

N° d'ordre

Année 1998

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

Centre Universitaire 08 Mai 45 Guelma
Institut de Mécanique

THESE

En vue de l'obtention du diplôme de
Magister en Mécanique

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PALIERS
DE VILEBREQUIN D'UN MOTEUR A
COMBUSTION INTERNE**

Option
Construction

Présentée par
FRIHI Djamel

Soutenue le : 09/12/98



Devant le jury :

Président :	A. SERIDI	Prof.	I.N.M.C. Boumerdes
Rapporteur :	M. LAHMAR	Docteur	Centre U.de Guelma
Examineurs :	N. OUELAA	M. C.	Centre U.de Guelma
	K. CHAOUI	M. C.	Université de Annaba
	F. HAROUADI	Docteur	Centre U.de Guelma

REMERCIEMENTS

Cette étude a été faite au Centre de Calcul de l'Institut de Mécanique du Centre Universitaire 08 Mai 45 de Guelma.

Je tiens à exprimer à mon rapporteur Dr. M. LAHMAR mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour son aide précieuse, sa patience et ses conseils judicieux qu'il n'a pas cessé de me fournir tout le long de l'élaboration de ce travail.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait le professeur A. SERIDI, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury.

Il m'est particulièrement agréable de remercier le Dr. N. OUELAA, pour ses conseils et d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie vivement Dr. K. CHAOUI et Dr. F. HAROUADI, pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à tout le personnel de l'Institut de Mécanique pour la contribution que chacun d'eux a pu m'apporter.

Je tiens également à remercier Dr. S. LEBAILL, Directeur du Laboratoire de Tribologie et Vice-Recteur de la planification au sein de l'USTHB, pour son aide et ses précieux conseils.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, par leur amitié, m'ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.

A
ma mère

SOMMAIRE

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : Etude bibliographique	3
I-1. Introduction	3
I-2. Méthodes de résolution	3
I-3. Etudes des paliers mésalignés	9
I-4. Effets élastique et thermique sur le comportement des paliers de moteurs	12
CHAPITRE II : Etude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle	15
II-1. Introduction	15
II-2. Etude cinématique	15
II-3. Etude dynamique	22
II-3-1. Etude dynamique de la bielle	22
II-3-2. Etude dynamique du piston	26
II-4. Détermination des diagrammes de charge	31
II-4-1. Résultats	32
II-5. Conclusion	36
CHAPITRE III : Equations générales de la lubrification hydrodynamique	37
III-1. Introduction	37
III-2. Equation de Reynolds	37
III-3. Equations du film d'huile	40
III-4. Equation de Reynolds en régime transitoire	43
III-5. Conditions aux limites	44
III-6. Caractéristiques hydrodynamiques	46
III-7. Bilan thermique global	52
III-8. Conclusion	54
CHAPITRE IV : Résolution des problèmes de lubrification hydrodynamique	55
en régime transitoire	
IV-1. Introduction	55
IV-2. Systèmes de coordonnées et notations	56
IV-3. Concept de Mobilité	57
IV-4. Méthode de résolution de l'équation de Reynolds	62
IV-4-1. Méthode de différences finies bidimensionnelle	62
IV-4-2. Théorie du palier court optimisée	65
IV-4-3. Théorie du palier court classique	66
IV-5. Résultats	73
IV-6. Conclusion	79

CHAPITRE V : Effets des défauts de forme et de mésalignement sur le	80
comportement des paliers de moteurs	
V-1. Introduction	80
V-2. Validation	80
V-3. Influence des différents paramètres	84
V-3-1. Influence du jeu radial	84
V-3-2. Influence de la viscosité	85
V-3-3. Influence du mode d'alimentation	86
V-4. Influence des défauts de forme	89
V-5. Influence du mésalignement	95
V-6. Conclusion	105
CONCLUSION GENERALE	106
ANNEXE A : Dérivation de l'équation de Reynolds	108
ANNEXE B : Forme variationnelle de l'équation de Reynolds	113
ANNEXE C : Calculs des intégrales	117
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	118
RESUME	123

NOMENCLATURE

C	Jeu radial du palier, $(R_c - R_a)$	[m]
C_a, C_c	Couples de frottement sur l'arbre et le coussinet	[N.m]
C_p	Chaleur spécifique du lubrifiant	[J/kg°C]
D	Diamètre moyen du palier, $D=2R$	[m]
d	Amplitude du mésalignement	[m]
D_m	Degré de mésalignement, $D_m = \frac{\delta}{\delta_{\max}}$	
e	Excentricité du palier	[m]
e_0	Excentricité du palier dans la section médiane	[m]
F(t)	Charge dynamique appliquée au palier	[N]
F_x, F_y	Composantes de la force F(t) dans le repère (O_c, X, Y)	[N]
h	Épaisseur du film lubrifiant	[m]
H	Épaisseur du film sans dimension, $H = \frac{h}{C}$	
L	Longueur du palier	[m]
l	Largeur de la rainure	[m]
l_1	Position du centre de gravité de la bielle	[m]
l_2	Rayon de manivelle	[m]
l_3	Entraxe de la bielle	[m]
M	Facteur de mobilité	
M_x, M_y	Composantes du vecteur mobilité dans le repère fixe	
\mathcal{M}	Moment hydrodynamique dû au mésalignement	[N.m]
$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y$	Composantes du moment hydrodynamique	[N.m]
$\overline{\mathcal{M}}$	Moment hydrodynamique sans dimension, $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \frac{2}{FML}$	
$\overline{\mathcal{M}}_x, \overline{\mathcal{M}}_y$	Composantes du moment hydrodynamique sans dimension	
$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y$	Composantes du moment hydrodynamique dans le repère fixe	[N.m]
N	Vitesse de rotation du moteur	[tr/min]
O_a	Centre de l'arbre	
O_c	Centre du coussinet	
O_1	Centre du vilebrequin	
O_2	Centre de tête de bielle	
O_3	Centre du pied de bielle	
p	Pression hydrodynamique dans le film	[Pa]
\overline{P}	Pression sans dimension, $\overline{P} = p \frac{LD}{FM}$	
$\overline{P}_{\text{moy}}$	Puissance moyenne dissipée	[W]
Q	Débit axial	[m ³ /s]
\overline{Q}	Débit axial sans dimension, $\overline{Q} = Q \frac{\mu LD}{C^3 FM}$	
R	Rayon moyen du palier	[m]

R_a	Rayon de l'arbre	[m]
R_c	Rayon du coussinet	[m]
R_1	Système d'axes $(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ de référence lié au bâti	
R_2	Système d'axes $(O_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ lié à la manivelle (vilebrequin)	
R_3	Système d'axes $(O_3, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ lié à la bielle	
t	Temps	[s]
T	Température d'équilibre dans le film	[°C]
T_0	Température du lubrifiant à l'alimentation	[°C]
U_a, U_c	Composantes des vitesses linéaires de l'arbre et du coussinet suivant Ox	[m/s]
V_a	Composante de la vitesse linéaire de l'arbre suivant Oy	[m/s]
W	Charge hydrodynamique supportée par le palier	[N]
\bar{W}	Charge hydrodynamique sans dimension : $\bar{W} = W \frac{2}{FM}$	
W_ε, W_ϕ	Composantes de la charge hydrodynamique	[N]
$\bar{W}_\varepsilon, \bar{W}_\phi$	Composantes de la charge hydrodynamique sans dimension	
x	Coordonnée dans le sens de rotation	[m]
\bar{x}_1	Vecteur unitaire portant l'axe du cylindre	
\bar{x}_2	Vecteur unitaire portant l'axe portant la manivelle	
\bar{x}_3	Vecteur unitaire portant l'axe portant la bielle	
y	Coordonnée dans le sens de la hauteur du film	[m]
z	Coordonnée axiale	[m]
\bar{z}	Coordonnée axiale sans dimension, $\bar{z} = \frac{z}{L}$	
\bar{z}_1	Vecteur unitaire portant l'axe du vilebrequin	
α_M	Direction de mobilité, $\alpha_M = (\bar{\varepsilon}, \bar{M})$	[Degrés]
β	Direction du mésalignement par rapport à la ligne des centres	[Degrés]
β'	Coefficient de thermoviscosité	[°C ⁻¹]
δ	Amplitude relative du mésalignement, $\delta = \frac{d}{C}$	
δ_{\max}	Amplitude relative maximale du mésalignement	
$\dot{\delta}, \dot{\beta}$	Vitesses de mésalignement	
ΔT	Élévation de température	[°C]
Δt	Pas du temps, $\Delta t = \frac{\Delta\theta_2}{\omega_2}$	[s]
ε	Excentricité relative du palier, $\varepsilon = \frac{e}{C}$	
ε_0	Excentricité relative du palier dans la section médiane, $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{C}$	
$\dot{\varepsilon}$	Vitesse d'écrasement du film	
ψ	Angle repérant la charge, $\psi = (\bar{F}, \bar{X})$	[Degrés]
$\dot{\psi}$	Vitesse angulaire de la charge	[rd/s]
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant	[Pa.s]

ϕ	Angle de calage	[Degrés]
φ	Angle repérant le moment hydrodynamique résultant par rapport à ligne des centres	[Degrés]
$\dot{\phi}$	La vitesse angulaire de la ligne des centres par rapport à la charge	
$\bar{\omega}$	Vitesse angulaire moyenne de l'arbre et du coussinet rapportée à la charge, $\bar{\omega} = \frac{\omega_a + \omega_c}{2} - \dot{\psi}$	[rd/s]
ω_a, ω_c	Vitesses angulaires de l'arbre et du coussinet par rapport au repère fixe	[rd/s]
ω_2	Vitesse angulaire du moteur, $\omega_2 = \frac{\pi N}{30}$	[rd/s]
Ω	Facteur de sur-relaxation, $1 < \Omega < 2$	
θ	Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres	[Degrés]
θ^*	Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur l'axe $O_c X$	
θ_2	Angle de rotation du vilebrequin	[Degrés]
θ_e, θ_s	Coordonnées circonférentielles délimitant la zone active du palier	[Degrés]
ρ	Masse volumique du lubrifiant	[kg/m ³]
σ	Coefficient de sous-relaxation, $0 < \sigma < 1$	
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement, $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$	[N/m ²]
$\Delta\theta_2$	Pas du temps	[Degrés]
(\cdot)	Dérivée partielle par rapport au temps	
PMB	Point mort bas	
PMH	Point mort haut	

INTRODUCTION

Les paliers hydrodynamiques, dont le bon fonctionnement dépend de l'existence d'un film fluide visqueux entre les surfaces de l'arbre et du coussinet, doivent répondre à des exigences technologiques de plus en plus sévères dues à l'augmentation des charges et des vitesses de rotation.

Une utilisation optimale de leurs capacités nécessite une meilleure compréhension de leur comportement qui ne peut être réalisée qu'à travers des études théoriques et expérimentales plus approfondies.

La technologie de l'automobile ne cessant de se développer, les conditions de chargement sont devenues de plus en plus sévères. C'est pour de telles raisons que depuis une trentaine d'années, plusieurs études aussi bien théoriques qu'expérimentales ont été réalisées pour la prédiction de l'épaisseur minimale du film lubrifiant.

Dans un moteur à combustion interne, le contact au niveau des différents couples cinématiques (tourillons-paliers principaux de vilebrequin, maneton-palier de tête de bielle, axe du piston-palier de pied de bielle, piston-chemise, etc.) joue un rôle prépondérant tant au niveau de sa durée de vie qu'au niveau de l'énergie dissipée par frottement. En effet, plus du quart de la puissance indiquée du moteur est perdue en frottement dans le moteur et dans la transmission. L'existence d'un film d'huile dans les paliers de moteur substitue au frottement direct des surfaces métalliques le frottement interne, plus faible, des lubrifiants interposés. Cependant, l'importance des forces d'explosion des gaz et des forces d'inertie dans un moteur entraîne une présence fréquente de contacts métal-métal parfois destructifs entre les surfaces contiguës au film. Ces contacts sont essentiellement dus à un mauvais choix de lubrifiant et/ou du système de lubrification utilisé. En conséquence, l'étude du comportement dynamique de ce type d'appui est nécessaire aux fins d'améliorer aussi bien le rendement que la durée de vie du moteur.

Cette étude constitue une meilleure connaissance théorique du comportement dynamique des paliers de moteur soumis à des charges dynamiques importantes variables en module et en direction. L'étude de l'influence des défauts de mésalignement et des défauts de forme sur les caractéristiques hydrodynamiques (débits, trajectoires du centre de l'arbre, couples de frottement, épaisseur minimale du film, etc.) est aussi présentée dans ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur les paliers lisses fonctionnant en régimes permanent et transitoire. Après présentation succincte de l'évolution des différentes méthodes de résolution, les travaux concernant les problèmes liés au mésalignement et aux déformations élastiques ainsi que ceux se rapportant aux effets thermiques dans les paliers sont décrits.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle dans le but de déterminer les diagrammes de charge qui seront exploités pour le calcul des caractéristiques de fonctionnement des paliers de moteurs.

Au chapitre III, l'équation de Reynolds exprimée en régime transitoire applicable lorsque l'arbre présente un défaut de forme ou un mésalignement quelconque variable avec le temps est dérivée. Les différentes relations permettant de déterminer la trajectoire du centre de l'arbre, la valeur minimale de l'épaisseur du film et sa position dans le cycle, la puissance dissipée, les couples de frottement, le débit axial, et les moments dus au mésalignement sont aussi établies.

Au chapitre IV, la méthode de mobilité de **Booker** qui permet une résolution rapide et précise du problème de lubrification hydrodynamique en régime dynamique dans le cas de paliers est appliquée. En suite, nous proposerons les méthodes les plus utilisées pour la résolution de l'équation de Reynolds à savoir la méthode des différences finies bidimensionnelle, la théorie du palier court classique et la théorie du palier court optimisée basée sur les méthodes de séparation de variables.

Dans le cinquième chapitre, sont étudiées l'influence du jeu radial, des conditions d'alimentation, de la viscosité du lubrifiant, des défauts de forme et du mésalignement dynamique sur les caractéristiques de fonctionnement des paliers de moteurs.

Enfin une conclusion générale dans laquelle sont présentés les principaux résultats obtenus dans cette étude ainsi que les différents prolongements possibles de celle-ci.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I-1. INTRODUCTION

Lorsque la charge extérieure qui agit sur l'arbre ou le coussinet n'est pas constante en direction et en module, le centre de l'arbre décrit une trajectoire à l'intérieur du coussinet. La détermination de cette trajectoire nécessite la résolution des équations de la dynamique, donc la connaissance de l'action hydrodynamique du film lubrifiant.

La difficulté réside dans le fait que la force hydrodynamique dépend de la position inconnue de l'arbre dans le coussinet et des vitesses des surfaces qui prennent en compte la vitesse inconnue du centre de l'arbre.

Dans ce chapitre, nous allons aborder les différentes études et méthodes de résolution élaborées pour déterminer les caractéristiques de fonctionnement des paliers lisses dynamiquement chargés. En suite, nous nous intéresserons aux études effectuées sur ce type de paliers avec la prise en considération des défauts de mésalignement et des déformations élastiques.

I-2. METHODES DE RESOLUTION

La détermination des caractéristiques de fonctionnement des paliers en régime transitoire n'était possible qu'à travers l'utilisation des hypothèses simplificatrices et cela à cause des moyens de calcul limités. Les premières études consacrées dans ce domaine avaient utilisé le concept de la vitesse équivalente, tel celui introduit en 1947 par **Stone** et **Underwood** [1]. Cette méthode n'étant adaptée qu'aux cas où la vitesse de rotation de la charge est constante.

Les méthodes de calcul manuel, les seules disponibles à l'époque sont adaptées seulement pour les charges purement tournantes. En plus, elles prévoient une épaisseur du film nulle et ne prennent pas en considération antérieure de la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet et de sa vitesse de déplacement.

Dans la même époque; c'est-à-dire entre 1947 et 1951, **Burwell** [2,3,4] proposa une méthode de résolution permettant de déterminer la trajectoire du centre de l'arbre d'un palier de tête de bielle.

Les équations établies, en négligeant le débit axial, étaient analogues à celles données par **Sommerfeld** [5], mais s'adaptaient mal au type de palier étudié (palier court). Il a donc établi une méthode de résolution, uniquement utilisable pour des cas de charge unidirectionnelle, en négligeant le gradient de pression circonférentiel.

C'est à partir de 1957 qu'une première méthode permettant de déterminer la trajectoire du centre de l'arbre pour un diagramme de charge quelconque a été mise au point par **Hahn** [6]. Celui-ci en utilisant les conditions aux limites de Gumbel, n'a pas tenu compte de l'alimentation. Au point de vue mathématique, **Hahn** après discrétisation du problème a calculé indépendamment les pressions dues à l'effet d'écrasement « squeeze effect » et à l'effet d'entraînement « wedge effect », pour la résolution des équations du mouvement, il a employé la méthode de Runge-Kutta. Partant des mêmes hypothèses que **Hahn**, **Someya** [7], **Holland** [8] et **Lang** [9] sont arrivés à des résultats analogues par des méthodes mathématiques différentes et qui sont plus faciles à programmer.

Des études expérimentales ont été menées par **Carl** [10] et **Radermacher** [11] qui ont permis de constater que :

- Il est nécessaire de tenir compte de perturbation due à l'alimentation,
- Les excentricités mesurées sont plus faibles que celles calculées,
- Aux fortes intensités de charge, on doit tenir compte de la déformation de l'arbre et du coussinet.
- On peut, en faisant varier la forme de l'orifice d'alimentation ou le jeu radial, améliorer le débit et ainsi obtenir des résultats plus proches de ceux calculés puisque les hypothèses de température et de viscosité constantes sont alors très vraisemblables.
- Les résultats pratiques et théoriques sont qualitativement proches.

Radermacher a présenté, toujours dans le même article, une étude expérimentale afin d'examiner les résultats théoriques dans le cas où le diagramme de force présentait une discontinuité brutale. Cette étude a été effectuée dans le cas d'un moteur diesel. La comparaison a porté sur la trajectoire mesurée et calculée du centre de l'arbre et sur le diagramme de force mesurée et théorique ; on constate une bonne concordance entre les valeurs des excentricités maximales alors que la force maximale calculée est inférieure de 15% à celle mesurée. Ceci semble dû à un effet d'impact dont il n'a pas été tenu compte dans les calculs.

Une étape importante a été franchie dans la résolution du problème en régime transitoire en 1962 lorsque **Horsnell** et **Mc Callion** [12] ont proposé une méthode tenant compte à la fois des conditions aux limites de Reynolds et de l'alimentation (palier alimenté circonférentiellement). Leur méthode utilise aussi la technique du film d'huile pour un grand nombre de valeurs de l'excentricité et des composantes radiales et tangentielles de la vitesse du centre de l'arbre. Les conditions initiales utilisées nécessitent le calcul et l'addition des différentes portances alors que dans la méthode de **Hahn** il suffisait d'additionner les pressions. Le résultat final est obtenu par interpolation. Les remarques suivantes ont été faites :

- à haute excentricité, une bonne approximation peut être obtenue en ignorant les pressions négatives puisque la pression ambiante est faible par rapport à celle développée dans le film.

- les excentricités maximales sont atteintes moins souvent que lorsque la rupture du film n'est pas prise en considération.
- la rupture du film n'intervient pas toujours.

Cette méthode possède un certain nombre de limitations pratiques, en particulier un changement de la pression d'alimentation ou du rapport de la longueur au diamètre du palier $\frac{L}{D}$ exige de refaire le calcul complet. D'autre part, la variation de l'angle de charge ne doit pas excéder quatre degrés durant l'intervalle de temps entre lequel on calcule deux positions successives du centre de l'arbre.

C'est essentiellement pour éviter cet inconvénient que **Llyod, Horsnell et Mc Callion** [13] ont développé une méthode publiée en 1966. Ils n'ont cependant pas pu conserver les conditions de Reynolds et ont utilisé les conditions de Gumbel avec pression de dégazage à la place de pression nulle ; ceci leur a cependant permis de tenir compte d'un phénomène qui n'avait pas été jusqu'à présent étudié : la variation de la vitesse de rotation de l'arbre due aux oscillations développées dans les paliers de « tête de bielle ». Pour une alimentation circonférentielle, cette méthode permet d'obtenir, la trajectoire du centre de l'arbre, le pic de pression, la zone de rupture de film et la valeur du débit. Il est à remarquer que l'influence de la pression de dégazage, peu importante du point de vue de l'utilisateur semble l'être sur un plan théorique.

En 1967, **Blok** [14] a développé une méthode de résolution utilisant la quantité de mouvement. Il a ainsi estimé que l'épaisseur minimale du film est obtenue lorsque l'effet d'écrasement est important. Il a ainsi donné une approximation de l'excentricité maximale à partir du diagramme de charge.

Afin d'éviter d'avoir recours aux moyens de calcul numérique qui, il y a une trentaine d'années, n'étaient pas encore développés, des méthodes graphiques ont été développées et ont souvent été utilisées aux fins de détermination des différentes caractéristiques de fonctionnement dynamique des paliers.

Un des précurseurs de ces techniques a été **Booker** qui a développé le concept de mobilité. En 1965, **Booker** [15] a établi une théorie appelée « **méthode de mobilité** ». Dans celle-ci, il décompose le mouvement de l'arbre en deux composantes, l'une en supposant que l'arbre a une vitesse de rotation nulle (effet d'écrasement), l'autre tenant compte des vitesses angulaires de l'arbre et la charge (effet de rotation). Ces deux vitesses sont alors exprimées en fonction des composantes d'un vecteur appelé « **vecteur mobilité** » qui dépend, pour des conditions aux limites données de la position de l'arbre par rapport à la charge et du rapport L/D . A partir de cette méthode de résolution, **Booker** a établi des cartes de mobilité (figure I-1) composées de lignes d'isomobilité et de lignes de direction de mobilité. Les lignes de direction de mobilité (ou trajectoire d'écrasement) représente la trajectoire qu'aurait le centre de l'arbre soumis à une charge unidirectionnelle, le coussinet et l'arbre étant fixes. Les lignes d'isomobilité définissent à tout instant la vitesse du centre de l'arbre (le long d'une direction de mobilité), relativement à sa position dans le palier, par rapport à la charge.

Cette vitesse serait, par exemple, pour une charge constante (trajectoire d'écrasement centrale) dix fois plus importante au point A qu'au point B (figure. I-1).

Dans le cas du palier court, la carte de mobilité d'un palier ayant L/D égal à l'unité est suffisante pour déterminer les cartes de mobilité pour un rapport L/D quelconque. Il faut cependant remarquer que l'hypothèse du palier court n'est justifiée que pour des rapports L/D très inférieur à 1. Cette méthode peut aussi être utilisée dans le cas de l'hypothèse du palier long $\left(\frac{L}{D} \rightarrow \infty\right)$ ou de palier de longueur finie [16].

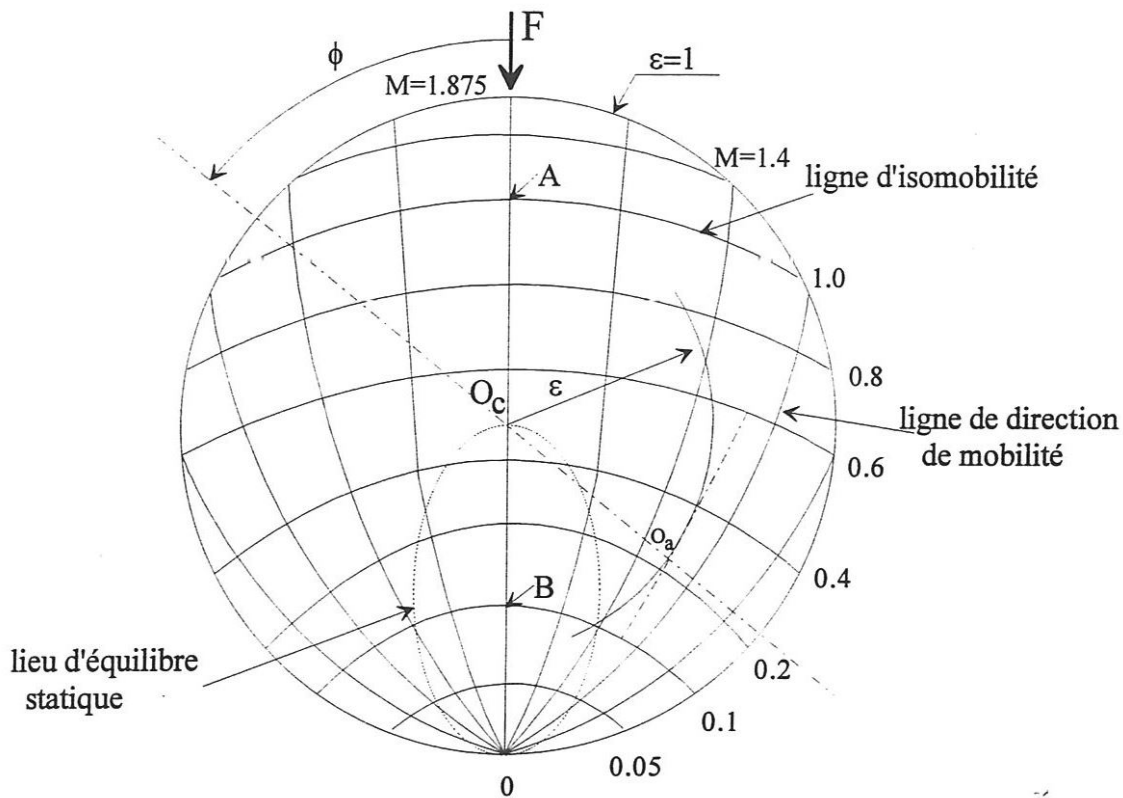


Figure I-1 : Carte de mobilité (cas du palier de longueur finie)

Booker [17] a développé sa méthode, tout d'abord en établissant une carte donnant le rapport du maximum de pression hydrodynamique à la charge spécifique $\frac{F}{LD}$. Cette carte permet de déterminer la pression maximum dans le film pour une charge et une position de l'arbre donnée. Puis en 1971 [18], il a appliqué numériquement sa méthode au cas des paliers de révolution (palier court $\frac{L}{D} \rightarrow 0$ ou palier de longueur finie). Le calcul est direct et ne nécessite pas d'itération sur la vitesse d'écrasement ε et sur la vitesse de rotation de la ligne des centres par rapport à la direction de la charge ϕ , ceci entraîne un gain de temps important tout en conduisant à des résultats précis.

En 1969, **Ross et Slaymaker** [19] ont effectué une étude théorique, en utilisant le concept des vitesses équivalentes. La valeur de la charge supportée par le palier est calculée par la théorie du palier court d'**Ocvirk**. En appliquant numériquement cette méthode de résolution, les auteurs ont pu déterminer la trajectoire du centre de l'arbre des différents paliers (paliers principaux, paliers de tête de bielle et de pied de bielle) d'un moteur dont certains comportent une demi rainure circonférentielle. Les auteurs ont aussi étudié l'influence du jeu radial sur l'épaisseur minimale du film lubrifiant et évalué le jeu optimal dans un cas précis.

A la suite des travaux de **Booker, Moes et Bosma** [20] ont résolu l'équation de Reynolds en utilisant la méthode des différences finies. Le palier était de longueur finie et les conditions aux limites étaient celles de Gumbel ou de Sommerfeld. A partir de ces résultats, les auteurs ont pu établir des expressions analytiques approchées de la fonction de mobilité permettant un calcul direct de la trajectoire du centre de l'arbre.

Les mêmes auteurs avec **Sikkes** [21] ont proposé dans une autre étude une méthode remplaçant les vecteurs mobilité et impédance par des tenseurs. Cette méthode permet la résolution de palier à arc partiel et de palier à patins oscillants ou possédant des rainures d'alimentation.

En 1980, **Rohde et Ezzat** [22] ont utilisé la méthode de **Booker** pour étudier une bague flottante dans un palier de moteur automobile. Avec un tel procédé, les pertes par frottement sont sensiblement diminuées. La solution de ce problème est alors équivalente à la résolution parallèle de deux paliers par la méthode de mobilité.

Les travaux de **Booker** deviennent de plus en plus importants puisque plusieurs chercheurs ont utilisé sa méthode de mobilité pour résoudre les problèmes hydrodynamiques tel que le travail proposé par **Goenka** [23] qui a donné des expressions analytiques des composantes du vecteur mobilité dans le cas du palier de longueur finie. Ces expressions, semblables à celles données par **Moes**, sont plus précises à hautes excentricités. Il a pu évalué, les positions optimales d'un trou ou d'une rainure d'alimentation en donnant les expressions de la pression maximale, connaissant sa position et les angles définissant la zone de pression. A la suite des travaux de **Booker**, en utilisant la méthode de mobilité, **Tanneau** [24] a déterminé l'influence de rainures circonférentielles médianes et partielles pour un palier de tête de bielle de compresseur. Les résultats montrent que la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet est uniquement modifiée dans la zone des rainures .

La plus part du travail fondamental sur l'évolution et les limites du film fluide dans les paliers dynamiquement chargés a été présenté pour la première fois par **Milne** [25] qui a laissé un vide intempestif dans ce domaine très spécialisé.

L'approche de **Milne** considère un modèle de maille en mouvement et en changement infini pour faire sortir les limites du film lubrifiant.

Une autre méthode a été développée dans la compagnie **Glacier Metal** par **Jones** [26] utilisant des débits internodaux qui a proposé une méthode définissant un volume de contrôle, autour d'un nœud, dans lequel le mouvement du fluide est représenté par quatre débits, fonctions du gradient de pression, de la vitesse relative de rotation des surfaces et de l'épaisseur du film lubrifiant. A chaque nœud et à chaque instant, il peut comparer le volume de lubrifiant, calculé à partir des débits internodaux, et le volume physique. Il met ainsi en évidence les cas où il y a insuffisance de lubrifiant pour générer la portance hydrodynamique. Il obtient par cette méthode des épaisseurs minimales de film d'huile plus faibles que dans le cas où l'évolution de la quantité de fluide n'est pas prise en compte.

En 1972, **Bayada** [27] mit au point une méthode de résolution de l'équation de Reynolds en prenant une formulation variationnelle du problème et en mettant en évidence les phénomènes de cavitation dans les paliers fonctionnant en régime transitoire. Il calcule ainsi la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet en prenant l'hypothèse du palier court et en déterminant à chaque instant la zone de cavitation. Prenant l'hypothèse du palier long, il effectua les mêmes calculs pour un palier soumis uniquement à une charge sinusoïdale positionnée sur l'axe de référence du palier.

Deux ans après, **Bayada** et **Du Parquet** [28] ont, dans le cas du palier court, donné les paramètres qui influent sur le domaine de cavitation.

Peu d'auteurs se sont intéressés à l'étude de l'influence des efforts d'inertie dus aux pièces en mouvement, sur la hauteur minimale du film d'huile dans les paliers de bielle. **Martin** et **Booker** [29] ont proposé une étude dans laquelle ils montrent en particulier que dans les paliers de tête de bielle la valeur minimale du film lubrifiant est plutôt liée aux efforts d'inertie qu'aux efforts dus à la poussée des gaz. Ce phénomène reste valable tant que la poussée des gaz reste inférieure à cinq fois les efforts d'inertie.

En utilisant la méthode de mobilité dans le cas du palier court et connaissant la valeur des masses et la géométrie du système bielle-manivelle, ils ont calculé les trajectoires du centre de l'arbre d'un palier pour 120 cas différents de charge et ils ont constaté que la hauteur minimale n'est pas affectée par une variation raisonnable du rapport du rayon de manivelle à la longueur de la bielle. D'autre part, ils ont remarqué qu'une diminution du jeu du palier, pour une forte excentricité, entraîne une augmentation de la hauteur minimale du film lubrifiant tant que la diminution de la viscosité, due à l'élévation de température n'est pas prédominante. Les mêmes constatations ont été présentées dans l'étude de **Llyod**, **Horsnell** et **Mc Callion** [30] pour les paliers de tête de bielle.

En utilisant la théorie du palier court et les conditions aux limites de **Gümbel**, **Martin** et **Booker** ont tracé un graphe donnant l'épaisseur minimale du film d'huile en fonction du jeu, des dimensions du palier et des masses en mouvement. Pour le cas particulier du palier de tête de bielle, une évaluation approximative des masses en présence peut être obtenue en supposant qu'elles soient réparties pour 1/3 en mouvement alternatif au pied de bielle et pour 2/3 en rotation à la tête de bielle. En ajoutant à la première, la masse du piston et de son axe et celle du pied de bielle, on

obtient une masse en translation pratiquement double de celle en rotation. Connaissant ces masses et les conditions géométriques du palier, l'excentricité maximale peut être déduite du graphe précédent. Ils ont aussi établi un graphe permettant de déterminer, pour un palier soumis à des forces d'inertie, l'excentricité maximale en fonction de l'excentricité quasi-statique obtenue pour une charge purement tournante. D'autre part, **Dede** [31] a montré que la prise en compte de l'inertie de l'arbre ne modifie que faiblement la trajectoire du centre de l'arbre, sauf dans le cas où le palier est proche du volant d'inertie.

La résolution rapide du problème d'un palier en régime transitoire est liée à l'utilisation de l'hypothèse du palier court. Cependant, aux grandes excentricités, cette hypothèse conduit à une certaine imprécision. Aussi, un certain nombre d'auteurs ont développé des méthodes se situant entre le palier court et le palier de longueur finie. **Dede**, après avoir développé un programme utilisant la théorie du palier de longueur finie, a exprimé la distribution de pression axiale sous forme analytique (forme parabolique). En introduisant cette forme dans l'équation de Reynolds, qui devient alors une équation différentielle ordinaire du second ordre, la résolution s'effectue par simple inversion de matrice. Moins rapide que la méthode de **Booker**, elle permet toutefois de prendre en compte les inerties de masse et la présence de rainure d'alimentation. En 1975, **Ritchie** [32] a développé une méthode semi-analytique, appelée méthode du palier court optimisée, plus précise que celle du palier court classique à haute excentricité. Pour cela, il introduit une constante, déterminée par la méthode de Galerkin, multiplicatrice de la pression. En employant cette même méthode, **Dede** et **Holmes** [33] ont établi une méthode semi-analytique rapide pour déterminer la trajectoire du centre de l'arbre et le champ de pression dans le film d'huile. Le gain en temps de calcul, par rapport à une méthode utilisant l'hypothèse du palier de longueur finie, est de l'ordre de 90%. Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, la différence la plus notable étant une pression calculée plus importante que la pression mesurée dans le film d'huile.

I-3 ETUDE DES PALIERS MESALIGNES

Un grand nombre d'avaries rencontrées dans les paliers de moteurs thermiques, de turbines et de compresseurs seraient dues au mauvais alignement de l'arbre et du coussinet. Ceci a été confirmé lors du démontage de ces paliers après une longue durée de fonctionnement. En effet, des marques d'usure, visibles à l'œil nu, apparaissent souvent aux deux extrémités du coussinet.

Dans la pratique, le mésalignement existe toujours, il peut être dû soit au fonctionnement (déformations élastiques ou thermiques par exemple) soit aux imprécisions de construction.

Les théories existantes s'intéressent essentiellement au cas des paliers alignés et le nombre des études traitant du cas mésaligné est faible.

1-3-1 Paliers soumis à une charge statique

Les premières recherches sur les paliers mésalignés se sont limitées à l'étude des caractéristiques statiques. Ainsi, la première étude sur ce problème est celle de **Mc Kee** [34] qui a mesuré les profils de pression dans la direction axiale du palier.

En 1950, **Walther** et **Sassenfeld** [35] ont proposé une solution analytique donnant le champ de pression pour un palier mésaligné. En 1951, **Dubois**, **Mabie** et **Ocvirk** [36] ont montré, sous l'effet du mésalignement, le champ de pression perdait sa symétrie et que la valeur du maximum de pression augmentait de façon importante. Ces travaux ont été poursuivis pour évaluer l'excentricité aux extrémités du palier, le débit axial et les températures locales dans le palier.

Smalley et **Mc Callion** [37] en 1966, en utilisant les travaux de **Walther** et **Sassenfeld**, ont effectué une étude complète pour des paliers lisses mésalignés de rapport $L/D=0.5$ et 0.75 , tandis que **Stokley** et **Donaldson** [38] s'intéressaient à des paliers à arc partiel.

Asanabe, **Akahoshi** et **Asai** [39] ont pris une configuration plus complexe en introduisant deux rainures d'alimentation mais en se limitant à des mésalignements dans le plan vertical. L'équation de Reynolds est résolue pour un palier mésaligné court ou long avec les conditions aux limites de Sommerfeld. Les résultats théoriques sont comparés avec des résultats expérimentaux obtenus pour un palier de rapport $L/D=1.5$. La comparaison entre les différents résultats (champ de pression, hauteur du film d'huile, coefficient de frottement) est bonne.

En 1973, **Nicolas** et **Frêne** [40] ont effectué une comparaison entre théorie et expérimentation pour un palier soumis à une charge centrale et un couple quelconque, la rainure axiale d'alimentation étant située au point d'épaisseur maximum du film d'huile dans la section médiane du coussinet. Les calculs sont ensuite effectués pour différentes positions de la rainure et avec une charge décentrée. A la suite de cette étude, **Nicolas** et **Frêne** ont fait les remarques suivantes :

- la valeur de la pression croît quand le degré de mésalignement augmente et son point d'application se rapproche d'une des extrémités du palier,
- la hauteur minimale du film d'huile diminue lorsque le degré de mésalignement augmente,
- lorsque le mésalignement est dû à la flexion de l'arbre, il est possible de supposer que le plan de flexion contient la direction de la charge.

En 1979, **Pinkus** et **Bupara** [41] ont présenté une analyse pour résoudre des paliers de rapports L/D quelconques et comportant un nombre de rainures axiales quelconques et situées de façon arbitraire. Le mésalignement peut varier en amplitude et en direction jusqu'au contact entre l'arbre et le coussinet. En plus des caractéristiques habituelles, les moments dus au mésalignement dans les directions horizontales et verticales sont calculés. Parmi les différentes conclusions tirées de cette étude, on peut noter que :

- lorsque le degré de mésalignement D_m tend vers l'unité, la valeur de la pression maximale tend vers l'infini et la valeur minimale de la hauteur du film tend vers zéro. La capacité de charge tend vers une valeur finie,
- la hauteur minimale du film d'huile ne représente plus une ligne, comme dans le cas du palier aligné, mais un point de contact à une des extrémités du palier,
- le positionnement d'une rainure d'alimentation axiale est très délicat dans le cas d'un palier mésaligné. Les auteurs donnent une relation permettant de déterminer la position de la rainure pour un mésalignement donné.

En 1985, **Ikeuchi, Katsuse, Hamamura** et **Mori** [42] ont étudié l'influence d'un mésalignement sur les performances statiques d'un palier possédant une rainure d'alimentation circonférentielle. Le champ de pression est calculé à l'aide d'une équation de Reynolds modifiée, incorporant un paramètre caractérisant la proportion de fluide présente au nœud considéré. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre l'équation de Reynolds. Les auteurs ont constaté que dans le cas étudié :

- le mésalignement vertical a plus d'influence sur la valeur minimale du film d'huile que le mésalignement horizontal,
- le débit axial n'est pas identique aux deux extrémités du palier et peut y avoir insuffisance de lubrifiant dans le cas d'un mésalignement horizontal.

En 1982, **Reason** et **Siew** [43] ont présenté une méthode de résolution pour les paliers mésalignés permettant de déterminer, pour différents degrés de mésalignement, les caractéristiques statiques d'un palier.

Un certain nombre d'auteurs se sont intéressés à des problèmes bien spécifiques des paliers mésalignés. Ainsi, les effets thermiques ont été introduits par **Mokhtar, Safar, Abd-El-Rahman** et **Peeken** [44,45] avec une analyse adiabatique dont le principal enseignement est que les effets thermiques sont plus importants dans les paliers mésalignés. **Craighead, Dowson, Sharp** et **Taylor** [46] ont montré que certains coefficients dynamiques étaient modifiés de façon importante par la prise en compte d'un mésalignement de l'arbre. Les fluides non-newtoniens ont aussi été incorporés aux analyses de ces paliers.

I-3-2 Paliers soumis à une charge dynamique

Dans les moteurs à combustion interne, les déformations du carter ou du vilebrequin peuvent provoquer l'apparition de mésalignements. Ceux-ci peuvent aussi être dus à des erreurs d'assemblage ou à des déformations thermiques. Malgré l'importance de ce problème peu d'auteurs se sont intéressés à l'étude de l'influence du mésalignement dans un palier de moteur thermique (en régime dynamique), cela est essentiellement dû à la complexité du problème.

Goenka [47], en 1984, a étudié un palier de tête de bielle mésaligné sous une charge dynamique. Le mésalignement est supposé constant et perpendiculaire à l'axe de bielle, l'arbre tournant autour de son propre axe. L'analyse utilise une méthode d'éléments finis permettant de calculer des paliers ayant des variations, axiales ou

circonférentielles, de profil ou possédant des trous ou des rainures d'alimentation. **Goenka** montre que le mésalignement réduit l'épaisseur minimale du film d'huile sur tout le cycle et que sa valeur minimale est réduite de plus de 50%.

Cette méthode nécessite un important temps de calcul et de ce point de vue n'est donc pas avantageuse. Cette étude est la seule qui, malgré l'hypothèse de mésalignement constant, soit adaptée à l'étude des paliers mésalignés en régime dynamique.

En 1992, **Goenka** [23] améliora cette méthode en utilisant la méthode du pivot complémentaire extrêmement plus rapide que la précédente. Actuellement, le Laboratoire de General Motors Research utilise cette méthode.

En 1988, **Maspeyrot** [48], a déterminé l'influence de certains défauts de forme (profil de l'arbre conique ou parabolique, mésalignements) sur les caractéristiques dynamiques de deux paliers de ligne d'un moteur à essence. Il a aussi étudié l'influence du jeu radial sur l'épaisseur minimale du film d'huile, la forme de courbe obtenue étant similaire à celle déterminée dans le cas statique. Ces travaux ont été menés au Laboratoire de Mécanique du Solide de l'Université de Poitiers (France).

I-4. EFFETS ELASTIQUES ET THERMIQUES SUR LE COMPORTEMENT DES PALIERS DE MOTEURS

Les déformations élastiques interviennent le plus souvent pendant le fonctionnement. On peut considérer deux types de déformations élastiques :

- les déformations de surfaces lorsque les dimensions de la zone de contact sont faibles devant les autres dimensions.
- les déformations de structures provoquées par les actions de pression hydrodynamique sur les coussinets de bielle ou sur des structures plus importantes (vilebrequin-carter) sous l'effet des inerties et des pressions des gaz.

