الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
وزارة التعليـــم العـــالي والبحث العلمـــي
جامعـــة 8 مـــاي 1945 * قالمـــة *
كليـــة العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم العلـــوم الاقتصاديـــــة

# مطبوعة بيداغوجية

في مقياس

# رياضيـــات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس *L.M.D* علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

إعـــــداد:

الـدكتـــــور بن جلول خالد
أستاذ محاضر –ب-

بسم الله الرحمن الرحیم

# فهرس المحتويات

مقدمة:

أقدم هذه المطبوعة إلى طلبة السنة الثانية ليسانس علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير والتي ضمنتها كل ما يتعلق بمقياس رياضيات المؤسسة وفق البرنامج الوزاري الجديد؛ حيث احتوت المطبوعة على خلاصة تجربتي في تدريس المقياس لمدة تزيد عن ستة سنوات حيث حاولت أن أقدم هذا البرنامج الذي يظهر بأنه صعب نوعا ما للطلبة بشكله الظاهري، غير أني توخيت التبسيط والتسهيل في جميع عناصر ومحاور هذه المطبوعة وهذا من أجل تزويد الطالب بكل المعارف والمعلومات المتعلقة بمجال البرمجة الخطية واتخاذ القرارات في المؤسسات وتحقيق الأمثلية.

اعتمدت في هذه المطبوعة على أسلوب التبسيط في عملية شرح محتويات البرنامج والذي ضم ثلاثة محاور أساسية؛ كان أولها المحور الخاص بالبرمجة الخطية والذي قسمته إلى أربعة محاور جزئية تناولت خلال كل واحدة منها عنصر خاص من عناصر البرمجة الخطية بشكل من التفصيل والتحليل، أما المحور الثاني فكان مخصص لمسائل النقل وطرق حلها، فحين تناول المحور الثالث والأخير البرمجة غير خطية والذي كان مخصص لعرض مدخل لعملية البرمجة غير خطية بنوعيها بقود وبدون قيود.

وخصصت عند نهاية كل عنصر من عناصر المطبوعة خلاصة عملية لخصت خلالها وبشكل مركز ودقيق مايجب على الطالب اكتسابه من هذه العناصر، بالإضافة إلى تدعيم عملية الشرح للمحاور وعناصرها بأمثلة محلولة كانت مستمدة من مشاكل واقعية وهذا بغرض ربط الطالب بالواقع العملي لما يتم دراسته بالشكل النظري.

كما أدرجت في نهاية هذه المطبوعة مجموعة من نماذج الامتحانات والمسابقات والتي تمكن الطالب من اختبار نفسه بنفسه وتحديد درجة استعداده لمواجهة أسئلة الامتحان الخاص بالمقياس، ولقد راعيت خلال هذه النماذج التنويع بحث اشتملت على كل مايتعلق بمحتويات مقياس رياضيات المؤسسة.

وفي الأخير أتمنى أن أكون بهذه المطبوعة قد قدمت مساعدة ولو بسيطة وساهمت بقسط محدود في خدمة طلاب العلم والمعرفة خاصة في مجال العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، من خلال إثراء مكتبتنا بهذا النوع من المؤلفات التي لا ندعي أنها الأولى أو الأحسن، ولن تكون الأخيرة بإذن الله.

د- خ. بن جلول

# المحور الأول

# البرمجة الخطية

# أولا: صياغة البرنامج الخطي (الاستنباط)

**1- تعريف البرمجة الخطية:** هي عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم لمساعدة المدراء في التخطيط واتخاذ القرارات بهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية " أكبر عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة" ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة وتعني عبارة البرمجة الخطية كل من:

- **البرمجة:** وسميت بالبرمجة لكونها تتكون من مجموعة من البرامج.
- **الخطية:** تفرض وجود علاقات خطية بين المتغيرات الخاصة بالبرمجة.

**2. بعض مجالات استخدام البرمجة الخطية:** تستخدم تقنية البرمجة الخطية في عملية اتخاذ القرار في العديد من المجالات منها:

أ. **تخطيط الانتاج:** عند توفر كمية محددة من الموارد الاستثمارية تبرز المشكلة هنا في البحث عن البديل الذي يحقق أكثر ربحية من ضمن مجموعة البدائل الأخرى.

ب. **تخطيط الانتاج:** عند توفر الطاقات الانتاجية والموارد المستخدمة في العملية الانتاجية والقوى العاملة وغيرها تقوم البرمجة الخطية بالبحث عن كيفية الاستخدام الأمثل لهذه الموارد لتحقيق أعلى ربح أو تقليل التكاليف أقل مايمكن.

ج. **مسائل النقل:** عندما تنتشر الوحدات الانتاجية على مناطق متباعدة أو تتوزع منافد التسويق على مناطق متباعدة يجب التفكير في كيفية ايجاد أنسب الطرق المؤدية إلى تخفيض تكلفة أو تعظيم ربح نقل المنتجات النهائية.

**3. بناء النموذج الرياضي " النموذج الخطي":** لبناء النموذج الرياضي بشكل صحيح نحتاج إلى تحديد مايلي:

I. **متغيرات القرار ($X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$):** وهي تمثل العناصر المراد تحديد كميتها.

II. **دالة الهداف (Z)** : ويقصد بها تحديد هدف المؤسسة من خلال البرنامج الخطي ويكون تعظيم الأرباح (**MAX**) أو تدنية التكاليف (**MIN**).

III. **القيود:** وهي محددات المشكلة والتي لايمكن تجاوزها عند تحقيق الهدف.

IV. **قيد عدم السالبية:** ويقصد به أن متغيرات البرمجة الخطية لاتكون ذات قيم سالبة.

**4. الشكل العام للنموذج الرياضي:** بعد تحديد مكونات البرنامج الخطي يمكن كتابته بالشكل التالي:

- **دالة الهدف:**

$$MAX/MIN\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots \ldots\ldots C_nX_n$$

- **القيود:**

$$\text{S/C} \quad \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots \ldots\ldots a_{1n}X_n(\leq = \geq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots \ldots\ldots a_{2n}X_n(\leq = \geq)b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \cdots \ldots\ldots a_{mj}X_n(\leq = \geq)b_i \end{cases}$$

- **قيد عد السالبية:**

$$X_1 \text{،} X_2 \text{،} X_3 \text{،} \ldots \ldots\ldots \text{،} X_n \geq 0$$

حيث أن: $a_{ij}$ ،$b_i$ ،$C_j$، ثوابت عددية.

ومن خلال الشكل السابق يمكن كتابة الشكل المختصر للنموذج الرياضي كمايلي:

$$MAX \big/ MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_iX_j$$

$$\text{S/C} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(\leq = \geq)b_i$$

$$X_j \geq 0$$

كما يمكن كتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي وذلك كمايلي:

$$MAX \big/ MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_iX_j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_j \end{pmatrix} (\leq = \geq) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix}$$

**مثال (1):**

ينتج أحد المصانع نوعين من الانتاج من سلعة واحدة وهما النوع العادي والنوع الممتاز ويستخدم آلتان في الانتاج، ولإنتاج وحدة واحدة من النوع العادي يجب تشغيل الألة الأولى لمدة ساعتين والثانية لمدة ساعة واحدة ولإنتاج وحدة واحدة من النوع الممتاز يجب تشغيل الآلة الأولى لمدة ساعة واحدة والثانية لمدة ساعتين، فإذا علمت أن:

- ربح الوحدة الواحدة من النوع العادي هو 2دج، بينما ربح الوحدة الواحدة من النوع الممتاز هو 3دج.
- الطاقة الانتاجية لكل آلة لاتتجاوز 8 ساعات.

**المطلوب: إيجاد النموذج الرياضي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للمصنع؟**

**الحـــــل:**

لإيجاد البرنامج الرياضي (الخطي) لهذه المسألة لابد من تحديد جميع عناصر البرنامج الخطي وهي:

**أولا: متغيرات القرار:**

نلاحظ من خلال المسالة أن المصنع يرغب في تحديد الكمية المنتجة من كل منتوج من النوع العادي والنوع الممتاز لدى فإننا سنفرض أن:

$X_1$: عدد الوحدات المنتجة من النوع العادي.

$X_2$: عدد الوحدات المنتجة من النوع الممتاز.

**ثانيا: دالة الهداف**: يسعى متخذ القرار إلى تحقيق هدف تعظيم العوائد ( الأرباح) ومنه فإن دالة الهدف تكون من الشكل MAX ويكن الربح الاجمال يساوي مجموع سعر الوحدة الواحدة في عدد الوحدات.

- سعر الوحدة الواحدة من النوع العادي 2دج.
- سعر الوحدة الواحدة من النوع الممتاز 3دج.

ومنه دالة الهدف يتكون كمايلي:

$$MAX\ Z=2X_1+3X_2$$

**ثالثا: تحديد قيود المسألة:**

قبل تحديد القيود يمكن تلخيص معطيات المسألة في الجدول التالي[1]:

| | الرمز | الألة 1 | الالة 2 | الربح للوحدة الواحدة |
|---|---|---|---|---|
| النوع العادي | $(X_1)$ | 2سا | 1سا | 2دج |
| النوع الممتاز | $(X_2)$ | 1سا | 2سا | 3دج |
| الطاقة الانتاجية | // | 8سا | 8سا | // |

➢ **الألة الأولى:**

لدينا عدد الساعات التي نحتاجها لإنتاج النوع العادي 2 ساعة والنوع الممتاز 1ساعة والطاقة الانتاجية للألة 8 ساعة أي مجموع ساعات العمل يجب أن لايتجاوز 8 ساعات ولدى فإن يجب أن يكون مجموع عدد ساعات النوع العادي في الكمية المنتجة وعدد ساعات النوع الممتاز في الكمية المنتجة لا يتجاوز الطاقة الانتاجية 8 ساعات. ويمن يمكن التعبير عن القيد رياضيا كمايلي:

$$2X_1+1X_2\leq 8$$

[1] من المهم جدا تلخيص معطيات المسألة في شكل جدول فدلك يسهل وبشكل كبير تحديد القيود.

➢ **الألة الثانية:**

لدينا عدد الساعات التي نحتاجها لإنتاج النوع العادي 1 ساعة والنوع الممتاز 2ساعة والطاقة الانتاجية للألة 8 ساعة أي مجموع ساعات العمل يجب أن لايتجاوز 8 ساعات ولدى فإن يجب أن يكون مجموع عدد ساعات النوع العادي في الكمية المنتجة وعدد ساعات النوع الممتاز في الكمية المنتجة لا يتجاوز الطاقة الانتاجية 8 ساعات. ويمن يمكن التعبير عن القيد رياضيا كمايلي:

$$1X_1+2X_2 \leq 8$$

**ثالثا: قيد عد السالبية:** أي أن الكميات المنتجة يجب أن تكون غير سالبة فالمصنع يمكن أن لاينتج وتأخد متغيرات القرار القيمة صفر ولكن لايمكن أن ينتج بقيم سالبة ويكون القيد بالشكل التالي:

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

ومنه يمكن كتابة الشكل النهائي للنموذج الرياضي الذي يعظم العائد للمصنع كمايلي:

$$MAX\ Z=2X_1+3X_2$$

$$s/c\begin{cases}2X_1+1X_2 \leq 8\\1X_1+2X_2 \leq 8\end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

**مثال (2):**

شركة تقوم بصناعة نوعين من المعدات الرياضية تفكر بصناعة نوعين من الأحذية كرة القدم وهما الأحدية الملساء والاحذية المذببة ويتوفر لدى الشركة 900 ساعة عمل في قسم القص والتفصيل ، 300 ساعة عمل في قسم التشطيب و 100 ساعة عمل في قسم التغليف والشحن.

متطلبات زمن الانتاج وتكلفة كل نوع من الاحذية مبينة في الجدول التالي:

| النوع | القص والتفصيل | التشطيب | التغليف والشحن | التكلفة للوحدة |
|---|---|---|---|---|
| أحذية ملساء | 1 | 0.5 | 0.125 | 5دج |
| أحذية مذببة | 1.5 | 0.33 | 0.25 | 8دج |

**المطلوب: بفرض أن هدف الشركة تدنية تكاليف الانتاج ماهو البرنامج الخطي المناسب لها؟**

**الحـــــــــل:**

بنفس الخطوات المتبعة في حل المثال الأول سنقوم بصياغة البرنامج الخطي لهذه المسألة:

**أولا: تحديد متغيرات القرار:**

من خلال المسألة نلاحظ أن الشركة ترغب في صناعة نوعين من أحذية كرة القدم وهما الأحذية الملساء والأحذية المذببة ومنه تكون متغيرات القرار كمايلي:

- $X_1$: عدد الوحدات المنتجة من الأحذية الملساء.
- $X_2$: عدد الوحدات المنتجة من الأحذية المذببة.

**ثانيا: دالة الهدف:** نلاحظ أن هذه المؤسسة هو تحديد الكمية المنتجة بأقل تكلفة ممكنة ومنه فإن دالة الهدف ستكون من الشكل ($MIN$) وهو تدنية التكلفة الكلية والتي تساوي مجموع تكلفة الوحدة الواحدة في عدد الوحدات المنتجة من كل نوع من الأحذية تأخذ الصيغة التالية:

$$MIN\ Z=5X_1+8X_2$$

**ثانيا: تحديد القيود:**

كما أشارنا سابقا فإنه من الاحسن تلخيص معطيات المسألة في شكل جدول كمايلي:

| النوع | القص والتفصيل | التشطيب | التغليف والشحن | التكلفة للوحدة |
|---|---|---|---|---|
| أحذية ملساء | 1 | 0.5 | 0.125 | 5دج |
| أحذية مذببة | 1.5 | 0.33 | 0.25 | 8دج |
| الطاقة الانتاجية | 900 | 300 | 100 | // |

بمأنه لدينا الطاقة الانتاجية لكل قسم في الشركة فإن سيكون هناك قيد كل قسم يتمثل هذا القيد في أن مجموع ساعات العمل لإنتاج الكمية المحددة من النوعين من الاحدية لايتجاوز كمية ساعات العمل المتوفرة في كل قسم.

1. **قسم القص والتفصيل:** يتوفر هذا القسم على 900 ساعة عمل وتحتاج كل وحدة من الأحذية الملساء 1 ساعة عمل وكل وحدة من الأحذية المذببة 1.5 ساعة ومنه يكون القيد كمايلي:

$$1X_1+1.5X_2 \leq 900$$

2. **قسم التشطيب:** يتوفر هذا القسم على 300 ساعة عمل وتحتاج كل وحدة من الأحذية الملساء 0.5 ساعة عمل وكل وحدة من الأحذية المذببة 0.33 ساعة ومنه يكون القيد كمايلي:

$$0.5X_1+0.33X_2 \leq 300$$

3. **قسم التغليف والشحن:** يتوفر هذا القسم على 100 ساعة عمل وتحتاج كل وحدة من الأحذية الملساء 0.125 ساعة عمل وكل وحدة من الأحذية المذببة 0.25 ساعة ومنه يكون القيد كمايلي:

$$0.125X_1+0.25X_2 \leq 100$$

**رابعا: قيد عدم السالبية:** ويعتبر قيد موحد في كل المسائل والذي يعبر عن أن متغيرات القرار لاتأخذ القيم السالبة

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

ومنه يمكن كتابة الشكل النهائي للنموذج الرياضي الذي يحقق هدف تدنية تكاليف الانتاج كمايلي:

$$MIN\ Z=5X_1+8X_2$$

$$s/c\begin{cases} 1X_1 + 1.5X_2 \leq 900 \\ 0.5X_1 + 0.33X_2 \leq 300 \\ 0.125X_1 + 0.25X_2 \leq 100 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

## خلاصة عملية

تعتبر البرمجة الخطية من بين الأدوات الرياضية المهمة خاصة في مجال اتخاذ القرارات الادارية إذ يمكن من خلالها التوصل إلى تحقيق الأمثلية في جميع المجالات سواء كانت استثمار أو انتاج أو نقل ......الخ، غير أن هذا مرتبط وبشكل كبير بمسألة صياغة البرنامج الخطي الذي يعبر عن المشكلة المراد معالجتها إذا أن تحديد البرنامج الخطي يعتبر أول خطوة في خطوات اتخاذ القرار باستخدام البرمجة الخطية وتتوقف مدى صحة القرار المتخذ على مدى صحة وحسن البرنامج الخطي المحدد.

ولتحديد البرنامج الخطي لابد من تحديد أربع عناصر وهي:

1. **متغيرات القرار**: ويرمز لها بالرمز $X_i$ وتعبر عن العناصر المراد تحديد كميتها.
2. **دالة الهدف**: ويرمز لها بالرمز $(Z)$، وهي عبارة عن دالة رياضية تعبر عن الهدف المراد تحقيقه من خلال هذا البرنامج وتأخذ شكلين إما تعظيم $(MAX)$ أو تدنية (تقليل)$(MIN)$ .
3. **القيود**: وهي محددات المشكلة وتمثل كل ما هو قيد على بالبرنامج الخطي.
4. **قيد عدم السالبية:** ويعني أن متغيرات البرمجة الخطية لاتأخذ القيم السالبة.

# ثانيا: طريقة الحل البياني

**1. تعريف طريقة الحل البياني:** هي عبارة عن طريقة يتم بها إيجاد قيم $Xi$ ( متغيرات البرنامج الخطي) باستخدام الرسم البياني وتستخدم في حالة كون النموذج يحتوى على متغيرين فقط.

