

047

Mémoire de Magister



Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de: Mécanique
Spécialité: Construction et Productique

Présenté par: **BOUHEMAME Nasser**

CALCUL DYMANIQUE DES PLAQUES DE FORME RECTANGULAIRE REPOSANT SUR MILIEU ÉLASTIQUE

Sous la Direction de: **Dr S. GUENFOUD**

SOUTENU DEVANT LE JURY

FATMI Louendi

GUENFOUD Salah

OUELAA Nouredine

LAHMAR Mustapha

AMRANE Mohamed Nadir

M. C Université de Guelma, Président;

M. C. Université de Guelma, Rapporteur

Pr. Université de Guelma, Examineur;

M. C. Université de Guelma, Examineur;

M. C. Université de Guelma, Examineur;

Rep. Du Doyen de la Faculté des Sciences et de
l'Ingénierie.

Juin 2006

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes parents;

La mémoire de mon frère Mohamed;

Toute la famille Frères et Sœurs ainsi qu'à mes neveux et nièces;

Tous ceux qui me sont très chers.

Avant Propos

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur le Docteur **S. GUENFOUD** pour ses conseils précieux et sa patience pour l'élaboration de ce travail.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait le Docteur **L. FATMI**, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury.

Il m'est très agréable de remercier le Professeur **N. OUELAA**, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude et ma sympathie au Docteur **M. LAHMAR**, qui a bien voulu examiner le contenu de ce travail.

Je remercie vivement le Docteur **M. Nadir AMRANE**, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je suis également reconnaissant envers tous mes enseignants de graduation et post-graduation.

Mes remerciements vont à tout le personnel du département de mécanique et du laboratoire **LMS**, pour la contribution que chacun a pu m'apporter.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, par leur amitié, m'ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Table des matières

Introduction	2
--------------------	---

Chapitre I: Généralités sur les problèmes de contact

I.1. Définition	5
I.2. Aperçu général des travaux dans le domaine du calcul des plaques reposant sur milieux élastiques	5
I.3. Modèles des milieux élastiques.....	7
I.3.1. Modèle de Winkler.....	7
I.3.2. Modèle du semi-infini élastique.....	9
I.3.3. Modèle d'une couche élastique déformable reposant sur milieu non déformable	10
I.3.4. Modèle du quart-infini élastique	11
I.3.5. Modèle du semi-infini élastique de propriétés inertielles	11
I.3.6. Principe de Lamb	12
I.4. Conclusion du chapitre I	13

Chapitre II: Détermination des déflexions de la plaque de forme rectangulaire

II.1. Définition	15
II.2. Type de plaques	15
II.3. Les déflexions de la plaque.....	15
II.4. Contraintes et efforts internes dans la plaque	17
II.5. Equation différentielle des déflexions de la plaque	19
II.6. Solution de Clebsch	20
II.7. Détermination des coefficients de fonctions de correction.....	23
II.8. Exemple d'application	26
II.9. Conclusion du chapitre II.....	27

Chapitre III: Principe de la méthode de Gemochkin dans le calcul dynamique des plaques reposant sur milieu élastique

III.1. Prélude:.....	29
III.2. Discrétisation du système (plaque-milieu élastique).....	30
III.3. Formulation du système d'équations canoniques de la méthode de Gemochkin.....	31
III.4. Définition des paramètres du système d'équations canoniques.....	32
III.5. Conclusion du chapitre III	34

Chapitre IV: Calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler

IV.1. Introduction	36
IV.2. Principe de Winkler.....	36
IV.3. Modélisation du système, plaque-milieu élastique, selon la méthode de Gemochkin....	37
IV.4. Problème posé	37
IV.5. Hypothèses du calcul.....	37
IV.6. Formulation du système d'équations canoniques	38
IV.7. Détermination des fréquences propres de la plaque reposant sur milieu élastique.....	41
IV.7.1. Application numérique.....	42

IV.7 2. Convergence des valeurs des fréquences propres	43
IV.8. Détermination des déformées propres de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler.....	43
IV.9. Vibration forcée de la plaque reposant sur milieu élastique due aux différents types de de charges externes.....	46
Cas 1. Réponse de la plaque à une excitation harmonique appliquée à un point	46
Cas 2. Réponse de la plaque à des excitations harmoniques de mêmes ou de différentes fréquences appliquées à plusieurs points.....	48
a – Plaque sollicitée par deux charges sinusoïdales de même amplitude et même d'excitation appliquées en deux points	49
b – Plaque sollicitée par deux charges sinusoïdales de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation appliquées en deux points.....	50
IV.10. Vérification de l'orthogonalité.....	51
IV.11. Réponse fréquentielle	53
IV.12. Conclusion du chapitre IV.....	55

Chapitre V: Calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique

V.1. Principe de Boussinesq.....	57
V.2. Déplacements de la surface du semi-infini élastique dus à l'action d'une force unitaire.....	57
V.2.1. Cas de la force unitaire	57
V.2.2. Forme rectangulaire de l'élément de surface Ω	57
V.3. Méthode de calcul.....	59
V.4. Problème posé.....	59
V.5. Formulation du système d'équations canoniques.....	59
V.6. Détermination des fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique	61
V.6.1. Application numérique	62
V.6.2. Comparaison des valeurs des fréquences propres	64
V.7. Détermination des déformées propres de la plaque reposant sur semi- infini élastique... 64	
V.8. Vibration forcée de la plaque reposant sur semi-infini élastique due aux différents types de charges externes.....	68
V.8.1. Réponse de la plaque à une excitation harmonique appliquée à un point	68
V.8.2. Réponse de la plaque à des excitations harmoniques appliquées à plusieurs points de mêmes ou de différentes fréquences.....	70
V.9. Vérification de l'orthogonalité.....	72
V.10. Réponse fréquentielle	73
V.11. Comparaison des résultats	74
V.12. Conclusion du chapitre V:.....	76
Conclusion générale	77
Bibliographie	
Annexe 1	
Annexe 2	
Annexe 3	
Résumé	

Introduction

Introduction

Les problèmes de contact définis par l'interaction de deux milieux de caractéristiques physiques différentes nécessitent une étude particulière en statique comme en dynamique.

Les méthodes de calcul de ces problèmes sont compliquées vu leur liaison à des difficultés mathématiques majeures. Ces méthodes de calcul se basent sur la fonction de Green afin d'étudier l'interaction, et cette dernière aboutit au calcul global. Les différentes études faites dans ce domaine se basent sur les méthodes numériques avec l'introduction de beaucoup d'hypothèses simplifiantes et l'arrivée à l'élaboration d'une méthode de calcul précise et universelle n'est pas atteinte à nos jours.

Le calcul statique ou dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique, faisant partie des problèmes de contact, intéressa beaucoup de spécialistes du domaine. Dans ce contexte, la fonction de Green, représentant l'interaction entre deux milieux différents, se formule sur la base du type du milieu élastique considéré. Le type ou le modèle du milieu élastique le plus simplifié a été considéré par Winkler en XIX siècle [81], dans lequel la rigidité du milieu élastique définie par K est identique à celle d'un ressort, en outre la surface du milieu élastique se déforme uniquement au niveau du point d'application de la charge extérieure. Boussinesq [28] proposa son modèle après, et dans lequel le milieu élastique est considéré comme étant un semi-infini élastique de module d'élasticité E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 et la déformation de la surface du semi-infini élastique est inversement proportionnelle avec l'éloignement du point d'application de la charge extérieure. Ces deux modèles classiques ne reflètent pas exactement la réalité, la raison pour laquelle d'autres modèles viennent d'apparaître après. Ceci implique que la nécessité de développer et d'améliorer les méthodes de calcul existantes de telles structures ou de proposer de nouvelles méthodes de calcul plus efficace est un sujet d'actualité.

On présente dans ce travail une approche pour le calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique. L'approche proposée, permet de déterminer les forces de réaction dans la zone de contact, les fréquences et déformées propres de la plaque, sa réponse à des charges dynamiques harmoniques, ainsi que la localisation des fréquences d'excitation. On néglige l'inertie du milieu élastique, l'amortissement et les forces de frottement dans la zone de contact plaque-milieu élastique.

Le système étudié se discrétise par la division de la plaque en un nombre d'éléments rectangulaires identiques, et au centre de chaque élément on met des liaisons rigides, à travers lesquelles le contact plaque milieu élastique s'accomplit, cela veut dire que le contact continu

de la plaque avec le milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points situés aux centres des éléments. L'approche formulée se base sur la méthode de Gemochkin [37] et introduisant la fonction de Green pour l'interaction [86], la solution de Clebsch et la méthode énergétique de Ritz pour la déformation de la plaque [25] est présentée sous la forme matricielle:

$$[K]\{u\} = \{F\},$$

où:

$[K]$ – matrice caractérisant le système étudié (plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique),

$\{u\}$ – vecteur des inconnues (qui peuvent être des forces de réaction dans la zone de contact ou déformation de la surface du milieu élastique),

$\{F\}$ – vecteur sollicitations.

Ce système matriciel final permet d'étudier la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique en dynamique.

Le travail apporté dans ce mémoire est structuré en cinq chapitres:

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les problèmes de contact, ainsi qu'à l'étude bibliographique des travaux faits dans ce domaine;

Le deuxième chapitre est consacré à la détermination des déflexions de la plaque de forme rectangulaire par l'utilisation de la solution de Clebsch;

Le troisième chapitre est consacré à l'exposée de la méthode de Gemochkin utilisée pour la formulation de l'approche de calcul;

Le quatrième chapitre consacré au calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler;

Le cinquième chapitre consacré au calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique;

En outre, le mémoire comporte aussi une introduction, conclusion générale, références bibliographiques et des annexes.

Chapitre I

Généralités sur les problèmes de contact

I.1. Définition

Les problèmes de contact se définissent par l'interaction (contact) de deux ou de plusieurs milieux de caractéristiques physiques différentes. Exemple: poutres et plaques reposant sur sol, ouvrages sous-terrains, constructions hydrauliques, certaines pièces d'une même machine etc.

I.2. Aperçu général des travaux dans le domaine du calcul des plaques reposant sur milieux élastiques

Etudier n'importe quelle structure reposant sur milieu élastique sans connaître ou sans référer aux théories de calcul existantes n'est pas possible. Les difficultés mathématiques liées à ce type de calcul, la diversité d'hypothèses, ainsi que la diversité des paramètres entrant dans le calcul comme: les propriétés mécaniques des matériaux, les conditions aux limites, problèmes d'interaction etc. nécessite une lecture approfondie de la littérature. Ce que nous avons su, d'après la littérature lue dans ce domaine, que beaucoup de questions relatives à ce problème (calcul des structures reposant sur milieux élastiques) ont été traitées de façon approfondie, mais reste aussi beaucoup sans réponse.

Les travaux relatifs au calcul des structures reposant sur milieux élastiques sont cités dans [55]. Popov .G.Y. a donné un aperçu des travaux concernant les plaques déformables reposant sur milieu élastique [62]. L'auteur du livre [65] exposait quelques méthodes de calcul des plaques ayant la forme d'ellipse ou d'anneau reposant sur milieux élastiques. Aleksandrov V.M. a donné la solution analytique de l'intégrale de la fonction de Green exprimant l'interaction des plaques de forme d'anneau rigide avec le semi-infini élastique [3]. Dans le travail [21] une solution approchée de la forme intégrale des déplacements et contraintes dans le semi-infini élastique engendré par des plaques rigides de forme circulaire et annulaire. La question liée à l'action d'une plaque de forme annulaire ou circulaire reposant sur couche, cette dernière repose sur semi-infini élastique a été vu dans le travail [41] et résolu par la méthode variationnelle. L'auteur du travail [68] a traité la question liée à l'interaction entre plaque circulaire et semi-infini élastique isotrope. Les problèmes d'interaction entre un système de plaques circulaires reposant sur semi-infini élastique sont vus dans [54, 64]. Les auteurs du travail [63], après l'analyse des questions liées aux problèmes de contact des plaques avec les milieux élastiques sans adhérence, ont conclu que la théorie classique du calcul entrant dans les problèmes de contact et plus efficace que la théorie d'élasticité en 3D sur laquelle se base la méthode des éléments finis. L'auteur des travaux [79, 80] a déterminé la

zone d'influence de la plaque en contact avec milieu élastique. L'auteur du travail [8] a élaboré la solution de l'équation différentielle des déflexions d'une plaque rectangulaire reposant sur sol élastique. Dans le travail [24], l'auteur a traité la question relative au calcul de la plaque rectangulaire reposant sur sol élastique de n'importe quel type et soumise à n'importe quel type de charge extérieure.

Les problèmes de contact en plan (2D) ou en espace (3D) relatifs au calcul des plaques, poutres ou autre structure reposant sur milieu élastique avec ou sans la prise en compte des forces de frottement dans la zone de contact avec le milieu élastique de n'importe quel type ont été étudiés par de nombreux chercheurs. Les solutions apportées les plus connus dans ce domaine sont valorisées dans [1, 4, 5, 9, 10, 16, 29, 31, 33, 32, 39, 47, 56, 57, 59, 60, 71, 76]. Les problèmes de contact concernant le calcul des structures reposant sur milieux élastiques de type de multicouches sont donnés dans [61, 73]. En utilisant la solution de Clebsch concernant la résolution de l'équation différentielle des déflexions d'une plaque, l'auteur du travail [75] a trouvé une méthode approchée pour l'évaluation des contraintes et déformations des plaques de forme compliquée. Dans le travail [85], l'auteur a trouvé les tassements du sol, les forces de réactions dans la zone de contact, ainsi que les efforts internes dans la plaque et a fait comparaison avec des résultats obtenus par Gorbounov-Posadov [43].

Les problèmes de contact des structures avec des milieux élastiques précontraints sont étudiés dans les travaux [6, 7, 46]. Les problèmes de contact, dans lesquels le module d'élasticité du milieu élastique est variable avec la profondeur sont examinés dans les travaux [78, 86, 87]. Les problèmes de contact en tenant compte des forces de frottement sont vus dans [40, 42, 58]. L'étude des plaques épaisses reposant sur milieu élastique est faite dans [69, 70]. Les problèmes de contact dans lesquels le coefficient de Poisson du milieu élastique est variable avec la profondeur sont traités dans [12, 38].

Les tâches concernant le calcul dynamique des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques sont examinées dans [51]. Le travail [52] donne l'étude générale concernant les vibrations des poutres et plaques reposant sur milieu élastique avec la négligence de l'amortissement et l'inertie du milieu élastique. L'action d'une charge harmonique sur une plaque reposante sur milieu élastique en tenant compte de son inertie est étudiée dans les travaux [82, 83]. En tenant compte de l'inertie du milieu élastique et que les propriétés mécanique de la plaque sont non-linéaires, l'auteur du travail [74] a pu étudier ce problème. Les déplacements verticaux et horizontaux issus de la vibration d'une plaque reposant sur milieu élastique sont donnés dans [17, 20]. Les différentes méthodes de calcul utilisées pour

résoudre les problèmes de contact en dynamique sont données dans [17, 18, 19, 36, 67]. La théorie des problèmes de contact s'agissant des vibrations des corps solides ou déformables reposant sur des milieux élastiques en tenant compte de leur inertie et du caractère ondulatoire des déplacements horizontaux et verticaux est élaboré par Lamb [53].

I.3. Modèles des milieux élastiques

I.3.1. Modèle de Winkler

La première hypothèse concernant les problèmes de contact en calcul statique est celle de la proportionnalité entre la déformation de la surface du milieu élastique dans la zone de contact et la charge extérieure appliquée sur la structure reposant sur ce milieu élastique.

Le calcul de la structure déformable reposant sur milieu élastique nécessite la connaissance de la distribution des forces de réaction dans la zone de contact (fig. I.1). Selon le modèle de Winkler, la relation entre les forces de réaction agissant sur la surface du milieu élastique et la déformation de cette dernière est exprimée par:

$$w_0(x, y) = p(x, y) / K, \quad (I.1)$$

avec:

K – coefficient de proportionnalité qui dépend uniquement des caractéristiques physiques du milieu élastique;

$p(x, y)$ – réaction du milieu élastique due à l'action de la charge extérieure $q(x, y)$;

$w_0(x, y)$ – déformation de la surface du milieu élastique au point d'application de la charge $q(x, y)$.

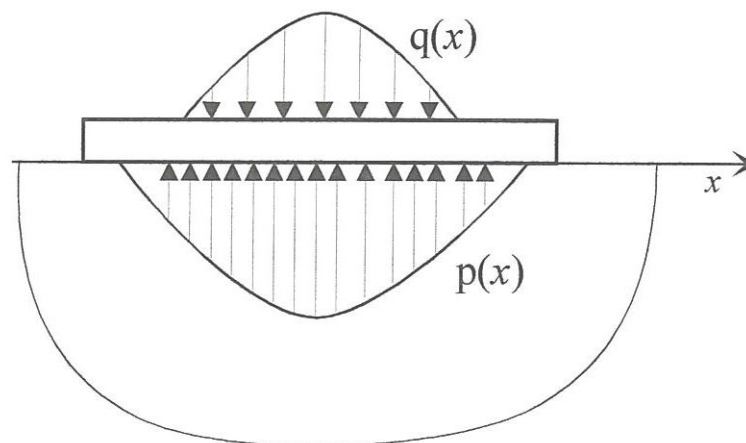


Fig. I.1 Poutre reposant sur un milieu élastique

Le calcul d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type de Winkler se base sur la résolution de l'équation différentielle suivante:

$$q(x) - p(x) = \frac{E_1 J}{b} \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4}, \quad (I.2)$$

avec:

$p(x)$ – force de réaction;

$q(x)$ – charge extérieure;

$E_1 J$ – rigidité de la poutre;

x – abscisses des points de l'axe neutre de la poutre;

b – largeur de la poutre.

Remplaçant dans (I.2) l'expression de $p(x)$ obtenue de (I.1), on aura:

$$\frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + \frac{4}{S^4} w_0(x) = \frac{bq(x)}{E_1 J}, \quad (I.3)$$

avec:

$$S = \sqrt[4]{\frac{4E_1 J}{bK}}. \quad (I.4)$$

La résolution de l'équation différentielle (I.3) est donnée par [43] :

$$w_0(x, y) = C_1 e^{\zeta} \cos \zeta + C_2 e^{\zeta} \sin \zeta + C_3 e^{-\zeta} \cos \zeta + C_4 e^{-\zeta} \sin \zeta + \frac{q(x)}{K}, \quad (I.5)$$

avec:

$$\zeta = x/S. \quad (I.6)$$

Les coefficients C_1, C_2, C_3 et C_4 se déterminent des conditions aux limites.

Le calcul de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler est beaucoup plus compliqué que celui de la poutre. Dans ce cas l'expression (I.2) prend la forme suivante:

$$D\Delta^2 w(x, y) = q(x, y) - w(x, y)K, \quad (I.7)$$

avec:

D – rigidité cylindrique de la plaque et donnée par:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (I.8)$$

où:

E, ν – module d'élasticité et coefficient de Poisson du matériau de la plaque;

$w(x, y)$ – déflexion de la plaque.

Remarque

Le coefficient de proportionnalité K ne dépend pas des dimensions de la zone de contact. Donc, selon ce principe les ouvrages soumis aux mêmes charges et ayant des fondations de dimensions différentes auront comme conséquence le même tassement ce qui n'est pas vrai réellement, alors ceci explique le défaut de ce principe.

I.3.2. Modèle du semi-infini élastique

Ce modèle vient d'apparaître comme conséquence de celui de Winkler qui ne reflète pas la réalité dans certains cas (fig. I.2). Ce modèle admet que le milieu élastique est considéré comme étant un semi-infini élastique de module d'élasticité E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 et se base sur les formules de la théorie d'élasticité.

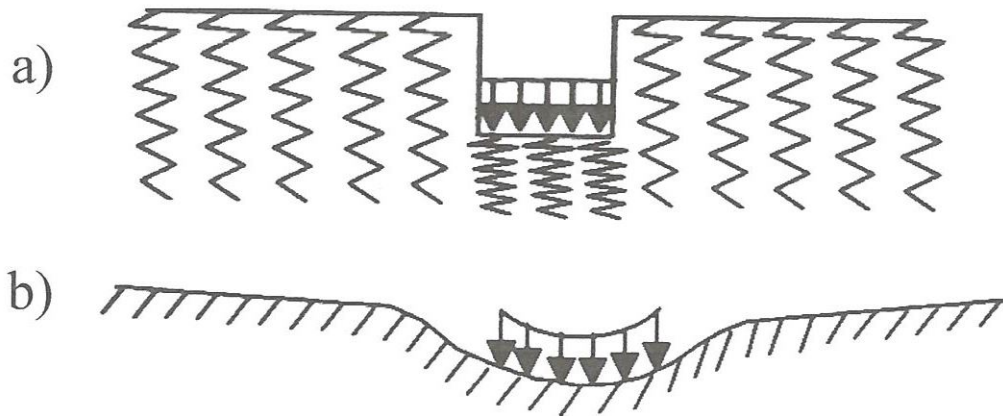


Fig. I.2 Déformation de la surface du milieu élastique:
a – modèle de Winkler;
b – modèle du semi-infini élastique

Le calcul d'une plaque reposant sur semi-infini élastique se base sur la résolution de l'intégrale suivante [86]:

$$\iint_{\Omega} \frac{q(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\pi E_0}{1-\nu_0^2} f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (\text{I.9})$$

avec:

$f(x, y)$ – fonction déterminant la déformation de la surface du semi-infini élastique dans la zone de contact Ω ;

$q(\zeta, \eta)$ – fonction déterminant la distribution des forces de réaction.

La résolution exacte de l'intégrale de l'expression (I.9) n'est pas obtenue, sauf pour les Ω de forme elliptique, circulaire ou rectangulaire. Donc la résolution numérique de cette intégrale pour les autres formes de Ω c'est inévitable.

I.3.3. Modèle d'une couche élastique déformable reposant sur milieu non déformable

Son modèle défini par l'expression suivante [26, 38, 45, 92]:

$$\iint_{\Omega} K \left(\frac{R}{h} \right) p(P) dP = \pi h \theta f(x, y), \quad (\text{I.10})$$

où:

$$(x, y) \in \Omega, R = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2};$$

$$P \equiv (\zeta, \eta);$$

$$\theta = E_0 / (1 - \nu_0^2);$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(ut) du.$$

Ici:

$J_0(u)$ – fonction de Bessel [44];

$L(u)$ – fonction déterminée par [78, 86]:

a – Si la couche est adhéree complètement avec le milieu non-déformable:

$$L(u) = \frac{2\chi \sinh 2u - 4u}{2\chi \cosh 2u + \chi^2 + 4u + 1}, \quad \chi = 3 - 4\nu_0; \quad (\text{I.11})$$

b – Si la couche repose sur le milieu non-déformable.

$$L(u) = \frac{\cosh 2u - 1}{u(\sinh 2u + 2u)}. \quad (\text{I.12})$$

La fonction $L(u)$ est donnée sous forme approchée dans [26] comme suit:

$$L(u) \approx u \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C}, \quad (\text{I.13})$$

où:

B et C des constantes;

dans le cas **a**: $B = 1.037$, $C = 2.540$;

dans le cas **b**: $B = 1$, $C = 2$.

I.3.4. Modèle du quart-infini élastique

Ce modèle est utilisé dans le cas des constructions reposant sur les talus.

D'après [22], ce modèle est exprimé par:

$$w(r, \theta) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi^3 E_0} P \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty F(\nu_0, \tau, t) \exp(-\sigma a \cosh t) \cos(\tau t) \cos(\sigma z) K_{it}(\sigma r) dt d\sigma d\tau, \quad (\text{I.14})$$

avec:

P – force extérieure;

$K_{it}(z)$ – fonction de Bessel modifiée [44];

$F(\nu_0, \tau, t) = 4 \cosh^2(\pi\tau/2) [1 + f(\nu_0, \tau, t)]$;

$f(\nu_0, \tau, t) = \frac{f(\nu_0)}{\cosh^2(\pi\tau/2)}$;

$$f(\nu_0) = \frac{1 - (1 - 2\nu_0)\pi + (1 - 2\nu_0)^2 \frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4} - 1 + (1 - 2\nu_0)\pi - (1 - 2\nu_0)^2 \frac{\pi^2}{4}}.$$

L'auteur du travail [22] sur la base de [28] a obtenu l'expression des déflexions de la surface de ce type de milieu élastique:

$$w(R) = \frac{(1 - \nu_0^2)P}{\pi E_0 h} \left[\frac{1}{\sqrt{(r-a)^2 - z^2}} + \frac{1 + 2f(\nu_0)}{\sqrt{(r-a)^2 - z^2}} \right]. \quad (\text{I.15})$$

I.3.5. Modèle du semi-infini élastique de propriétés inertielles

D'après [35], les tassements de la surface du semi-infini élastique en tenant compte de sa masse dus à la force extérieure P sont donnés par :

$$w(R) = \frac{P}{4\pi G_0} \int_0^\infty L(u) J_0(uR) du. \quad (\text{I.16})$$

La fonction $L(u)$ dans ce cas vaut:

$$L(u) = \frac{2u}{2u + \gamma}, \quad (\text{I.17})$$

en tenant compte de (I.17), l'expression (I.16) devient:

$$w(R) = \frac{P}{4\pi G_0} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{\gamma\pi}{4} \left[H_0\left(\frac{\gamma R}{2}\right) - Y_0\left(\frac{\gamma R}{2}\right) \right] \right\}, \quad (\text{I.18})$$

avec:

$$\gamma = \gamma_0 / G_0;$$

γ_0 – poids du semi-infini élastique influencé par l'effet de la force extérieure;

G_0 – module d'élasticité transversal;

$H_0(Z), Y_0(Z)$ – fonction de Bessel [44].

I.3.6. Principe de Lamb

Ce principe est appliqué uniquement dans le cas du calcul dynamique des structures reposant sur milieu élastique. Ce principe tient compte de l'inertie du milieu élastique, ainsi que du caractère ondulatoire des déplacements à travers la surface du milieu élastique causés par une charge harmonique extérieure.

Ce principe est exprimé par [53, 66]:

$$w = \frac{-Pe^{i\omega t}}{2\pi G_0} [I_\zeta + i\pi\chi KJ_0(\chi r)], \quad (I.19)$$

où:

$$I_\zeta = \int_0^\infty \frac{k^2 \zeta \alpha}{F(\zeta)} J_0(\zeta r) d\zeta;$$

$$K = \frac{2k^2 \alpha_1 (2\chi^2 - k^2)^2}{-F'(\chi) f(\chi)};$$

P – amplitude de l'excitation harmonique;

ω – fréquence d'excitation;

r – distance entre le point d'application de la force dynamique et le point où se détermine le déplacement;

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - k^2)^2 - 4\zeta^2 \alpha\beta; \quad f(\zeta) = (2\zeta^2 - k^2)^2 + 4\zeta^2 \alpha\beta,$$

χ – est la racine de l'équation $F(\chi) = 0$;

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\zeta^2 - h^2}; & i\sqrt{h^2 - \zeta^2} \\ \beta &= \sqrt{\zeta^2 - k^2}; & i\sqrt{k^2 - \zeta^2} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \zeta \leq k, h \text{ ou } \zeta \geq k, h;$$

α_1 et β_1 sont données par les mêmes expressions de α et β avec $\zeta = \chi$.

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2G_0}}; \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{G_0}};$$

ρ – est la densité du milieu élastique, λ et G_0 coefficients de Lamé:

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}; \quad \lambda = \frac{2G_0\nu_0}{1 - 2\nu_0};$$

E_0 et ν_0 module d'élasticité et coefficient de Poisson du milieu élastique.

