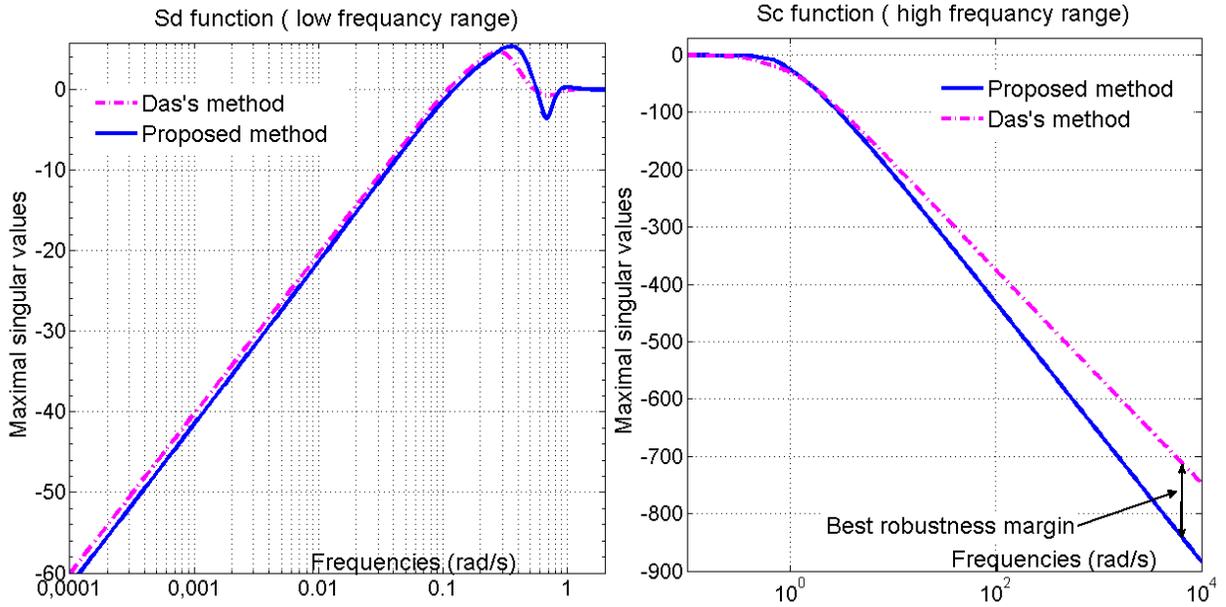


FIG. IV.11 – Comparaison entre le contrôleur SP-fractionnaire et celui de Das Dans le domaine fréquentiel pour le deuxième cas

#### IV.4.3.2 Analyse temporelle

Après le calcul et le traçage de la réponse indicielle (voir figure IV.14) des trois entrées exogènes pour le système de contrôle par rétroaction qui sont :

- La référence  $y_{ref}$ , qui est un signal échelon unité.
- La perturbation de charge  $d_c$ , qui est aussi un échelon, mais à amplitude égale à  $-0.25$ , avec un début de l'excitation à partir de l'instant  $t = 40$  secondes.
- Le signal d'effet de bruit de capteur  $\eta$ , est choisi comme une distribution gaussienne aléatoire, où sa moyenne et variance sont respectivement égales à 0 et 0.25, l'instant de début de l'excitation est  $t = 60$  secondes.

Maintenant, on peut observer uniquement l'état stationnaire, le contrôleur proposé assure une bonne minimisation de l'effet de bruit du capteur. Cependant, dans l'état transitoire, la performance nominale optimale est assurée par ce contrôleur proposé, où leurs caractéristiques sont illustrées dans le Tableau 4 2.

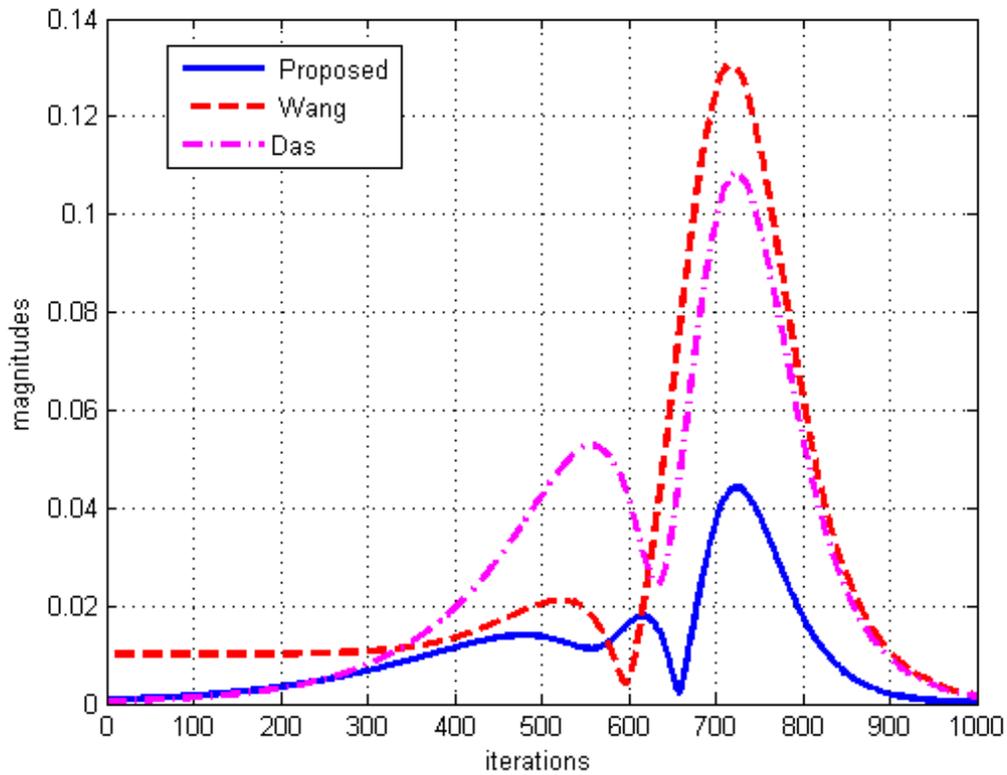


FIG. IV.12 – Comparaison entre le modèle fractionnaire proposé et les modèles de Wang et Das pour le deuxième cas