**2. خطوات طريقة الحل البياني:** لإيجاد حل لكل برنامج خطي يحتوى على متغيرين باستخدام طريقة الحل البياني يتم اتباع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى: تحويل المترجحات إلى معادلات:** ويتم ذلك عن طريق تغيير إشارة القيد من (≥ ) أو (≤) إلى (=)، وهذا دون احداث أي تغيير آخر في القيد.
- **الخطوة الثانية: ايجاد إحداثيتين لكل قيد:** أي تحديد نقطتين لكل قيد حيث كل نقطة تحتوى على قيمة لي $X_1$ وقيمة لـ $X_2$، ولتسهيل الحساب نفرض قيمة صفر (0) لاحد المتغيرين ونحدد قيمة المتغير الآخر من خلال التعويض في معادلة القيد.
- **الخطوة الثالثة: رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:** لرسم القيود في المعلم تختار المربع الموجب وذلك تطبيقا لشرط عدم سالبية المتغيرات ويتم رسم كل القيود الموجودة في البرنامج الخطي من خلال تحديد النقطتين اللتين تم تحديدها في الخطوة السابقة والايصال بينهما بخط مستقيم.

في المرحلة الثانية يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة لكل قيد وذلك حسب شكل القيد:

- **قيد من الشكل (≥) ( أكبر من أو تساوي):** نقبل المنطقة العليا كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة السفلى.
- **قيد من الشكل (≤) (أقل من أو تساوي):** نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة العليا.
- **قيد من الشكل (=):** نرفض المنطقة العليا والمنطقة السفلى وتكون منطقة الحلول الممكنة هي فقط النقاط الموجودة على القيد[1].

تعتبر المنطقة المشتركة بين كل القيود النموذج منطقة الحلول الممكنة للنموذج.

**تعريف منطقة الحلول الممكنة: هي المنطقة التي تضم مجموع من النقاط حيث أن هذه النقاط تحقق كل قيود النموذج وتعطي قيمة لدالة الهدف.**

- **الخطوة الرابعة: أيجاد الحل الأمثل:** الحل الأمثل هو أحد رؤوس[1] منطقة الحلول الممكنة لذلك نقوم بحساب قيم $X_1$ و $X_2$ عند كل رأس وحساب قيمة دالة الهدف ويتم تحديد الحل الأمثل حسب شكل دالة الهدف:

[1] يقصد بالمنطقة السفلى والعليا بالنسبة للقيد حيث ان القيد يقسم المعلم إلى منطقتين احدهما فوق القيد والثانية تحت القيد.

- **دالة الهدف من الشكل** *MAX*: الحل الأمثل هو قيم $X_1$ و $X_2$ التي تعطي أكبر قيمة لـ $Z$.
- **دالة الهدف من الشكل** *MIN*: الحل الأمثل هو قيم $X_1$ و $X_2$ التي تعطي أقل قيمة لـ $Z$.

وهنا نميز بين نوعين من الحلول وهما الحلول الممكنة والحلول المثلى فأما الحلول الممكنة فهي جميع النقاط التي تقع في منطقة الحلول المكنة التي تحقق القيود وتعطي قيمة لدالة الهدف، أما الحلول المثلى فهي الحلول التي تحقق شكل دالة الهدف فإن كانت من الشكل *MAX* كان الحل الامثل الذي يعطي أكبر قيمة لدالة الهدف أما إن كانت دالة الهدف من الشكل *MIN* فإن الحل الأمثل الذي عطي أقل قيمة لدالة الهدف.

**مثال (3):** ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$\mathbf{X_1}$: عدد الوحدات المنتجة من النوع العادي.

$\mathbf{X_2}$: عدد الوحدات المنتجة من النوع الممتاز.

$$MAX\ Z=2X_1+3X_2 \text{ x2}$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases}2X_1 + 1X_2 \ \leq\ 8\\ 1X_1 + 2X_2 \ \leq\ 8\end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

أوجد قيم $\mathbf{X_1}$ و $\mathbf{X_2}$ باستخدام طريقة الحل البياني:

**الحـــــــل:**

**أولا: تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات:** وذلك من خلال تغير إشارة القيد إلى شكل (=).

أ. **بالنسبة للقيد الأول:** $2X_1 + 1X_2 \ \leq\ 8$ نحذف إشارة القيد والتي من الشكل (≤) ونستبدلها بإشارة (=) فيصبح القيد من الشكل $2X_1 + 1X_2 \ =\ 8$

ب. **بالنسبة للقيد الثاني:** $1X_1 + 2X_2 \ \leq\ 8$ نقوم بنفس العملية الاولى ونستبدل إشارة (≤) بإشارة (=) فيصبح القيد من الشكل $1X_1 + 2X_2 \ =\ 8$.

نلاحظ أنه لم يتم تغيير أي قيمة أو اضافة أي شيء على القيود ماعدا تغير شكل إشارة ومنه يصبح النموذج بالشكل التالي:

$$MAX\ Z=2X_1+3X_2$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases}2X_1 + 1X_2 \ =\ 8\\ 1X_1 + 2X_2 \ =\ 8\end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

[1] رؤوس منطقة الحلول الممكنة: يقصد بها نقاط تقاطع القيود والمحددة لمنطقة الحلول الممكنة.

**ثانيا: ايجاد احداثيتين لكل قيد:**

كما ذكرنا سابقا فإن الاحداثية تتكون من قيمة لـ $X_1$ وقيمة لـ $X_2$ ولتسهيل الحساب نفرض أن قيم $X_1$ صفر وبالتعويض نتحصل على $X_2$ ، وللحصول على الاحداثية الثانية نفرض قيمة صفر لـ $X_2$ وبالتعويض نتحصل على قيمة $X_1$ .

أ. **بالنسبة للقيد الأول:** $2X_1 + 1X_2 \leq 8$

نفرض أن قيمة $X_1$ تساوي (0) أي أن المصنع لا ينتج أي كمية من السلعة العادية فيكون قيمة السلعة الممتازة $2(0) + 1X_2 = 8 \Rightarrow X_2 = 8$.

ثم نفرض أن قيمة $X_2$ تساوي (0) فنتحصل على قيمة $X_1$ من خلال التعويض في معادلة القيد الأول:

$$2X_1 + 1(0) = 8 \Rightarrow 2X_1 = 8 \Rightarrow X_1 = 8/2 \Rightarrow X_1 = 4$$

ومنه تكون لدينا الاحداثيتين أ، ب كمايلي: (0،8) أ / (4،0) ب.

ب. **بالنسبة للقيد الثاني:** $1X_1 + 2X_2 = 8$

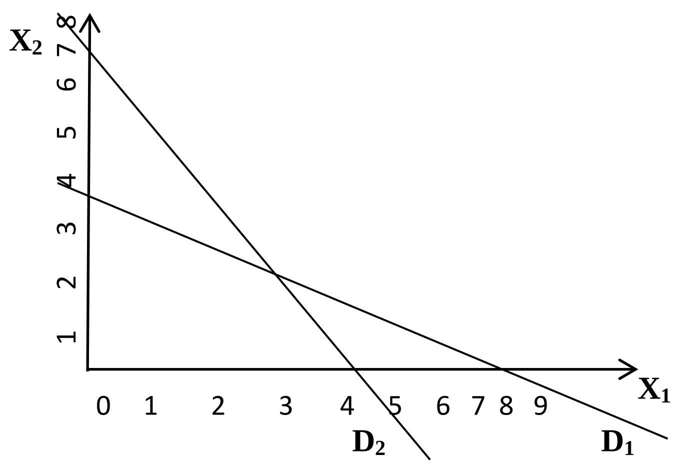
بنفس الطريقة السابقة نتحصل كذلك على احداثيتين لهذا القيد هما: (0،4) ج، (8،0)د.

**ثالثا: رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة:**

من خلال تحديد الاحداثيات المحددة في المرحلة السابقة في المعلم والربط بينها نتحصل على الرسم البياني للقيود كما في الشكل:

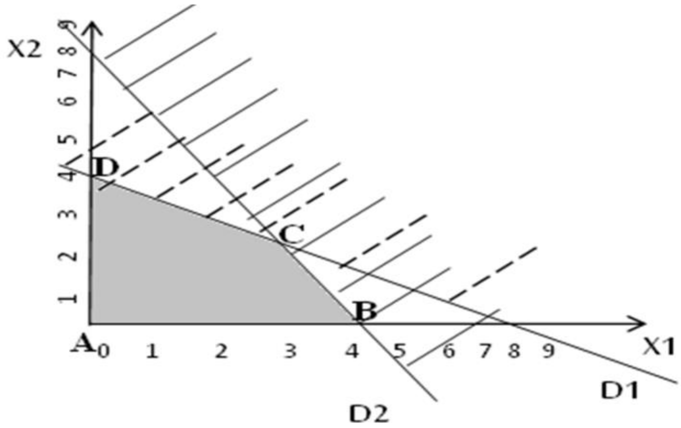
نرمز إلى: القيد الأول بالرمز $D_1$

والقيد الثاني بالرمز $D_2$.




في المرحلة الثانية يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة للنموذج وذلك من خلال تحديد منطقة الحلول الممكنة لكل قيد على حدى، ونلاحظ أن القيد الأول ($D_1$) من الشكل أقل من أو تساوي (≥) ومنه فإنه نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة العليا بالنسبة للقيد، أما بالنسبة للقيد الثاني ($D_2$) فهو كذلك من الشكل أقل من أو تساوي(≥) فكذلك نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة العليا.

ومنه تبقى المنطقة المضللة والمحددة بالرؤوس A ,B,C ,D[1] هي منطقة الحلول الممكنة بالنسبة للنموذج كما يوضح الشكل:




**رابعا: ايجاد الحل الأمثل:** كقاعدة فإن الحل الأمثل يكون موجود في احدى رؤوس منطقة الحلول الممكنة لدى فسوف نهتم فقط بحساب قيم $X_1$ و $X_2$ و قيمة Z عند كل رأس ويكون الحل الأمثل هو الرأس الذي يعطى أكبر قيمة لدالة الهدف وذلك لأن دالة اهدف من الشكل MAX.

- **عند الرأس** A: من خلال المنحنى يمكن استخراج قيم الرأس Aحيث $X_1=0$، $X_2=0$ ومنه يمكن حساب قيمة دالة الهدف والتحقق من مدى ملائمة القيم للقيود من خلال تعويض بقيم$X_1$ و$X_2$ :

**دالة الهدف** $Z (0.0) =2*0 +3*0 =0$

**القيود** $2*0+ 1*0=0 \leq 8$

$1*0 +2* 0 = 0\leq 8$

في هذا الرأس نلاحظ أنه يتم انتاج صفر وحدة من النوع الممتاز و صفر وحدة من النوع العادي وأن المصنع يحقق ربح قدره ( 0ون) كما نلاحظ أن الحل منسجم مع القيود.

- **عند الرأس** B: من خلال المنحنى يمكن استخراج مباشرة قيم احداثيات النقطة B حيث نلاحظ ان $(X_1= 4)$ وأن $(X_2= 0)$.

نقوم بحساب قيمة الأرباح عند هذه النقطة ومدى توافق هذه النقطة مع القيود:

دالة الهدف $Z(4, 0) = 2*(4) + 3*(0) = 8$

القيود: $2*(4) +1*(0) = 8\leq 8$

$1*(4) +2*(0) = 4\leq 8$

عند هذه النقطة يتم انتاج (4) وحدات من النوع العادي و (0) وحدة من النوع الممتاز وبتالي يحقق المصنع ربح قدره (8ون) وهذا الحل أفضل من الحل المتحصل عليه في النقطة A كما أن الحل يتوافق مع القيود وشرط عدم السالبية.

[1] كل تقاطع للقيود بين بعضها أو القيود مع محاور المعلم ويكون هذا التقاطع في حدود منطقة الحلول الممكنة يعتبر رأي بالنسبة لها

**عند الرأس C:** بالنسبة للنقطة **C** فهي ناتجة عن تقاطع القيد الأول **($D_1$)** مع القيد الثاني **($D_2$)** وبتالي فإن الحصول على قيم $X_1$ و $X_2$ يستوجب حل جملة المعادلات:

$$2X_1 + 1X_2 = 8 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$1X_1 + 2X_2 = 8 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

باستخدام طريقة الجمع والتعويض نتحصل على حل جملة المعادلات:

- نضرب المعادلة (2) في القيمة 2 نتحصل على المعادلة (3):

$$2X_1 + 4X_2 = 16 \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

- نطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نجد:

$$\textbf{(1)-(3)=>}\ 3X_2 = 8 => \boldsymbol{X_2 = 8/3}$$

- وبالتعويض عن قيمة $X_2$ في المعادلة (2) نتحصل على قيمة $X_1$ كمايلي:

$$1X_1 + 2X_2 = 8 => 1X_1 + 2\left(\frac{8}{3}\right) = 8 => X_1 = 8 - \frac{16}{3} => \boldsymbol{X_1 = 8/3}$$

ومنه فإن عند الرأس **C** يكون لدينا **$X_1$=8/3** ولدينا **$X_2$=8/3**

حساب قيمة دالة الهدف والتأكد من تحقيق هذا الرأس للقيود:

**دالة الهداف** **Z(8/3, 8/3) = 2*(8/3) + 3*(8/3) = 40/3 =13.33**

**القيود:** **2*(8/3) +1*(8/3) = 24/3= 8≤ 8**

**1*(8/3) +2*(8/3) = 24/3= 8≤ 8**

نلاحظ أنه عند الرأس **C** ارتفعت قيمة الأرباح إلى **13.33**ون وتحدد الانتاج من النوع الممتاز بـ **3/8** وحدة ومن النوع العادي بـ **3/8** وحدة وأن الحل منسجم مع القيود وشروط عدم السالبية.

**عند الرأس D:** من خلال المنحنى يمكن استخراج مباشرة قيم احداثيات النقطة **D** حيث نلاحظ أن **($X_1$= 0)** وأن **($X_2$= 4)**.

نقوم بحساب قيمة الأرباح عند هذه النقطة ومدى توافق هذه النقطة مع القيود:

**دالة الهدف** **Z(0, 4) = 2*(0) + 3*(4) = 12**

**القيود:** **2*(0) +1*(4) = 4≤ 8**

**1*(0) +2*(4) = 8≤ 8**

عند هذه النقطة يتم انتاج (0) وحدة من النوع العادي و (4) وحدة من النوع الممتاز وبتالي يحقق المصنع ربح قدره (12ون) وأن الحل يتوافق مع القيود وشرط عدم السالبية.

جدول يلخص نتائج الحل:

| الرأس | $X_1$ | $X_2$ | Z |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 4 | 0 | 8 |
| C | 8/3 | 8/3 | 13.33 |
| D | 0 | 4 | 12 |

إذن من خلال هذه النقاط نلاحظ أن هناك أربع حلول ممكنة ولابد من تحديد الحل الأمثل والذي يتحدد بناءا على شكل دالة الهدف والتي هي من الشكل MAX أي يجب تحديد الحل الذي يمنح أكبر قيمة لدالة الهدف.

وبالعودة إلى قيمة دالة الهدف المحسوبة عند كل رأس نجد أن أكبر قيمة لها كانت عند الرأس C وهي قيمة (13.33ون) وبتالي فإن الحل الأمل يتمثل في انتاج (3/8) وحدة من النوع العادي و (3/8) وحدة من النوع الممتاز وبتالي تحقيق ربح قدره (13.33ون).

ويمكن كتابة الحل الأمثل بالطريقة التالية:

$$\boldsymbol{Z^* = 13.33, \quad X_1^* = \frac{8}{3}, \quad X_2^* = \frac{8}{3}}$$

**ملاحظة:** بالنسبة لطريقة الحل البياني عندما تكون دالة الهدف من الشكل MIN لاتختلف عنها في حالة دالة الهدف من الشكل MAX ماعدا في استخراج الحل الأمثل والذي يكون عند الرأس الذي يعطي أقل قيمة لدالة الهدف.

**مثال (3): مقترح للحل:**

$$MIN\ Z=80X_1+60X_2$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases} 18X_1 + 12X_2 \geq 180 \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 162 \\ 5X_1 + 10X_2 \geq 110 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: $\boldsymbol{Z^* = 860, \quad X_1^* = 4, \quad X_2^* = 9}$

**3. حالات خاصة في الحل البياني:** تعتبر الخطوات السابقة لطريقة الحل البياني هي الحالة العادية إلا أنه هناك بعض والحالات التي نقع فيها وتكون مخالفة لما تم التطرق له في السابق وتتمثل هذه الحالات فيما يلي:

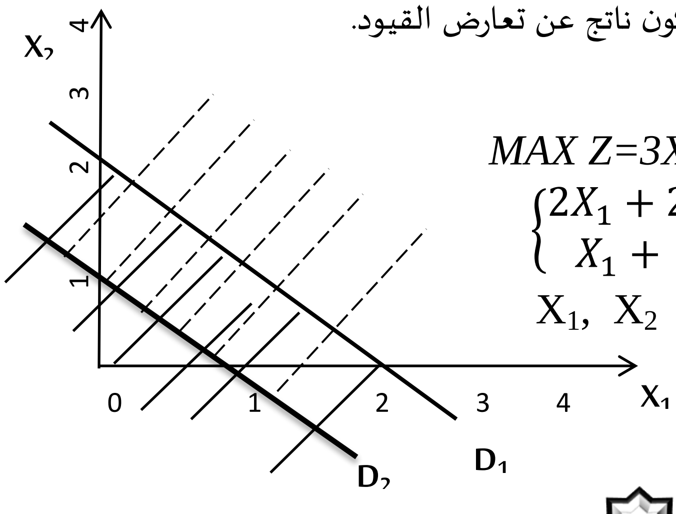
**الحالة الأولى- حالة عدم وجود حلول**: حيث في هذه الحالة لا نستطيع تحديد منطقة الحلول الممكنة وبتالي عدم الحصول على الحل الأمثل وهذا قد يكون ناتج عن تعارض القيود.