En 1973, **Hiruma** et **Furuhama** [49] mesurèrent expérimentalement la trajectoire du centre de l'arbre d'un palier de tête de bielle d'un moteur à essence. Utilisant quatre capteurs de distance, ils ont visualisé sur un oscilloscope le comportement de l'arbre. Cette étude a montré qu'en augmentant la vitesse de rotation de l'arbre et par conséquent les efforts d'inertie, l'épaisseur du film lubrifiant diminuait. Le même phénomène se produit lorsque la température du film augmente. Dans la discussion de cet article, **Booker** et **Stickler** ont comparé ces résultats avec les résultats théoriques obtenus par la méthode de mobilité. La comparaison fait apparaître des différences très importantes que les auteurs attribuent aux déformations élastiques, que l'on ne doit plus, selon eux, ignorer tant théoriquement qu'expérimentalement.

Une solution au problème de lubrification élastohydrodynamique (EHD) pour un palier de bielle, sous une charge dynamique, a été présentée en 1981 par **Fantino** et publiée en 1983 par **Fantino**, **Frêne** et **Godet** [50]. L'équation de Reynolds est résolue dans le cas du palier court et les hypothèses de l'élasticité plane (déformations planes) sont utilisées pour calculer les déformations du palier de bielle. Le couplage fluide-

structure est assuré à l'aide d'un processus itératif avec algorithme de sous-relaxation. Ces auteurs donnent, pour différents instants du cycle, les déformations élastiques instantanées et la distribution de pression correspondante figure II-2. Ils ont constaté les mêmes phénomènes que ceux observés dans le cas statique, c'est-à-dire une augmentation de la zone de pression sur presque tout le cycle ainsi qu'un rapprochement du point de pression maximum vers le point où la hauteur du film est minimale.

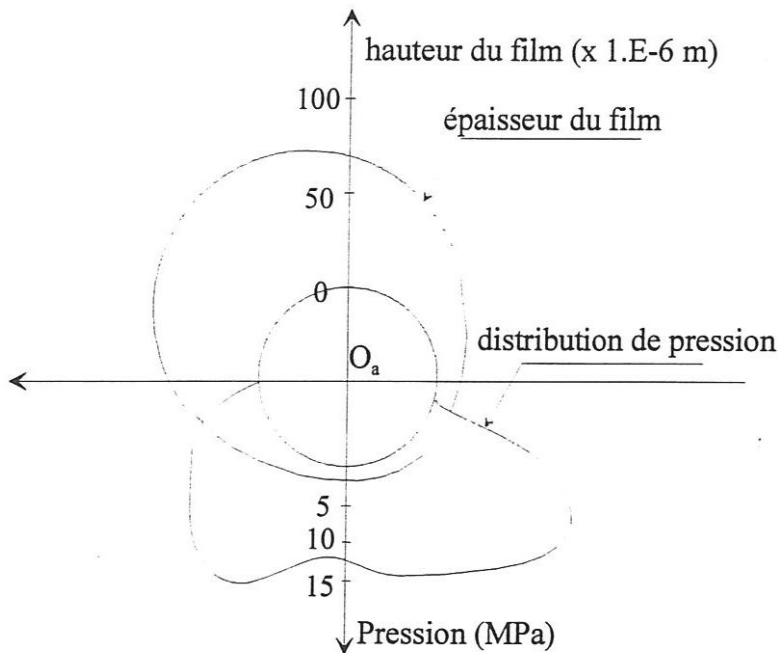


Figure II-2 : Epaisseur du film et distribution de pression autour de l'arbre

En 1985, **Labouff** et **Booker** [51] ont présenté une méthode adaptée au problème des paliers rigides et élastiques, en utilisant les éléments finis, qui leur permet de prendre en compte les effets introduits par des irrégularités de surfaces, par des rainures d'alimentation ou par des pressions ou des débits variant avec le temps. Leur méthode permet également d'introduire des vitesses axiales (en plus des rotations) pour en déterminer l'effet hydrodynamique. Ils ont ainsi montré l'influence des déformations sur le film et le champ de pression.

Dans la même année, **Van Der Tempel**, **Moes** et **Bosma** [52] ont résolu le problème EHD pour un palier court. Le système d'équations intégral-différentielles est directement discrétisé et résolu par une méthode de Newton-Raphson. La comparaison de leurs résultats avec ceux de **Fantino** est assez bonne compte-tenu de la différence du maillage utilisé. Ils ont ensuite incorporé à ce modèle la possibilité de contrôle de l'alimentation en lubrifiant [53]. Ils comparent, pour différents types de rainures d'alimentation, la hauteur du film lubrifiant et le champ de pression. C'est un modèle qui permet de déterminer correctement les frottements visqueux et la température du palier.

Les effets thermiques dans les paliers lisses en régime établi sont maintenant assez bien maîtrisés. Par contre, l'étude de ces phénomènes en régime dynamique, n'a été abordée qu'avec des hypothèses très simplificatrices. En effet, la résolution simultanée des équations de Reynolds et de l'énergie complique singulièrement le problème et entraîne des temps de calcul très importants. La théorie du palier court, par exemple, a permis à **Moes, Ten Hoeve et Der Helm** [54] d'étudier les effets thermiques dans un palier élastique. Cette méthode est une extension du modèle de **Van Der Tempel** [52,53] auquel sont incorporés les effets dus à la dissipation visqueuse et au refroidissement lié aux débits, axial et tangentiel du lubrifiant. Le temps de calcul est alors deux fois plus important que dans le cas isotherme.

Toutefois ce modèle n'incorpore pas encore la dissipation thermique à travers les surfaces et l'effet de mélange, dû à l'alimentation en lubrifiant, sur la distribution de température.

Dans cette étude bibliographique, il ressort que la méthode de mobilité de **Booker** permet une résolution précise et rapide des problèmes de lubrification hydrodynamique rencontrés dans les paliers de moteurs à combustion interne fonctionnant en régime transitoire. Cette méthode sera appliquée pour l'étude du comportement dynamique de ces paliers avec la prise en considération des défauts de forme et des défauts de mésalignement.

CHAPITRE II

ETUDES CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

II-1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse cinématique et dynamique du système bielle-manivelle d'un moteur à combustion interne. Cette analyse permettra de déterminer les efforts appliqués au niveau des différents couples cinématiques du mécanisme (maneton-tête de bielle, axe du piston-pied de bielle, chemise-piston) dans les différents repères liés aux éléments du système (bâti, bielle, manivelle).

Dans toute cette étude :

- les efforts de pesanteur sont négligeables devant les efforts dus aux gaz ;
- les contacts sont supposés ponctuels et sans frottement ;
- les éléments mécaniques sont géométriquement parfaits et symétriques.

II-2. ETUDE CINEMATIQUE

L'étude cinématique du système bielle-manivelle est nécessaire en premier lieu, pour déterminer la relation entre le déplacement du piston, sa vitesse et son accélération en fonction de l'angle du vilebrequin. Elle est aussi nécessaire pour le calcul des variations de volume de la cylindrée qui résultent du déplacement du piston et pour les calculs relatifs à la détermination des efforts, à la résistance des organes et à l'équilibrage des forces d'inertie.

II-2-1. Mise en place des repères

L'étude cinématique du système bielle-manivelle nécessite la mise en place de trois repères (figure II-1) :

R_1 le système d'axes $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe de référence (lié au bâti ①)

où : O_1 est le centre du vilebrequin,
 \vec{x}_1 est l'axe du cylindre,
 \vec{z}_1 est l'axe du vilebrequin, le volant est placé sur les \vec{z}_1 positifs.

R_2 le système d'axes $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la manivelle ② (vilebrequin) de longueur ℓ_2

où : O_2 est le centre de la tête de bielle,
 \vec{x}_2 porte la manivelle.

R_3 le système d'axes $(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à la bielle ③ d'entraxe ℓ_3

où : O_3 est le centre du pied de bielle,
 \vec{x}_3 porte la bielle.

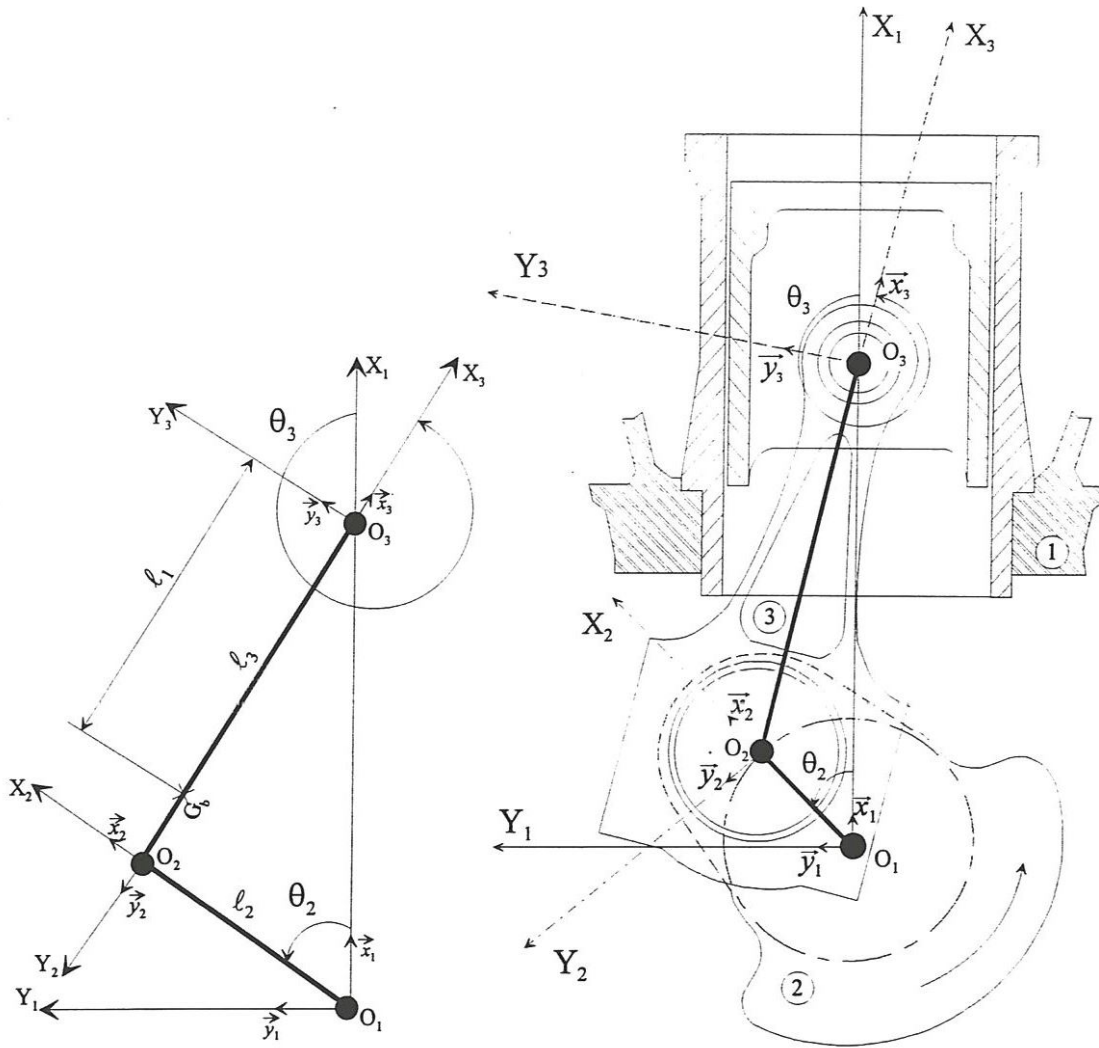


Figure II-1: Géométrie du système bielle-manivelle et définition des repères

On note G_b le centre de gravité de la bielle tel que $\vec{O}_3 G_b = -l_1 \vec{x}_3$
 On définit deux angles :

$\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ l'angle que fait la manivelle par rapport à R_1
 $\theta_3 = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ l'angle que fait la bielle par rapport à R_1

Dans ces conditions, on définit trois torseurs cinématiques :

- Pour la manivelle ②

$$[T_{2/1}]_{O_1} = \begin{cases} \vec{\omega}_{2/1} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_1 \\ \vec{V}_{O_1 \in 2/1} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

- Pour la bielle ③

$$[T_{3/1}]_{O_3} = \begin{cases} \vec{\omega}_{3/1} = \dot{\theta}_3 \vec{z}_1 \\ \quad \quad \quad = \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ \vec{V}_{O_3 \in 3/1} = v \vec{x}_1 \end{cases} \quad (\text{II-2})$$

- Pour la bielle par rapport à la manivelle

$$[T_{3/2}]_{O_2} = [T_{3/1}]_{O_2} - [T_{2/1}]_{O_2}$$

soit :

$$[T_{3/2}]_{O_2} = \begin{cases} \vec{\omega}_{3/2} = (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \vec{z}_1 \\ \vec{V}_{O_2 \in 3/2} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

Les conditions de contact en O_2 et O_3 sont :

$$\begin{cases} \vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{V}_{O_2 \in 3/1} \\ \vec{V}_{O_3 \in 3/1} = v \vec{x}_1 \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

La relation entre les vitesses, par rapport au repère fixe R_1 , des points O_1 et O_2 de la manivelle s'écrit :

$$\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{V}_{O_1 \in 2/1} + \vec{O}_2 \vec{O}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

soit :

$$\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{0} - \ell_2 \vec{x}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_1 = \ell_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \quad (\text{II-5})$$

De même, la relation entre les vitesses des points O_2 et O_3 de la bielle, s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O_2 \in 3/1} &= \vec{V}_{O_3 \in 3/1} + \vec{O}_2 \vec{O}_3 \wedge \vec{\omega}_{3/1} \\ &= v \vec{x}_1 + \ell_3 \vec{x}_3 \wedge \dot{\theta}_3 \vec{z}_1 \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{V}_{O_2 \in 3/1} = v \vec{x}_1 - \ell_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 \quad (\text{II-6})$$

Les composantes des vecteurs \vec{y}_2 et \vec{y}_3 dans le repère R_1 s'écrivent :

$$\vec{y}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \vec{y}_3 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

En reportant les composantes de \bar{y}_2 et \bar{y}_3 dans les relations vectorielles (II-5) et (II-6), les composantes des vecteurs vitesses $\bar{V}_{O_2 \in 2/1}$ et $\bar{V}_{O_2 \in 3/1}$ deviennent :

$$\bar{V}_{O_2 \in 2/1} = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}, \quad \bar{V}_{O_2 \in 3/1} = \begin{bmatrix} v + l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \\ -l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

En égalant les composantes, il vient :

$$\begin{cases} v + l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = 0 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Il vient ainsi :

$$\frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_2} = -\frac{l_2 \cos \theta_2}{l_3 \cos \theta_3} = d\theta_3 / d\theta_2 \quad (\text{II-8})$$

D'autre part, on a :

$$\vec{O_1 O_2} = \vec{O_1 O_3} + \vec{O_3 O_2}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{O_1 O_2} &= l_2 \vec{x}_2 \\ &= l_2 \sin \theta_2 \vec{y}_1 + l_2 \cos \theta_2 \vec{x}_1 \end{aligned}$$

La projection du vecteur $\vec{O_1 O_2}$ sur \vec{y}_1 est $l_2 \sin \theta_2$

$$\begin{aligned} \vec{O_3 O_2} &= -l_3 \vec{x}_3 \\ &= -l_3 \sin \theta_3 \vec{y}_1 - l_3 \cos \theta_3 \vec{x}_1 \end{aligned}$$

La projection du vecteur $\vec{O_3 O_2}$ sur \vec{y}_1 est $-l_3 \sin \theta_3$
D'où la relation cinématique fondamentale :

$$l_2 \sin \theta_2 = -l_3 \sin \theta_3 \quad (\text{II-9})$$

D'après l'équation (II-9), on a :

$$\sin \theta_3 = -\frac{l_2}{l_3} \sin \theta_2 \quad \text{et} \quad \cos \theta_3 = \pm \sqrt{1 - \frac{l_2^2}{l_3^2} \sin^2 \theta_2}$$

L'angle θ_3 est positif et varie légèrement autour de 2π , son cosinus est donc toujours positif. Soit :

$$\cos \theta_3 = \sqrt{1 - \frac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \sin^2 \theta_2} \quad (\text{II-10})$$

Si on dérive une deuxième fois la deuxième équation du système (II-7) :

$$\frac{d}{dt}(\ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3) = -\frac{d}{dt}(\ell_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3)$$

et compte tenu de la relation (II-9), on obtient :

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\ell_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_3}{\ell_3 \cos \theta_3}$$

$$\ddot{\theta}_3 = (\dot{\theta}_3^2 - \dot{\theta}_2^2) \operatorname{tg} \theta_3 \quad (\text{II-11})$$

II-2-2. Cinématique du point O_2

La position du point O_2 est définie par le vecteur :

$$\vec{O_1 O_2} = \ell_2 \vec{x}_2$$

Le point O_2 se déplace sur un cercle de centre O_1 , de rayon ℓ_2

La vitesse du point O_2 est donnée par :

$$\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{V}_{O_1 \in 2/1} + \vec{O_2 O_1} \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

$$\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \vec{0} - \ell_2 \vec{x}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

soit :

$$\vec{V}_{O_2 \in 2/1} = \ell_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \quad (\text{II-12})$$

La vitesse du point O_2 est constante, elle est portée par une tangente au cercle.

L'accélération du point O_2 est obtenue par dérivation de l'expression de la vitesse (II-12) :

$$\vec{F}_{O_2 \in 2/1} = -\ell_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{x}_2 \quad (\text{II-13})$$

L'accélération du point O_2 est constante et centripète, elle est portée par un rayon du cercle.

II-2-3. Cinématique du point O_3

La position du point O_3 est définie par le vecteur :

$$\begin{aligned}\vec{O_1O_3} &= \vec{O_1O_2} + \vec{O_2O_3} \\ &= \ell_2 \vec{x}_2 + \ell_3 \vec{x}_3 = (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos \theta_3) \vec{x}_1\end{aligned}$$

La vitesse du point O_3 est donnée par :

$$\vec{V}_{O_3 \in 3/1} = \vec{V}_{O_2 \in 3/1} + \vec{O_3O_2} \wedge \vec{\omega}_{3/1}$$

Comme $\vec{V}_{O_2 \in 3/1} = \vec{V}_{O_2 \in 2/1}$, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{O_3 \in 3/1} &= \ell_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 - \ell_3 \vec{x}_3 \wedge \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ &= \ell_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \ell_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3\end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{V}_{O_3 \in 3/1} = \ell_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \vec{x}_1 \quad (\text{II-14})$$

avec $|\vec{V}_{O_3 \in 3/1}| = v$

L'accélération du point O_3 est obtenue par dérivation de l'expression de la vitesse (II-14) :

$$\vec{I}_{O_3 \in 3/1} = [\ell_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \ell_2 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2] \vec{x}_1 \quad (\text{II-15})$$

II-2-4. Cinématique du point G_b

La position du point G_b est définie par le vecteur :

$$\begin{aligned}\vec{O_1G_b} &= \vec{O_1O_3} + \vec{O_3G_b} \\ &= (\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos \theta_3) \vec{x}_1 - \ell_1 \vec{x}_3\end{aligned}$$

Les composantes des vecteurs \vec{x}_3 et $\vec{O_1G_b}$ dans le repère \mathbf{R}_1 s'écrivent :

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}, \quad \vec{O_1G_b} = \begin{bmatrix} \ell_2 \cos \theta_2 - (\ell_1 - \ell_3) \cos \theta_3 \\ \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \theta_2}{\ell_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

La vitesse du point G_b est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{G_b \in 3/1} &= \vec{V}_{O_3 \in 3/1} + \vec{G}_b \vec{O}_3 \wedge \vec{\omega}_3 \\
 &= l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \vec{x}_1 + l_1 \vec{x}_3 \wedge \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\
 &= l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \vec{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 \\
 &= l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \vec{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_3 (-\sin \theta_3 \vec{x}_1 + \cos \theta_3 \vec{y}_1)
 \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{G_b \in 3/1} = [l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) + l_1 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3] \vec{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \vec{y}_1$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\vec{V}_{G_b \in 3/1} = \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \left[\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 - \frac{l_1 \dot{\theta}_3}{l_3} \right] \\ \frac{l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{l_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad (\text{II-16})$$

La dérivation par rapport au temps de l'expression de la vitesse (II-16) permet d'obtenir l'accélération du point G_b :

$$\vec{\Gamma}_{G_b \in 3/1} = \begin{bmatrix} l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 - \frac{l_1 \dot{\theta}_3}{l_3}) \cos \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_3 (1 - \frac{l_1}{l_3}) \sin \theta_2 \\ \frac{-l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2}{l_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad (\text{II-17})$$

II-3. ETUDE DYNAMIQUE

Cette étude, qui complète l'étude cinématique, est basée sur la détermination des efforts exercés sur l'ensemble des éléments formant l'embellage. Elle a pour but de déterminer les différentes valeurs des actions mutuelles existantes entre les différents organes.

II-3-1. Etude dynamique de la bielle

II-3-1-1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle.

Dans toutes les machines à pistons alternatifs (compresseurs, moteur à combustion), la bielle est une pièce qui, associée à un piston d'une part et à une manivelle d'autre part, transforme un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement circulaire continu ou réciproquement.

Dans le cas des moteurs, l'effort né de la combustion est transmis à la bielle par l'axe du piston, le piston prenant lui-même appui sur le cylindre ; la bielle communique cet effort au maneton du vilebrequin.

La bielle se compose essentiellement :

- d'un pied articulé sur l'axe du piston, muni d'un coussinet,
- d'une tête formée de deux parties, assemblées par deux boulons pour permettre son montage sur le maneton du vilebrequin, la partie supérieure et son chapeau sont munis de coussinets.
- d'un corps en forme de I réunit le pied et la tête de bielle permettant de transmettre la poussée des gaz.

Lorsqu'on isole la bielle figure II-2, il y a deux actions extérieures à celle-ci :

- l'action du maneton sur la bielle au point O_2 ,
- l'action de l'axe du piston sur la bielle au point O_3 .

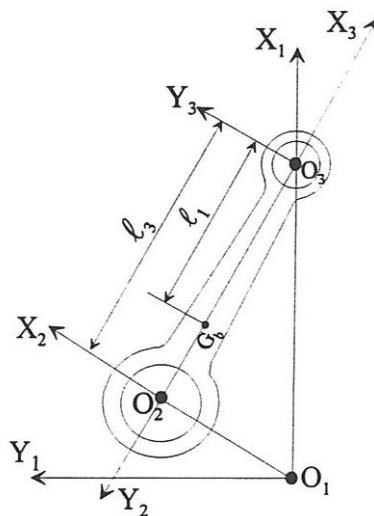


Figure.II-2 : Analyse des actions mécaniques appliquées sur la bielle

Le torseur au point O_2 s'écrit alors :

$$[T]_{O_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{O_2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_2} \end{array} \right\}_{O_2}$$

La liaison est du type verrou, donc :

$$\vec{F}_{O_2} \cdot \vec{z}_1 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_2} \cdot \vec{z}_1 = \vec{0}$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, la bielle ne transmet pas de moment au maneton. Le torseur des actions mécaniques au point O_2 se résume donc à :

$$\vec{F}_{O_2} = \begin{bmatrix} X_{O_2} \\ Y_{O_2} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_2} = \vec{0} \quad (\text{II-18})$$

Le torseur au point O_3 s'écrit :

$$[T]_{O_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{O_3} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_3} \end{array} \right\}_{O_3}$$

La liaison est du type verrou, donc :

$$\vec{F}_{O_3} \cdot \vec{z}_1 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_3} \cdot \vec{z}_1 = \vec{0}$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, l'axe du piston ne transmet pas de moment à la bielle ; le torseur des actions mécaniques au point O_3 se résume donc à :

$$\vec{F}_{O_3} = \begin{bmatrix} X_{O_3} \\ Y_{O_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_3} = \vec{0} \quad (\text{II-19})$$

II-3-1-2. Equations vectorielles fondamentales

Les équations fondamentales de la bielle sont

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} / \text{bielle} = m_{\text{bielle}} \vec{\Gamma}_{G_b \in \mathbb{R}^3} \quad (\text{II-20})$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{F_{\text{ext}}/G_b} = \vec{\delta}^3(G_b) \quad (\text{II-21})$$

Où : $\vec{\delta}^3(G_b)$ est le moment dynamique en G_b .

II-3-1-2-1. Calcul du moment dynamique

Pour calculer le moment dynamique, on commence par le calcul du moment cinétique tout d'abord :

$$\vec{\mu}^3(G_b) = \overline{\overline{I}}_{bielle/G_b} \vec{\omega}_{3/1}$$

où : $\overline{\overline{I}}$ et $\vec{\omega}$ sont respectivement le tenseur d'inertie et le vecteur rotation instantanée exprimés dans le repère R_3 lié à la bielle.

$$\overline{\overline{I}}_{bielle/G_b} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \text{ et } \vec{\omega}_{3/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

Dans le repère R_3 , Les composantes du vecteur moment cinétique s'écrivent :

$$\vec{\mu}^3(G_b) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 I_z \end{bmatrix}_{R_3}$$

d'où le moment dynamique :

$$\vec{\delta}^3(G_b) = \frac{d^3 \vec{\mu}^3(G_b)}{dt} = \ddot{\theta}_3 I_z \vec{z}_3 \quad (\text{II-22})$$

II-3-1-2-2. Calcul des moments

Puisque le moment dynamique est calculé par rapport au centre de gravité de la bielle, il est donc nécessaire de ramener les moments des forces extérieures appliquées à la bielle au centre de gravité G_b .

- Moment de la force \vec{F}_{O_2}

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_2}/G_b} &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_2}/O_2} + \vec{G}_b O_2 \wedge \vec{F}_{O_2} \\ &= \vec{0} + (\ell_1 - \ell_3) \vec{x}_3 \wedge (X_{O_2} \vec{x}_1 + Y_{O_2} \vec{y}_1) \\ &= -(\ell_3 - \ell_1) (\cos \theta_3 \vec{x}_1 + \sin \theta_3 \vec{y}_1) \wedge (X_{O_2} \vec{x}_1 + Y_{O_2} \vec{y}_1) \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_2}/G_b} = (\ell_3 - \ell_1) (X_{O_2} \sin \theta_3 - Y_{O_2} \cos \theta_3) \vec{z}_1$$

- Moment de la force \vec{F}_{O_3} ,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_3}/G_b} &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_3}/O_3} + \vec{G_b O_3} \wedge \vec{F}_{O_3} \\ &= \vec{0} + \ell_1 \vec{x}_3 \wedge (X_{O_3} \vec{x}_1 + Y_{O_3} \vec{y}_1) \\ &= \ell_1 (\cos \theta_3 \vec{x}_1 + \sin \theta_3 \vec{y}_1) \wedge (X_{O_3} \vec{x}_1 + Y_{O_3} \vec{y}_1)\end{aligned}$$

soit :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{O_3}/G_b} = \ell_1 (-X_{O_3} \sin \theta_3 - Y_{O_3} \cos \theta_3) \vec{z}_1$$

II-3-1-3. Equations scalaires :

La projection de l'équation vectorielle (II-20) sur le repère \mathbf{R}_1 donne :

- sur \vec{x}_1 :

$$X_{O_2} + X_{O_3} = m_{bielle} \left[\ell_2 \ddot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 - \frac{\ell_1}{\ell_3} \dot{\theta}_3) \cos \theta_2 + \ell_2 \ddot{\theta}_3 (1 - \frac{\ell_1}{\ell_3}) \sin \theta_2 \right] \quad (\text{II-23})$$

- sur \vec{y}_1 :

$$Y_{O_2} + Y_{O_3} = -m_{bielle} \left[\frac{\ell_1}{\ell_3} \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \right] \quad (\text{II-24})$$

La projection de l'équation vectorielle (II-21) sur le repère \mathbf{R}_1 donne :

- sur \vec{z}_1 :

$$(\ell_3 - \ell_1)(X_{O_2} \sin \theta_3 - Y_{O_2} \cos \theta_3) + \ell_1(Y_{O_2} \cos \theta_3 - X_{O_2} \sin \theta_3) = \ddot{\theta}_3 I_z \quad (\text{II-25})$$

L'étude dynamique de la bielle aboutit à un système de trois équations linéaires (II-23), (II-24) et (II-25) à quatre inconnues $X_{O_2}, Y_{O_2}, X_{O_3}$, et Y_{O_3} , il faut donc isoler le solide voisin, qui est le piston afin de construire une équation supplémentaire sans inconnue en plus.

II-3-1-4. Définition d'un système dynamiquement équivalent à la bielle :

Le mouvement d'un point quelconque de la bielle résulte de la décomposition de deux mouvements :

- Mouvement alternatif de l'axe du pied de bielle (point O_3),
- Mouvement de rotation de l'axe de la tête de bielle (point O_2)

Il en résulte un mouvement complexe du centre de gravité de la bielle.

Un système dynamiquement équivalent à la bielle (figure II-3) est tel que ce système et la bielle ont :

- même masse totale :

$$m_{\text{bielle}} = m_{O_2} + m_{O_3} \quad (\text{II-26})$$

- même centre de gravité (G_b) :

$$m_{O_2}(\ell_3 - \ell_1) = m_{O_3}\ell_1 \quad (\text{II-27})$$

- même moment d'inertie par rapport au centre de gravité :

$$I_z = m_{O_2}(\ell_3 - \ell_1)^2 + m_{O_3}\ell_1^2 \quad (\text{II-28})$$

L'équation (II-27) permet de déterminer la position du centre de gravité de la bielle.

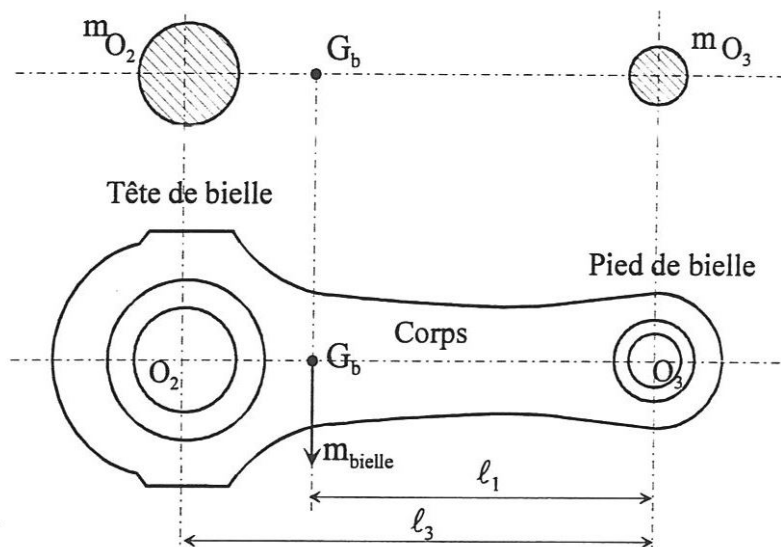


Figure II-3 : Système dynamiquement équivalent à la bielle

II-3-2. Etude dynamique du piston

Le piston permet l'échange d'énergie entre les gaz et l'embellage. Il reçoit l'effort de pression des gaz de combustion lors de la course motrice et le transmet au vilebrequin par l'intermédiaire de l'axe de piston et de bielle.

Il se compose essentiellement de trois parties :

- la jupe : Partie inférieure du piston, elle porte intérieurement deux bossages servant de support à l'axe du piston ;
- le haut du piston : Il porte des rainures ou gorges servant de logement aux segments ;
- le fond du piston : Plat en général, il est en contact avec les gaz.

II-3-2-1. Analyse des actions mécaniques appliquées au piston

Lorsqu'on isole le piston (figure II-4), il y a trois actions extérieures appliquées à celui-ci :

- l'action de l'axe du piston au point O_3 ,
- l'action de la chemise sur le piston au point C,
- l'action des gaz sur le piston au point P

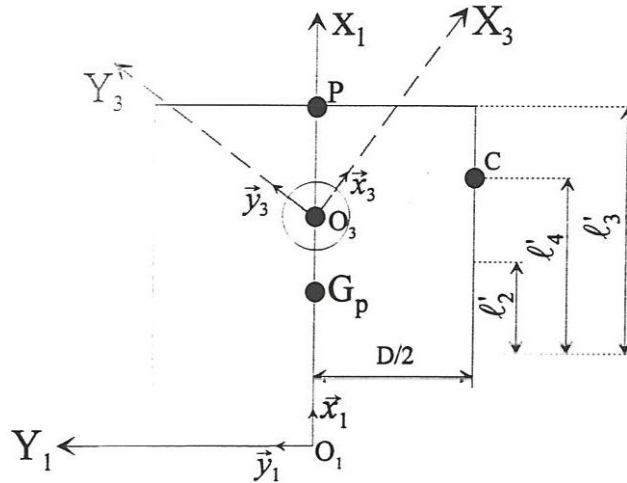


Figure II-4 : Analyse des actions mécaniques appliquées sur le piston

- Torseur au point O_3 :

La liaison bielle-piston par l'intermédiaire de l'axe de piston est l'opposée de la liaison piston-bielle étudiée dans le paragraphe précédent. Le torseur des actions mécaniques au point O_3 est donc :

$$-\vec{F}_{O_3} = \begin{bmatrix} -X_{O_3} \\ -Y_{O_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O_3} = \vec{0} \quad (\text{II-29})$$

- Torseur au point C :

$$[T]_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_C \\ \vec{\mathcal{M}}_C \end{array} \right\}_C$$

avec :

$$\vec{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_C = \vec{0} \quad (\text{II-30})$$

- Torseur au point P :

$$[T]_P = \begin{Bmatrix} \vec{F}_P \\ \mathcal{M}_P \end{Bmatrix}_P$$

Si on suppose que la pression des gaz est uniformément répartie sur la tête du piston et que le point d'application de l'effort résultant est centré sur la tête du piston. Dans ces conditions, les gaz n'exercent pas de moment sur le piston.

D'autre part, si la tête du piston est plate, les effort dus aux gaz sont uniquement dirigés sur $-\vec{x}_1$, et dépendent de l'angle vilebrequin θ_2 .

Le torseur des actions mécaniques au point P est donc ;

$$-\vec{F}_P(\theta_2) = \begin{bmatrix} -X_p(\theta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_P = \vec{0} \quad (\text{II-31})$$

avec :

$$X_p(\theta_2) = \frac{\pi D^2}{4} P(\theta_2)$$

La connaissance du diagramme des pressions P en fonction de l'angle vilebrequin θ_2 est bien entendu nécessaire. Ce dernier est déterminé expérimentalement.

II-3-2-2. Equations vectorielles fondamentales du piston:

Les équations vectorielles fondamentales du piston sont :

$$\sum \vec{F}_{ext/Piston} = m_{piston} \vec{\Gamma}_{G_P \in Piston/1} \quad (\text{II-32})$$

$$\sum \mathcal{M}_{F_{ext}/G_P} = \vec{\delta}^1(G_P) \quad (\text{II-33})$$

avec :

$$\vec{\delta}^1(G_P) = \vec{0}$$

Le piston est un solide indéformable, son mouvement est une translation, donc tous ses points ont même vitesse et même accélération. On peut écrire alors:

$$\vec{\Gamma}_{G_P \in Piston/1} = \vec{\Gamma}_{O_3 \in Bielle/1}$$

- Moment de la force $-\vec{F}_{O_3}$ au point G_P :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{O_3}/G_P} &= \vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{O_3}/O_3} + \vec{G}_P O_3 \wedge (-\vec{F}_{O_3}) \\ &= \vec{0} + \ell'_2 \vec{x}_1 \wedge \begin{bmatrix} -X_{O_3} \\ -Y_{O_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} \\ \vec{M}_{-\vec{F}_{O_3}/G_P} &= -\ell'_2 Y_{O_3} \vec{z}_1\end{aligned}$$

- Moment de la force \vec{F}_C

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_C/G_P} &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_C/C} + \vec{G}_P C \wedge \vec{F}_C \\ &= \vec{0} + (\ell'_4 \vec{x}_1 - \frac{D}{2} \vec{y}_1) \wedge Y_C \vec{y}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_C/G_P} &= \ell'_4 Y_C \vec{z}_1\end{aligned}$$

- Moment de la force $-\vec{F}_P(\theta_2)$

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_P(\theta_2)/G_P} = \vec{0}$$

II-3-2-3. Equations scalaires du piston :

La projection de l'équation vectorielle (II-32) sur le repère fixe R_1 donne :

sur \vec{x}_1

$$-X_{O_3} - X_P(\theta_2) = m_{piston} [\ell_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \ell_2 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2] \quad (\text{II-34})$$

sur \vec{y}_1

$$-Y_{O_3} + Y_C = 0 \quad (\text{II-35})$$

La projection de l'équation vectorielle (II-33) sur le repère fixe R_1 donne :

sur \vec{z}_1

$$-\ell'_2 Y_{O_3} + \ell'_4 Y_C = 0 \quad (\text{II-36})$$

L'étude dynamique du piston a introduit trois équations supplémentaires (II-34), (II-35) et (II-36) et une inconnue supplémentaire Y_C . Si nous examinons le système d'équations, nous remarquons que les deux équations (II-35) et (II-36) ne sont compatibles que si $\ell'_2 = \ell'_4$, l'équation (II-36) est donc en trop.

II-3-3. Systèmes d'équations

L'analyse dynamique de la bielle et du piston permet d'obtenir un système de cinq équations à cinq inconnues $X_{O_2}, Y_{O_2}, X_{O_3}, Y_{O_3}$ et Y_C :

$$\begin{cases} X_{O_2} + X_{O_3} = m_{bielle} \left[\ell_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 - \frac{\ell_1}{\ell_3} \dot{\theta}_3) \cos \theta_2 + \ell_2 \ddot{\theta}_3 (1 - \frac{\ell_1}{\ell_3}) \sin \theta_2 \right] \\ Y_{O_2} + Y_{O_3} = -m_{bielle} \left(\frac{\ell_1}{\ell_3} \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \right) \\ (\ell_3 - \ell_1) \sin \theta_3 X_{O_2} - (\ell_3 - \ell_1) \cos \theta_3 Y_{O_2} - \ell_1 \sin \theta_3 X_{O_3} + \ell_1 \cos \theta_3 Y_{O_3} = \ddot{\theta}_3 I_z \quad (\text{II-37}) \\ -Y_{O_3} + Y_C = 0 \\ X_{O_3} = -\frac{\pi D^2}{4} P(\theta_2) - m_{piston} \left[\ell_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \ell_2 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 \right] \end{cases}$$

La résolution du système d'équations (II-37) donne les composantes des forces dans le repère fixe \mathbf{R}_1 pour chaque angle de rotation du vilebrequin. Pour la suite de l'étude, on a besoin de connaître les composantes des forces dans les repères mobiles \mathbf{R}_2 et \mathbf{R}_3 . Pour ceci, nous utiliserons après résolution du système, les transformations suivantes.

$$\vec{F}_{O_2} = \begin{pmatrix} X_{O_2} \\ Y_{O_2} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} X_{O_2} \cos \theta_2 + Y_{O_2} \sin \theta_2 \\ -X_{O_2} \sin \theta_2 + Y_{O_2} \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} X_{O_2} \cos \theta_3 + Y_{O_2} \sin \theta_3 \\ -X_{O_2} \sin \theta_3 + Y_{O_2} \cos \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_3} \quad (\text{II-38})$$

$$\vec{F}_{O_3} = \begin{pmatrix} X_{O_3} \\ Y_{O_3} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} X_{O_3} \cos \theta_2 + Y_{O_3} \sin \theta_2 \\ -X_{O_3} \sin \theta_2 + Y_{O_3} \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} X_{O_3} \cos \theta_3 + Y_{O_3} \sin \theta_3 \\ -X_{O_3} \sin \theta_3 + Y_{O_3} \cos \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_3} \quad (\text{II-39})$$

II-4. DETERMINATION DES DIAGRAMMES DE CHARGE D'UN MOTEUR QUATRE CYLINDRES

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les diagrammes de charge appliqués à la bielle pour un moteur Peugeot quatre cylindres en ligne dont les caractéristiques sont données dans le tableau II-1. Les diagrammes de pression instantanée relevés dans un cylindre du moteur sont donnés pour deux régimes de fonctionnement du moteur ($N=3000$ et 6000 tr/min) figure II-5.

Pour les deux régimes, les pics de pression valent 55 et 63 Bars et correspondent respectivement à un angle de vilebrequin de 365 degrés (5 degrés après le PMH).

Tableau II-1: Caractéristiques du moteur Peugeot

Paramètres		Unités	Valeurs
Diamètre du piston	D	[m]	0.083
Rayon de manivelle	l_2	[m]	0.044
Entraxe de bielle	l_3	[m]	0.143
Masse du piston	m_{piston}	[kg]	0.550
Masse de la bielle	m_{bielle}	[kg]	0.693
Vitesses de rotation du moteur	N	[tr/min]	3000 et 6000

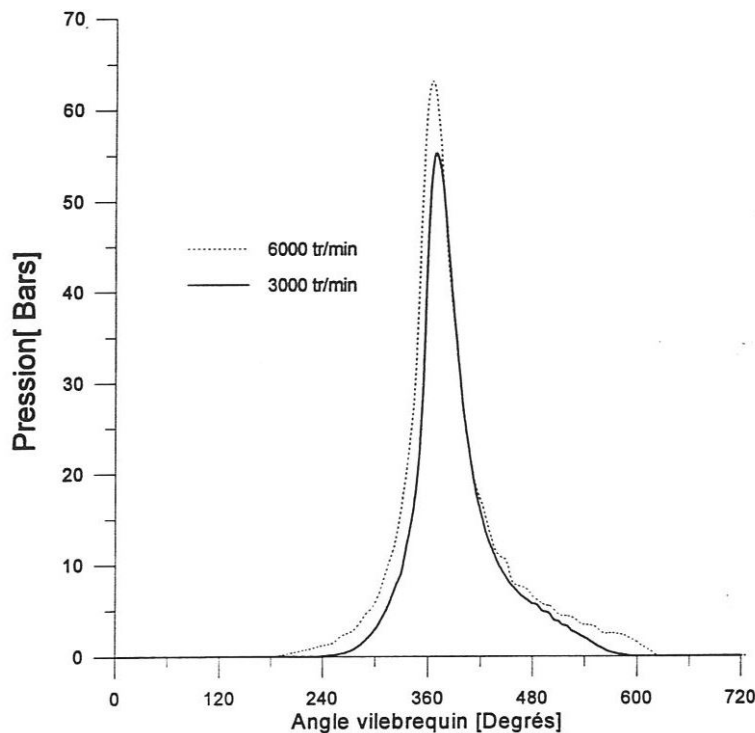


Figure II-5 : Diagrammes de pression en fonction de l'angle vilebrequin

II-4-1. Résultats

Sur les figures (II-6) et (II-7), nous représentons les diagrammes de charge du maneton sur la bielle avec prise en considération des effets d'inertie et d'explosion pour deux régimes de fonctionnement du moteur $N=3000$ tr/min et 6000 tr/min.