	<i>Contrôleur SP – fractionnaire Proposé</i>	<i>Contrôleur de Das</i>
<i>Temps de montée (secondes)</i>	5.2297	6.2989
<i>Temps de réponse (secondes)</i>	63.8253	64.2106
<i>Dépassement (%)</i>	0	1.3116
<i>Réponse – Min</i>	0.8289	0.8107
<i>Réponse – Max</i>	1.0053	1.0175
<i>Valeur de Pic</i>	1.0053	1.0175
<i>Temps de Pic (secondes)</i>	28.4599	18.4156

TAB. IV.2 – Les performances de la réponse indicielle par le contrôleur *SP – fractionnaire* proposé et celui de *Das*. (Deuxième cas)

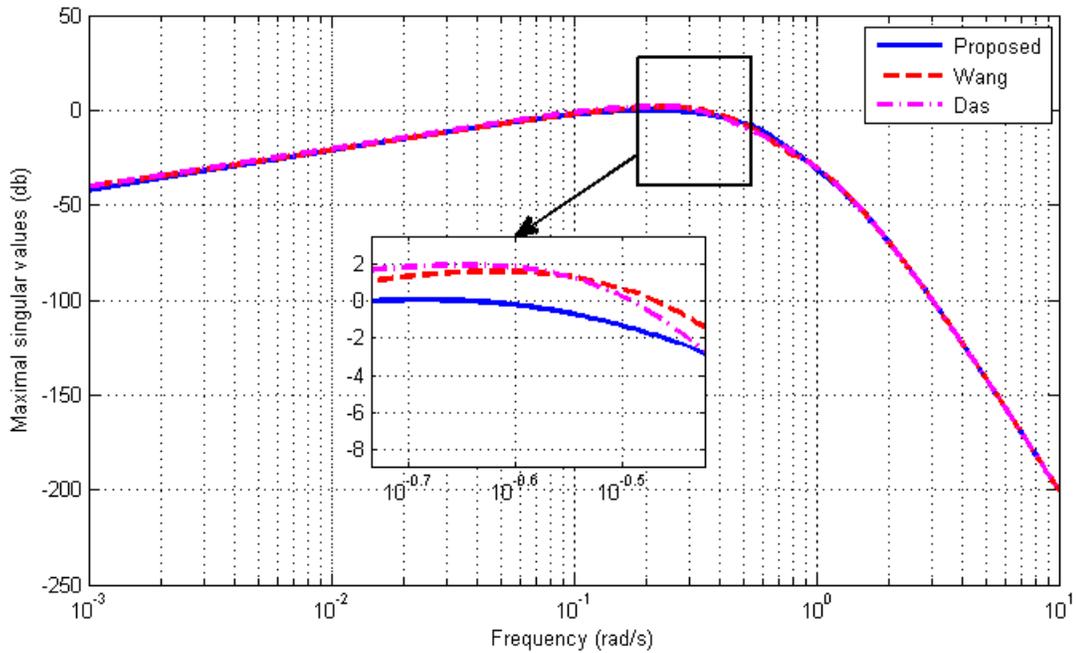


FIG. IV.13 – La sensibilité inverse pour le deuxième cas (3 contrôleurs)

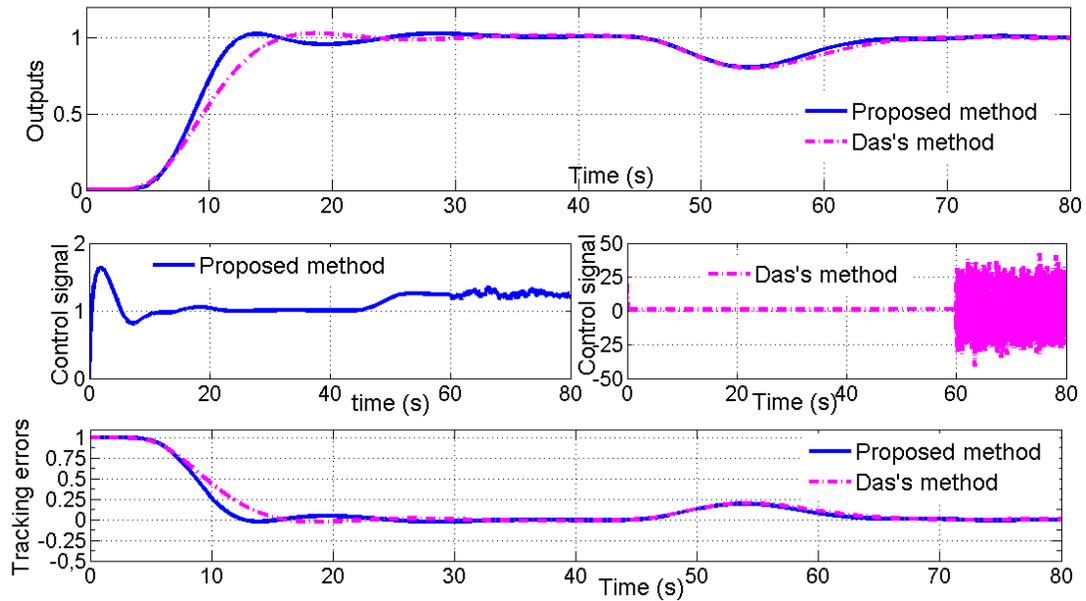


FIG. IV.14 – Réponse temporelle du contrôleur SP-fractionnaire proposé par rapport l'un de Das pour deuxième cas