**مثـــــال:**

$$MAX\ Z=3X_1+2X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \geq 4 \\ X_1 + X_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



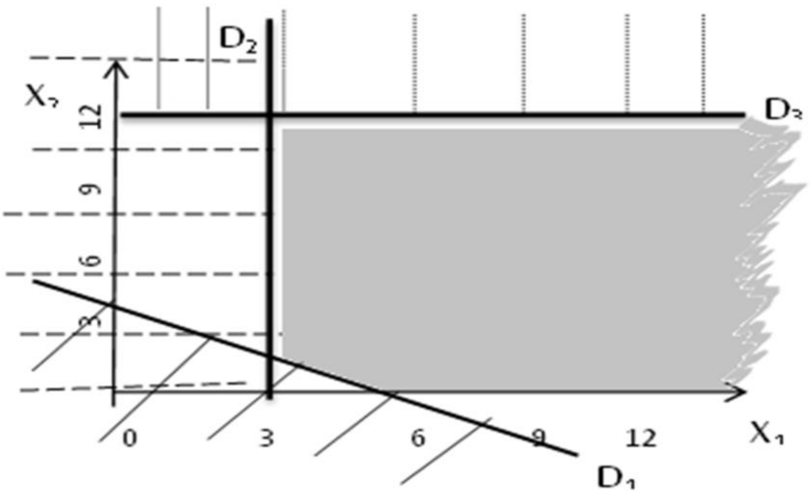
**الحالة الثانية- عدم توفر حدود لمنطقة الحل ( دالة هدف لانهائية):** في هذه الحالة سكون التغير في قيمة أحد المتغيرات أو أكثر تؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف دون مخالفة أي قيد من القيود حيث تكون منطقة الحلول مفتوحة وبدون نهاية وسبب قد يكون اهمال أحد القيود[1].

**مثال:**

$$MAX\ Z=8X_1+3X_2$$

$$s/c\begin{cases} X_1+2X_2 \geq 6 \\ X_1 \geq 3 \\ X_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$



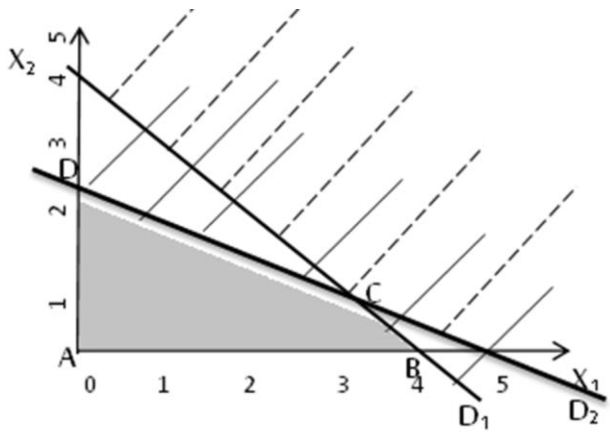

**الحالة الثالثة- الحلول البديلة (توفر أكثر من حل)**[2]: في هذه الحالة نجد أن الحل البياني يقدم أكثر من حل واحد للمشكلة وهنا يقدم لمتخذ القرار مرونة في التعامل مع متغيرات المشكلة، ويكون سبب هذه الحالة عندما توزاي دالة الهدف احد القيود.

**مثال:**

$$MAX\ Z= 2X_1+2X_2$$

$$\begin{cases} X_1+X_2 \leq 4 \\ X_1+2X_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$




بحل هذا البرنامج والحصول على احداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة نجد أنه لدينا حليين أمثليين وهما:

- الحل الأمثل أول عند الرأس B: $Z^*=8,\quad X_1^*=4\,,\quad X_2^*=0$
- الحل الأمثل الثاني عند الرأس C: $Z^*=8,\quad X_1^*=3\,,\quad X_2^*=1$

---

[1] بالنسبة لإيجاد الحل الأمثل في هذه الحالة يعتمد على شكل دالة الهدف فإذا كنت من الشكل MAX فلا يوجد لها حل أمثل اما إذا كانت من الشكل MINفيمكن تحديد حل أمثل لها.

[2] اكثر من حل يعني اختلاف قيم متغيرات القرار ولكن نفس القيمة لدالة الهدف.

ومنه نلاحظ أنه هناك اختلاف لقيم متغيرات القرار إلا أنه هناك نفس القيمة لدالة الهدف

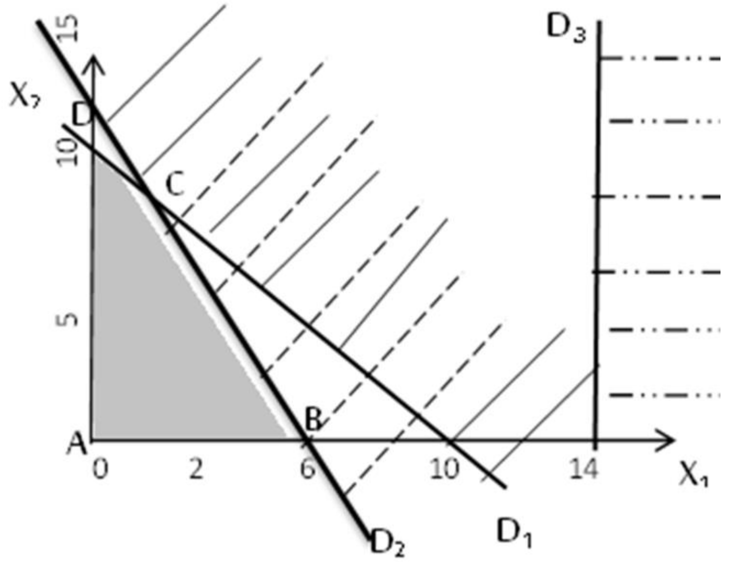
**الحالة الرابعة- وجود قيد فائض ليس له تأثير على الحل:** وتكون هذه الحالة عندما تتحدد منطقة الحلول الممكنة ويكون أحد القيود ليس له تأثير على تحديدها حيث يكون بعيدا عنها ويمكن الاستغناء عنه دون أي تأثير على حدود منطقة الحلول الممكنة وعلى قيمة الحل الأمثل.

**مثال:**

$$MAX\ Z=9X_1+2X_2$$

$$s/c\begin{cases} X_1+X_2\le 10 \\ 2X_1+X_2\le 12 \\ X_1\le 14 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2\ \ge\ 0$$




من خلال الشكل نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة محددة فقط بالقيد الأول ($D_1$) والقيد الثاني ($D_2$) وأن القيد الثالث ($D_3$) بعيد عندها حيث أن لو حذفناه سوف نتحصل على نفس منطقة الحلول الممكنة وبتالي فالقيد الثالث يعتبر قيد فائض ويمكن الاستغناء عنه.

**خلاصة عملية**

يعتبر الحل البياني من بين طرق حل برنامج البرمجة الخطية كما يعد حالة خاصة فقط حيث يستخدم فقط في حالة كون البرنامج الخطي يحتوى على متغيرين فقط وذلك باستخدام الرسم البياني.

ولحل البرنامج الخطي باستخدام طريقة الحل البياني نتبع الخطوات التالية:

1- **الخطوة الأولى: تحويل المتراجحات إلى معادلات.**

2- **خطوة الثانية: إيجاد احداثيتين لكل قيد.**

3- **خطوة الثالثة: رسم القيود في المعلم وتحديد منطقة الحلول الممكنة.**

4- **الخطوة الرابعة: أيجاد الحل الأمثل.**

غير أن هناك بعض النماذج برغم من تطبيق هذه الخطوات الأربعة لا نتمكن من الحصول على الحل الأمثل أو نحصل على مجموعة من الحلول وليس حلا واحدا وهذه تعتبر حالات خاصة للحل البياني لابد من معرفتها.

# ثالثا: عرض الحل بطريقة السمبلاكس

إن بساطة الطريقة البيانية في ايجاد حلول للبرمجة الخطية ومحدوديتها خاصة في حالة النماذج التي تحتوى على اكثر من متغيرين أدى إلى ايجاد طريقة أخرى ذات فعالية في حلة المشاكل متعددة المتغيرات وتتمثل هذه الطريقة في خوارزمية السمبلاكس ( الطريقة المبسطة) التي حددها دانتزينغ ***DANTSIG*** سنة **1947**.

**1. ألية العمل بطريقة السمبلاكس:** تختلف طريقة الحل باستخدام منهجية السمبلاكس وهذا حسب شكل دالة الهدف.

**أولا: في حالة دالة الهدف من الشكل MAX:** للوصول إلى الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية.

❖ **الخطوة الأولى: تحويل المترجحات إلى معادلات ( كتابة الشكل القياسي) ( الشكل القانوني):**

إن تحويل المعادلات إلى متراجحات في طريقة السمبلاكس لا تتم بنفس الطريقة التي كانت عليها في طريقة الحل البياني حيث في هذه الحالة يتم اجراء بعض التعديلات على القيود من خلال اضافة متغيرات جديدة ونميز في هذه الحالة بين ثلاث أنواع من القيود:

➢ **قيد من الشكل أقل من أو تساوي (≤):** نضيف إلى الطرف الأقل متغير جديدة يسمى "**متغير الفجوة**" ويرمز له بالرمز **(S)** ويعبر عن مدى النقص الذي يعانيه أحد أطرف القيد ويضاف هذه المتغير في دالة الهدف بمعامل صفر.

➢ **قيد من الشكل أكبر من أو تساوي (≥):** نضيف متغير فجوة **(S)** إلى الطرف الأقل كما نضيف كذلك متغير أخر نسميه "**المتغير الاصطناعي**" في الجهة اليسرى للقيد نرمز له بالرمز **(A)** وهو عبارة عن متغير وهمي تم وضعه لتسهل حل النموذج وليس لوجده أي معنى لذلك من الأفضل أن لا يظهر في الحل النهائي المتضمن للحل الأمثل.

ويضاف المتغير الاصطناعي في دالة الهدف بمعامل كبير جدا نرمز له بالرمز (M) مع إشارة سالبة.

أما بالنسبة للمتغيرات الفجوة التي تم اضافتها في الطرف الايمن للقيد نعيدها للطرف الايسر مع تغيير الإشارة إلى إشارة سالبة.

➢ **قيد من الشكل تساوي (=):** في هذه الحالة نضيف متغير اصطناعي فقط[1].

❖ **خطوة الثانية: إيجاد الحل الأولي (أول حل أساس ممكن):**

لإيجاد الحل الأولي نقوم بفرض أن **(n-r)** متغير تساوي الصفر حيث أن **n** عدد المتغيرات و **r** عدد القيود، ثم نقوم بتعويض في القيود ونتحصل على قيم باقي المتغيرات ثم نقوم بحساب قيمة دالة الهدف

[1] بالنسبة لإضافة المتغيرات الفجوة والاصطناعية يتم اضافتها كل مرة برقم جديد مثل ($S_1, S_2$ ,.........)، ($A_1, A_2$,........).

من خلال التعويض في دالة الهدف. ويتم اختيار المتغيرات الأساسية لتكون قيمها تساوي الصفر وهنا نميز بين نوعين من المتغيرات:

- **المتغيرات الأساسية:** هي متغيرات النموذج الأصلي وتأخذ دائما القيمة صفر في الحل الأولي.
- **متغيرات الأساس:** هي المتغيرات التي تم اضافتها للحصول على النموذج القياسي وتأخذ قيم في الحل الأولى إلا في بعض الحالات تأخذ القيمة صفر.

❖ **الخطوة الثالثة: كتابة الحل الأولى في جدول السمبلاكس:** وتتمثل هذه الخطوة في ملاء جدول السمبلاكس والذي يكون بالشكل التالي:

| $C_j$ | | | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | ..........................$C_n$ | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | ................................$X_n$. | |
| . | $S_1$ | $B_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | ..........................$a_{1n}$ | . |
| . | $S_2$ | $B_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | ........................$a_{2n}$ | . |
| . | . | $B_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | ........................$a_{3n}$ | . |
| | Zi | Z | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | ........................$Z_n$ | . |
| $C_j$-$Z_i$ | | | $C_1$-$Z_1$ | $C_2$-$Z_2$ | $C_3$-$Z_3$ | $C_4$-$Z_4$ | .................$C_n$-$Z_n$. | / |

حيث:

**$C_j$**: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

**$A_{ij}$**: معاملات المتغيرات في القيود.

**$B_i$**: الطرف الايمن للقيود ( الموارد).

**VB**: متغيرات الأساس ( تكتب في جدول السمبلاكس حسب ترتيبها في القيود).

**$Z_i$**: قيمة دالة الهدف.

عند ملاء جدول السمبلاكس يراعى مايلي:

- في الصف الثاني تكتب جميع المتغيرات الموجودة في النموذج القياسي وذلك حسب الترتيب التالي: المتغيرات الأساسية ثم متغيرات الفجوة ثم متغيرات الأساس ويكتب فوق كل متغير معامله في دالة الهدف.
- في عمود متغيرات الأساس تكتب جميع متغيرات الأساس وهي المتغيرات التي لم نفرض أن قيمتها تساوي الصفر وتدرج حسب ترتيبها في القيود.
- بالنسبة لقيمة **$Z_1$**، **$Z_2$**،**........$Z_n$** تحسب من خلال مجموع ضرب قيم $C_j$ في العمود الأول بقيم **$a_{ij}$** المقابلة لها في كل عمود.

❖ **الخطوة الرابعة: تحسين الحل**: في هذه المرحلة يتم تحسين الحل الأولى حتى الحصول على الحل الأمثل، ولتحسين الحل يتم اتباع المراحل التالية:

✓ **مرحلة الأولى: تحديد المتغيرة الداخلة إلى الأساس:** وهي المتغيرة التي لها أكبر قيمة موجبة في صف $(C_J-Z_i)$ وفي حالة تساوي قيمتين يتم اختيار المتغيرة الداخلة بطريقة عشوائية.

✓ **مرحلة الثانية: تحديد المتغيرة الخارجة من الأساس:** إن إدخال متغيرة إلى الأساس يتطلب إخراج متغيرة ويتم تحديد المتغيرة الخارجة كمايلي:

أ- تقسيم عناصر عمود $(B_i)$ على العناصر المقابلة لها في عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس مع استثناء القيم السالبية والصفرية.

ب- نقارن بين النتائج وتكون المتغيرة الخارجة من الأساس التي لها أقل حاصل قسمة $MIN\ (b_i/a_{ij})$.

✓ **المرحلة الثالثة: تحديد العنصر المحوري pivot** : وهو العنصر الذي تتقاطع عنده عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس مع صف المتغيرة الخارجة من الأساس.

✓ **المرحلة الرابعة: الانتقال إلى جدول جديد:** ويتم ذلك من خلال المراحل التالية:

أ- استبدال المتغيرة الخارجة من الأساس بالمتغيرة الداخلة إلى الأساس.

ب- تقسيم جميع قيم سطر العنصر المحوري على العنصر المحوري.

ج- نستبدل عناصر عمود العنصر المحوري بالصفر ماعدا العنصر المحوري.

د- باقي العناصر تحسب بالعلاقة التالية:

**العنصر الجديد= العنصر القديم- [(العنصر المقابل[1] في الصفx العنصر المقابل في العمود)/ العنصر المحوري]**

هـ- حساب قيم صف $Z_i$ وصف $(C_j-Z_i)$.

❖ **الخطوة الخامسة: الحصول على الحل الأمثل:** نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من الشكل MAX عندما تكون جميع قيم صف $(C_j-Z_i)$ سالبة أو معدومة.

**ملاحظة:** في حالة كون قيمة واحدة على الأقل في صف $(C_j-Z_i)$ موجبة نعيد خطوة تحسين الحل من جديد أي أن هناك إمكانية لزيادة قيمة دالة الهدف.

**مثال:**

ليكون لدينا النموذج الخطي التالي:

**$X_1$:** عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

**$X_2$**: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات.

[1] **العنصر المقابل**: حيث أن العنصر القديم والعنصر المقابل في الصف والعنصر المقابل في العمود والعنصر محوري يشكلون مربع او مستطيل.

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2\geq 54\\6X_1+3X_2\geq 48\\9X_1+9X_2\geq 90\end{cases}$$

$$X_1,\ X_2\geq 0$$

باستخدام طريقة السمبلاكس أوجد الحل الأمثل لهذا النموذج الخطي:

**الحـــــل:**

نلاحظ أن دالة الهدف من شكل MAX إذن سنقوم بتطبيق الخطوات السابقة الذكر للحصول على الحل الأمثل:

**خطوة الأولى: تحويل المترجحات إلى معادلات ( الشكل القياسي):**

بمأن جميع القيود من الشكل أقل من أو تساوي إذن سيتم اضافة متغير فجوة لكل قيد من القيود مع إضافة هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل صفر لأنها تعبر عن مقدار مهدور وضائع من الموارد وبتالي فإن الربح منه يكون يساوي الصفر ومنه يكون الشكل القياسي للنموذج كمايلي:

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2+S_1=54\\6X_1+3X_2+S_2=48\\9X_1+9X_2+S_3=90\end{cases}$$

$$X_1,\ X_2\geq 0$$

إذن نلاحظ أنه تم إضافة ثلاثة متغيرات فجوة كل متغير له رقمه الخاص ولو كان هناك قيد رابع لتم اضافة متغيرة فجوة برقم 4.

**الخطوة الثانية: إيجاد الحل الأولي:** لإيجاد الحل الأولي نقوم بفرض أن (n-r) متغيرة تساوي الصفر ومنه لدينا:

- n (عدد المتغيرات) ويضم النموذج القياسي متغيرين أساسيين وثلاث متغيرات فجوة ومنه مجموع المتغيرات خمسة متغيرات أي أن (n=5).
- أما r فهي عدد القيود في النموذج ويضم النموذج ثلاث قيود ومنه (r=3).

$$N=5.\ R=3 \Rightarrow n-r=5-3=2$$

ناتج الطرح يساوي 2 هذا يعني أن هناك متغيرين سوف نفرض أن قيمتها تساوي الصفر وكما قلنا سابقا فإننا نبدأ بالمتغيرات الأساسية $(X_i)$، ومنه نفرض أن $X_1$ تساوي الصفر و $X_2$ تساوي الصفر وبتعويض في القيود نتحصل على قيم باقي المتغيرات كمايلي.