Enfin, d'après [33, 60], les forces de frottements issues de la compression de la structure sur la surface du milieu élastique dans la zone de contact n'ayant pas beaucoup d'influence sur les forces de pression et sur la déformation de la structure. L'auteur du travail [9] a fait une conclusion dans laquelle l'effet des forces de frottement dans la zone de contact n'a pas d'impact sur les forces de pression, et sur la profondeur d'influence des forces extérieures sur le milieu élastique.

I.4. Conclusion du chapitre I

Dans les bouquins et les guides d'ingénieur il n'y a pas de méthodes universelles permettant de calculer les plaques de n'importe quelle forme reposant sur milieu élastique de n'importe quel type et soumises à n'importe quel type de charges extérieures. Ceci est expliqué par les difficultés mathématiques liées à ce problème de contact, c'est pourquoi dans la plupart des cas, ce problème se résout numériquement dont on ignore le taux de précision vu l'absence des solutions analytiques.

Chapitre II

Détermination des déflexions de la plaque de forme rectangulaire

II.1. Définition

On appelle plaque tout corps cylindrique ou prismatique de hauteur (épaisseur) plus petit en comparaison avec le reste des autres dimensions. En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en: Rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc.

Si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope. Par contre, si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les plaques sont différentes dans l'une des directions, alors la plaque est dite anisotrope (orthotrope).

II.2. Type de plaques

En général, on distingue trois types de plaques selon le rapport de son épaisseur par rapport à la petite dimension de son contour [2]. On peut distinguer donc

- 1 – Plaque épaisse;
- 2 – Plaque mince rigide;
- 3 – Plaque mine déformable.

On considère que la plaque est de type épais si le rapport entre son épaisseur et la plus petite dimension de sa configuration dépasse $1/5$. L'état de contraintes des plaques épaisses est donné par les équations générales de la théorie d'élasticité. Les plaques rigides minces leur rapport moins de $1/5$, mais les déflexions sont très petites en comparaison avec son épaisseur. L'état de déformation de ce type de plaque est décrit par la théorie des déflexions. Plaque mince déformables se caractérise du faite que le rapport est très petit et ses déflexions ne sont pas petites par rapport à son épaisseur et ces caractéristiques favorisent l'application d'effort interne important, ce qui influe considérablement sur l'état de contraintes de ce type de plaque. Cette distinction est faite pour simplifier l'étude de la plaque en général. Par exemple, si l'on s'occupe de l'étude des vibrations libre de la plaque, c'est à dire la détermination de ses fréquences et déformées propres on se repère à la théorie des déflexions; si l'on s'occupe de la détermination de l'état de contraintes de la plaque on utilise les équations de la théorie d'élasticité.

II.3. Les déflexions de la plaque

Si une plaque est sollicitée par une charge extérieure $q = q(x, y)$, la plaque se déforme et son plan moyen se détermine après déformation par la fonction $w = w(x, y)$.

Coupons de la plaque un élément de dimension $\Delta x \Delta y \delta$ (fig. II.1).

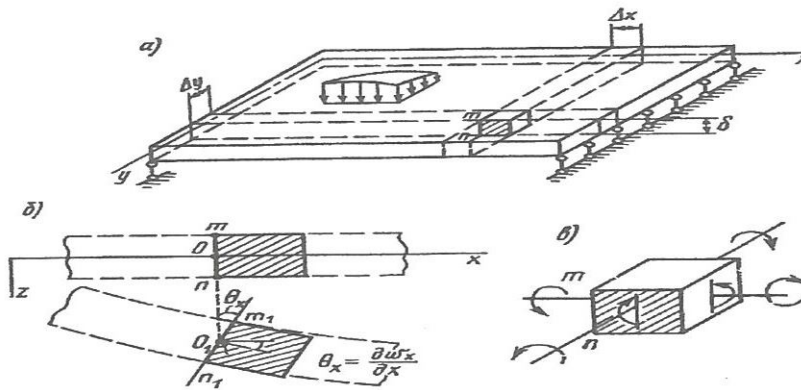


Fig. II.1 Les déformations d'un point situé sur le plan moyen de la plaque

D'après l'hypothèse du plan neutre [2, 34, 72], le plan moyen ne subit pas de déformations latérales, le point o se déplace uniquement dans le sens vertical par une entité qui définit la déflexion w , et la normale mn fait une rotation (fig. II.1). D'après fig. II.1, la normale mn tourne par un angle $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ et un angle $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$. Donc les déplacements et les contraintes, que se soient, de chaque point du plan moyen de la plaque se déterminent à partir de la déflexion $w = w(x, y)$ et des angles de rotation $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$. Les angles de rotation de la normale mn , θ_x et θ_y nous permettent de déterminer u et v des points de cette normale mn par les expressions suivantes (fig. II.2) :

$$\begin{cases} u = -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v = -z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (II.1)$$

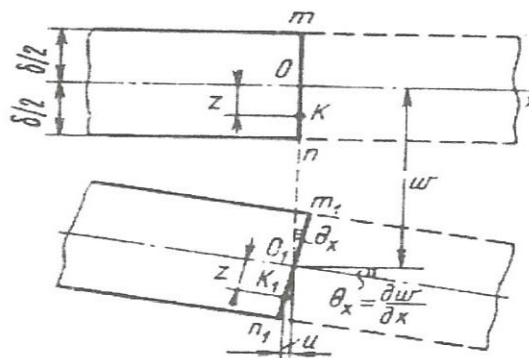


Fig. II.2 Les angles de rotation du plan moyen de la plaque

Utilisons les expressions de u et v (II.1), qui représentent les déplacements des points de la normale de coordonnées z pour déterminer les déformations dans le plan moyen, soient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (\text{II.2})$$

La déformation de chaque plan horizontal de la plaque est une fonction linéaire par rapport à l'axe z et dépend des trois paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \chi_y &= \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \chi_z &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (\text{II.3})$$

Pour les petites déformations χ_x et χ_y représentent les courbes des éléments $dx dy$ et χ leur rotation (fig. II.3).

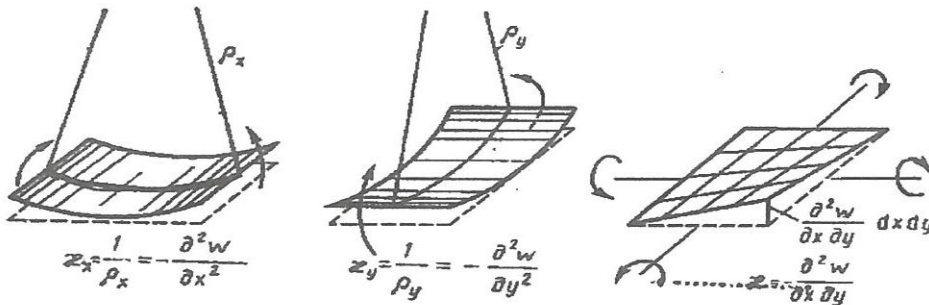


Fig. II.3 Les paramètres du plan moyen

II.4. Contraintes et efforts internes dans la plaque

D'après l'hypothèse du calcul des plaques [2, 34, 72], la contrainte $\sigma_z = 0$, et les contraintes σ_x, σ_y et τ (fig. II.4) se déterminent par l'application de la loi de Hooke comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = E_1(\chi_x + \mu\chi_y)z; \\ \sigma_y &= E_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = E_1(\chi_y + \mu\chi_x)z; \\ \tau &= G\gamma_{xy} = E_1(1 - \mu)\chi_z z,\end{aligned}\quad (\text{II.4})$$

$$\text{où : } E_1 = \frac{E}{(1-\mu^2)};$$

μ – Coefficient de Poisson du matériau de la plaque;

E – Module d'élasticité du matériau de la plaque.

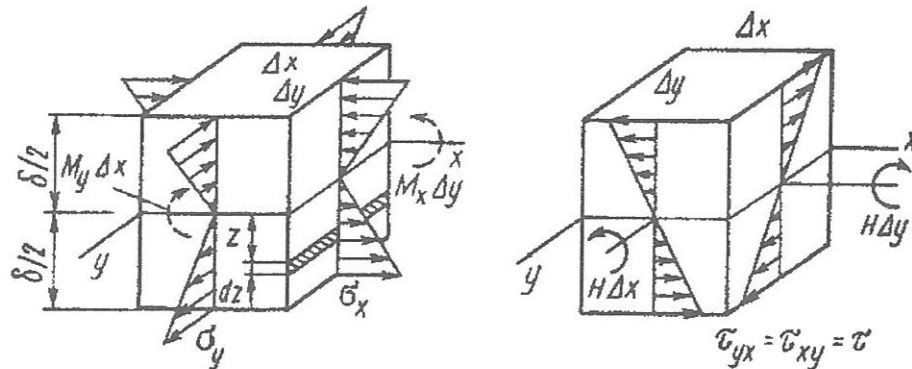


Fig. II.4 Représentation des contraintes dans les sections de la plaque

Les contraintes σ_x au bout de l'élément $\delta\Delta y$ amènent au moment de flexion suivant:

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\sigma_x dx \Delta y) z = \Delta y E_1 (\chi_x + \mu \chi_y) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz = M_x \Delta y, \quad (\text{II.5})$$

$$\text{où : } M_x = \frac{E_1 \delta^3}{12} (\chi_x + \mu \chi_y);$$

Analogiquement on détermine les expressions de M_y et du moment de torsion H :

$$\begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu \chi_y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= D(\chi_y + \mu \chi_x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ H &= D(1-\mu)\chi = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{où : } D = \frac{E_1 \delta^3}{12} = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \text{ s'appelle rigidité cylindrique de la plaque.}$$

Pour une plaque de section rectangulaire $\Delta x \Delta y$ et d'épaisseur δ , tel que:

$\Delta x = \Delta y = 1$, les expressions des contraintes peuvent prendre les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{12M_x}{\delta^3} z; \\ \sigma_y &= \frac{12M_y}{\delta^3} z; \\ \tau &= \frac{12H}{\delta^3} z.\end{aligned}\tag{II.7}$$

II.5. Equation différentielle des déflexions de la plaque

Comme nous avons indiqué, précédemment, qu'il y a une seule fonction inconnue w , donc l'équation différentielle des déflexions de la plaque ne fait intervenir qu'une seule variable w . D'après les lois fondamentales des résistances des matériaux [2, 50], les équations d'équilibre d'un élément de la plaque sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= Q_y,\end{aligned}\tag{II.8}$$

où:

Q_x, Q_y – les efforts tranchants dans les sections de la plaque.

Du système (II.8), on considère la première équation :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q,\tag{II.9}$$

qui doit contenir uniquement les inconnues w . Pour déterminer Q_x nous devons utiliser la deuxième et la troisième équation du système (II.8)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\}.\tag{II.10}$$

Après simplification, l'expression de Q_x prend la forme suivante:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w);\tag{II.11.a}$$

Analogiquement pour Q_y on trouve :

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w),\tag{II.11.b}$$

$$\text{où: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Reportons l'équation (II.11.a) et (II.11.b) dans l'équation (II.9), on obtient l'équation (II.12)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \quad (\text{II.12})$$

ou

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (\text{II.13})$$

Cette équation a été obtenue en 1811.

L'équation différentielle des déflexions des plaques en coordonnées polaires est donnée par l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D}. \quad (\text{II.14})$$

II.6. Solution de Clebsch

La solution générale de Clebsch [23, 45, 84] de l'équation différentielle (II.14) des déflexions de la plaque en coordonnées polaires est présentée sous la forme suivante:

$$w(r, \theta) = w_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [w_k(r) \cos k\theta + w'_k(r) \sin k\theta] + w_M \quad (\text{II.15})$$

où:

w_M – solution particulière appropriée à l'action de la force concentrée sur la plaque.

Selon [23, 72], son expression est la suivante :

$$w_M(r, \theta) = \frac{P b^2}{16\pi D} \left[\frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{4ar \cos \theta}{b^2} \left(\ln \frac{ar}{b^2} + 1 \right) - \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2} - \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} \right], \quad (\text{II.16})$$

où:

b – certaine entité caractéristique qui sert à obtenir la dimension de la déflexion;

En coordonnées cartésiennes, l'expression (II.16) prend la forme:

$$\begin{aligned}
w_M(x,y) = \frac{Pab}{16\pi D} & \left\{ \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + \right. \\
& + 4 \left(\frac{xt}{a^2} + \frac{yz}{b^2} \right) \left(1 + \ln \left[\frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{t^2+z^2}}{ab} \right] \right) - \\
& \left. - \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right] - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] \right\}; \quad (II.17)
\end{aligned}$$

où :

(x, y) – coordonnées du point où se détermine la déflexion;

(t, z) – coordonnées du point d'application de la charge.

$$\begin{aligned}
w_0(r) &= A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r^2, & k=0; \\
w_1(r) &= B_{11} r + B_{21} r^3 + B_{31} r^{-1} + B_{41} r \ln r, & k=1; \\
w'_1(r) &= C_{11} r + C_{21} r^3 + C_{31} r^{-1} + C_{41} r \ln r, & k=1; \\
w_k(r) &= B_{1k} r^k + B_{2k} r^{k+2} + B_{3k} r^{-k} + B_{4k} r^{-k+2}, & k>1; \\
w'_k(r) &= C_{1k} r^k + C_{2k} r^{k+2} + C_{3k} r^{-k} + C_{4k} r^{-k+2}, & k>1.
\end{aligned} \quad (II.18)$$

Ces solutions doivent vérifier deux types de conditions:

1 - conditions géométriques: Ce type de conditions impose que: la déflexion $w(r, \theta)$ de la plaque et sa rotation $\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}$ au niveau de l'encastrement ou à l'origine de coordonnées (fig.

II.5) doivent être égales à zéro, c'est à dire: $w(r, \theta)|_{r=0} = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}|_{r=0} = 0$;

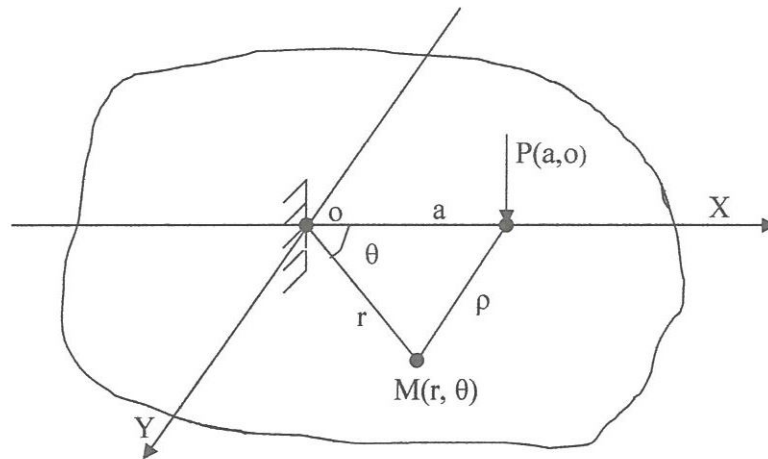


Fig. II.5 Plaque de dimensions infinies soumise à une charge concentrée P

2 - conditions statiques aux limites: Ce type de conditions impose que le moment radial M_r et l'effort normal radial V_r doivent être égaux à zéro au contour de la plaque, c'est à dire:

$$M_r|_{r \rightarrow \infty} = V_r|_{r \rightarrow \infty} = 0;$$

Après vérification, les seuls termes de la solution (II.18) qui satisfont ces deux types de conditions, sont :

$$w(r, \theta) = w_M(r, \theta) + w_1(r, \theta) + \sum_{j=2}^n w_j(r, \theta), \quad (\text{II.19})$$

où:

$w_M(r, \theta)$ – est donnée par (II.16);

$w_1(r, \theta) + \sum_{j=2}^n w_j(r, \theta)$ – parties de solution de Clebsch [23, 45, 72] représentant les fonctions

de correction de la solution de l'équation différentielle (II.14). Leurs expressions sont:

$$w_1(r, \theta) = B_{21} \frac{r^3}{b^3} \cos \theta + C_{21} \frac{r^3}{b^3} \sin \theta;$$

$$w_j(r, \theta) = B_{1j} \frac{r^j}{b^j} \cos j\theta + C_{1j} \frac{r^j}{b^j} \sin j\theta + B_{2j} \frac{r^{j+2}}{b^{j+2}} \cos j\theta + C_{2j} \frac{r^{j+2}}{b^{j+2}} \sin j\theta;$$

Ici B_{ij} et C_{ij} , $l=1,2$; $j=1,n$ – coefficients à déterminer par l'utilisation du principe de l'énergie de déformation de la plaque [23, 45].

Le système (II.19), en coordonnées cartésiennes vaut :

$$w(x, y) = w_M(x, y) + \sum_{j=1}^n A_j w_j(x, y), \quad (\text{II.20})$$

avec

$w_M(x, y)$ – est donnée par (II.17);

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}; \\ w_2(x, y) &= \frac{2xy}{ab}; \\ w_3(x, y) &= \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \\ w_4(x, y) &= \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

La détermination des coefficients A_j se fait par l'application de la méthode énergétique de Ritz [25].

II.7. Détermination des coefficients de fonctions de correction

La détermination des coefficients de fonctions de correction nécessite l'utilisation du principe de l'énergie de déformation de la plaque. Nous allons appliquer la méthode la plus utilisée dans ce domaine qu'est la méthode de Ritz. Le principe de cette méthode est le suivant [2, 23, 72]:

L'énergie de déformation de la plaque U est donnée par :

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \Psi(w(x, y)) \, dx \, dy, \quad (\text{II.22})$$

où:

Ω – surface de la plaque;

Ψ – opérateur donné par:

$$\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - \beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right];$$

$$\beta = 2(1 - \nu);$$

ν – coefficient de Poisson de la plaque.

Le travail Π de la force concentrée P effectué sur la plaque lors de son passage de l'état déformé à l'état initial est donné par:

$$\Pi = -P w(t, z), \quad (\text{II.23})$$

$w_M(t, z)$ est donnée par (II.20) où : $t \equiv x$ et $z \equiv y$.

L'énergie totale de la déformation de la plaque \mathcal{E} est donnée par

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (\text{II.24})$$

Les coefficients A_j , $j = 1, \dots, n$ se déterminent par le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_j} = 0; & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

La précision de la solution (II.20) dépend du nombre de terme à prendre.

D'après [23], une solution de précision jugée suffisante est obtenue si on tient compte uniquement de quatre fonctions de correction.

C'est-à-dire :

$$w(x, y) = w_M(x, y) + A_1 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + A_2 \left(\frac{2xy}{ab} \right) + A_3 \left(\frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right) + A_4 \left(\frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right). \quad (\text{II.26})$$

La prise en compte uniquement de quatre fonctions de correction, dont la précision de la solution est jugée suffisante, correspond à la détermination des coefficients A_1 , A_2 , A_3 et A_4 .

L'application du système (II.25), pour ce cas et après simplification, nous conduit au système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} \frac{-16D\beta}{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16D\beta}{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32D\beta}{3ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32D\beta}{3ab} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -P \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_1 dx dy + P \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \\ -P \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_2 dx dy + \frac{2Ptz}{ab} \\ -P \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_3 dx dy + \frac{Pt}{a} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \\ -P \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_4 dx dy + \frac{Pz}{b} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Après résolution du système (II.27), on trouve les expressions de chaque coefficient;

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Pab}{16D\beta} \left[\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_1 dx dy - \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \right]; \\ A_2 &= \frac{Pab}{16D\beta} \left[\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_2 dx dy - \frac{2tz}{ab} \right]; \\ A_3 &= \frac{-P3ab}{32D\beta} \left[\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_3 dx dy - \frac{t}{a} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right]; \\ A_4 &= \frac{-P3ab}{32D\beta} \left[\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_4 dx dy - \frac{z}{b} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

avec:

$$\begin{aligned}
Q_1(x, y) = & ((b^8 t(t-x)^2 x^3 (x-y)(x+y) + a^8 (x-y)y^3 (x+y)(y-z)^2 z + \\
& + a^6 b^2 y - tx y^3 (x^2 + 3y^2) + y^2 (x^2 (t^2 + 2x^2) + (-t^2 + 8tx + x^2)y^2 + y^4)z - \\
& - y(2(x^2 + y^2)^2 + t(x^3 + 3xy^2))z^2 + a^2 b^6 x(-t^3 (x^2 + y^2)^2 + x^3 y(3x^2 + y^2)z + \\
& + t^2 (2x(x^2 + y^2)^2 + xy(3x^2 + y^2)z) - tx^2 (x^4 + x^2 (y^2 + 8yz - z^2) + y^2 (2y^2 + z^2))) + \\
& + a^4 b^4 (-t^3 xy^2 (x^2 + 3y^2) + ty^2 (2x^5 + 3x^3 y^2 + 3xy^4) - tx(x^2 + y^2)^2 z^2 + \\
& + t^2 y(2(x-y)y^3 (x+y) + (x^2 + y^2)^2 z) + x^2 z(-2y^5 + y^3 z^2 + x^4 (-3y + 2z) + \\
& + x^2 y(-3y^2 - 2yz + 3z^2)))\beta) / 4a^3 b^3 \pi (x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) (b^2 (t-x) + a^2 (y-z)^2);
\end{aligned}$$

$$Q_2(x, y) = \left(y \left(\frac{t(x-y)(x+y)}{a^2 (x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{b^2 x^2 + a^2 y^2} \right) + \frac{(t-x)(y-z)}{b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2} + \frac{x(-x+y)(x+y)z}{b^2 (x^2 + y^2)^2} \right) \beta / 2\pi;$$

$$\begin{aligned}
Q_3(x, y) = & (\beta(3b^5 t(t-x)^2 x^2 (x-y)(x+y) - 3a^6 x(x-y)(x+y)(y-x)^2 z + \\
& + a^2 b^4 (t((t-x)^2 x^4 + x^2 (5t^2 - 10tx + 8x^2))y^2 - (2t^2 - 4tx + 5x^2)y^4) + \\
& + 3xy(x^2 (3t^2 - 8tx + 3x^2) + (t^2 + x^2)y^2)z + 3tx^2 (x-y)(x+y)z^2) + \\
& + a^2 b^4 (3t^2 xy(-x^2 + y^2)z + t(2y^4 (y-z)z + x^4 (3y^2 + 2yz + z^2) + x^2 y^2 (9y^2 - 20yz + 5z^2)) + \\
& + xy(y^3 (y-3z)(y-z) + x^4 (-5y + 2z) + x^2 y(8y^2 - 14yz + 9z^2))) - 2a^2 b^2 x(x^2 + y^2)^2 (b^2 (t-x)^2 + \\
& + a^2 (y-z)^2) (\log \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] - \log \left[\frac{b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2}{a^2 b^2} \right])) / (4a^4 b^3 \pi (x^2 + y^2)^2 b^2 (t-x)^2 + \\
& + a^2 (y-z)^2));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4(x, y) = & -(\beta(3b^6 t(t-x)^2 xy(-x^2 + y^2) + 3a^6 (x-y)y^2 (x+y)(y-z)^2 z + \\
& + a^4 b^2 (3t^2 (x-y)y^2 (x+y)z + z(-y^4 (y-z)^2 + x^2 y^2 (-8y^2 + 10yz - 5z^2) + \\
& + x^4 (5y^2 - 4yz + 2z^2)) - 3txy(x^2 (y^2 + z^2) + y^2 (3y^2 - 8yz + 3z^2))) + \\
& + a^2 b^4 (-3t^2 xy(x^2 + 3y^2) - 3x^2 y^2 (3x^2 + y^2)z + t^2 (x^2 y^2 (14y - 5z) + 2x^4 (2y + z) - \\
& - y^4 (2y + z)) + t(-x^5 (y + 2z) + x^3 y(-8y^2 + 20yz - 3z^2) + xy^3 (5y^2 - 2yz + 3z^2))) + \\
& + 2a^2 b^2 y(x^2 + y^2) (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2) \left(\log \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] - \log \left[\frac{b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2}{a^2 b^2} \right] \right)) / \\
& (4a^3 b^4 \pi (x^2 + y^2) (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2)).
\end{aligned}$$

II.8. Exemple d'application

Prenons les données géométriques et physiques suivantes: $a=2\text{ m}$; $b=1\text{ m}$; $h=0.2\text{ m}$; $E=3\times 10^{10}\text{ N/m}^2$; $\nu=1/6$. Pour une charge concentrée unitaire $P=1\text{ N}$ appliquée au point de coordonnées $t=0$, $z=0.8$, alors selon (II.26) la plaque se déforme comme suit (fig. II.6).

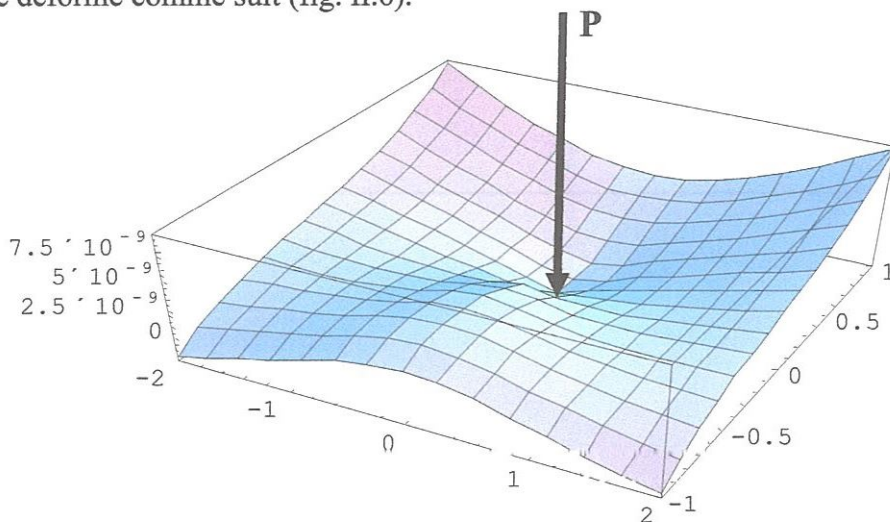


Fig. II.6 Déflexion de la plaque rectangulaire due à la charge concentrée P

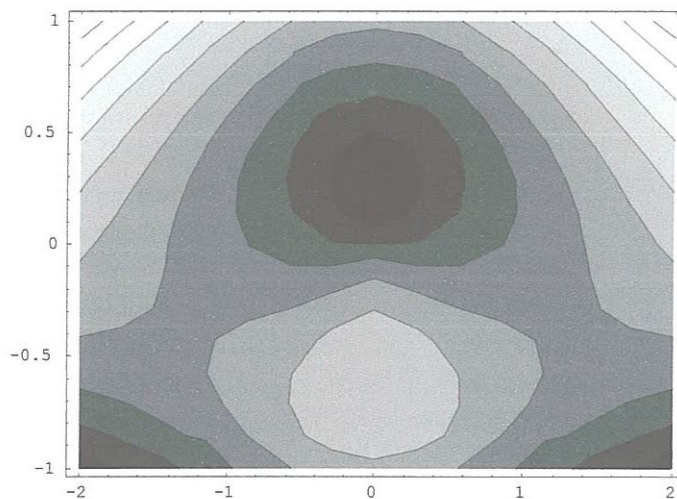


Fig. II.7 Champs d'influence de la charge concentrée P sur la plaque

II.9. Conclusion du chapitre II

Les expressions des déflexions de la plaque obtenues dans ce chapitre par l'utilisation de la solution de Clebsch et la méthode énergétique de Ritz vont être utilisées dans l'étude dynamique de la plaque déformable reposant sur milieu élastique qui sera traitée dans les chapitres suivants.