Dans la conception des lois de commande, on s'attend souvent à ce que le système soit conçu pour une court temps de montée et de réponse, avec un faible pourcentage de dépassement ou aucun dépassement, comme le cas du contrôleur SP-fractionnaire proposé (voir figure IV.15) .

Par conséquent, selon le tableau IV.2, il est facile de distinguer que la réponse indicielle du système en boucle fermée fournie par la méthode proposée ayant les propriétés temporelles dans le régime transitoire suivantes :

- Un temps de montée, et un temps de réponse plus court par rapport aux autres contrôleurs, ce qui implique que le système contrôlé par la loi de commande proposé est le plus rapide.
- Elimination du dépassement.
- Un pic inférieur aux autres approches de commande.

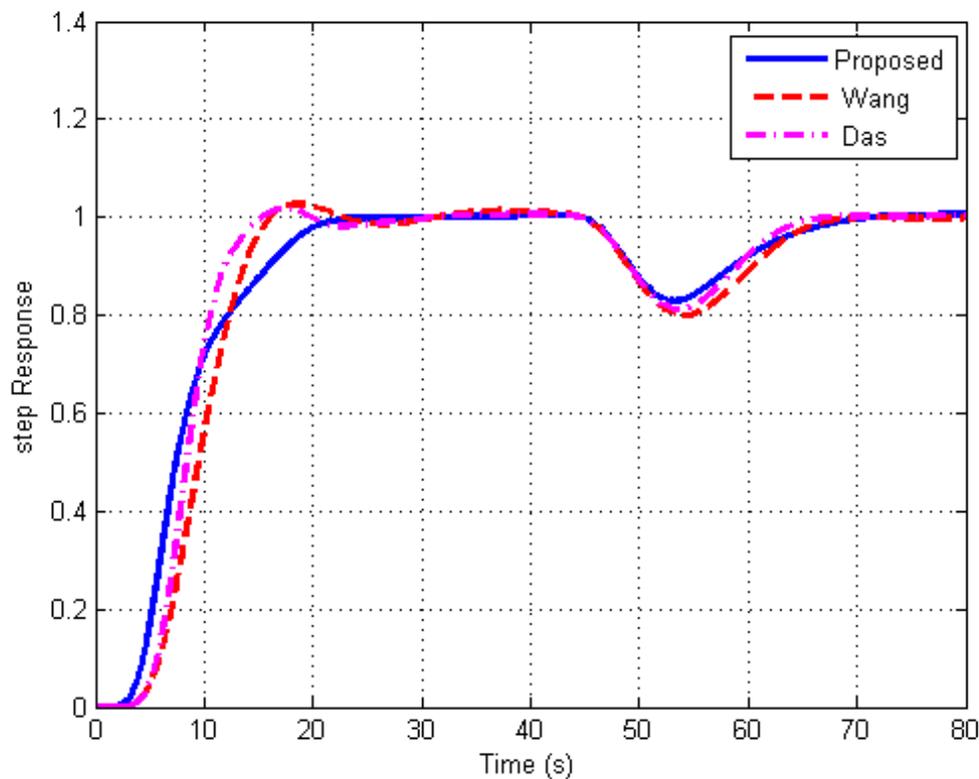


FIG. IV.15 – Réponses indicielles pour le deuxième cas des trois contrôleurs

On peut remarquer facilement, selon les réponses indicielles illustrées dans la figure IV.15, que la méthode proposée dans cette thèse, garantit les performances de la dynamique du système en boucle fermée, et surtout dans le régime transitoire (dépassement nulle), par

rapport aux autres méthodes (Wang, et Das).

## IV.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, une contribution pour la conception d'un contrôleur d'ordre non entier est proposée, combinant le schéma du prédicteur de Smith et le modèle de référence idéale de Bode d'ordre non entier. Cette méthode proposée est basée sur la détermination d'un modèle optimal d'ordre non entier en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes bornées à l'aide de PSO (deuxième contribution). Afin de satisfaire certaines spécifications fréquentielles. De plus, une synthèse de contrôleur fractionnaire est proposée, où ces paramètres sont obtenus par un problème de minimisation bornée avec un espace de recherche réduit.

Un système à retard a été utilisé pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée. Les résultats de simulation montrent que, le contrôleur proposé améliore la robustesse de la performance dans les deux domaines temporel et fréquentiel. En outre, un bon suivi de comportement pour la référence, une bonne atténuation de la perturbation de charge dynamique et une minimisation de l'effet de bruits de capteur et du coût d'énergie a été garantie.

# Conclusions et perspectives

Les systèmes qui possèdent un temps de retard, sont les plus utilisés dans la littérature. L'influence de ce retard est énorme, concernant la robustesse de la commande et la stabilité des systèmes elle-même. Les travaux réalisés dans cette thèse offrent la possibilité d'atteindre avec succès tous les objectifs suscités.