$X1=0/\quad X2=0$

- تعويض بقيمة ($X_1=0$ / $X_2=0$) في القيد الأول: 3*(0) + 6*(0) +S1= 54 => S1= 54
- تعويض بقيمة ($X_1=0$ / $X_2=0$) في القيد الثاني: 6*(0) + 3*(0) +S2= 48 => S2= 48
- تعويض بقيمة ($X_1=0$ / $X_2=0$) في القيد الثالث: 9 *(0) + 9*(0) +S3= 90 => S3= 90

وبالتعويض في دالة الهدف بقيم المتغيرات نتحصل على قيمة Z حيث:

$$Z= 15*(0) +12*(0) +0*(54) + 0*(48) + 0*(90) = 0$$

ومنه يمكن كتابة الحل الأولي بالشكل التالي:

$$X_1=0 ,\ X_2= 0 ,\ S_1=54 ,\ S_2=48 ,\ S_3=90 ,\ Z=0$$

**الخطوة الثالثة: كتابة الحل الأولي في جدول السمبلاكس:**

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0 | S1 | 54 | 3 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | S2 | 48 | 6 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | S3 | 90 | 9 | 9 | 0 | 0 | 1 |
| $Z_i$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 |

**الخطوة الرابعة: تحسين الحل**

إن الحل الأولى ماهو إلا حل يتم الانطلاق منه للحصول على الحل الأمثل ولتحسين الحل يتم تحديد العناصر التالية:

**أ- المتغيرة الداخلة إلى الأساس:** تختار المتغيرة التي تقابلها أكبر قيمة موجبة في صف $C_j$-$Z_i$ حيث:

$$MAX\ (15,12)=15$$

ومنه أكبر قيمة هي 15 وهي تقابل المتغيرة X1 ومنه فإن X1 هي المتغيرة الداخلة إلى الأساس.

**ب- المتغيرة الخارجة من الأساس:** لإخراج متغيرة من الأساس يتطلب اخراج متغيرة من الأساس والمتغيرة الخارجة هي المتغيرة التي تقابلها أق قيمة لحاصل قسمة عمود $b_i$ على قيم عمود متغيرة الداخلة إلى الأساس حيث:

$$MIN\ (54/3, 48/6, 90/9)= MIN(18, 8, 10) =8$$

ومنه أقل حاصل قسمة هو 8 وهي تقابل المتغيرة $S_2$ ومنه المتغيرة $S_2$ هي المتغيرة الخارجة من الأساس.

**ج. تحديد العنصر المحوري:** العنصر المحوري هو العنصر الذي تتقاطع عنده صف المتغيرة الخارجة من الأساس وعمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس ومنه يكون القيمة (6).

## توضيح العناصر السابقة في جدول السمبلاكس

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_J$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | S1 | 54 | 3 | 6 | 1 | 0 | 0 | 54/3 |
| 0 | S2 | 48 | 6 | 3 | 0 | 1 | 0 | 48/6 |
| 0 | S3 | 90 | 9 | 9 | 0 | 0 | 1 | 90/9 |
| $Z_i$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Cj-Zi | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | |

المتغيرة الخارجة من الأساس صاحبة أقل قيمة $(B_i/a_{ij})$

صف العنصر المحوري

هذا العمود مخصص لحساب نواتج قيمة$(B_i/a_{ij})$

عمود العنصر المحوري

المتغيرة الداخلة إلى الأساس صاحبة أكبر قيمة $(C_j-Z_i)$ موجبة

العنصر المحوري الناتج عن تقاطع صف المتغيرة الخارجة من الأساس وعمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس

**د. الانتقال إلى جدول جديد:** نعتبر جدول السمبلاكس السابق جدول قيم ونحاول أن ننتقل إلى جدول جديد وأول مرحلة في الانتقال إلى الجدول الجديد هو استبدال المتغيرة الخارجة من الأساس بالمتغيرة الداخلة إلى الأساس حيث أنه خرجت من الأساس $(S_1)$ ودخلت إلى الأساس $(X_1)$ ومنه يتم كتابة $(X_1)$ مكان $(S_1)$ في عمود متغيرات الأساس (VB) أما باقي المتغيرات فتبقى على حالها وذلك كما يوضحه الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | $S_1$ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| 15 | $X_1$ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| 0 | $S_3$ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| $Z_i$ | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| Cj-Zi | | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |

في المرحلة الثانية يتم قسم جميع قيم صف العنصر المحورية ابتداء من قيمة $(B_i)$ إلى غاية آخر متغير في الجدول على العنصر المحور والذي يساوي (6) حيث يضم الصف القيم التالية (6-3-0-1-0). بالإضافة إلى استبدال قيم عمود العنصر المحوري بالصفر ماعدا العنصر المحوري ومنه نتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | $S_1$ | ؟ | 0 | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| 15 | $X_1$ | 48/6 | 6/6 | 3/6 | 0/6 | 1/6 | 0/6 | ؟ |
| 0 | $S_3$ | ؟ | 0 | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| $Z_i$ | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| $C_j-Z_i$ | | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |

في المرحلة الثالثة يتم حساب باقي العناصر الجدول وذلك بتطبيق القاعدة التالية:

**العنصر الجديد= العنصر القديم- [(العنصر المقابل في الصفx العنصر المقابل في العمود)/ العنصر المحوري]**

| أولا حساب عناصر الصف الأول: | رقم العنصر | ثانيا: حساب عناصر الصف الثالث |
|---|---|---|
| 45 – [ (3 * 48 ) / 6] = 30 | **العنصر الأول** | 90 – [ (9 * 48 ) / 6] = 18 |
| 6 – [ (3 * 3 ) / 6] =  9/2 | **العنصر ثالث** | 9 – [ (9 * 3 ) / 6] = 9/2 |
| 1 – [ (3 * 0 ) / 6] = 1 | **العنصر الرابع** | 0 – [ (9 * 0 ) / 6] =0 |
| 0 – [ (3 * 1 ) / 6] = -1/2 | **العنصر الخامس** | 0 – [ (9 * 1 ) / 6] = -3/2 |
| 0 – [ (3 * 0 ) / 6] = 0 | **العنصر السادس** | 1 – [ (9 * 0 ) / 6] =  1 |

ومنه يكون جدول السمبلاكس بالشكل التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | S1 | 30 | 0 | 9/2 | 1 | -1/2 | 0 | ؟ |
| 15 | X1 | 48/6 | 6/6 | 3/6 | 0/6 | 1/6 | 0/6 | ؟ |
| 0 | S3 | 18 | 0 | 9/2 | 0 | -3/2 | 1 | ؟ |
| $Z_i$ | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| $C_j-Z_i$ | | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |

في المرحلة الرابعة يتم حساب قيم $Z_i$ وذلك من خلال جمع حاصل ضرب قيم عمود $C_j$ في قيم كل عمود مقابل لها:

سنأخذ مثال لحساب قيم $Z_1$

$$Z_1= 0* (30) + 15*(48/6) + 0*(18)= 90$$

وبعد حساب جميع قيم $Zi$ يتم ادراجها في الجدول كل في خانتها كما يوضحها جدول السمبلاكس التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | S1 | 30 | **0** | 9/2 | 1 | -1/2 | 0 | |
| **15** | **X1** | **48/6** | **6/6** | **3/6** | **0/6** | **1/6** | **0/6** | |
| 0 | S3 | 18 | **0** | 9/2 | 0 | -3/2 | 1 | |
| $Z_i$ | | 90 | 15 | 15/2 | 0 | 15/6 | 0 | |
| $C_j$-$Z_i$ | | | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | ؟ | |

وكمرحلة أخيرة يتم حساب قيم آخر صف في الجدول وهو صف ($C_j$-$Z_i$) وذلك من خلال طرح قيم الصف الأول من الجدول من قيم الصف مقابل الأخير من الجدول فنتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | S1 | 30 | **0** | 9/2 | 1 | -1/2 | 0 | |
| **15** | **X1** | **48/6** | **6/6** | **3/6** | **0/6** | **1/6** | **0/6** | |
| 0 | S3 | 18 | **0** | 9/2 | 0 | -3/2 | 1 | |
| $Z_i$ | | 120 | 15 | 15/2 | 0 | 15/6 | 0 | |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 0 | 9/2 | 0 | -15/6 | 0 | |

وبهذا نكون قد أكملنا الانتقال إلى جدول سمبلاكس جديد ننتقل إلى الخطوة التالية في طريقة الحل.

**الخطوة الخامسة: الحصول على الحل الأمثل:**

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن الحل المتوصل إليه يتمثل في [1] (X1= 48/6=8 , X2= 0 , Z= 120) وهذا يعني أنه يتم انتاج 8 وحدات من الكراسي وعدم انتاج أي وحدة من الطاولات وبهذا تحقق الشركة ربح قدره 120 ون. ولكن السؤال هل هذا الحل امثل ام لا؟

نتحصل على الحل الأمثل في طريقة السمبلاكس في حالة دالة الهدف من الشكل MAX إذا كانت جميع قيم صف ($C_j$-$Z_i$) سالبة أو معدومة.

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن كل القيم في صف ($C_j$-$Z_i$)سالبة أو ومعدومة ماعدا قيمة واحدة وهي القيمة (2/9) المقابلة للمتغيرة $X_2$ ومنه فإن الحل المتوصل إليه ليس حل أمثل ولابد من إعادة تحسين الحل.

**الخطوة السادسة: التحسين الثاني للحل**: نكرر نفس الخطوات وبنفس الترتيب حيث:

- المتغيرة الداخلة إلى الأساس هي $X_2$ لأنها صاحبة أكبر قيمة موجبة في صف (Cj-Zi).
- المتغيرة الخارجة من الأساس:

**Min (30/9/2 , 8/1/2, 18/9/2) = MIN( 20/3, 16, 4)= 4 => S3**

[1] يتمثل الحل في جدول السمبلاكس في المتغيرات الموجودة في خانة الأساس والتي تكون قيمها مقابلة لها في عمود Bi أما المتغيرات غير موجودة في خانة الأساس فقيمها تساوي الصفر مثل حالة $X_2$ في مثالنا هذا أما قيمة دالة الهدف Z فتكون اول قيمة في الجدول في صف $Z_i$.

- العنصر المحور يتمثل في القيمة (2/9).

وفي المرحلة التالية يتم الانتقال إلى جدول جديد وبإتباع نفس المراحل السابقة نتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 | $Bi/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| 0 | S1 | 12 | **0** | 0 | 1 | 1 | -2/9 | |
| **15** | **X1** | **6** | **1** | **0** | **0** | **1/3** | **-1/2** | |
| 12 | X2 | 4 | **0** | 1 | 0 | -1/3 | 1 | |
| **Zi** | | 138 | 15 | 12 | 0 | 1 | 9/2 | |
| **$C_j$-$Z_i$** | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -9/2 | |

**الخطوة السابعة: الحصول على الحل الأمثل:**

من خلال ملاحظة قيم صف ($C_j$-$Z_i$) نلاحظ أن جميع القيم سالبة أو معدومة ومنه يكمن القول بأن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل حيث يمكن استخراج قيم الحل من جدول السمبلاكس كتالي:

$$X_1^*= 6 \qquad X_2^*= 4 \qquad Z^*= 138$$

والذي يعني اقتصاديا أنه على الشركة انتاج 6 وحدات من الكراسي و 4 وحدات من الطاولات وهي بذلك يمكنها تحقيق أكبر ربح ممكن والمقدر بـ 138 ون.

**ثانيا: في حالة دالة الهدف من الشكل** MIN: إن الحل باستخدام طريقة السمبلاكس في حالة دالة الهدف من الشكل MIN لايختلف كثير عنه في حالة دالة الهدف من الشكل MAX ماعدا في ثلاث نقاط وهي:

1. **المتغير الاصطناعي:** يضاف في دالة الهدف في حالة التدنية بإشارة موجبة.
2. **المتغيرة الخارجية من الأساس:** هي المتغيرة التي لها أكبر قيمة سالبة في صف ($C_j$-$Z_i$)
3. **الوصل إلى الحل الأمثل:** عندما تكون جميع قيم ($C_j$-$Z_i$)موجبة أو معدومة.

ويمكن تلخيص الفرق بين طريقة السمبلاكس في حالة تعظيم والتدنية في الجدول التالي:

| حالة الفرق | دالة الهدف MAX | دالة الهدف MIN |
|---|---|---|
| معامل المتغير الاصطناعي **(R)** | -M | +M |
| متغيرة الداخلة إلى الأساس | أكبر قيمة($C_j$-$Z_i$)موجبة | أكبر قيمة($C_j$-$Z_i$) سالبة |
| الوصول إلى الحل الأمثل | كل قيم ($C_j$-$Z_i$)سالبة أو معدومة | كل قيم ($C_j$-$Z_i$)موجبة أو معدومة |

2. **طريقة (M) الكبيرة** BIG- (M): نسمي طريقة السمبلاكس بطريقة M الكبيرة عند استخدام المتغيرات الاصطناعية ولها نفس الخطوات التي يتم اتباعها في حالة السمبلاكس العادية.

**ملاحظة**: المتغيرة الاصطناعي الذي يتم خروجه من الأساس يتم الغاء التعامل به في مصفوفة المعاملات.

**مثال**: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي والذي يوضح:

$X_1$: عدد الوحدات المطبوعة من كتب الاحصاء.

$X_2$: عدد الوحدات المطبوعة من كتب الاقتصاد.

$$MIN\ Z=16X_1+12X_2$$

$$s/c\begin{cases} X_1+2X_2 = 22 \\ 3X_1+2X_2 \geq 30 \\ 2X_1+3X_2 \leq 45 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

باستخدام طريقة السمبلاكس حدد الكميات الواجب على مطبعة الفيصل أن تطبعها من كل نوع من الكتب لتقليل التكاليف أقل مايمكن.؟

**الحـــــــل:**

سنقوم باتباع نفس الخطوات المتبعة في المثال السابق مع بعض التعديلات الخاصة بالحالة MIN:

الخطوة الأولى: تحويل المتراجحات إلى معادلات ( الشكل القياسي):

لدينا في النموذج ثلاث قيود مختلفة الإشارة ومنه:

- **القيد الأول:** من الشكل تساوي نضيف متغير اصطناعي فقط ومنه يكون القيد من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{X_1+2X_2 = 22 => X_1+2X_2+A_1 = 22}$$

- **القيد الثاني**: من الشكل أكبر من أو تساوي نضيف متغير فجوة إلى الطرف الأقل ومتغير إصطناعي ويكون القيد من الشكل التالي:

$$3X_1+2X_2 \geq 30 => 3X_1+2X_2+A_2 = 30+S_1 => 3X_1+2X_2-S_1+A_2 = 30$$

- **القيد الثالث:** من الشكل أقل من أو تساوي نضيف متغير فجوة إلى الطرف الأقل ويكون القيد من الشكل التالي:

$$2X_1+3X_2 \leq 45 => \boldsymbol{2X_1+3X_2+S_2 = 45}$$

- **دالة الهدف:** يتم كذلك أضافة جميع المتغيرات الجديدة في دالة الهدف حيث يتم اضافة المتغيرات الفجوة بمعامل صفر أما المتغيرات الاصطناعية يتم اضافتها بمعامل كبير جدة يرمز له بالرمز (M) وبإشارة موجبة ومنه تكون دالة الهدف من الشكل التالي[1]:

[1] - بالنسبة لترتيب المتغيرات الجديدة في دالة الهدف ندرج جميع المتغيرات الفجوة اولا ثم جميع المتغيرات الاصطناعية ثانيا.

- المعامل mهو نفسه بالنسبة لجميع المتغيرات الاصطناعية وليس لكل متغيرة معامل خاص.

$$MIN\ Z=16X_1+12X_2+(0)S_1+(0)S_2+(M)A_1+(M)A_2$$

ومنه يكون النموذج القياسي من الشكل التالي:

$$MIN\ Z=16X_1+12X_2+(0)S_1+(0)S_2+(M)A_1+(M)A_2$$

$$s/c\begin{cases} X_1+2X_2+A_1=22 \\ 3X_1+2X_2-S_1+A_2=30 \\ 2X_1+3X_2+S_2=45 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

**الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي:**

- لدينا عدد المتغيرات ستة متغيرات **n=6**
- ولدينا عدد القيود ثلاثة قيود أي أن **r=3**

ومنه **(n-r)= 6-3= 3**

بمأن الفرق (n-r) يساوي ثلاثة (3) هذا يعني أن هناك ثلاثة متغيرات يجب أن نفرض أن قيمتها تساوي الصفر، وكما سبق وأن ذكرنا فإنه يتم اختيار المتغيرات الأساسية أولا قيمتها تساوي الصفر ونلاحظ أنه لدينا متغيرين أساسيين هما $(X_1,X_2)$ وبتالي لابد من اختيار متغير آخر غير أساسي ليكون قيمته تساوي الصفر، ولدينا الاختيار بين أربعة متغيرات وهي $(S_1,S_2, A_1,A_2)$، في هذه الحالة دائما تختار المتغير الذي إن لم نضع قيمته تساوي الصفر سيكون هناك مشكل في الحل .