Chapitre III

Principe de la méthode de Gemochkin dans
le calcul dynamique des plaques reposant
sur milieu élastique

III.1. Prélude

Le professeur Gemochkin a proposé sa méthode pour la première fois en 1937. Cette méthode a fait succès dans le domaine de la mécanique des structures, notamment en calcul statique ou dynamique des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques (fig. III.1). La méthode de Gemochkin est conçue pour le calcul numérique d'ingénieur, c'est pourquoi elle a trouvé une large application [37]. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet de tenir en compte de plusieurs facteurs influant sur l'état de contraintes ou de déformations de la structure et du milieu élastique comme le modèle du milieu élastique, variation de la rigidité de la structure, présence des efforts de frottement dans la zone de contact, type de la charge extérieure agissant sur la structure, la forme géométrique de la structure etc. L'introduction de ces effets aboutit, généralement, à la non-réalisation de la solution de ce problème par d'autres méthodes [43].

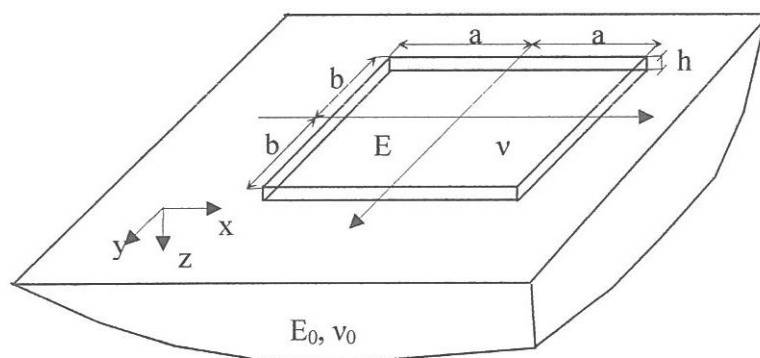


Fig. III.1 Plaque reposant sur milieu élastique

La méthode de Gemochkin est une méthode numérique dont la précision est proportionnelle au nombre d'éléments par lesquels la structure est discrétisée. Le calcul des structures reposant sur milieu élastique qui intéresse l'ingénieur est de déterminer les efforts internes dans les sections de la structure. L'arrivée à la détermination des efforts internes dans les sections des structures en interaction avec des milieux élastiques nécessite la connaissance des forces de réaction dans la zone de contact. L'application de la méthode de Gemochkin permet de déterminer les forces de réaction dans la zone de contact, puis par l'application des formules de la théorie d'élasticité, faisant relation entre les forces de réaction et les différents efforts internes, ces derniers se déterminent.

III.2. Discrétisation du système (plaque-milieu élastique)

Le principe de la méthode de Gemochkin concernant le calcul des structures reposant sur milieu élastique est le suivant [37]:

Diviser la structure (plaque ou poutre) en plusieurs éléments identiques dont le nombre est proportionnel au taux de précision désiré (fig. III.2). La répartition des forces de réaction à l'intérieur du domaine de chaque élément est considérée uniformément répartie (fig. III.3). Le contact continu entre la structure et le milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points situés aux centres de gravité de chaque élément (fig. III.2). Ce contact partiel entre la structure et le milieu élastique est assuré par des liaisons rigides au niveau desquelles se déterminent les efforts de liaison (fig. III.4). La liaison horizontale indiquée sur la fig. III.4 est faite pour équilibrer la structure et ne joue aucun rôle dans le calcul.

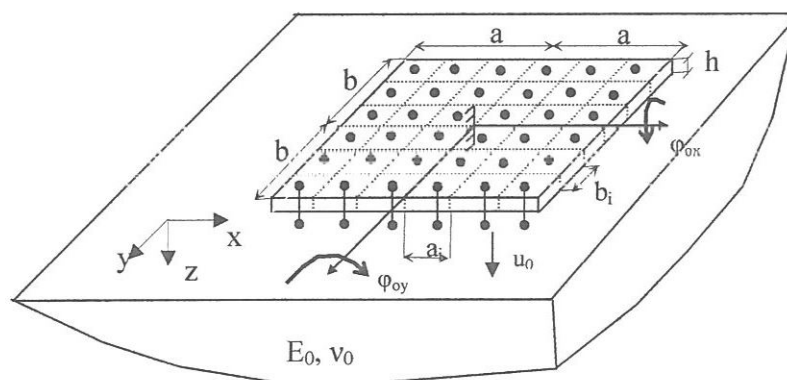


Fig. III.2 Discrétisation du système plaque-milieu élastique

Donc le calcul de la plaque reposant sur milieu élastique par la méthode de Gemochkin revient au calcul d'une plaque hyperstatique en liaison avec un milieu élastique par des appuis aux points bien déterminés (fig. III.5).

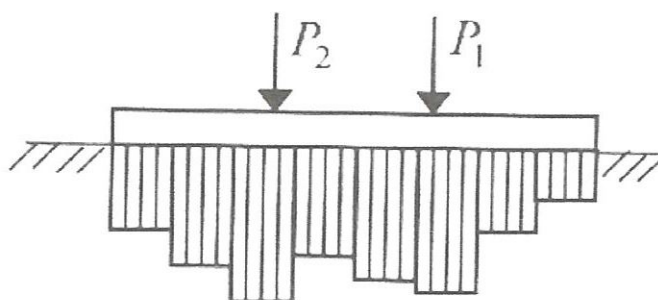


Fig. III.3 Répartition des forces de réaction à l'intérieur du domaine de chaque élément

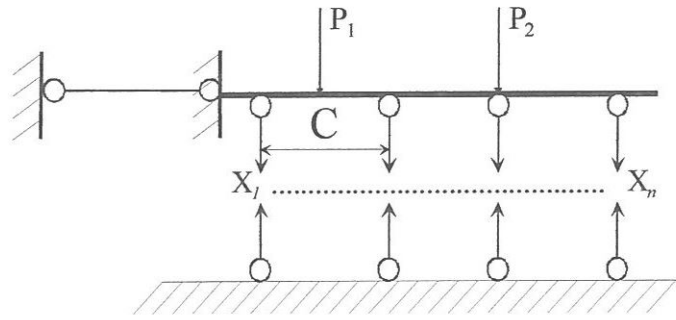


Fig. III.4 Représentation des liaisons entre la structure et le milieu élastique

Pour résoudre ce nouveau système résultant de la discrétisation de la plaque reposant sur milieu élastique (fig. III.5), on utilise l'une des méthodes connues de la mécanique des structures (méthode des forces, méthode des déplacements ou méthode mixte) où les inconnues du calcul sont :

- Les efforts de liaison X_i qui sont appliqués au niveau des liaisons situées dans les centres de gravité des éléments (fig. III.5);

Déplacement vertical initial u_0 de la plaque toute entière (fig. III.5);

- Deux angles de rotation de la plaque φ_{ox} et φ_{oy} par rapport aux axes de coordonnées ox et oy (fig. III.5).

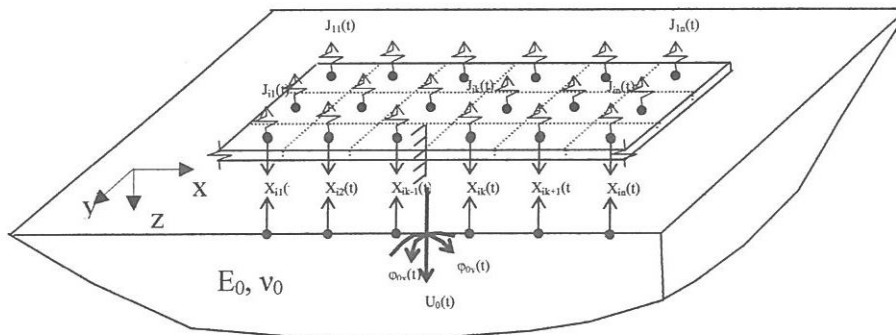


Fig. III.5 Représentation des efforts agissant sur le système discrétisé

III.3. Formulation du système d'équations canoniques de la méthode de Gemochkin

Soit une plaque rectangulaire de dimensions finies $(2a \times 2b)$, de masse M , et d'épaisseur h , caractérisée par son module d'élasticité E et son coefficient de Poisson ν se trouve en contact avec un milieu élastique caractérisé par son module d'élasticité E_0 et son coefficient de Poisson ν_0 (fig. III.1).

La considération que les déflexions de la plaque et les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique dans la zone de contact sont identiques, nous permet de formuler le système d'équations canoniques de la méthode de Gemochkin auxquelles s'ajoutent les équations d'équilibre [37]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_i(t) - \sum_{k=1}^n w_{ik} J_i(t) + \ell_{ix} \varphi_{0x}(t) + \ell_{iy} \varphi_{0y}(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{ix} = I_{0x} \ddot{\varphi}_{\alpha x}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{iy} = I_{0y} \ddot{\varphi}_{\alpha y}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] = M \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Ici:

n – nombre d'éléments, par lesquels la plaque est discrétisée.

III.4. Définition des paramètres du système d'équations canoniques

La définition de chaque paramètre figurant dans le système d'équations (III.1) est la suivante:

δ_{ik} – représente la fonction de Green caractérisant les déflexions de la plaque et les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique dans la zone de contact. Son expression est la suivante:

$$\delta_{ik} = v_{ik} + w_{ik}; \quad (\text{III.2})$$

où:

w_{ik} – fonction représentant les déflexions de la plaque. Elle est définie dans le chapitre II;

v_{ik} – fonction représentant les déplacements verticaux (tassements) de la surface du milieu élastique dans la zone de contact. Cette fonction définit le type ou le modèle du milieu élastique (semi-infini élastique, type de Winkler...) et elle est définie dans les chapitres I, IV et V.

Pour éviter les grands tassements de la surface du milieu élastique, dus aux efforts de liaison concentrés X_i , ces derniers se transforment aux charges uniformément réparties sur la surface de l'élément (fig. III.6).

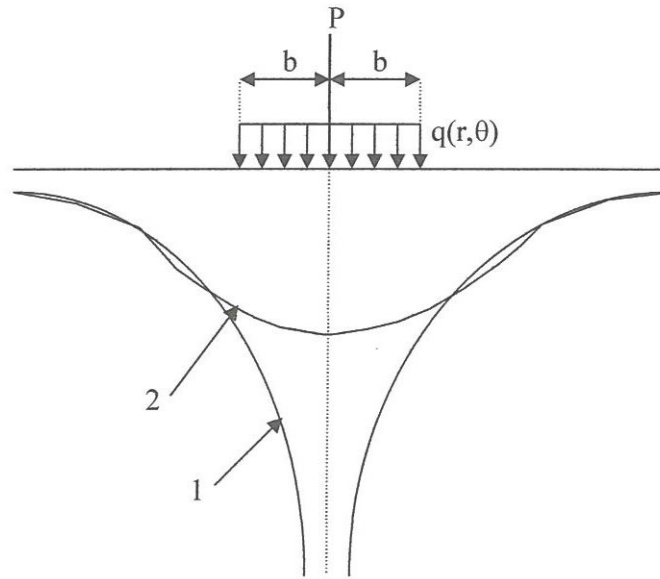


Fig. III.6 Epures de déformation de la surface du milieu élastique:
 1 – sous charge concentrée;
 2 – sous charge uniformément répartie

Δ_{ip} – fonction caractérisant les déflexions de la plaque dues aux charges extérieures P_k . Son expression est la suivante:

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n w_{ik} P_k. \quad (\text{III.3})$$

Cette fonction peut être égale à zéro dans le cas des plaques rigides ($w_{ik} = 0$) ou lors de l'absence des charges extérieures $P_k = 0$ (cas des vibrations libres),

$X_i(t)$ – efforts de liaison appliqués sur la plaque et sur le milieu élastique (fig. III.5),
 (inconnus);

$J_i(t)$ – forces d'inertie appliquées uniquement sur la plaque (fig. III.5), seront définies dans les chapitres suivants;

$\varphi_{ox}(t)$ – angle de rotation de la plaque par rapport à l'axe xx' (inconnu);

$\varphi_{oy}(t)$ – angle de rotation de la plaque par rapport à l'axe yy' (inconnu);

$u_0(t)$ – déplacement vertical initial de la plaque toute entière (inconnu);

ℓ_{ix} – distance (bras de levier) du centre de gravité de l'élément i à l'axe xx' ;

ℓ_{iy} – distance (bras de levier) du centre de gravité de l'élément i à l'axe yy' ;

M – masse totale de la plaque discrétisée;

I_{ox} – moment d'inertie angulaire par rapport à l'axe xx' , sera défini dans les chapitres suivants;

I_{oy} – moment d'inertie angulaire par rapport à l'axe yy' , sera défini dans les chapitres suivants;

$\ddot{u}_0(t), \ddot{\varphi}_{ox}(t), \ddot{\varphi}_{oy}(t)$ – dérivées secondes par rapport au temps de: $u_0(t), \varphi_{ox}(t), \varphi_{oy}(t)$.

III.5. Conclusion du chapitre III

Ce chapitre est consacré à la présentation de la méthode de Gemochkin utilisée dans la formulation de l'approche pour l'étude dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique. Comme nous l'avons indiqué précédemment, que calculer une structure en interaction avec un milieu de caractéristiques mécaniques différentes nécessite la détermination des forces de réaction dans la zone de contact. Cela dicte que la connaissance de la fonction de Green définissant les forces de réaction nécessite une modélisation particulière vu la différence des propriétés physiques des deux milieux qui pose un problème. C'est pourquoi les méthodes de calcul de ces systèmes se concentrent toujours sur ce point et dès que les forces de réaction sont déterminées le reste des inconnues (efforts internes, contraintes, déformations...) se déterminent facilement par l'application des formules de la théorie d'élasticité faisant relation entre les forces de réaction et le reste des inconnues. La méthode de Gemochkin, présentée dans ce chapitre, permet la détermination des forces de réaction dans la zone de contact entre la structure et le milieu élastique et par conséquent son calcul statique ou dynamique.

Chapitre IV

Calcul dynamique d'une plaque
rectangulaire reposant sur milieu élastique
de type de Winkler

IV.1. Introduction

L'approche élaborée pour le calcul dynamique des plaques reposant sur milieux élastiques présentée dans les chapitres précédents peut être appliquée aux différents types des milieux élastiques connus. Le type le plus simple est celui des ressorts, c'est-à-dire la déformation de la surface du milieu élastique est proportionnelle à la charge extérieure, qui est connu comme type de Winkler (nom de son fondateur). Ce chapitre est consacré au calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler par l'application de l'approche formulée. Cela permet de déterminer les fréquences et déformées propres de la plaque, sa réponse à des charges dynamiques, ainsi que la localisation des fréquences d'excitation.

IV.2. Principe de Winkler

Les hypothèses du calcul des plaques reposant sur milieu élastique sont données par Winkler, dans lesquelles la relation entre la pression effectuée sur la surface du milieu élastique et ses tassements (fig. IV1) est donnée par:

$$w_0(x, y) = \frac{P(x, y)}{K}, \quad (\text{IV.1})$$

où:

$P(x, y)$ – force de pression agissant sur la surface du milieu élastique au point de coordonnées (x, y) , due aux charges extérieures;

K – coefficient de proportionnalité du milieu élastique;

$w_0(x, y)$ – tassement de la surface du milieu élastique au même point.

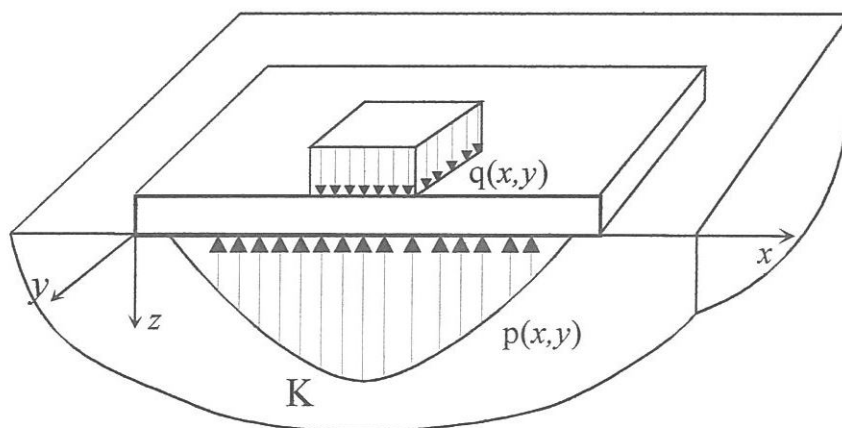


Fig. IV.1 Plaque reposant sur un milieu élastique

IV.3. Modélisation du système, plaque-milieu élastique, selon la méthode de Gemochkin

La discrétisation de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler se fait par la division de cette dernière en un nombre d'éléments rectangulaires identiques (fig. IV.2). On considère que la masse de chaque élément est concentrée en son centre de gravité. Le contact continu plaque-milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points représentant les centres de gravité des éléments. Ce contact partiel entre la plaque et le milieu élastique est assuré par des liaisons rigides au niveau desquelles se déterminent les efforts de liaison $X(t)$ (fig. IV.2).

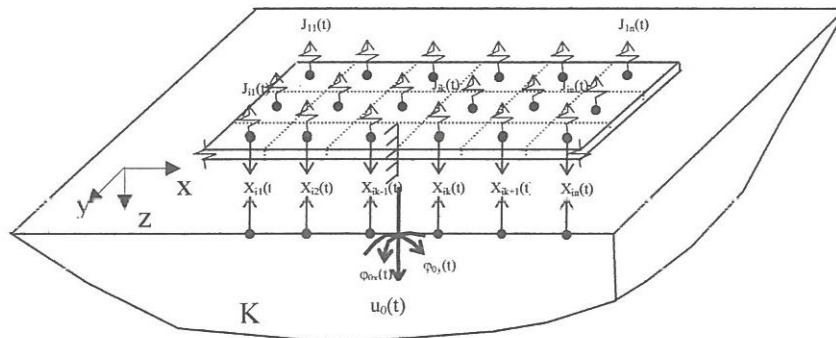


Fig. IV.2 Discrétisation de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler

IV.4. Problème posé

Le problème posé est de déterminer les déflexions de la plaque, les forces de réaction dans la zone de contact plaque-milieu élastique, fréquences et déformées propres de la plaque, ainsi que sa réponse aux charges dynamiques extérieures.

IV.5. Hypothèses du calcul

Les suppositions suivantes sont prises en considération:

- L'inertie du milieu élastique et les forces de frottement dans la zone de contact sont négligés;
- Les forces d'inertie $J(t)$ sont uniquement appliquées sur la plaque et les efforts de liaison $X(t)$ sont appliqués sur la plaque et sur le milieu élastique fig. IV.2;
- Absence des sollicitations extérieures en dehors de la zone de contact;
- La plaque se calcule conformément aux hypothèses de la théorie des déflexions des plaques minces.

IV.6. Formulation du système d'équations canoniques

Le système d'équations canoniques pour le calcul dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler vaut [37]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k(t) - \sum_{k=1}^n w_{ik} J_k(t) + \ell_{ix} \varphi_{0x}(t) + \ell_{iy} \varphi_{0y}(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{ix} = I_{0x} \ddot{\varphi}_{ox}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{iy} = I_{0y} \ddot{\varphi}_{oy}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] = M \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

Où:

δ_{ik} – fonction de Green déterminant les déflexions de la plaque, ainsi que les tassements de la surface du milieu élastique, elle donnée par [45]: $\delta_{ik} = v_{ik} + w_{ik}$;

v_{ik} – déplacement vertical de la surface du milieu élastique au point i dû à l'effort X_k appliqué au point k de la surface du milieu élastique;

w_{ik} – déflexion de la plaque au point i dû à l'effort X_k appliqué au point k de la plaque (définie dans le chapitre II);

Δ_{ip} – fonction caractérisant les déflexions de la plaque dues aux charges extérieures P_k ;

$\varphi_{ox}(t)$ – angle de rotation de la plaque par rapport à l'axe xx' ;

$\varphi_{oy}(t)$ – angle de rotation de la plaque par rapport à l'axe yy' ;

$u_0(t)$ – déplacement vertical initial de la plaque;

ℓ_{ix} – distance entre le centre de gravité de l'élément i à l'axe xx' ;

ℓ_{iy} – distance entre le centre de gravité de l'élément i à l'axe yy' ;

M – masse totale de la plaque discrétisée;

I_{0x} – moment d'inertie angulaire par rapport à l'axe xx' ;

I_{0y} – moment d'inertie angulaire par rapport à l'axe yy' ;

$X_i(t)$ – efforts de liaison appliqués sur la plaque et sur la surface du milieu élastique;

$J_i(t)$ – forces d'inertie appliquées uniquement sur la plaque;

$\ddot{u}_0(t), \ddot{\varphi}_{ox}(t), \ddot{\varphi}_{oy}(t)$ – dérivées secondes par rapport au temps de: $u_0(t), \varphi_{ox}(t), \varphi_{oy}(t)$.

Les deux avant dernières équations représentent les équations d'équilibre des moments par rapport aux axes xx' et yy' ; la dernière équation représente l'équation d'équilibre des forces verticales agissant sur la structure et constatons que le système (IV.2) est de taille $(n+3) \times (n+3)$.

Pour les vibrations libres on pourra écrire [27, 49]:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(t) = X_i e^{i\omega t}; \\ J_i(t) = J_i e^{i\omega t}; \\ v_i(t) = v_i e^{i\omega t}; \\ \varphi_{ox}(t) = \varphi_{ox} e^{i\omega t}; \\ \varphi_{oy}(t) = \varphi_{oy} e^{i\omega t}; \\ u_0(t) = u_0 e^{i\omega t}; \\ \ddot{\varphi}_{ox}(t) = -\omega^2 \varphi_{ox} e^{i\omega t}; \\ \ddot{\varphi}_{oy}(t) = -\omega^2 \varphi_{oy} e^{i\omega t}; \\ \ddot{u}_0(t) = -\omega^2 u_0 e^{i\omega t}. \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

En tenant compte de (IV.3), le système (IV.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (v_{ik} + w_{ik}) X_i - \sum_{k=1}^n w_{ik} J_i + \ell_{ix} \varphi_{ox} + \ell_{iy} \varphi_{oy} + u_0 = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n [X_i - J_i] \ell_{ix} = -\omega^2 I_{0x} \varphi_{ox}; \\ \sum_{i=1}^n [X_i - J_i] \ell_{iy} = -\omega^2 I_{0y} \varphi_{oy}; \\ \sum_{i=1}^n [X_i - J_i] = -\omega^2 M u_0. \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

Pour un milieu élastique de type de Winkler, on pourra écrire :

$$v_{ik} = \begin{cases} \frac{X_i}{a_k b_k K} = \frac{1}{a_k b_k K}, & \text{Si } i = k, \\ 0; & \text{Si } i \neq k; \end{cases} \quad (IV.5)$$

$$X_i = a_i b_i K v_i;$$

$$J_i(t) = J_i e^{i\omega t} = -M_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} = -M_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} = M_i \omega^2 v_i e^{i\omega t} \Rightarrow J_i = M_i \omega^2 v_i,$$

où:

a_k, b_k – dimensions (longueur et largeur) de l'élément k , par lesquels la plaque est discrétisée (fig. III.2).

Du fait que le déplacement de la surface du milieu élastique v_i est égal à la déflexion de la plaque w_i , et que la plaque vibre librement, alors le système (IV.4), en tenant compte de (IV.5), devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ w_{i1}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) v_1 + \dots + [1 + w_{ii}(a_i b_i K - M_i \omega^2)] v_i + \dots + \\ + w_{in}(a_n b_n K - M_n \omega^2) v_n + \ell_{ix} \varphi_{0x} + \ell_{iy} \varphi_{0y} + u_0 = 0; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n [a_i b_i K - M_i \omega^2] v_i \ell_{ix} = -\omega^2 I_{0x} \varphi_{0x}; \\ \sum_{i=1}^n [a_i b_i K - M_i \omega^2] v_i \ell_{iy} = -\omega^2 I_{0y} \varphi_{0y}; \\ \sum_{i=1}^n [a_i b_i K - M_i \omega^2] v_i = -\omega^2 M u_0. \end{array} \right. \quad (IV.6)$$

Ici:

M_i – masse de l'élément i .

Le système (IV.6) pourra s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$[A]\{v\} = \{0\}, \quad (IV.7)$$

avec:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 + w_{11}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & w_{12}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & w_{1n}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{1x} & \ell_{1y} & 1 \\ w_{21}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & 1 + w_{22}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & w_{2n}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{2x} & \ell_{2y} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & w_{n2}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & 1 + w_{nn}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \ell_{1x}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & \ell_{2x}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & \ell_{nx}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & I_{0x} \omega^2 & 0 & 0 \\ \ell_{1y}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & \ell_{2y}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & \ell_{ny}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & 0 & I_{0y} \omega^2 & 0 \\ a_1 b_1 K - M_1 \omega^2 & a_2 b_2 K - M_2 \omega^2 & \dots & a_n b_n K - M_n \omega^2 & 0 & 0 & M \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\langle v \rangle = \langle v_1; v_2; \dots; v_n; \varphi_{0x}; \varphi_{0y}; u_0 \rangle;$$

$$I_{0x} = \frac{1}{3} M b^2;$$

$$I_{0y} = \frac{1}{3} M a^2.$$

Notons que la matrice $[A]$ peut devenir symétrique avec la considération des expressions suivantes [30]:

$$\sum_{i=1}^n J_i = \omega^2 M u_0; \quad \sum_{i=1}^n J_i \ell_i = \omega^2 I \varphi_0. \quad (\text{IV.8})$$

La prise en compte de (IV.8) permet de rendre la matrice $[A]$ comme suit:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1+w_{11}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & w_{12}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & w_{1n}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{1x} & \ell_{1y} & 1 \\ w_{21}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & 1+w_{22}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & w_{2n}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{2x} & \ell_{2y} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1}(a_1 b_1 K - M_1 \omega^2) & w_{n2}(a_2 b_2 K - M_2 \omega^2) & \dots & 1+w_{nn}(a_n b_n K - M_n \omega^2) & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \ell_{1x} & \ell_{2x} & \dots & \ell_{nx} & \frac{2Mb^2\omega^2}{3a_i b_i K} & 0 & 0 \\ \ell_{1y} & \ell_{2y} & \dots & \ell_{ny} & 0 & \frac{2Ma^2\omega^2}{3a_i b_i K} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \frac{2M\omega^2}{a_i b_i K} \end{bmatrix}$$

avec : $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n$.

Les fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique, de type de Winkler, représentent les racines de l'équation issue du déterminant de la matrice $[A]$ suivante:

$$\det[A] = 0, \quad (\text{IV.9})$$

qui admet une seule variable ω .

IV.7. Détermination des fréquences propres de la plaque reposant sur milieu élastique

Considérons une plaque de dimensions finies ($2a \times 2b$), de masse M , et d'épaisseur h , caractérisée par son module d'élasticité E et son coefficient de Poisson ν reposant sur milieu élastique de type Winkler caractérisé par son coefficient de proportionnalité K . La plaque est divisée en n éléments rectangulaires identiques. La discrétisation de la plaque est faite de façon que l'encastrement fictif, qui sert à l'équilibre de la plaque supposée libre de tout appui, est considéré au niveau de son centre (fig. IV.2).

IV.7.1. Application numérique

Considérons les données physiques et géométriques de la plaque et du milieu élastique suivantes :

$$a = 2 \text{ m}; b = 1 \text{ m}; \rho_{\text{plaque}} = 2500 \text{ Kg} / \text{m}^3; E = 3 \times 10^{10} \text{ N} / \text{m}^2; h = 0.3 \text{ m}; \nu = 1/6;$$

$$K = 50 \times 10^6 \text{ N} / \text{m}^3.$$

L'introduction de ces données dans la matrice du système (IV.7), puis par l'application de l'expression (IV.9) nous permet de déterminer les fréquences propres de la plaque.