Nous avons proposé à cet effet un modèle d'ordre fractionnaire, à l'aide d'une approche d'optimisation fréquentielle méta-heuristique (PSO), pour aboutir les paramètres de ce modèle fractionnaire proposé. Ensuite, une synthèse de contrôleur fractionnaire a été aussi proposée, dans la deuxième partie de cette thèse, pour surmonter les inconvénients de la présence du temps de retard.

La synthèse proposée a été développée évidemment par l'hybridation d'une structure de prédicteur de Smith (SP), et les transferts d'ordre non entier, et la fonction idéale de Bode. Dans la quelle, une bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence a été atteinte via un réglage optimal des paramètres du contrôleur proposé. Cette bonne dynamique était assurée sans perdre de la robustesse du système bouclé. Cette dernière présente l'objet principal de ce travail.

Ainsi, le problème de synthétisation de ce contrôleur fractionnaire précédents est résolu par le développement d'un problème d'optimisation multi objectif de transfert d'ordre non entier, sous contraintes, avec lesquelles le critère de sensibilité directe et complémentaire était formulé puis résolu via l'algorithme d'optimisation PSO.

Enfinement, le manuscrit est achevé par la validation de l'approche proposée sur deux cas très connus dans les revues scientifiques internationales. Les résultats de simulation fournis par le contrôleur fractionnaire proposé sont très encourageants. Comme dans tous les travaux de recherche, plusieurs problèmes restent encore ouverts.

L'amélioration des algorithmes d'identification et de synthèse des contrôleurs robustes sera notre objectif en cours terme :

- Synthèse d'un Prédicteur de Smith d'ordre non entier, basé sur la fonction idéale de

Bode de deuxième ordre. En plus, l'introduction de la logique floue pour modéliser le temps de retard.

- La proposition des filtres passe-bas et des filtres à support compact a apporté des résultats intéressants.
- L'identification des systèmes avec retards variables représente un enjeu industriel

# Annexe A

## Les transferts d'ordre non entier

### A.1 Bref historique

La plupart des auteurs sur ce sujet vont citer une date particulière comme l'anniversaire de ce que l'on appelle « Calcul Fractionnaire ». Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, L'Hôpital écrit à Leibniz pour lui demander à propos d'une notation particulière, il avait utilisé dans ses publications pour le nième dérivé de la fonction linéaire  $f(x) = x \times \frac{d^n f(x)}{dt^n}$ . L'Hôpital posa la question à Leibniz, que serait le résultat soit si  $n = \frac{1}{2}$ . La réponse de Leibniz : "Un paradoxe apparent, dont un jour utile conséquences seront tirées". Dans ces mots, le calcul fractionnel est né.

Après la première inquisition de L'Hopital et de Liebnez, le calcul fractionnaire était principalement une étude réservée aux meilleurs esprits en mathématiques. Fourier, Euler, Laplace sont parmi les nombreux qui ont trempé avec le calcul fractionnaire et les conséquences mathématiques.

Beaucoup ont trouvé, en utilisant leur propre notation et méthodologie, des définitions qui correspondent au concept d'un entier ou d'une dérivée d'un ordre non entier. La plus célèbre de ces définitions qui ont été popularisé dans le monde du calcul fractionnaire (pas encore le monde dans son ensemble) sont les définition de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov. Bien que le nombre de définitions réelles soit sans doute aussi élevé que celui des hommes et des femmes qui étudient ce rendement, ils sont pour la plupart des variations sur les thèmes de ces deux et sont donc abordés en détail dans cette thèse.

La partie majeure de la théorie mathématique applicable à l'étude du calcul fractionnaire a été développée avant le début du 20ème siècle. Cependant, c'est au cours des 100 dernières années que les progrès les plus intrigants dans l'ingénierie et l'application scientifique ont été

trouvés. Dans certains cas, les mathématiques ont dû changer pour répondre aux exigences de la réalité physique. Caputo a reformulé la définition plus « classique » de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville afin d'utiliser des conditions initiales d'ordre entier pour résoudre ses équations différentielles d'ordre fractionnaire. En 1996 encore, Kolowankar reformulé, le Riemann-Liouville dérivé fractionnaire afin de différencier les fonctions fractales sans différenciation. La réponse de Leibniz, basée sur des études au cours des 300 dernières années, a prouvé au moins la moitié droite. Il est clair que dans le 20<sup>ème</sup> siècle en particulier de nombreuses applications et physique des manifestations du calcul fractionnaire ont été trouvées. Cependant, ces applications et Le contexte mathématique entourant le calcul fractionnaire est loin d'être paradoxal. Tandis que la signification physique est difficile (sans doute impossible) à saisir, les définitions elles-mêmes ne sont pas plus rigoureux que ceux de leurs contreparties d'ordre entier.

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire seront plus claires discuter rapidement des définitions mathématiques nécessaires mais relativement simples qui se poser dans l'étude de ces concepts.

## A.2 Terminologie

Les mathématiques sont l'art de donner des choses trompantes des noms. La belle et mystérieuse appellation (à première vue) "le calcul fractionnaire" est juste un de ces termes mal appropriés qui sont l'essence des mathématiques.

Par exemple, nous connaissons de telles noms comme les nombres naturels et les nombres réels que nous utilisons très souvent ; réfléchissons un moment à ces noms. La notion d'un nombre naturel est une abstraction naturelle, mais est-ce que le nombre est lui-même naturel ?