ونحاول في الجدول التالي تلخيص كل الحالات:

| رقم الحالة | المتغيرة يساوي الصفر | تعويض في القيد $X_1=0$ / $X_2=0$ | ملاحظة |
|---|---|---|---|
| **الحالة 1** | 0 =S1 | $0+2(0)+0=0\neq 22$ | نتيجة غير منطقية |
| **الحالة 2** | 0= S2 | 3(0)+ 2(0) -0+ A1= 30 => A1= 30 | نتيجة عادية |
| **الحالة3** | 0=A1 | 3(0)+ 2(0) - S2+ 0= 30 => - S2= 30=> S2= -30 | عدم توافق مع شرط عدم السالبية |
| **الحالة 4** | 0=A2 | $2(0)+3(0)+0=0\neq 45$ | نتيجة غير منطقية |

ومنه نلاحظ أن الحالة الوحيدة التي كانت نتيجة عادية ومنطقية ومتوافقة مع شرط عدم السالبية هي الحالة الثانية أين فرضنا أن $(S_2=0)$ أما باقي المتغيرات فلا يمكن وضعها تساوي الصفر لأن ذلك سوف بسبب مشكل في الحل الأولي ومنه كقاعدة عامة: **إن اختيار المتغيرة التي سنفرض قيمتها تساوي الصفر من المتغيرات غير أساسية هي دائما متغيرة الفجوة التي إشارتها سالبة في القيد.**

إذن يتم الحصول على الحل الأولي من خلال فرض أن قيمة كل من المتغيرات التالية: ($A_1$, $A_2$, $S_2$) تساوي الصفر وبالتعويض في القيود نتحصل على باقي المتغيرات ويكون الحل الأمثل كمايلي:

$$\mathbf{A_1=0\ ,\ A_2=0,\quad S_1=0\ ,\quad A_1= 22,\quad A_2=30,\quad S_2=45}$$

وبالتعويض بقيمة المتغيرات في دالة الهدف نتحصل على مايلي:

$$\mathbf{Z=16(0) +12(0) +(0)\ (0)+(0)\ (45) +(M)\ (22)+(M)(30)= 52M}$$

**الخطوة الثالثة: كتابة الحل الأولي في جدول السمبلاكس:**

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$C_j$** | **VB** | **Bi** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$A_1$** | **$A_2$** | |
| M | A1 | 22 | **1** | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| **M** | **A2** | **30** | **3** | **2** | **-1** | **0** | **0** | **1** | |
| 0 | S2 | 45 | **2** | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| **$Z_i$** | | 52M | 4M | 4M | -M | 0 | M | M | |
| **$C_j$-$Z_i$** | | | 16-4M | 12-4M | M | 0 | 0 | 0 | |

تدرج المتغيرات حسب ورودها في القيود

تدرج المتغيرات حسب ترتيبها في دالة الهدف أساسية- فجوة- اصطناعية

إذن يتم ملاء جدول السمبلاكس بنفس الطريقة التي وضحناه فيما سبق فنتحصل على الجدول أعلاه.

**الخطوة الخامسة: تحسين الحل:** خلال هذه المرحلة هناك مجموع من المراحل لتحسين قيمة الحل.

المرحلة الأولى تحديد المتغيرة الداخلة إلى الأساس.

بمأن دالة الهدف من الشكل MIN فإن المتغيرة الداخلة إلى الأساس هي المتغيرة التي لها أكبر قيمة في صف ($C_j$-$Z_i$) سالبة ومن خلال ملاحظة جدول السمبلاكس نلاحظ أن هناك قيمتين سالبتين:

$$\mathbf{MIN^{1}\ (16\text{-}4M,\ 12\text{-}4M)= 12\text{-}4M \Rightarrow X_2}$$

ومنه نلاحظ أن أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف ($C_j$-$Z_i$) في المتغيرة $X_2$.

**المرحلة الثانية تحديد المتغيرة الخارجة من الأساس:** وتكون المتغيرة المقابلة لأقل حاصل قسمة عمود $B_i$ على قيم عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس ($X_2$)، حيث:

$$\mathbf{MIN\ (22/2,\ 30/2,\ 43/3) = MIN\ (\ 11,\ 15,\ 15)= 11}$$

[1] عند التعامل مع المعامل M فان تحديد أكبر قيمة يكون من خلال اختيار القيمة التي لها معامل M كبير وفي حالة التساوي نختار التي لها قيمة الاخرى اقل، وفي حالة التساوي نختار عشوائيا.

ومنه فإن المتغيرة المقابلة للقيمة 11 هي المتغيرة $A_1$ إذن تعتبر $A_1$ هي المتغيرة الخارجة من الأساس.

**المرحلة الثالثة: تحديد العنصر المحوري**: من خلال الجدول نلاحظ أن صف المتغيرة الخارجة من الأساس يتقاطع مع عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس عند القيمة (2) إذن هي قيمة العنصر المحوري.

ويمكن تلخيص هذه المراحل في جدول السمبلاكس التالي:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| M | A1 | 22 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 22/2 |
| **M** | **A2** | **30** | **3** | **2** | **-1** | **0** | **0** | **1** | 30/2 |
| 0 | S2 | 45 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 45/2 |
| Z | | 52M | 4M | 4M | -M | 0 | M | M | |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 16-4M | 12-4M | M | 0 | 0 | 0 | |

المتغيرة الخارجة من الأساس

المتغيرة الداخلة إلى الأساس

العنصر المحوري

أقل حاصل قسمة

**المرحلة الرابعة: الانتقال إلى جدول جديد:**

أ. استبدال المتغيرة الخارجة من الأساس ($A_1$ ) بالمتغيرة الداخلة إلى الأساس ($X_2$) في خانة متغيرات الأساس مع بقاء المتغيرات الاخرى على حالها.

| **$C_j$** | | | **16** | **12** | **0** | **0** | **M** | **M** | **$B_i/a_{ij}$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$C_j$** | **VB** | **$B_i$** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$A_1$** | **$A_2$** | |
| **12** | **$X_2$** | | | | | | | | |
| **M** | **$A_2$** | | | | | | | | |
| **0** | **$S_2$** | | | | | | | | |
| **Z** | | | | | | | | | |
| **$C_j$-$Z_i$** | | | | | | | | | |

ب- قسمة عناصر صف العنصر المحوري على العنصر المحوري واستبدال قيم عموده بالصفر ماعدا العنصر المحوري:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| **12** | $X_2$ | 11 | **1/2** | 1 | 0 | 0 | | 0 | |
| M | $A_2$ | | | **0** | | | | | |
| 0 | $S_2$ | | | 0 | | | | | |
| **Z** | | | | | | | | | |
| **Cj-Zi** | | | | | | | | | |

ج. **حساب باقي عناصر الجدول** : كما تم في السابق وباستخدام قاعدة حساب العناصر الجديدة نتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| **12** | $X_2$ | 11 | **1/2** | 1 | 0 | 0 | | 0 | |
| M | $A_2$ | **8** | **2** | **0** | **-1** | **0** | | **1** | |
| 0 | $S_2$ | 12 | **1/2** | 0 | 0 | 1 | | 0 | |
| **Z** | | | | | | | | | |
| **Cj-Zi** | | | | | | | | | |

**د.** حساب صف $Z_i$ وذلك من خلال مجموع ضرب قيم عمود $C_j$ بالقيم المقابلة لها في عمود فنتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| **12** | $X_2$ | 11 | **1/2** | 1 | 0 | 0 | | 0 | |
| M | $A_2$ | **8** | **2** | **0** | **-1** | **0** | | **1** | |
| 0 | $S_2$ | 12 | **1/2** | 0 | 0 | 1 | | 0 | |
| **Z** | | 132+ 8M | 6+2M | 12 | -M | 0 | | M | |
| **Cj-Zi** | | | | | | | | | |

هـ - حساب قيم صف $C_j$-$Z_i$ من خلال طرح قيم الصف الأول في الجدول ($C_j$) من قيم الصف ماقبل الأخير ($Z_i$) فنتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | Bi/aij |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| **12** | $X_2$ | 11 | **1/2** | 1 | 0 | 0 | | 0 | |
| M | $A_2$ | **8** | **2** | **0** | **-1** | **0** | | **1** | |
| 0 | $S_2$ | 12 | **1/2** | 0 | 0 | 1 | | 0 | |
| Z | | 132+ 8M | 6+2M | 12 | -M | 0 | | M | |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 10-2M | 0 | M | 0 | | 0 | |

**الخطوة السادسة: اختبار أمثلية الحل:** يكون الحل أمثل في حالة دالة الهدف من الشكل MIN إذا كانت جميع قيم $C_j$-$Z_i$ موجبة أو معدومة، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ بأن القيمة المقابلة للمتغيرة $X_1$ والتي تساوي (10-2M) هي قيمة سالبة وعليه فإن الحل المتوصل إليه هو حل ليس امثل ويجب إعادة تحسينه من جديد.

إن الحل المتوصل إليه في هذه المرحلة والذي تساوي قيمة دالة الهدف عنده (132+8M) هو أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل الأولي حيث بلغت قيمة دالة الهدف (52M) نلاحظ أنه تم تخفيض قيمة دالة الهدف بكثير غير أن الحل ليس امثل أي أنه لايزال قابل للتخفيض قيمة دالة الهدف وعليه يتم إعادة خطوة تحسين الحل.

**الخطوة السابعة- التحسين الثاني للحل:** وباتباع نفس الخطوات التحسين الأول نتحصل على مايلي:

- المتغيرة الداخلة إلى الأساس هي المتغيرة X1 لأنها تقابل أكبر قيمة سالبة.
- المتغيرة الخارجة من الأساس هي المتغيرة A2 لأنها تقابل أقل حاصل قسمة حيث:

$$MIN( 11/1/2, 8/2, 12/1/2) = MIN( 22, 4, 24)= 4$$

- العنصر المحوري يتمثل في القيمة (2) التي يتقاطع عندها عمود المتغيرة X1 وصف المتغيرة A2.
- **الانتقال إلى جدول جديد:** وباتباع نفس خطوات الانتقال المتبعة سابقا نتحصل على جدول السمبلاكس التالي:

| $C_j$ | | | 16 | 12 | 0 | 0 | M | M | $B_i/a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | $B_i$ | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | |
| 12 | $X_2$ | 9 | 0 | 1 | 1/4 | 0 | | | |
| 16 | $X_1$ | 4 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | | | |
| 0 | $S_2$ | 10 | 0 | 0 | 1/4 | 1 | | | |
| Z | | 172 | 16 | 12 | -5 | 0 | | | |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 0 | 0 | 5 | 0 | | | |

**الخطوة الثامنة - الحصول على الحل الأمثل:** من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن جميع قيم صف ($C_j$-$Z_i$) موجبة أو معدومة ومنه يمكن القول بأن الحل المتوصل إليه حل امثل.

ومن خلال الحل المتوصل إليه والذي يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$X_1^*= 4 \qquad X_2^*= 9 \qquad Z^*= 172$$

أي أنه على المطبعة طباعة أربع كتب من الاحصاء وتسعة كتب للاقتصاد وهي بذلك سوف تحقق أقل تكلفة ممكنة وهي 172 ون.

**3. حالات خاصة للحل بطريقة السمبلاكس:** يعتبر المرور بالخطوات السابقة والوصول إلى الحل المثل هو الحالة الطبيعية للطريقة السمبلاكس إلا أنه هناك بعض الحالات الخاصة والتي قد تظهر خلالها بعض المشكلات والعقبات في الوصول إلى الحل الأمثل والتي من بينها:

- **الحالة الأولى: حالة تعادل قيم ($C_j$-$Z_i$):** في هذه الحالة يتم اختيار المتغير الداخل إلى الأساس بشكل عشوائي ولكن تبقى مشكلة عدد مرات التحسين اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل.
- **الحالة الثانية: مشكلة عدم الانتظام ( التفسخ) (التكرار):** يقصد بمشكلة عدم الانتظام هي الحالة التي يتم عندها الوصول إلى الحل المثل في مرحلة ما بحيث يتكرر هذا الحل في المرحلة الثانية وتظهر هذه إذا كان احد المتغيرات الأساس له قيمة صفر (0).
- **الحالة الثالثة: حالة عدم وجود حلول**: تظهر هذه الحالة في جدول السمبلاكس عند التوصل إلى الحل الأمثل وكان المتغير الاصطناعي موجود في الحل الأساس وله قيمة.
- **الحالة الرابعة: حالة وجود حلول بديلة**: تظهر هذه الحالة في جدول السمبلاكس إذا كانت قيمة ($C_j$-$Z_i$) لواحد أو اكثر من المتغيرات غير الأساسية تساوي صفر حيث أن إدخالها إلى الأساس لا يأثر على قيمة دالة الهدف.
- **الحالة الخامسة: حالة المشكلة غير محدودة**: تظهر هذه الحالة في جدول السمبلاكس عند الرغبة في تحديد المتغيرة الخارجة من الأساس حيث عند قسمة قيم ($B_i$) على قيم عمود المتغيرة الداخلة إلى الأساس تكون جميع القيم سالبة أو معدومة وفي هذه الحالة تعتبر المشكلة غير محدودة.

### خلاصة عملية

تستخدم طريقة السمبلاكس عند حل كل البرامج الخطية مهما كان عدد متغيراتها وتقوم هذه الطريقة على الخطوات التالية والتي تتماثل في حالة دالة الهدف من شكل $MIN$ أو $MAX$ ماعدا في بعض ثلاث عناصر وهي اشارة معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف- المتغيرة الداخلة إلى الأساس- الوصول إلى الحل الأمثل وتتمثل خطواتها في:

**1- تحويل المتراجحات إلى معادلات (الشكل القانوني) ( الشكل القياسي).**

**2- إيجاد الحل الأولى (أول حل أساس ممكن).**

**3- كتابة الحل الأولي في جدول السمبلاكس.**

**4- تحسين الحل.**

**5- الحصول على الحل الأمثل.**

يوجد كذلك لطريقة السمبلاكس حالات خاصة لا يتمكن من الحصول على الحل.

# ثالثا: المسألة الثنائية وتحليل الحساسية

## I. المسألة الثنائية: ( النموذج الثنائي)، (المعكوس)، (المقابل)، *Dual*

**1. مفهوم المسألة الثنائية:** هي عبارة عن نموذج معكوس للنموذج الأصلي نلجأ إليه عندما يصعب حل المسألة الأصلية، وكل نموذج أصلي له نموذج ثنائي أي أن كل مشكلة تعظيم الأرباح يمكن صياغتها كمشكلة تدنية التكاليف كما أن مشكلة تدنية التكاليف يمكن صياغتها كمشكلة تعظيم الأرباح.

**2 خطوات تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة ثنائية:** يتم ذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

أ. تحويل شكل دالة الهدف إذا كانت MAX في المسالة الأصلية تصبح MIN في المسألة الثنائية والعكس إذا كانت MIN في المسألة الأصلية تصبح MAX في المسألة الثنائية.

ب. معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن ($B_i$) في المسألة الثنائية.

ج. مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة[1]المتغيرات في المسألة الأصلية.

د. الطرف الأيمن للمسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأصلية.

ه. متغيرة من الشكل ($\leq$) في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.

و. متغيرة من الشكل ($\geq$)في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.

ز. متغيرة كيفي[2] في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل (=) في المسألة الثنائية.

ح. قيد من الشكل($\leq$) في المسألة الأصلية يعني متغير من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.

ط. قيد من الشكل($\geq$)في المسألة الأصلية يعني متغير من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.

ك. قيد من الشكل (=) في المسالة الأصلية يعني متغير كيفي في المسألة الثنائية

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

| المسألة الأصلية | المسألة الثنائية |
|---|---|
| دالة الهدف MAX | دالة الهدف MIN |
| دالة الهدف MIN | دالة الهدف MAX |
| الطرف الأيمن للقيود Bi | معاملات دالة الهدف |
| معاملات دالة الهدف | الطرف الأيمن للقيود $B_i$ |
| مصفوفة المعاملات في القيود | منقول مصفوفة المعاملات في القيود |
| عدد القيود | عدد المتغيرات |
| قيد (=) | متغير كيفي |

[1] منقول مصفوفة: أي أن كل عمود يقلب صف.

[2] متغير كيفي: يعني متغير غير محدد الإشارة.

| | |
|---|---|
| قيد (≥) | متغيرة (≤) |
| قيد (≤) | متغيرة(≥) |
| عدد المتغيرات | عدد القيود |
| متغير كيفي | قيد (=) |
| متغيرة (≤) | قيد (≥) |
| متغيرة(≥) | قيد (≤) |

**مثال**: حول المسألة الأصلية التالية إلى مسألة ثنائية:

$$MAX\ Z=3X_1+2X_2$$

$$s/c\begin{cases} X_1+5X_2 \geq 8 \\ 2X_1+3X_2 \leq 6 \\ X_1+X_2=10 \end{cases}$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

**الحل:**

لدينا عدد المتغيرات في المسألة الثنائية يساوي عدد القيود في المسألة الأصلية وبمأنه لدينا ثلاثة قيود في المسألة الأصلية إذن سوف يكون لدينا ثلاثة متغيرات في المسألة الثنائية وهم $Y_1, Y_2, Y_3$.