Le tableau suivant donne les valeurs des fréquences propres en (Hz) pour trois cas de discrétisation de la plaque ($n = 9$, $n = 16$, $n = 25$).

i	Valeurs des fréquences propres ω en (Hz)		
	plaque discrétisée en 9 éléments	plaque discrétisée en 16 éléments	plaque discrétisée en 25 éléments
1	157.77	160.38	160.92
2	167.60	170.50	171.48
3	172.04	171.59	172.39
4	498.38	455.16	438.32
5	537.65	532.00	526.77
6	636.72	596.58	573.20
7	1564.60	1514.99	1490.85
8	⋮	2465.64	2405.03
9		2719.17	2855.92
10	–	3100.00	3363.16
11	–	3568.74	4151.52
12	–	4112.80	4262.87
13	–	4235.02	4320.16
14	–	⋮	4601.10
15	–		4708.12
16	–		5452.08
17	–	–	5813.70
18	–	–	5971.00

19	—	—	6404.07
20	—	—	6742.09
21	—	—	7384.89
22	—	—	7528.94
23	—	—	⋮

Tableau IV.1 Valeurs des fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler

IV.7.2. Convergence des valeurs des fréquences propres

Les valeurs des fréquences propres en (Hz) obtenues (tableau IV.1) indiquent une bonne convergence entre les trois cas de discrétisation de la plaque. Cette convergence est illustrée graphiquement sur le schéma suivant:

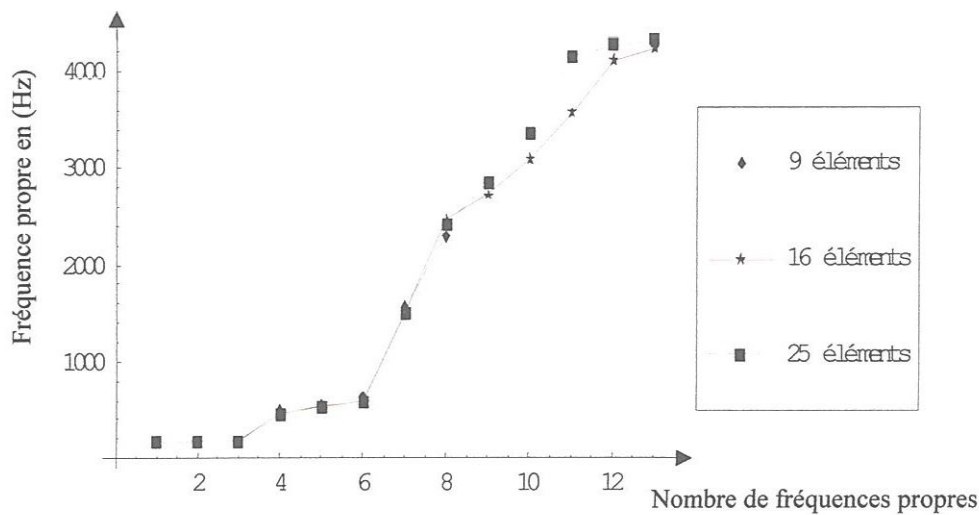
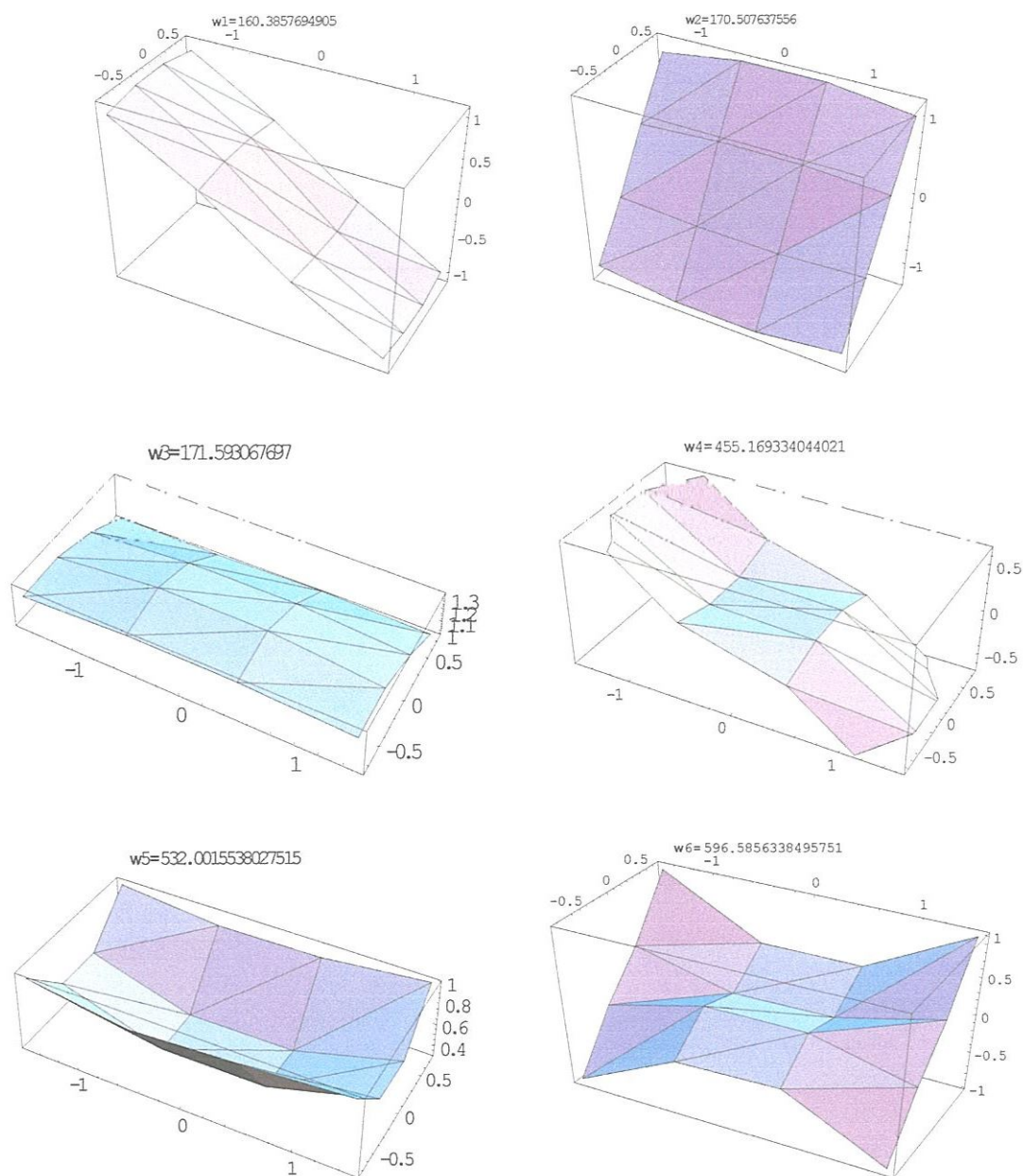


Fig. IV.3 Convergence des valeurs des fréquences propres de la plaque

IV.8. Détermination des déformées propres de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler

Examinons dans ce paragraphe le problème lié à la détermination des déformées propre de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler. D'après [11, 27, 49], pour déterminer la déformée propre relative à une fréquence propre, on fixe l'une des valeurs des inconnues du vecteur $\{v\}$ à 1 dans le système (IV.7), puis on supprime son équation correspondante. Le système résultant devient de taille $(n+2) \times (n+2)$ après avoir considéré que la colonne correspondante à la variable exclue devient vecteur libre. La résolution du

système résultant donne la déformée propre. La prise en compte des données géométriques et physiques définies dans le paragraphe IV.7.1., pour $n = 16$ et par l'application de ce principe on aura les déformées propres suivantes:



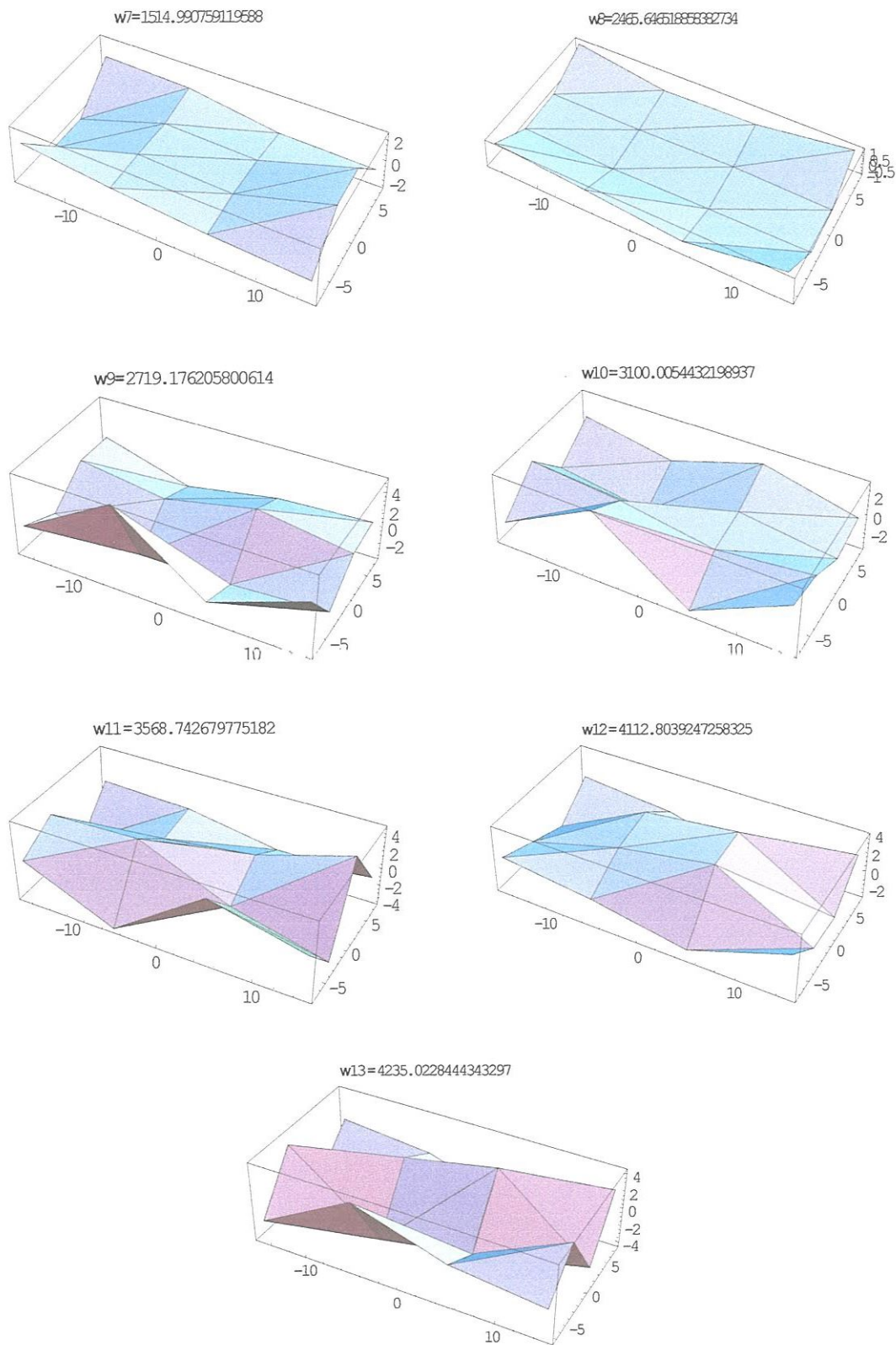


Fig. IV.4 Déformées propres de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler

On remarque, d'après fig. IV.4 que les déformées propres correspondant aux fréquences propres ω_1 , ω_2 et ω_3 représentent les phénomènes du pompage et du tangage.

IV.9. Vibration forcée de la plaque reposant sur milieu élastique due aux différents types de charges externes

Dans ce paragraphe on étudie la réponse d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler à des charges extérieures harmoniques engendrant dans la plaque des contraintes, des déformations et des déplacements qui varient avec le temps d'excitation. Afin de s'assurer de la fiabilité de l'approche élaborée pour l'étude dynamique de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler, on procède aux cas de chargements harmoniques suivants:

Cas 1. Réponse de la plaque à une excitation harmonique appliquée à un point

Soit une plaque rectangulaire de dimensions finies ($2a \times 2b$), de masse M , et d'épaisseur h , caractérisée par son module d'élasticité E et son coefficient de Poisson ν reposant sur milieu élastique de type de Winkler de coefficient de proportionnalité K .

Le système étudié, plaque-milieu élastique, est discrétisé en un nombre d'éléments rectangulaires identiques et la plaque soumise à une charge harmonique, perpendiculaire à son plan, appliquée en un point (fig. IV.5).

La charge harmonique est exprimée par:

$$P = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t), \quad (\text{IV.10})$$

où:

P_0 – amplitude en (N);

ω – fréquence d'excitation en (Hz);

t – temps d'excitation en (s).

L'application de l'approche élaborée pour l'étude dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique impose que les forces externes agissant sur la plaque doivent être appliquées au niveau des centres de gravités des éléments (fig. IV.5). Ces derniers représentent aussi les points où se déterminent les déplacements recherchés de la plaque étudiée. Donc la détermination de la réponse de la plaque reposant sur milieu élastique de type de Winkler,

c'est-à-dire ses déflexions dans le temps de son excitation par la charge harmonique consiste à résoudre le système d'équations suivant:

$$[A]\{v\} = \{F\}, \tag{IV.11}$$

où:

la matrice $[A]$ et le vecteur $\{v\}$, sont définis précédemment;

$\{F\}$ – vecteur sollicitations, défini comme suit :

$$\langle F \rangle = \langle \Delta_{1p}; \Delta_{2p}; \Delta_{3p}; \dots; \Delta_{np} \rangle;$$

avec: $\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n w_{ik} P_k; \quad i = 1, \dots, n.$

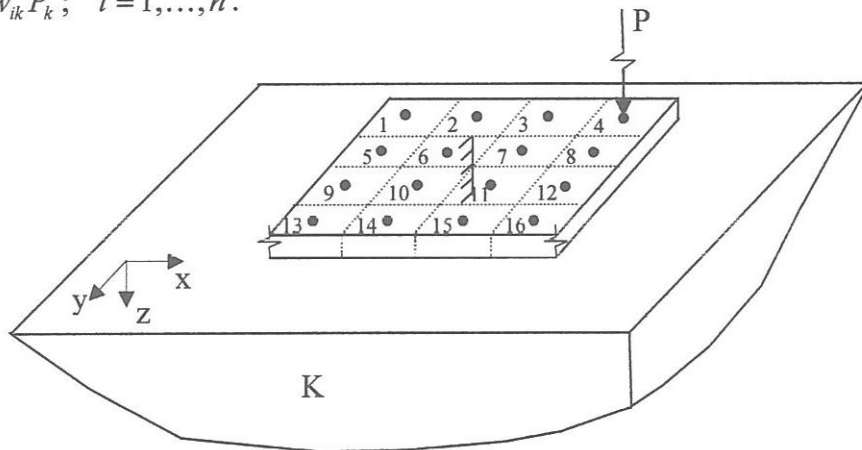


Fig. IV.5 Plaque reposant sur milieu élastique discrétisée en 16 éléments rectangulaires identiques et soumise à une charge harmonique

Remarque

La prise en compte que la charge harmonique extérieure est appliquée au niveau du point $k = 4$, c'est à dire:

$$P_k = \begin{cases} 0, & \text{Si } k \neq 4; \\ P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t), & \text{Si } k = 4, \text{ donc } \Delta_{ip} = w_{i4} P_4, \end{cases}$$

ainsi que l'introduction des données physiques et géométriques de la structure étudiée suivantes:

$a = 2m; b = 1m; \rho_{plaque} = 2500 \text{ Kg} / m^3; E = 3 \times 10^{10} \text{ N} / m^2; h = 0.3m; \nu = 1/6; K = 50 \times 10^6 \text{ N} / m^3;$
 $P_0 = 5000N; \omega = 400\text{Hz}$ dans le système (IV.11), pour $n = 16$, conduit à la détermination de la réponse de la plaque. Cette réponse est illustrée sur la fig. IV.6 aux instants: $t_1 = 0.001s, t_2 = 0.002s, \dots$

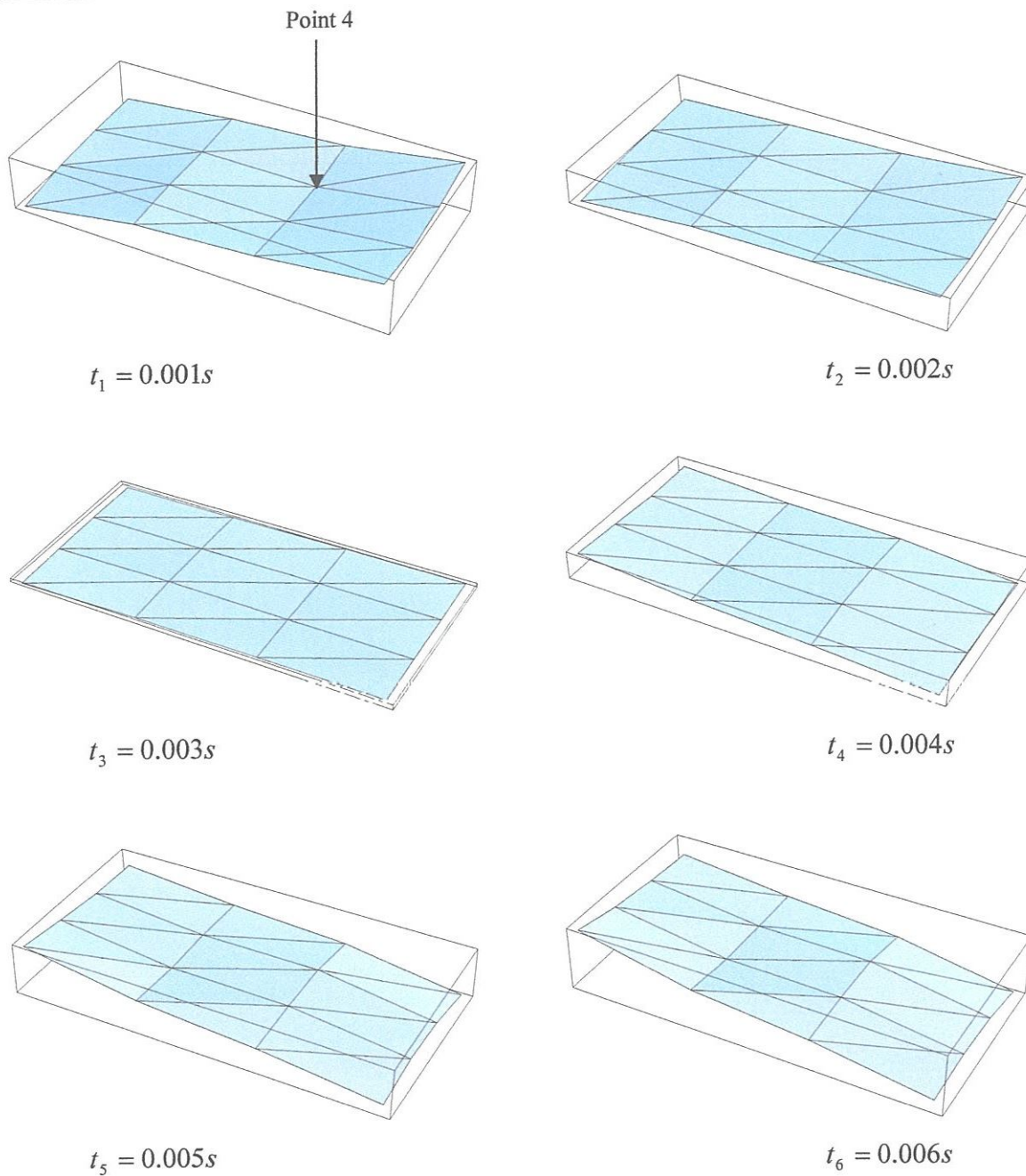


Fig. IV.6 Réponse de la plaque à une charge harmonique aux moments t_1, t_2, \dots, t_6

Les résultats numériques obtenus sont donnés dans l'annexe 1.

Cas 2. Réponse de la plaque à des excitations harmoniques de mêmes ou de différentes fréquences appliquées à plusieurs points

Ce cas comporte plusieurs variantes de chargement :

a – Plaque sollicitée par deux charges sinusoïdales de même amplitude et même fréquence d'excitation appliquées en deux points

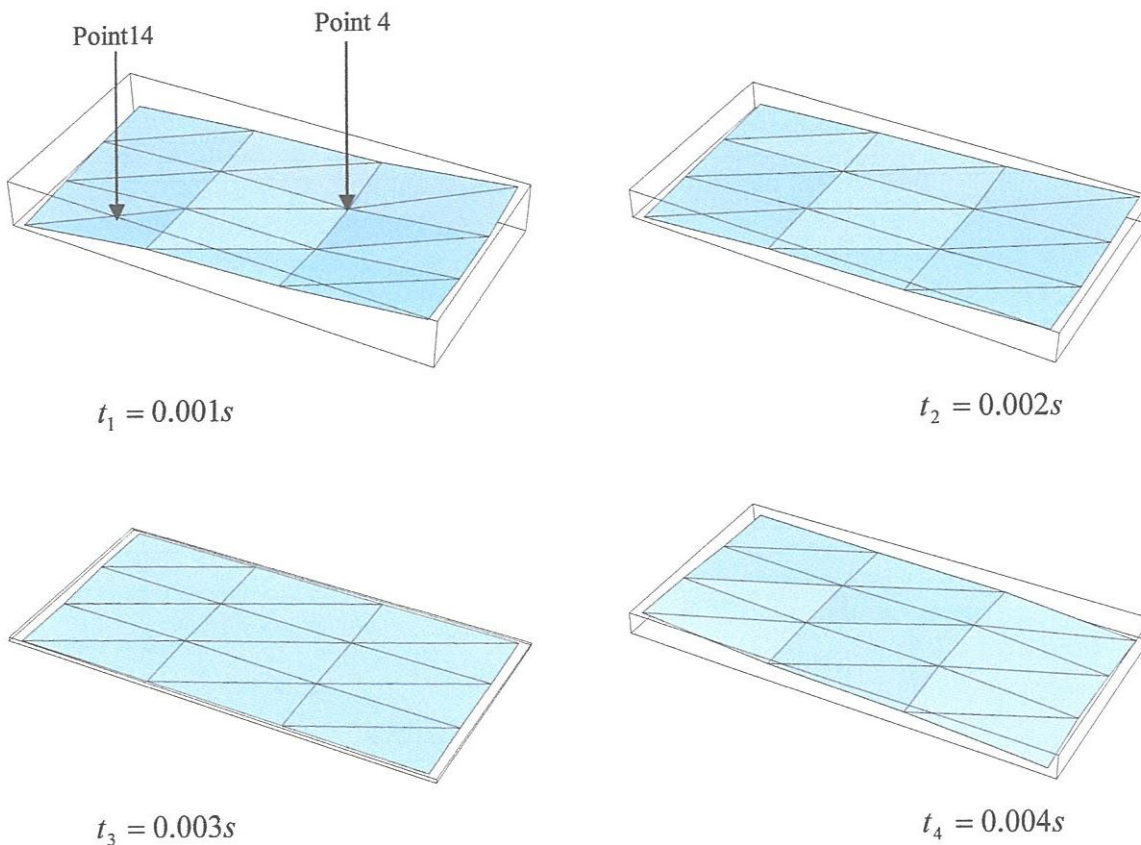
Considérons les mêmes données géométriques et physiques prises dans le premier cas, sauf que la plaque est soumise à deux charges sinusoïdales de même amplitude et de même fréquence d'excitation appliquées en deux points. Les deux charges s'expriment par:

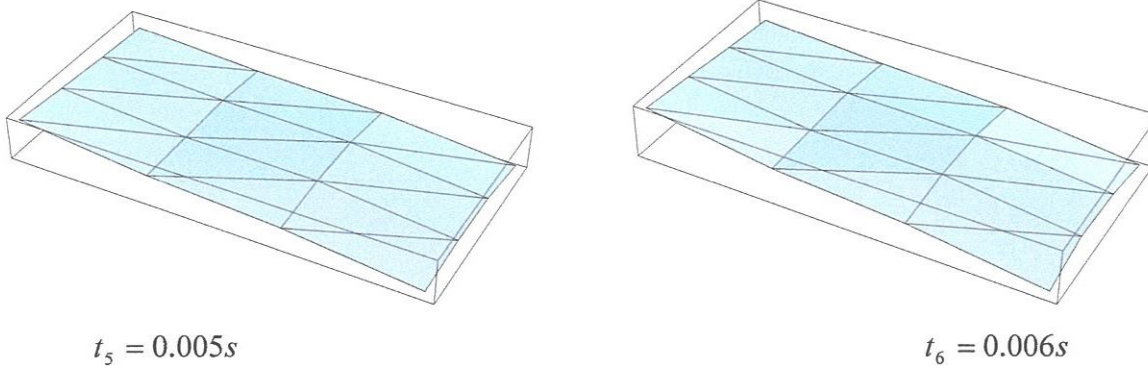
$$\begin{cases} P_1 = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t); \\ P_2 = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t). \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Considérons que les deux charges extérieures sont appliquées aux points 4 et 14 (fig. IV.5), alors la réponse de la plaque dans ce cas se détermine de la même façon que dans le cas précédent, sauf que:

$$\Delta_{ip} = w_{i4}P_4 + w_{i14}P_{14}.$$

La figure suivante illustre la réponse de la plaque à ce type de chargement en considérant les mêmes données prises dans le cas précédent aux instants t_1, t_2, \dots, t_6 .





$$t_5 = 0.005s$$

$$t_6 = 0.006s$$

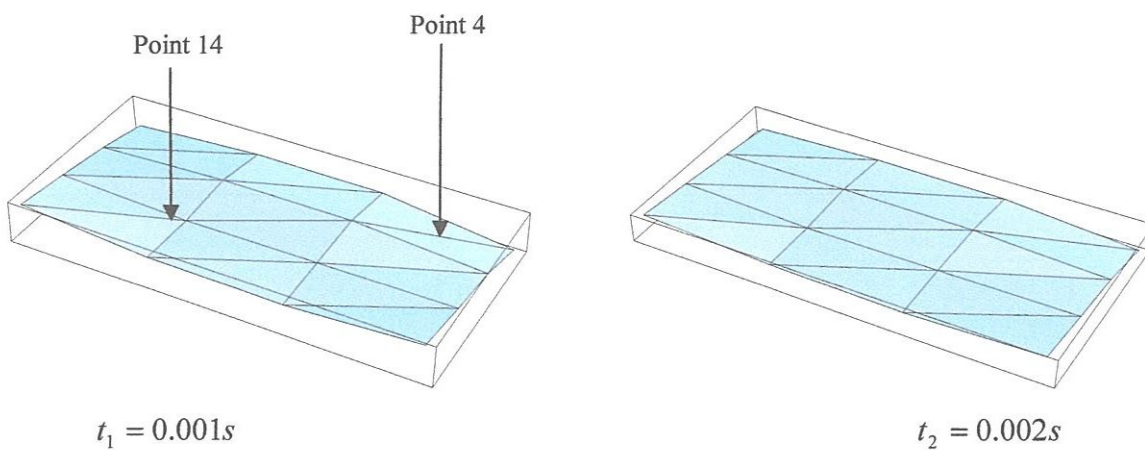
Fig. IV.7 Réponse de la plaque à deux charges harmoniques de même amplitude et fréquence d'excitation aux moments t_1, t_2, \dots, t_6

b – Plaque sollicitée par deux charges sinusoïdales de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation appliquées en deux points