Les composantes de la charge X_{O_3} et Y_{O_3} sont déterminés dans le repère R_3 lié à la bielle à partir de la résolution du système d'équations (II-37) et l'utilisation des relations de transformation (II-39).

La figure (II-8) montre que l'effort maximal pour $N=3000$ tr/min est essentiellement dû à l'explosion dont la valeur est de 23546 N obtenue pour un angle de vilebrequin de 365 degrés. Ce pic de charge correspond bien évidemment au pic de pression relevé dans le cylindre.

Pour une vitesse de rotation du vilebrequin plus importante ($N=6000$ tr/min), les effets d'inertie deviennent prépondérants (valeur maximale égale à 25308 N) et doivent être pris en considération dans les calculs.

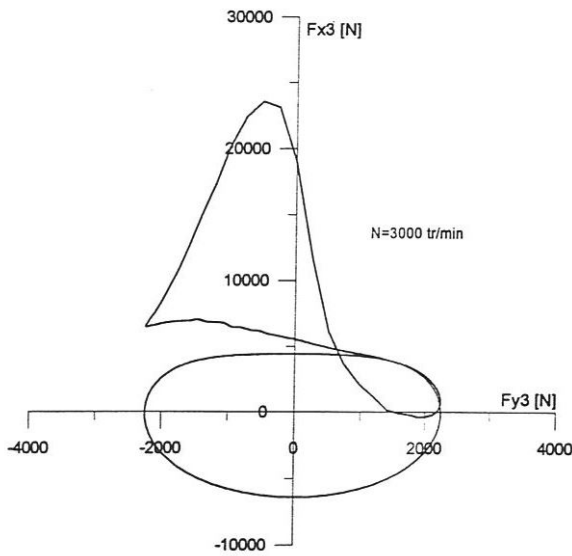
Pour les deux régimes de fonctionnement, nous remarquons que l'effort résultant (effets d'inertie et d'explosion) est périodique de période 4π et composé de deux efforts antagonistes :

- l'effort dû aux gaz de période 4π qui tend à comprimer la bielle sur le maneton et qui engendre une action de la bielle sur le maneton dans le sens des X_3 négatif, ce qui donne une réaction du maneton sur la bielle positive sur X_3 ,
- l'effort dû aux inerties de période 2π , symétrique par rapport à $\theta_2=\pi$ qui tend à étirer la bielle au PMH et la comprimer au PMB.

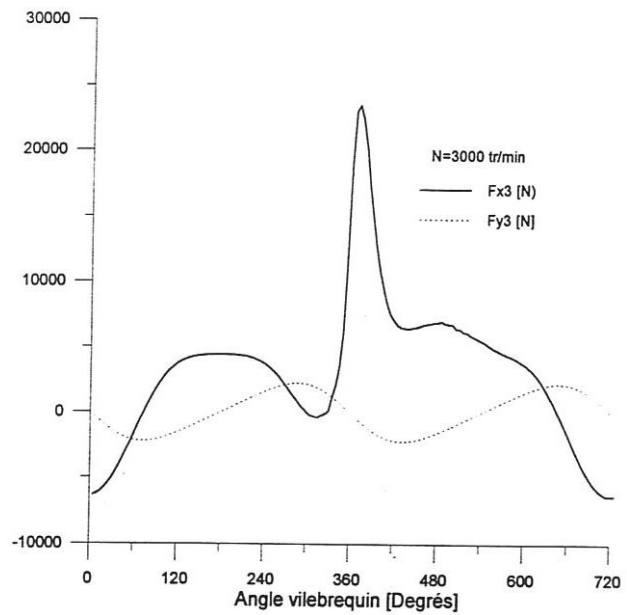
Dans la figure (II-10), nous représentons sous forme polaire les efforts appliqués à la tête de bielle dans les trois repères R_1 , R_2 et R_3 pour $N=3000$ tr/min. Le rôle essentiel de ces représentations est d'indiquer l'effort maximal et sa direction, ce qui permet au constructeur de déterminer convenablement la position des trous d'alimentation en lubrifiant sur le maneton pour la lubrification du coussinet de tête de bielle.

D'autre part, la connaissance de ces diagrammes de charge exprimés dans les différents repères, nous permet également d'étudier le comportement dynamique des paliers de bielle.

La figure (II-11) représente, sous forme cartésienne, l'action de l'axe du piston sur le pied de bielle dans le repère R_3 pour $N=3000$ tr/min. Nous constatons que l'effort prédominant est celui dirigé suivant la direction de l'axe central de la bielle. Il est à remarquer que la variation de la charge appliquée au cours du cycle moteur assure la lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement du film dans le palier de pied de bielle.

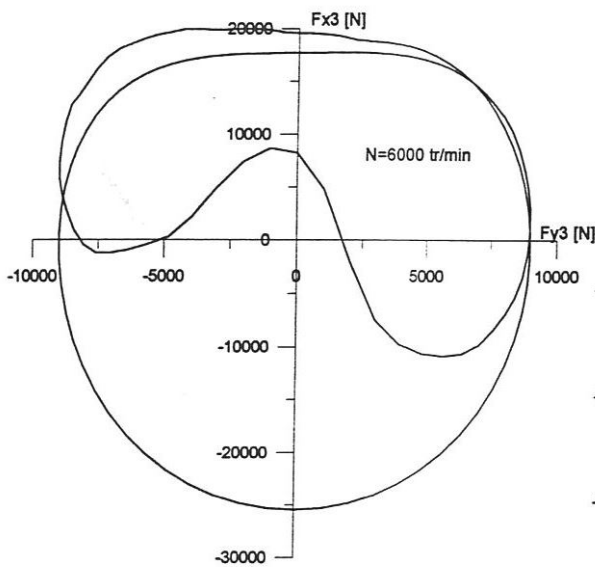


(a) Représentation polaire

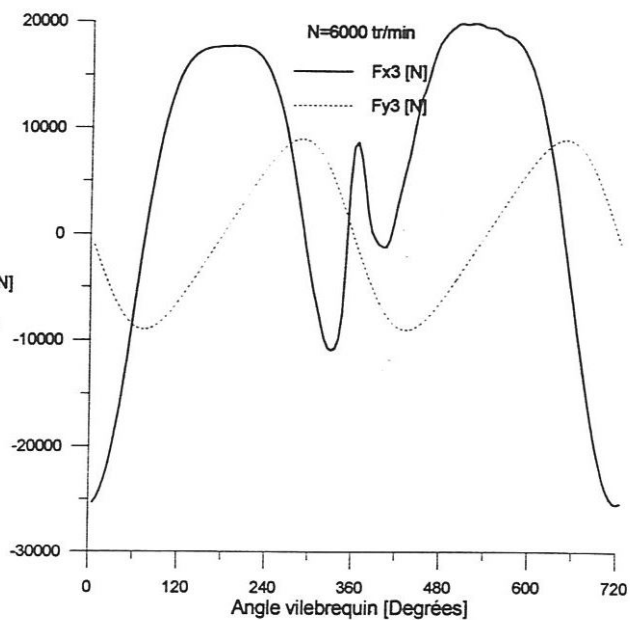


(b) représentation cartésienne

Figure II-6 : Diagrammes de charge du maneton sur la bielle avec prise en considération des effets d'inertie et d'explosion (N=3000 tr/min).

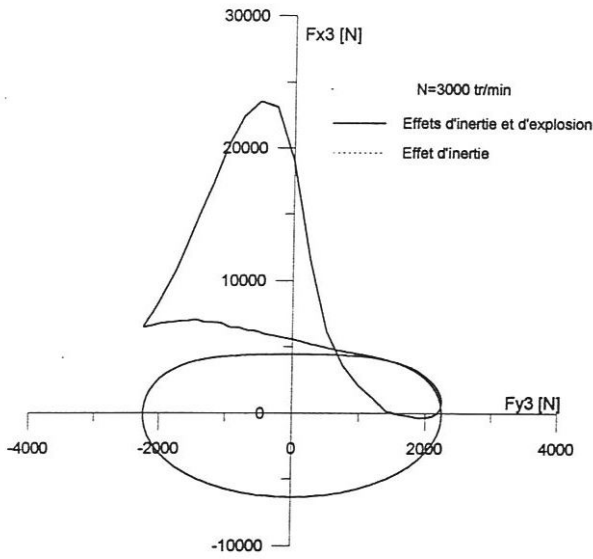


(a) Représentation polaire

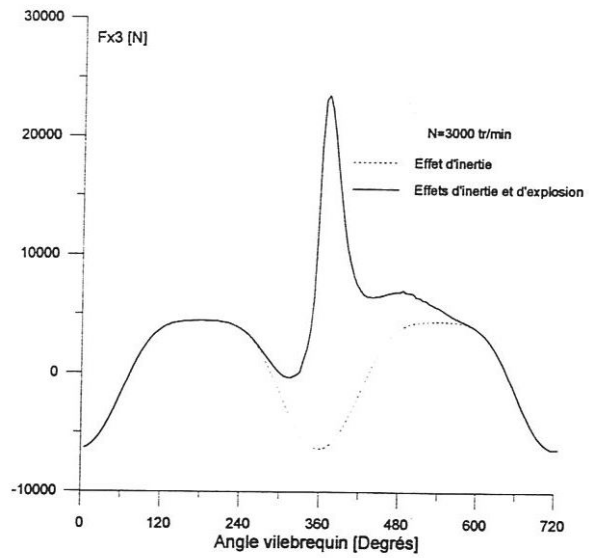


(b) représentation cartésienne

Figure II-7 : Diagrammes de charge du maneton sur la bielle avec prise en considération des effets d'inertie et d'explosion (N=6000 tr/min)

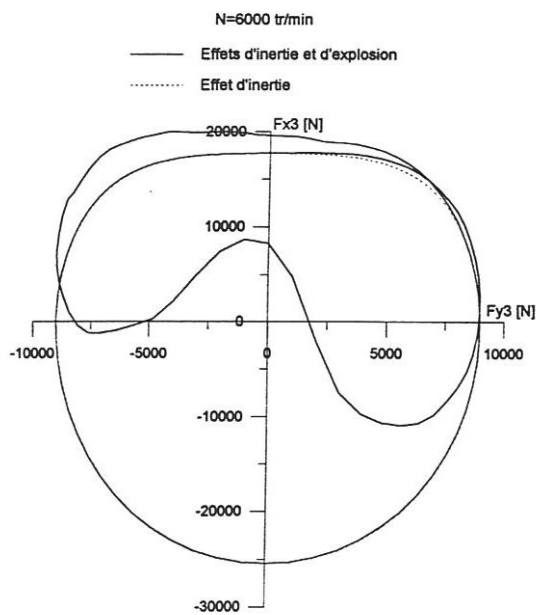


(a) Représentation polaire

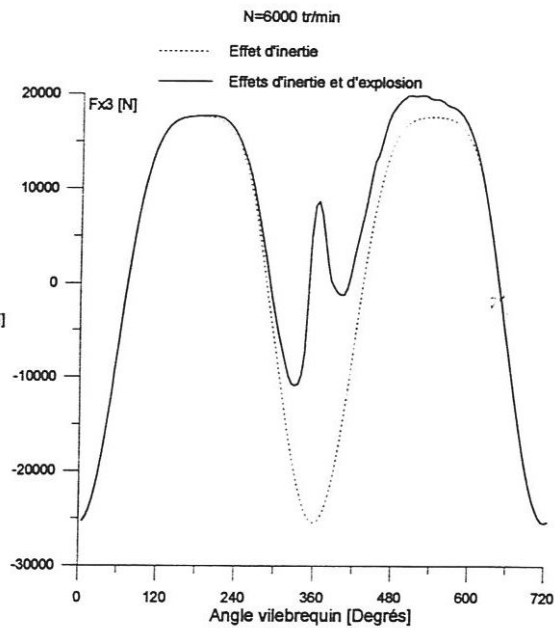


(b) représentation cartésienne

Figure II-8 : Comparaison des efforts d'inertie et des efforts dus à l'explosion (N=3000 tr/min).



(a) Représentation polaire



(b) représentation cartésienne

Figure II-9 : Comparaison des efforts d'inertie et des efforts dus à l'explosion (N=6000 tr/min).

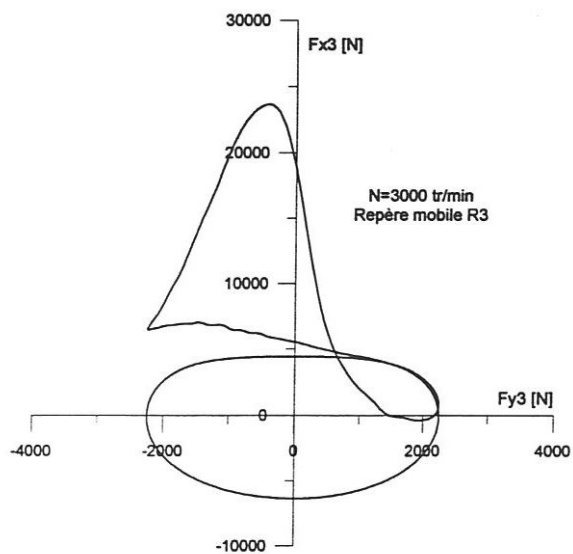
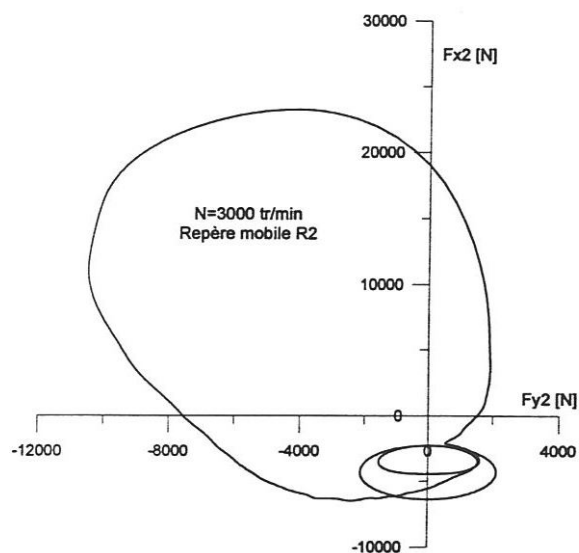
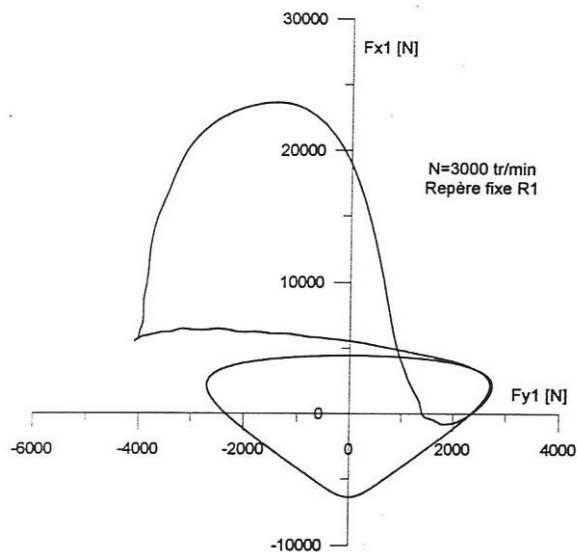


Figure II-10 : Diagrammes polaire des efforts du maneton sur la bielle dans les trois repères ($N=3000$ tr/min).

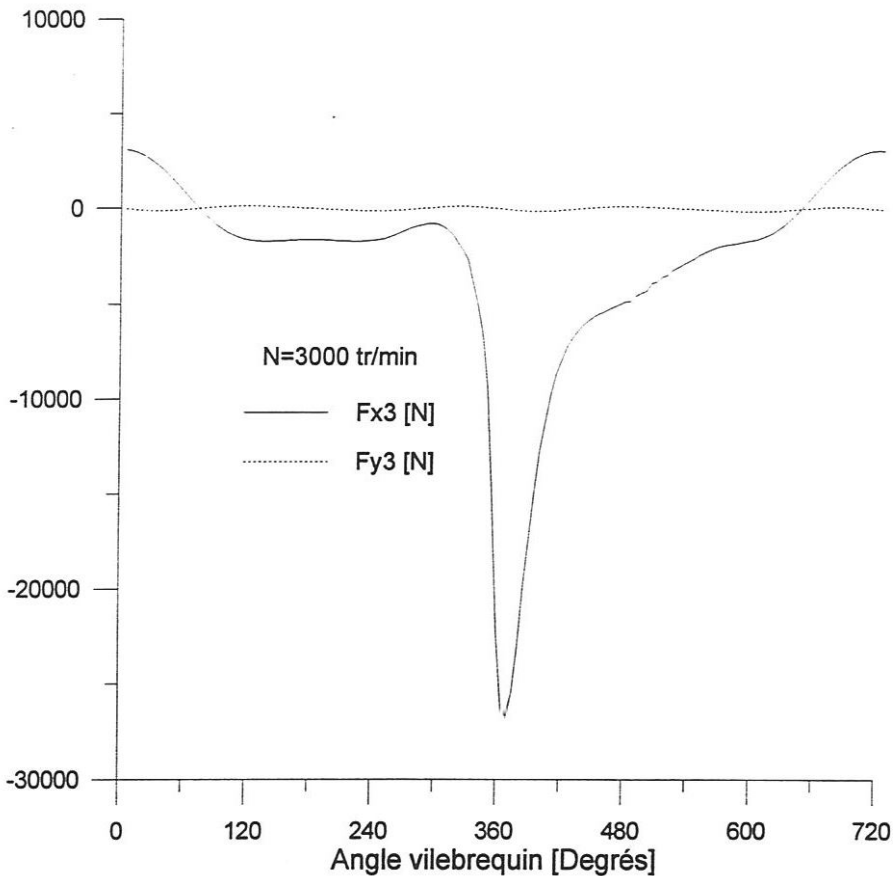


Figure II-11 : Représentation cartésienne des efforts de l'axe du piston sur la bielle dans le repère R_3 ($N=3000$ tr/min)

II-5. CONCLUSION

L'étude cinématique et dynamique du système bielle-manivelle nous a permis d'aboutir à un système de cinq équations algébriques à cinq inconnues. La résolution de ce système permet de déterminer l'ensemble des efforts appliqués aux différentes liaisons des éléments constituant le système. Cette résolution n'est possible que si le signal de pression instantanée dans le cylindre du moteur est préalablement déterminé. Nous devons souligner d'autre part que la connaissance des diagrammes de charge est nécessaire pour l'étude du comportement dynamique des paliers de tête de bielle et de pied de bielle.

A fin de mettre en évidence l'influence des effets d'inertie dans le moteur, nous avons comparé les diagrammes de charge réels (effets d'inertie et d'explosion des gaz) représentant l'action du maneton sur la tête de bielle dans le repère intermédiaire lié à la bielle pour deux régimes de fonctionnement du moteur ($N=3000$ et 6000 tr/min) et ceux déterminés en ignorant les effets d'explosion.

D'après ces diagrammes, il ressort que les effets d'inertie sont importants et ne doivent pas être ignorés notamment pour les plus grandes vitesses de rotation du vilebrequin.

CHAPITRE III

EQUATIONS GENERALES DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

III-1. INTRODUCTION

Il est bien évident que le bon fonctionnement des paliers de moteurs automobiles est lié à la présence d'un film mince visqueux entre l'arbre et le coussinet. L'équation de Reynolds, déduite des équations de Navier-Stokes, permet de calculer le champ de pression dans le film créé par le mouvement des surfaces. La détermination de ce champ de pression qui dépend des paramètres géométriques, de la position de l'arbre à l'intérieur du coussinet et de la charge appliquée nécessite la résolution d'un problème inverse, c'est-à-dire :

- à partir d'une position de l'arbre,
- on calcule le champ de pression correspondant,
- la charge supportée est calculée en intégrant la pression,
- elle est ensuite comparée à la charge appliquée,
- si la charge calculée est différente de la charge appliquée, on modifie la position de l'arbre, par une méthode de prédiction-corréction par exemple, et on recommence le calcul.

Ce processus est poursuivi jusqu'à la convergence. La position du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet est ainsi déterminée à chaque instant ; on peut ensuite calculer :

- la hauteur minimale du film lubrifiant et sa position,
- le couple de frottement et la puissance dissipée,
- le débit axial.

Cette méthode qui semble la plus simple n'est généralement pas utilisée, sauf dans le cas de chargement statique ou dans le cas du palier court, car elle se heurte à des problèmes de convergence et conduit à des temps de calcul extrêmement importants.

Dans ce chapitre, nous présenterons les équations de base de la lubrification hydrodynamique appliquées aux problèmes de dynamique des paliers.

III-2. EQUATIONS DE REYNOLDS

La détermination du champ de pression dans le film d'huile impose la résolution simultanée de deux équations :

- Une équation hydrodynamique qui définit le comportement du fluide. Elle peut être soit une équation aux dérivées partielles appelée équation de Reynolds [annexe A], soit

une équation intégrale (fonctionnelle) qui est la forme variationnelle de l'équation de Reynolds [annexe B].

- Une équation géométrique qui définit l'épaisseur du film. Si le champ de pression hydrodynamique reste suffisamment faible pour que la déformation élastique des surfaces soit négligeable devant l'épaisseur du film, l'équation géométrique est donc uniquement fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

En utilisant les hypothèses classiques de la lubrification citées en [annexe A], l'équation de Reynolds, écrite dans un repère orthonormé Oxyz (figure III.1) pour lequel l'épaisseur du film est mesurée suivant y s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] &= 6 \rho (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6 \rho (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho (U_1 + U_2)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho (W_1 + W_2)] + 12 \rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

avec
$$V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$$

Pour écrire cette équation, on suppose que la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ du lubrifiant ne varient pas selon l'épaisseur du film et la surface du solide (1) est confondue avec le plan Oxz ; ce qui permet d'écrire $V_1=0$.

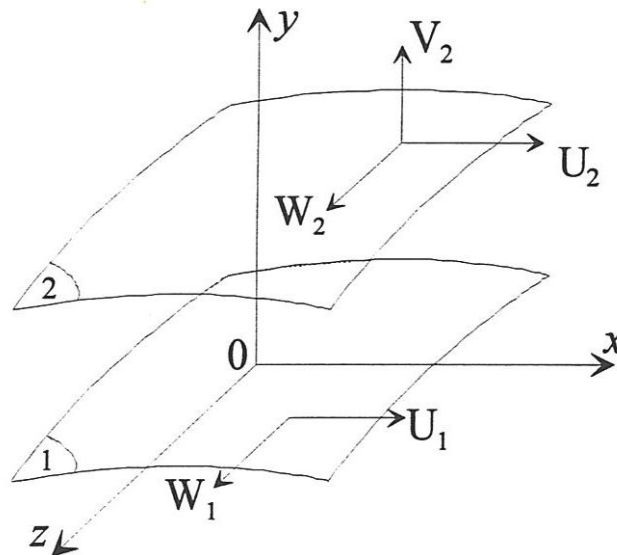


Figure III-1 : Système d'axes et vitesses des parois

Dans cette équation :

- U_1, U_2, V_2, W_1, W_2 sont respectivement les vitesses des surfaces 1 et 2 du contact par rapport aux directions x, y, z ,
- h est l'épaisseur du film ,
- p est la pression hydrodynamique dans le film.

Nous supposons dans cette étude que le régime est isotherme (température supposée constante dans les solides et le film), que le fluide est incompressible et que les vitesses des parois W_1, W_2 sont nulles.

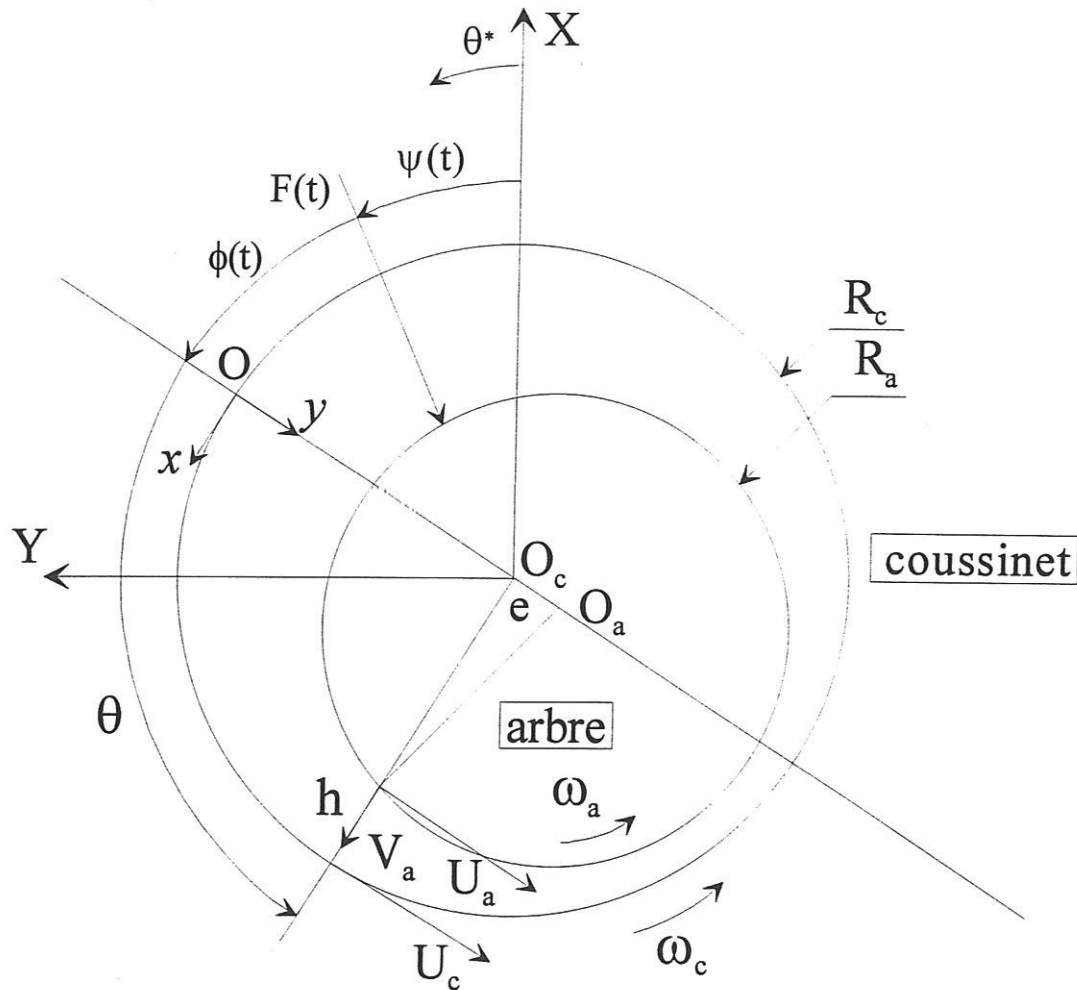


Figure III-2 section droite du palier

Dans le cas d'un palier lisse, où une section droite de l'arbre ou du coussinet est un cercle (Figure III-2), on prend la surface du coussinet comme système de référence,

l'origine O étant confondue avec le point d'épaisseur maximale du film dans la section médiane. L'axe Ox est tangent en O au coussinet, l'axe Oy est colinéaire à la ligne des centres et l'axe Oz est construit tel que le trièdre $Oxyz$ est direct.

Dans ces conditions, l'équation de Reynolds (III-1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu \left[(U_c - U_a) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} (U_c + U_a) + 2V_a \right] \quad (\text{III-2})$$

où U_a, V_a sont respectivement les vitesses de l'arbre suivant x et y et U_c la vitesse du coussinet suivant x .

III-3. EQUATIONS DU FILM D'HUILE

III-3-1. Palier à axes parallèles

Pour un palier de géométrie idéale la hauteur du film h s'écrit :

$$h(\theta) = C + e \cos \theta \quad (\text{III-3})$$

où : C est le jeu radial et e est l'excentricité ($e=C\varepsilon$).

Pour un palier présentant un défaut de forme axial, h sera une fonction de θ et z (Figure III-3) :

Pour un palier conique la variation $R(z)$ peut s'écrire :

$$R(z) = R_a - \lambda z \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{R_1 - R_2}{L}$$

on aura alors :

$$h(\theta, z) = C + e \cos \theta + \lambda z \quad (\text{III-4})$$

R_a est le rayon de référence au point $z=0$.

R_1 est le rayon au point $z=-L/2$

R_2 est le rayon au point $z=+L/2$

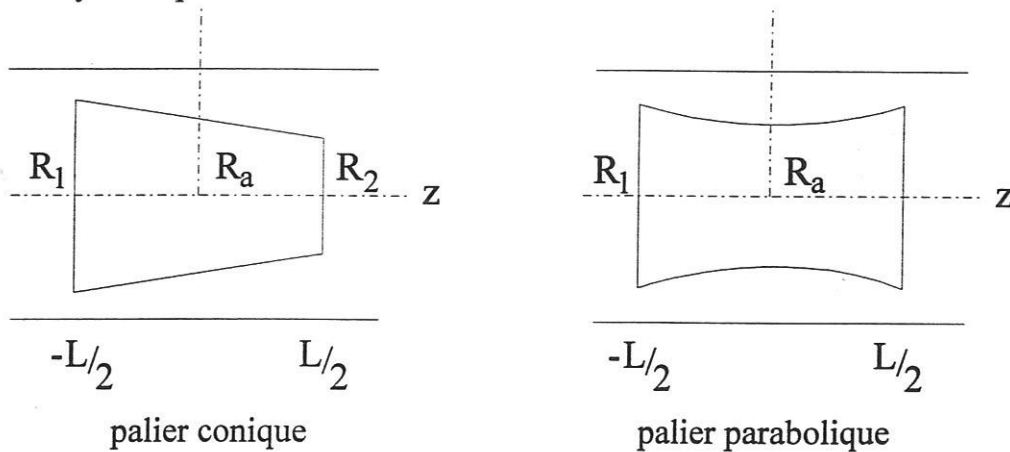


Figure III-3 : Palier avec un défaut de forme axial

Pour un palier parabolique $R(z)$ sera une fonction du second degré en z :

$$R(z) = R_a + \left(\frac{2z}{L}\right)^2 (R_l - R_a)$$

on aura alors :

$$h(\theta, z) = C + e_0 \cos \theta - \left(\frac{2z}{L} \right)^2 (R_1 - R_a) \quad (\text{III-5})$$

R_1 est le rayon aux extrémités du palier ($z = \pm L/2$)

III-3-2. Palier mésaligné

Dans un palier, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont pas toujours parallèles. En pratique, il existe un mésalignement dont les causes peuvent être d'origines diverses : déformations thermiques ou élastique de l'arbre lors du fonctionnement ou un mauvais assemblage.

Dans le cas d'un palier mésaligné, il est possible de repérer la position de l'axe de l'arbre ($C_1C_0C_2$) par rapport à celle du coussinet ($O_1O_0O_2$) par l'intermédiaire de deux angles α et γ et la distance $O_cC_0 = e_0$ (figure III-4).

γ est l'angle que fait la droite ($C_1C_0C_2$) avec sa projection sur le plan yOz ,
 α est l'angle que fait cette projection avec l'axe Oz ,
 e_0 est l'excentricité dans la section médiane.

Les angles α et γ sont très petits (de l'ordre de 10^{-4} radians), on préfère alors d'utiliser deux autres paramètres pour définir le mésalignement :

β qui est l'angle que fait la projection de la ligne des centres de l'arbre sur le plan xOy ,

d qui est le module de cette projection.

Les paramètres α , β , γ et d sont liés par les relations :

$$\text{tg} \alpha = \frac{d}{L} \cos \beta \quad \text{et} \quad \text{tg} \gamma = \frac{d \cdot \sin \beta}{(L^2 + d^2 \cos^2 \beta)}$$

avec $L = |O_1O_2|$.

De plus d n'est pas arbitraire, son amplitude maximale est fonction de C, e_0 et β .

$$\delta_{\max} = \frac{d_{\max}}{C} = 2 \left[\sqrt{1 - \varepsilon_0^2 \sin^2 \beta} - \varepsilon_0 |\cos \beta| \right] \quad (\text{III-6})$$

Si l'arbre est indéformable on a : $O_a C = \frac{dz}{L} = C \delta \bar{z}$

avec $\delta = \frac{d}{C}$ et $\bar{z} = \frac{z}{L}$

Ainsi, nous pouvons définir le degré de mésalignement D_m par :

$$D_m = \frac{\delta}{\delta_{\max}}$$

Pour un palier mésaligné, l'équation géométrique du film prend la forme :

$$h(\theta, z) = C + e_0 \cos \theta + C \delta \bar{z} \cos(\theta - \beta) \quad (\text{III-7})$$

REMARQUE :

L'excentricité dans une section quelconque du palier s'écrit :

$$e = \left(e_0^2 + (C\delta z)^2 + 2e_0C\delta z \cos \beta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \left(\varepsilon_0^2 + (\delta z)^2 + 2\varepsilon_0\delta z \cos \beta \right)^{\frac{1}{2}}$$

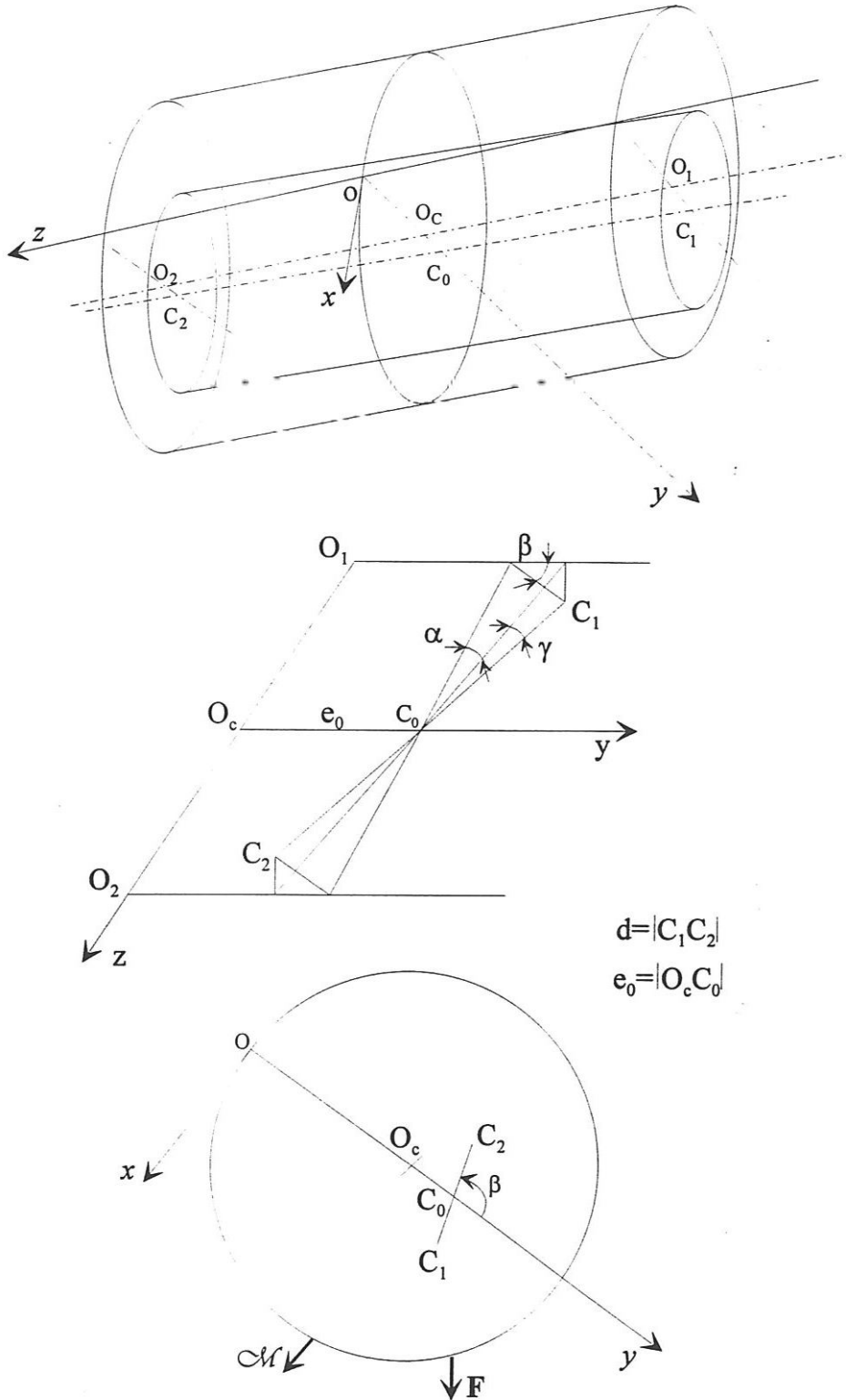


Figure III-4 : Représentation d'un palier mésaligné

En résumé, l'équation du film peut se mettre sous la forme:

$$h(\theta, z) = C + e_0 \cos \theta + f(\theta, z) \quad (\text{III-8})$$

Où : f est une fonction caractérisant le défaut:

$$\begin{aligned} f(\theta, z) &= 0 && \text{pour le palier parfait} \\ f(\theta, z) &= \lambda z && \text{pour le palier conique} \\ f(\theta, z) &= -\left(2 \frac{z}{L}\right)^2 (R_1 - R_2) && \text{pour le palier parabolique} \\ f(\theta, z) &= C \delta \left(\frac{z}{L}\right) \cos(\theta - \beta) && \text{pour le palier mésaligné} \end{aligned}$$

III-4. EQUATION DE REYNOLDS EN REGIME TRANSITOIRE

En faisant l'approximation $R_a \approx R_c \approx R$ et $\left(\frac{C}{R}\right) \ll 1$, compte-tenu des expressions des vitesses suivantes:

$$U_a = \omega_a R, \quad U_c = \omega_c R$$

$$V_a = \dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \sin \theta + \delta \dot{z} \cos(\theta - \beta) + \dot{\beta} \delta \dot{z} \sin(\theta - \beta) + \omega_a \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

et en posant $x = R\theta$, $h = HC$ et $z = \bar{z}L$, l'équation III-2 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{12 \mu}{\left(\frac{C}{R} \right)^2} \left[(\bar{\omega} - \dot{\phi}) \frac{\partial H}{\partial \theta} + \dot{\varepsilon}_0 \cos \theta + \delta \dot{z} \cos(\theta - \beta) + \dot{\beta} \delta \dot{z} \sin(\theta - \beta) \right]$$

(III-9)

avec:

H: l'épaisseur sans dimension du film.

p: la pression hydrodynamique

R: le rayon du palier

μ : la viscosité dynamique du lubrifiant

C: le jeu radial du palier ($C=R_c-R_a$)

$\bar{\omega} = \frac{\omega_c + \omega_a}{2} - \dot{\psi}$: la vitesse moyenne de l'arbre et du coussinet rapportée à la charge.

$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$: la vitesse angulaire de la charge

ω_a, ω_c : les vitesses angulaires de l'arbre et du coussinet.

$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$: la vitesse angulaire de la ligne des centres par rapport à la charge

$\dot{\varepsilon}_0$: la vitesse d'écrasement

δ, β : les paramètres définissant le mésalignement

$\dot{\delta}, \dot{\beta}$: les vitesses de mésalignement

III-5. CONDITIONS AUX LIMITES

La résolution de l'équation de Reynolds III-9 nécessite de prendre en compte des conditions aux limites sur la pression. Il faut donc choisir les conditions aux limites les mieux adaptées au cas étudié. Pour un fluide incompressible, ces conditions aux limites s'écrivent :

- suivant z : $p\left(\theta, -\frac{L}{2}\right) = p\left(\theta, \frac{L}{2}\right) = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

- suivant θ : différents types de conditions ont été proposées, (figure III-5)

En 1904, **Sommerfeld** [5] suppose que le film lubrifiant est continu (palier plein).

Ces conditions aux limites ne sont valables que pour des paliers fonctionnant à de très faible charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées car dans le cas contraire on obtiendra des pressions négatives dans le film.

En 1921, **Gümbel** [55] à la suite des travaux de **Sommerfeld** propose de négliger les pressions négatives.

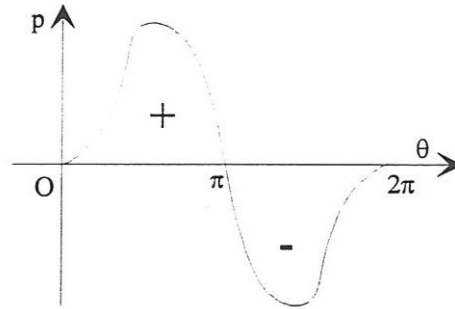
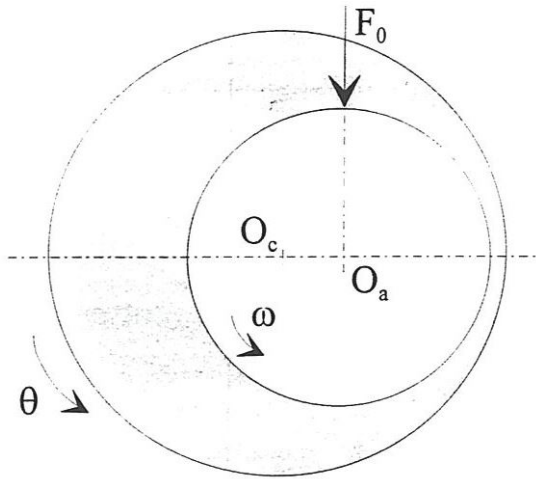
Ces conditions aux limites impliquent donc une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta = \pi$ et elles ne sont donc pas acceptables physiquement. Ces conditions sont fréquemment employées car elles permettent d'obtenir, dans le cas du palier court par exemple, une solution proche des résultats expérimentaux.