La notion d'un nombre réel est une généralisation de la notion d'un nombre naturel. Le mot réel accentue qu'on prétend à ce qu'il reflète des quantités réelles. Les nombres réels reflètent de vraies quantités, mais ceci ne peut changer le fait qu'elles n'existent pas. Tout est en ordre dans l'analyse mathématique, et la notion d'un nombre réel la facilite, mais si on veut calculer quelque chose, on se rend compte immédiatement qu'il n'y a aucune place pour les nombres réels dans le vrai monde ; de nos jours, des calculs sont exécutés la plupart du temps sur les calculateurs numériques, qui peuvent fonctionner seulement avec les ensembles finis de fractions finies, qui servent à approcher d'irréels nombres réels.

Retournons à l'appellation "calcul fractionnaire". Il ne signifie pas le calcul des fractions. Il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégral ou calcul

de variations. Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui unifient et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétées n-fois. Considérons la suite infinie d'intégrales et dérivées répétées n-fois :

$$\dots, \int_{\alpha}^t d\tau_2, \int_{\alpha}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \dots \quad (\text{A.1})$$

La dérivée d'ordre réel quelconque peut être considérée comme une interpolation de cette suite d'opérateurs ; pour laquelle on utilisera la notation suggérée et utilisée par Davis, à savoir

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) \quad (\text{A.2})$$

La courte appellation des dérivées d'ordre  $\alpha$  réel quelconque est dérivées fractionnaires. Les indices  $a$  et  $t$  désignent les deux bornes liées à l'opération de différentiation fractionnaire ; comme Ross nous les appellerons les bornes de la différentiation fractionnaire. La présence des bornes dans le symbole de la différentiation partielle est essentielle. Ceci permet d'éviter des ambiguïtés dans les applications des dérivés fractionnaires aux problèmes réels.

Les mots intégrales fractionnaires signifient, dans cet annexe, intégrales fractionnaires d'ordre arbitraire et correspondant aux valeurs négatives de  $\alpha$ . Nous n'utiliserons pas une notation différente pour les intégrales fractionnaires ; nous noterons l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\beta > 0$ , par :

$${}_a D_t^{-\beta} f(t) \quad (\text{A.3})$$

Une équation différentielle fractionnaire est une équation contenant des dérivées fractionnaires ; une équation intégrale fractionnaire est une équation intégrale contenant des intégrales fractionnaires. Un système d'ordre fractionnaire est un système décrit par une équation différentielle fractionnaire ou une équation intégrale fractionnaire ou un système de telles équations.

## **A.3 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires**

### **A.3.1 Outils de base de la transformée de Laplace**

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace.

La fonction  $F$  de la variable complexe  $s$ , définie par :

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.4})$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ , laquelle est appelée l'originale. Pour l'existence de l'intégrale (A.4) la fonction  $f(t)$ , doit être d'ordre exponentiel  $\alpha$ , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives  $M$ , et  $T$  telles que :

$$|f(t)| e^{-\alpha t} \leq M, \text{ pour tout } t > T \quad (\text{A.5})$$

En d'autres termes, la fonction  $f(t)$ , ne doit "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand  $t \rightarrow \infty$ .

On notera les transformées de Laplace par des lettres majuscules et les originales par des lettres minuscules.

L'originale  $f(t)$ , peut être reconstituée à partir de sa transformée de Laplace  $F(s)$ , à l'aide de la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds, \sigma = \Re\{s\} > \sigma_0 \quad (\text{A.6})$$

où  $\sigma_0$ , réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (A.4).

Le calcul direct de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (A.5) est "souvent compliqué"; cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale  $f(t)$  qu'on cherche.

La transformée de Laplace de la convolution :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (\text{A.7})$$

de deux fonctions  $f(t)$ , et  $g(t)$ , qui sont égales à zéro pour  $t < 0$ , est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) \quad (\text{A.8})$$

sous l'hypothèse que  $F(s)$ , et  $G(s)$  existent. On utilisera la propriété (A.8) pour calculer la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann- Liouville.

Une autre propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(t)$  :

$$\begin{aligned} L[f^n(t)] &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned} \tag{A.9}$$

qui peut être obtenue de la définition (A.4) par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

Dans les sections qui suivent sur les transformées de Laplace des dérivées fractionnaires, nous supposons que la borne inférieure  $a = 0$ .

### A.3.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $p > 0$  de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov définie précédemment, laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions  $g(t) = t^{p-1}$  et  $f(t)$  :

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} * f(t) \tag{A.10}$$

La transformée de Laplace de la fonction  $g(t)$  est :

$$G(s) = L[t^{p-1}] = \Gamma(p) s^{-p} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &(n - 1 \leq p < n) \end{aligned} \tag{A.12}$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution (A.8), nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov :

$$L[{}_0D_t^{-p} f(t)] = F(s) s^{-p} \tag{A.13}$$

Nous nous intéressons maintenant au calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui pour cela nous l'écrivons sous la forme :

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t) \quad (\text{A.14})$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{A.15})$$

$(n-1 \leq p < n)$

L'utilisation de la formule (A.13) de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier, donne :

$$L[{}_0D_t^p f(t)] = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (\text{A.16})$$

La transformée de Laplace de la fonction est déterminée par (A.13) :

$$G(s) = s^{-(n-p)} \cdot F(s) \quad (\text{A.17})$$

En résumé, de la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t) \quad (\text{A.18})$$

En substituant (A.17) et (A.18) dans (A.16), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $p > 0$  :

$$L[{}_0D_t^p f(t)] = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (\text{A.19})$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est bien connue. Cependant, son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure  $a = 0$ . A notre connaissance, une telle interprétation n'existe pas encore.