Dans ce cas, la fréquence d'excitation à introduire dans la matrice du système d'équation (IV.12) est définie par la relation suivante [27, 49]:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (\text{IV.13})$$

Pour les valeurs des fréquences d'excitation suivantes : $\omega_1 = 400\text{Hz}$, $\omega_2 = 500\text{Hz}$, avec toujours les mêmes autres données prises dans le cas précédent on obtient la réponse de la plaque en fonction du temps de son excitation. Cette réponse, à ce type de chargement, est illustrée sur la figure suivante:



$$t_1 = 0.001s$$

$$t_2 = 0.002s$$

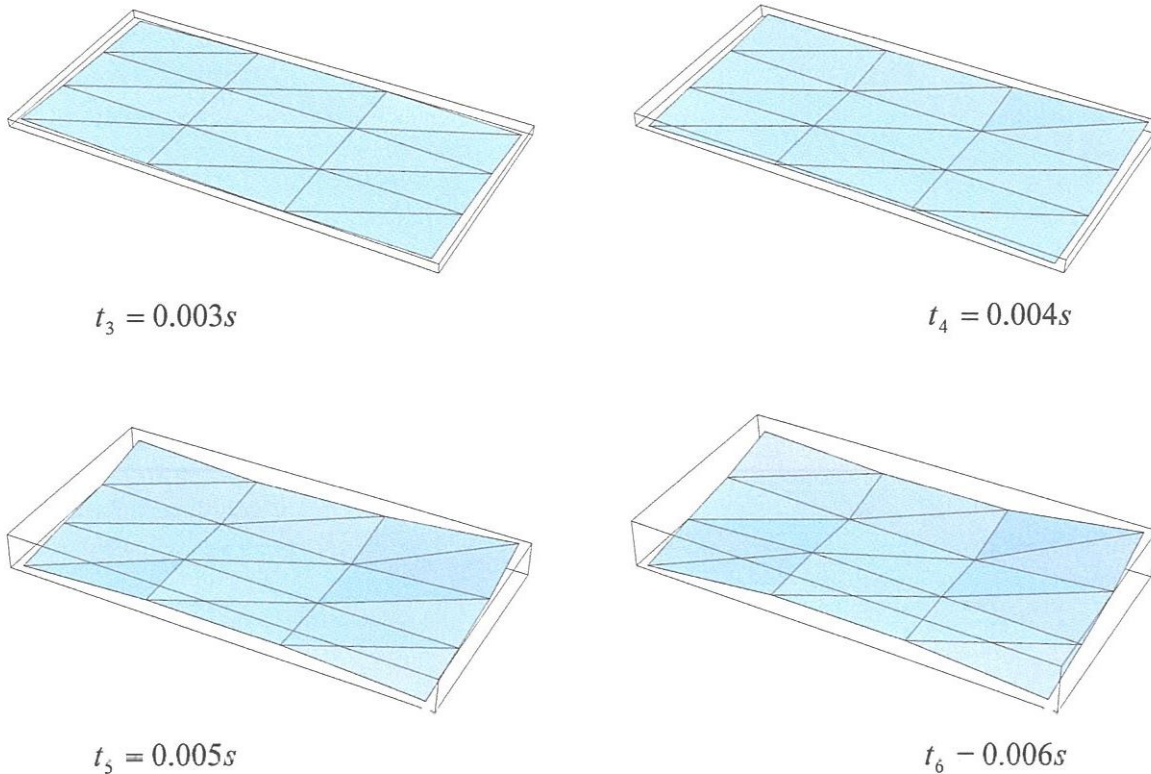


Fig. IV.8 Réponse de la plaque à deux charges harmoniques de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation aux moments t_1, t_2, \dots, t_6

D'une façon générale, si la plaque est soumise à un ensemble de charge sinusoïdale P_i , avec:

$$P_i = P_{0i} \cos(2 \times \pi \times \omega_i \times t), \quad i = 1, \dots, n ; \quad (\text{IV.14})$$

alors la fréquence d'excitation à introduire dans la matrice $[A]$ est définie comme suit [49]:

$$\omega = \sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i^2} . \quad (\text{IV.15})$$

IV.10. Vérification de l'orthogonalité

Le calcul de l'orthogonalité sert à la vérification de l'authenticité des résultats du calcul obtenus. D'après [27, 49], l'orthogonalité pourra se vérifier par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^n M_k w_{ki} w_{kj} = 0, \quad (\text{IV.16})$$

où:

M_k – est la masse de l'élément k de la plaque discrétisée;

w_{ki} – est la valeur de la déformée propre i de la plaque au point k ;

w_{kj} – est la valeur de la déformée propre j de la plaque au point k ,

avec i toujours différent de j .

Exemple: Si la plaque discrétisée en 25 éléments rectangulaires identiques ($n = 25$), avec les mêmes données géométriques et physiques prises dans ce chapitre, donc dans ce cas $M_k = 240 \text{ Kg}$ et pour $\omega_i = \omega_4 = 438.32461697 \text{ Hz}$ et $\omega_j = \omega_6 = 573.201506186 \text{ Hz}$, alors on aura les valeurs des déformées propres w_{k4} et w_{k6} , $k = 1, \dots, 25$ suivantes:

k	Valeurs des déformées propres	
	Déformée propre correspondant à ω_4	Déformée propre correspondant à ω_6
w_1	1	1
w_2	0.3127484231937039	0.5178047968046189
w_3	$8.947335613270 \times 10^{-12}$	0.2198165251669678
w_4	-0.312784423170893	0.5178047968093215
w_5	-0.999999999927533	0.999999999954509
w_6	0.7740600312527691	0.40575250912693267
w_7	0.1709295111206631	0.11432579332001513
w_8	$2.145549112903 \times 10^{-12}$	-0.1918317014322351
w_9	-0.170929511110570	0.11432579332240823
w_{10}	-0.774060031236417	0.4057525091379249
w_{11}	0.6989744601026605	$-9.470935150 \times 10^{-12}$
w_{12}	0.1161461850907476	$-3.233052391 \times 10^{-12}$
w_{13}	$1.097791965958 \times 10^{-12}$	$-5.364526627 \times 10^{-13}$
w_{14}	-0.116146185086052	$-2.088111859 \times 10^{-12}$
w_{15}	-0.696897446019221	$-4.718063686 \times 10^{-13}$
w_{16}	0.7740600312471285	-0.4057525091489988
w_{17}	0.1709295111185587	-0.1143257933309913
w_{18}	$3.773223925294 \times 10^{-12}$	0.19183170142525377

w_{19}	-0.170929511114129	-0.1143257933297483
w_{20}	-0.774060031245118	-0.4057525091403864
w_{21}	0.9999999999442285	-1.0000000000108213
w_{22}	0.3127484231851669	-0.5178047968250807
w_{23}	$3.281522742321 \times 10^{-12}$	-0.2198165251832320
w_{24}	-0.312748423182489	-0.5178047968227567
w_{25}	-0.999999999948148	-1.0000000000010358

Tableau IV.2 Valeurs des déformées propres

D'après (IV.16), on trouve :

$$\sum_{k=1}^{25} M_k w_{ki} w_{kj} = 6.50808 \times 10^{-11} \times M_k = 1.56194 \times 10^{-8} \approx 0.$$

L'orthogonalité est bien vérifiée ce qui indique la fiabilité de la l'approche utilisée, ainsi que l'authenticité des résultats obtenus.

IV.11. Réponse fréquentielle

A partir de la réponse de structure connue due à une excitation extérieure de fréquence supposée inconnue on localise cette fréquence d'excitation. Pour cela, on utilise la transformée de Fourier. Les figures, ci-dessous, montrent la localisation des fréquences d'excitation pour les trois types de chargement suivants:

Premier type: sur la plaque agit une seule excitation de fréquence $\omega = 100\text{Hz}$.

Deuxième type: sur la plaque agit deux excitations de différentes fréquences $\omega_1 = 100\text{Hz}$, $\omega_2 = 200\text{Hz}$.

Troisième type: sur la plaque agit trois excitations de différentes fréquences $\omega_1 = 100\text{Hz}$, $\omega_2 = 200\text{Hz}$, $\omega_3 = 300\text{Hz}$.

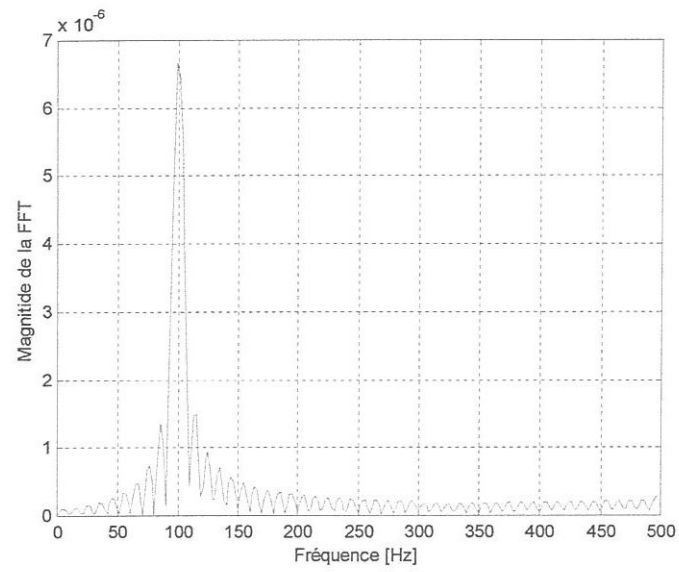


Fig. IV.9 Localisation de la fréquence d'excitation de la charge harmonique agissant sur la plaque

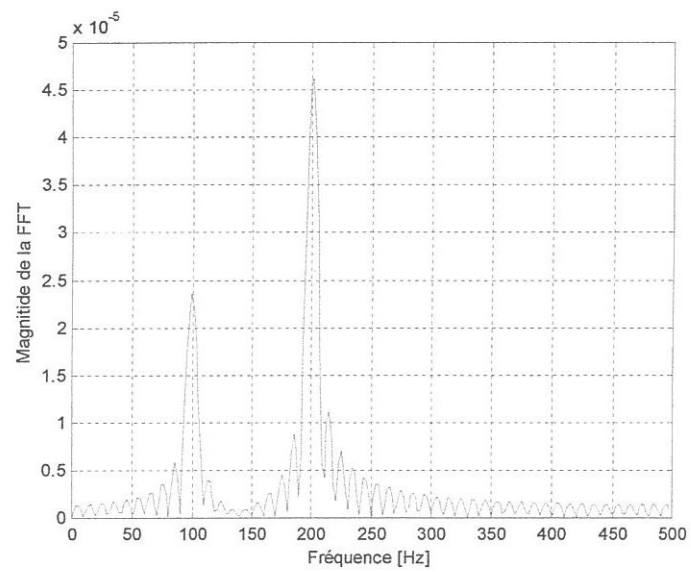


Fig. IV.10 Localisation des fréquences d'excitation de deux charges harmoniques agissant sur la plaque

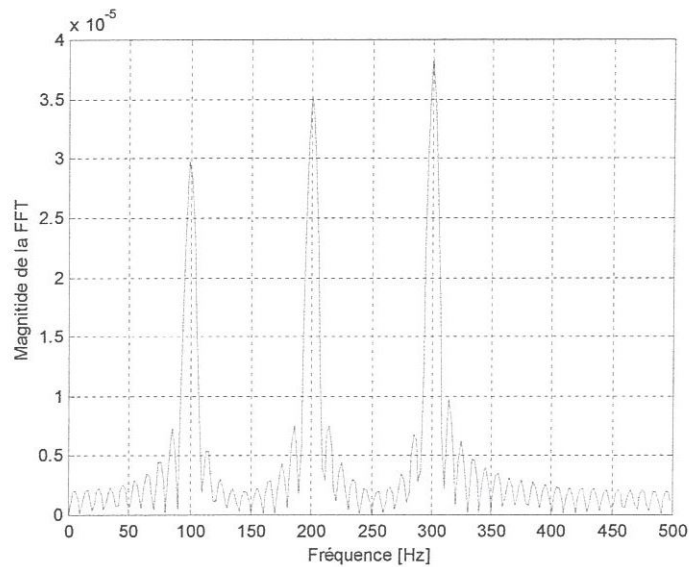


Fig. IV.11 Localisation des fréquences d'excitation de trois charges harmoniques agissant sur la plaque

IV.12. Conclusion du chapitre IV

Dans les chapitres précédents on a exposé l'approche de calcul élaborée pour l'étude dynamique des structures reposant sur milieux élastiques d'une manière générale. Dans ce chapitre, on a appliqué cette approche pour étudier une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de type de Winkler en dynamique. Cette étude comporte la détermination des fréquences et déformées propres de la plaque, ainsi que sa réponse à des charges harmoniques extérieures. Les résultats obtenus certifiés par les différentes vérifications faites montrent la fiabilité de l'approche utilisée.

Chapitre V

Calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique

V.1. Principe de Boussinesq

Le modèle de Winkler a fait son application à la fin du XIX siècle et dans la même période son inadéquation à la réalité a fait apparition, ce qui conduit les spécialistes à envisager d'autres modèles plus proches à la réalité. Dans ce contexte Boussinesq [28] a considéré que le milieu élastique sur lequel repose la structure comme étant un semi-infini élastique caractérisé par un module d'élasticité E_0 et un coefficient de Poisson ν_0 et le calcul se base sur les formules de la théorie d'élasticité. Donc le principe de Boussinesq remplace celui de Winkler, exprimant la relation entre les forces de pression et le tassement de la surface du milieu élastique uniquement au point d'application de la force, par un principe exprimant la relation entre les forces de pression et le tassement de la surface du milieu élastique à n'importe quel point.

V.2. Déplacements de la surface du semi-infini élastique dus à l'action d'une force unitaire

V.2.1. Cas de la force unitaire

La fonction de Green concernant la détermination du déplacement du point $M(x, y)$ situé sur la surface du semi-infini élastique sous l'action d'une force unitaire uniformément répartie sur un élément de surface Ω est donnée par l'expression suivante [86]:

$$w_M(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (\text{V.1})$$

où:

ν_0 – coefficient de Poisson du semi-infini élastique ;

E_0 – module d'élasticité du semi-infini élastique ;

Ω – domaine de l'élément de surface du semi-infini élastique.

V.2.2. Forme rectangulaire de l'élément de surface Ω

Puisque nos calculs vont concerner uniquement les plaques rectangulaires, alors on tient compte uniquement de la forme rectangulaire des éléments de surface Ω , (fig. V.1).

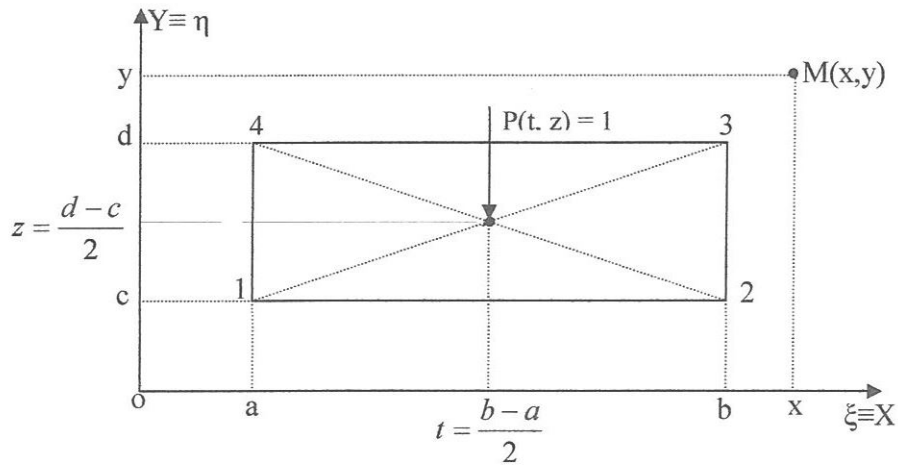


Fig. V.1 élément de surface Ω ayant la forme rectangulaire

Le résultat de l'évaluation de l'intégrale définie par l'expression (V.1) lorsque l'élément de surface Ω ayant la forme rectangulaire (fig. V.1), $\xi|_a^b$ et $\eta|_c^d$, est donné par l'expression suivante [23]:

$$\begin{aligned}
 w_M(x, y) = & \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Delta_x} \left[\frac{y-d}{\Delta_y} \ln \frac{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}} + \right. \\
 & + \frac{y-c}{\Delta_y} \ln \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\
 & + \frac{x-b}{\Delta_y} \ln \frac{y-d + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{y-c + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\
 & \left. + \frac{x-a}{\Delta_y} \ln \frac{y-c + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{y-d + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}} \right], \tag{V.2}
 \end{aligned}$$

où:

$$\Delta_x = b - a;$$

$$\Delta_y = d - c.$$

Le rectangle 1234 représentant Ω (fig. V.1), est le domaine d'application de la charge unitaire;

(x, y) – coordonnées du point M .

L'expression (V.2) est la fonction de Green servant à déterminer les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique en contact avec la plaque rectangulaire dus aux charges extérieures transmises par la plaque. Cette expression rentre dans le système d'équations canoniques général, défini dans le chapitre III, formulé pour le calcul dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique.

V.3. Méthode de calcul

Le principe de l'approche de calcul utilisée est la méthode de Gemochkin, définie dans le chapitre III, avec l'utilisation du même principe de modélisation et mêmes hypothèses prises dans le chapitre IV.

V.4. Problème posé

Le problème posé est de déterminer les forces de réactions dans la zone de contact entre la plaque et le semi-infini élastique, les fréquences et déformées propres de la plaque, ainsi que sa réponse à des charges harmoniques extérieures.

V.5. Formulation du système d'équations canoniques

Le système d'équations canoniques de l'approche proposée permettant le calcul de la plaque reposant sur semi-infini élastique en dynamique vaut [37]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (v_{ik} + w_{ik}) X_k(t) - \sum_{k=1}^n w_{ik} J_k(t) + \ell_{ix} \varphi_{0x}(t) + \ell_{iy} \varphi_{0y}(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{ix} = I_{0x} \ddot{\varphi}_{0x}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \ell_{iy} = I_{0y} \ddot{\varphi}_{0y}(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] = M \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (\text{V.3})$$

Le paramètre v_{ik} représente le déplacement de la surface du semi-infini élastique au point i du à l'effort X_k appliqué au point k et donnée par l'expression suivante [23, 45]:

$$v_{ik} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Delta_x} F_{ik}, \quad (\text{V.4})$$

$$F_{ik} = \left[\frac{y-d}{\Delta_y} \ln \frac{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}} + \frac{y-c}{\Delta_y} \ln \frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{x-b}{\Delta_y} \ln \frac{y-d+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{y-c+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}} + \frac{x-a}{\Delta_y} \ln \frac{y-c+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{y-d+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}} \right],$$

avec x et y : coordonnées du point M où se détermine le déplacement;

$(b-a)/2$ et $(d-c)/2$: coordonnées du centre de l'élément sollicité par la charge unitaire supposée uniformément répartie sur l'élément de surface Ω ;

Le paramètre J_i représente la force d'inertie appliquée uniquement sur la plaque (puisque la masse du semi-infini élastique est négligée) et donnée par l'expression suivante [49]:

$$J_i(t) = J_i e^{i\omega t} = -M_i \frac{d^2 W_i(t)}{dt^2} = -M_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} = M_i \omega^2 v_i e^{i\omega t} \Rightarrow J_i = M_i \omega^2 v_i, \quad (V.5)$$

dans ce cas:

$$v_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^n F_{ik} X_k \quad (V.6)$$

Le reste des paramètres du système (V.3) sont définis dans les chapitres III et IV.

Tenons compte des expressions (V.4), (V.5) et (V.6), le système (V.3) pour les vibrations libres prend la forme matricielle suivante:

$$[A]\{X\} = \{0\}, \quad (V.7)$$

où:

$$\langle X \rangle = \langle X_1; X_2; \dots; X_n; \varphi_{ox}; \varphi_{oy}; u_0 \rangle;$$

$$[A] = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,n} & \ell_{1,x}\lambda & \ell_{1,y}\lambda & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n,1} & \dots & K_{n,n} & \ell_{n,x}\lambda & \ell_{n,y}\lambda & \lambda \\ K_{n+1,1} & \dots & K_{n+1,n} & \frac{1}{3}Mb^2\omega^2\lambda & 0 & 0 \\ K_{n+2,1} & \dots & K_{n+2,n} & 0 & \frac{1}{3}Ma^2\omega^2\lambda & 0 \\ K_{n+3,1} & \dots & K_{n+3,n} & 0 & 0 & M\omega^2\lambda \end{bmatrix}, \quad (V.8)$$

avec:

$$\lambda = \frac{\pi E_0 \Delta_x}{1-\nu_0^2};$$

Les expressions des termes $K_{i,j}$ de la matrice $[A]$ sont données dans l'annexe 2 vu leur complexité.

V.6. Détermination des fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions finies ($2a \times 2b$), de masse M , et d'épaisseur h , caractérisée par son module d'élasticité E et son coefficient de Poisson ν reposant sur semi-infini élastique caractérisé par son module d'élasticité E_0 et son coefficient de Poisson ν_0 . La discrétisation de la plaque en n éléments rectangulaires identiques est faite de telle façon que l'encastrement fictif soit au niveau de son centre (fig. V.2). Le contact continu entre la plaque et le semi-infini élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points représentant les centres de gravités des éléments (fig. V.2). Les efforts de liaisons $X_i(t)$ sont appliqués sur la plaque et sur le semi-infini élastique, tandis que les forces d'inertie $J_i(t)$ sont appliquées uniquement sur la plaque, du fait que la masse du milieu élastique n'est pas tenue en considération.

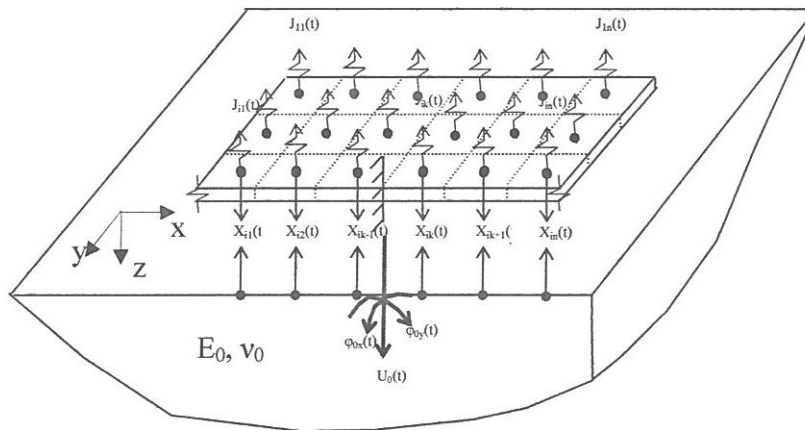


Fig. V.2 Discrétisation du système plaque reposant sur semi-infini élastique

Les fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique représentent les racines de l'équation suivante admettant une seule variable ω :

$$\det[A] = 0, \tag{V.9}$$

$[A]$ – matrice donnée par (V.8).

V.6.1. Application numérique

Considérons les données géométriques et physiques de la plaque et du semi-infini élastique suivantes: $a = 2\text{ m}$; $b = 1\text{ m}$; $\rho_{\text{plaque}} = 2500\text{ Kg/m}^3$; $E = 3 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$; $h = 0.3\text{ m}$; $\nu = 1/6$; $E_0 = 40 \times 10^6\text{ N/m}^2$; $\nu_0 = 1/3$.

La détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque se fait par l'introduction de ces données dans le système matriciel (V.7), puis par la résolution de l'équation (V.9) admettant une seule variable ω . Les racines de l'équation (V.9) trouvées représentent les valeurs des fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique. Les valeurs trouvées sont données dans ce tableau avec la considération de trois cas de maillage de la plaque ($n = 9$, $n = 16$, $n = 25$).

i	Valeurs des fréquences propres ω en (Hz)		
	Plaque discrétisée en 9 éléments	Plaque discrétisée en 16 éléments	Plaque discrétisée en 25 éléments
1	105.06	106.04	106.68
2	139.40	143.28	145.43
3	172.24	177.20	180.33
4	635.15	576.66	558.48
5	683.40	675.46	671.19
6	766.03	739.18	712.52
7	⋮	1303.83	1546.42
8		1912.88	2505.52
9		⋮	2871.84
10	–		3372.20
11	–		4159.67
12	–		4275.75
13	–		4360.70
14	–		4487.09
15	–		4659.45
16	–		5459.10
17	–	–	⋮

Tableau V.1 Valeurs des fréquences propres de la plaque en (Hz)

Remarque

D'après le tableau V.1, on constate une bonne convergence des valeurs des fréquences propres de la plaque reposant sur semi-infini élastique pour les trois cas de maillage de la plaque. Cette convergence est illustrée graphiquement dans le schéma suivant:

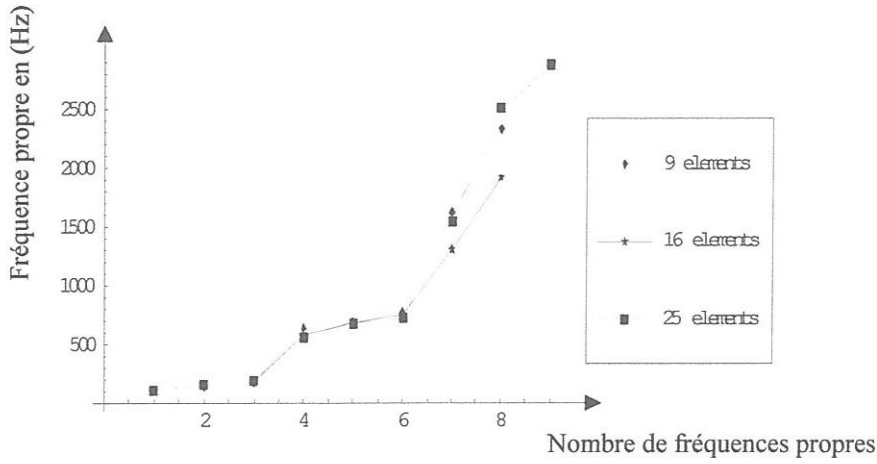


Fig. V.3 Convergence des valeurs des fréquences propres selon le maillage de la plaque

V.6.2. Comparaison des valeurs des fréquences propres des modèles

D'après les valeurs des fréquences propres obtenues par l'application du modèle de Winkler dans le chapitre IV et celles obtenues par l'application du modèle du semi-infini élastique dans ce chapitre, on constate un rapprochement des résultats. Cette comparaison des valeurs obtenues par les deux différents modèles est illustrée dans la figure suivante :

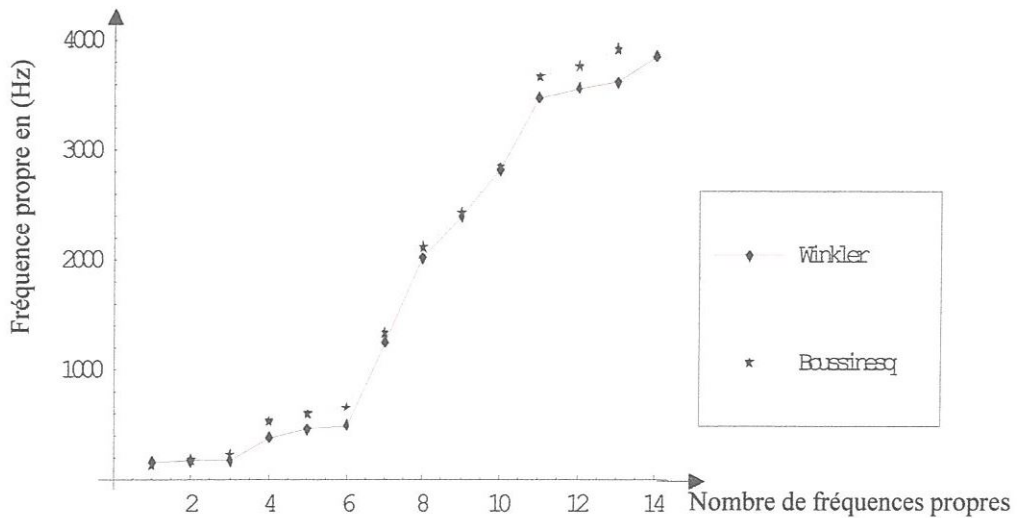


Fig. V.4 Comparaison des valeurs des fréquences propres obtenues par des deux modèles