Swift en 1931 [56] et **Stieber** en 1933 [57] proposent des conditions aux limites qui respectent, à la sortie du film la continuité du débit. Ils supposent que la pression et son gradient s'annulent pour une abscisse θ_s inconnue soit :

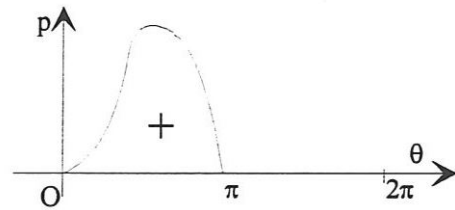
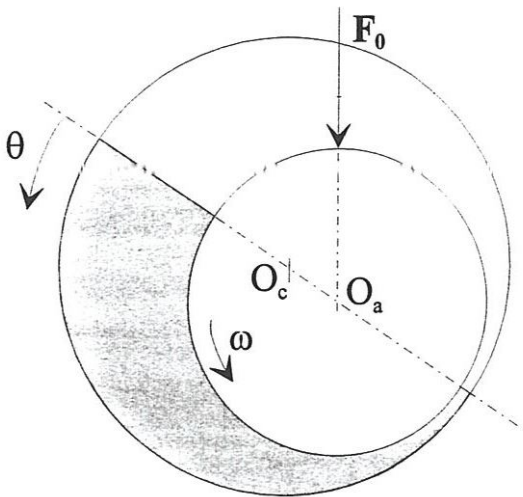
$$p(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = 0 \tag{III-10}$$

$$p(\theta, z) = 0 \text{ si } \theta_s \leq \theta \leq 2\pi$$

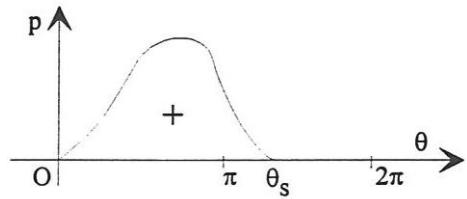
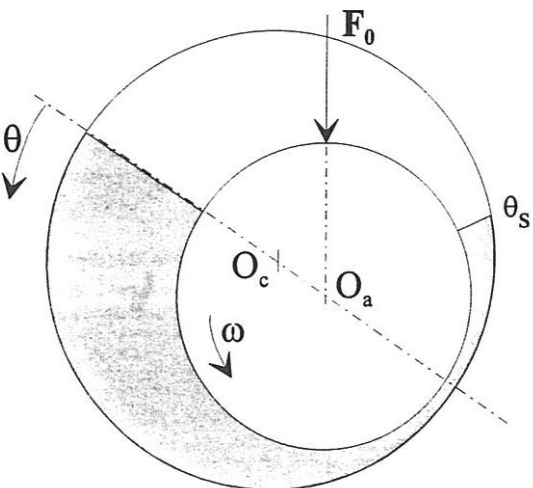
Les conditions (III-10), appelées aussi conditions aux limites de Reynolds, sont souvent utilisées. Néanmoins, elles ont l'inconvénient de ne pas prendre en compte de façon exacte les conditions de reformation du film. Ces conditions sont satisfaites en appliquant l'algorithme de **Christopherson** [58].



conditions de Sommerfeld



conditions de Gumbel.



conditions de Reynolds.

□ zone inactive

■ zone active

Figure III-5 : Répartition circonférentielle de pression statique pour les différentes conditions aux limites

A cause de ces déficiences, certains auteurs ont proposé une modélisation plus affinée sur la reformation du film lubrifiant. Ils ont émis une condition supplémentaire qui est la conservation du débit massique du lubrifiant dans la zone divergente du film où il n'y a pas génération de pression.

En résumé, les conditions aux limites, généralement utilisées aujourd'hui pour le calcul des paliers, sont celles de :

- Reynolds** pour un palier de longueur finie (écoulement bidimensionnel),
- Gümbel** lorsqu'on utilise l'hypothèse du palier court (écoulement unidimensionnel).

III-6. CHARGE SUPPORTÉE ET MOMENT HYDRODYNAMIQUE

La connaissance du champ de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant permet de déterminer, par intégration numérique, les caractéristiques hydrodynamiques du palier telles que la charge supportée, le moment hydrodynamique, le couple de frottement et le débit axial.

III-6-1. Charge supportée et angle de calage

Pour les paliers de bielle et de vilebrequin, la masse du vilebrequin est relativement faible comparée aux charges appliquées aux paliers; les vitesses du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet sont déterminées en écrivant l'égalité entre la force hydrodynamique dans le film et l'ensemble des forces appliquées au palier:

$$\vec{F} + \vec{W} = \vec{0} \quad (\text{III-11})$$

Par rapport au système d'axes lié à la ligne des centres, l'équation III-11 s'écrit:

$$\begin{cases} F \cos \phi = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} R p(\theta, z) \cos \theta d\theta dz = -W_e \\ -F \sin \phi = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} R p(\theta, z) \sin \theta d\theta dz = -W_\phi \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

W_e et W_ϕ sont les composantes de la charge hydrodynamique suivant la direction de l'excentricité et sa perpendiculaire.

θ_e et θ_s sont les abscisses d'entrée et de sortie du film. Ils délimitent la zone active du palier caractérisée par $p > 0$.

L'angle de calage est déterminé par :

$$\phi = \text{Arctg} \left(- \frac{W_\phi}{W_e} \right) \quad (\text{III-13})$$

La portance hydrodynamique résultante se calcule par :

$$W = \sqrt{W_\varepsilon^2 + W_\phi^2}$$

En variables sans dimension, les expressions (III-12) s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{W}_\varepsilon \\ \overline{W}_\phi \end{cases} = \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{\theta_c}^{\theta_s} \overline{P}(\theta, \bar{z}) \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases} d\theta dz \quad (\text{III-14})$$

La charge totale sans dimension s'écrit :

$$\overline{W} = \frac{2W}{FM} \quad (\text{III-15})$$

où M est le facteur de mobilité qui sera défini ultérieurement dans le quatrième chapitre.

III-6-2. Moments hydrodynamiques

Dans le cas du palier conique et d'un mésalignement de l'arbre à l'intérieur du coussinet, la répartition de pression n'est plus symétrique et on peut alors déterminer le couple hydrodynamique \mathcal{M} , défini par :

$$\begin{cases} -\mathcal{M} \cos\varphi = - \int_{-L/2}^{L/2} z \int_{\theta_c}^{\theta_s} R_p(\theta, z) \cos\theta d\theta dz = -\mathcal{M}_\varepsilon \\ \mathcal{M} \sin\varphi = \int_{-L/2}^{L/2} z \int_{\theta_c}^{\theta_s} R_p(\theta, z) \sin\theta d\theta dz = -\mathcal{M}_\phi \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

On en déduit la valeur du moment résultant :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_\varepsilon^2 + \mathcal{M}_\phi^2)^{1/2} \quad (\text{III-17})$$

φ , l'angle entre la ligne des centres et le moment résultant \mathcal{M} , est défini par :

$$\varphi = \text{Arctg}\left(\frac{\mathcal{M}_\varepsilon}{\mathcal{M}_\phi}\right) \quad (\text{III-18})$$

En variables sans dimension, les relations (III-16) s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon \\ \overline{\mathcal{M}}_\phi \end{cases} = \int_{-1/2}^{+1/2} \bar{z} \int_{\theta_c}^{\theta_s} \overline{P}(\theta, \bar{z}) \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases} d\theta dz \quad (\text{III-19})$$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon \\ \overline{\mathcal{M}}_\phi \end{cases} = \frac{2}{FML} \begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon \\ \mathcal{M}_\phi \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

Le moment résultant sans dimension s'écrit :

$$\overline{\mathcal{M}} = (\overline{\mathcal{M}_\varepsilon}^2 + \overline{\mathcal{M}_\phi}^2)^{1/2}$$

$$\overline{\mathcal{M}} = \frac{2\mathcal{M}}{\text{FML}}$$

III-6-3. Représentation physique des moments hydrodynamiques

En définissant les rapports :

$$l_x = \frac{\mathcal{M}_x}{F_x} \quad \text{et} \quad l_y = \frac{\mathcal{M}_y}{F_y} \quad (\text{III-21})$$

où :

\mathcal{M}_x et \mathcal{M}_y représentent respectivement les moments, dus au mésalignement, dans le repère dont l'origine se trouve au centre du coussinet. Si l'on considère que le mésalignement est équivalent à une charge excentrée, l_x et l_y représentent la distance entre la section médiane et le point d'application des composantes de la charge appliquée (figure III-6)

III-6-4. Couples de frottement :

Le calcul du couple de frottement s'effectue en intégrant les contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre ou du coussinet :

$$C_{a,c} = \int R \tau_{xy}(y=h, y=0) ds \quad (\text{III-22})$$

Ces contraintes de cisaillement sont données par la loi de Newton (fluide newtonien):

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III-23})$$

où :

u est la vitesse du fluide dans la direction x et a pour expression :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U_c + \frac{y}{h} U_a \quad (\text{III-24})$$

L'état des contraintes à la surface du coussinet s'obtient pour $y=0$ et à la surface de l'arbre pour $y=h$.

Dans ces conditions, les couples de frottement sur l'arbre C_a et sur le coussinet C_c s'écrivent :

$$C_a = \iint_s R \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + (U_a - U_c) \frac{\mu}{h} \right) ds$$

et

$$C_c = \iint_s R \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + (U_a - U_c) \frac{\mu}{h} \right) ds \quad (III-25)$$

Notons que les couples de frottement peuvent se calculer de deux façons différentes:

- soit en considérant le palier plein de lubrifiant, c'est-à-dire en supposant qu'il existe une contrainte de cisaillement sur toute la surface de l'arbre et du coussinet.
- soit en ne considérant que la zone active du palier (θ_e, θ_s) où la répartition de pression est positive (figure III-7).

La valeur réelle du couple de frottement est comprise entre ces deux valeurs qui, en régime transitoire varient à chaque instant et sont donc obtenues numériquement.

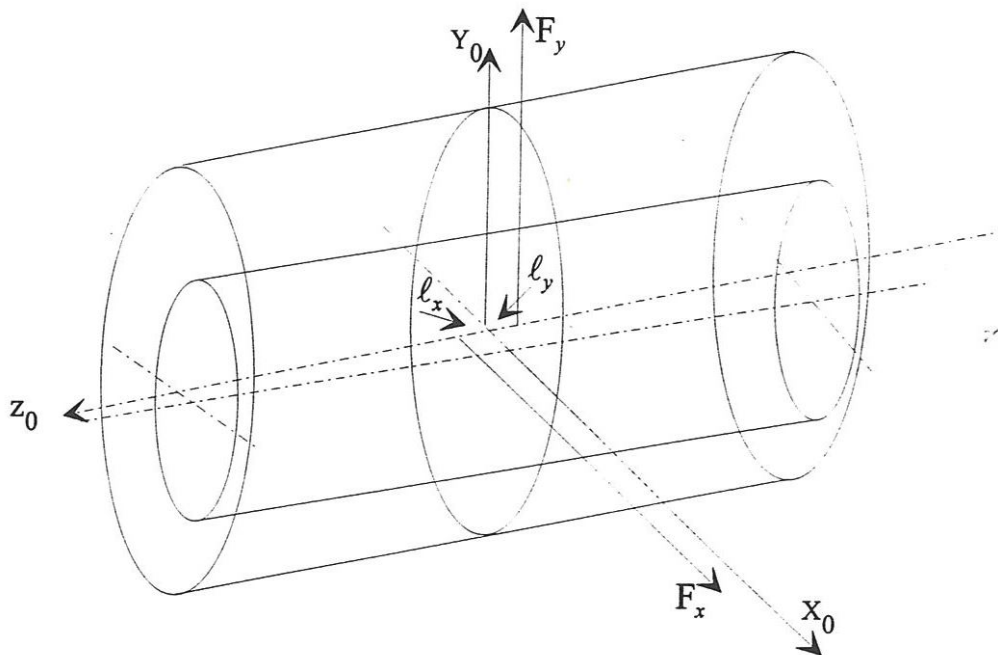


Figure III-6 : Représentation des moments hydrodynamiques

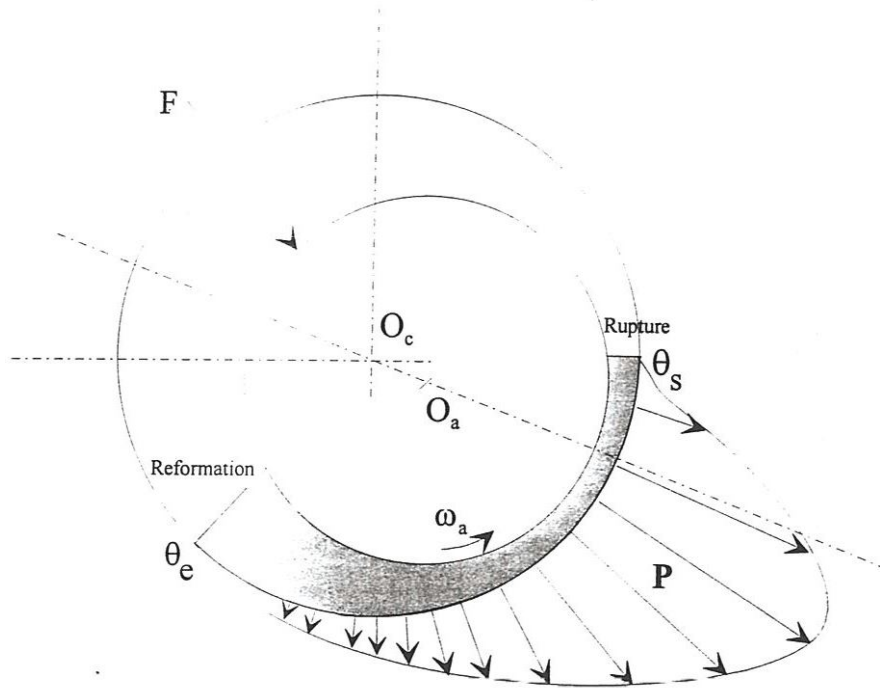


Figure III-7 : Représentation des bornes de pressions positives

III-6-5. Débit

Le débit axial s'écrit :

$$Q_z = \int_{\theta_e}^{\theta_s} \int_0^h \left(w_{(z=-L/2)} + w_{(z=L/2)} \right) R dy d\theta \quad (\text{III-26})$$

où :

w est la composante de la vitesse du fluide suivant la direction axiale du palier qui a pour expression générale :

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} w_c + \frac{y}{h} w_a \quad (\text{III-27})$$

Dans le cas des paliers, il n'y a pas de déplacement des surfaces suivant la direction axiale z (écoulement de poiseuille), donc $w_a = w_c = 0$. Le débit axial peut se mettre sous la forme :

$$Q_z = \int_0^h \int_{\theta_e}^{\theta_s} \frac{1}{2\mu} y(y-h) \left(\left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(z=-L/2)} + \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(z=L/2)} \right) R d\theta dy \quad (\text{III-28})$$

En intégrant par rapport à y , l'expression (III-28) devient :

$$Q_z = - \int_{\theta_c}^{\theta_s} \frac{h^3}{12\mu} \left(\left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(z=-L/2)} + \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(z=L/2)} \right) R \, d\theta \quad (\text{III-29})$$

En variables sans dimension, l'expression du débit s'écrit :

$$\bar{Q}_z = - \frac{1}{6} \int_{\theta_c}^{\theta_s} H^3 \left(\left| \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right|_{(\bar{z}=-1/2)} + \left| \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right|_{(\bar{z}=1/2)} \right) R \, d\theta \quad (\text{III-30})$$

Le débit axial total sera égal à :

$$Q_z = \frac{C^3 F M}{\mu L D} \bar{Q}_z \quad (\text{III-31})$$

La fonction \bar{P} est connue de façon discrète. C'est pourquoi la dérivée $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}}$ est obtenue en approchant \bar{P} , au voisinage des extrémités libres du palier, par un polynôme du troisième degré (Figure III-8). Dans ces conditions, nous avons:

- Section gauche ($\bar{z} = -1/2$) :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \approx \frac{18\bar{P}_2 - 9\bar{P}_3 + 2\bar{P}_4}{6\Delta\bar{z}}$$

- Section droite ($\bar{z} = +1/2$) :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \approx \frac{-18\bar{P}_N + 9\bar{P}_{N-1} - 2\bar{P}_{N-2}}{6\Delta\bar{z}}$$

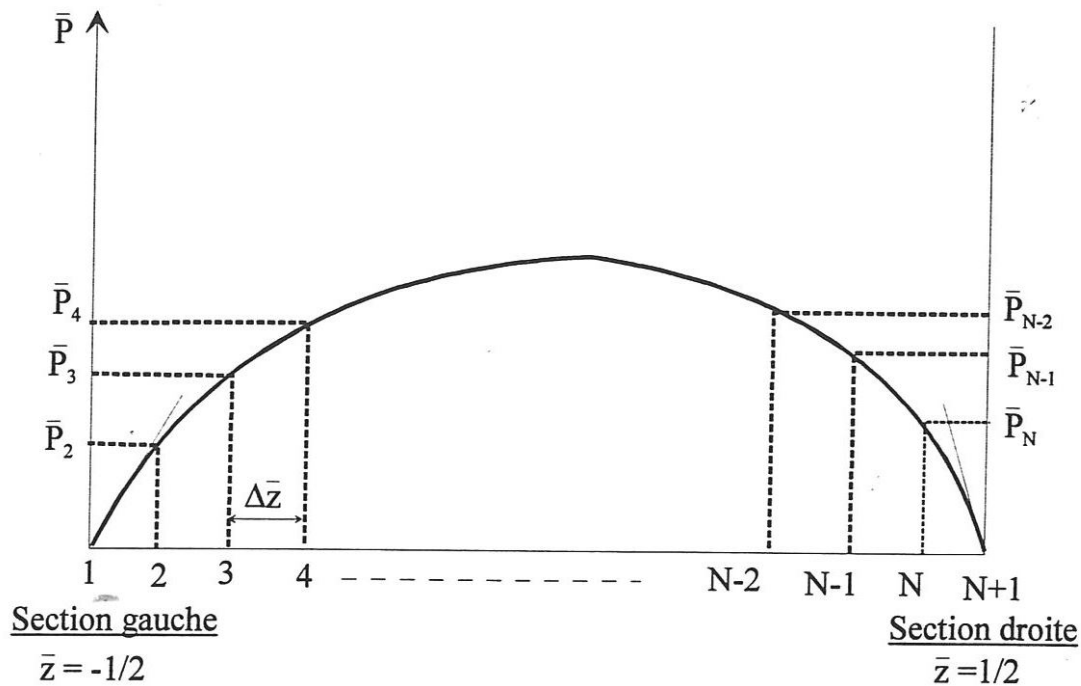


Figure III-8 : Répartition axiale de la pression

III-6-6. Puissance dissipée

La puissance dissipée dans le contact peut s'écrire :

$$\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_1 + \overline{\mathcal{P}}_2 + \overline{\mathcal{P}}_3 \quad (\text{III-32})$$

où :

$\overline{\mathcal{P}}_1 = e \dot{\phi} F \cos \phi$ représente la puissance dissipée par rotation de la charge par rapport à la ligne des centres.

$\overline{\mathcal{P}}_2 = \dot{e} F \cos \phi$ représente la puissance dissipée par l'écrasement du film.

$\overline{\mathcal{P}}_3 = C_a \omega_A + C_c \omega_c$ représente la puissance dissipée par le cisaillement du fluide.

Il faut noter que les puissances dissipées par rotation de la charge et par l'écrasement du film sont négligeables devant la puissance dissipée par le cisaillement du fluide.

III-7. Bilan thermique global

Les paliers hydrodynamiques, dont le bon fonctionnement dépend de l'existence d'un fluide visqueux entre les surfaces du contact, doivent répondre à des exigences technologiques de plus en plus sévères, dues à l'augmentation des charges et des vitesses de rotation. Pour de telles conditions de fonctionnement, l'énergie dissipée dans le contact est importante et les températures dans le fluide et dans les solides, contigus au film, sont élevées. Il en résulte une chute de la viscosité et une diminution de la portance du palier, et parfois, des caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les solides.

Dans ces conditions, la théorie isotherme ne peut plus être utilisée. Une analyse simple consiste à effectuer un bilan thermique global et à déterminer ainsi une valeur moyenne de la température et de la viscosité du lubrifiant. La valeur moyenne de la température sera calculée à partir de la puissance dissipée au cours du cycle, la viscosité moyenne étant obtenue à partir d'une loi exponentielle de variation de la viscosité en fonction de la température.

III-7-1. Elévation de température

La plus grande partie de la puissance dissipée dans le film est évacuée par le lubrifiant, dans ces conditions, l'élévation de la température peut s'écrire :

$$\Delta T = \frac{\overline{\mathcal{P}}_{\text{moy.}}}{\lambda Q_{\text{moy.}} \rho C_p} \quad (\text{III-33})$$

avec C_p la chaleur spécifique du lubrifiant, ρ la masse volumique du lubrifiant à la température d'alimentation, Q_{moy} le débit moyen et $\overline{\mathcal{P}}_{\text{moy}}$ puissance moyenne dissipée.

λ représente le taux de chaleur évacuée par le fluide.

III-7-2. Calcul de la viscosité apparente

La variation de la viscosité en fonction de la température peut être approchée par différentes relations. Une loi de type exponentielle peut être utilisée:

$$\mu(T) = \mu(T_0) \exp(-\beta'(T - T_0)) \quad (\text{III-34})$$

où :

T_0 est la température du lubrifiant à l'alimentation,
 T est la température d'équilibre dans le film,
 et β' est le coefficient de thermoviscosité.

Comme, pour une charge donnée, le couple et le débit sont fonction de la viscosité du lubrifiant, l'équation (III-32) doit être résolue de manière itérative.

Le processus de calcul est précisé sur l'organigramme de la figure (III-9) :

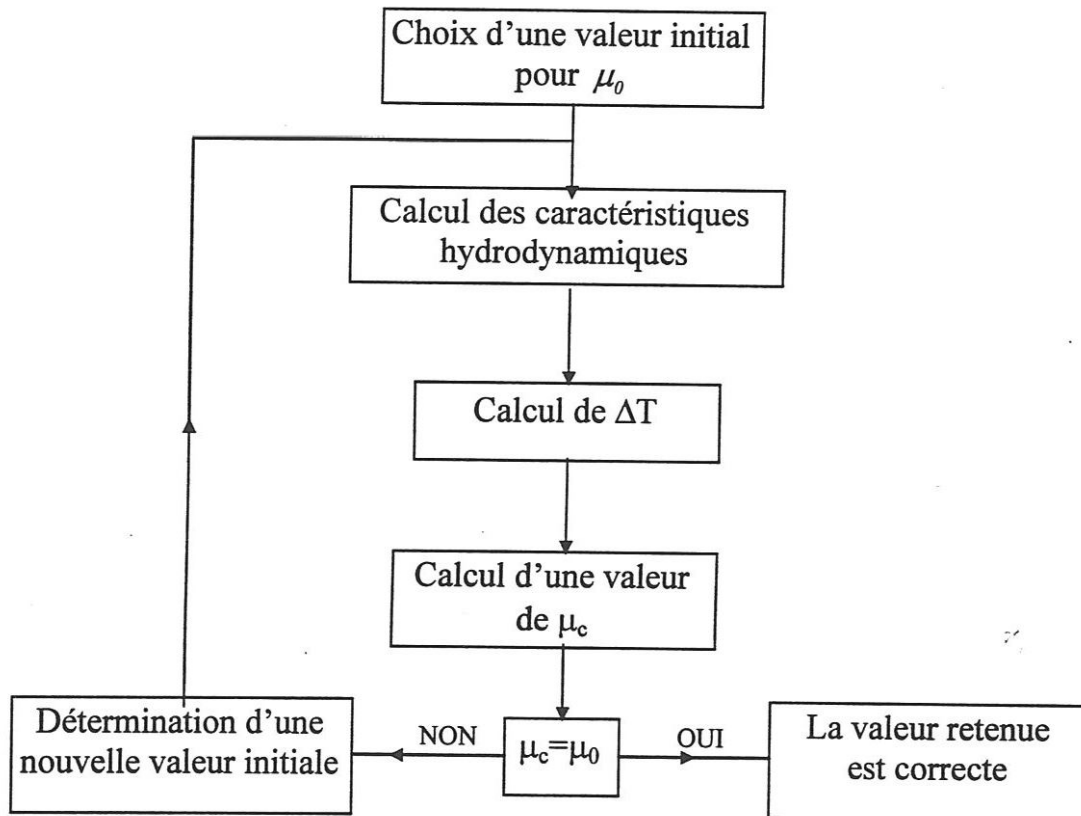


Figure III-9 : Organigramme de calcul de la viscosité apparente

La convergence de ce processus itératif dépend de la valeur de T_0 , de la forme de la relation $\mu(T)$, du couple et du débit. Lorsque le processus diverge, on peut introduire un coefficient de pondération σ appelé coefficient de sous relaxation dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1 et écrire :

$$\Delta T^{(n+1)} = (1 - \sigma) \Delta T^{(n)} + \sigma \left\{ \frac{\bar{\mathcal{P}}_{moy}}{\lambda \rho C_p Q_{moy}} \right\} \quad (\text{III-35})$$

III-8. CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté :

- l'équation de Reynolds écrite en régime transitoire pour un palier lisse soumis à une charge dynamique extérieure,
- les équations géométriques du film tenant compte des défauts de forme et de mésalignement,
- les conditions aux limites liées à l'écoulement du fluide dans le palier.

Ces équations seront utilisées au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques dynamiques des paliers de moteur.

L'intégration de l'équation de Reynolds permet de calculer la répartition de pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques hydrodynamique telles que la portance hydrodynamique, le débit, le moment dû au mésalignement et le couple de frottement s'en déduisent aisément.

CHAPITRE IV

RESOLUTION DES PROBLEMES DE LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE EN REGIME TRANSITOIRE

IV-1 INTRODUCTION

Un palier est en fonctionnement transitoire si la charge est stationnaire mais l'arbre est écarté de sa position d'équilibre par une perturbation, le problème est alors de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable. C'est le cas des paliers d'une ligne d'arbre de machines tournantes telles que les turbines. Si la charge appliquée est fonction du temps, on cherche dans ce cas la trajectoire qui en résulte du mouvement du centre de l'arbre dans le coussinet afin de déterminer la hauteur minimale du film lubrifiant et pouvoir éviter les avaries éventuelles. Ce cas correspond aux conditions de fonctionnement des paliers de tête de bielle et du vilebrequin des moteurs à combustion et des compresseurs.

L'étude du comportement dynamique des paliers de tête de bielle et de vilebrequin ne s'effectue pas de la même façon que celle des paliers de lignes d'arbres car la masse du rotor, le vilebrequin, est relativement faible et les charges appliquées aux paliers varient dans des proportions considérables. Ainsi, les méthodes de calcul sont différentes : on détermine les vitesses du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet en écrivant l'égalité entre la force hydrodynamique développée dans le film et l'ensemble des forces appliquées au palier tout en négligeant la masse du rotor.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de mobilité de **Booker** qui permet une résolution rapide et précise des problèmes de lubrification dans les paliers de moteurs à combustion interne.

Dans cette méthode, le mouvement de l'arbre est décomposé en deux composantes, l'une traduisant l'effet d'écrasement, l'autre les effets de rotation. Initialement traitée par voie graphique cette méthode est maintenant rendue automatique grâce à l'utilisation d'ordinateur. Cette méthode conduit à une connaissance acceptable des trajectoires du centre de l'arbre ; des trajectoires expérimentales fournies par la compagnie **GLACIER** ont été comparées à celles prévues par la méthode de mobilité : la concordance y est bonne.

La répartition de pression dans le palier est déterminée à l'aide de trois méthodes :

- la méthode des différences finies centrées (MDF 2D),
- la théorie du palier court optimisée (MDF 1D),
- la théorie du palier court classique.

IV-2. SYSTEMES DE COORDONNEES ET NOTATIONS

Un palier lisse est constitué de deux éléments essentiels, l'arbre de rayon R_a et le coussinet de rayon intérieur R_c et de longueur L .

Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial $C=R_c-R_a$, le jeu relatif $\frac{C}{R}$ et le rapport $\frac{L}{D}$ de la longueur au diamètre du palier.

La figure (IV-1) représente la section droite du palier ainsi que les différents systèmes de coordonnées s'y rattachant.

* Repère (O_c, X, Y, Z) peut être lié soit au bâti (palier de ligne de vilebrequin) soit à la bielle (palier de tête de bielle).

* Repère (O_c, ξ, η) lié à la charge $F(t)$

* Repère (O_c, ε, ϕ) lié à la ligne des centres.

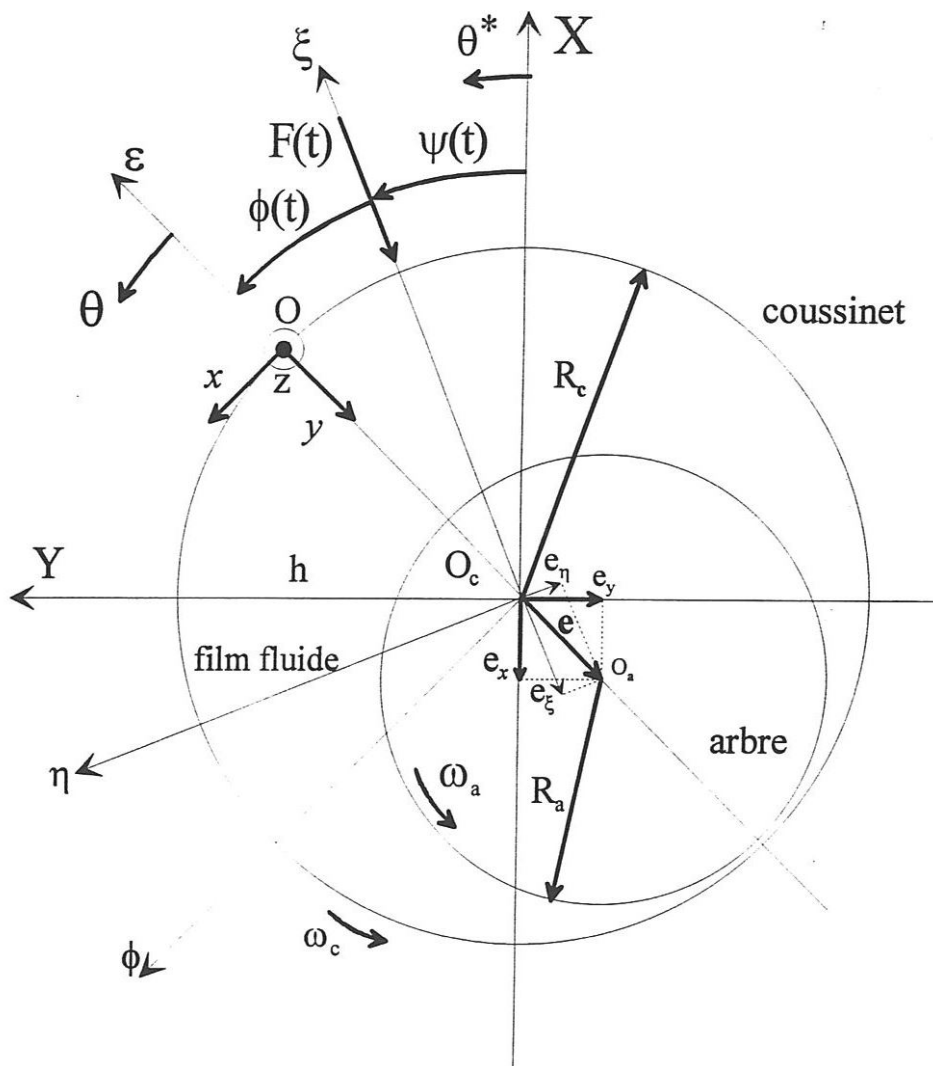


Figure IV-1 : Section droite du palier et systèmes de coordonnées

IV-3. CONCEPT DE MOBILITE

IV-3-1. Equation de Reynolds sans dimension

Sans les termes propres au mésalignement, l'équation de Reynolds (III-9) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{12\mu}{\left(\frac{C}{R} \right)^2} \left\{ (\bar{\omega} - \dot{\phi}) \frac{\partial H}{\partial \theta} + \dot{\varepsilon}_0 \cos \theta \right\} \quad (IV-1)$$

avec :

$$H = 1 + \varepsilon_0 \cos \theta + f(\bar{z})$$

$$\text{et } \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon_0 \sin \theta$$

$$\text{En posant } p = P \frac{F}{LD}$$

où L est la longueur du palier, D son diamètre et F la charge dynamique extérieure appliquée au palier, l'équation de Reynolds sans dimension s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{12\mu LD}{F \left(\frac{C}{R} \right)^2} \left\{ (\dot{\phi} - \bar{\omega}) \varepsilon_0 \sin \theta + \dot{\varepsilon}_0 \cos \theta \right\} \quad (IV-2)$$

Les conditions aux limites associées, sont celles de Reynolds.

IV-3-2. Principe de la méthode de mobilité

Le second membre de l'équation (IV-2) fait apparaître les deux inconnues du problème : $\dot{\varepsilon}_0$ et $\dot{\phi}$. La solution classique est de donner deux valeurs arbitraires à $\dot{\varepsilon}_0$ et à $\dot{\phi}$ et d'utiliser une méthode itérative sur ces deux vitesses jusqu'à ce que la charge hydrodynamique calculée soit égale et opposée à la charge appliquée F. Les calculs numériques sont très importants, c'est pourquoi nous préférons utiliser la méthode de mobilité de **Booker** qui permet une résolution rapide et précise du problème.

Booker propose d'exprimer les deux vitesses $\dot{\varepsilon}_0$ et $\dot{\phi}$ suivant deux fonctions M_ε et M_ϕ telles que :

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{F \left(\frac{C}{R} \right)^2}{\mu LD} M_\varepsilon \left(\varepsilon_0, \phi, \frac{L}{D}, \theta_e, \theta_s \right) \quad (IV-3)$$

$$\varepsilon_0 (\dot{\phi} - \bar{\omega}) = \frac{F \left(\frac{C}{R} \right)^2}{\mu LD} M_\phi \left(\varepsilon_0, \phi, \frac{L}{D}, \theta_e, \theta_s \right)$$

Il décompose ainsi le mouvement de l'arbre en deux composantes, l'une traduisant l'effet d'écrasement, l'autre les effets de rotation. Ainsi M_ε est orienté suivant la direction d'excentricité et M_ϕ suivant sa perpendiculaire (figure IV-2). Ces

deux fonctions sont définies comme les composantes d'un vecteur M appelé vecteur mobilité et elles peuvent s'écrire :

$$M_\varepsilon = M \cos \alpha_M$$

$$M_\phi = -M \sin \alpha_M$$
(IV-4)

α_M est l'angle entre le vecteur mobilité et la direction d'excentricité.

En utilisant les équations (IV-3) et (IV-4) pour exprimer ε_0 et $\dot{\phi}$ en fonction de M et α_M , l'équation de Reynolds se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 12 M \cos(\theta + \alpha_M)$$
(IV-5)

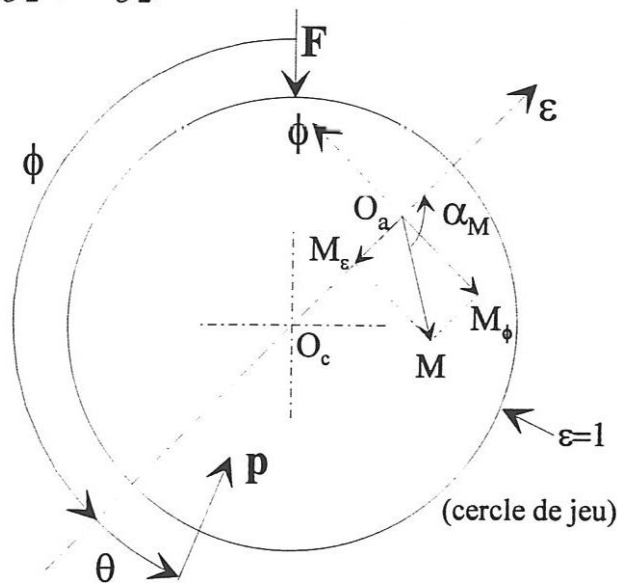


Figure IV-2: Représentation du vecteur mobilité et de ses composantes

En posant $P = \bar{P}M$, l'équation (IV-5) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) = 12 \cos(\theta + \alpha_M)$$
(IV-6)

Le second membre de l'équation (IV-6) ne fait intervenir qu'une seule inconnue, la direction de mobilité α_M ; la résolution de cette équation s'en trouve donc simplifiée.

Toutefois, la détermination de α_M qui, pour une excentricité donnée, est seulement fonction de l'angle de calage ϕ nécessite l'utilisation d'une méthode numérique d'interpolation. Il faut noter que la relation entre α_M et ϕ est a priori inconnue.

Dans le cas d'un palier mésaligné, l'équation (IV-6) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) = 12 \left\{ \cos(\theta + \alpha_M) - \frac{\delta z}{\varepsilon_0} \sin \alpha_M \sin(\theta - \beta) + \frac{G_M}{M} \right\}$$
(IV-7)

avec :
$$G_M = \frac{\mu LD}{F \left(\frac{C}{R}\right)^2} \{ \dot{\delta} \bar{z} \cos(\theta - \beta) + \delta \bar{z} \dot{\beta} \sin(\theta - \beta) \}$$

IV-3-3. Interprétation physique

Le vecteur M , dont le module est une quantité sans dimension, caractérise l'effet d'écrasement du film lubrifiant. A un coefficient multiplicateur près $\frac{F}{\mu LD} \left(\frac{C}{R}\right)^2$ et à tout instant, le vecteur mobilité définit la vitesse ($\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\phi}$) qu'aurait le centre de l'arbre par rapport à la charge, si la différence entre la vitesse de rotation moyenne de l'arbre et du coussinet et celle de la charge était nulle ($\bar{\omega} = 0$). Ainsi, dans le cas où $\bar{\omega}$ est nulle, la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet sera obtenue directement par le vecteur mobilité.

Un cas particulier de fonctionnement est l'écrasement pur du film lubrifiant qui se produit pour la condition de fonctionnement $\dot{\phi} - \bar{\omega} = 0$, dans ce cas, le vecteur mobilité est colinéaire à la charge appliquée et est situé sur la même droite d'action (axe vertical sur la figure IV-3). Ainsi, le concept de mobilité développé par Booker montre, de façon simple, que dans le cas où toutes les vitesses de rotation sont nulles, seule la variation de la charge peut générer une portance dans le palier. Par ailleurs, lorsque le champ de pression dans le film généré uniquement par l'effet des vitesses de rotation (c'est-à-dire lorsque $\dot{\varepsilon} = 0$), le vecteur mobilité est perpendiculaire au vecteur position et le centre de l'arbre est situé sur un point d'équilibre statique (courbe en pointillés figure IV-3).

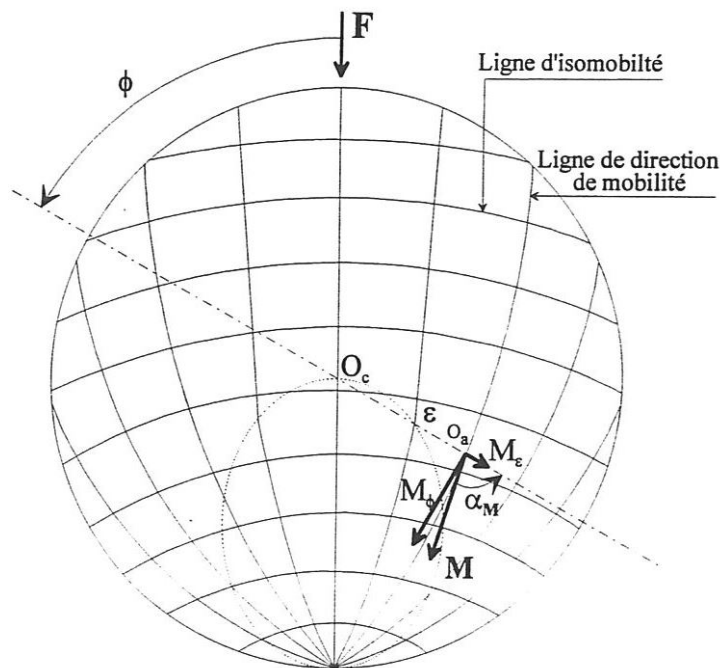


Figure IV-3 : Représentation graphique du vecteur mobilité

IV-3-4. Détermination de la trajectoire du centre de l'arbre

La trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet est obtenue pour le pas considéré, par intégration de la vitesse du centre de l'arbre à un instant donné. L'équation du mouvement du centre de l'arbre dans le repère (x, y, z) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \end{Bmatrix} = \frac{F \left(\frac{C}{R} \right)^2}{\mu L D} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} + \bar{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-8})$$

où

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_\varepsilon \\ M_\phi \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

$$\text{avec } \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{|F|} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \text{ et } \phi_0 = \text{arctg} \left(\frac{\varepsilon_\eta}{\varepsilon_\xi} \right) \quad (\text{IV-10})$$

ϕ_0 étant l'angle de calage imposé

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-11})$$

IV-3-5. Détermination de la charge hydrodynamique

La détermination du champ de pression dans le film permet de calculer les composantes de la charge sans dimension :

$$\begin{cases} \bar{W}_\varepsilon = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\theta_c}^{\theta_s} \bar{P}(\theta, \bar{z}) \cos \theta d\theta d\bar{z} \\ \bar{W}_\phi = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\theta_c}^{\theta_s} \bar{P}(\theta, \bar{z}) \sin \theta d\theta d\bar{z} \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

le module de la charge est donné par :

$$\bar{W} = \sqrt{\bar{W}_\varepsilon^2 + \bar{W}_\phi^2}$$

ce qui permet de calculer le module du vecteur mobilité et l'angle de calage :

$$M = \frac{2}{\bar{W}} \text{ et } \phi = \text{Arctg} \left(-\frac{\bar{W}_\phi}{\bar{W}_\varepsilon} \right) \quad (\text{IV-13})$$

La charge hydrodynamique dimensionnée est égale à la charge appliquée F et s'écrit :

$$\begin{cases} W_\varepsilon = \frac{F}{2} M \bar{W}_\varepsilon \\ W_\phi = \frac{F}{2} M \bar{W}_\phi \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

La résolution est faite selon l'organigramme présenté par la figure IV-4 :

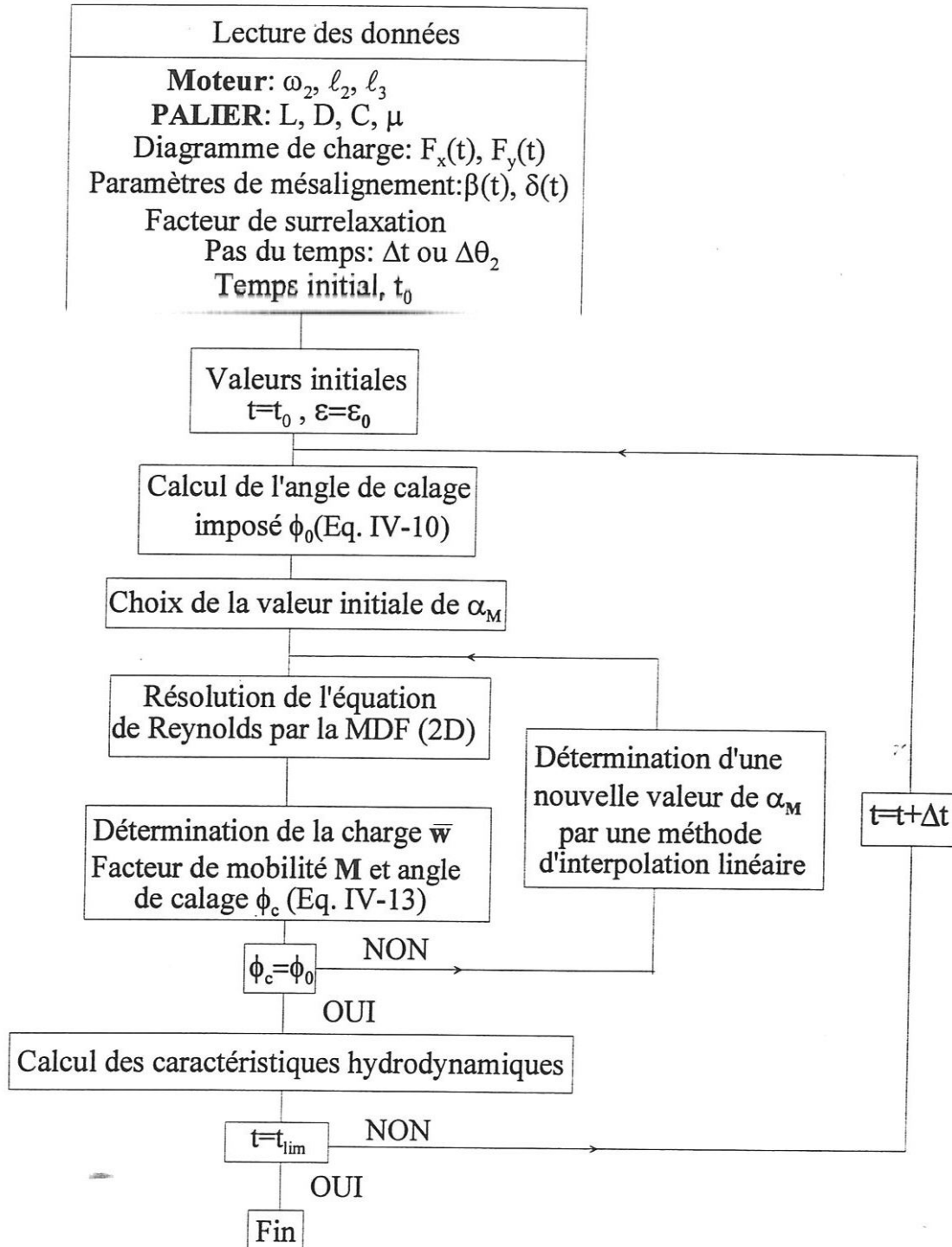


Figure IV-4 : Organigramme succinct de calcul

IV-4. METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas, sauf dans quelques cas simples, de solutions analytiques.