**1.دالة الهدف للمسألة الثنائية**

دالة الهدف في المسألة الاصلية من الشكل MAX إذن سوف تكون دالة الهدف في المسألة الثنائية من الشكل MIN أما معاملات المتغيرات سيكون قيم الطرف الأيمن للقيود ($B_i$) والتي تمثل القيم التالية (8-6-10) وعليه تكون دالة الهدف من الشكل التالي

$$MIN\ W= 8Y_1+ 6Y_2 + 10Y_3$$

2. **القيود:** بالنسبة للعدد القيود في المسألة الثنائية سيكون مساوي لعدد المتغيرات في المسألة الأصلية وبمأنه لدينا متغيرين في المسألة الأصلية إذن سيكون لدينا قيدين في المسألة الثنائية حيث تكون مصفوفة معاملات المتغيرات في المسألة الثنائية هي منقول مصفوفة المعاملات في المسألة الأصلية أي أن كل عمود سوف نقوم بجعله صف في المسألة الثنائية وتكون القيود من الشكل التالي:

$$\mathbf{1Y_1+ 2Y_2 + 1Y_3}$$
$$\mathbf{5Y_1+ 3Y_2 + 1Y_3}$$

أما إشارة القيود فهي معكوس إشارة المتغيرات حيث يتبع القيد الأول إشارة المتغير ($X_1$) ويتبع القيد الثاني إشارة ($X_2$) وبمأن إشارة المتغيرين أكبر من أو تساوي فستكون إشارة القيدين أقل من أو تساوي ومنه تكون القيود من الشكل التالي:

$$\mathbf{1Y_1+ 2Y_2 + 1Y_3 \leq}$$
$$\mathbf{5Y_1+ 3Y_2 + 1Y_3 \leq}$$

أما قيم الطرف الأيمن للقيود في المسألة الثنائية في تمثل قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف في المسالة الأصلية حيث يكون معامل ($X_1$) والذي يساوي (3) هو قيمة الطرف الأيمن للقيد الأول ومعامل ($X_2$) والذي يساوي (2) هو قيمة الطرف الأسمن للقيد الثاني ومنه تكون القيد من الشكل التالي:

$$\mathbf{1Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \leq 3}$$
$$\mathbf{5Y_1 + 3Y_2 + 1Y_3 \leq 2}$$

3. **إشارة المتغيرات**: تكون إشارة متغيرات المسألة الثنائية هي معكوس إشارة القيود للمسألة الثنائية حيث تكون إشارة المتغير $Y_1$ معكوس إشارة القيد الأول وتكون إشارة المتغير $Y_2$ هي معكوس إشارة القيد الثاني وتكون إشارة $Y_3$ هي معكوس إشارة القيد الثالث، وبمأن إشارة القيد الثالث هي من الشكل تساوي فإن المتغير $Y_3$ يكون متغير كيفي أي غير محدد الإشارة ومنه تكون إشارة المتغيرات كمايلي:

$Y_1 \leq 0$ $\quad$ $Y_2 \geq 0$ $\quad$ $Y_3$ متغير كيفي

ومنه تكون المسألة الثنائية كمايلي:

$$\mathbf{MIN\ W = 8Y_1 + 6Y_2 + 10Y_3}$$
$$\mathbf{1Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \leq 3}$$
$$\mathbf{5Y_1 + 3Y_2 + 1Y_3 \leq 2}$$

$Y_1 \leq 0$ $\quad$ $Y_2 \geq 0$ $\quad$ $Y_3$ متغير كيفي

**مثال2:** اوجد المسألة الثنائية للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{MIN } Z = 5X_1 + 2X_2 + 7X_3$$
$$\textbf{\textit{s/c}}\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 4X_3 \geq 22 \\ 3X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 16 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 35 \end{cases}$$

$X_1,\ X_2 \geq 0$ $\quad X_3$ متغير كيفي

**الحل**: باتباع طريقة مختصرة ومبسطة لتحويل المسألة الأصلية إلى مسألة ثنائية ونتطلق هذه الطريق من مقابلة كل قيد من قيود المسألة الأصلية بمتغير من متغيرات المسألة الثنائية كما يلي:

$$X_1 - 2X_2 + 4X_3 \geq 22 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_1$$
$$3X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_2$$
$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 35 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_3$$

بضرب كل متغير من متغيرات المسألة الثنائية ($Y$) في القيمة المقابلة له في الطرف الأيمن للقيود نتحصل على دالة الهدف أما بالنسبة للقيود فنتحصل عليها من خلال ضرب كل متغيرة من متغيرات المسألة الثنائية ($Y$) في معاملات المتغيرات فمثلا عند الضرب في معاملات ($X_1$) نتحصل على القيد الأول وعند ضربها في معاملات ($X2$) نتحصل على القيد الثاني وهكذا أما بالنسبة للإشارة فكما تم سابقا فهي

معكوس الإشارة لكل متغير أما الطرف الأيمن للقيد فهي قيمة معاملات في دالة الهدف وباتباع هذه الخطوات نتحصل على المسألة الثنائية التالية[1]:

$$MAX\ Z=22Y_1+16Y_2+35Y_3$$

$$s/c\begin{cases} Y_1+3Y_2+2Y_3 \le 5 \\ -2Y_1+5Y_2+Y_3 \le 2 \\ 4Y_1+6Y_2+2Y_3 = 7 \end{cases}$$

$Y_1 \le 0$, $X_2$ متغير كيفي ، $X_3 \ge 0$

3. **استخرج حل المسألة الأصلية من جدول السمبلاكس للمسألة الثنائية والعكس**: إن حل المسألة الأصلية يستخرج مباشرة من حل المسألة الثنائية والعكس وحيث نميز بين حالتين:

**الحالة الأولى: في حالة مسألة طبيعية:** ونقصد بالمسألة الطبيعية إذا كانت جميع المتغيرات من الشكل ($\le$) وكذلك جميع القيود من الشكل ($\le$) في هذه الحالة نستنتج الحل بالطريقة التالية:

أ- قيمة دالة الهدف للمسألة الأصلية تساوي قيمة دالة الهدف للمسالة النهائية في جدول الحل النهائي.

**ب**. قيم متغيرات الأساسية للمسألة الأصلية تساوي قيم متغيرات الفجوة للمسألة الثنائية في صف $Z_i$.

**الحالة الثانية: في حالة مسألة غير طبيعية:** المسألة غير الطبيعية هي المسألة المختلطة والتي يكون فيها المتغيرات والقيود مختلطة الشكل في هذه الحالة يمكن استخراج الحل بالطريقة التالية:

أ- قيمة دالة الهدف للمسألة الأصلية تساوي قيمة دالة الهدف للمسالة النهائية في جدول الحل النهائي.

**ب-** قيم متغيرات الأساسية للمسألة الثانية يستخرج من خلال حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} X_i e_i = 0 \\ Y_i s_i = 0 \end{cases}$$

حيث: $X_i$ المتغيرات الأساسية للمسألة الأصلية.

$Y_i$ : المتغيرات الأساسية للمسألة الثنائية.

$S_i$: متغيرات الفجوة للمسألة الأصلية.

$e_i$: متغيرات الفجوة للمسألة الثنائية.

[1] عند التحويل فإن القيد الأول في المسالة الثانية يتبع $X_1$ في المسألة الاصلية في كل عناصره والقيد الثاني يتبع المتغير $X_2$ وهكذا....الخ.
وكذلك المتغير $Y_1$ في المسألة الثنائية يتبع القيد الأول في المسألة الثانية و المتغير $Y_2$ يتبع القيد الثاني وهكذا...الخ.

## خلاصة عملية

تعتبر المسألة الثنائية معكوس أو مقلوب للمسالة الأصلية ويتم اللجوء إليها في حالة كان من الصعب حل المسالة الأصلية إذ أنه يمكن من خلال حل المسالة الثنائية استخراج واستنتاج حل للمسألة الأصلية وتتم علمية تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة ثنائية عبر عشر خطوات التالية:

**1-** تحويل شكل دالة الهدف إذا كانت MAX في المسالة الأصلية تصبح MIN في المسألة الثنائية والعكس إذا كانت MIN في المسألة الأصلية تصبح MAX في المسألة الثنائية.

**2-** معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن ($B_i$) في المسألة الثنائية.

**3-** مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة[1] المتغيرات في المسألة الأصلية

**4-** الطرف الأيمن للمسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأصلية.

**5-** متغيرة من الشكل ($\leq$) في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.

**6-** متغيرة من الشكل ($\geq$)في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.

**7-** متغيرة كيفي[2] في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل (=) في المسألة الثنائية.

**8-** قيد من الشكل($\leq$) في المسألة الأصلية يعني متغير من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.

**9-** قيد من الشكل($\geq$)في المسألة الأصلية يعني متغير من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.

**10-** قيد من الشكل (=) في المسالة الأصلية يعني متغير كيفي في المسألة الثنائية

[1] منقول مصفوفة: أي أن كل عمود يقلب صف.

[2] متغير كيفي: يعني متغير غير محدد الإشارة.

## II. تحليل الحساسية:

إن الحصول على الحل الأمثل ليس هو آخر مرحلة من مراحل حل البرنامج الخطي حيث هناك مرحلة مابعد الحصول على الحل الأمثل وهي مرحلة دراسة مدى مكانية تغير هذا الحل الأمثل المتحصل عليه حيث أن القواعد والاسس التي تم بناء النموذج الخطي على أساسها يمكنها أن تتغير وهذا ما يمكنه أن يؤثر على أمثلية الحل حيث أن أي تغير يمكن أن يحدث في أي عنصر من عنصر البرامج الخطي يتطلب منا إعادة حل النموذج لمعرفة هل حافظ الحل الأول على أمثليته إلا أن هذا يتطلب جهدا ووقتا خاصة في حالة وجود العديد من المتغيرات والقيود وكذلك في حالة تكرار حدوث التغيرات في عناصر النموذج، غير أنه يمكننا معرفة هذا الأمر دون اللجوء إلى إعادة الحل وهذا في حالة ما إذا قمنا بإجراء تحليل لحساسية الحل الأمثل ومنه يمكننا تعريف تحليل الحساسية كمايلي:

**ويقصد بتحليل الحساسية:** هو التعرف على ما يمكن أن يحصل للحل الأمثل الذي تم التوصل اليه تحت جملة من الافتراضات في حالة ما تم تغير الشروط التي تم الاعتماد عليها في بناء النموذج الرياضي.

ويتم ذلك من خلال دراسة محاور تحليل الحساسية والتي تتمثل في:

**1. التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف " مدى الأمثلية "** : يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية:

ا. من جدول السمبلاكس للحل النهائي الأمثل نقوم باستبدال معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرمز $C_i$ حيث $(i=1 .2 .3……n)$

**ب.** نعيد حساب صف $(Z_i)$ وصف $(C_j\text{-}Z_i)$.

**ج.** من صف $(C_j\text{-}Z_i)$ نقوم باختبار أمثلية الحل حيث يجب أن تكون جميع قيم $(C_j\text{-}Z_i)$ أقل من أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل (MAX) أو أن تكون جميع قيم $(C_j\text{-}Z_i)$ أكبر من أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل (MIN).

**د.** يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة ومن نتيجة هذا الحل نحدد حدود المعامل $C_j$.

**<u>قاعدة</u>: في حالة كون متغير خارج الأساس في الحل الأمثل ( غير داخل في الحل) يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بالقاعة التالية:**

**القيمة المقابلة له في صف $(Z_i) \geq C_j \leq$ غير محدود**

**مثال:**

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$X_1$: عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

$X_2$: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات.

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2\geq 54\\6X_1+3X_2\geq 48\\9X_1+9X_2\geq 90\end{cases}$$

ويرفق هذا البرنامج بجدول الحل النهائي الأمثل التالي:

| $C_j$ | | | **15** | **12** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | **VB** | **$B_i$** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** |
| 0 | S1 | 12 | **0** | 0 | 1 | 1 | -2/9 |
| **15** | **X1** | **6** | **1** | **0** | **0** | **1/3** | **-1/2** |
| 12 | X2 | 4 | **0** | 1 | 0 | -1/3 | 1 |
| Z | | 138 | 15 | 12 | 0 | 1 | 9/2 |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -9/2 |

**المطلوب**: تحديد مدى الأمثلية لمعاملات المتغيرات؟

**الحل:**

من خلال ملاحظة قيم صف $C_j$-$Z_i$ نلاحظ أن كلها سالبة أو معدومة ومنه فإن الجدول الذي بين أيدينا هو جدول الحل النهائي الأمثل - لابد من التأكد من هذا الأمر لأنه لايمكن اجراء تحليل الحساسية بدون الوصول إلى الحل النهائي الأمثل.

**أولا: تحديد مدى الأمثلية لمعامل $X_1$:**

نستبدل معامل **$X_1$** في جدول السمبلاكس بمعامل آخر نرمز له بالرمز $C_1$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس فنتحصل على النتائج التالية:

| $C_j$ | | | **$C_1$** | **12** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | **VB** | **$B_i$** | **$X_1$** | **$X_2$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** |
| 0 | S1 | 12 | **0** | 0 | 1 | 1 | -2/9 |
| C1 | **X1** | **6** | **1** | **0** | **0** | **1/3** | **-1/2** |
| 12 | X2 | 4 | **0** | 1 | 0 | -1/3 | 1 |
| Zi | | 138 | $C_1$ | 12 | 0 | 1/3 C1-4 | -1/2 C1+12 |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 0 | 0 | 0 | -1/3 C1+4 | 1/2 C1-12 |

نقوم بتحقيق شروط أمثلية الحل الأمثل وهو أن تكون جميع قيم $C_j$-$Z_i$ سالبة أو معدومة ومنه تكون لدينا المتراجحات التالية:

$$\begin{cases}-1/3C_1 + 4 \leq 0 => C_1 \geq 12 \\ 1/2C_1 - 12 \leq 0 => C_1 \leq 24\end{cases}$$

ومنه يمكن كتابة مدى الأمثلية لمعامل المتغير X1 بالشكل التالي:

$$12 \leq C_1 \leq 24$$

**ثانيا: تحديد مدى الأمثلية لمعامل $X_2$:**

باتباع نفس الخطوات السابقة حيث نستبدل معامل المتغير $X_2$ بالرمز $C_2$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنتحصل على الجدول التالي:

| $C_j$ | | | **15** | **C2** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | **VB** | $B_i$ | **X1** | **X2** | **S1** | **S2** | **S3** |
| 0 | S1 | 12 | **0** | 0 | 1 | 1 | -2/9 |
| 15 | **X1** | **6** | **1** | **0** | **0** | **1/3** | **-1/2** |
| C2 | X2 | 4 | **0** | 1 | 0 | -1/3 | 1 |
| Zi | | 138 | 15 | $C_2$ | 0 | $5-1/3\ C_2$ | $-15/2+C_2$ |
| $C_j-Z_i$ | | | 15 | $C_2$ | 0 | $-5+1/3\ C_2$ | $15/2-C_2$ |

ولكي يكون جدول السمبلاكس هو جدول الحل النهائي الأمثل لابد أن تكون جميع قيم $C_j-Z_i$ سالبة أو معدومة ومنه نتحصل على جملة المتراجحات التالية:

$$\begin{cases}-5+1/3C_2 \leq 0 => C_2 \leq 15 \\ \frac{15}{2} - 1/2C_2 \leq 0 => C_2 \geq 15\end{cases}$$

ومنه يمكن كتابة مدى الأمثلية لمعامل المتغير $X_2$ بالشكل التالي:

$$15 \leq C_2 \leq 15$$

**2.تاثير التغير في قيم الطرف الأيمن ( الموارد المتاحة):**

أ. **أسعار الظل:** تشير أسعار الظل إلى العوائد الإجمالية الناجمة عن الاضافات الجديدة من الموارد الموظفة في العملية الانتاجية.

ويمكن تعريفها بأنه الربح الذي يمكن الحصول عليه اذا ما تم الحصول على وحدة واحدة إضافية من مورد ما.

أو هي القيمة التي يمكن أن تتحملها المؤسسة من أجل الحصول على وحدة واحدة اضافية من مورد ما.

وتتمثل اسعار الظل في قيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في صف($Z_i$) في الجدول الحل النهائي الأمثل.

وعموما فإن متغيرات الفجوة لها ثلاث قيم في جدول السمبلاكس ولكل منها معناه الخاص في تحليل الحساسية وهي كمايلي:

- **قيم متغيرات الفجوة في عمود متغيرات الأساس:** أي قيمة متغير الفجوة في الحل النهائي فهي تشير إلى المقدار غير مستغل من مورد القيد الذي ينتمي إليه متغير الفجوة ( طاقة عاطلة)
- **قيم متغيرات الفجوة المقابلة للمتغيرات الأساسية:** تشير إلى مقدار التغير الذي يمكن أن يحدث في قيم المتغيرات الأساسية في حالة حدوث تغير في مورد القيد الذي ينتمي إليه متغير الفجوة.
- **قيم المقابلة لمتغير الفجوة في صف ($Z_i$):** تشير إلى أسعار الظل حيث أنه زيادة في قيمة المورد القيد لذي ينتمي إليه متغير الفجوة بوحدة واحدة تؤدي إلى تغير قيمة دالة الهدف بقيمة متغير الفجوة.

**قاعدة:** لإيجاد الكميات الجديدة من اضافات الموارد نتبع العلاقة التالية:

**الكميات الجديدة= الكميات الاصلية + [ مقدار التغير في كمية المورد *i* * القيم المقابلة لها في عمود $S_i$ الممثل للمورد]**

**مثال** : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$X_1$: عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

$X_2$: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات.

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2\geq 54\\6X_1+3X_2\geq 48\\9X_1+9X_2\geq 90\end{cases}$$

ويرفق هذا البرنامج بجدول الحل النهائي الأمثل التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0 | S1 | 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2/9 |
| 15 | X1 | 6 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -1/2 |
| 12 | X2 | 4 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 1 |
| $Z_i$ | | 138 | 15 | 12 | 0 | 1 | 9/2 |
| $C_j-Z_i$ | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -9/2 |

**المطلوب:** من خلال جدول السمبلاكس للحل النهائي الأمثل حدد مايلي:

- أسعار الظل للنموذج.
- الطاقات العاطلة والموارد غير مستغلة.
- مدى تأثير تغير الموارد على الطاقة الانتاجية للنموذج.

**الحل:**

أولا قبل بداية الحل نقوم بتحويل النموذج إلى الشكل القانوني كما تعلمنا سابقا فنحصل على الشكل التالي:

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2+S_1=54\\6X_1+3X_2+S_2=48\\9X_1+9X_2+S_3=90\end{cases}$$

**1. تحديد أسعار الظل:** أسعار الظل هي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في صف ($Z_i$) ومن خلال جدول السمبلاكس نجد مايلي:

- ✓ المتغير $S_1$ تقابلها القيمة (0) في صف ($Z_i$).
- ✓ المتغير $S_2$ تقابلها القيمة (1) في صف ($Z_i$) .
- ✓ المتغير $S_3$ تقابلها القيمة (9/2) في صف ($Z_i$).

ومنه فإن القيم (0، 1، 9/2) تمثل قيم الظل للنموذج حيث أن:

- ○ زيادة المورد الأول (45) بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة صفر وحدة إلى الأرباح – سنتطرق فيما بعد لسبب-.
- ○ زيادة المورد الثاني (48) بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الأرباح بقيمة (1) .
- ○ زيادة المورد الثالث (90) بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة الأرباح ب قيمة (9/2).