V.7. Détermination des déformées propres de la plaque reposant sur semi-infini élastique

Les déformées propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique se déterminent après avoir calculé les valeurs des fréquences propres. D'après [11, 27, 49], pour déterminer la déformée propre i de la plaque rectangulaire on doit remplacer la valeur de fréquence propre correspondante ω_i dans le système (V.7) et le système obtenu sera réduit d'une ligne et d'une colonne, cette dernière devient le vecteur libre du nouveau système d'équations. La résolution de ce nouveau système donne les valeurs des inconnues X_i , φ_{ox} , φ_{oy} et u_0 et les déformées propres de la plaque rectangulaire se déterminent par l'expression suivante:

$$w_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^n F_{ik} X_k ; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{V.10})$$

Par excmplc, pour $n = 16$, la première déformée a été déterminée comme suite :

– Remplaçons dans (V.7) la valeur de ω par $\omega_1 = 106.045795 \text{ Hz}$, obtenons une matrice purement numérique;

– Egalons l'une des inconnues du vecteur $\{X\}$ à 1, puis supprimons sa ligne correspondante et par conséquent sa colonne correspondante devient le vecteur libre du nouveau système matriciel. Après résolution de ce nouveau système on obtient les valeurs des inconnues restantes suivantes:

$$X_1 = 1N \quad X_2 = 0.7291N \quad X_3 = 0.7286N \quad X_4 = 0.9947N$$

$$X_5 = 0.7167N \quad X_6 = 0.5084N \quad X_7 = 0.5091N \quad X_8 = 0.7198N$$

$$X_9 = 0.7163N \quad X_{10} = 0.5081N \quad X_{11} = 0.5083N \quad X_{12} = 0.7176N$$

$$X_{13} = 0.9972N \quad X_{14} = 0.7270N \quad X_{15} = 0.7276N \quad X_{16} = 0.9999N$$

Les valeurs de la déformée propre de la plaque sont déterminées comme suit:

$$w_1 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{1k} X_k = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{1,1}X_1 + \dots + F_{1,16}X_{16}) = 8.3349 \times 10^{-5} m$$

$$w_2 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{2k} X_k = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{2,1}X_1 + \dots + F_{2,16}X_{16}) = 8.3987 \times 10^{-5} m$$

$$w_3 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{3k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{3,1} X_1 + \dots + F_{3,16} X_{16}) = 8.3973 \times 10^{-5} m$$

$$w_4 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{4k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{4,1} X_1 + \dots + F_{4,16} X_{16}) = 8.3231 \times 10^{-5} m$$

$$w_5 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{5k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{5,1} X_1 + \dots + F_{5,16} X_{16}) = 8.6091 \times 10^{-5} m$$

$$w_6 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{6k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{6,1} X_1 + \dots + F_{6,16} X_{16}) = 8.8047 \times 10^{-5} m$$

$$w_7 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{7k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{7,1} X_1 + \dots + F_{7,16} X_{16}) = 8.8072 \times 10^{-5} m$$

$$w_8 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{8k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{8,1} X_1 + \dots + F_{8,16} X_{16}) = 8.6165 \times 10^{-5} m$$

$$w_9 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{9k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{9,1} X_1 + \dots + F_{9,16} X_{16}) = 8.6063 \times 10^{-5} m$$

$$w_{10} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{10k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{10,1} X_1 + \dots + F_{10,16} X_{16}) = 8.8023 \times 10^{-5} m$$

$$w_{11} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{11k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{11,1} X_1 + \dots + F_{11,16} X_{16}) = 8.8051 \times 10^{-5} m$$

$$w_{12} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{12k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{12,1} X_1 + \dots + F_{12,16} X_{16}) = 8.6148 \times 10^{-5} m$$

$$w_{13} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{13k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{13,1} X_1 + \dots + F_{13,16} X_{16}) = 8.3259 \times 10^{-5} m$$

$$w_{14} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{14k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{14,1} X_1 + \dots + F_{14,16} X_{16}) = 8.3913 \times 10^{-5} m$$

$$w_{15} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{15k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{15,1} X_1 + \dots + F_{15,16} X_{16}) = 8.3946 \times 10^{-5} m$$

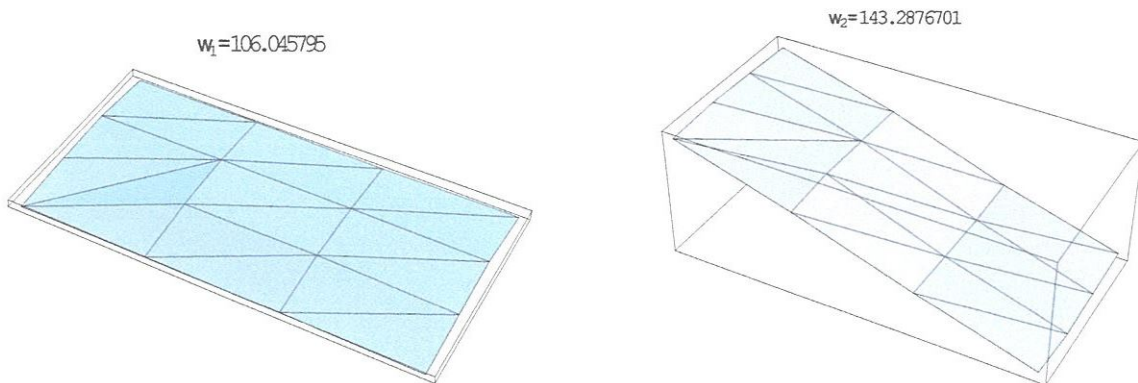
$$w_{16} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^{16} F_{16k} X_i = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} (F_{16,1} X_1 + \dots + F_{16,16} X_{16}) = 8.3364 \times 10^{-5} m$$

avec: $E_0 = 40 \times 10^6 N/m^2$, $\nu_0 = 1/3$, $\Delta_x = 1 m$, et les valeurs de F_{ik} , $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, n$; sont données dans le tableau suivant:

k \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4.81	1.08	0.50	0.33	1.85	0.93	0.49	0.33	0.97	0.71	0.45	0.31	0.66	0.55	0.40	0.29
2	1.08	4.81	1.08	0.50	0.93	1.85	0.93	0.49	0.71	0.97	0.71	0.45	0.55	0.66	0.55	0.40
3	0.50	1.08	4.81	1.08	0.49	0.93	1.85	0.93	0.45	0.71	0.97	0.71	0.40	0.55	0.66	0.55
4	0.33	0.50	1.08	4.81	0.33	0.49	0.93	1.85	0.31	0.45	0.71	0.97	0.29	0.40	0.55	0.66
5	1.85	0.93	0.49	0.33	4.81	1.08	0.50	0.33	1.85	0.93	0.49	0.33	0.97	0.71	0.45	0.31
6	0.93	1.85	0.93	0.49	1.08	4.81	1.08	0.50	0.93	1.85	0.93	0.49	0.71	0.97	0.71	0.45
7	0.49	0.93	1.85	0.93	0.50	1.08	4.81	1.08	0.49	0.93	1.85	0.93	0.45	0.71	0.97	0.71
8	0.33	0.49	0.93	1.85	0.33	0.50	1.08	4.81	0.33	0.49	0.93	1.85	0.31	0.45	0.71	0.97
9	0.97	0.71	0.45	0.31	1.85	0.93	0.49	0.33	4.81	1.08	0.50	0.33	1.85	0.93	0.49	0.33
10	0.71	0.97	0.71	0.45	0.93	1.85	0.93	0.49	1.08	4.81	1.08	0.50	0.93	1.85	0.93	0.49
11	0.45	0.71	0.97	0.71	0.49	0.93	1.85	0.93	0.50	1.08	4.81	1.08	0.49	0.93	1.85	0.93
12	0.31	0.45	0.71	0.97	0.33	0.49	0.93	1.85	0.33	0.50	1.08	4.81	0.33	0.49	0.93	1.85
13	0.66	0.55	0.40	0.29	0.97	0.71	0.45	0.31	1.85	0.93	0.49	0.33	4.81	1.08	0.50	0.33
14	0.55	0.66	0.55	0.40	0.71	0.97	0.71	0.45	0.93	1.85	0.93	0.49	1.08	4.81	1.08	0.50
15	0.40	0.55	0.66	0.55	0.45	0.71	0.97	0.71	0.49	0.93	1.85	0.93	0.50	1.08	4.81	1.08
16	0.29	0.40	0.55	0.66	0.31	0.45	0.71	0.97	0.33	0.49	0.93	1.85	0.33	0.50	1.08	4.81

Tableau V.2 Valeurs de la fonction F_{ik}

Ces valeurs de w_i trouvées nous permettent de tracer la première déformée propre de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique. De la même façon on trouve les autres déformées propres qui sont présentées dans la figure suivante:



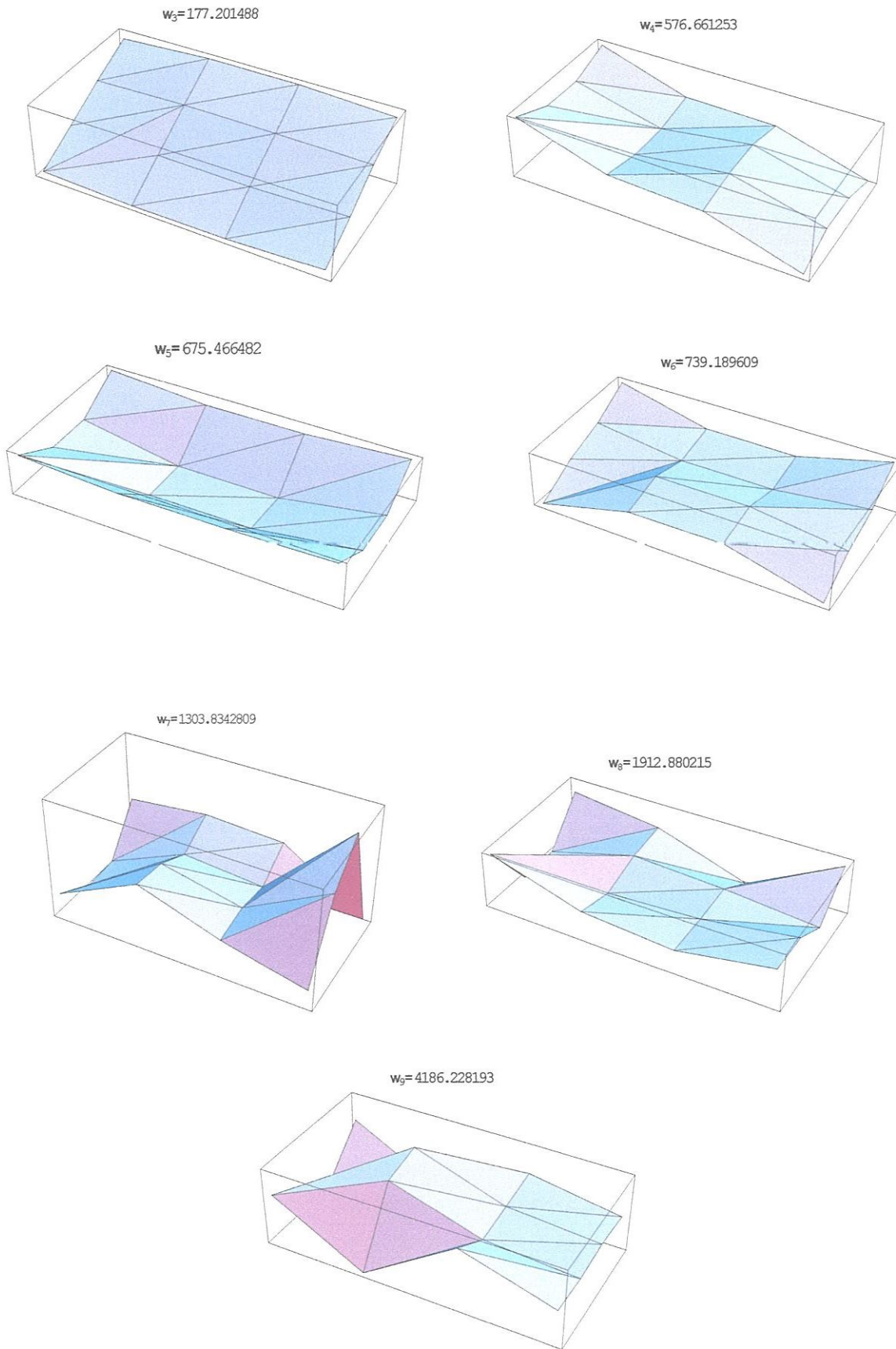


Fig. V.5 Déformées propres de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique

V.8. Vibration forcée de la plaque reposant sur semi-infini élastique due aux différents types de charges externes

On traite dans ce paragraphe la réponse d'une plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique à des charges harmoniques extérieures. Pour ce faire, on applique notre approche permettant de déterminer, non pas seulement, la déflexion de la plaque causée par des excitations externes, mais aussi les efforts internes dans ses sections et par conséquent son état de contraintes.

V.8.1. Réponse de la plaque à une excitation harmonique appliquée à un point

Soit une plaque rectangulaire de dimensions finies $(2a \times 2b)$, de masse M , caractérisée par sa rigidité cylindrique D reposant sur semi-infini élastique défini par son module d'élasticité E_0 et son coefficient de Poisson ν_0 . Le système étudié, plaque reposant sur semi-infini élastique, est discrétisé en un nombre d'éléments rectangulaires identiques (fig. V.6). La plaque est soumise à une charge harmonique perpendiculaire à son plan appliquée en un point.

La charge harmonique est exprimée par:

$$P = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \quad (\text{V.11})$$

où:

P_0 – amplitude en (N);

ω – fréquence d'excitation en (Hz);

t – temps d'excitation en (s).

La réponse de la plaque reposant sur semi-infini élastique, c'est-à-dire ses déflexions dans le temps de son excitation par la charge harmonique, se détermine par la résolution du système d'équations suivant:

$$[A]\{X\} = \{F\}, \quad (\text{V.12})$$

où:

$[A]$ – matrice définie par (V.8);

$\{X\}$ – vecteur des inconnues représentant les forces de réaction dans la zone de contact;

$\{F\}$ – vecteur sollicitations, défini comme suit :

$\langle F \rangle = \langle \Delta_{1p}; \Delta_{2p}; \Delta_{3p}; \dots; \Delta_{np} \rangle;$

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n w_{ik} P_k.$$

L'introduction des données physiques et géométriques de la structure étudiée suivantes:

$a = 2\text{ m}$; $b = 1\text{ m}$; $\rho_{\text{plaque}} = 2500\text{ Kg/m}^3$; $E = 3 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$; $h = 0.3\text{ m}$; $\nu = 1/6$; $\nu_0 = 1/3$; $\Delta_x = 1\text{ m}$,
 $E_0 = 40 \times 10^6\text{ N/m}^2$; $\nu_0 = 1/3$; $P_0 = 5000\text{ N}$; $\omega = 400\text{ Hz}$, dans le système (V.12) nous permet
d'obtenir les valeurs des forces de réaction X_i dans la zone de contact à chaque instant t .

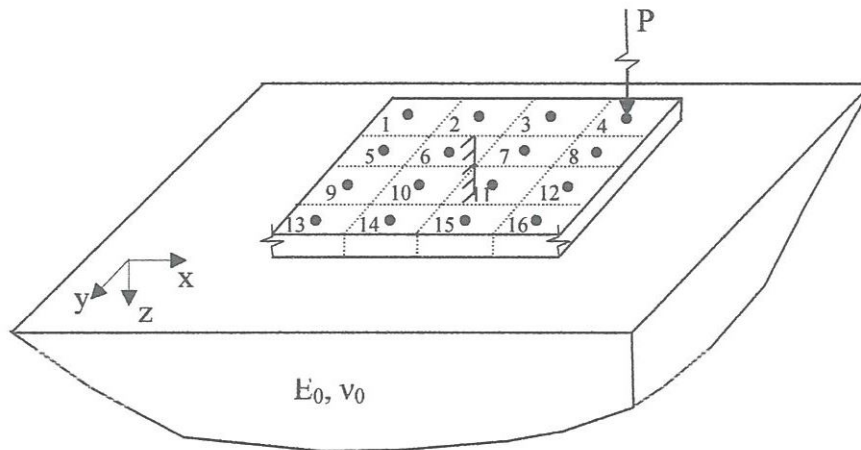
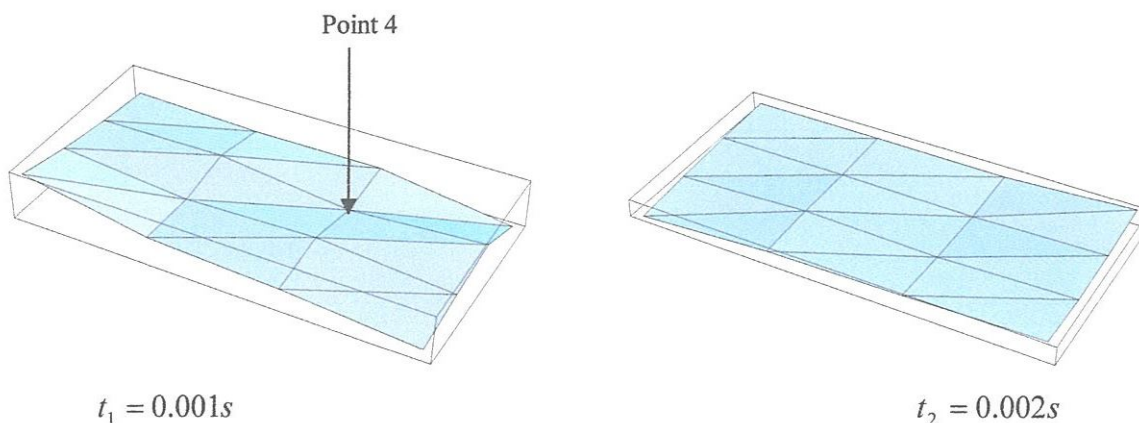


Fig. V.6 Plaque discrétisée en 16 éléments rectangulaires identiques et soumise à une charge Harmonique

La détermination des valeurs des efforts X_i , $i = 1, \dots, 16$ permet de déterminer la réponse de la plaque à chaque instant d'excitation par la même façon expliquée dans le cas de la détermination des déformées propres.

La figure suivante illustre la réponse de la plaque aux instants: $t_1 = 0.001\text{ s}$, $t_2 = 0.002\text{ s}$, ... en considérant que l'excitation harmonique est appliquée au point 4 (fig. V.6).



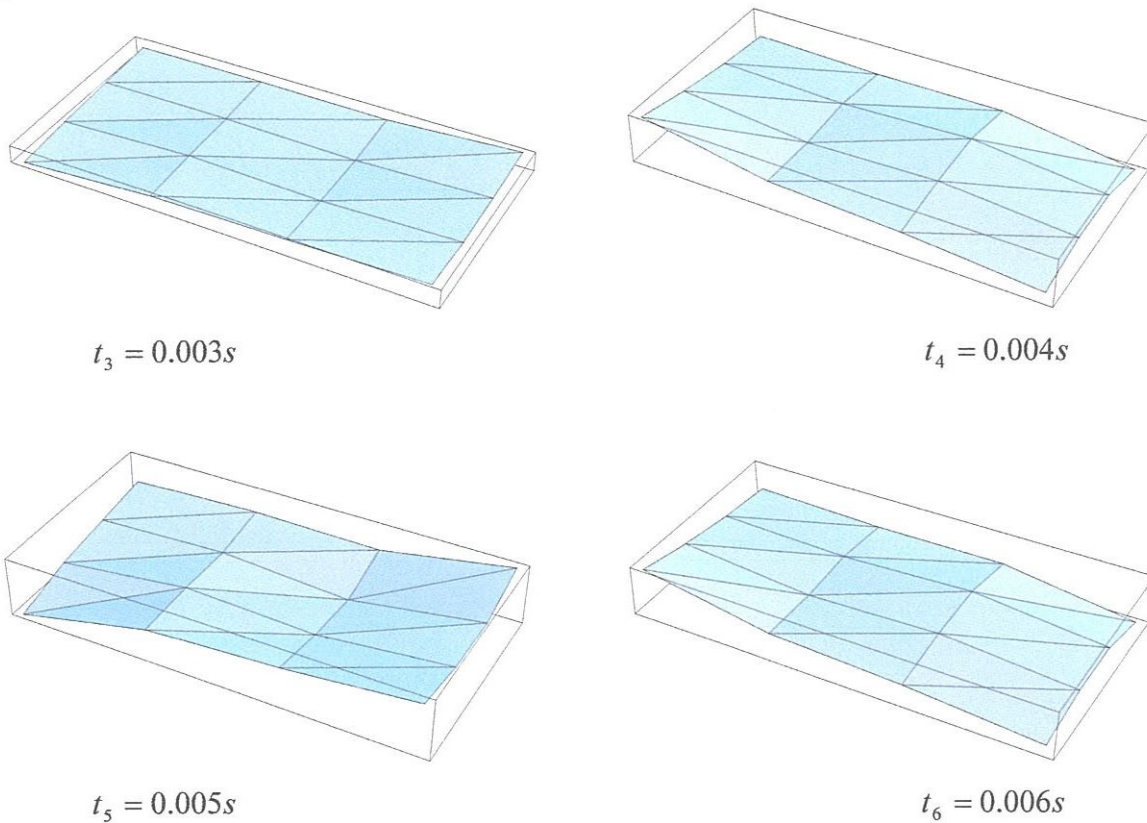


Fig. V.7 Réponse de la plaque à une charge harmonique aux moments t_1, t_2, \dots, t_6

V.8.2. Réponse de la plaque à des excitations harmoniques appliquées à plusieurs points de mêmes ou de différentes fréquences

Ce cas comporte plusieurs variantes de chargement :

Prenons le cas où la plaque est sollicitée par deux charges sinusoïdales de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation. Considérons les mêmes données géométriques et physiques prises dans le paragraphe précédent, sauf que la plaque est soumise à deux excitations de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation appliquées en deux points. Les deux charges s'expriment par:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_1 \times t), \\ P_2 = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_2 \times t). \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

A noter dans ce cas deux points:

- Le premier point c'est que la fréquence d'excitation à introduire dans la matrice du système d'équation (V.12) est définie par la relation suivante [27, 49] : $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$;
- Le deuxième point c'est que:

$\Delta_{ip} = w_{ik_1} P_{k_1} + w_{ik_2} P_{k_2}$, ici k_1 et k_2 sont les points où les excitations sont appliquées.

La figure suivante illustre la réponse de la plaque à ce type de chargement avec la considération que $\omega_1 = 400 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 500 \text{ Hz}$ et les deux excitations sont appliquées aux points 4 et 14.

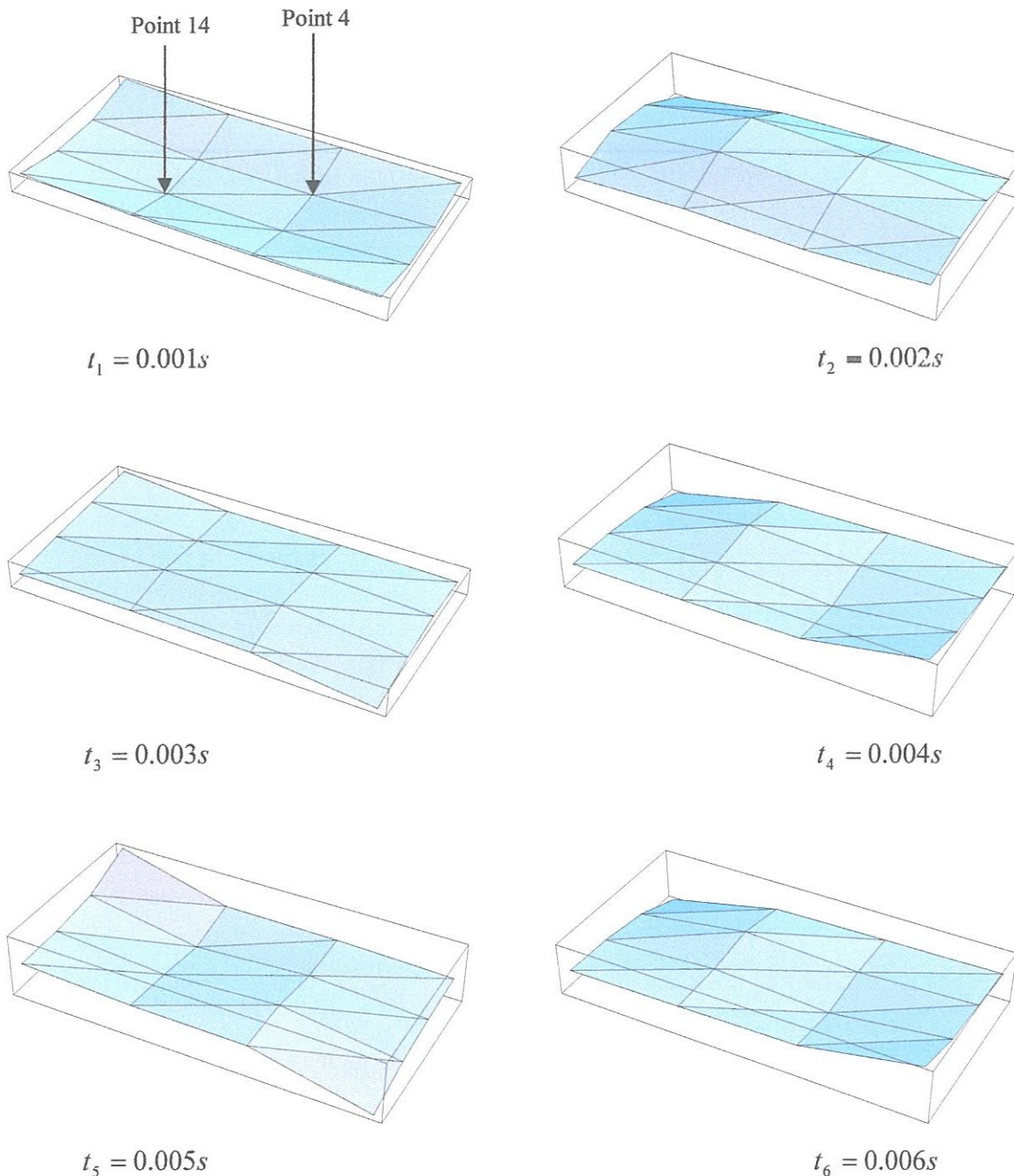


Fig. V.8 Réponse de la plaque à deux charges harmoniques de même amplitude et de différentes fréquences d'excitation

V.9. Vérification de l'orthogonalité

La vérification de l'orthogonalité pour ce type du milieu élastique se fait de la même façon définie dans le chapitre précédent. Par exemple, si la plaque est discrétisée en 16 éléments identiques ($n=16$), avec toujours les mêmes données géométriques et physiques prises dans ce chapitre, on trouve que $M_k = 375 \text{ Kg}$. Pour $\omega_i = \omega_4 = 576.661253 \text{ Hz}$ et $\omega_j = \omega_5 = 675.466482 \text{ Hz}$ on aura les valeurs des w_{ki} et w_{kj} suivantes:

k	Valeurs des déformées propres	
	Déformée propre correspondant à ω_4	Déformée propre correspondant à ω_5
w_1	$3.416375213797549 \times 10^{-5}$	$3.939970417497923 \times 10^{-5}$
w_2	$1.7042192771136875 \times 10^{-6}$	$3.1225975403878776 \times 10^{-5}$
w_3	$-1.49997861356608 \times 10^{-6}$	$3.15523175844874 \times 10^{-5}$
w_4	$-3.22782034122754 \times 10^{-5}$	$3.9159543162172416 \times 10^{-5}$
w_5	$1.812664374269701 \times 10^{-5}$	$1.4049185838746973 \times 10^{-5}$
w_6	$-7.105343474848693 \times 10^{-6}$	$-4.824340725318758 \times 10^{-6}$
w_7	$6.868830010227415 \times 10^{-6}$	$-4.55056566376855 \times 10^{-6}$
w_8	$-1.797266601350464 \times 10^{-5}$	$1.2627501867813819 \times 10^{-5}$
w_9	$1.8001666946011944 \times 10^{-5}$	$1.3307332110168863 \times 10^{-5}$
w_{10}	$-6.990023713333789 \times 10^{-6}$	$-4.179704546265121 \times 10^{-6}$
w_{11}	$7.0170401311795165 \times 10^{-6}$	$-3.804806156034639 \times 10^{-6}$
w_{12}	$-1.80042832968234 \times 10^{-5}$	$1.2208283376770601 \times 10^{-5}$
w_{13}	$3.352159855767053 \times 10^{-5}$	$3.65019439066084 \times 10^{-5}$
w_{14}	$1.7137497451960885 \times 10^{-6}$	$3.111028859320556 \times 10^{-5}$

w_{15}	$-1.366393128852175 \times 10^{-6}$	$3.114262681888091 \times 10^{-5}$
w_{16}	$-3.365788632983405 \times 10^{-5}$	$3.4742345961621366 \times 10^{-5}$

Tableau V.3 Valeurs des déformées propres

D'après (IV.16), on trouve :

$$\sum_{k=1}^{16} M_k w_{ki} w_{kj} = 2.05949 \times 10^{-10} \times M_k = 7.72307 \times 10^{-8} \approx 0 .$$

On constate une bonne vérification de l'orthogonalité, ce qui indique l'authenticité des résultats obtenus par cette approche pour ce type de milieu élastique.