Sommerfeld [5] a résolu l'équation de Reynolds en négligeant l'écoulement axial, (c'est l'hypothèse du palier infiniment long $\frac{L}{D} \rightarrow \infty$). Une autre solution plus représentative du point de vue physique a été proposée par Ocvirk [59] dans le cas où la longueur du palier est très faible devant son diamètre (c'est l'hypothèse du palier court $\frac{L}{D} \rightarrow 0$). Pour les paliers de longueur finie (écoulement bidimensionnel) différentes méthodes ont été proposées, dont les plus utilisées sont les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation des ordinateurs. Parmi ces méthodes, on peut citer, la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis [60].

IV-4-1 : Méthode des différences finies bidimensionnelle

Dans un palier, le rapport entre le jeu radial C et le rayon du coussinet étant très faible (de l'ordre de 10^{-3}), on néglige la courbure du film. Le palier est alors développé suivant sa direction circonférentielle, on est alors ramené à un problème bidimensionnel.

Dans cette méthode simple à mettre en œuvre pour des géométries de film et d'alimentation régulières. Le domaine est discrétisé en rectangles élémentaires appelés mailles. La pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale. Les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point du maillage en fonction des valeurs de la pression aux points environnants.

La résolution de l'équation de Reynolds (IV-6) ou (IV-7) est alors ramenée à la résolution d'un système d'équations linéaires. La méthode de résolution du système linéaire dépend des conditions aux limites utilisées. Dans le cas d'application des conditions aux limites de Reynolds, on peut satisfaire à ces conditions en utilisant un processus itératif au cours duquel on impose à la pression d'être positive, c'est-à-dire au cours des calculs les valeurs négatives de la pression sont annulées. La méthode utilisée est celle de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation.

Dans la méthode des différences finies centrées, les dérivées partielles de la pression sont écrites en un point (i,j) en fonction des valeurs de la pression aux points environnants figure IV-5.

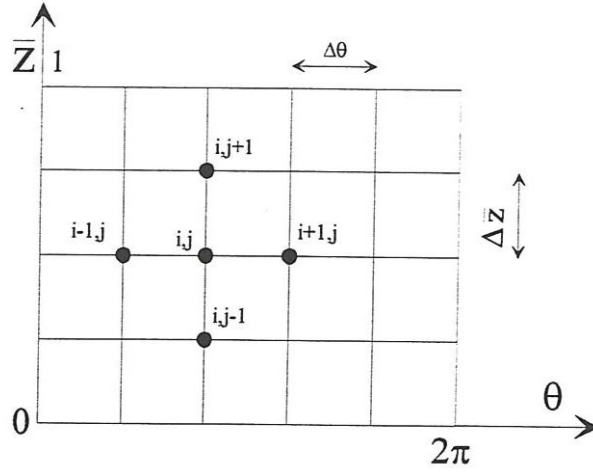


Figure IV-5 : Maillage du film complet

Soit :

- approximation des dérivées premières

$$\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta}\right)_{i,j} \approx \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{2\Delta\theta}, \quad \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}}\right)_{i,j} \approx \frac{\bar{P}_{i,j+1} - \bar{P}_{i,j-1}}{2\Delta\bar{z}}$$

où $\Delta\theta$ et $\Delta\bar{z}$ sont respectivement les pas du maillage dans les directions circonférentielle et axiale.

- approximation des dérivées secondes

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\bar{P}_{i+1,j} - 2\bar{P}_{i,j} + \bar{P}_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{z}^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\bar{P}_{i,j+1} - 2\bar{P}_{i,j} + \bar{P}_{i,j-1}}{(\Delta\bar{z})^2}$$

Dans ces conditions, l'équation aux différences finies associées à l'équation de Reynolds (IV-7) s'écrit :

$$\bar{P}_{i,j} = (1-\Omega)\bar{P}_{i,j} + \Omega [a_{i,j} \bar{P}_{i+1,j} + b_{i,j} \bar{P}_{i-1,j} + c_{i,j} \bar{P}_{i,j+1} + d_{i,j} \bar{P}_{i,j-1} + e_{i,j}] \quad (IV-15)$$

Où :

$$a_{i,j} = \frac{\left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \frac{3}{2H\Delta\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right]}{\text{DEN}}$$

$$b_{i,j} = \frac{\left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} - \frac{3}{2H\Delta\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right]}{\text{DEN}}$$

$$c_{i,j} = \frac{\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{(\Delta\bar{z})^2} + \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{2\Delta\bar{z}} \right]}{\text{DEN}}$$

$$d_{i,j} = \frac{\left[\left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{(\Delta\bar{z})^2} - \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{2\Delta\bar{z}} \right]}{\text{DEN}}$$

$$e_{i,j} = \frac{-12}{H^3 \text{DEN}} \left[\cos(\theta + \alpha_M) - \frac{\delta\bar{z}}{\varepsilon_0} \sin\alpha_M \sin(\theta - \beta) + \frac{G_M}{M} \right]$$

$$\text{DEN} = 2 \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{1}{(\Delta\bar{z})^2} \right]$$

Ω est le coefficient de surrelaxation qui est déterminé par expérimentation numérique: Pour les problèmes de lubrification, sa valeur optimale Ω_{opt} c'est-à-dire celle qui permet de satisfaire un test de précision donné en un nombre minimal d'itérations s'échelonne entre 1.5 et 1.85.

A titre indicatif, la figure IV-6 montre la relation qui existe entre le nombre d'itérations et le coefficient de relaxation pour un problème de lubrification en régime stationnaire. On remarque que la valeur de Ω conditionne largement le nombre d'itérations. Ainsi, la rapidité de la convergence du processus itératif est fonction de la valeur du coefficient de relaxation. Pour ce type de problème, la valeur optimale de Ω est voisine de 1.75.

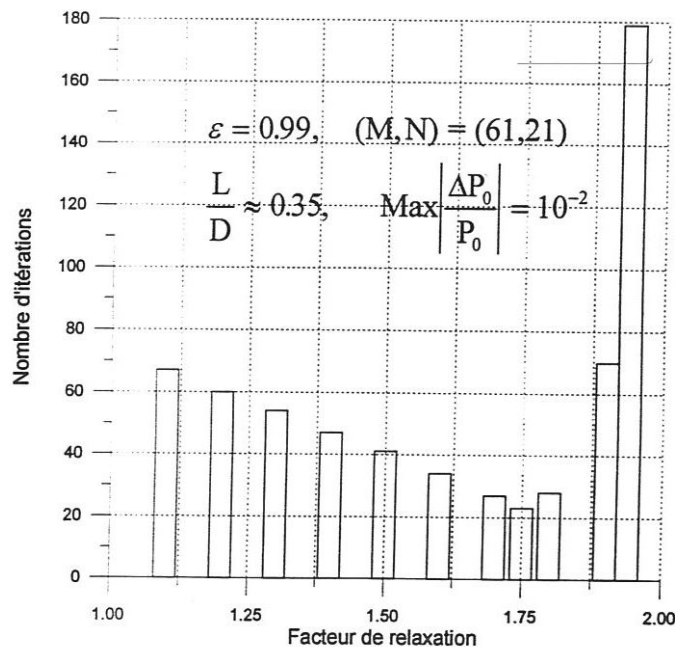


Figure IV-6 : Influence du facteur de relaxation sur le nombre d'itérations

L'utilisation d'un processus itératif implique l'existence d'un test d'arrêt. Si k représente le nombre d'itérations, il y aura convergence lorsque :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{P}_{i,j}^{(k+1)} - \bar{P}_{i,j}^{(k)}) = 0 \quad \forall (i, j)$$

Le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce que l'erreur relative :

$$\text{Max} \left| \frac{\bar{P}_{i,j}^{(k+1)} - \bar{P}_{i,j}^{(k)}}{\bar{P}_{i,j}^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-2} \quad (\text{IV-16})$$

On adjoint à ce test de précision un test sur le nombre d'itérations, de manière à éliminer les cas où le processus itératif ne convergerait pas.

IV-4-2. Théorie du palier court optimisée

Rohde et **Li** [61] ont proposé une approche basée sur les méthodes classiques de séparation de variables qui permet de réduire l'équation de **Reynolds** (III-2) à une équation différentielle ordinaire du second ordre en x . Utilisant le fait que la répartition de pression dans la direction axiale est parabolique dans le cas du palier court et reste quasi parabolique dans le cas du palier de longueur finie, ils posent :

$$p(x, z) = \left(1 - 4\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)g(x) \quad (\text{IV-17})$$

Dans l'annexe B, on montre que la fonctionnelle associée à l'équation de **Reynolds** s'écrit lorsque le terme de frontière n'est pas pris en considération:

$$J(p) = \int_D \left[-\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 - \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 - hU \frac{\partial p}{\partial x} - 2p \frac{\partial h}{\partial t} \right] dx dz \quad (\text{IV-18})$$

La relation (IV-17) est reportée dans la fonctionnelle (IV-18). L'intégration par rapport à z puis l'application du calcul des variations [62], conduit à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{8}{15} h^3 \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{8}{5} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dg}{dx} - \frac{1}{L^2} \frac{16}{3} h^3 g = 4\mu \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{IV-19})$$

En faisant le changement de variables suivant:

$$x = R\theta \quad , \quad U = R\omega \quad , \quad H = \frac{h}{C}$$

L'équation (IV-18), en variables sans dimension, s'écrit :

$$\frac{8}{5} \frac{H^3 C^2}{R^2} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{8}{5} \frac{H^2 C^2}{R^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{dg}{d\theta} - \frac{1}{L^2} \frac{16}{3} H^3 C^2 g = 4\mu \left(\omega \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (\text{IV-20})$$

On sait que $H = 1 + \varepsilon \cos \theta$ tel que $\theta = \theta^* - (\phi + \psi)$
alors :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = [\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon(\dot{\phi} + \dot{\psi}) \sin \theta]$$

Par conséquent :

$$\omega \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial H}{\partial t} = -\omega \varepsilon \sin \theta + 2(\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon(\dot{\phi} + \dot{\psi}) \sin \theta)$$

L'équation (IV-20) devient:

$$\frac{1}{15} H^3 \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{1}{5} H^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{dg}{d\theta} - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^3 g = \frac{\mu}{\left(\frac{C}{R} \right)^2} (-\varepsilon \sin \theta (\bar{\omega} - \phi) + \dot{\varepsilon} \cos \theta) \quad (\text{IV-21})$$

Si on pose $g = G \frac{F}{LD}$, l'équation (IV-21) devient:

$$\frac{1}{15} H^3 \frac{d^2 G}{d\theta^2} + \frac{1}{5} H^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{dG}{d\theta} - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^3 G(\theta) = \frac{\mu}{\left(\frac{C}{R} \right)^2} \frac{LD}{F} (-\varepsilon \sin \theta (\bar{\omega} - \phi) + \dot{\varepsilon} \cos \theta) \quad (\text{IV-22})$$

En utilisant le changement de variables (IV-3) et les relations (IV-4) proposés par **Booker**, l'équation (IV-22) devient:

$$\frac{1}{15} H^3 \frac{d^2 G}{d\theta^2} + \frac{1}{5} H^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{dG}{d\theta} - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^3 G(\theta) = M \cos(\theta + \alpha_M) \quad (\text{IV-23})$$

En faisant le changement de variable $G = \bar{G}M$,

l'équation (IV-23) prend la forme finale suivante:

$$\frac{1}{15} H^3 \frac{d^2 \bar{G}}{d\theta^2} + \frac{1}{5} H^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\bar{G}}{d\theta} - \frac{2}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^3 \bar{G}(\theta) = \cos(\theta + \alpha_M) \quad (\text{IV-24})$$

Cette équation peut être intégrée numériquement en utilisant la méthode des différences finies unidimensionnelles. Le maillage du palier est fait uniquement dans la direction circonférentielle.

La combinaison de l'équation aux différences finies associée à l'équation (IV-24) avec l'algorithme de sur-relaxation de Gauss-Seidel conduit à l'équation :

$$\bar{G}_i^{k+1} = (1 - \Omega) \bar{G}_i^k + \Omega [a_i \bar{G}_{i+1} + b_i \bar{G}_{i-1} - c_i] \quad (\text{IV-25})$$

IV-4-3. Théorie du palier court

Dans le cas où le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est petit, l'équation de Reynolds admet une solution analytique car on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \ll \frac{\partial p}{\partial z} \right)$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \mu C [(\phi - \bar{\omega}) \varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta] \quad (\text{IV-26})$$

Les conditions aux limites sur la pression sont :

$$p\left(\theta, -\frac{L}{2}\right) = p\left(\theta, +\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (\text{IV-27})$$

Pour ce type de palier, l'étendue de la zone active ($p > 0$) est toujours égale à π .

En intégrant, compte tenu des conditions aux limites selon z , il vient :

$$p = \frac{6 \mu C}{h^3} \left[(\dot{\phi} - \bar{\omega}) \varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta \right] \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (\text{IV-28})$$

Les composantes de la charge hydrodynamique sont obtenues par intégration de la pression sur la zone active du palier, c'est-à-dire sur la zone où la pression est positive $\theta \in [\theta_e, \theta_s]$. Dans ce cas les conditions utilisées sont celles de Gumbel, il vient :

$$\begin{cases} W_\varepsilon = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} p \cos \theta R \, d\theta \, dz \\ W_\phi = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} p \sin \theta R \, d\theta \, dz \end{cases} \quad (\text{IV-29})$$

où θ_e et θ_s sont respectivement les limites d'entrée et de sortie du film, tel que: $\theta_s = \theta_e + \pi$
L'angle θ_e est déterminé par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} \cos \theta_e + \varepsilon (\dot{\phi} - \bar{\omega}) \sin \theta_e = 0 \quad (\text{IV-30})$$

ou :

$$\theta_e = \text{Arctg} \left[-\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon (\dot{\phi} - \bar{\omega})} \right] \quad (\text{IV-31})$$

- Si $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$, $\theta_e = 0$ et $\theta_s = \pi$

Ce cas correspond à un palier soumis à une charge extérieure statique.

- Si $\bar{\omega} = \dot{\phi} = \phi = 0$, $\theta_e = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_s = \frac{3\pi}{2}$

C'est le cas d'un palier soumis à une charge alternative suivant la ligne des centres (Cas du palier de pied de bielle par exemple)

Dans le cas du palier court, les composantes de la charge s'écrivent :

$$\begin{cases} W_\varepsilon = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} -\frac{\mu CL^3 R}{h^3} [(\phi - \bar{\omega})\varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta] \cos \theta d\theta \\ W_\phi = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} -\frac{\mu CL^3 R}{h^3} [(\phi - \bar{\omega})\varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta] \sin \theta d\theta \end{cases} \quad (\text{IV-32})$$

Le calcul de ces intégrales peut s'effectuer numériquement ou analytiquement en utilisant les formules présentées en [annexe C]:

$$I_1 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{-2\varepsilon \cos^3 \theta_e}{(1 + \varepsilon^2 \cos^2 \theta_e)^2} \quad (\text{IV-33})$$

$$I_2 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$$

soit :

$$I_2 = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left[\frac{\varepsilon \sin \theta_e [3 + \cos^2 \theta_e (2 - 5\varepsilon^2)]}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_e)^2} + \frac{2\varepsilon^2 + 1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon \sin \theta_e} \right) \right] \quad (\text{IV-34})$$

$$I_3 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$$

soit :

$$I_3 = \frac{\varepsilon \sin \theta_e}{1 - \varepsilon^2} \left[\frac{[1 + \cos^2 \theta_e (\varepsilon^2 - 2)]}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_e)^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon \sin \theta_e} \right) \right] \quad (\text{IV-35})$$

Il faut toutefois tenir compte de la détermination de l'arctangente lors du calcul de ces intégrales. Les composantes de la charge s'écrivent :

$$\begin{cases} W_\varepsilon = -\frac{\mu L^3 R}{C^2} [(\phi - \bar{\omega})\varepsilon I_1 + \dot{\varepsilon} I_2] \\ W_\phi = -\frac{\mu L^3 R}{C^2} [(\phi - \bar{\omega})\varepsilon I_3 + \dot{\varepsilon} I_1] \end{cases} \quad (\text{IV-36})$$

La charge hydrodynamique doit à chaque instant être égale et opposée à la charge appliquée au palier soit :

$$\begin{cases} F_\varepsilon = F \cos \phi = -W_\varepsilon \\ F_\phi = -F \sin \phi = -W_\phi \end{cases} \quad (\text{IV-37})$$

Ce qui permet d'explicitier $\dot{\varepsilon}$ et ϕ

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \frac{C^2 F(I_3 \cos \phi + I_1 \sin \phi)}{\mu L^3 R(I_3 I_2 - I_1^2)} \\ \dot{\phi} = \bar{\omega} - \frac{C^2 F(I_2 \sin \phi + I_1 \cos \phi)}{\mu L^3 R \varepsilon (I_3 I_2 - I_1^2)} \end{cases} \quad (\text{IV-38})$$

Ainsi, le système différentiel se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = G(\varepsilon, \phi, F, \lambda_i, I_1, I_2, I_3) \\ \dot{\phi} = H(\varepsilon, \phi, F, \lambda_i, I_1, I_2, I_3) \end{cases} \quad (\text{IV-39})$$

où λ_i sont les paramètres qui représentent la viscosité du lubrifiant, les dimensions du palier et les vitesses de rotation, de l'arbre et du coussinet.

L'intégration s'effectue à partir des valeurs initiales choisies à priori. La méthode d'Euler est très souvent utilisée. On peut aussi utiliser une méthode de prédiction-corrrection (Figure IV-7), le schéma prédicteur est le schéma d'Euler à partir de $(\varepsilon_0, \dot{\varepsilon}_0)$ et $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1^l = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0 \Delta t \\ \phi_1^l = \phi_0 + \dot{\phi}_0 \Delta t \end{cases} \quad (\text{IV-40})$$

où Δt est le pas de temps. On calcule ensuite :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1^l = G(\varepsilon_1^l, \phi_1^l, F, \lambda_i, I_1^l, I_2^l, I_3^l) \\ \dot{\phi}_1^l = H(\varepsilon_1^l, \phi_1^l, F, \lambda_i, I_1^l, I_2^l, I_3^l) \end{cases}$$

Le schéma correcteur s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^2 = \varepsilon_0 + (\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_1^l) \frac{\Delta t}{2} \\ \phi_1^2 = \phi_0 + (\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1^l) \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (\text{IV-41})$$

On compare ensuite : ε_1^2 à ε_1^1 et ϕ_1^2 à ϕ_1^1 au moyen du test suivant :

$$\left| \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1^1}{\varepsilon_1^2} \right| + \left| \frac{\phi_1^2 - \phi_1^1}{\phi_1^2} \right| \leq 10^{-3} \quad (\text{IV-42})$$

Si le test (IV-42) n'est pas satisfait, on calcule de nouveau l'épaisseur du film h , dans laquelle intervient le paramètre ε , puis les intégrales $I_1(\varepsilon)$, $I_2(\varepsilon)$ et $I_3(\varepsilon)$ du système (IV-38), puis on recalcule les couples $(\dot{\varepsilon}_1^i, \dot{\phi}_1^i)$ et $(\dot{\varepsilon}_1^{i+1}, \dot{\phi}_1^{i+1})$ par les relations (IV-39) et (IV-41).

Ainsi, le processus de calcul se poursuit jusqu'à la convergence sur le test (IV-42). Si le test (IV-42) est vérifié, on continue en calculant la répartition de pression puis par intégration la charge. On compare alors la charge calculée W_c à la charge appliquée W_a ; si les modules de ces deux vecteurs sont différents, on recalcule l'épaisseur du film puis les intégrales I_1 à I_3 , on applique à nouveau le processus du schéma prédicteur-correcteur et on itère ainsi jusqu'à ce que W_c soit égale à W_a .

Cette méthode permet d'obtenir rapidement le lieu du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet.

En utilisant le changement de variables proposé par **Booker**, le système d'équation (IV-38) devient :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{F}{\mu LD} \left(\frac{C}{R} \right)^2 M_\varepsilon \left(\varepsilon, \phi, \frac{L}{D}, \theta_e, \theta_s \right) \quad (IV-43)$$

$$\dot{\phi} = \bar{\omega} \frac{F}{\mu LD} \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{M_\phi}{\varepsilon} \left(\varepsilon, \phi, \frac{L}{D}, \theta_e, \theta_s \right)$$

avec :

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left\{ \frac{I_3 \cos \phi + I_1 \sin \phi}{I_2 I_3 - I_1^2} \right\} \quad (IV-44)$$

$$M_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \left\{ \frac{I_2 \sin \phi + I_1 \cos \phi}{I_2 I_3 - I_1^2} \right\}$$

Dans ce cas, l'angle θ_e peut être obtenue par la relation suivante :

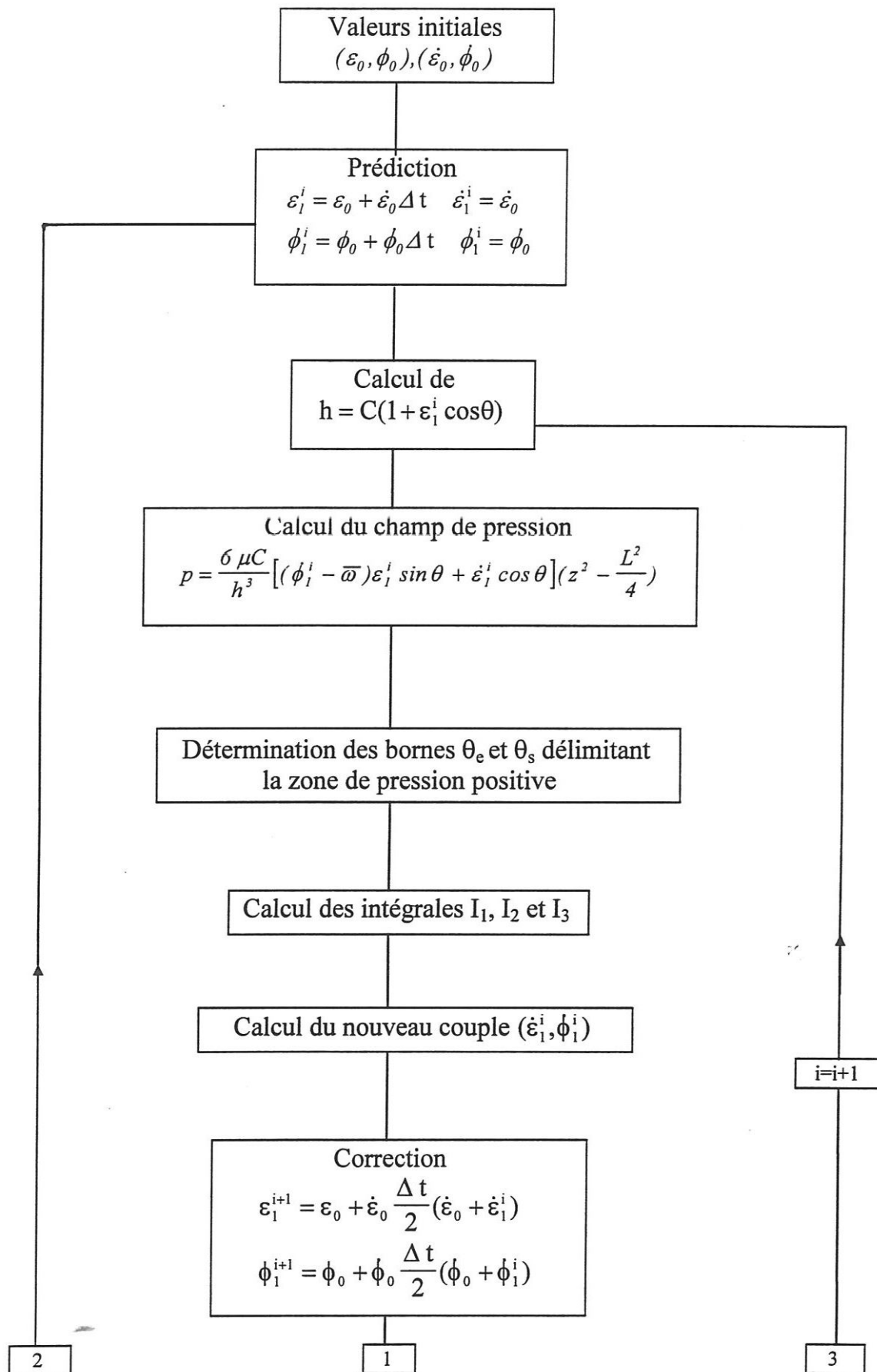
$$\theta_e = \text{Arctg} \left(\frac{M_\varepsilon}{M_\phi} \right) \quad (IV-45)$$

Dans le cas où seul l'effet d'écrasement est pris en considération, l'équation différentielle s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{F}{\mu LD} \left(\frac{C}{R} \right)^2 M_\varepsilon \left(\varepsilon, \phi, \frac{L}{D}, \theta_e, \theta_s \right) \quad (IV-46)$$

avec

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{1}{I_2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[3\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2 + 1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{Arctg} \left(-\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \right]$$



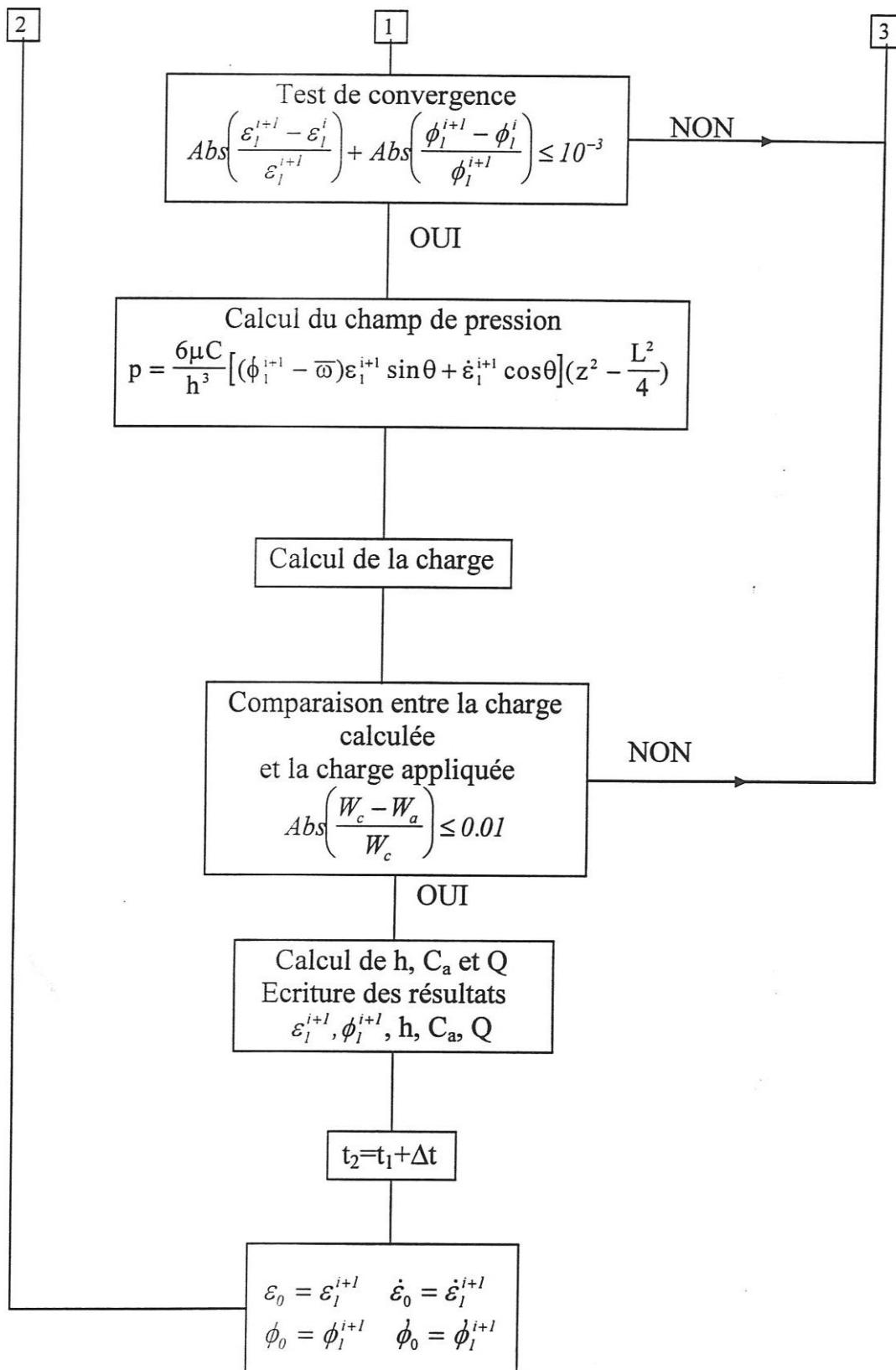


Figure IV-7 : Organigramme de calcul utilisant une méthode de prédiction-correction dans le cas d'un palier court aligné

IV-5. RESULTATS NUMERIQUES ET COMPARAISON

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les trajectoires du centre de l'arbre (maneton) dans le palier de tête de bielle, la hauteur minimale du film et la pression maximale dans le fluide lubrifiant obtenues par les deux approches numériques : méthode de différences finies bidimensionnelle, méthode de différences finies unidimensionnelle (théorie du palier court optimisée) et la théorie du palier court classique.

Cette étude a été faite sur un palier lisse de tête de bielle d'un moteur diesel (Ruston & Hornsby 6 VEB-X) six cylindres dont les caractéristiques sont données par le tableau (IV-1).

Tableau IV-1 : Caractéristiques du palier

Paramètres	Unités	Valeurs	
Longueur du palier	L	[m]	0.127
Diamètre du palier	D	[m]	0.203
Jeu radial	C	[m]	$82.55 \cdot 10^{-6}$
Entraxe de bielle	l_3	[m]	0.782
Rayon de manivelle	l_2	[m]	0.184
Viscosité dynamique du lubrifiant	μ	[Pa.s]	0.015
Vitesse de rotation du moteur	N	[tr/min]	600
Maillage suivant la direction circonférentielle et axiale	MxN		61x21
Coefficient de surrelaxation	Ω		1.80

Les diagrammes de charge, représentés dans le repère mobile R_3 lié à la bielle, sont donnés par les figures (IV-8) et (IV-9). Pour des raisons de convergence et pour une représentation fidèle du pic de charge, nous avons interpolé ces diagrammes en utilisant des splines cubiques pour chaque degré d'angle de rotation de vilebrequin.

Notons que ce palier a fait l'objet de nombreuses études et un résumé des différents résultats obtenus peut être trouvé dans les références [31,63]

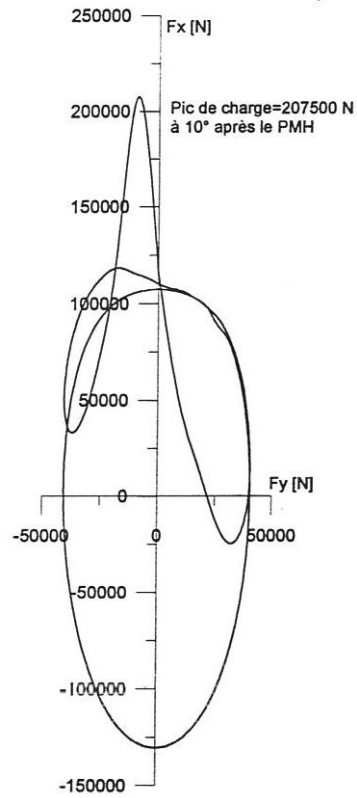


Figure IV-8: Représentation polaire du diagramme de charge (Moteur diesel Ruston & Hornsby)

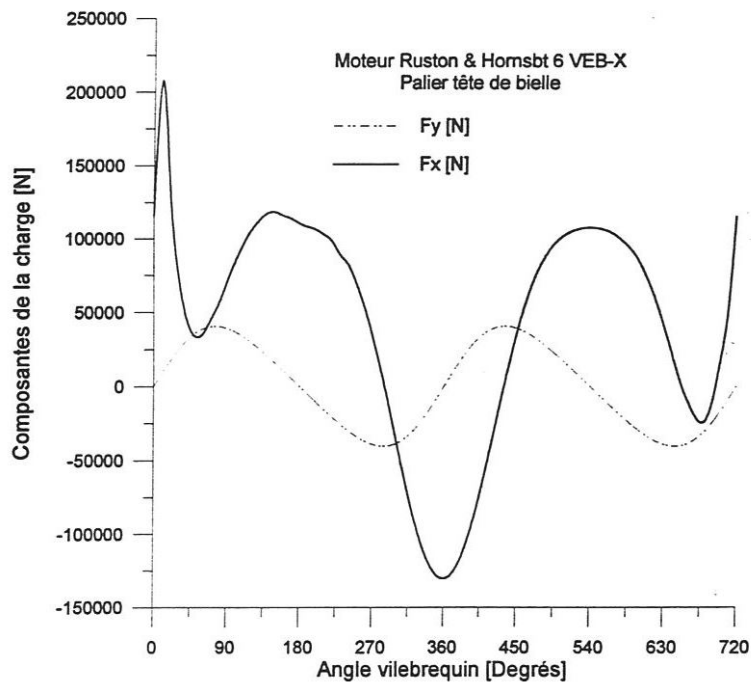


Figure IV-9: Représentation cartésienne du diagramme de charge (Moteur diesel Ruston & Hornsby)

Dans les figures (IV-10), nous comparons les déplacements du centre de l'arbre (maneton) à l'intérieur du coussinet obtenus par les théories du palier court optimisée et du palier court classique avec ceux trouvés par la méthode des différences finies bidimensionnelle.

a- Trajectoires

la figure (IV-10) donne les trajectoires du centre de l'arbre correspondant au diagramme de charge représenté sur les figures (IV-8) et (IV-9). Ces résultats montrent que la trajectoire prédite par la théorie du palier court optimisée est en bonne concordance avec celle déterminée par la méthode des différences finies bidimensionnelle. Tandis que, l'application de l'hypothèse du palier court classique met en évidence des écarts importants sur une partie du cycle.

b- Hauteur minimale du film

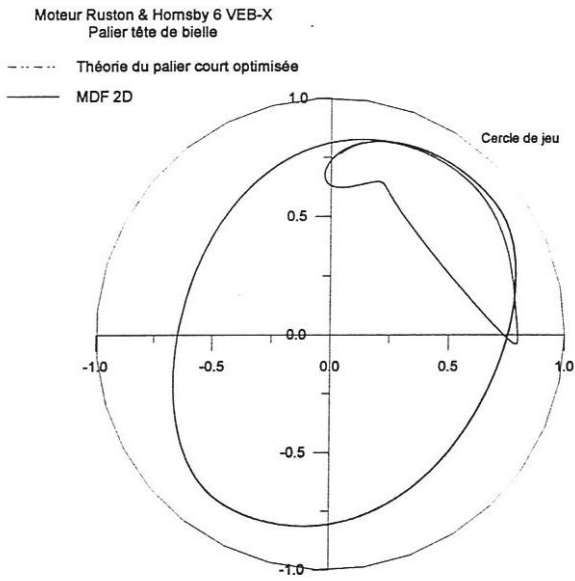
La figure (IV-11) représente la variation de la hauteur minimale du film en fonction de l'angle de vilebrequin. Comme il a été observé précédemment, les résultats obtenus par la méthode des différences finies bidimensionnelle et la théorie du palier court optimisée sont en bonne corrélation. Tandis que la valeur minimale de la hauteur minimale du film est surestimée en utilisant la théorie du palier court classique.

c- Pression maximale

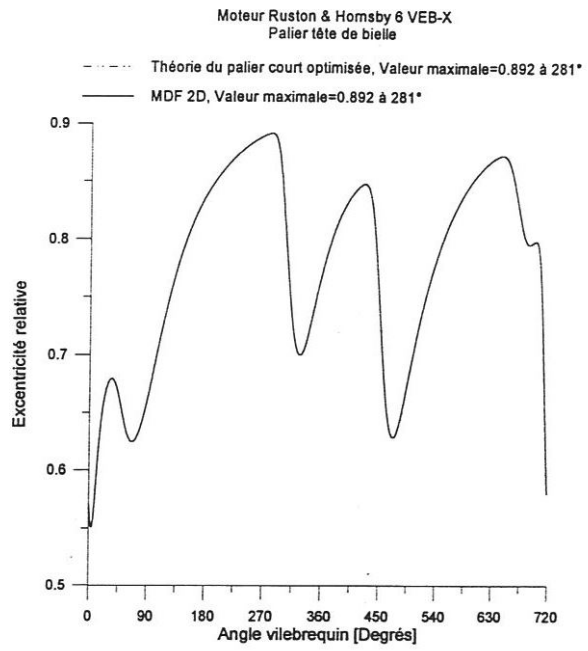
L'évolution de la pression maximale dans le film P_{max} en fonction de l'angle vilebrequin est donnée par la figure (IV-12).

La pression maximale calculée en utilisant la théorie du palier court est largement supérieure à celle obtenue par la méthode des différences finies bidimensionnelle. Les valeurs maximales de P_{max} obtenues par la méthode des différences finies bidimensionnelle et la théorie du palier court valent respectivement 20.9 et 51.1 MPa correspondant à un angle de vilebrequin d'environ 11 degrés. Ceci est dû au fait que dans la théorie du palier court, l'écoulement du fluide dans la direction circonférentielle du palier n'est pas pris en considération.

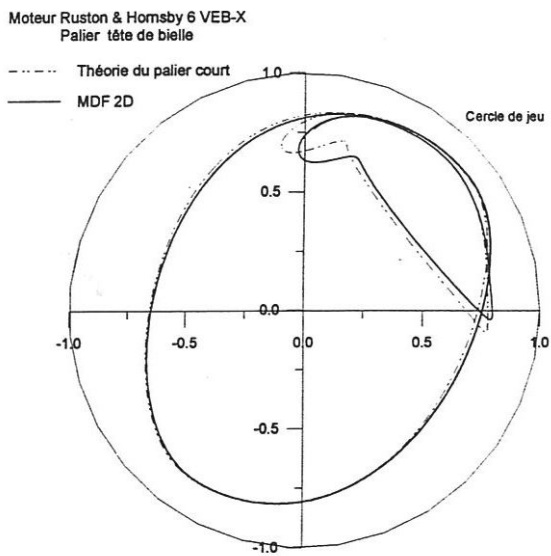
Nous constatons par ailleurs une légère différence de l'ordre de 2% entre les résultats obtenus par la méthode des différences finies bidimensionnelle et ceux calculés en utilisant la théorie du palier court optimisée.