2. **تحديد الطاقات العاطلة والموارد غير مستغلة:**

تتمثل قيمة الطاقات العاطلة في قيمة متغير الفجوة في حل الأساس ومن خلال جدول السمبلاكس نلاحظ أن قيم الحل الأمثل يتمثل في:

$$X_1^*=6 \quad X_2^*=4 \quad S_1^*=12 \quad S_2^*=0 \quad S_3^*=0 \quad Z^*=138$$

ومنه نجد أن المورد الأول يحتوى على 12 وحدة غير مستغلة الامر الذي يمكن أن تحقق منه من خلال تعويض قيم $X_1$ و $X_2$ في القيد الاول حيث:

$$3X_1+6X_2=54 \Rightarrow 3(6)+6(4)=48$$

ومنه فإن المستغل فعلا في العملية الانتاجية هو 48 وحدة فقط من المورد الاول أما الباقي والمقدر ب 12 وحدة (12=48-54) تعتبر وحدات غير مستغلة وغير داخلة في العملية الانتاجية، ولهذا السبب فإن إضافة أي وحدة لهذا المورد لا تؤدي إلى زيادة الأرباح –كما اشرنا سابقا- بل تؤدي إلى زيادة عدد الطاقات غير مستغلة ولهذا فإن ننصح المؤسسة بتخفيض عدد الساعات المخصص لهذا المورد وتحويلها للمورد اخر.

أما بالنسبة للمورد الثاني والثالث فنلاحظ أن قيمة متغير الفجوة $S_2^*=0$ و $S_3^*=0$ فهذا يعني أن جميع طاقات هذان الموردان مستغل بالكامل ولا يوجد طاقة غير مستغلة.

**3. تأثير زيادة الموارد على الطاقة الانتاجية للنموذج.**

يتم تحديد هذا التأثير من خلال قيم متغيرات الفجوة المقابلة للمتغيرات الأساسية حيث نجد مايلي:

- **بالنسبة للمورد الاول:** نجد أن قيم متغير الفجوة $S_1^*$ المقابلة لـ $X_1$ و $X_2$ تساوي الصفر هذا يعني أن زيادة هذا المورد بوحدة واحدة لا تؤدي إلى أي زيادة في قيمة $X_1$ و $X_2$.
- **بالنسبة للمورد الثاني:** نلاحظ أن القيمة المقابلة لـ $X_1$ تساوي **(3/1)** والقيمة المقابلة لـ $X_2$ تساوي **(1/-3)** هذا يعني أن زيادة المورد الثاني بوحدة واحدة تؤدي إلى زيادة قيمة $X_1$ بـ **(3/1)** ونقص قيمة $X_2$ بـ **(3/1)**.
- **بالنسبة للمورد الثالث**: نلاحظ أن القيمة المقابلة لـ $X_1$ تساوي **(-2/1)** والقيمة المقابلة لـ $X_2$ تساوي **(1)** هذا يعني أن زيادة المورد الثاني بوحدة واحدة تؤدي إلى نقص قيمة $X_1$ بـ **(2/1)** وزيادة قيمة $X_2$ بـ **(1)**.

**ب. مدى الامكانية:**

يهدف مدى الامكانية تحديد الحد الاعلى والحد الادنى لقيم الطرف الايمن (الموارد) الذي يحافظ على قيمة سعر الظل حيث من خلال مدى الامكانية يمكننا تحديد عدد الوحدات من أي مورد التي يمكننا اضافتها أو التخلص منها دون أن سيؤثر ذلك في سعر الظل الخاص بالمورد ولتحديد مدى الامكانية نتبع الخطوات التالية:

- من جدول السمبلاكس للحل النهائي الأمثل نقوم بإيجاد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد ونرمز له بالرمز $(\Delta b_i)$ والذي يساوي حاصل قسمة قيم الطرف الايمن على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفجوة التابع للقيد الذي نبحث له عن مدى الامكانية لطرفه الأيمن.
- نحدد طرفي مدى الامكانية باستخدام العلاقة التالية:

**مدى الامكانية = الكمية الأصلية لطرف الأيمن للقيد $i$ – مدى التغير.**

ويكون المدى محصور بين أعلى قيمة وأقل قيمة.

<u>قاعدة:</u>

**اذا كان متغير الفجوة التابع لاحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي الأمثل فإن هذا يشير إلى وجود كمية اضافية من هذا المورد وهذا يعني أن الحد الاعلى غير محدود والحد الادنى يساوي الكمية الاصلية للمورد ناقص قيمة متغير الفجوة في جدول السمبلاكس.**

**مثال:**

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$X_1$: عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

$X_2$: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات.

$$MAX\ Z=15X_1+12X_2$$

$$s/c\begin{cases}3X_1+6X_2\geq\ 54\\6X_1+3X_2\geq\ 48\\9X_1+9X_2\geq 90\end{cases}$$

ويرفق هذا البرنامج بجدول الحل النهائي الأمثل التالي:

| $C_j$ | | | 15 | 12 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_j$ | VB | Bi | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0 | S1 | 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | -2/9 |
| 15 | X1 | 6 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | -1/2 |
| 12 | X2 | 4 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 1 |
| $Z_i$ | | 138 | 15 | 12 | 0 | 1 | 9/2 |
| $C_j$-$Z_i$ | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -9/2 |

**المطلوب: تحديد مدى الامكانية للموارد النموذج.**

- **مدى الامكانية للمورد الاول $(\boldsymbol{b_1})$**: بمأن متغير الفجوة المقابل لهذا المورد موجود ضمن الحل الأمثل فإن مدى الامكانية له سوف يحدد وفق القاعدة ويكون كمايلي

$$\mathbf{54-12\leq b_1\leq}\ \text{محدود غير}$$

$$\mathbf{48\leq b_1\leq}\ \text{محدود غير}$$

- **مدى الامكانية للمورد الثاني $(\boldsymbol{b_2})$**: لتحديد مدى الامكانية نتبع الخطوات التالية:

- **حساب مدى التغير $(\Delta\boldsymbol{b_1})$**: وذلك من خلال قسمة قيم عمود $B_i$ على القيم المقابلة لها لمتغير الفجوة $S_2$ فنتحصل على النتائج التالية:

$$\Delta\boldsymbol{b_{21}}=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{1}}=\mathbf{12}\,,\quad \Delta\boldsymbol{b_{22}}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{1/3}}=\mathbf{18}\quad,\quad \Delta\boldsymbol{b_{23}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-1/3}}=\mathbf{-12}$$

- **حساب حدود مدى الامكانية $(R_i)$**: وذلك من خلال طرح مدى التغير من الكمية الاصلية للقيد فنتحصل على مايلي:

$$\boldsymbol{R_1}=\mathbf{48-12=36}\,,\quad \boldsymbol{R_2}=\mathbf{48-18=30},\quad \boldsymbol{R_3}=\mathbf{48-(-12)=60}$$

ومنه يتم حصر مدى الامكانية للمورد بين أكبر قيمة (60) وأقل قيمة (30) ويكون بالشكل التالي:

$$30\leq b_2\leq\ \ 60$$

ويتم تفسير هذا المدى على أنه عندما تكون قيمة مورد القيد الثاني محصورة بين هذين القيمتين فإن الحل الذي تم الحصول عليه يبقى حل الأمثل فحين لو تم الخروج عن هذا المجال يفقد الحل أمثليته.

✓ **مدى الامكانية للمورد الثالث $(b_3)$:**

- **حساب مدى التغير $(\Delta b_3)$**: بنفس الطريقة السابقة يتم قسمة قيم عمود $B_i$ على قيم عمود متغير الفجوة $S_2$ .

فنتحصل على النتائج التالية:

$$\Delta b_{31} = \frac{12}{-9/2} = -45\,, \quad \Delta b_{32} = \frac{6}{-1/2} = -12 \quad , \quad \Delta b_{33} = \frac{4}{1} = 4$$

- **حساب حدود مدى الامكانية $(R_i)$**: وذلك من خلال طرح مدى التغير من الكمية الاصلية للقيد فنتحصل على مايلي

$$R_1 = 90 - (-45) = 144\,, \quad R_2 = 90 - (-12) = 102, \quad R_3 = 90 - 4 = 86$$

ومنه يتم حصر مدى الامكانية للمورد بين أكبر قيمة (144) وأقل قيمة (86) ويمكن بالشكل التالي:

$$86 \leq b_2 \leq \ 144$$

## خلاصة عملية

يتم اللجوء الى اجراء تحليل حساسية الحل الامثل المتحصل عليه وهذا بغرض الوقوف على مدى قدرة الحل الامثل للحفاظ على أمثليته في حالة وقوع اي تغير الى الظروف والافتراضات التي صاحبة عملية تحديد الحل الأمثل ويتم ذلك من خلال دراسة النقاط التالية:

1- **التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف " مدى الأمثلية "** : يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل ولتحديد مدى الأمثلية.

2- **تأثير التغير في قيم الطرف الأيمن ( الموارد المتاحة):**

**أولا- أسعار الظل:** تشير أسعار الظل إلى العوائد الإجمالية الناجمة عن الاضافات الجديدة من الموارد الموظفة في العملية الانتاجية.

أ/ **قيم متغيرات الفجوة في عمود متغيرات الأساس:** تشير إلى المقدار غير مستغل من مورد القيد الذي ينتمي إليه متغير الفجوة ( طاقة عاطلة).

**ب/ قيم متغيرات الفجوة المقابلة للمتغيرات الأساسية:** تشير إلى مقدار التغير الذي يمكن أن يحدث في قيم المتغيرات الأساسية في حالة حدوث تغير في مورد القيد الذي ينتمي إليه متغير الفجوة.

**ج/ قيم المقابلة لمتغير الفجوة في صف ($Z_i$):** تشير إلى أسعار الظل حيث أنه زيادة في قيمة المورد القيد لذي ينتمي إليه متغير الفجوة بوحدة واحدة تؤدي إلى تغير قيمة دالة الهدف بقيمة متغير الفجوة.

لإيجاد الكميات الجديدة من اضافات الموارد نتبع العلاقة التالية:

**الكميات الجديدة= الكميات الاصلية + [ مقدار التغير في كمية المورد $i$ * القيم المقابلة لها في عمود $S_i$ الممثل للمورد]**

**ثانيا- مدى الامكانية:** يهدف مدى الامكانية تحديد الحد الاعلى والحد الادنى لقيم الطرف الايمن (الموارد) الذي يحافظ على قيمة سعر الظل حيث من خلال مدى الامكانية يمكننا تحديد عدد الوحدات من أي مورد التي يمكننا اضافتها أو التخلص منها دون أن سيؤثر ذلك في سعر الظل الخاص بالمورد ولتحديد مدى

الامكانية نستخدم العلاقة التالية:

**مدى الامكانية = الكمية الأصلية لطرف الأيمن للقيد $i$ – مدى التغير.**

ويكون المدى محصور بين أعلى قيمة وأقل قيمة.

# المحور الثاني

# مسائل النقل

# المحور الثاني: مسائل النقل

**أولا: مفهوم مسائل النقل:**

تستخدم هذه المسائل في حل مشكل نقل السلع والخدمات والاشخاص الموجودة بكميات معلومات في m نقطة متمايزة إلى n نقطة متمايزة وتسمى مناطق تواجد وحدات السلع بـ **المنابع** ( المصادر) وتسمى نقاط التي تطلب السلع بـ **المصبات**.

وتهدف مسائل النقل إلى نقل أكبر كمية ممكنة من السلع من المنابع $S_i\ (i = 1,2, \dots \dots \dots . . m)$ إلى المصبات $P_j\ (j = 1,2, \dots \dots \dots . . n)$ باقل تكلفة ممكنة أو اعلى ربح ممكن.

**ثانيا: شروط استخدام مسائل النقل:**

إن استخدام مسائل النقل وحل أي مسالة على أنها مسائلة نقل يتطلب توفر مجوعة من الشروط والتي قد يمكن علاج بعضها في حالة عدم توفره مع وجود بعض الشروط لابد أن تكون متوفرة والا لايمكن استخدام مسائل النقل وتتمثل هذه الشروط في مايلي:

❶ أن تكون سعة المنابع معلومة ويعنى ذلك أن يكون لدينا علم بالكميات المتوفرة في كل منبع يمكن نقل السلع منه.

❷ أن تكون سعة المصبات معلومة وذلك يعنى أن تتوفر لدينا معلومات حول الكميات المطلوبة من طرف كل مصب يمكن نقل السلعة له.

❸ أن تكون تكلفة نقل كل وحدة من السلع من المنابع إلى المصبات معلومة.

❹ أن تكون كمية السلع المعروضة في المنابع تساوي الكمية المطلوبة في المصبات.

**ثالثا: صياغة البرنامج الخطي لمسالة النقل:**

① **جدول النقل:**

قبل الحديث عن البرنامج الخطي لمسالة النقل لابد من التطرق إلى كيفية تحويل مشكلة النقل من مسالة إلى جدول يلخص كل المعلومات المتوفرة حول هذه المسالة حيث يمكن صياغة مسالة النقل على شكل جدول النقل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | $P_1$ | $P_2$ | .................. $P_n$ | العرض |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $C_{11}$ $X_{11}$ | $C_{12}$ $X_{12}$ | ....$C_{1n}$ $X_{1n}$ | $a_1$ |
| $S_2$ | $C_{21}$ $X_{21}$ | $C_{22}$ $X_{22}$ | ....$C_{2n}$ $X_{2n}$ | $a_2$ |
| $S_m$ | $C_{m1}$ $X_{m1}$ | $C_{m2}$ $X_{m2}$ | ...$C_{mn}$ $X_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب | $b_1$ | $b_2$ | .................. $b_n$ | المجموع |

كما نلاحظ من خلال الشكل نجد أن جدول النقل يحتوى على مجموعة من الصفوف والأعمدة حيث تمثل الصفوف المنابع وهي أماكن التي تتوفر فيها السلعة حيث يعتبر كل صف عن منبع معين، فيما تتمثل الاعمدة في المصبات وهي الاماكن التي يتم نقل السلع اليها حيث يعبر كل عمود عن مصب معين.

أما بالنسبة للصف الاخير فهو مخصص لتحديد الكميات المطلوبة من طرف كل مصب حيث يتم إدراج مقابل كل مصب الكمية المطلوبة منه. أما العمود الاخير فهو مخصص لتحديد كميات العرض وهي الكميات المتوفرة في كل منبع حيث يتم إدراج أمام كل منبع الكمية المتوفرة فيه.

أما بالنسبة للمربعات كل الجدول والتي تتشكل من خلال تقاطع المنابع مع المصبات حيث كل تقاطع لمنبع مع مصب يشكل لنا مربع واحد وهذا ما نسميه بالخلية ونجد أن كل خلية تحتوى على عنصرين هما:

- $C_{nm}$ ويعبر هذا الرمز عن تكلفة (الربح) نقل الوحدة الواحدة من السلع من المنبع $i$ الى المصب $j$.
- $X_{mn}$ وهي الكمية المنقولة من المنبع $i$ الى المصب $j$.

إذن فإن كل جدول نقل يحتوي على عدد من الخلايا والتي تساوي جداء عدد المنابع في عدد المصبات ولكل خلية تكلفة نقل خاصة وكمية نقل خاصة.

ومنه فإن جدول النقل يضم الرموز التالية والتي تعني مايلي:

- $X_{ij}$: عدد الوحدات من السلعة المنقولة من المنبع $i$ الى المصب $j$.
- $C_{ij}$: تكلفة (الربح) من نقل وحدة واحدة من السلعة من المنبع $i$ الى المصب $j$.
- $a_i$: عدد الوحدات السلعة المعروضة عند المنبع $S_i$ .
- $b_j$: عدد الوحدات من السلع المطلوبة عند المصب $P_i$.

وتتطلب مسائل النقل أن تكون جميع هذه الرموز معلومة ماعدا عدد الوحدات المنقولة $X_{ij}$ والتي يتم تحديدها من خلال حل مسائل النقل كما سنرى فيما بعد.

② **البرنامج الخطي:**

كما تطرقنا سابقا فإن البرنامج الخطي يحتوي على متغيرات القرار ودالة الهداف بالإضافة إلى قيود البرنامج وبتالي فإن مسألة النقل يمكن كتابة برنامجها الخطي كمايلي:

✓ **متغيرات القرار:** الهدف من البرنامج الخطي هو تحديد الكميات الواجب نقلها من كل منبع إلى كل مصب ومنه فإن متغيرات القرار سوف تتمثل في هذه الكميات المنقولة وبالنسبة لكل برنامج فإن عدد متغيرات القرار تتمثل في حاصل ضرب عدد المنابع في عدد المصبات.

فمثلا كان لدينا ثلاث منابع وأربع مصبات فإن عدد متغيرات القرار لهذه المسالة هو (12) متغير.

وعموما يتم كتابة المتغيرات القرار كمايلي:

$X_{ij}$: الكمية المنقولة من المنبع $i$ إلى المصب $j$.