### A.3.3 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Afin d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, écrivons la dérivée de Caputo, sous la forme :

$${}^C_0D_t^p f(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} g(t), g(t) = f^{(n)}(t) \quad (\text{A.20})$$

$$n - 1 < p \leq n \tag{A.21}$$

En utilisant la formule (A.13) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura :

$$L [{}_0^C D_t^p f(t)] = s^{-(n-p)}.G(s) \tag{A.22}$$

grâce à (A.9),

$$G(s) = s^n.F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}.g^{(k)}(0) = s^n.F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k.g^{(n-k-1)}(0) \tag{A.23}$$

En introduisant (A.23) dans (A.22), on arrive à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$L [{}_0^C D_t^p f(t)] = s^p.F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1}.f^{(k)}(0) \tag{A.24}$$

$(n - 1 < p \leq n)$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction  $f(t)$  et ses dérivées en la borne inférieure  $a = 0$ , pour laquelle une certaine interprétation physique existe (par exemple,  $f(0)$  est la position initiale,  $f'(0)$  est la vitesse initiale, et  $f''(0)$  est l'accélération initiale), on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

### **A.3.4 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov**

Tout d'abord, considérons le cas  $0 \leq p < 1$ , quand la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov avec la borne inférieure  $a = 0$  de la fonction  $f(t)$ , qui est bornée en  $t = 0$ , peut s'écrire sous la forme suivante :

$${}_0 D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \tag{A.25}$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme (A.11) de la transformée de Laplace de la convolution (A.8) et de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier (A.9) on obtient :

$$L [{}_0D_t^p f(t)] = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (s.F(s) - f(0)) = s^p.F(s) \quad (\text{A.26})$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non-intégrables dans la somme de la formule de Grünwald-Letnikov. Les transformées de Laplace de telles fonctions sont données par des intégrales divergentes. Cependant, la transformée de Laplace de la fonction polynôme (A.11) exige une continuation analytique par rapport au paramètre  $p$ . Cette approche est équivalente à l'approche de fonctions généralisées (distributions).

Les intégrales divergentes dans un certain sens sont appelées des "intégrales à parties-finies". Dans ce sens, en supposant que  $m < p < m + 1$ , et en utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme (A.11), la formule de la transformée de Laplace de la convolution (A.8) et celle de la dérivée entière (A.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} L [{}_0D_t^p f(t)] &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) L \left[ \frac{t^{-p+k}}{\Gamma(-p+m+1)} \right] \\ &+ L \left[ \frac{t^{m-p}}{\Gamma(-p+m+1)} f^{(m+1)}(t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{p-k-1} \\ &+ s^{p-m-1} \left( s^{m+1} F(s) - \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{m-k} \right) \\ &= s^p F(s). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

On est arrivé à la même formule que (A.26).

Dans les applications, il est nécessaire de garder en tête que la formule (A.27) a lieu au sens classique seulement pour  $0 < p < 1$ ; pour  $p > 1$  elle a lieu au sens des fonctions généralisées (distributions) et donc, la formulation d'un problème appliqué doit être faite aussi en langage de fonctions généralisées, aussi bien que les interprétations des résultats obtenus dans ce sens.

# Bibliographie

- [1] H. Jaroslav, Anisochronic Internal Model Control of Time Delay Systems. PHd thesis., Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering., 1998.
- [2] M. Nicos et M. Constantinou, «Fractional-Derivative Maxwell Model for Viscous-Dampers,» *Journal of Structural Engineering*, vol. 117, n° 19, pp. 2708-2724, 1991.
- [3] M. Ichise, Y. Nagayanagi et T. Kojima, «An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes,» *Journal of electro-analytical chemistry*, vol. 33, n° 12, pp. 253-265, 1971.
- [4] H. H. Sun et B. Onaral, «A unified approach to represent metal electrode interface,» *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 30, n° 17, pp. 399-406, 1984.
- [5] A. L. Goldberger, V. Bhargava et B. J. West, «On a mechanism of cardiac electrical stability : the fractal hypothesis,» *Biophysical Journal*, vol. 48, n° 13, pp. 525-528, 1985.
- [6] A. Oustaloup, *La Commande CRONE : Commande Robuste D'ordre Non Entier*, Hermès, Paris, 1991.
- [7] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu et F. Nanot, « Frequency-band complex non integer differentiator : characterization and synthesis,» *IEEE Trans. Circ. Sys. : Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, p. 25-39, 2000.
- [8] K. Miller et B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York : John Wiley and Sons, 1993.
- [9] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San Diego : Academic Press, 1999.
- [10] I. Podlubny, «Fractional order systems and PID controllers,» *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 44, n° 11, pp. 208-214, 1999.
- [11] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [12] F. Rihem, *Commande PID Des Systèmes à Retard. thèse Automatique / Robotique.*, Tunis : Ecole Nationale d'Ingénieurs, 2011.