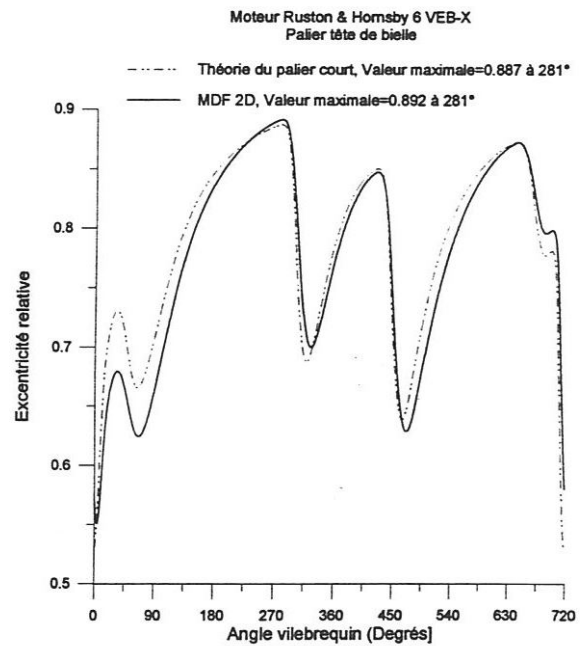
(a) représentation polaire



(b) représentation cartésienne



(a) représentation polaire



(b) représentation cartésienne

Figure IV-10 : Trajectoires du centre de l'arbre

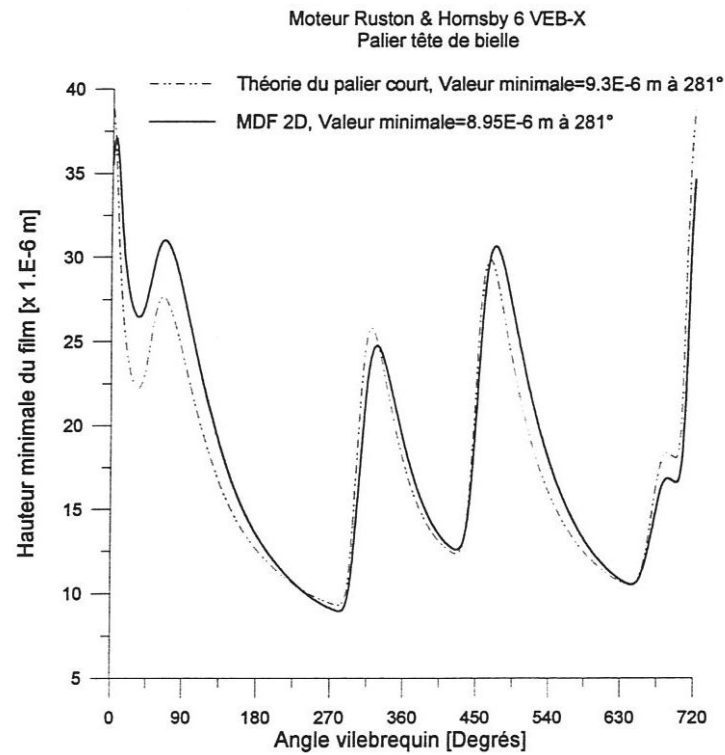
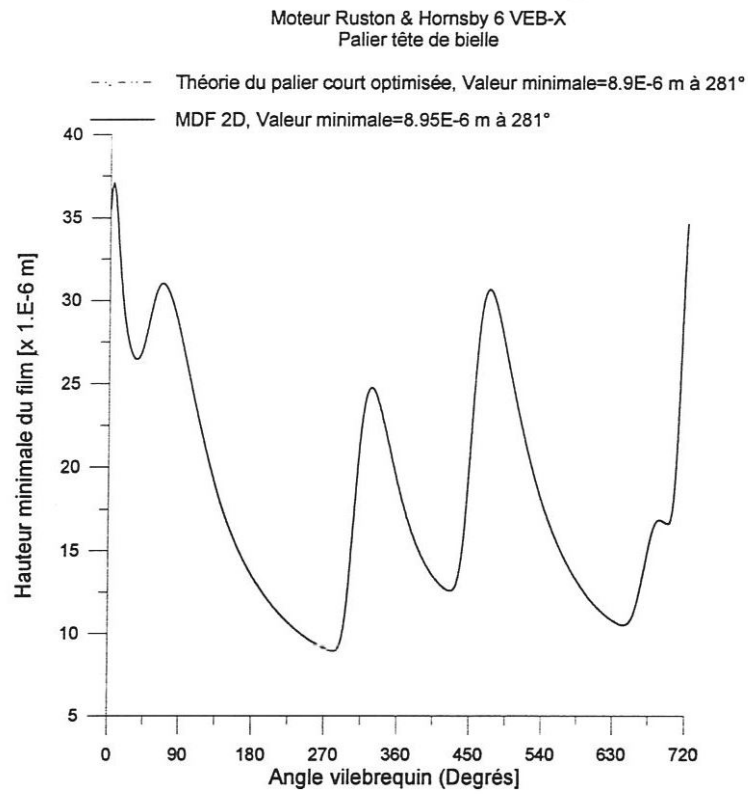
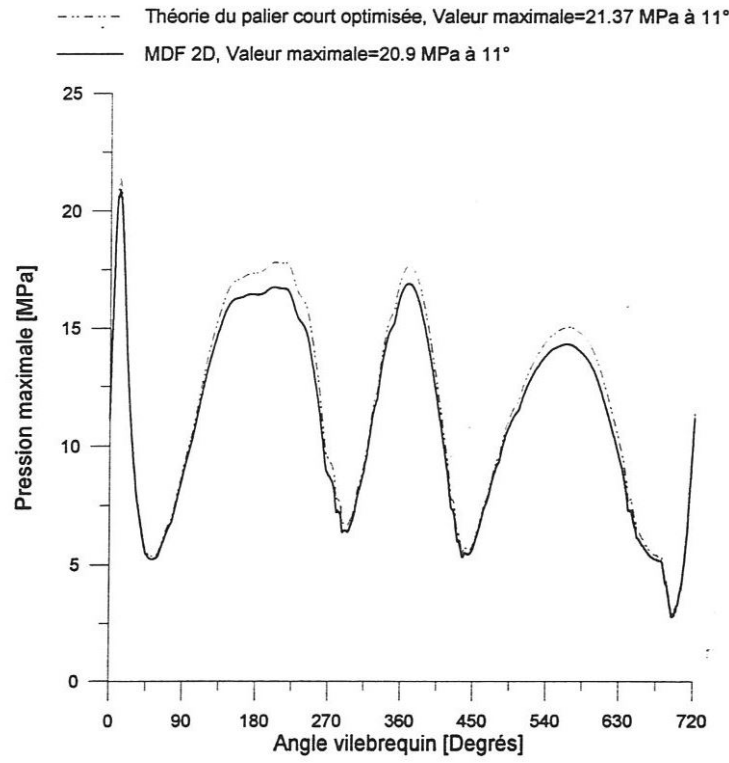
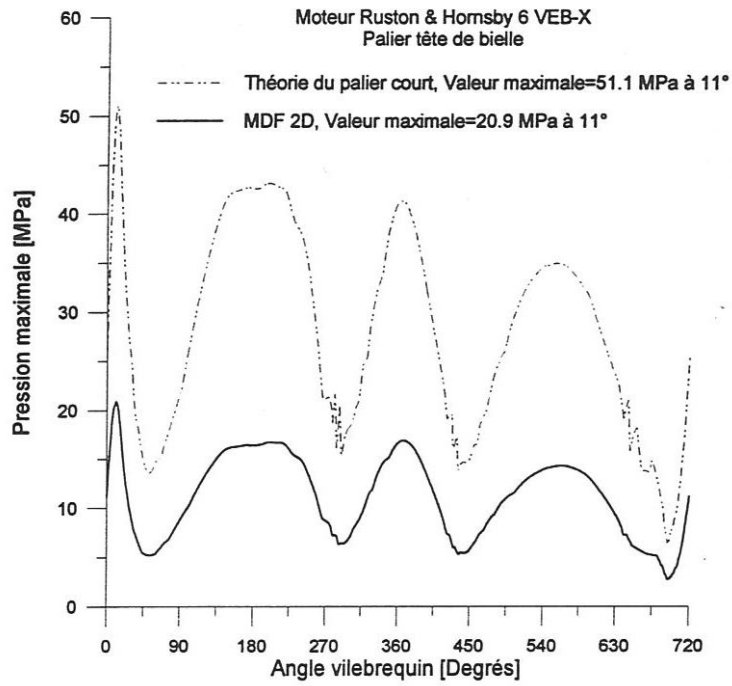


Figure IV-11 : Hauteur minimale du film lubrifiant

Moteur Ruston & Hornsby 6 VEB-X
Palier tête de bielle



(a)



(b)

Figure IV-12 : Pression maximale dans le film

IV-5. CONCLUSION

Lors de cette étude, nous avons comparé les résultats obtenus par la théorie du palier court classique (largement utilisée dans la littérature) et la théorie du palier court optimisée à ceux déterminés par la méthode des différences finies bidimensionnelle.

Les résultats obtenus par la théorie du palier court optimisée et la méthode des différences finies bidimensionnelle sont en bonne corrélation surtout pour le calcul de la trajectoire et de la hauteur minimale du film. Comparativement à la théorie du palier court classique, la théorie du palier court optimisée permet une résolution rapide et précise de l'équation de Reynolds en régime dynamique. Néanmoins, cette méthode ne peut s'appliquer que dans le cas du palier aligné (axes de l'arbre et du coussinet parallèles) pour lequel l'hypothèse d'une distribution axiale de pression parabolique reste toujours vérifiée. Dans le cas du palier mésaligné, il est recommandé d'utiliser la méthode des différences finies bidimensionnelle pour le calcul du champ de pression dans le film.

CHAPITRE V

ETUDE DES DEFAUTS DE FORME ET DE MESALIGNEMENT SUR LE COMPORTEMENT DES PALIERS DE MOTEUR

V-1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude du comportement en régime dynamique des paliers lisses de moteurs thermiques présentant des défauts de forme et de mésalignement.

Après validation des résultats obtenus par le programme de calcul développé, nous nous intéresserons tout d'abord à l'étude de l'influence:

- du jeu radial et de la viscosité des lubrifiants sur la valeur minimale de la hauteur du film d'huile,
- des conditions d'alimentation sur les caractéristiques hydrodynamiques.
- de deux défauts de forme axiaux (conique et parabolique) dans le cas d'un palier de tête de bielle du moteur Ruston & Hornsby.

Nous étudierons ensuite l'influence du mésalignement dynamique sur le comportement de deux paliers principaux de vilebrequin.

Les valeurs instantanées des paramètres de mésalignement β et δ ont été obtenues par l'intermédiaire d'un programme de calcul de structure en prenant en considération les déformations élastiques du carter et du vilebrequin.

Pour simplifier cette étude, les vitesses de mésalignement $\dot{\beta}$ et $\dot{\delta}$ sont supposées négligeables.

V-2. VALIDATION

Un programme de calcul écrit en langage MS-Fortran a été développé pour l'étude du comportement dynamique des paliers de moteurs à combustion interne à savoir les paliers principaux de vilebrequin et les paliers de bielle. L'exécution de ce programme permet de calculer les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier et les variations de la hauteur minimale du film, le couple de frottement, le débit axial et le moment de mésalignement en fonction de l'angle de vilebrequin.

Afin de vérifier le programme de calcul, les résultats calculés sont comparés avec ceux donnés dans la littérature [31,63] pour un palier de tête de bielle d'un moteur diesel Ruston & Hornsby dont les caractéristiques sont données dans le tableau (V-1) et le diagramme de charge est représenté par les figures (IV-8) et (IV-9).

Ce diagramme a été obtenu [63] en tenant compte de l'effet d'inertie et d'explosion dont la valeur maximale est de 207500 N à 10 degrés après le PMH.

Le palier de tête de bielle comporte une rainure circonférentielle totale de largeur $\ell=0.0127$ m.

La figure (V-1) représente la trajectoire du centre de l'arbre (maneton) à l'intérieur du coussinet correspondant au diagramme de charge de la figure (IV-8). Cette trajectoire est déterminée en utilisant la méthode d'Euler avec un pas de temps correspondant à un degré d'angle de vilebrequin. Cette trajectoire est similaire à celle donnée par les auteurs **Campbell et al** [63]. La valeur maximale de l'excentricité relative est de 0.9579 correspondant à une valeur minimale du film de 3.477×10^{-6} m à 276 degrés après le PMH figure (V-2) et la valeur maximale de la pression est de 35.258 MPa obtenue à 11 degrés après le PMH figure (V-3).

Le tableau (V-2) donne une autre vérification de la précision du programme de calcul par la comparaison des valeurs de la hauteur minimale du film et l'angle de vilebrequin correspondant avec celles données dans le tableau 1 de la référence [31]. Il s'en déduit que les résultats trouvés sont en bonne concordance avec ceux obtenus en utilisant différentes techniques (expérimentales et théoriques).

Tableau V-1 : Caractéristiques du palier.

Paramètres		Unités	Valeurs
Longueur du palier	L	[m]	0.127
Diamètre du palier	D	[m]	0.203
Jeu radial	C	[m]	$82.55 \cdot 10^{-6}$
Entraxe de bielle	l_3	[m]	0.782
Rayon de manivelle	l_2	[m]	0.184
Largeur de la rainure médiane	l	[m]	0.0127
Viscosité dynamique du lubrifiant	μ	[Pa.s]	0.015
Vitesse de rotation du moteur	N	[tr/min]	600
Maillage suivant la direction circonférentielle et axiale	MxN		62x22
Coefficient de surrelaxation	Ω		1.80

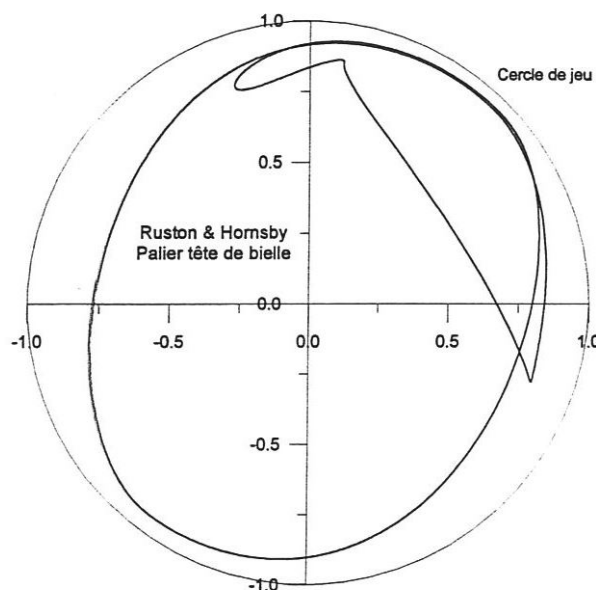


Figure V-1. Trajectoires du centre de l'arbre (Palier tête de bielle moteur diesel)

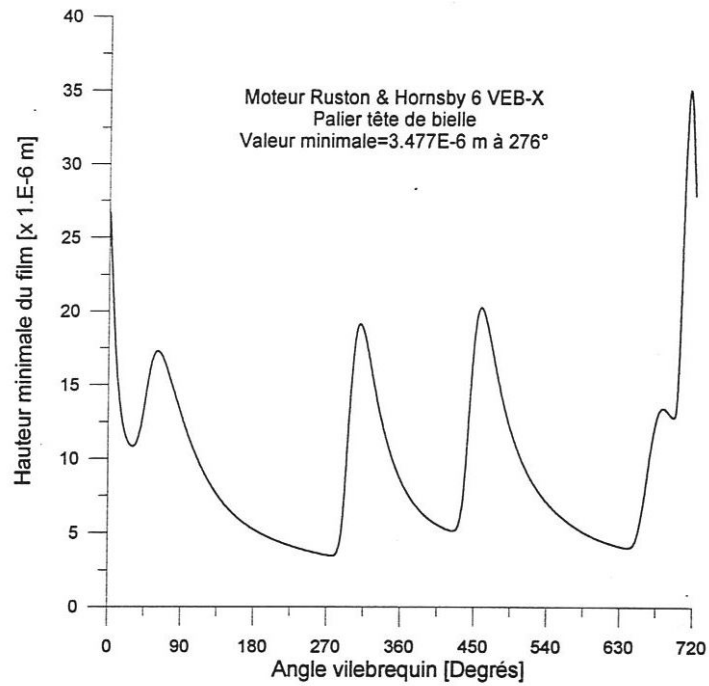


Figure V-2. Hauteur minimale du film lubrifiant en fonction de l'angle vilebrequin (Palier tête de bielle moteur diesel)

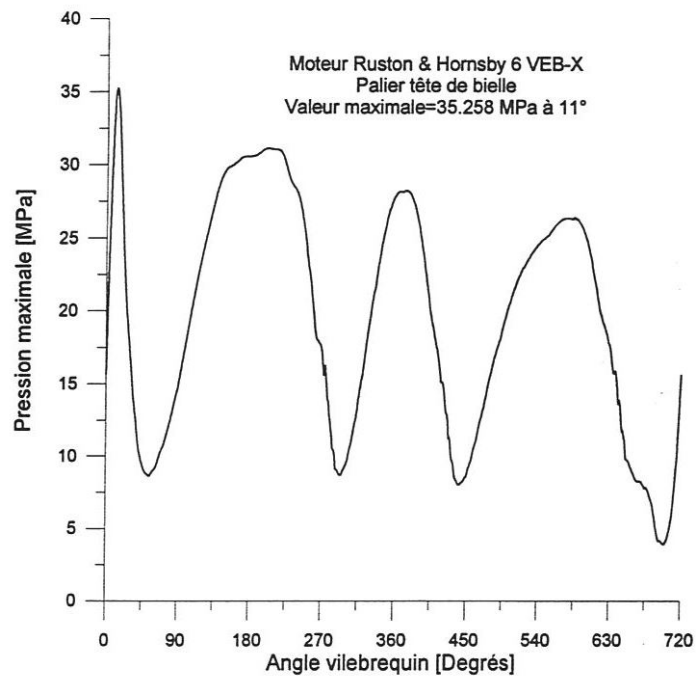


Figure V-3. Pression maximale en fonction de l'angle vilebrequin (Palier tête de bielle moteur diesel)

Tableau V-2 Comparaison entre les méthodes théoriques et expérimentales

Source	Type	Hauteur minimale du film h_{\min} [in]	h_{\min} [x 1.E-6 m]	θ_2 [Degrés] après PMH
Glacier Metal Co. - Essais direct sur le moteur - Essais sur machime de simulation	Expérimental	0.00011	2.8	240
		0.00013	3.3	270
General Electric Co, UK - Ritchie (Palier de longueur finie) - Ritchie (Théorie du palier court optimisée)	Numérique	0.000143	3.6	275
		0.000130	3.3	272
General Motors Research - Programme éléments finis (Palier de longueur finie) - Goenka (rapid curvefit program)	Numérique	0.000137	3.48	
		0.000137	3.48	
Glacier Metal Co. - Jones (Palier de longueur finie) - Jones (Avec évolution du fluide)	Numérique	0.00014	3.57	
		0.00009	2.29	
University of Sussex - Dede (Palier de longueur finie) - Dede (Solution 1D)	Numérique	0.000175	4.44	
		0.000147	3.73	
Autres études Rheinstahl-Hanomag (Palier de longueur finie : Méthode de Holland modifiée)	Numérique	0.000143	3.6	
Lloyd (Palier de longueur finie)	Numérique	0.000143	4.47	289
Horsnell (Palier de longueur finie)	Numérique	0.000214	5.43	273
Block (Palier de longueur finie)	Graphique	0.000130	3.3	274
Block (Palier de longueur finie)	Numérique	0.000114	2.9	280
Présente étude - MDF (2D) - Théorie du palier court optimisée	Numérique	0.0001369	3.477	276
		0.0001368	3.474	276

V-3. INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de quelques paramètres à savoir le jeu radial, la viscosité, les conditions d'alimentation sur le comportement dynamique du palier de tête de bielle du moteur diesel Ruston & Hornsby.

V-3-1. Influence du jeu radial

L'effet de la variation du jeu radial sur la valeur minimale de la hauteur du film d'huile, pour un palier fonctionnant en régime dynamique, est donné sur la figure V-4. Pour le palier étudié la valeur optimale du jeu radial ; c'est-à-dire celle donnant la valeur maximale de la hauteur minimale du film d'huile, est de l'ordre de $38 \times 10^{-6} \text{ m}$.

cette valeur est très faible comparée à la valeur de fonctionnement de ce palier ($82.55 \times 10^{-6} \text{ m}$) et correspond à une valeur impossible à obtenir compte tenu des dimensions du palier. Si d'autres hypothèses sur les conditions du fonctionnement avait été faites, prise en compte des effets thermique ou des déformations élastiques des surfaces par exemple, il est possible que la valeur du jeu optimum soit plus proche du jeu de fonctionnement préconisé par le constructeur.

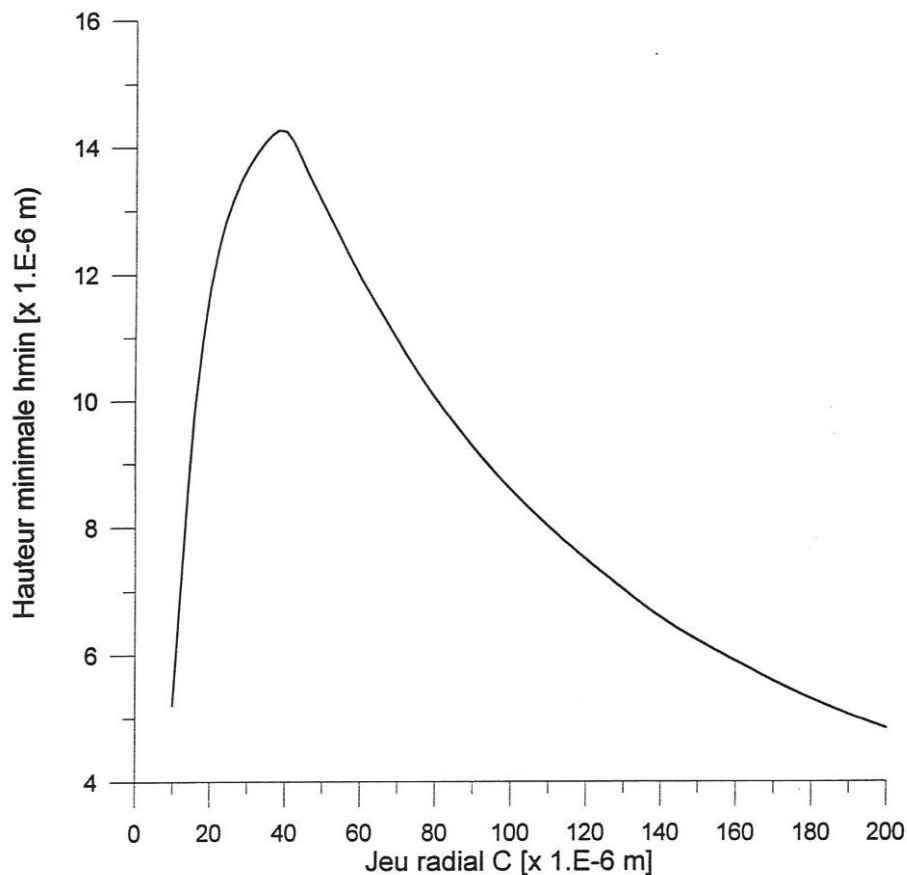


Figure V-4 : Influence du jeu radial sur la hauteur minimale du film d'huile

V-3-2. Influence de la viscosité

Dans un palier hydrodynamique, la viscosité du lubrifiant est un paramètre sur lequel il est possible d'agir afin de modifier les caractéristiques de fonctionnement. Pour mettre en évidence l'effet de la viscosité du lubrifiant sur le comportement dynamique du palier du moteur Ruston & Hornsby, nous avons fait varier la viscosité entre 0.005 et 0.035 Pa.s.

La figure V-5 présente la variation de la valeur minimale de la hauteur du film en fonction de la viscosité du lubrifiant.

Ainsi, l'augmentation de la viscosité conduit naturellement à une augmentation de la hauteur minimale du film permettant au régime de lubrification hydrodynamique de s'établir.

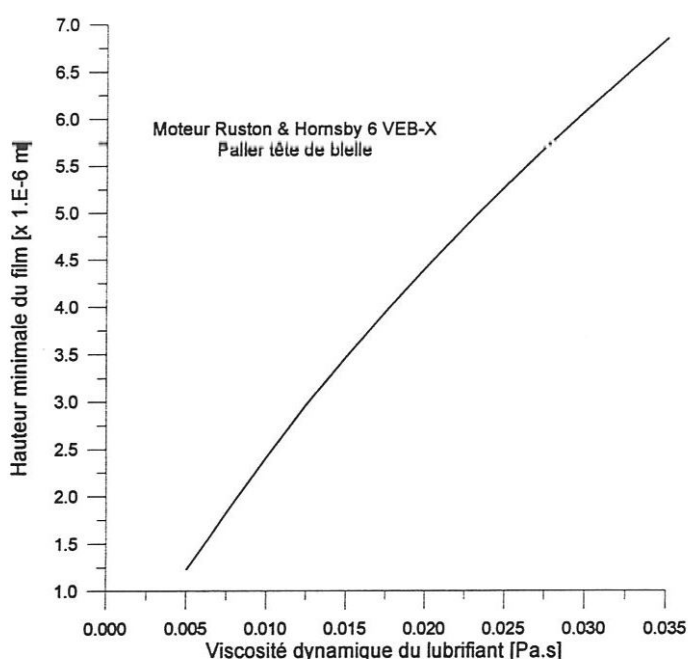


Figure V-5: Influence de la viscosité sur la hauteur minimale du film

V-3-3. Influence des conditions d'alimentation

Certains paliers, et notamment les paliers de tête de bielle de certains moteurs diesels, comportent des rainures circonférentielles qui ont pour fonction principale d'assurer une bonne alimentation en lubrifiant et de mieux contrôler la température du palier. Dans le cas où la rainure est complète, le calcul des paramètres de fonctionnement du palier s'effectue de manière semblable au cas du palier lisse (sans rainure), il suffit de considérer deux demi paliers identiques, séparés par une rainure et sur lesquels la charge appliquée est égale à la moitié de la charge totale.

Nous avons étudié l'influence d'une rainure circonférentielle située dans la section médiane du palier de largeur $\ell=0.0127$ m sur la trajectoire du centre de l'arbre, la hauteur minimale du film, le débit de fuite et la pression maximale. La pression qui y règne est supposée égale à la pression atmosphérique figure (V-6)

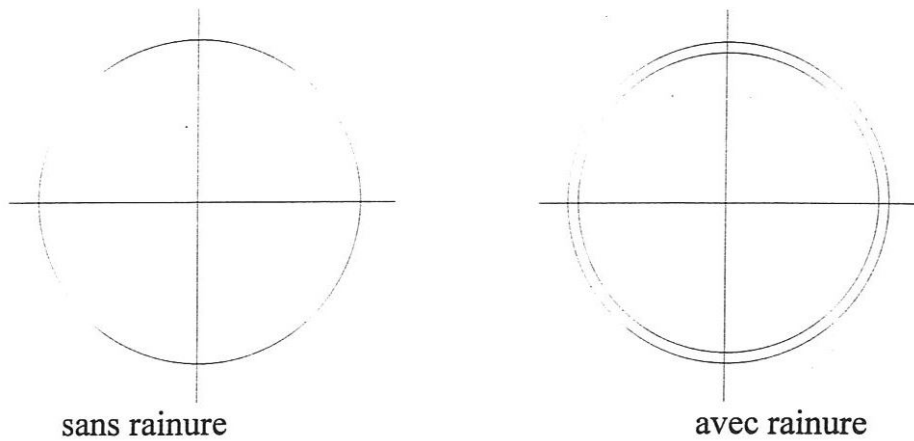


Figure V-6: Configurations des paliers étudiés

Les figures (V-7) à (V-11) représentent la trajectoire du centre de l'arbre et les variations de l'excentricité, de la hauteur minimale du film, du débit de fuite et de la pression hydrodynamique maximale en fonction de l'angle de vilebrequin dans le cas d'un palier lisse (trait continu) et d'un palier avec rainure (trait discontinu).

Ces résultats montrent que la présence d'une rainure d'alimentation dans la section médiane du palier de tête de bielle entraîne :

- une diminution de la hauteur minimale du film sur tout le cycle ; cette diminution peut atteindre 60%,
- une augmentation de la pression maximale dans le film ; cette augmentation est de l'ordre de 40%,
- une diminution du débit de fuite.

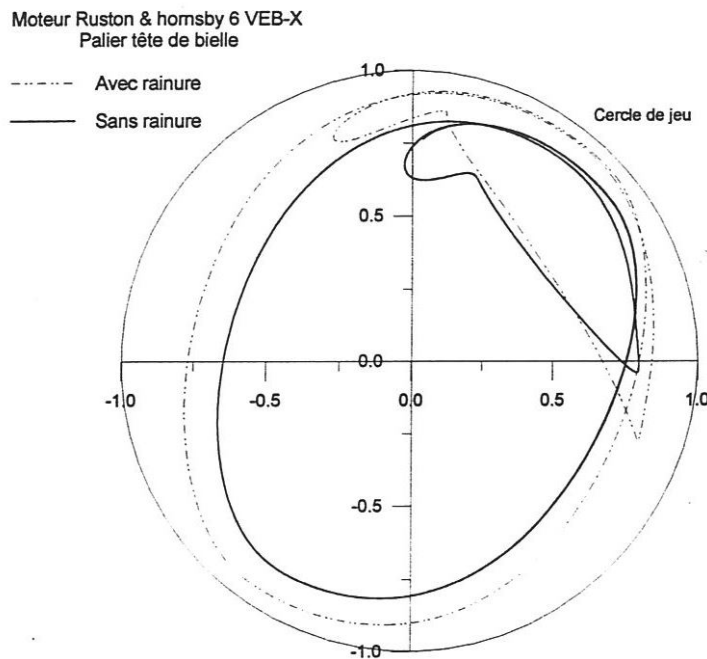


Figure V-7. Trajectoires du centre de l'arbre

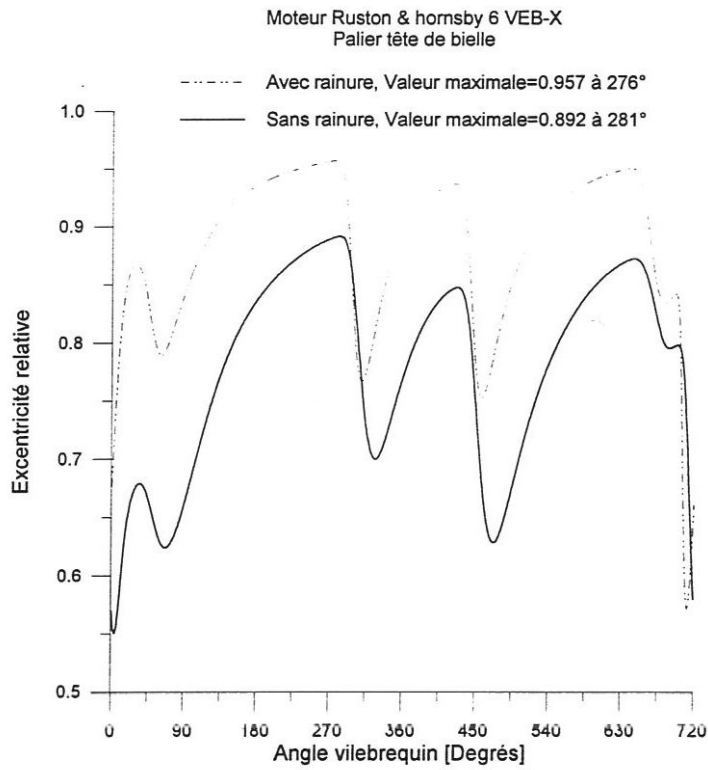


Figure V-8. Excentricité relative en fonction de l'angle vilebrequin

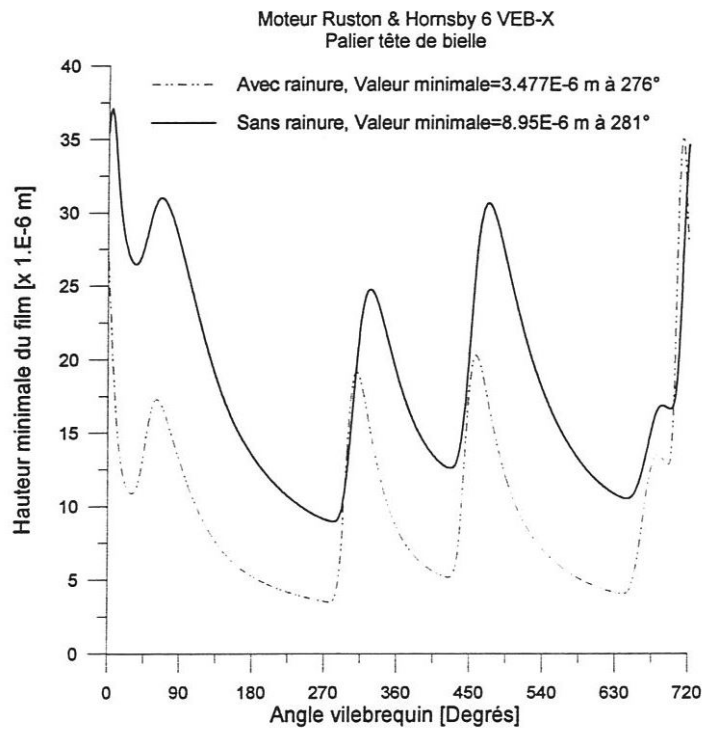


Figure V-9. Hauteur minimale du film lubrifiant en fonction de l'angle vilebrequin

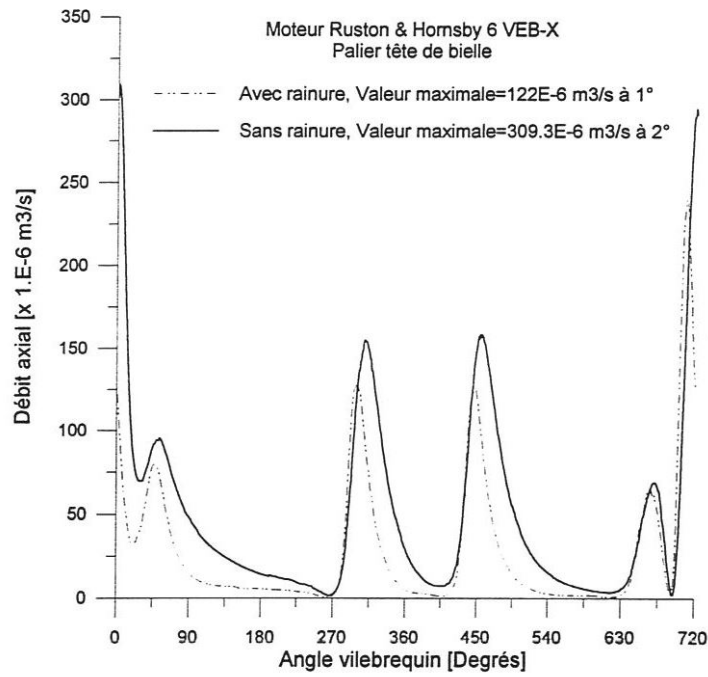


Figure V-10. Débit axial en fonction de l'angle vilebrequin

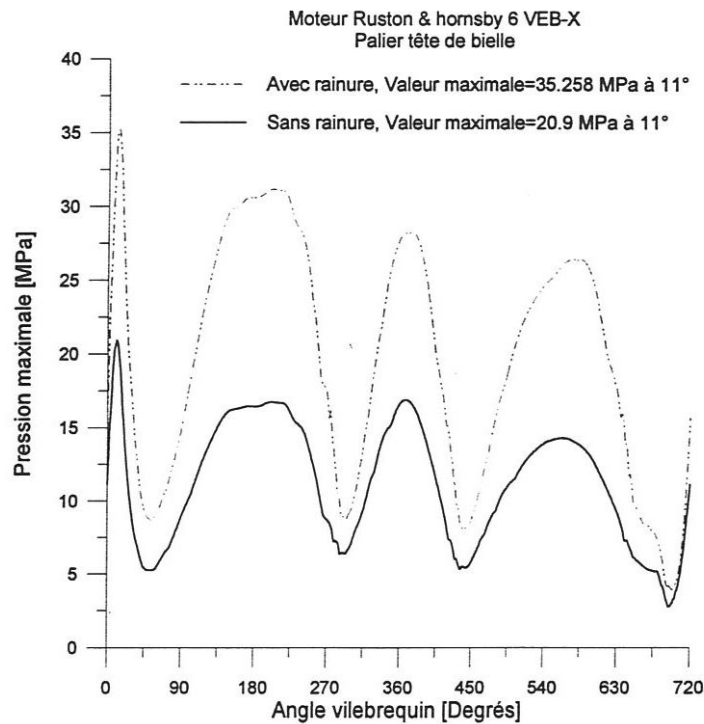


Figure V-11. Pression maximale en fonction de l'angle vilebrequin

V-4. INFLUENCE DES DEFAUTS DE FORME

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence d'un défaut de conicité et d'une variation axiale du profil de type parabolique (figure III-3) sur :

- la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet,
- la hauteur minimale du film d'huile,
- le débit axial,
- la pression maximale.

Ces défauts sont essentiellement dus à l'usinage. Comme exemple, nous avons pris les valeurs suivantes.

Défaut de conicité : $R_2 - R_1 = 10 \mu\text{m}$

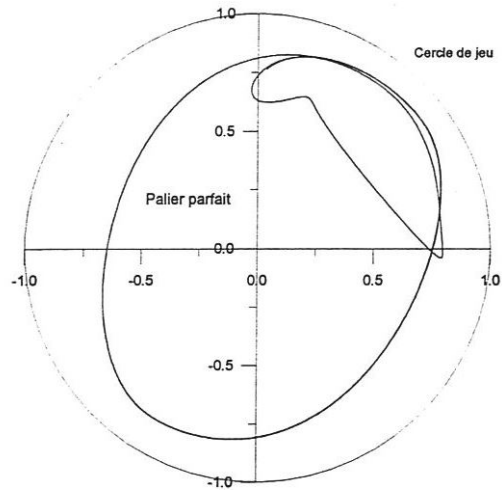
Défaut de type parabolique : $R_1 - R_a = 5 \mu\text{m}$

Les figures (V-12-a-b-c) et (V-13-a-b) présentent les trajectoires du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet et l'évolution de l'excentricité en fonction de l'angle de vilebrequin dans les trois cas étudiés ; palier parfait, palier conique et palier parabolique.

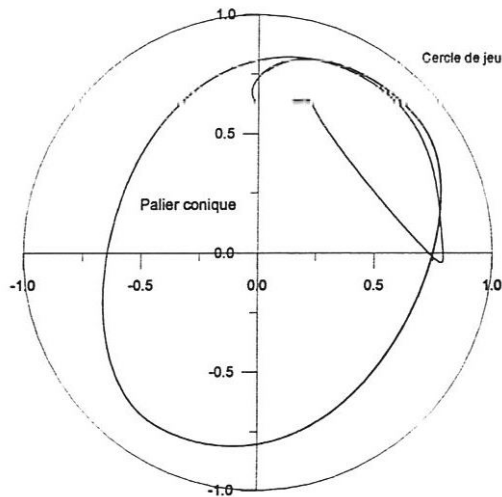
La figure (V-14-a) compare les variations de la hauteur minimale du film lubrifiant en fonction de l'angle de vilebrequin pour le palier parfait et le palier conique. Cette même comparaison est effectuée pour le palier parabolique (figure V-14-b).

Les résultats ainsi obtenus montrent que les défauts considérés réduisent la hauteur minimale du film d'huile sur tout le cycle thermodynamique. La valeur minimale du film est réduite de 50% par le défaut de conicité et de 40% par le profil parabolique pour un même angle de vilebrequin 281 degrés.