V.10. Réponse fréquentielle

La localisation des fréquences d'excitation s'est faite par la transformée de Fourier, en utilisant le programme Matlab, pour les types de chargement suivants:

Premier type: sur la plaque agit une seule excitation de fréquence $\omega = 100Hz$;

Deuxième type: sur la plaque agit deux excitations de différentes fréquences $\omega_1 = 100Hz, \omega_2 = 200Hz$.

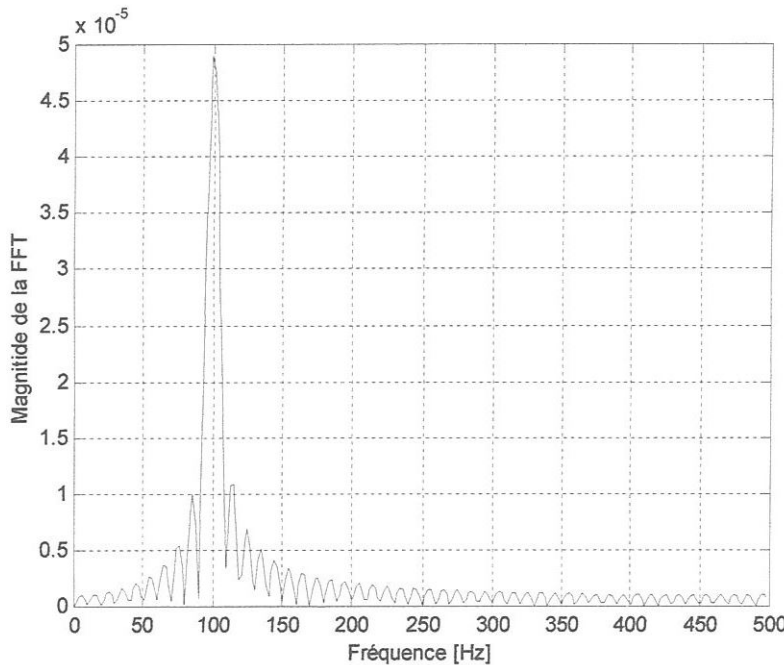


Fig. V.9 Localisation de la fréquence d'excitation de la charge harmonique agissant sur la plaque

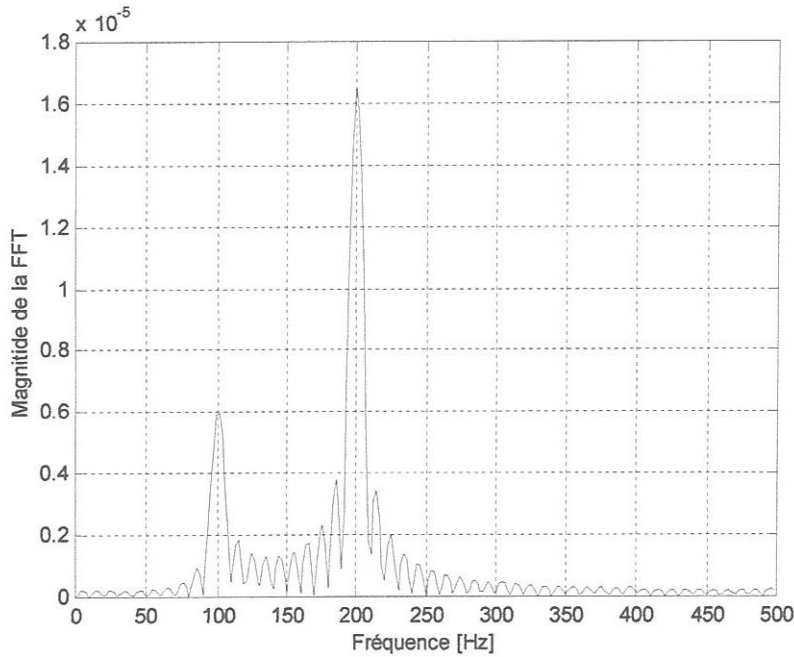


Fig. V.10 Localisation des fréquences d'excitation de deux charges harmoniques agissant sur la Plaque

V.11. Comparaison des résultats

Dans le but de savoir la fiabilité de l'approche utilisée pour l'étude dynamique de la plaque reposant sur milieu élastique, nous avons procédé à la comparaison suivante:

Une étude similaire est faite par BORODASHEV [15], dans laquelle il traite une plaque carrée rigide reposant sur semi-infini élastique en dynamique. L'auteur a déterminé le déplacement maximal u_0 , ainsi que l'angle de rotation maximal φ du bloc rigide lors de sa vibration par les expressions suivantes:

$$b_0 = K_d b_{ct}^Q; \quad (V.14)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta) - \chi}. \quad (V.15)$$

Avec:

$$b_{ct}^Q = \frac{Q}{8(1 - \varepsilon^2)\mu R_n}, \quad (V.16)$$

Q – charge ponctuelle appliquée sur la plaque rigide;

$$\varepsilon^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}; \quad (V.17)$$

$$R_n = \beta F^{1/2}. \quad (V.18)$$

μ et ν – module d'élasticité et coefficient de Poisson du semi-infini élastique;

F – surface de la plaque;

β – est donné par le tableau suivant [13]:

Surface Ω	α	β
Cercle	0.5642	0.5642
Carrée	0.5902	0.5772
Ellipse	0.5984	0.5813

Tableau V.4 Valeurs de α et β

$$K_d = \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{1 - 2\chi \cos(\delta) + \chi^2}}; \quad (V.19)$$

$$\chi = \frac{k^2 M^*}{8(1 - \varepsilon^2)\gamma_0}; \quad M^* = \frac{M}{\rho R_n^3}; \quad (V.20)$$

$$k = \omega R_n \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (V.21)$$

M – masse totale de la plaque;

ρ – masse volumique du semi-infini élastique.

δ et γ_0 sont donnés par le tableau suivant [14]:

k	γ_0			δ		
	0.00	0.25	0.38	0.00	0.25	0.38
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	1.0139	1.0121	1.0037	0.2135	0.1968	0.2079
0.50	1.0579	1.0498	1.0402	0.4235	0.3908	0.4441
0.75	1.1380	1.1177	1.0848	0.6243	0.5774	0.8152
1.00	1.2608	1.2186	1.1776	0.8072	0.7526	0.8061
1.25	1.4319	1.3646	1.2917	0.9627	0.9005	0.9812
1.50	1.6487	1.5469	1.4515	1.0885	1.0239	1.1166

Tableau V.5 Tableau donnant les valeurs de δ et γ_0

L'auteur de ce travail a pris les données géométriques et physiques suivantes: $\omega = 60 \text{ Hz}$; $a = 2 \text{ m}$; $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$; $M = 1800 \text{ kg}$; $P = 1600 \text{ kg}$; $\nu = 0.37$; $\mu = 120 \text{ kg/m}^2$, puis les a introduit dans les expressions (V.14) à (V.21) et il a trouvé les résultats suivants:

$$b_0 = 0.264 \text{ mm}; \quad \varphi = 1.35 \text{ rad}.$$

Si on adopte les mêmes données et on refait le même calcul par notre approche, on trouve que la plaque vibre comme un bloc rigide avec un déplacement maximal : $u_0 = 0.221 \text{ mm}$.

La différence entre les deux approches presque négligeable avec une l'erreur de: $\varepsilon = b_0 - u_0 = 0.043 \text{ mm}$. Cette comparaison montre la certitude et la précision des résultats de calcul de notre approche conçue pour l'étude dynamique des structures reposant sur milieu élastique.

V.12. Conclusion du chapitre V

Dans ce chapitre comportant l'étude dynamique d'une plaque reposant sur milieu élastique de modèle plus compliqué par rapport à celui pris dans le chapitre IV. La complexité de ce modèle réside dans le fait qu'il tient en compte de plusieurs facteurs essentiels que néglige le premier. Donc, l'introduction de ces facteurs dans le calcul rend les résultats obtenus plus fiables et plus proches à la réalité. Certaines vérifications de base sont faites, à noter l'orthogonalité, la localisation des fréquences d'excitation, ainsi que la comparaison des résultats avec ceux obtenus par d'autres approches. Toutes ces vérifications montrent la certitude des résultats obtenus et par conséquent la fiabilité de l'approche proposée.

Conclusion générale

L'étude apportée dans ce travail concernant le calcul dynamique des plaques de forme rectangulaire de dimensions et de rigidité finies reposant sur milieu élastique de n'importe quel type est faite par une approche semi analytique. Cette étude comporte la détermination des fréquences et déformées propres de la plaque, ainsi que sa réponse à des charges externe harmoniques appliquées normalement à son plan moyen.

La discrétisation du système étudié (plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique) se fait par la division de la plaque en un nombre d'éléments rectangulaires identiques dont le nombre est proportionnel au degré de précision désirée. On considère que la masse de chaque élément est concentrée en son centre de gravité et que le contact continu plaque milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points représentant les centres de gravité des éléments. Ce contact partiel entre les deux milieux différents (plaque et le milieu élastique) est assuré par des liaisons rigides situant au niveau des centres de gravités des éléments, au niveau desquels se déterminent les efforts de liaison.

La formulation du modèle mathématique du problème étudié est générée par des expressions analytiques connues de la théorie d'élasticité et par des algorithmes numériques qui sont accomplis à l'aide des programmes « Mathematica », « Fortran » et « Matlab ». L'étude faite est tellement liée à des grandes difficultés mathématique, ce qui nous a obligé à la simplifier par la non tenue en compte de certaines considérations comme la masse du milieu élastique, l'amortissement et les forces de frottements dans la zone de contact. A noter que l'application de l'approche formulée pour étudier ce problème concerne n'importe quel type du milieu élastique. Pour cela, on a pris deux modèles; le premier c'est le modèle le plus simple connu par le modèle de Winkler (principe des ressorts) et le second c'est le modèle de Boussinesq (principe du semi-infini élastique).

Les résultats du calcul sont obtenus par l'introduction des données géométriques et physiques de la plaque et du milieu élastique dans le système matriciel final. La vérification de l'authenticité des résultats est indispensable, à cet égard elle est accomplie par la comparaison des résultats avec ceux obtenus par d'autres approches et par les différentes vérifications de base connues de la théorie d'élasticité comme l'orthogonalité et la résonance. Toutes ces vérifications témoignent la certitude des résultats et par conséquent la fiabilité de l'approche utilisée.

Enfin, l'étude apportée dans ce travail peut être utilisée comme base pour traiter des cas plus compliqués comme; la prise en compte de la masse du milieu élastique, le caractère

ondulatoire des déplacements, les formes compliquées des plaques ou leur remplacement par les coques, le matériau orthotrope de la plaque etc.

Bibliographie

- [1] **Ahmadi N., Keer L.M., Mura T.** Non-Hertzian contact stress analysis for an elastic half space normal and sliding contact.// International journal of solids and structures, 1983 Vol. 29, P. 357-373.
- [2] **Aleksandrov A.V., Potapov V.D.** Les bases de la théorie d'élasticité et de plasticité.// Ecole supérieur Moscou 1990, 393 pages, en Russe.
- [3] **Aleksandrov V.M.** Problème axisymétrique de l'action d'un bloc rigide de forme annulaire reposant sur semi-infini élastique.// mécanique des corps rigides, 1967 N° 4, P. 108-116, en Russe.
- [4] **Ascione L., Grimaldi A.** Unilateral contact between a plate and an elastic foundation.// Meccanica, 1984 Vol. 19, P. 223-233.
- [5] **Ascione L., Olivito R.S.** Unbonded contact of a mindlin plate on an elastic half space.// Meccanica, 1985 Vol. 20, P. 49-58.
- [6] **Babic S.Y., Guz A.N.** Problèmes de contact des corps élastique précontraint.// Mécanique appliquée, 1991 N° 9, P. 3-26, en Russe.
- [7] **Babic S.Y., Guz A.N.** Quelques problèmes de contact de semi-infini élastique précontraint.// Mécanique appliquée, 1984 N° 5, P. 3-12, en Russe.
- [8] **Badalov F.** Résolution de l'équation différentielle des déformées de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique par des méthodes directes.// DAN. URSS, 1967 N° 3, en Russe.
- [9] **Bentall R.H., Johnson K.L.** An elastic strip in plane rolling contact.// Int. Journal of mechanical sciences, 1968 Vol. 10, P. 637-663.
- [10] **Bert C.W.** Bending of plates on thin compressible foundation.// Transactions of the ASME, 1994 Vol. 61, P. 497-498.
- [11] **Blevins R.D.** Formulas for natural frequency and mode shape.// Florida: Kreiger publishing company 1986, 492 pages.
- [12] **Borodashev N.M., Doudinski V.I.** Bloc rigide reposant sur semi-infini élastique de coefficient de Poisson variable.// Mécanique appliquée, 1985 N° 8, P. 34-39, en Russe.
- [13] **Borodashev N.M.** détermination des tassements des plaques rigides.// Mécanique des fondations et des sols, 1964 N° 4, P. 3-5, en Russe.
- [14] **Borodashev N.M.** Problème de contact en dynamique d'une plaque rigide circulaire reposant sur semi-infini élastique.// Comptes rendus de AN-URSS, Série de la mécanique, 1964 N° 4, P. 3-8, en Russe.
- [15] **Borodashev N.M.** Vibration forcée d'une plaque rigide reposant sur semi-infini élastique.// Mécanique des fondations et des sols, 1966 N° 1, P. 8-10, en Russe.
- [16] **Borodashev N.M.** Contact problem for a stamp with a rectangular base.// Journal of applied mathematics and mechanics, 1976 Vol. 40, P. 505-512.
- [17] **Borodashev N.M.** Détermination des contraintes sous une fondation vibrante.// Mécanique des fondations et des sols, 1962 N° 3, P. 8-10, en Russe.
- [18] **Borodashev N.M.** Problème de contact dynamique d'un bloc rigide de forme circulaire reposant sur semi-infini élastique.// Rapport de la mécanique, 1964 N° 2, P. 81-89, en Russe.
- [19] **Borodashev N.M.** Problème de contact dynamique d'une plaque épaisse symétrique.// Travaux de la cinquième conférence sur la théorie des coques et des plaques 1964, en Russe.
- [20] **Borodashev N.M.** Vibration d'un bloc rigide reposant sur semi-infini élastique et soumis à une force harmonique horizontale.// Mécanique des structures et architecture, 1963 N° 9, P. 32-39, en Russe.
- [21] **Borodasheva F.N.** Déplacements et contraintes dans le milieu sur lequel repose la plaque rigide de forme annulaire.// mécanique des fondations et des sols, 1972 N° 4, P. 1-3, en Russe.

- [22] **Bosakov S.V.** Action d'une force ponctuelle sur quart-infini élastique.// Mécanique théorique appliquée, 1988 Section 15, P. 100-108, en Russe.
- [23] **Bosakov S.V.** Calcul des plaques reposant sur milieu élastique.// Minsk 2002, 120 pages, en Russe.
- [24] **Bosakov S.V.** déformation des plaques rectangulaires reposant sur milieu élastique de n'importe quel type.// Matériau Technologie Instruments, 1997 N° 2, P. 73-75, en Russe.
- [25] **Bosakov S.V.** Méthode de Ritz dans les problèmes de la mécanique des structures et la théorie d'élasticité.// Minsk 2000, pages 130, en Russe.
- [26] **Bosakov S.V., Tarasevich A.N., Guenfoud S.** Influence functions for basic models of the soils of foundations.// Materials. Technologies. Tools, 2001 N° 4, P. 5-8.
- [27] **Bosakov S.V., Guenfoud S, Oualaa N., Djamaa M.C.** Dynamical analysis of a beam resting on an elastic foundation of Winkler's type.// Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Engineering sciences, 2005 N°1, P. 52-58.
- [28] **Boussinesq J.** Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques.// Paris 1885.
- [29] **Brothers P.W., Sinclair G.B., Segedin C.M** Uniform indentation of the elastic half space by a rigid rectangular punch.// International journal of solids and structures, 1977 Vol. 13, P. 1059-1072.
- [30] **Butenin N.V., Lunts Y.L., Merkin D.R.** Cours de la mécanique théorique.// Sciences Moscou 1979, Tome 2, 541 pages, en Russe.
- [31] **Cheung Y.K., Nag D.K.** Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behavior.// Géotechnique, 1968 Vol. 18, P. 250-260.
- [32] **Cheung Y.K., Zienkiewicz O.C.** Plates and tanks on elastic foundations-an application of the finite element method.// International journal of solids and structures, 1965 Vol. 1, P. 451-461.
- [33] **Conway H.D., et al.** Normal and shearing contact stress in indented strips and slabs.// Int. Journal of engineering sciences, 1966 Vol. 4, P. 343-359.
- [34] **Filippov A.P.** Vibration des systèmes déformables.// Mashina streini Moscou 1970, 720 pages, en Russe.
- [35] **Filippova L.M.** Prise en compte des forces du poids dans le problème de contact pour semi-infini élastique.// Travaux du centre Kokazien, 1982 P.32-33, en Russe.
- [36] **Florena N.V.** Comportement d'un bloc rigide reposant sur un milieu élastique à la vibration.// Mécanique appliquée 1964, en Russe.
- [37] **Gemochkin B.N., Sinitsein A.P.** Méthodes pratiques de calcul des poutres et plaques reposant sur milieu élastique.// Stroiizdat Moscou 1962, 242 pages, en Russe.
- [38] **Gibson R.E., Sills G.C.** On the loaded elastic half space with a depth varying Poisson's ratio.// Z. Angew. Math. Phys., 1969 N° 5, P. 2830-2844.
- [39] **Gladwell G.M.L., Iyer K.R.P.** Unbonded contact between a circular plate and an elastic half space.// Journal of elasticity, 1974 Vol. 4, P. 115-130.
- [40] **Goubenko V.S., Grabko G.K.** Problèmes de contact de plaque circulaire reposant sur semi-infini élastique avec la tenue en compte des forces de frottement.// Mécanique appliquée, 1971 Tome 7, en Russe.
- [41] **Goubenko V.S., Kiselev M.Y.** Effets d'un bloc rigide de forme annulaire sur une couche reposant sur semi-infini élastique.// mécanique appliquée, 1975 N° 7, P. 11-16, en Russe.
- [42] **Goubenko V.S., Nakashidze G.M.** Question sur la tenue en compte des forces de frottement dans la zone de contact.// Mécanique appliquée, 1975 N° 10, P. 123-126, en Russe.
- [43] **Gourbonov – Pasadov M.I., Malikova T.A., Solomin V.I.** Calcul des structures reposant sur milieu élastique.// Stroiizdat Moscou, 699 pages, en Russe.
- [44] **Gradstein I.S., Reijik I.M.** Tableau d'intégrales, suites, séries et dérivées.// Nayka 1971, 1108 pages, en Russe.

- [45] **Guenfoud S.** Calcul des plaques de forme compliquées reposant sur milieu élastique. Thèse de Ph.D. en mécanique des structures.// Académie Polytechniques d'Etat de Belarus, Minsk 2002, en Russe.
- [46] **Guz A.N., Roudnitski V.B.** Problèmes de contact des blocs rigides reposant sur semi-infini élastique précontraint.// Mécanique appliquée, 1984 N° 8, P. 3-11, en Russe.
- [47] **Harding J.W., Sneddon I.N.** The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of semi-infinite elastic body by a rigid punch.// Proceedings of the Cambridge philosophical society, 1945 Vol. 41, P. 16-26.
- [48] **Kalmanok A.S.** calcul des plaques.// Moscou 1959, 212 pages, en Russe.
- [49] **Kiselev V.A.** Mécanique des structures.// Stroiizdat Moscou 1980, 609 pages, en Russe.
- [50] **Korenov B.G., Rabinovitch I.M.** Guide sur la dynamique des ouvrages.// Stroiizdat Moscou 1972, 379 pages, en Russe.
- [51] **Korenov B.G., Seimov V.M.** Vibration des plaques reposant sur semi-infini élastique.// Mécanique appliquée 1968, en Russe.
- [52] **Korenov B.G., Tseitlin A.I.** calcul des poutres reposant sur milieu élastique soumises à une excitation.// Mécanique des structures et calcul des ouvrages 1962, en Russe.
- [53] **Lamb H.** On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.// Trans. Roy. Soc. A, 1904 P. 1-42.
- [54] **Medovnik M.I.** Pression sur semi-infini élastique d'un bloc de forme quelconque.// Mécanique Appliquée, 1970 N° 6, P. 17-24, en Russe.
- [55] **Mesherikov Y.M.** Recueil des travaux sur le calcul des plaques et coques reposant sur milieu déformables.// Nii ouvrage et ouvrage sous terrain 1967, en Russe.
- [56] **Mullan S.J., Sinclair G.B., Brothers P.W.** Stresses for an elastic half space uniformly indented by a rigid rectangular footing.// Inter. Journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 1980 Vol. 4, P. 277-284.
- [57] **Murphy G.** Stresses and deflections in loaded rectangular plates on elastic foundations.// Iowa engineering experiment station bulletin, 1937 Vol. 36, P. 1-52.
- [58] **Nakashid G.M.** Tenue en compte des forces de frottement dans la zone de contact entre une plaque circulaire et semi-infini élastique.// Mécanique appliquée, 1975 N° 4, P. 110-113, en Russe.
- [59] **Otto J. Svec., Gladwell G.M.L.** An explicit Boussinesq solution for a polynomial distribution of pressure over a triangle region.// Journal of elasticity, 1971 Vol. 1, P. 167-170.
- [60] **Pao Y.C., Ting-Shu Wu., Chiu Y.P.** Bounds on the maximum contact stress of an indented elastic layer.// Transactions of the ASME, 1970 N° 3, P. 30-36.
- [61] **Popov G.Y.** Calcul des poutres et plaques reposant sur milieu élastique combinés.// Journal de construction et d'architecture, 1958 N° 10, en Russe.
- [62] **Popov G.Y.** plaques reposant sur milieu déformables linéairement.// Mécanique appliquée, 1972 N° 3, P. 3-17, en Russe.
- [63] **Pu S.L., Hussain M.A.** Note on the unbonded contact between plates elastic half space.// Transactions of the ASME, 1970 N° 3, P. 286-288.
- [64] **Rakov A.F.** Calcul des poutres parallèle reposant sur milieu élastique.// Mathématique et mécanique appliquée, 1962 Tome XXVI, en Russe.
- [65] **Rvashev V.L., Protsenko V.S.** Problème de contact de la théorie d'élasticité des surfaces non classique.// Kiev 1977, 235 pages, en Russe.
- [66] **Shekhter O.Y.** Calculation of foundations under vertical forced vibrations by taking into account of the inertial properties of ground.// Journal of vibrations of structures and foundations, 1948 N° 12, P. 72-89.
- [67] **Seimov V.M.** Méthode de résolution de problème de contact en dynamique d'une plaque de rigidité finie reposant sur semi infini élastique.// Mécanique appliquée 1964, en Russe.

- [68] **Selvadurai A.P.S.** The interaction between a uniformly loaded circular plate on an isotropic elastic half space.// Jour. Struc. Mech., 1979 Vol. 7, P. 231-246.
- [69] **Soloviev A.P.** Calcul des plaques épaisses reposant sur milieu élastique.// Mécanique des structures et calcul des ouvrages 1967 N° 2, en Russe.
- [70] **Soloviev A.P.** déformation non symétrique d'une plaque circulaire épaisse reposant sur milieu élastique.// Mécanique appliquée, 1970 N° 7, P. 32-39, en Russe.
- [71] **Svec O.J.** Unbonded contact problem of a plate on the elastic half space.// Computer methods in applied mechanics, 1974 Vol. 3, P. 105-113.
- [72] **Timoshenko S., Woinowsky S.** Theory of plates and shells.// Kreiger Moscou 1959, 632 pages.
- [73] **Tseitlin A.I.** Calcul des plaques circulaires reposant sur milieu élastique.// Mécanique des sols et des fondations, 1971 N° 5, P. 7-9, en Russe.
- [74] **Tseitlin A.I.** Résolution de l'équation de Timoshenko de la poutre reposant sur milieu élastique.// Travaux de l'académie des structures et d'architecture URSS 1961, en Russe.
- [75] **Vasilinko A.T.** Résolution des problèmes concernant l'état de contraintes des plaques de forme compliquées.// Mécanique appliquée, 1997 N° 12, P. 68-74, en Russe.
- [76] **Villagio P.** A free boundary value that problem in plate theory.// Transactions of the ASME, 1983 Vol. 50, P. 297-302.
- [77] **Vinokurov E.F.** Guide de la résistance des matériaux.// Sciences et techniques Moscou 1988, 460 pages, en Russe.
- [78] **Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.** Théorie d'élasticité non classique.// Moscou 1974, 456 pages, en Russe.
- [79] **Weitsmam Y.** On the foundations that react in compression only.// Transactions of the ASME, 1970 N° 4, P. 121-131.
- [80] **Weitsmam Y.** On the unbonded contact between plates and an elastic half space.// Transactions of the ASME, 1969 N° 2, P. 58-62.
- [81] **Winkler E.** Die Lerne Von der Elastic und Festigkiet.// 1867.
- [82] **Yakovlev A.S.** Tenue en compte de l'inertie du milieu élastique dans le calcul des vibrations forcées des plaques et poutres.// Mécanique des structures et calcul des ouvrages 1967, en Russe.
- [83] **Yakovlev A.S.** Vibration forcée de la poutre de longueur infini en tenant compte de l'inertie du milieu élastique.// Travaux MISI, 1968, en Russe.
- [84] **Zbigniew K.** Calcul statique des plaques.// Stroizdat. Moscou 1984, 480 pages, en Russe.
- [85] **Zukin Y.P., Tselikov G.S.** Déformées de la plaque de longueur infini reposant sur semi-infini élastique.// Mécanique appliquée, 1977 N° 1, P. 110-115, en Russe.
- [86] Développement de la théorie de problèmes de contact en URSS.// Moscou 1976, 496 pages, en Russe.
- [87] Mécanique en URSS.// Moscou 1972, 480 pages, en Russe.