- 
- [13] M. Caputo, «Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent,» *Geophysical J. of the Royal Astronomical Society*, vol. 13, n° 15, pp. 529-539, 1967.
- [14] S. R. Paredes, *Stabilité des systèmes à retard de type neutre. thèse Automatique / Robotique.*, France, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPD, 2003.
- [15] A. Filipe, «Pseudo-invariance sous groupe de transformations : un nouveau concept pour la commande robuste,» chez Séminaire Toulousain N° 1 : Représentation Diffusive et Applications, Toulouse, 2000.
- [16] O. Smith, «A controller to overcome dead time,» *ISA J.ci.nii.ac.jp*, vol. 6, n° 128, 1959.
- [17] Z. Palmor et M. Blau, «An Auto-Tuner for Smith Dead Time compensator,» *International Journal of Control*, vol. 60, n° 11, pp. 117-135, 1994.
- [18] D. Hocken, J. Marshall et S. Salehi, «Time-delay control : mismatch problems,» chez Third IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, 1983.
- [19] D. Hocken, S. Salehi et J. Marshall, «Time-delay mismatch and the performance of prediction control schemes,» *Int. J. Control*, vol. 38, n° 1(2), pp. 433-447, 1983.
- [20] M. Shahrokhi et F. Naimpour, «A feedback control scheme for SISO systems with time delays and constrained inputs,» *Computers & Chemical Engineering*, Vols. 1 sur 216,, n° 112, pp. 1073-1076, 1992.
- [21] I. Landau, «Robust digital control of systems with time delay (the Smith predictor revisited),» *Int. J. of Control*, vol. 62, pp. 325-347, 1995.
- [22] I. Landau, « Identification in closed loop a powerful design tool (better models, simple controllers),» *Control Engineering Practice*, vol. 9, n° 11, pp. 51-65, 2001.
- [23] I. Landau, A. Constantinescu et D. Rey, «Adaptive Narrow Band Disturbance Rejection Applied to an Active Suspension – An Internal Model Principle Approach,» *Automatica*, vol. 61, n° 14, 2005.
- [24] Y. Gao et B. Tian, «On an analytical method and soliton-typed solutions for certain variable-coefficient partial differential equations in nonlinear mechanics,» *Acta Mechanica*, vol. 128, n° 11-2, pp. 137-140, 1998.
- [25] M. Malek-Zavarei et M. Jamshidi, «Time-Delay Systems : Analysis, Optimization and Applications,» North-Holland, Amsterdam, pp. 434-437, 1987.
- [26] D. Seborg, T. Edgar et D. Mellichamp, «Process Dynamics and Control,» John Wiley & Sons, New York, 1989.
-

- 
- [27] K. Watanabe et M. Ito, «An observer for linear feedback control laws of multivariable systems with multiple delays in controls and outputs,» *Systems & control letters*, vol. 1, n° 11, pp. 54-59, 1981.
- [28] K. Åström, C. Hang et B. Lim, «A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time,» *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 343-345, 1994.
- [29] W. Zhang et Y. Sun, «Modified Smith predictor for controlling integrator/time delay processes,» *Industrial Engineering Chemistry Research*, vol. 35, pp. 2769-2772, 1996.
- [30] K. Watanabe, Y. Ishiyama et M. Ito, «Modified Smith predictor control for multivariable systems with delays and unmeasurable step disturbances,» *International Journal of Control*, vol. 73, pp. 959-973, 1983.
- [31] J. Vandeursen et J. Peperstraete, «Internal model control with improved disturbance rejection,» *International Journal of Control*, 62 (4) (1995), pp. 983-999, vol. 62, n° 14, pp. 983-999, 1995.
- [32] S. Giraldo, R. Flesch et J. J. C. A. E. S. Normey-Rico, «Multivariable Greenhouse Control Using the Filtered Smith Predictor,» *J. Control Autom. Electr. Syst.*, vol. 27, n° 1 Doi : 10.1007/s40313-016-0250-6., p. 349, 2016.
- [33] V. Feliu, R. Rivas, F. Castillo et S. R. Paredes, «Smith Predictor Based Robust Fractional Order Control. Application to Water Distribution in a Main Irrigation Canal Pool,» *Journal of Process Control*, vol. 19, n° 13, pp. 506-519, 2009.
- [34] M. Bettayeb et R. Mansouri, «Fractional IMC-PID-Filter Controllers Design for Non-Integer Order Systems,» *J. Process Control*, vol. 24, n° 14, p. 261-271, 2014.
- [35] M. Bettayeb, R. Mansouri, U. Al-Saggaf et I. Mehedi, «Smith Predictor Based Fractional Order Filter PID Controllers Design for Long Time Delay Systems,» *Asian Journal of Control*, vol. 19, n° 12, pp. 1-12, 2016.
- [36] M. Sedraoui et D. Boudjehem, «Robust Fractional-order Controller Based on Improved PSO Algorithm for the Wind Turbine Equipped with a Doubly Fed Asynchronous Machine,» *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 226, n° 19, pp. 1274-1286, 2012.
- [37] T. Vu et M. Lee, «Smith predictor based fractional-order PI control for time-delay processes,» *Korean Journal of Chemical Engineering*, vol. 31, n° 18, pp. 1321-1329, 2014.
-