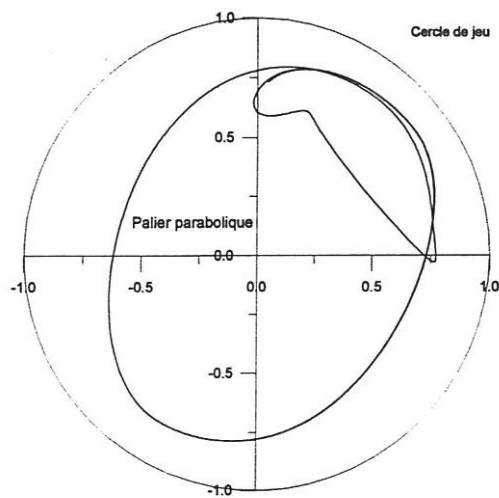
D'autre part, les variations du débit axial et de la pression maximale sont peu importantes sur tout le cycle figures (V-15) et (V-16)



(a) Palier parfait

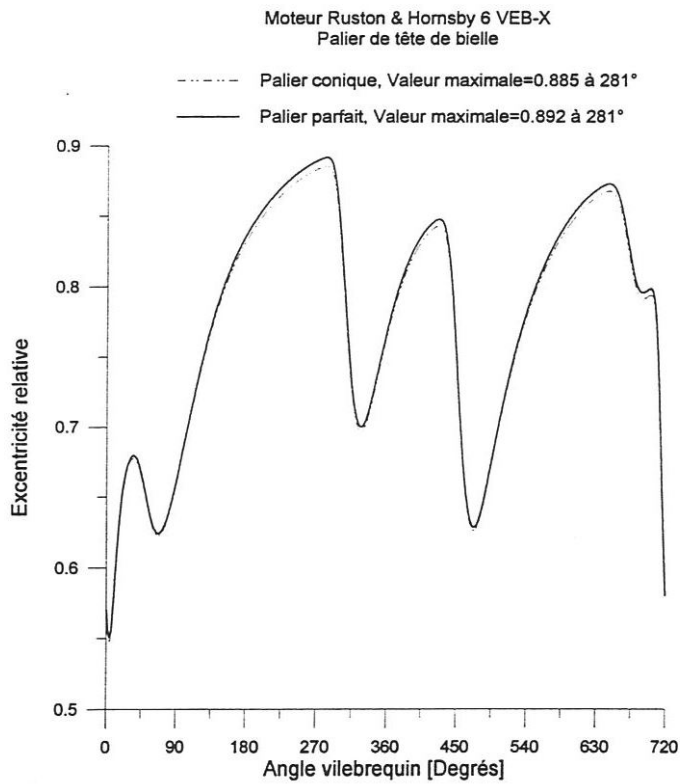


(b) Palier conique

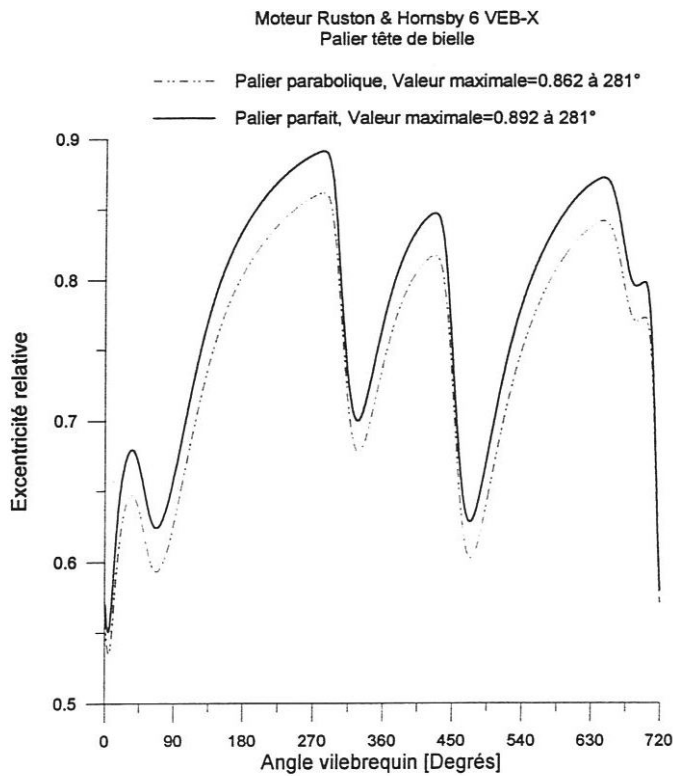


(c) Palier parabolique

Figure V-12: Trajectoires du centre de l'arbre

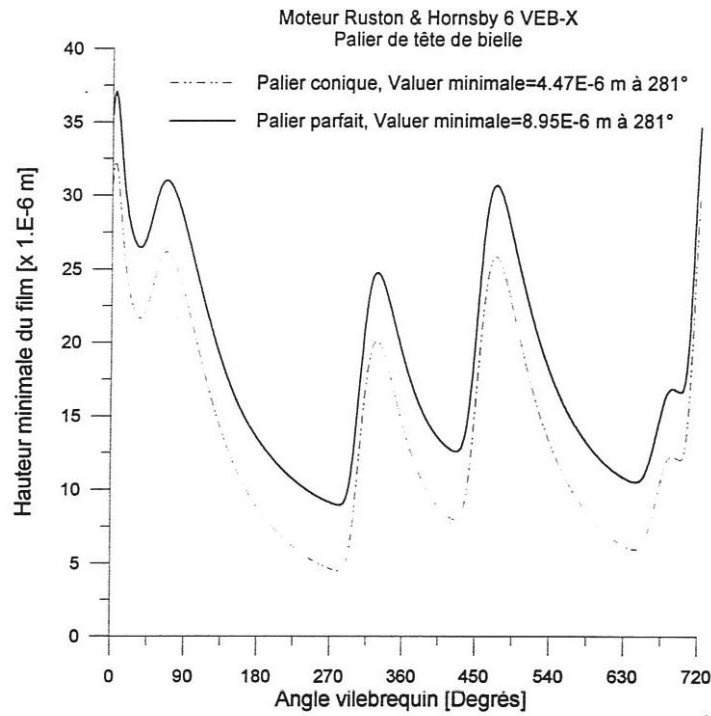


(a) Comparaison des paliers parfaits et coniques

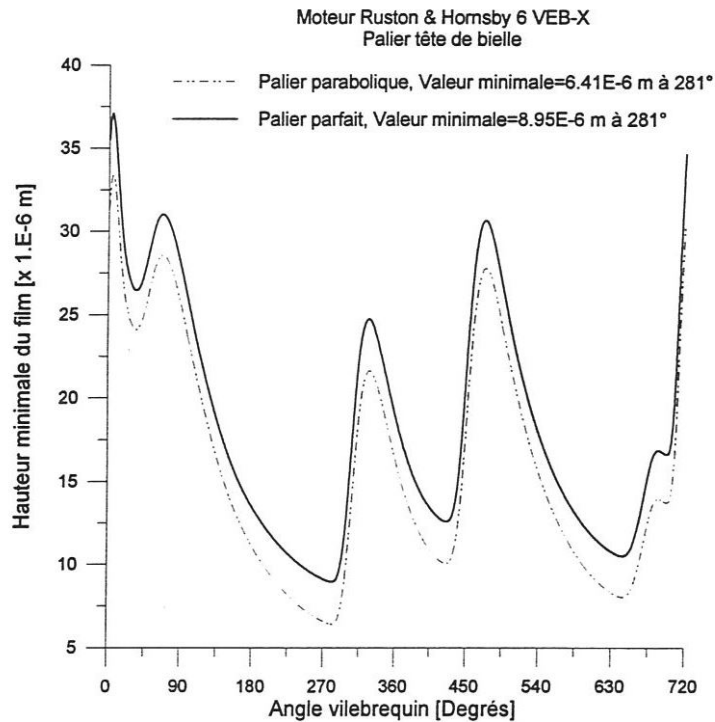


(b) Comparaison des paliers parfaits et parabolique

Figure V-13: Excentricité relative en fonction de l'angle vilebrequin

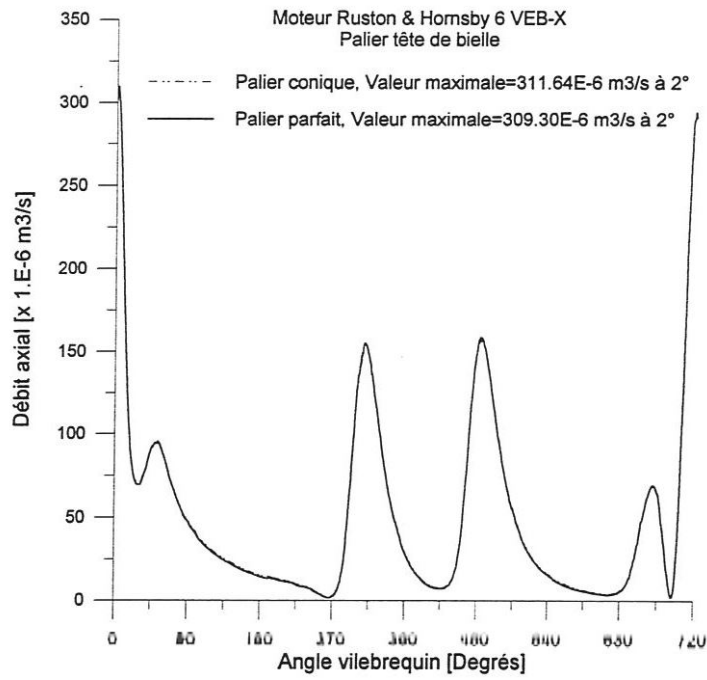


(a) Comparaison des paliers parfaits et coniques

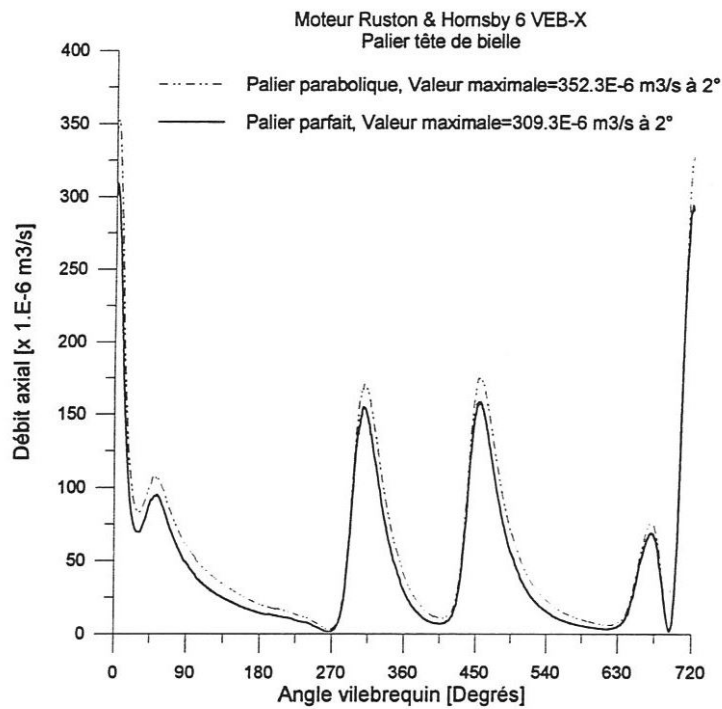


(b) Comparaison des paliers parfaits et parabolique

Figure V-14: Hauteur minimale du film en fonction de l'angle vilebrequin

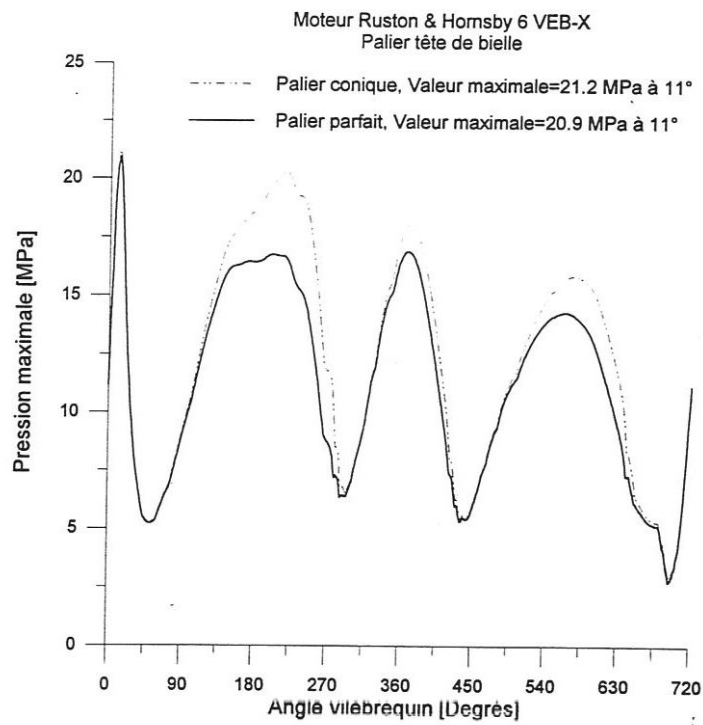


(a) Comparaison des paliers parfaits et coniques

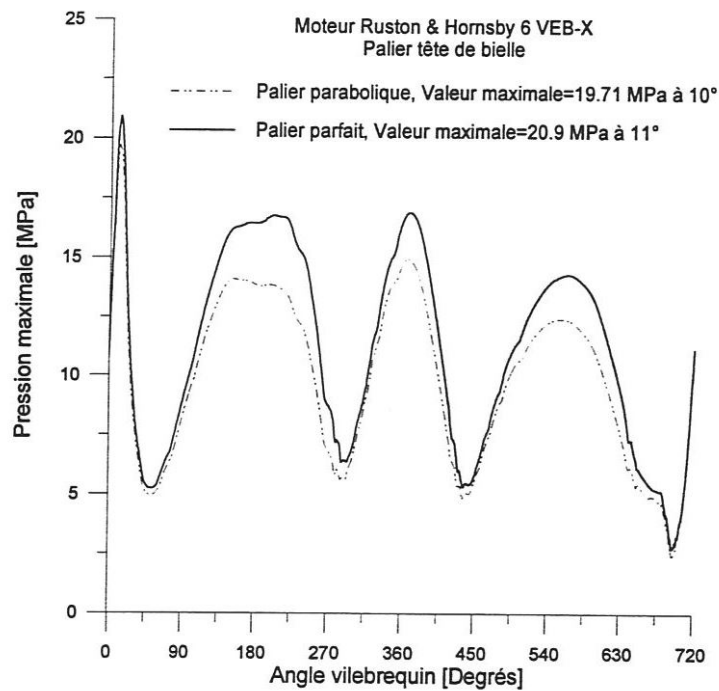


(b) Comparaison des paliers parfaits et paraboliques

Figure V-15 : Débit axial en fonction de l'angle vilebrequin



(a) Comparaison des paliers parfaits et coniques



(b) Comparaison des paliers parfaits et paraboliques

Figure V-25 : Pression maximale en fonction de l'angle vilebrequin

V-5. INFLUENCE DU MESALIGNEMENT DYNAMIQUE

Pour mettre en évidence l'influence du mésalignement dynamique sur les caractéristiques hydrodynamiques du palier et notamment la hauteur minimale du film lubrifiant afin d'éviter le contact métal-métal, nous avons pris comme exemple les paliers 1 et 2 du moteur 2 litres à essence. Ils s'agit des deux paliers principaux de vilebrequin; la numérotation des paliers s'effectuant à partir du volant d'inertie (figure V-17).

Les caractéristiques de ces deux paliers sont identiques et sont données dans le tableau V-3

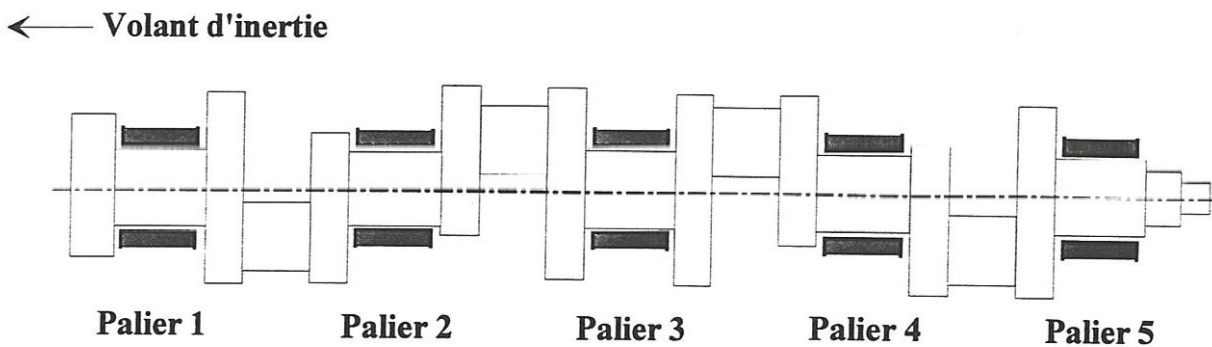


Figure V-17: Numérotation des paliers de vilebrequin

Tableau V-3 : Caractéristiques des paliers principaux 1 et 2

Paramètres		Unités	Valeurs
Vitesse de rotation,	N	[tr/min]	3000
Longueur du palier,	L	[m]	0.022
Diamètre du palier,	D	[m]	0.0629
Jeu radial,	C	[m]	27.5 E-6
Viscosité dynamique du lubrifiant,	μ	[Pa.s]	0.0055

Les diagrammes de charge de ces paliers sont donnés par les figures (V-18) et (V-19). D'après ces diagrammes, nous remarquons que le palier N°2 est le plus chargé.

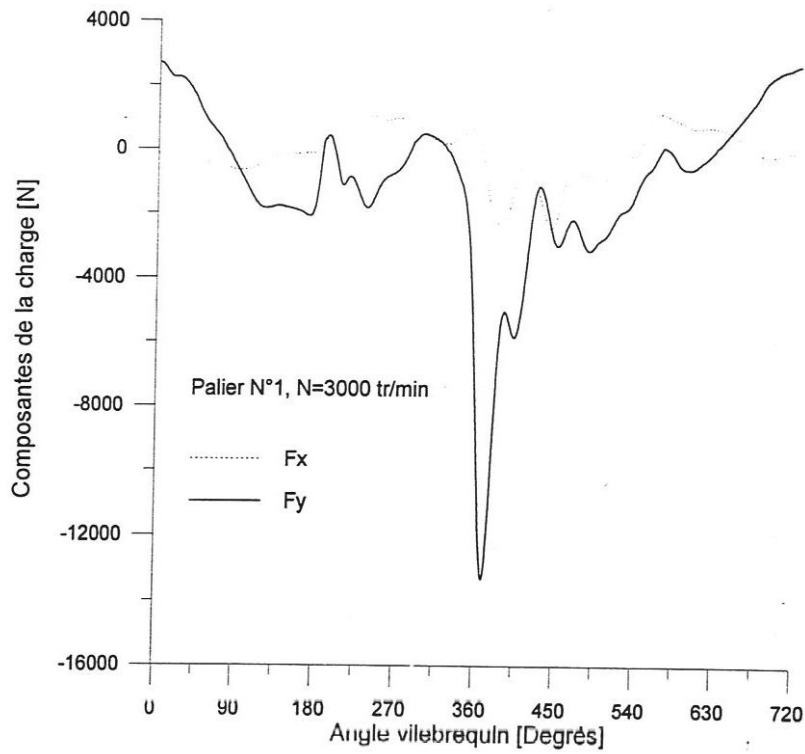


Figure V-18 : Représentation cartésienne du diagramme de charge Palier N°1

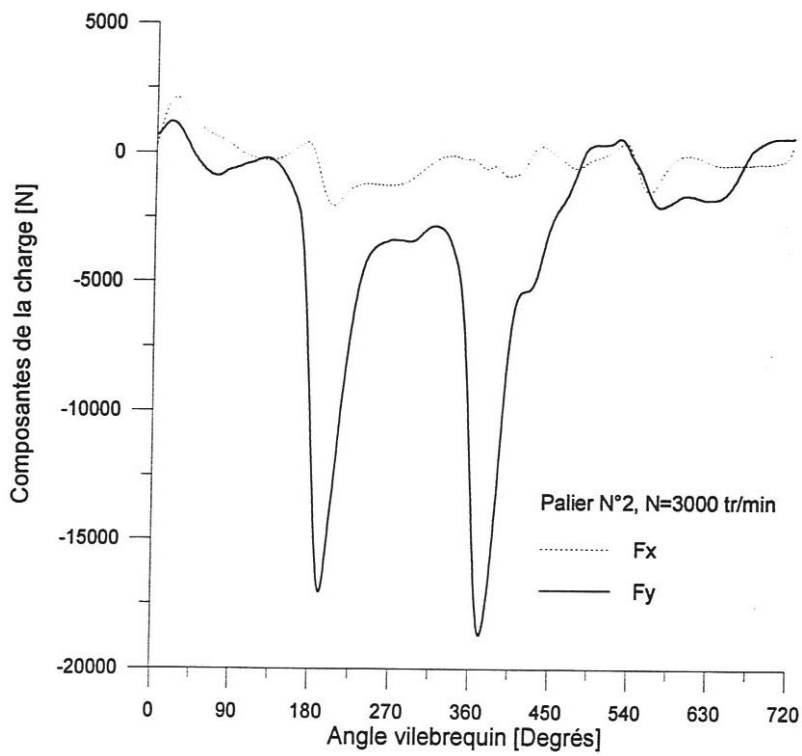


Figure V-19 : Représentation cartésienne du diagramme de charge Palier N°2

Les variations de l'amplitude de mésalignement δ en fonction du temps pour les deux paliers de vilebrequin sont données figures (V-20) et (V-21). Ces valeurs ont été obtenues à partir d'un autre programme de calcul de structure en tenant compte de l'élasticité du carter et du vilebrequin. Bien qu'il soit moins chargé, c'est sur le palier N°1 que l'amplitude de mésalignement est la plus importante.

Afin de simplifier l'étude, nous avons supposé que les vitesses de mésalignement $\dot{\delta}$ et $\dot{\beta}$ sont nulles et d'autre part l'angle de mésalignement β est constant durant tout le cycle. D'après les résultats de calcul obtenus, il a été constaté que la variation de l'angle de mésalignement n'a aucune influence sur les caractéristiques hydrodynamiques du palier.

a- Trajectoires

Les trajectoires (figure V-22) montrent que le contact, entre l'arbre (tourillon) et le coussinet, se produit dans la section gauche du palier N°2 lorsque le mésalignement est pris en considération.

b- Hauteurs minimales du film

Sur les figures (V-23) et (V-24) sont représentées les variations, dans les trois sections du palier, de la hauteur minimale du film. Dans la section gauche du palier N°2, la hauteur du film calculée devient négative pour un angle de vilebrequin de 453 degrés. Tandis que pour le palier N°1, cette hauteur est réduite de 60% dans la section droite du palier.

c- Débits axiaux

Les figures (V-25) et (V-26) représentent les variations du débit axial pour les deux paliers. A cause de l'inclinaison de l'arbre par rapport au coussinet, les débits de fuite calculés dans les sections extrêmes du palier sont différents. Comme dans le cas des paliers statiquement chargés, les variations du débit résultant ne sont pas influencées par le mésalignement.

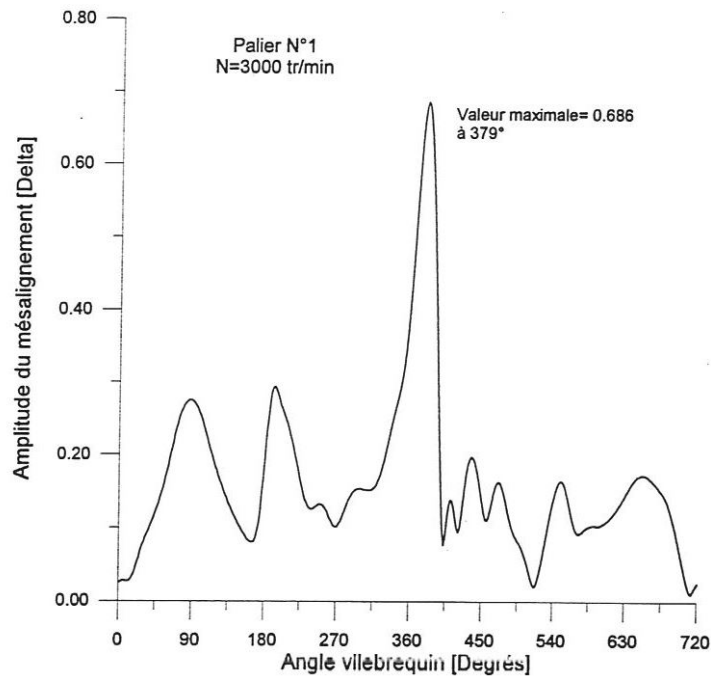


Figure V-20 : Variation de l'amplitude du mésalignement (δ) en fonction de l'angle vilebrequin palier N°1

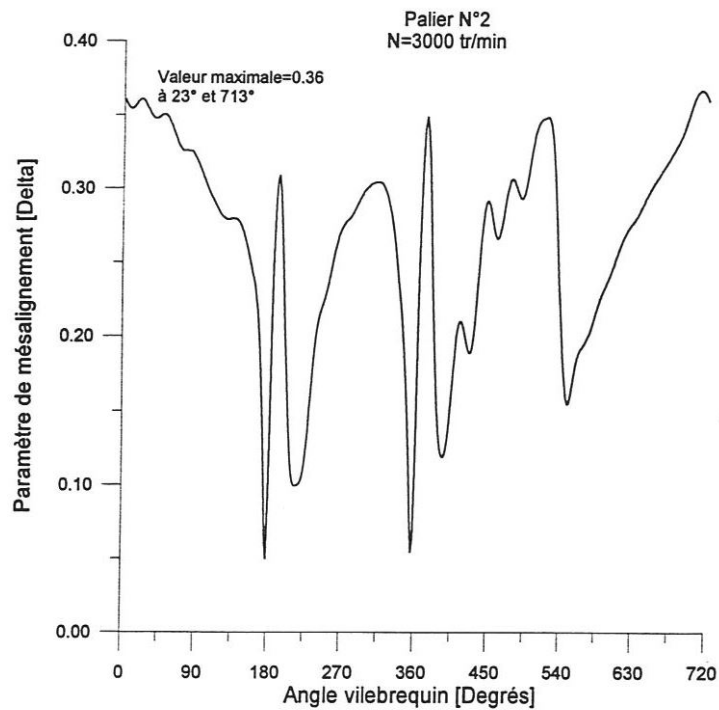
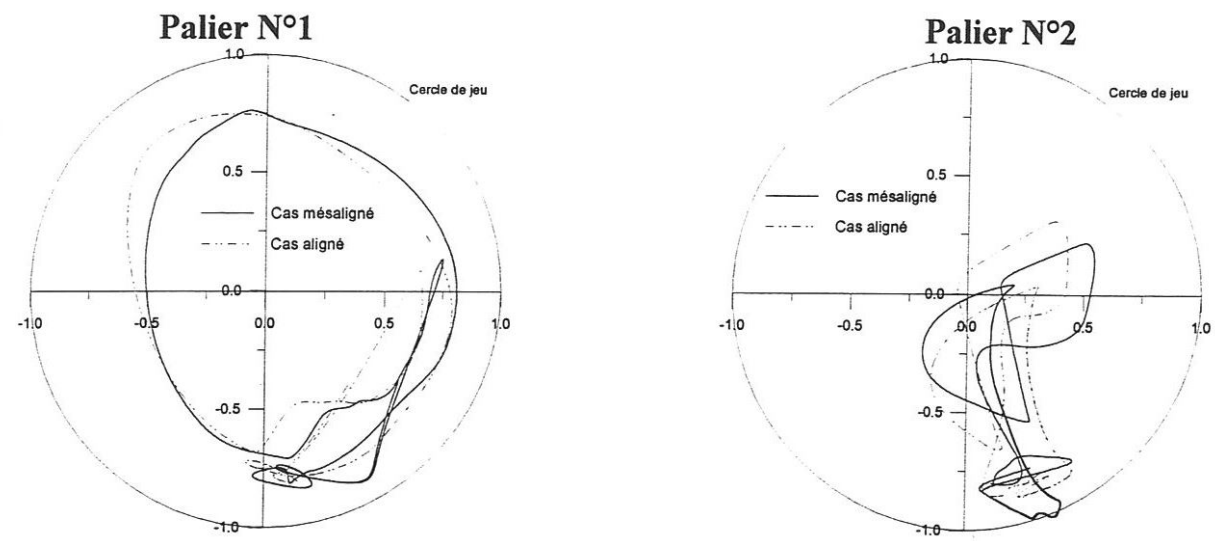
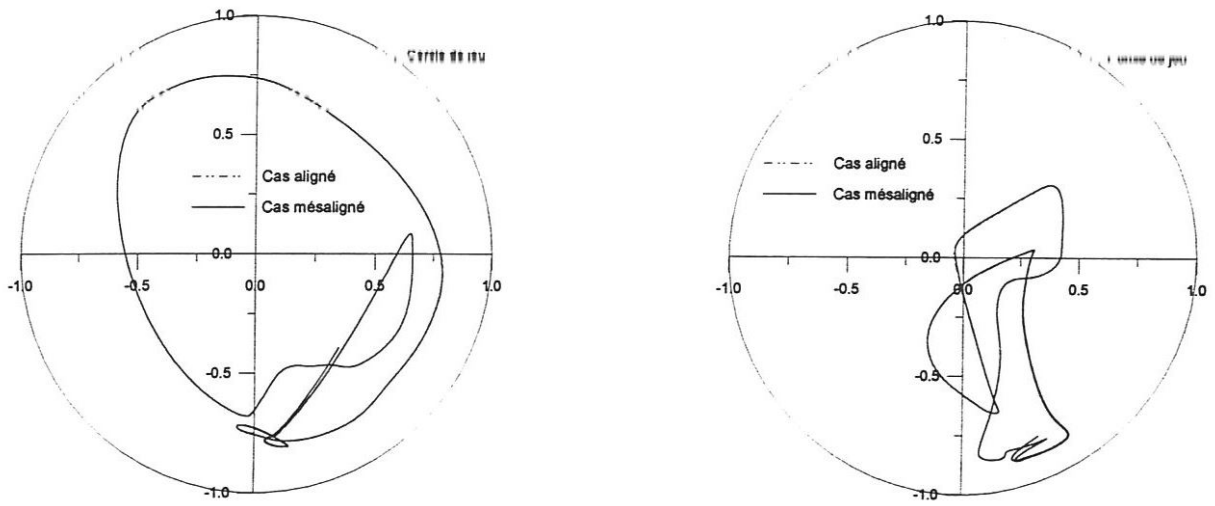


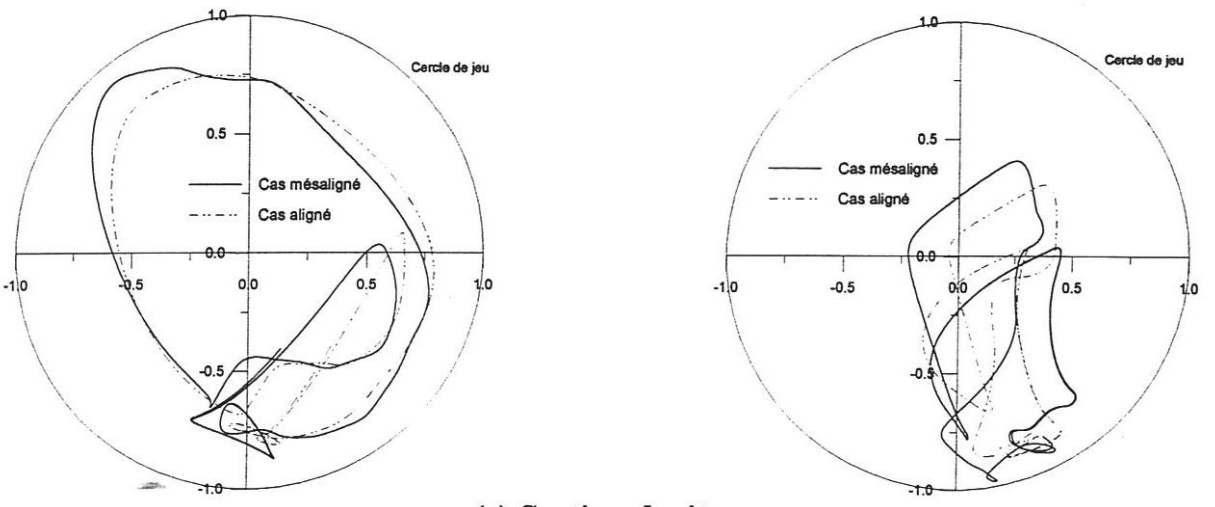
Figure V-21 : variation de l'amplitude du mésalignement (δ) en fonction de l'angle vilebrequin palier N°2



(a) Section gauche



(b) Section médiane



(c) Section droite

Figure V-22 : Trajectoires du centre de l'arbre

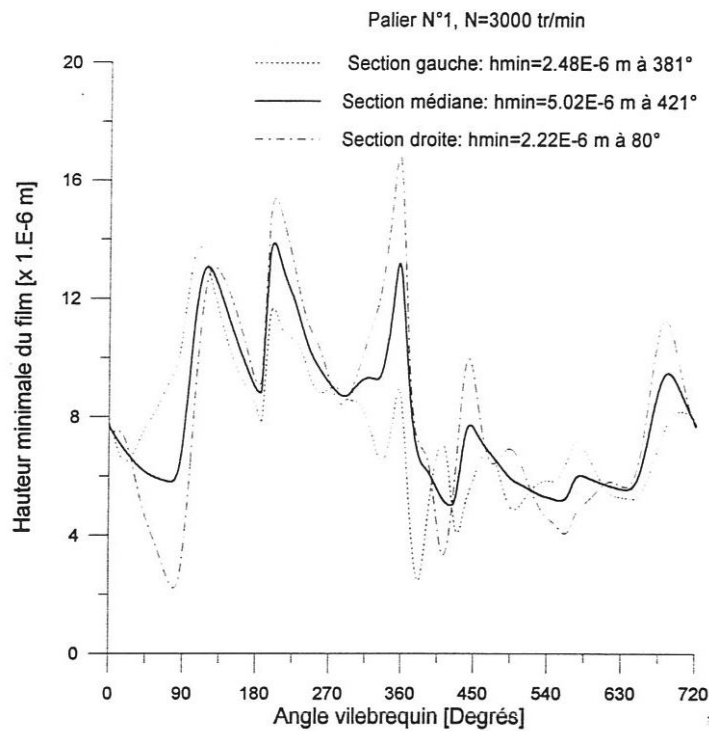


Figure V-23: Hauteur minimale du film en fonction de l'angle vilebrequin (Palier N°1)

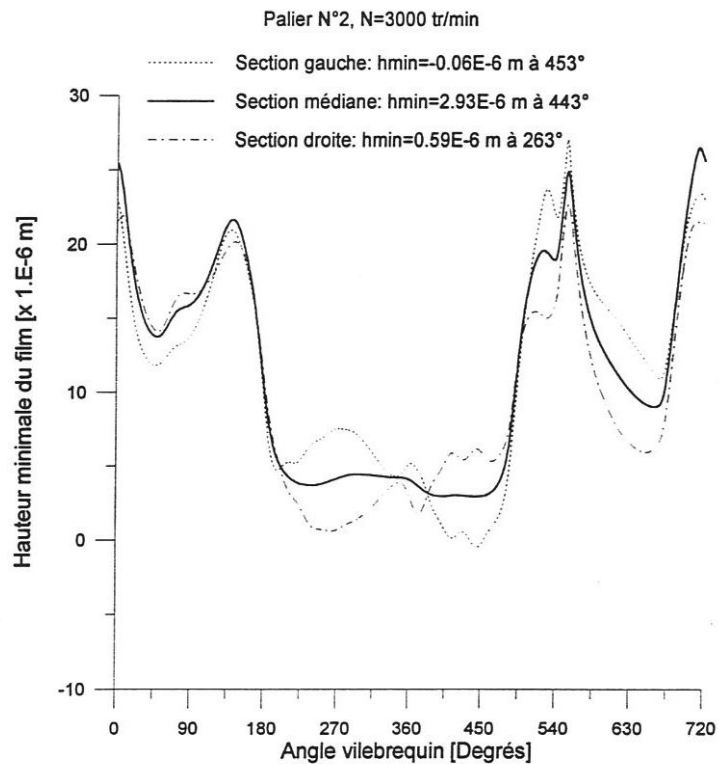


Figure V-24 : Hauteur minimale du film en fonction de l'angle vilebrequin (Palier N°2)

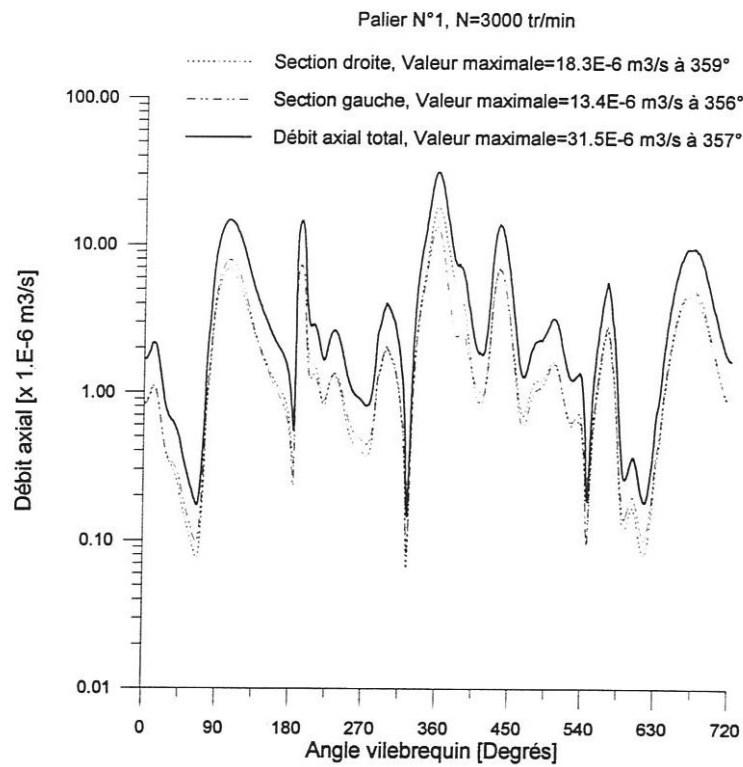


Figure V-25 : Débit axial en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°1)

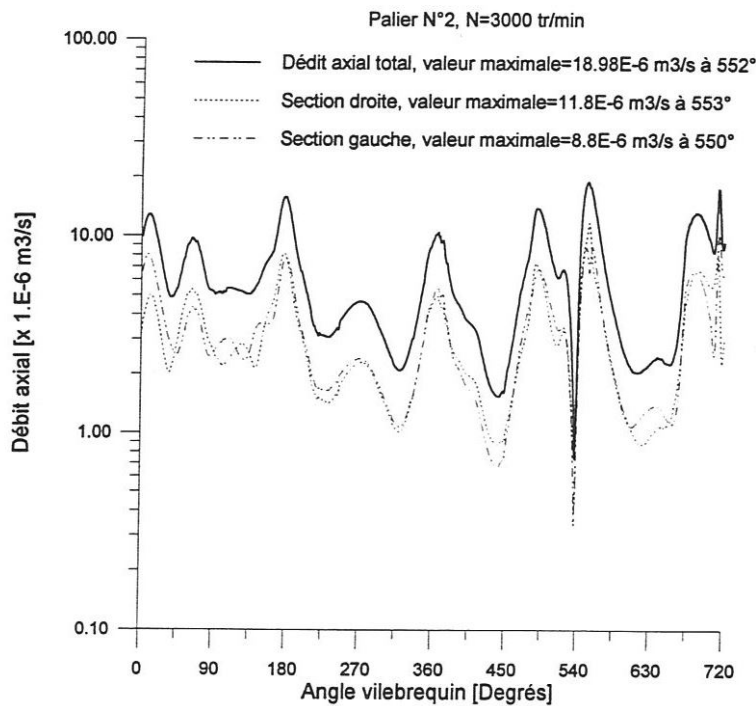


Figure V-26 : Débit axial en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°2)

d- Moments de mésalignement

Ces moments sont dus à la dissymétrie du champ de pression. Ils sont très faibles sur tout le cycle sauf à 12 degrés après le pic de combustion.

Un seul pic est visible pour le palier N°1, alors que deux pics apparaissent pour le palier N°2 ; ils correspondent aux points de combustion des cylindres 1 et 2 (figures V-27 et V-28). A ces instants précis, les couples deviennent très importants et leur influence sur les déformations des chapeaux de paliers peut être non négligeable.

e- Couples de frottement

Les figures (V-29) et (V-30) montrent les variations du couple de frottement en fonction de l'angle de vilebrequin pour les deux paliers dans le cas mésaligné. Les valeurs de ces couples sont calculées à partir de l'intégration des contraintes de cisaillement exercées par le fluide sur la surface du coussinet. Pour le palier 2, la valeur maximale du couple est située au voisinage de 453 degrés d'angle de vilebrequin pour lequel le contact a eu lieu. Cette valeur ne tient pas compte du frottement mixte qui existe dans la zone de contact puisque les équations établies pour le calcul du couple de frottement ne peuvent plus s'appliquer (absence de régime hydrodynamique).

Dans la zone de contact, la valeur réelle du couple est évidemment plus importante et elle est difficile à évaluer. Ainsi, l'amplitude du pic de frottement est sous estimée dans nos calculs.

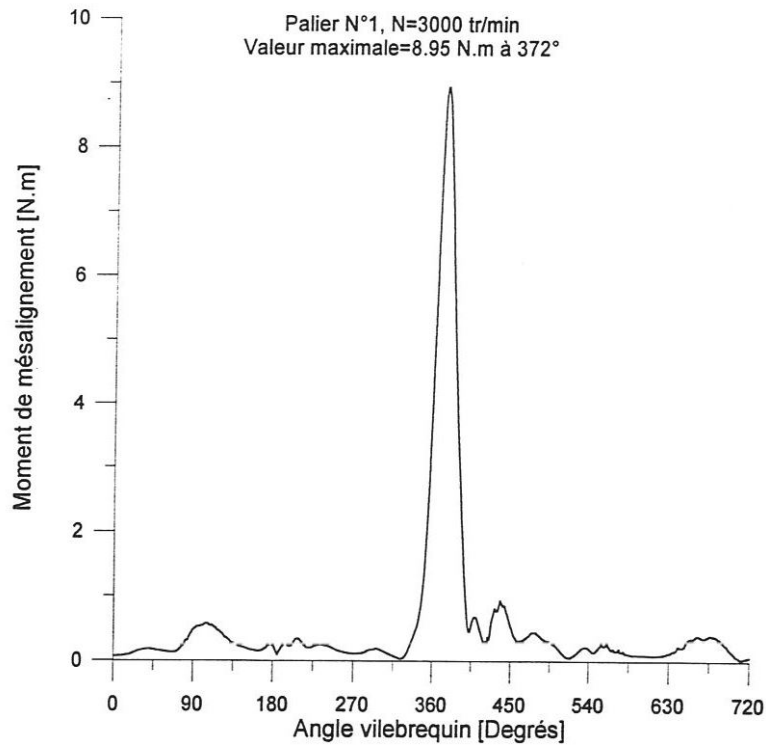


Figure V-27 : Moment hydrodynamique du mésalignement en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°1)

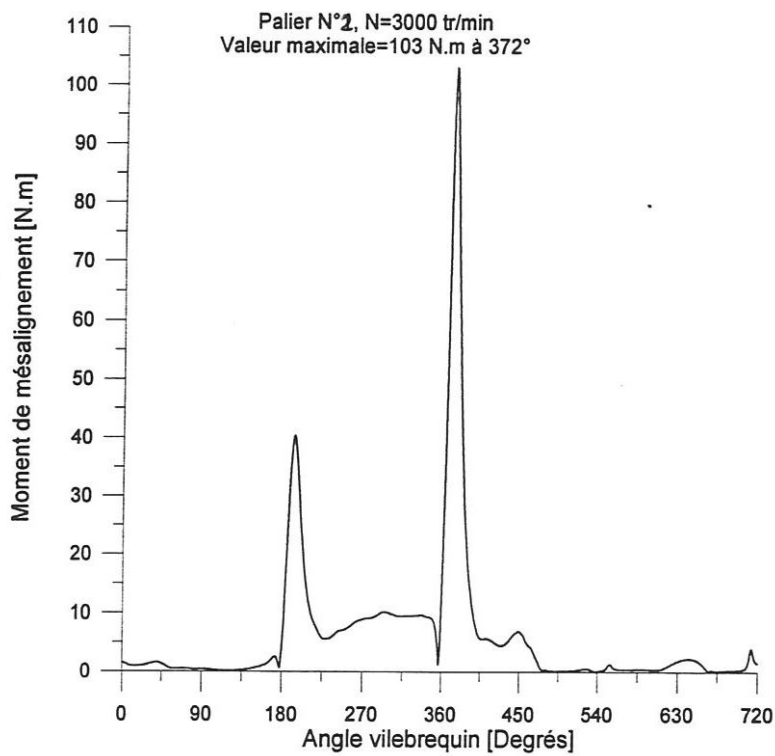


Figure V-28: Moment hydrodynamique du mésalignement en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°2)

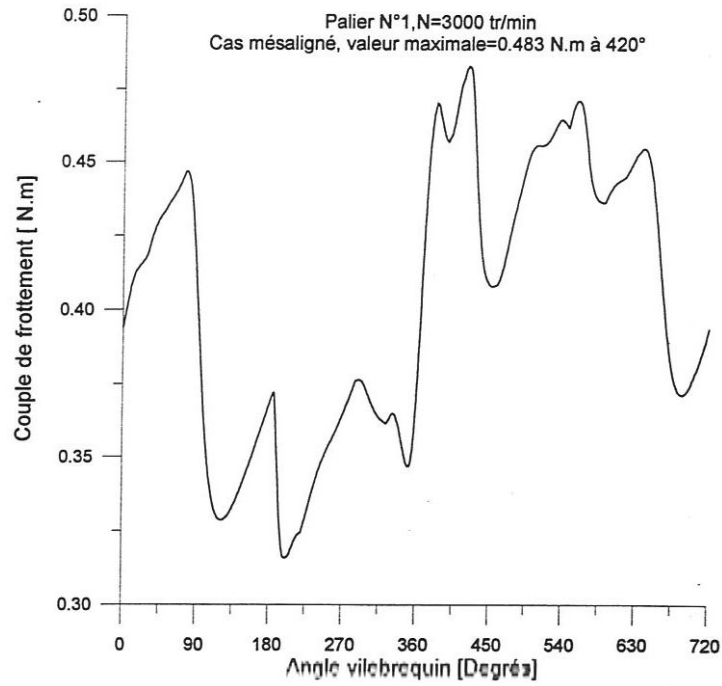


Figure V-29 : Couple de frottement sur l'arbre en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°1)

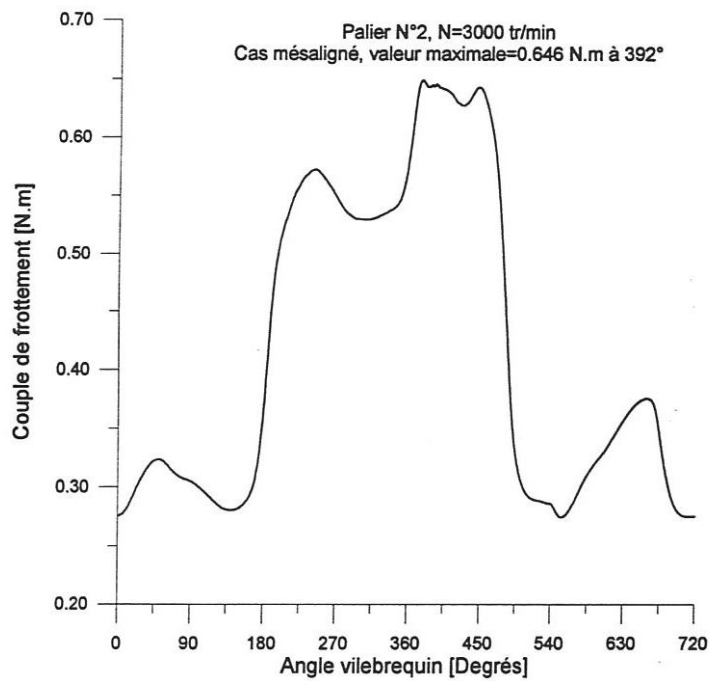


Figure V-30 : Couple de frottement sur l'arbre en fonction de l'angle vilebrequin (palier N°2)

V-6. CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié, dans un premier temps, l'influence du jeu radial et de la viscosité des lubrifiants sur la hauteur minimale du film pour un palier de tête de bielle du moteur diesel Ruston & Hornsby. Nous avons aussi étudié l'influence des conditions d'alimentation et les défauts de forme sur la trajectoire du centre de l'arbre, l'épaisseur minimale du film, la pression maximale et le débit axial pour le même palier.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence du mésalignement dynamique dont l'amplitude varie en fonction du temps sur les caractéristiques hydrodynamiques de deux paliers principaux d'un moteur 2 litres à essence.