Annexe 1

Les valeurs numériques du système matriciel lors de la détermination de la réponse de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de modèle de Winkler à une excitation harmonique appliquée à un point

1. Les éléments de la matrice A sont

.821	-.063	-.042	-.045	-.081	-.003	-.016	-.021	-.071	-.013	-.010	.044	-.135	-.050	.026	.170	.750	-1.500	1.000
-.066	.977	-.020	-.059	-.038	.002	-.005	-.038	-.034	-.016	-.020	-.017	-.050	-.042	-.028	.010	.750	-.500	1.000
-.059	-.020	.977	-.066	-.038	-.005	.002	-.038	-.017	-.020	-.016	-.034	.010	-.028	-.042	-.050	.750	.500	1.000
-.045	-.042	-.063	.821	-.021	-.016	-.003	-.081	.044	-.010	-.013	-.071	.170	.026	-.050	-.135	.750	1.500	1.000
-.096	-.036	-.017	.936	.006	-.006	-.010	.013	-.055	-.007	-.008	.031	-.090	-.035	.000	.076	.250	-1.500	1.000
-.001	.004	-.002	-.013	-.006	.999	-.004	-.011	-.008	-.004	-.011	-.011	-.016	-.017	-.021	-.012	.250	-.500	1.000
-.013	-.002	.004	-.001	-.011	-.004	.999	-.006	-.011	-.011	-.004	-.008	-.012	-.021	-.017	-.016	.250	.500	1.000
.017	-.017	-.036	-.096	.013	-.010	-.006	.936	.031	-.008	-.007	-.055	.076	.000	-.035	-.090	.250	1.500	1.000
-.090	-.035	.000	.076	-.055	-.007	-.008	.031	.936	-.006	-.010	.013	-.096	-.036	.017	.017	-.250	-1.500	1.000
-.016	-.017	-.021	-.012	-.008	-.004	-.011	-.011	-.006	.999	-.004	-.011	-.001	.004	-.002	-.013	-.250	-.500	1.000
-.012	-.021	-.017	-.016	-.011	-.011	-.004	-.008	-.011	-.004	.999	-.006	-.013	-.002	.004	-.002	-.250	.500	1.000
.076	.000	-.035	-.090	.031	-.008	-.007	-.055	.013	-.010	-.006	.936	.017	-.017	-.036	-.096	-.250	1.500	1.000
-.135	-.050	.026	.170	-.071	-.013	-.010	.044	-.081	-.003	-.016	-.021	.821	-.063	-.042	-.045	-.750	-1.500	1.000
-.050	-.012	-.028	.010	-.034	-.016	-.020	-.017	-.038	.002	-.005	-.038	-.066	.977	-.020	-.059	-.750	-.500	1.000
.010	-.028	-.042	-.050	-.017	-.020	-.016	-.034	-.038	-.005	.002	-.038	-.059	-.020	.977	-.066	-.750	.500	1.000
.170	.026	-.050	-.135	.044	-.010	-.013	-.071	-.021	-.016	-.003	-.081	-.045	-.042	-.063	.821	-.750	1.500	1.000
.750	.750	.750	.750	.250	.250	.250	.250	-.250	-.250	-.250	-.250	-.750	-.750	-.750	-.750	25.600	.000	.000
-1.500	-.500	.500	1.500	-1.500	-.500	.500	1.500	-1.500	-.500	.500	1.500	-1.500	-.500	.500	1.500	.000	102.400	.000
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.000	.000	76.800

2. Les éléments du vecteur F à l'instant $t = 0.001 s$ sont :

.019 .025 .028 .075 -.007 .005 .000 .041 -.032 .005 .007 .038 -.072 -.004 .021 .057 .000 .000 .000

2.1. La réponse de la plaque en mm à cet instant est :

w(1)=-0.0718818403
w(2)= 0.0321687916
w(3)= 0.0853056641
w(4)= 0.2568820344
w(5)=-0.0868385511
w(6)= 0.0102142573
w(7)= 0.0189556306
w(8)= 0.1652868519
w(9)=-0.1221361914
w(10)= 0.0091111672
w(11)= 0.0236528494
w(12)= 0.1489858369
w(13)=-0.1995790145
w(14)=-0.0169323175
w(15)= 0.0561791407
w(16)= 0.1889113156

3. Les éléments du vecteur F' à l'instant $t = 0.002 s$ sont :

.012 .015 .017 .046 -.004 .003 .000 .025 -.020 .003 .004 .023 -.044 -.003 .013 .035 -.008 -.019 -.006

3.1. La réponse de la plaque en mm à cet instant est

w(1)=-0.0442231492
w(2)= 0.0208211637
w(3)= 0.0541200755
w(4)= 0.1605393111
w(5)=-0.0532786644
w(6)= 0.0071594730
w(7)= 0.0129331958
w(8)= 0.1039517105
w(9)=-0.0748021810
w(10)= 0.0065198122
w(11)= 0.0158401116
w(12)= 0.0940433943
w(13)=-0.1221109891
w(14)=-0.0090947965
w(15)= 0.0364522979
w(16)= 0.1191702351

4. Les éléments du vecteur F'' à l'instant $t = 0.003 s$ sont :

.001 .002 .002 .005 -.001 .000 .000 .003 -.002 .000 .000 .003 -.005 .000 .002 .004 -.005 -.012 -.005

4.1. La réponse de la plaque en mm à cet instant est :

w(1)=-0.0057067428
w(2)= 0.0024232026
w(3)= 0.0066396984
w(4)= 0.0197417917
w(5)=-0.0067924548
w(6)= 0.0007765580

w(7)= 0.0016202266
w(8)= 0.0128256062
w(9)=-0.0094561589
w(10)= 0.0006208902
w(11)= 0.0018801630
w(12)= 0.0115230281
w(13)=-0.0152955137
w(14)=-0.0014175508
w(15)= 0.0042337385
w(16)= 0.0144324693
⋮

Annexe 2

Les expressions des éléments de la matrice $[A]$ du système matriciel final de la plaque rectangulaire reposant sur semi-infini élastique sont :

$$A_{11} =$$

$$(\gamma * F_{1,1} + w_{1,1}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{1,1} * F_{1,1} + w_{1,2} * F_{2,1} + w_{1,3} * F_{3,1} + w_{1,4} * F_{4,1} + w_{1,5} * F_{5,1} + w_{1,6} * F_{6,1} + w_{1,7} * F_{7,1} + \\ w_{1,8} * F_{8,1} + w_{1,9} * F_{9,1} + w_{1,10} * F_{10,1} + w_{1,11} * F_{11,1} + w_{1,12} * F_{12,1} + w_{1,13} * F_{13,1} + w_{1,14} * F_{14,1} + \\ w_{1,15} * F_{15,1} + w_{1,16} * F_{16,1})$$

$$A_{12} =$$

$$(\gamma * F_{1,2} + w_{1,2}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{1,1} * F_{1,2} + w_{1,2} * F_{2,2} + w_{1,3} * F_{3,2} + w_{1,4} * F_{4,2} + w_{1,5} * F_{5,2} + w_{1,6} * F_{6,2} + w_{1,7} * F_{7,2} + \\ w_{1,8} * F_{8,2} + w_{1,9} * F_{9,2} + w_{1,10} * F_{10,2} + w_{1,11} * F_{11,2} + w_{1,12} * F_{12,2} + w_{1,13} * F_{13,2} + w_{1,14} * F_{14,2} + \\ w_{1,15} * F_{15,2} + w_{1,16} * F_{16,2})$$

$$A_{13} =$$

$$(\gamma * F_{1,3} + w_{1,3}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{1,1} * F_{1,3} + w_{1,2} * F_{2,3} + w_{1,3} * F_{3,3} + w_{1,4} * F_{4,3} + w_{1,5} * F_{5,3} + w_{1,6} * F_{6,3} + w_{1,7} * F_{7,3} + \\ w_{1,8} * F_{8,3} + w_{1,9} * F_{9,3} + w_{1,10} * F_{10,3} + w_{1,11} * F_{11,3} + w_{1,12} * F_{12,3} + w_{1,13} * F_{13,3} + w_{1,14} * F_{14,3} + \\ w_{1,15} * F_{15,3} + w_{1,16} * F_{16,3})$$

⋮
⋮
⋮

$$A_{1614} =$$

$$(\gamma * F_{16,14} + w_{16,14}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{16,1} * F_{1,14} + w_{16,2} * F_{2,14} + w_{16,3} * F_{3,14} + w_{16,4} * F_{4,14} + w_{16,5} * F_{5,14} + w_{16,6} * F_{6,14} + \\ w_{16,7} * F_{7,14} + w_{16,8} * F_{8,14} + w_{16,9} * F_{9,14} + w_{16,10} * F_{10,14} + w_{16,11} * F_{11,14} + w_{16,12} * F_{12,14} + w_{16,13} * F_{13,14} + \\ w_{16,14} * F_{14,14} + w_{16,15} * F_{15,14} + w_{16,16} * F_{16,14})$$

$$A_{1615} =$$

$$(\gamma * F_{16,15} + w_{16,15}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{16,1} * F_{1,15} + w_{16,2} * F_{2,15} + w_{16,3} * F_{3,15} + w_{16,4} * F_{4,15} + w_{16,5} * F_{5,15} + w_{16,6} * F_{6,15} + \\ w_{16,7} * F_{7,15} + w_{16,8} * F_{8,15} + w_{16,9} * F_{9,15} + w_{16,10} * F_{10,15} + w_{16,11} * F_{11,15} + w_{16,12} * F_{12,15} + w_{16,13} * F_{13,15} + \\ w_{16,14} * F_{14,15} + w_{16,15} * F_{15,15} + w_{16,16} * F_{16,15})$$

$$A_{1616} =$$

$$(\gamma * F_{16,16} + w_{16,16}) - \\ M * \omega^2 * \gamma * (w_{16,1} * F_{1,16} + w_{16,2} * F_{2,16} + w_{16,3} * F_{3,16} + w_{16,4} * F_{4,16} + w_{16,5} * F_{5,16} + w_{16,6} * F_{6,16} + \\ w_{16,7} * F_{7,16} + w_{16,8} * F_{8,16} + w_{16,9} * F_{9,16} + w_{16,10} * F_{10,16} + w_{16,11} * F_{11,16} + w_{16,12} * F_{12,16} + w_{16,13} * F_{13,16} + \\ w_{16,14} * F_{14,16} + w_{16,15} * F_{15,16} + w_{16,16} * F_{16,16})$$

$$A_{1617} = -1.5 * b1$$

$$A_{1618} = 1.5 * a1$$

$$A_{1619} = 1$$

⋮
⋮
⋮

$$A_{1914} =$$

$$1 -$$

$$M_{14} * \omega^2 * \gamma * (F_{1,14} + F_{2,14} + F_{3,14} + F_{4,14} + F_{5,14} + F_{6,14} + F_{7,14} + F_{8,14} + F_{9,14} + F_{10,14} + F_{11,14} + F_{12,14} + F_{13,14} + F_{14,14} + F_{15,14} + F_{16,14})$$

$$A_{1915} =$$

$$1 -$$

$$M_{15} * \omega^2 * \gamma * (F_{1,15} + F_{2,15} + F_{3,15} + F_{4,15} + F_{5,15} + F_{6,15} + F_{7,15} + F_{8,15} + F_{9,15} + F_{10,15} + F_{11,15} + F_{12,15} + F_{13,15} + F_{14,15} + F_{15,15} + F_{16,15})$$

$$A_{1916} =$$

$$1 -$$

$$M_{16} * \omega^2 * \gamma * (F_{1,16} + F_{2,16} + F_{3,16} + F_{4,16} + F_{5,16} + F_{6,16} + F_{7,16} + F_{8,16} + F_{9,16} + F_{10,16} + F_{11,16} + F_{12,16} + F_{13,16} + F_{14,16} + F_{15,16} + F_{16,16})$$

$$A_{1917} = 0$$

$$A_{1918} = 0$$

$$A_{1919} = M * \omega^2$$

Annexe 3

Les valeurs numériques du système matriciel lors de la détermination de la réponse de la plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de modèle de Boussinesq à une excitation harmonique appliquée à un point

1. Les éléments de la matrice A sont :

.00000024	.00000000	-.00000001	-.00000001	.00000002	-.00000001	-.00000001	.00000001	-.00000003	-.00000002	.00000000
.00000003	-.00000004	-.00000002	.00000001	.00000005	.75000000	-.00000001	-.00000001	-.00000001	.00000000	.00000000
.00000002	.00000030	.00000003	-.00000001	.00000001	.00000008	.00000002	.00000002	.00000000	.00000002	.00000000
-.00000001	-.00000001	.00000000	.00000000	.00000000	.75000000	-.50000000	1.00000000	.00000000	.00000002	.00000000
-.00000001	.00000003	.00000030	.00000002	-.00000001	.00000002	.00000009	.00000001	-.00000001	.00000000	.00000002
.00000000	.00000000	.00000000	.00000000	-.00000001	.75000000	.50000000	1.00000000	.00000000	.00000000	.00000000
-.00000001	-.00000001	.00000000	.00000024	.00000001	-.00000001	-.00000001	.00000006	.00000003	.00000000	-.00000002
-.00000003	.00000005	.00000001	-.00000002	-.00000004	.75000000	1.50000000	1.00000000	.00000000	.00000000	.00000002
.00000007	.00000002	.00000001	.00000002	.00000027	.00000003	.00000001	.00000003	.00000006	.00000002	.00000002
.00000003	.00000001	.00000001	.00000002	.00000004	.25000000	-.1.50000000	1.00000000	.00000002	.00000012	.00000005
.00000006	.00000012	.00000005	.00000002	.00000006	.00000033	.00000006	.00000002	.00000005	.00000012	.00000005
.00000002	.00000004	.00000005	.00000003	.00000002	.25000000	-.50000000	1.00000000	.00000005	.00000002	.00000005
.00000002	.00000005	.00000012	.00000006	.00000002	.00000006	.00000033	.00000006	.00000002	.00000005	.00000012
.00000005	.00000002	.00000003	.00000005	.00000004	.25000000	.50000000	-.00000000	.00000002	.00000005	.00000002
.00000002	.00000001	.00000002	.00000007	.00000003	.00000001	.00000003	.00000003	.00000003	.00000002	.00000002
.00000006	.00000004	.00000002	.00000001	.00000001	.25000000	1.50000000	-.00000000	.00000003	.00000002	.00000002
.00000001	.00000001	.00000002	.00000004	.00000006	.00000002	-.25000000	1.00000000	.00000003	.00000003	.00000001
.00000003	.00000007	.00000002	.00000001	.00000002	-.25000000	.00000005	.00000002	.00000027	.00000003	.00000001
.00000004	.00000005	.00000003	.00000002	.00000005	.00000012	.00000005	.00000002	.00000006	.00000033	.00000006
.00000002	.00000006	.00000012	.00000005	.00000002	-.25000000	-.50000000	1.00000000	.00000006	.00000033	.00000006
.00000002	.00000003	.00000005	.00000004	.00000002	.00000005	.00000012	.00000005	.00000002	.00000006	.00000006
.00000006	.00000002	.00000005	.00000012	.00000006	.00000005	-.25000000	1.00000000	.00000002	.00000006	.00000033

.00000004	.00000002	.00000001	.00000001	.00000003	.00000002	.00000002	.00000003	.00000003	.00000003	.00000001	.00000003
.00000027	.00000002	.00000001	.00000002	.00000007	-2.50000000	1.50000000	1.00000000	1.00000006	1.00000000	.00000006	.00000003
-.00000004	-.00000002	.00000001	.00000005	-.00000003	-.00000002	.00000001	.00000003	.00000003	.00000002	.00000003	-.00000001
.00000001	.00000024	.00000000	-.00000001	-.00000001	-.75000000	-1.50000000	1.00000000	1.00000000	.00000002	-.00000001	-.00000001
-.00000001	.00000000	.00000000	.00000000	.00000000	.00000002	.00000000	.00000001	.00000001	.00000001	.00000001	.00000002
-.00000001	.00000002	.00000030	.00000003	-.00000001	-.75000000	-.50000000	1.00000000	1.00000000	.00000001	.00000008	.00000002
.00000000	.00000000	.00000000	.00000001	-.00000001	.00000000	.00000002	.00000000	.00000000	-.00000001	.00000002	.00000008
.00000001	-.00000001	.00000003	.00000030	.00000002	-.75000000	.50000000	1.00000000	1.00000000	-.00000001	.00000002	.00000008
.00000005	.00000001	-.00000002	-.00000004	.00000003	.00000000	-.00000002	.00000003	-.00000003	.00000001	.00000002	-.00000001
.00000002	-.00000001	-.00000001	.00000000	.000000024	-.75000000	1.50000000	1.00000000	1.00000000	.00000001	-.00000001	-.00000001
-.906547392	-1.083988645	-1.083988645	-906547392	-.447895011	-.528519752	-.528519752	-.447895011	-.447895011	.447895011	.528519752	.528519752
.447895011	.906547392	1.083988645	1.083988645	.90654739	2320000000.00	.00000000	.00000000	.00000000	.447895011	.528519752	.528519752
3.276931019	1.477713109	-1.477713109	-3.276931019	4.081071018	1.835721074	-1.835721074	-4.081071018	-4.081071018	4.081071018	1.835721074	-1.835721074
-4.081071018	3.276931019	1.477713109	-1.477713109	-3.276931019	.00000000	1280000000.00	.00000000	.00000000	4.081071018	1.835721074	-1.835721074
-5.257184432	-6.107905694	-6.107905694	-5.257184432	-5.978894817	-6.977413479	-6.977413479	-5.978894817	-5.978894817	-5.978894817	-6.977413479	-6.977413479
-5.978894817	-5.257184432	-6.107905694	-6.107905694	-5.257184432	.00000000	.00000000	960000000.00	960000000.00	-5.978894817	-6.977413479	-6.977413479

2. Les éléments du vecteur F à l'instant $t = 0.001s$ sont :

```
-0.17419795 -0.23012267 -0.25581776 -0.069651134 .006525061 -.005058249 -.000351354
-.037440243 .029742715 -.004720048 -.006357474 -.035229188 .066357725 .004058276
-.019517832 -.052498847 .000000000 .000000000 .000000000
```

2.1. La réponse de la plaque en mm à cet instant est :

```
w( 1)=-0.008349771483
w( 2)=-0.019593856599
w( 3)=-0.017456969491
w( 4)=-0.076596440927
w( 5)= 0.009310770847
w( 6)=-0.004079424352
w( 7)= 0.015239046542
w( 8)=-0.032116704992
w( 9)= 0.029822308775
w(10)=-0.009349887527
w(11)= 0.004447450091
w(12)=-0.029666994678
w(13)= 0.069027868443
w(14)=-0.003595544710
w(15)=-0.019313795442
w(16)=-0.055799530986
```

3. Les éléments du vecteur F à l'instant $t = 0.002s$ sont :

```
.006653772 .008789907 .009771373 .026604376 -.002492353 .001932080 .000134206
.014300906 -.011360711 .001802899 .002428340 .013456358 -.025346405 -.001550124
.007455151 .020052783 -.008553923 -.013627156 -.007571381
```

3.1 La réponse de la plaque en mm à cet instant est :

```
w( 1)= 0.003189330126
w( 2)= 0.007484190108
w( 3)= 0.006667971560
w( 4)= 0.029257248167
w( 5)=-0.003556399356
w( 6)= 0.001558202045
w( 7)=-0.005820800024
w( 8)= 0.012267494383
w( 9)=-0.011391112669
w(10)= 0.003571340600
w(11)=-0.001698775414
w(12)= 0.011331787940
w(13)=-0.026366309613
w(14)= 0.001373376383
w(15)= 0.007377216205
w(16)= 0.021313532380
```

4. Les éléments du vecteur F à l'instant $t = 0.003s$ sont :

```
.006653765 .008789898 .009771362 .026604347 -.002492350 .001932078 .000134205
.014300890 -.011360698 .001802897 .002428337 .013456343 -.025346378 -.001550122
.007455143 .020052761 .003267309 .005205113 .002892011
```


4.1. La réponse de la plaque en *mm* à cet instant est :

w(1)= 0.003189326684
w(2)= 0.007484182031
w(3)= 0.006667964351
w(4)= 0.029257216622
w(5)=-0.003556395524
w(6)= 0.001558200360
w(7)=-0.005820793772
w(8)= 0.012267481146
w(9)=-0.011391100389
w(10)= 0.003571336757
w(11)=-0.001698773589
w(12)= 0.011331775724
w(13)=-0.026366281198
w(14)= 0.001373374918
w(15)= 0.007377208269
w(16)= 0.021313509431

⋮

Résumé

Les problèmes de contact comme le cas des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques, les constructions hydrauliques et certaines pièces de machines nécessitent une étude dynamique vu leur exposition aux vibrations. Ce problème a été examiné sérieusement dès la fin du XIX siècle, vu les conséquences désastreuses que causent les catastrophes naturelles, comme le séisme, ou l'activité humaine sur les constructions. C'est pourquoi une étude vibratoire des différentes constructions soumises aux effets dynamiques devient indispensable. Toutes les études faites dans ce domaine sont basées sur les méthodes numériques vu les difficultés mathématiques liées à ce problème et souvent donnent des résultats non précis. Le problème se complique encore lors de la prise en compte de tous les facteurs entrant dans les calculs de ce problème, par conséquent des simplifications et des négligences de certains facteurs sont inévitables à ce jour. C'est pourquoi le besoin d'améliorer les méthodes de calcul existantes de telles structures ou de proposer de nouvelles méthodes de calcul plus efficaces s'impose.

L'objectif du travail apporté dans ce mémoire est de formuler une approche semi analytique basant sur la méthode de Gemochkin permettant de calculer les poutres ou les plaques reposant sur milieu élastique en dynamique. Vu que Le travail ne présente qu'un début d'une étude plus étendue et plus approfondie sur ce problème, alors certaines hypothèses, rentrant dans le but de simplifier la tâche, sont prises en compte comme: la considération uniquement du stade élastique du matériau, l'absence de l'amortissement, la négligence de la masse du milieu élastique. La formulation de l'approche faisant relation entre les forces de réaction dans la zone de contact et le reste des inconnues comme: déflexions, efforts internes, contraintes etc. nécessite l'étude de la fonction de Green représentant l'interaction entre les deux différents milieux; la plaque et le milieu élastique, sur lequel cette dernière repose. Cette procédure permet de déterminer les forces d'interaction dans la zone de contact et le reste des inconnues se déterminent par l'application des formules de la théorie d'élasticité. L'application de l'approche pour deux modèles différents du milieu élastique a permis de déterminer les fréquences et déformées propres de la plaque, ainsi que sa réponse à des excitations externes et les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Mots clés

Plaque, Problèmes de contact, Milieu élastique, Forces de réaction, Fréquences et Déformées propres, Charge harmonique.

Abstract

The problems of contact as: beams and plates resting on an elastic media, hydraulic constructions and certain parts of machine require a dynamic study considering their exposure to the vibrations. This problem was examined seriously since XIX century regarding the disastrous consequences causing by the natural catastrophes, like the seism, or by the human activity. Therefore, a vibratory study of constructions subjected to the dynamic effects becomes essential.

All the studies made in this field are based on the numerical methods regarding the mathematical difficulties related to this problem and often give no precise results. The problem becomes complicated when taking into account of all the factors entering in the calculation of this problem, consequently a simplifications and negligence of certain factors are inevitable till now. This is why, the need to improve the existing methods of calculation or to propose new more effective methods of calculation is essential.

The objective of this work is to formulate a semi-analytical approach basing on the method of Gemochkin to calculate the beams or the plates resting on an elastic media in dynamics. Considering that the work presents only beginning of a wider and thorough study on this problem, certain assumptions for simplifying the task are taken into account like: the consideration only of the elastic stage of material, the absence of damping, negligence of the elastic medium mass. The formulation of the approach, making relation between the forces of reaction in the zone of contact and the remainder of the unknown factors like: deflections, internal efforts etc. requires the study of the Green's function representing the interaction between two different solids (plate and elastic media). This procedure allows determining the forces of reaction in the contact's zone and the remainder of the unknown factors is determined by application of the theory of elasticity's formulas. The application of the approach for two different models of elastic medium allows determining of the frequencies and eigen modes of the plate, its response to external excitations and the results obtained are very satisfactory.

Key words

Plate, Problems of contact, Elastic solid, Reaction forces, Frequencies and eigen modes, Harmonic load.

مشاكل التلامس كالعوارض والصفائح الملقاة على أسطح الأوساط مرنة، بناءات الري وقطع الماكينات تستدعي دراسة ديناميكية نظرا لتعرضها للاهتزازات. هذا المشكل تم معالجته بعناية منذ نهاية القرن التاسع عشر نظرا للنتائج الوخيمة التي تسببها الكوارث الطبيعية كالزلازل، أو أنشطة الإنسان المختلفة على البنيات. لهذا الغرض أصبح من الضروري إنجاز دراسات ديناميكية لكل البناءات و الهياكل التي تتعرض للاهتزازات. كل الدراسات المنجزة في هذا المجال تعتمد الطرق التقريبية وسيلة لإنجازها نظرا للتعقيدات الرياضية المصطحبة لهذا المشكل. المشكل يتعدّد أكثر حين الأخذ بعين الاعتبار لجميع العوامل التي تدخل في الحساب، لهذا لا يمكن تجنب إهمال بعض العوامل أو تبسيطها حتى يومنا هذا. إذن كنتيجة حتمية يجب تحسين طرق الحساب الموجودة أو اقتراح طرق جديدة أكثر فعالية.

في هذا السياق يندرج الهدف من العمل المنجز في هذه المذكرة وهو إيجاد طريقة حساب نصف تحليلية معتمدة على طريقة جموشكين للدراسة الديناميكية للعوارض والصفائح الملقاة على أسطح الأوساط المرنة. بما أن العمل المنجز يمثل بداية لدراسة مشكلة معقدة، إذن قمنا بتبسيط المشكلة ببعض الفرضيات كأخذ بعين الاعتبار المجال المرن فقط للمادة، إهمال الإخماد وكتلة الأسطح المرنة.

تشكيل طريقة الحساب هذه التي تجعل علاقة بين قوى رد الفعل في منطقة التلامس وباقي المجاهيل كالانحناءات، القوى الداخلية، اجهدات الخ. يتطلب دراسة دالة قرين. هذه العملية تمكن من إيجاد قوى رد الفعل في منطقة التلامس بينما باقي المجاهيل المذكورة سابقا تتحدد بتطبيق علاقات نظرية المرونة. تطبيق الطريقة المنجزة على نموذجين مختلفين للأسطح المرنة مكن من إيجاد الترددات والانحناءات الذاتية للصفحة إلى جانب رد فعلها على القوى الديناميكية الخارجية المسلطة عليها. النتائج المحصل عليها جد مرضية وذلك من خلال مقارنتها وتصديقها بجملة من الاختبارات.

كلمات مفتاحية

صفحة، مشاكل التلامس، وسط مرن، قوى رد الفعل، ترددات و أشكال ذاتية، قوة انسجامية.