- 
- [38] D. Saptarshi, P. Indranil, D. Shantanu et A. Gupta, «Improved model reduction and tuning of fractional-order controllers for analytical rule extraction with genetic programming,» *ISA Transactions*, vol. 51, n° 11, pp. 237-261, 2012.
- [39] I. Jesus et M. Tenreiro, «Fractional control with a Smith predictor,» *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, vol. 6, n° 13, 2011.
- [40] M. Tenreiro, «Fractional order modelling of fractional-order holds,» *Nonlinear Dyn.*, vol. 70, n° 11, pp. 789-796, 2012.
- [41] Q. Wang, Q. Bi et Y. Zhang, «Re-design of Smith Predictor Systems for Performance Enhancement,» *ISA Transaction*, vol. 39, n° 11, pp. 79-92, 2000.
- [42] J. Normey-Rico, R. Sartori, M. Veronesi et A. Visioli, «An automatic tuning methodology for a unified dead-time compensator,» *Control Engineering Practice*, vol. 27, pp. 11-22, 2014.
- [43] M. Tenreiro, «Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms,» *Nonlinear Dyn.*, vol. 62, n° 11-2, pp. 447-452, 2010.
- [44] M. Zhuang et D. Atherton, «Automatic tuning of optimum PID controllers,» *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*, vol. 140, n° 13, pp. 216-224, 1993.
- [45] W. Zhang et X. Xu, «Analytical Design and Analysis of Mismatched Smith Predictor,» *ISA Transactions*, vol. 40, n° 11, pp. 133-138, 2001.
- [46] C. Hang, Q. Wang et L. Cao, «Self-Tuning SPs for Processes with Long Dead Time,» *International Journal of Adaptive Signal Process*, vol. 9, n° 11, pp. 255-270, 1995.
- [47] I. Kaya, «Obtaining controller parameters for a new PI-PD Smith predictor using auto tuning,» *Journal of Process Control*, vol. 13, n° 11, pp. 465-472, 2003.
- [48] O. Baiyu, S. Lei et C. Chunlei, «Tuning of Fractional PID Controllers by Using Radial Basis Function Neural Network,» chez 8th IEEE international conference on control and automation, 2010.
- [49] C. Monje, B. Vinagre et V. Feliu, «Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications,» *Control Engineering Practice*, vol. 16, n° 17, pp. 798-812, 2008.
- [50] K. Jabri, D. Dumur, E. Godoya, A. Mouchetteb et B. Béleb, «Particle swarm optimization based tuning of a modified smith predictor for mould level control in continuous casting,» *Journal of Process Control*, vol. 21, n° 11, pp. 263-270, 2011.
-

- 
- [51] M. Clerc et J. Kennedy, «The particle swarm explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space,» *IEEE Trans. Evolut. Comput.*, vol. 6, n° 1 DOI 10.1109/4235.985692, pp. 58-73, 2002.
- [52] I. Maruta, T. Hyoungh et T. Sugie, « Fixed-Structure Controller : A Meta-Heuristic Approach Using Simple Constrained Particle Swarm Optimization,» *Automatica*, vol. 45, n° 11, pp. 553-559, 2009.
- [53] M. Aoun, R. Malti, F. Levron et A. Oustaloup, «Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation,» *Automatica*, vol. 43, n° 19, pp. 1640-1648, 2007.
- [54] B. Marx, *Contrôle des Systèmes Linéaires*, l'Université de Lorraine, Ensgsi, 2008, pp. 10-25.
- [55] E. Fridman, *Introduction to Time-Delay Systems : Analysis and Control*, Springer, ISBN 978-3-319-09393-2, 2014.
- [56] M. Peleg, Corradini, M. G et M. D. Normand, «The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curve revisited,» *Food Research International*, vol. 40, n° 107, DOI : 10.1016/j.foodres.2007.01.012, pp. 808-818, 2007.
- [57] S. M. Magdi, *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Kuwait university : Macel Dekker Inc, ISBN : 0-8247-0327-8, 2000.
- [58] L. Ljung, *System Identification : Theory for the User (2nd Edition)*, PH PTr Inc, ISBN-13 : 978-0136566953, 1999.
- [59] A. L. Holene, *Performance and Robustness of Smith Predictor Control and Comparison with PID Control*, Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2013.
- [60] B. Zho et A. V Egorov, «Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems,» *Automatica*, vol. 71, pp. 281-291, 2016.
- [61] I. V Medvedeva et A. P Zhabko, «Synthesis of Razumikhin and Lyapunov–Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems,» *Automatica*, vol. 51, pp. 372-377, 2015.
- [62] I. Goldhirsch, P. L. Sule et S. A. Orszag, «Stability and Lyapunov stability of dynamical systems : A differential approach and a numerical method,» *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 27, n° 13, pp. 311-337, 1987.
- [63] I. Iokhvidov, «On the rank of Toeplitz matrices,» *Mat. Sb. (N.S.)* , vol. 76(118), n° 11(Mi msb4005), pp. 26-38, 1968.
- [64] G. Meinsma et L. Mirkin, « $H_\infty$  Control of systems with multiple I/O delays,» *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 36, n° 119, pp. 191-196, 2003.
-

- [65] G. Meinsma, L. Mirkin et Q.-C. Zhong, «Control of systems with I/O delay via reduction to a one-block problem,» *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, n° 111, pp. 1890-1895, 2002.
- [66] S. Skogestad et I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*, John Wiley and sons, 2005.
- [67] C. Grimholt et S. Skogestad, «Optimal PID-control for first order plus time delay systems and verification of the SIMC rules,» *Nordic Process Control Workshop*, Oulu, Finland., vol. 47, n° 13, pp. 8359-8364, 2013.
- [68] S. Das, *Functional Fractional Calculus*, Springer, 2011.
- [69] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao et B. Onaral, «Fractal system as represented by singularity function,» *IEEE Trans. on Automa. Cont.*, vol. 37, n° 19, pp. 1465-1470, 1992.
- [70] A. Charef, «Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers',» *IEE Proceeding on Control Theory Applications*, vol. 153, n° 16, pp. 714-720, 2006.
- [71] S. Ramiro et S. Barbarosa, « Tuning of PID Controllers Based on Bode's Ideal Transfer Function,» *Non-Linear Dynamic Journal*, vol. 38, pp. 305-321, 2004.
- [72] R. Djabri, M. Sedraoui, et A. Younsi, « A new design for a robust fractional Smith predictor controller based fractional model », *Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies*, ISSN 1583-1078, Issue. 30, p. 221-242, 2017.