Cette étude nous a montré que :

- le contact peut se produire entre l'arbre et le coussinet à une des extrémités des paliers principaux de vilebrequin, celui-ci est confirmé lors du démontage des coussinets après une certaine durée de fonctionnement,
- le couple de frottement augmente fortement dans la zone de contact,
- les moments hydrodynamiques, dus aux mésalignements sont importants lors des points de combustion et leur influence sur les chapeaux de paliers doit être pris en considération,
- les débits calculés aux deux extrémités du palier mésaligné sont différents,
- la présence d'une rainure circonférentielle réduit de façon importante la hauteur du film,
- la hauteur minimale du film augmente avec la viscosité du lubrifiant.

Les conclusions de cette étude sont importantes du point de vue technologique ; la diminution de l'épaisseur minimale du film augmente sensiblement les risques de grippage (contact métal-métal) et d'avaries par rupture du film d'huile.

CONCLUSION GENERALE

Le présent travail constitue une étape vers une meilleure compréhension théorique du phénomène de la lubrification dans les paliers de moteurs à combustion interne.

Le problème de la lubrification hydrodynamique est régi par l'équation de Reynolds déduite des équations de Navier dans le cas d'un fluide newtonien. Pour résoudre ce problème, nous avons d'abord écrit l'équation de Reynolds, en régime transitoire, permettant le calcul des paliers avec des défauts de forme ou avec un mésalignement de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Ce mésalignement peut être constant, en direction et en module, au cours du cycle ou peut varier à chaque instant. Pour ce dernier, les paramètres de mésalignement sont déterminés à partir d'un programme de calcul de structure.

Les méthodes des différences finies unidimensionnelle et bidimensionnelle sont utilisées pour la discrétisation de l'équation de Reynolds dans le but de déterminer la répartition de pression dans le film d'huile. La résolution du problème hydrodynamique en régime transitoire est réalisée à l'aide de la méthode de Mobilité de **Booker**, le système d'équations linéaire ainsi obtenu est résolu par un processus itératif en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. L'algorithme de Christopherson est utilisé pour satisfaire les conditions aux limites de Reynolds permettant de prendre en considération le phénomène de cavitation.

Le programme mis au point utilisant la méthode de Mobilité de **Booker** permet d'une façon rapide et précise la prédiction de la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Cette approche, simple de mise en œuvre, conduit à l'intégration par un schéma d'Euler d'un système de deux équations différentielles d'ordre un permettant de déterminer la position du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet pour un diagramme de charge donné.

La connaissance du diagramme de charge est indispensable lors de l'étude du comportement dynamique des paliers. C'est par conséquent la raison pour laquelle nous sommes intéressés dans un premier temps aux études cinématique et dynamique du système bielle-manivelle. Elle permettra de déterminer les diagrammes des charges appliquées aux paliers de moteurs à combustion interne. La connaissance du signal de pression instantanée (mesuré expérimentalement) pour un régime de fonctionnement donné est nécessaire pour cette étude.

Une étude de l'influence du jeu radial sur l'épaisseur minimale du film lubrifiant a permis la détermination d'une valeur optimale du jeu radial. Cette valeur obtenue sans tenir compte des effets thermiques et des déformations des surfaces est très faible comparée à la valeur de fonctionnement.

En faisant varier la viscosité dynamique du lubrifiant, nous avons ainsi confirmé que l'augmentation de la viscosité conduit naturellement à l'augmentation de la hauteur minimale du film lubrifiant.

La présence d'une rainure d'alimentation dans un palier de tête de bielle réduit de 60% la hauteur minimale du film lubrifiant et augmente de 40% la pression maximale dans le film.

Pour des défauts longitudinaux (profils conique ou parabolique), cette étude montre que ces défauts ont une faible influence sur la pression maximale et le débit axial, tandis que ces défauts conduisent à des diminutions considérables de la hauteur minimale du film d'huile qui peuvent atteindre 50% pour un défaut de conicité et 40% pour un défaut de type parabolique.

Nous avons abordé ensuite le problème du mésalignement de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Ce mésalignement dont les paramètres varient en fonction du temps sans la prise en considération de leurs vitesses a été introduit dans l'équation de Reynolds.

L'étude du mésalignement variant avec le temps nécessite un calcul de structure par éléments finis tenant compte des déformations élastiques du carter et du vilebrequin d'un moteur à essence. Ce dernier étant modélisé comme une poutre élastique tridimensionnelle.

Les calculs effectués prédisent un contact entre l'arbre et le coussinet dans la section gauche du palier principal N°2. Ce résultat peut être confirmé lors du démontage des coussinets après une certaine durée de fonctionnement.

Un examen visuel de ces coussinets révèle des marques d'usure (pitting) aux extrémités du palier qui sont dues principalement au phénomène de mésalignement.

Les conclusions auxquelles notre étude a abouti sont importantes du point de vue technologique car les principales causes d'usures rencontrées dans les paliers sont mises en évidence.

Pour compléter cette étude, il serait intéressant de prendre en considération les déformations élastiques des structures résultant des pressions hydrodynamiques engendrées dans le film d'huile. Un couplage de programme de calcul hydrodynamique de la présente étude avec un programme de calcul de structure doit être envisagé.

ANNEXE A

DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

Considérons un écoulement laminaire bidimensionnel entre une surface plane (S_1) confondue avec le plan (o,x,y) et une surface (S_2) d'équation $y_2 = h(x,z,t)$ figure (A-1). Le fluide est supposé newtonien et incompressible. La variation de la viscosité du lubrifiant à travers l'épaisseur du film est supposée négligeable $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0\right)$.

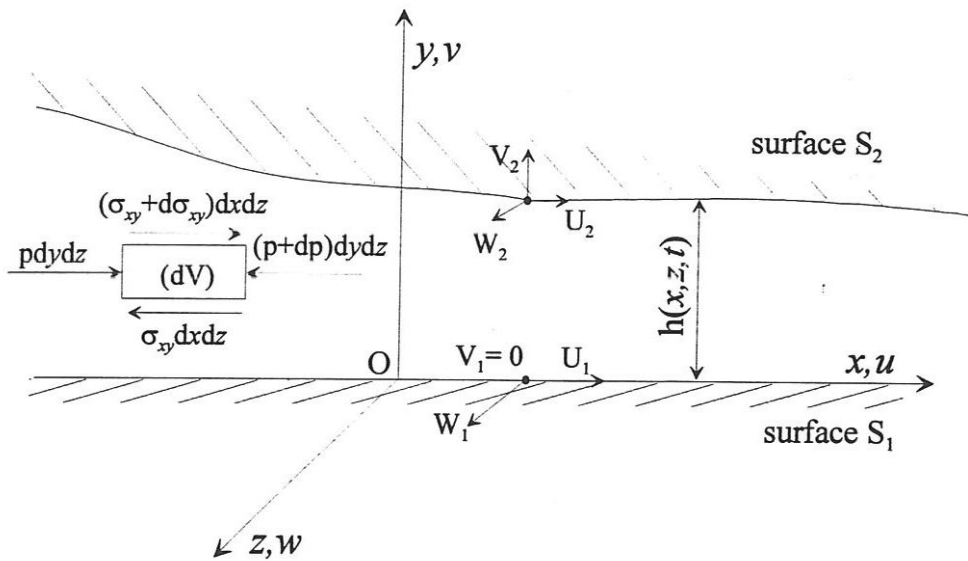


Figure A-1 : Schéma et cinématique du contact

A-1. Equations de Navier

L'étude de l'équilibre de l'élément fluide (dV) donne :

$$(\sigma_{xy} + d\sigma_{xy})dx dz - \sigma_{xy} dx dz + p dy dz - (p + dp) dy dz = 0$$

avec :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx \text{ et } d\sigma_{xy} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

De la même manière, on a pour l'écoulement dans le plan (o,y,z) :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Par conséquent, l'écoulement bidimensionnel est régi par les équations de Navier suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

1^{ère} intégration par rapport à y :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} y + A(x,z) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + \frac{A(x,z)}{\mu} \\ \frac{\partial p}{\partial z} y + B(x,z) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y + \frac{B(x,z)}{\mu} \end{cases}$$

2^{ème} intégration par rapport à y :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y}{\mu} dy + A(x,z) \int \frac{dy}{\mu} + C(x,z) \\ w(y) = \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y}{\mu} dy + B(x,z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x,z) \end{cases}$$

Conditions aux limites sur les vitesses :

$$\begin{cases} y = 0, & u = U_1 & \text{et } w = W_1 \\ y = h, & u = U_2 & \text{et } w = W_2 \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

La viscosité dynamique étant indépendante de y $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \right)$, on a :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{A(x,z)}{\mu} y + C(x,z) \\ w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{B(x,z)}{\mu} y + D(x,z) \end{cases}$$

L'utilisation des conditions aux limites (A-2) donne :

$$C(x,z) = U_1; \quad D(x,z) = W_1$$

$$A = \frac{\mu}{h} \left[U_2 - U_1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 \right]$$

$$B = \frac{\mu}{h} \left[W_2 - W_1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^2 \right]$$

Soit :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

A-2. Equation de continuité

Le fluide étant incompressible ($\rho = \text{cste}$), l'équation de continuité ou de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-4})$$

A-3. Equation de Reynolds

Intégrons l'équation (A-4) à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dy = 0$$

posons:

$$I_1 = \int_0^{h} \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad I_2 = \int_0^{h} \frac{\partial v}{\partial y} dy = [v]_0^h = V_2 = \frac{dh}{dt} \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^{h} \frac{\partial w}{\partial z} dy$$

Pour le calcul des intégrales I_1 et I_3 , nous utilisons la règle d'intégration de **Leibnitz**

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{A-5})$$

avec $i=1,2,3$

Il vient :

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(y) dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} \\ I_2 = V_2 \\ I_3 = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w(y) dy - w(h) \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases}$$

avec : $u(h)=U_2$, $w(h)=W_2$

$$\begin{cases} \int_0^h u(y) dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} (U_1 + U_2) \equiv q_x \\ \int_0^h w(y) dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{h}{2} (W_1 + W_2) \equiv q_z \end{cases}$$

q_x et q_z étant les débits volumiques par unité de largeur du contact

$I_1+I_2+I_3=0$ donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(y) dy - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_2 + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w(y) dy - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} (U_1 + U_2) \right] - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{h}{2} (W_1 + W_2) \right] - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (A-6)$$

Cette équation peut s'écrire aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h}{2} (U_1 + U_2) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h}{2} (W_1 + W_2) \right] - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 = 0 \quad (A-7)$$

où :

$$V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \quad (A-8)$$

avec $h=h(x,z,t)$

Compte tenu de la relation (A-8), l'équation (A-7) s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [h(U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [h(W_1 + W_2)] + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (A-9)$$

Sous forme plus condensée (utilisation des opérateurs différentiels), l'équation (A-9) s'écrit :

$$\operatorname{div}\left(\frac{h^3}{12\mu} \vec{\operatorname{grad}}p\right) = \frac{1}{2} \operatorname{div}(h\vec{u}) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{A-10})$$

ou bien

$$\operatorname{div}(\vec{q}) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{A-11})$$

avec

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix}$$

Les hypothèses qui ont permis d'écrire l'équation de Reynolds sont :

- le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film,
- l'épaisseur du film h est très faible devant la largeur et la longueur du contact L , le rapport $\varepsilon = \frac{h}{L}$ entre ces grandeurs doit être de l'ordre de 10^{-3} . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification,
- le fluide est newtonien,
- il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact,
- l'écoulement est laminaire et isotherme,
- la viscosité du fluide ne varie pas selon l'épaisseur du contact,
- la vitesse est tangente à l'une des parois du contact, ce qui permet de placer le système d'axes sur cette paroi.
- la courbure générale du film est négligée,
- la masse volumique du fluide est constante,
- les forces d'inertie et les forces massiques sont négligeables.

ANNEXE B

FORME VARIATIONNELLE DE L'EQUATION DE REYNOLDS

L'équation de Reynolds démontrée en [annexe A] est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. Cette équation est généralement intégrée sur un domaine (D) de frontière (Γ) figure B-1 avec les conditions aux limites portant sur la pression p et le débit normal Q :

$$\begin{cases} p = p_0 & \text{sur } (\Gamma_1) \\ \vec{n} \left(\frac{h}{2} \vec{U} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\text{grad}} p \right) = Q & \text{sur } (\Gamma_2) \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

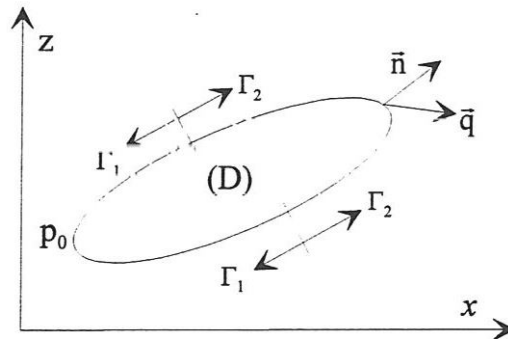


Figure B-1

où \vec{n} est la normale unitaire à (Γ_2).

Ce problème peut être résolu en minimisant la fonctionnelle $J(p)$ associée à l'équation de Reynolds.

Dans le cas d'un fluide incompressible, celle-ci peut être construite soit par le calcul des variations soit en utilisant le théorème d'**Helmoltz et Korteweg** [64].

B-1. Application du calcul des variations

L'équation de Reynolds est alors identique à une équation d'**Euler-Lagrange** et il nous faut, chercher parmi l'ensemble des fonctions p celle qui rend extrémale la fonctionnelle :

$$J(p) = \int_D \left\{ -\frac{h^3}{12\mu} \left(\vec{\text{grad}} p \right)^2 + h\vec{U} \vec{\text{grad}} p - 2ph \right\} dD - 2 \int_{\Gamma_2} qp d\Gamma \quad (\text{B-2})$$

Notons que la fonctionnelle $J(p)$ peut être construite à partir de la forme intégrale $W(p)$ associée à l'équation de Reynolds en appliquant la méthode des résidus pondérés (méthode de **Galerkine**) [65]:

$$W(p) = \int_D \left\{ -\frac{h^3}{6\mu} (\bar{\nabla}_p \bar{\nabla} \delta p) + h \bar{U} \bar{\nabla} \delta p - 2h \delta p \right\} dD - 2 \int_{\Gamma_2} q \delta p d\Gamma = 0 \quad (\text{B-3})$$

où : δp est la variation de la fonction p et $\bar{\nabla}$ l'opérateur gradient.

Nous remarquons par ailleurs que la forme intégrale $W(p)$ correspond à la première variation de la fonctionnelle $J(p)$, on peut écrire alors :

$$W(p) \equiv \delta J(p) \quad (\text{B-4})$$

B-2. Application du théorème d'Helmoltz et Korteweg

La figure B-2 représente un volume fluide limité d'une part par deux plaques D' et D dont la cinématique est donnée, et d'autre part par une surface latérale S . Les conditions aux limites sont telles que la pression sur (S_1) , une partie de (S) , est imposée tandis que sur (S_2) , le complément de (S_1) par rapport à (S) , le champ de vitesse est connue.

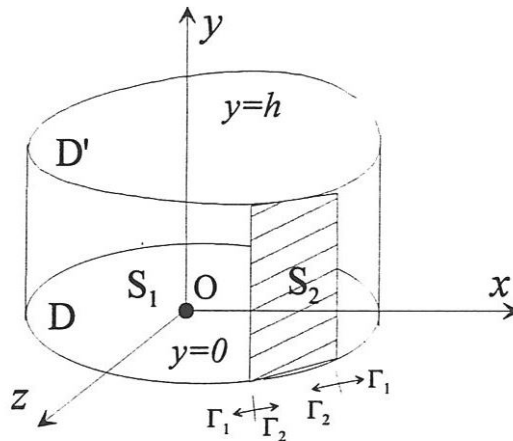


Figure B-2 : Volume fluide V

D'après le théorème d'Helmoltz et Korteweg, nous savons que l'énergie représentée par l'intégrale :

$$J(p) = \int_V \phi dv + 2 \int_{S_1} p \bar{n} \bar{u} ds \quad (\text{B-5})$$

doit être minimale.

Dans cette expression, \bar{n} représente le vecteur unitaire normal à la surface latérale (S_1) . \bar{u} le vecteur vitesse et ϕ la fonction de dissipation visqueuse qui, en mécanique des films mince visqueux, s'écrit :

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{B-6})$$

Dans laquelle d'après les équations de Navier [annexe A] :

$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{U_1 - U_2}{h} y + U_1 \\ w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{W_1 - W_2}{h} y + W_1 \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

L'équation (B-5) peut également s'écrire :

$$J(p) = \int_V \phi dv + 2 \int_S p \bar{n} u ds - 2 \int_{S_2} p \bar{n} u ds_2 \quad (\text{B-8})$$

ou, après intégration selon l'épaisseur du film :

$$J(p) = \int_D \left[\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \mu \frac{(U_2 - U_1)^2}{h} + \mu \frac{(W_2 - W_1)^2}{h} \right] dD + 2 \int_{\Gamma} p \bar{n} \bar{q} d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_2} p \bar{n} \bar{q} d\Gamma \quad (\text{B-9})$$

avec :

$$\bar{q} = \begin{cases} q_x \\ q_z \end{cases} = \begin{cases} q_x = \int_0^h u dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + (U_1 + U_2) \frac{h}{2} \\ q_z = \int_0^h w dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + (W_1 + W_2) \frac{h}{2} \end{cases}$$

La deuxième intégrale de l'équation (B-9) peut être, par l'intermédiaire du théorème de Green-Riemann, transformée en intégrale double :

$$\int_{\Gamma} p \bar{n} \bar{q} d\Gamma = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (p q_x) + \frac{\partial}{\partial z} (p q_z) \right] dD \quad (\text{B-8})$$

Dans la troisième intégrale de l'équation (B-9), $\bar{n} \bar{q}$ représente le débit normal à la frontière Γ_2 . Connaissant le champ de vitesse sur Γ_2 , on peut calculer ce débit.

Nous poserons :

$$Q = \bar{n} \bar{q}$$

Si l'on intègre l'équation de continuité selon l'épaisseur du film, on obtient [annexe A] :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -V_2 + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} = -\dot{h}$$

Ainsi :

$$J(p) = \int_D \left[-\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + (U_1 + U_2)h \frac{\partial p}{\partial x} + (W_1 + W_2)h \frac{\partial p}{\partial z} - 2p \frac{\partial h}{\partial t} + \mu \frac{(U_2 - U_1)^2}{h} + \mu \frac{(W_2 - W_1)^2}{h} \right] dD - 2 \int_{\Gamma_2} q p d\Gamma \quad (B-9)$$

- Les quantités $\mu \frac{(U_2 - U_1)^2}{h}$ et $\mu \frac{(W_2 - W_1)^2}{h}$ qui sont indépendantes de la pression, elles peuvent être ignorées lors de la minimisation de la fonctionnelle

Cette intégrale n'est valable que sur un domaine (D) où l'on peut appliquer les équations de la mécanique des fluides. Il est possible toutefois d'étendre ce domaine de validité à un domaine (\bar{D}) contenant (D) tel que sur le complément de (D) par rapport à (\bar{D}) la pression soit identiquement nulle figure B-3. Cette équation permet d'inclure les zones inactives qui existent dans certains écoulements en mécanique des films minces visqueux.

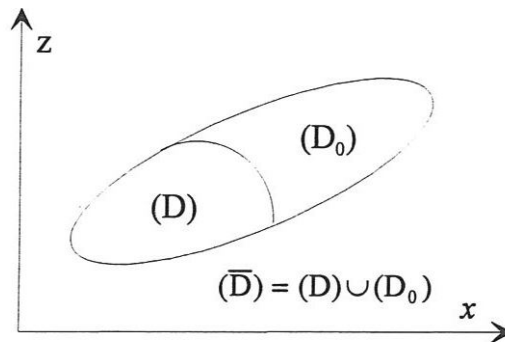


Figure B-3 : Domaine de validité de la fonctionnelle

Compte tenu des remarques précédentes :

$$J(p) = \int_D \left[-\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + (U_1 + U_2)h \frac{\partial p}{\partial x} + (W_1 + W_2)h \frac{\partial p}{\partial z} - 2p \frac{\partial h}{\partial t} \right] dD - 2 \int_{\Gamma_2} q p d\Gamma \quad (B-10)$$

On retrouve la fonctionnelle proposée au paragraphe B-1.

Notons que dans le cas des fluides compressibles le théorème de minimisation de l'énergie dissipée ne s'applique plus.

ANNEXE C

CALCUL DES INTEGRALES DU TYPE : $I_n^{lm} = \int \frac{\sin^l \theta \cos^m \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^n} d\theta$ avec $0 < \varepsilon < 1$

$$I_n^{00} = \frac{1}{(n-1)(1-\varepsilon^2)} \left[\frac{-\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}^{00} - (n-2)I_{n-2}^{00} \right] \quad n \neq 1$$

$$I_1^{00} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{Arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right); \quad [I_1^{00}]_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad [I_1^{00}]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$I_n^{01} = \frac{1}{\varepsilon} [-I_n^{00} + I_{n-1}^{00}]; \quad [I_0^{00}]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$I_n^{02} = \frac{1}{\varepsilon^2} [I_n^{00} - 2I_{n-1}^{00} + I_{n-2}^{00}]$$

$$I_n^{03} = \frac{1}{\varepsilon^3} [-I_n^{00} + 3I_{n-1}^{00} - 3I_{n-2}^{00} + I_{n-3}^{00}]$$

$$I_n^{10} = \frac{1}{(n-1)\varepsilon(1+\varepsilon \cos \theta)^{n-1}}; \quad n \neq 1$$

$$I_n^{10} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Log}|1 + \varepsilon \cos \theta|; \quad n = 1$$

$$I_n^{11} = \frac{1}{\varepsilon} [-I_n^{10} + I_{n-1}^{10}]$$

$$I_n^{12} = \frac{1}{\varepsilon^2} [I_n^{10} - 2I_{n-1}^{10} + I_{n-2}^{10}]$$

$$I_n^{13} = \frac{1}{\varepsilon^3} [-I_n^{10} + 3I_{n-1}^{10} - 3I_{n-2}^{10} + I_{n-3}^{10}]$$

$$I_n^{20} = \frac{1}{\varepsilon^2} [-(1-\varepsilon^2)I_n^{00} + 2I_{n-1}^{00} - I_{n-2}^{00}]$$

$$I_n^{21} = \frac{1}{\varepsilon^2} [(1-\varepsilon^2)I_n^{00} - (3-\varepsilon^2)I_{n-1}^{00} + 3I_{n-2}^{00} - I_{n-3}^{00}]$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Stone J.R.** et **Underwood A.F.**, "load carrying capacity of journal bearing". Qt. Trans. Society Automotive Engrs. 1947 1, 56.
- [2] **Burwell J. T.** , "the calculated performance of dynamically loaded sleeve bearings". Journal of Applied Mechanics, A 69, p.231-245, 1947.
- [3] **Burwell J.T.**, "the calculated performance of dynamically loaded sleeve bearings". Journal of applied Mechanics, Pt II, 71, p. 358-360, 1949.
- [4] **Burwell J.T.**, "the calculated performance of dynamically loaded sleeve bearings". Journal of applied Mechanics, Pt III, 73, p.393-404, 1951.
- [5] **Sommerfeld A.**, "Zur hydrodynamischen theorie der schiermittelreibung". Z. Math. Phys., Vol. 50, 1904, p. 124
- [6] **Hahn H. W.**, "Dynamically loaded journal bearings of finite length". IME proceeding of the conference of lubrication and wear, p. 100-110,1957.
- [7] **Someya T.**, "Stability of an unbalance free shaft running-in cylindrical plain bearings" Thesis Karlsruhe Technische Hochschule,1952.
- [8] **Holland J.**, "Contribution to the investigation of lubricating conditions in internal combustion engine" . VDI Forsch, 475, 1959.
- [9] **Lang O.** et **Eberhard A.**, "Computation of plain bearings in internal combustion engines by electronic digital computers" .MTZ 22,n° 7,1961.
- [10] **Carl T. E.** "The experimental investigation of a cylindrical journal bearing under constant and sinusoidal loading".2nd conv. Lubrication and wear, Proc. Inst. Mech. Engrs, 1963-64, Vol 178, Paper 19, p. 100.
- [11] **Radermacher K.**, "Cylindrical plain bearings under loads warying in magnitude and direction". Paper 23. Lubrication and wear convention 1964.
- [12] **Horsnell R.** et **McCallion H.**, "Prediction of some journal bearing characteristics under static and dynamic loading". Lubrication and Wear convention, paper 12, 1963.
- [13] **Llyod T., Horsnell. R.** et **McCallion H.**, "An investigation into the performance of dynamically loaded journal bearings : theory". Symposium on journal bearings for reciprocating and turbo machinery, sept.1966, Proc. Inst. Mech. Engrs, Vol. 181, 1966-67.

- [14] **Blok H.**, "Unpublished work, developed in publication and wear, fundamentals and application to design". Paper 4, Vol. 182, 1967.
- [15] **Booker J. F.**, "Dynamically loaded journal bearings: mobility method of solution". Journal of Basic Engineering, ASME, Séries D, p. 537, Sept. 1965.
- [16] **Warner P. C.**, "Static and dynamic properties of partial journal bearings". Journal of Basic Engineering, ASME, p.247-257, juin 1963.
- [17] **Booker J. F.**, "Dynamically loaded journal bearings : maximum film pressure". ASME-JOLT, séries F, p.534, juillet 1969.
- [18] **Booker J. F.**, "Dynamically loaded journal bearings : numerical application of the mobility method". ASME-JOLT, séries F, p.168, janvier 1971.
- [19] **Ross J. M. et Slaymaker R. R.**, "Journal center orbits in piston engine bearings". Society of automotive Engineers". International Automotive Engineers Congress. Detroit, p. 1-22, Jan. 1969.
- [20] **Moes H. et Bosma R.**, "Graphical construction of journal paths for dynamically loaded bearings». Proc. Of the 3rd European Tribology conference, Eurotrib 81, Varsovie, Vol. 2, p.280, sept.1981.
- [21] **Moes H., Sikkes E. G. et Bosma R.**, "Mobility and impedance tensor methods for full and partial-arc journal bearings". ASME-JOLT, 1981, p. 468-470.
- [22] **Rohde S. M. et Ezzat H. A.**, "Analysis of dynamically loaded floating-ring bearings for automotive applications". ASME-JOLT, juillet 1980.
- [23] **Goenka P. K.**, "Analytical curve fits for solution parameters of dynamically loaded journal bearings". ASME-JOLT, Vol. 106, oct.1984.
- [24] **Tanneau G.**, "Contribution à l'étude des paliers de bielle-Effet des rugosités". Thèse de 3^{ème} cycle, Poitiers, Mars 1984.
- [25] **Milne A. A.**, "Variations of the film extent in dynamically loaded journal bearings". Proc. of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology, sept 1974.
- [26] **Jones G. J.**, «Crankshaft bearings: oil film history". Proc. Of the 9th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, sept. 1982.
- [27] **Bayada G.**, "Inéquations variationnelles elliptiques avec conditions aux limites périodiques, application à la résolution de l'équation de Reynolds". Thèse de Docteur de 3^{ème} cycle, Dec. 1972.

- [28] **Bayada G.** et **Du Parquet J.**, "The influence of the operating parameters on the cavitation frontiers in a dynamically loaded narrow journal bearing". Proc. Of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Sept. 1974.
- [29] **Martin F. A.** et **Booker J. F.**, "Influence of engine inertia forces on minimum film thickness in con-rod big-end bearings". Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol. 181 ,p.30-67, 1966-67.
- [30] **Llyod T.**, **Horsnell R.** et **McCallion H.**, "An investigation into the performance of dynamically loaded journal bearings : design study". Proc. Inst. Mech.Engrs, Vol. 181, 1966-67.
- [31] **Martin F. A.**, "Developments in engine bearings». Proc. of the 9th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, sept 1982.
- [32] **Ritchie G. S.**, "The prediction of journal loci in dynamically loaded internal combustion engine bearings". Wear 35, p. 291 297, 1975.
- [33] **Dede M. M.** et **Holmes P.**, "On prediction and experimental assessment of engine-bearing performance". Proc. of the 10th Leeds-Lyon Symposium on Tribology , Sept. 1983.
- [34] **McKee S. A.** et **McKee T. R.**, " Pressure distribution in oil films of journal bearings". Trans. ASME, 1932, p. 149-165.
- [35] **Walther R. A.** et **Sassenfeld H.**, " Presssure distribution and load in a 360° bearing with an inclined shaft. Outline of procedure with an explanatory example". Dept. Of Sc. And Ind. Research, Sponsored Research (Germany), Report n° 13, 1950, I.P.M. Report n°9.
- [36] **Dubois G. B.**, **Mabie H. H.** et **Ocvirk F. W.**, "Experimental investigation of oil film pressure distribution for misaligned plain bearings". N.A.C.A., Tech. Note 2507, 1951.
- [37] **Smalley A. J.** et **McCallion H.**, "The effect of journal misalignment on the performance of a journal bearing under steady running conditions" Proc. Instn. Mech. Engrs., 1966-67, 183, Pt. 3B, 45
- [38] **Stokley J. R.** et **Donaldson R. R.**, "Misalignment effects in 180° partial journal bearings". Trans. ASLE, 1969, P. 216-226.
- [39] **Asanabe S.**, **Akahochi M.** et **Asai R.**, "Theoretical and experimental investigations of misaligned journal bearing performance". Tribology convention 1971, Instn. Engrs., London 1972.

- [40] **Nicolas D.** et **Frêne J.**, "Tilting torque permissible in plain bearings. Theory, experimental results and application to machine design". First European Tribology Congress, 1973.
- [41] **Pinkus O.** et **Bupara S. S.**, "Analysis of misaligned grooved journal bearings". ASME-JOLT , Oct. 1979, Vol. 101,p. 503-509.
- [42] **Ikeuchi K.**, **Katsuse S.**, **Hamamura K.** et **Mori H.**, "Effects of misalignment in full journal bearing with circumferential oil groove". Proc. Of the JSLE Int. Tribology Conference. July 1985.
- [43] **Reason B. R.** et **Siew A. H.**, "A numerical solution for the design and performance evaluation of journal bearings with misalignment". Proc. I. Mech. 1982, P. 77-85.
- [44] **Mokhtar M. O. A.**, **Safar Z. S.** et **Abd-El-Rahman M. A. M.**, "An adiabatic solution of misaligned journal bearings". ASME-JOLT , April 1985, Vol. 107, P. 263-267.
- [45] **Safar Z. S.**, **Mokhtar M. O. A.** et **Peeken H. J.**, "Thermal characteristics of misaligned finite journal bearings" Trib. Intern., Feb. 1985, Vol. 18, P. 13-16.
- [46] **Craighead I. A.**, **Dowson D.**, **Sharp R. S.** et **Taylor C.**, "The influence of thermal effects and shaft misalignment on the dynamic behaviour of fluid film bearings". Proc. I. Mech. 1980, P. 47-55.
- [47] **Goenka P. K.**, "Dynamically loaded journal bearings : finite element method analysis". ASME-JOLT, Oct. 1984, Vol. 106, P. 429-439.
- [48] **Maspeyrot P.**, "Comportement dynamique des paliers de vilebrequin. Influence des défauts de forme et des mésalignements". Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 1989.
- [49] **Hiruma M.** et **Furuhama S.** "Measurement of the journal locus in the con-rod big-end bearing of an automobile gasoline engine". ASME-JOLT, Avril 1973, p. 249-258.
- [50] **Fantino B.**, **Godet M.** et **Frêne J.**, "Dynamic behaviour of an elastic connecting-rod bearing-Theoretical study". SAE/SP-539 Study of engine bearings and lubrication, Paper n° 830307, 1983, pp. 23-32.
- [51] **Labouff G. A.** et **Booker J. F.**, "Dynamically loaded journal bearings: a finite element treatment for rigid and elastic surfaces". ASME-JOLT, Vol. 107, Oct. 1985.
- [52] **Van Der Tempel L.**, **Moes H.** et **Bosma R.**, "Numerical simulation of dynamically loaded flexible short journal bearings". ASME-JOLT, July 1985, Vol. 107.

[53] **Van Der Tempel L., Moes H. et Bosma R.**, "Starvation in dynamically loaded flexible short journal bearings". ASME-JOLT, Vol. 107, Oct. 1985.

[54] **Moes H., Ten Hoeve P. B. Y. et Van Der Helm J.**, "Thermal effects in dynamically loaded flexible journal bearings". Trans. of ASME, presented to the ASME/ASLE Tribology Conference, Baltimore, Oct. 1988, paper n°88-Trib-24.

[55] **Gümbel L.**, "Vergleich der ergebnisse der rechnerischen behandlung des lagerschmierungsproblem mit neuen versuchergebnisse". Monatsblätter Berlin, Bezirk V.D.I., Sept. 1921, pp. 125-128.

[56] **Swift H. W.**, "The stability of lubricating films in journal bearings". Proc. Inst. Civil Eng., 233, Pt 1, pp 267-322, 1931.

[57] **Stieber . W.**, "Das Schwimmlager". V.D.I., 1933, Berlin.

[58] **Christopherson D. G.**, "A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems". Proc. Inter. Mech. Eng., Vol. 146, pp. 126-135, 1941.

[59] **Ocvirk F. W. and Dubois G. B.**, "Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximations of full journal bearing". NACA, Tech. Report 1157, 1953.

[60] **Huebner K. H.**, "The finite element method for engineers". John Wiley and Sons, 1975. New York 1975.

[61] **Rohde S. M. and Li D. F.**, "A generalized short bearing theory". Trans. of the ASME, Vol. 102, July 1980.

[62] **Arthurs A. M.**, "Calculus of variation". Library of Math. Editor W. Ledermann

[63] **Campbell et al.**, " Bearing for reciprocating machinery : A review of the present state of theoretical, experimental and service knowledge". Proc. Inst. Mech. Engrs. 1967-68, Vol. 182, pt. 3A.

[64] **Hays D.**, "A variational approach to lubrication problems and solution of the finite journal bearing". Journal of basic engineering, Trans. ASME, Vol. 81, N°1, p. 13, 1959.

[65] **Dhatt G., Touzot G.**, "Une présentation de la méthode des éléments finis". Collection Université de Compiègne.

ABSTRACT

The theoretical study undertaken within this research work is mainly concerned with problem of hydrodynamic lubrication occurring in the engines' journal bearings when subjected to dynamic loads.

The problem of hydrodynamic lubrication is mainly governed by the Reynolds' equation which is derived from the Navier equations for newtonian fluid. The solution of this problem starts with the derivation of the transient regime Reynolds equation, allowing for the computation of the journal bearings having some defects or with a misalignment of the shaft within the bearing. this misalignment may be constant, or variable during all the operating cycle.

The one-dimensional as well as two dimensional finite difference approach are used for the discretisation of the Reynolds equation in order to calculate the pressure distribution within the film of oil. The solution of the hydrodynamic problem in transient regime is undertaken by application of the **Booker** mobility method. The linear system of equations obtained is solved by using an iterative process, applying the Gauss-Seidel algorithm with over relaxation coefficient. The Christopherson algorithm is used to satisfy the Reynolds boundary conditions, enabling the taking into consideration of the cavitation phenomenon.

The analysis undertaken shows that by taking into account parameters such as misalignment may be get to a contact between metallic surfaces, leading to an alterations of the journal bearings' engines operating characteristics.

Key words

- Hydrodynamic lubrication
- Transient regime
- Mobility method
- Misalignment
- Shape defects
- Fluid bearings

خلاصة

الدراسة النظرية الموسعة في هذه المذكرة تتناول أساسا صياغة تشكيل مسائل التشحيم الهيدروتحريكي داخل محامل المحركات الواقعة تحت تأثير حملات متغيرة القيم و الاتجاهات.

مسألة التشحيم الهيدروتحريكي تخضع لمعادلة رينولدس المستتبطة من معادلات نافي في حالة مائع نيوتوني. لحل هذه المسألة قمنا أولا بكتابة معادلة رينولدس في نظام انتقالي، و هذا للسماح بحساب محامل ذات عيوب شكل أو في حالة عدم توازي محور العمود داخل الوسادة. يمكن لهذا اللاتوازي أن يكون ثابتا في الاتجاه و القيمة أو يتغير خلال الدورة.

نستعمل طرائق الفوارق المنتهية أحادية أو ثنائية الأبعاد لحل معادلة رينولدس بهدف معرفة توزيع الضغط داخل شريط زيت المحرك. نحل المسألة الهيدروتحريكية في النظام الانتقالي بواسطة الطريقة الحركية لـ بوكر، بعدئذ نحل مجموعة المعادلات الخطية المحصل عليها بسير مكرر باستعمال خوارزم غوس-سيدل بمعامل ارتخاء مفرط. يسمح استعمال خوارزم كريستوفارسن بتحقيق الشروط الحدية لـ رينولدس و هذا يسمح بأخذ ظاهرة التكيف بعين الاعتبار.

أظهر التحليل أننا إذا أخذنا بعض العوامل و خاصة اللاتوازي بعين الاعتبار يمكن أن يؤدي إلى حدوث تلامس المعدن بالمعدن للأسطح المتحركة نسبيا، مما يؤدي إلى حدوث تغيرات معتبرة في الخصائص الهيدروتحريكية للاشتغال في محامل المحركات.

الكلمات الجوهرية

- تشحيم هيدروتحريكي
- نظام انتقالي
- الطريقة الحركية
- اللاتوازي
- عيوب الشكل
- محامل مائعة

RESUME

L'étude théorique développée dans le cadre de ce mémoire porte principalement sur la modélisation du problème de la lubrification hydrodynamique dans les paliers de moteurs soumis à des charges variables en module et en direction.

Le problème de lubrification hydrodynamique est régi par l'équation de Reynolds déduite des équations de Navier dans le cas d'un fluide newtonien. Pour résoudre ce problème, l'équation de Reynolds en régime transitoire est dérivée permettant le calcul des paliers avec des défauts de forme ou avec un mésalignement de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Ce mésalignement peut être constant en direction et en module, ou peut varier au cours du cycle.

Les méthodes des différences finies unidimensionnelles et bidimensionnelles sont utilisées pour la discrétisation de l'équation de Reynolds dans le but de déterminer la répartition de pression dans le film d'huile. La résolution du problème hydrodynamique en régime transitoire est réalisée à l'aide de la méthode de Mobilité de **Booker**, le système d'équations linéaires ainsi obtenu est résolu par un processus itératif grâce à l'application de l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. L'algorithme de Christopherson est utilisé pour satisfaire les conditions aux limites de Reynolds permettant de prendre en considération le phénomène de cavitation.

L'analyse montre que la prise en considération de certains paramètres notamment le mésalignement peut conduire au contact métal-métal des surfaces en mouvement relatif, entraînant ainsi des changements considérables dans les caractéristiques hydrodynamiques de fonctionnement des paliers de moteurs.

Mots clés :

- Lubrification hydrodynamique
- Régime transitoire
- Méthode de Mobilité
- Mésalignement
- Défauts de forme
- Paliers fluides