✓ **دالة الهدف :** يتمثل الهدف في مسألة النقل هو نقل أكبر كمية ممكنة من المنابع إلى المصبات باقل تكلفة ممكنة أو أكبر ربح ممكن ومنه فإن دالة الهدف تتمثل في تدنية تكلفة النقل التي تساوي مجموع تكلفة نقل الوحدة والواحدة من المنبع إلى المصب في عدد الوحدات المنقولة أو تعظيم الربح والتي تساوي مجموع الربح من نقل الوحدة والواحدة من المنبع إلى المصب في عدد الوحدات المنقولة ويمكن كتابتها كمايلي:

$$max/min(z) = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} \dots\dots.. + C_{21}X_{21} \dots\dots\dots + C_{nm}X_{nm}$$

ويمكن كتابتها بالشكل المختصر كمايلي

$$max/min(z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

✓ **القيود:** عند صياغة قيود برنامج مسائل النقل فإنه يكون لدينا نوعين من القيود وهما القيود الخاصة بالكميات المعروضة في المنابع وقيود الخاصة بالكميات المطلوبة في المصبات وذلك كمايلي:

**أ- القيود الخاصة بالكميات المعروضة في المنابع:** حيث أنه يشترط أن تكون جميع الكميات المنقولة من كل منبع إلى جميع المصبات أقل من أو تساوي الكمية المعروضة في المنبع حيث أنه لايمكن نقل كمية أكبر من تلك الموجودة في المنبع حيث مثلا اذا كان في المنبع يوجد 600 وحدة فلا يمكن نقل الا 600 وحدة أو أقل. ويكون لدينا لكل منبع قيد خاص وبالتالي فإن عدد القيود يكون يساوي عدد المنابع فاذا كان لدينا مثلا 4 منابع يكون لدينا اربع قيود وتكتب القيود بالشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$$

**ب- القيود الخاصة بالكميات المطلوبة في المصبات:** بالنسبة للكميات المطلوبة في المصبات فإنه يشترط أن تكون الكميات التي تم نقلها من كل المنابع إلى كل مصب لاتقل عن الكمية المطلوبة في ذلك

المصب حيث أنه لايمكن تلبية أقل من الكمية المطلوبة حيث اذا كان لدينا مصب له طلب 500 وحدة فإن جميع الكميات التي تصل من كل المنابع يجب أن تكون أكبر من أو تساوي 500 ونفس الامر بالنسبة للمنابع فإن عدد القيود تكون تساوي عدد المصبات حيث لكل مصب قيد خاص فاذا كان لدينا مثلا 6 مصبات يكون لدينا كذلك 6 قيود ويتم كتابة القيود بالشكل التالي

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq b_j$$

ومن خلال كل ما سبق يتم كتابة البرنامج الخطي لمسالة النقل على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{max/min(z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X_{ij} \leq a_i} \\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X_{ij} \leq b_j} \\ \boldsymbol{X_{11}, X_{12}, \dots\dots X_{21}, X_{22}, \dots\dots X_{1n}, X_{2n}, \dots\dots X_{mn}, \geq 0} \end{cases}$$

**مثال:** تقوم مؤسسة الهلال للمنتوجات الغذائية بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجها عن طريق ثلاث وحدات رئيسية وهي:

- وحدة الهدى طاقتها الانتاجية 55 وحدة.
- وحدة الرحمة طاقتها الانتاجية 45 وحدة.
- وحدة الوفاق طاقتها الانتاجية 20 وحدة.

ويتم التسويق في اتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية وتقدر كمية طلبها ب 50 وحدة.
- الناحية الشرقية وتقدر كمية طلبها 30 وحدة.
- الناحية الوسطى وتقدر طاقتها الانتاجية 40 وحدة.

الجدول التالي يلخص تكاليف النقل من كل وحدة إلى كل منطقة:

| الغرب | الشرق | الوسط | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 1 | وحدة الهدى |
| 3 | 7 | 5 | وحدة الرحمة |
| 9 | 8 | 10 | وحدة الوفاق |

**المطلوب:**

**1-** شكل المسالة على شكل مشكلة نقل ( اكتب جدول النقل الخاص بالمسالة)؟

2- حدد النموذج الخطي للمسالة؟

**الحل:**

**1- تشكيل المسالة على شكل مشكلة نقل ( كتابة جدول النقل الخاص بالمسالة):**

قبل البداء في كتابة جدول النقل لابد من التأكد من توفر جميع الشروط المطلوبة في كل مسالة لكي تكون مسالة نقل وهي:

❶ **أن تكون سعة المنابع معلومة** وهذا الامر متوفر حيث لدينا الكميات المنتجة في كل وحدة والتي يتم اعتبارها منابع.

❷ **أن تكون سعة المصبات معلومة** وهذا الامر كذلك متوفر حيث لدينا الكمية المطلوبة في كل منطقة من مناطق الشمالية والتي تعبر عن المصبات.

❸ **أن تكون تكلفة نقل كل وحدة من السلع من المنابع إلى المصبات معلومة** وهي موضحة في الجدول المرفق في المثال.

❹ **أن تكون كمية السلع المعروضة في المنابع تساوي الكمية المطلوبة في المصبات** وهذا شرط ضروري جد وهو كذلك محقق حيث نجد أن مجموع كميات المعروضة في المنابع تساوي مجموع الكميات المطلوبة في المصبات وتساوي 120 ويمكن التحقق من ذلك كمايلي:

- **كمية المنابع:** 120=20+45+55
- **كمية المصبات:** 120=50+30+40

وبعد التحقق من توفر هذه الشروط الاربعة يتم كتابة جدول النقل كمايلي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 $X_{11}$ | 4 $X_{12}$ | 5 $X_{13}$ | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 $X_{21}$ | 7 $X_{22}$ | 3 $X_{23}$ | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 $X_{31}$ | 8 $X_{32}$ | 9 $X_{33}$ | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**2- تحدد النموذج الخطي للمسالة:**

**أولا: تحديد متغيرات القرار:** كما ذكرنا سابقا فإن عدد المتغيرات في أي برنامج خطي لمسالة نقل يكون عدد متغيرات القرار فيه يساوي جداء عدد المنابع في عدد المصبات وبمأنه لدينا ثلاث منابع وثلاث مصبات

سيكون لدينا في هذا البرنامج (3*3=9) تسعة متغيرات وهي ($X_{11}$ $X_{12}$ . $X_{13}$ , $X_{21}$ $X_{22}$ , $X_{23}$ ,
, , $X_{31}$ $X_{32}$ , $X_{33}$)حيث يمثل كل متغير الكمية المنقولة من المنبع إلى المصب وذلك كمايلي:

- $X_{11}$ الكمية المنقولة من وحدة الهدى إلى المنطقة الوسطية.
- $X_{12}$ الكمية المنقولة من وحدة الهدي إلى المنطقة الشرقية.
- $X_{13}$ الكمية المنقولة من وحدة الهدى إلى المنطقة الغربية.

وهكذا إلى نستمر في تسمية المتغيرات إلى غاية آخر متغير. والذي يمثل الكمية المنقولة من آخر وحدة إلى آخر منطقة وهو:

- $X_{33}$ الكمية المنقولة من وحدة الافاق إلى المنطقة الشرقية.

**ثانيا دالة الهداف:** من خلال جدول تكاليف النقل نستنتج أن هدف البرنامج تدنية تكاليف النقل والتي تساوي مجموع تكلفة نقل الوحدة الواحدة في الكمية المنقولة من كل منبع إلى كل مصب ومنه تكون لدينا دالة الهدف من الشكل التالي

$$\boldsymbol{MIN\ (Z) = X_{11} + 4X_{12} + 5X_{13} + 5X_{21} + 7X_{22} + 3X_{23} + 10X_{31} + 8X_{32} + 9X_{33}}$$

**ثالثا القيود:** كما ذكرنا سابقا فإنه يوجد قيود على الكمية المعروضة في المنابع وقيود على الكمية المطلوبة في المصبات وذلك كمايلي:[1]

**أ- قيود الكمية المعروضة في المنابع:**

- **قيد المنبع الاول ( وحدة الهدي)** : وينص هذا القيد على أن الكميات التي يتم نقلها من هذه المنبع لا تتجاوز الكمية المتوفرة فيه وهي (55) وحدة ويتم نقل من هذا المنبع الكميات التالية ($X_{11}$) إلى المنطقة الوسطى و ($X_{12}$) إلى المنطقة الشرقية و ($X_{13}$) إلى المنطقة الغربية ومنه يكون القيد من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{X_{11} + X_{12} + X_{13} \le 55}$$

- **قيد المنبع الثاني ( وحدة الرحمة)** : نفس الامر يجب أن لا تتجاوز الكميات المنقولة من هذا المنبع الكمية المتوفرة والمقدر ب (45) وحدة ويتم نقل من هذا المنبع الكميات التالية($X_{21}$) **إلى** المنطقة الوسطى و ($X_{22}$) إلى المنطقة الشرقية و ($X_{23}$) إلى المنطقة الغربية ومنه يكون القيد من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{X_{21} + X_{22} + X_{23} \le 45}$$

[1] بتعبير بسيط يمكن شرح طريقة تركيب القيود كمايلي بان مجموع المتغيرات الموجودة في كل صف تكون اقل من او تساوي كمية العرض الموجودة في آخر الصف وكذلك ان تكون مجموع المتغيرات الموجودة في كل عمود أكبر من او تساوي كمية الطلب الموجودة في آخر العمود.

- **قيد المنبع الثالث (وحدة الافاق)** : تتوفر لدى هذا المنبع (20) وحدة من السلع ويتم نقل الكميات التالية ($X_{31}$) إلى المنطقة الوسطى و($X_{32}$) إلى المنطقة الشرقية و($X_{33}$) إلى المنطقة الغربية ومنه يكون القيد من الشكل التالي:

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 20$$

**ب- قيود الكميات المطلوبة في المصبات:**

- **قيد المصب الأول ( المنطقة الوسطى)** : يشترط في هذا القيد أن تكون جميع الكميات التي تصل إلى هذا المصب لاتقل عن الكمية المطلوبة حيث تقدر الكمية المطلوبة في هذا المصب (40) وحدة ويصل إلى هذا المصب الكميات التالية ($X_{11}$) من وحدة الهدى ($X_{21}$) من وحدة الرحمة و($X_{31}$) من وحدة الافاق ومنه يكون شكل القيد كمايلي:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 40$$

- **قيد المصب الثاني (المنطقة الشرقية)** تقدر الكمية المطلوبة في هذا المصب ب (30) وحدة ويصل إلى هذا المصب الكميات التالية ($X_{12}$) من وحدة الهدى ($X_{22}$) من وحدة الرحمة و($X_{32}$) من وحدة الافاق ومنه يكون شكل القيد كمايلي

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 30$$

- **قيد المصب الثالث (المنطقة الغربية)** : تقدر الكمية المطلوبة في هذا المصب ب (50) وحدة ويصل إلى هذا المصب الكميات التالية ($X_{13}$) من وحدة الهدى ($X_{23}$) من وحدة الرحمة و($X_{33}$) من وحدة الافاق ومنه يكون شكل القيد كمايلي

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 50$$

ومنه يكون النموذج كمايلي

$$MIN\ (Z) = X_{11} + 4X_{12} + 5X_{13} + 5X_{21} + 7X_{22} + 3X_{23} + 10X_{31} + 8X_{32} + 9X_{33}$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 55 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 45 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 20 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 40 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 30 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 50 \end{cases}$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0$$

**رابعا طريقة حل مسائل النقل**

### I. حالة تدنية تكاليف النقل ($MIN$):

يتطلب حل مسائل النقل المرور بمرحلتين اولاهما مرحلة ايجاد حل أساسي اولي تم المرحلة الثانية وهي مرحلة تحسين لحل والحصول على الحل الأمثل.

**أ. مرحلة ايجاد حل أساسي اولي:** الحل الأساسي الاولى هو الحل الذي يساوي عنده عدد الخلايا المملوءة ( خلايا الأساس) : [عدد المنابع + عدد المصبات -1] (m+n-1). ويتم التوصل اليه باستخدام ثلاث طرق وهي:

**1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:** يقصد بالزاوية الشمالية الغربية هي اول خلية في الجدول إلى الاعلى والى اليسار ويتم اشباع هذه الخلية بالكامل باستخدام العلاقة التالية:

$$\left(X_{ij} = MIN\left[a_i, b_j\right]\right)$$

حيث يتم اختيار الكمية التي يتم وضعها في الخلية أقل كمية بين كمية العرض والطلب المقابلين لهذه الخلية ثم الانتقال إلى الخلية الموالية في نفس الصف وتملا بنفس الطريقة مع مراعاة توزان الجدول وهكذا حتى يتشبع الصف بالكامل ثم ننتقل إلى الصف التالي واشباع حاجات الخلايا كل حسب طلبه مع ضرورة مراعاة كميات العرض المتوفرة في كل منبع.

**مثال: أوجد الحل الأساسي الأولى باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال السابق؟**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

- **ملاء أول خلية في الجدول:**

نلاحظ من خلال الجدول أن اول خلية هي الخلية التي تربط بين وحدة الهدى والمنطقة الوسط وهذا الخلية يقابلها (55) وحدة في العرض و (40) وحدة في الطلب وبتطبيق القاعدة نجد:

$$\left(X_{11} = MIN[55,40]\right) = 40$$

ومنه يتم ملا الخلية بـ (40) وحدة ويكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**ملاء الخلية الثانية:**

الخلية الثانية في الجدول هي الخلية التي تربط بين وحدة الهدى والمنطقة الشرقية ولتحديد الكمية المناسبة لملأ هذه الخلية نتبع القاعدة السابقة غير اننا نأخذ بعين الاعتبار الكمية التي تم نقلها إلى المنطقة الوسطى وبتالي فيتبقى في الوحدة الهدى الكمية التالية (15=40-55) ومنه لتحديد الكمية المناسبة لملا الخلية نتبع العلاقة التالية:

$$(X_{12} = MIN[15,30]) = 15)$$

ويكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

من خلال هذه الخطوة نلاحظ أن الصف الاول قد تشبع وذلك لأن الكمية المعروضة (55) قد تم توزيعها بالكامل ومنه لايمكن توزيع كمية اخرى نحو المنطقة الغربية وفي هذه الحالة ننتقل إلى الصف الثاني.

**ملاء الخلية الأولى في الصف الثاني**: نلاحظ أن هذه الخلية تربط بين وحدة الرحمة والمنطقة الوسطى غير أن منطقة الوسطى طلبها (40) وحدة وقد تم تلبيتها بالكامل من وحدة الرحمة اذأن لايمكن نقل كمية عبر هذه الخلية وننتقل إلى الخلية الموالية.

**ملاء الخلية الثانية في الصف الثاني**: هذه الخلية تربط بين وحدة الرحمة والمنطقة الشرقية حيث تقدر الكمية المعروضة في وحدة الرحة ب (45) وحدة أما الكمية المطلوبة من المنطقة الشرقية تقدر ب(30) وحدة غير اننا قمنا سابقا بنقل (15) وحدة عبر وحدة الهدى ومنه يتبقى يلزم المنطقة الشرقية (30-15=15) وبتطبيق القاعدة السابقة نحدد الكمية اللازمة لملاء هذه الخلية كمايلي:

$$(X_{22} = MIN[45,15]) = 15$$

ويكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1<br>40 | 4<br>15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7<br>15 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

وباتباع نفس الخطوات ننتقل إلى الخلية الموالية والتي تليها حتى نكتمل من ملاء جميع الخلايا مع ضرورة مراعات توزان الجدول فنحصل على الجدول التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1<br>40 | 4<br>15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7<br>15 | 3<br>30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9<br>20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع القيم الموجودة في صف تساوي العرض المقابل لها وجميع القيم الموجودة في كل عمود تساوي قيمة الطلب المقابل لها وهذا مايؤكد لنا بأنه تم توزيع جميع الكميات المتوفرة في المنابع وكذلك تم تلبية جميع الطلبات للمصبات.

ولتأكد من أن هذا الحل المتوصل اليه حل اولي لابد من تحقق القاعدة أن يكون مجموع الخلايا المملوءة يساوي عدد المنابع مضاف اليه عدد المصبات مطروح من الواحد اذن لابد أن تكون عدد الخلايا المملوءة تساوي (5) خمسة خلايا (3+3-1=5).

اذن من خلال ملاحظة الجدول نجد أن عدد الخلايا المملؤة (تحتوى على كميات ) تساوي خمسة خلايا ومنه نستنتج أن الحل المتوصل اليه هو حل اولي ولحساب تكلفة هذه النقل نقوم بحساب قيمة دالة الهدف كمايلي:

$$(Z) = (40) + 4(15) + 7(15) + 3(30) + 9(20) = 475$$

**2. طريقة أقل التكاليف:** تعتمد هذه الطريقة في اختيار الخلايا التي يتم ملأها من خلال مقارنة التكاليف حيث يتم اختيار الخلية التي لها أقل تكلفة ويتم ملاء الخلية باستخدام نفس القاعدة السابقة ثم الانتقال إلى الخلية الموالية لها والتي تكون تساويها في التكلفة أو الأكبر منها مباشرة ويتم ملاء الخلية بنفس الطريقة مع مراعاة توازن الجدول وهكذا نستمر في العملية حتى يتم توزيع كل المعروض وتلبية كل الطلب.

**ملاحظة: عند وجود خلايا لها نفس التكلفة نختار الخلية التي تأخذ أكبر كمية وعند تساوي الكميات نختار ايهما عشوائيا.**

**مثال**: اوجد الحل الأساسي الاولى للمثال السابق باستخدام طريقة أقل التكاليف

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**الخطوة الأولى:**

نختار الخلية التي لها أقل تكلفة ومن خلال مقارنة التكاليف حيث نجد أقل تكلفة هي للخلية ( وحدة الهدى- المنطقة الوسطى) والتي تكلفتها (1) اذن نقوم بملاء هذه الخلية وذلك باختيار أقل قيمة مابين العرض والطلب المقابل لهذه الخلية وفق القاعدة التالية

$$(X_{11} = MIN[55,40]) = 40)$$

ومنه يكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

### الخطوة الثانية:

بنفس الطريقة الاولى نبحث عن الخلية التي لها أقل تكلفة ضمن الخلايا الفارغة حيث نجد الخلية (وحدة الرحمة- المنطقة الغربية) لها أقل تكلفة والتي تساوي (3) ومن نختار هذه الخلية لملئها ونحدد الكمية بين أقل قيمة للعرض والطلب المقابل حيث:

$$(X_{23} = MIN[45, 50]) = 45)$$

ومنه يتم ملاء الخلية بالكمية (45) ويكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 / 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

### الخطوة الثالثة :

نستمر في عملية اختيار الخلايا الفارغة والقابلة للملاء والتي لها أقل تكلفة حيث نجد في هذه المرة أن أقل تكلفة في الجدول هي (4) وهي تكلفة النقل عبر الخلية ( وحدة الهدى- المنطقة الشرقية) ومنه نختار هذه الخلية ونحدد لها الكمية المناسبة باستخدام دائما نفس القاعدة السابقة مع الأخذ بعين الاعتبار ونحدد الكمية المناسبة لهذه الخلية مع الإخذ بعين الاعتبار أنه قد توزيع (40) وحدة من أصل (55) وحدة المتوفرة في وحدة الهدى وبتالي فإن المتبقي في هذه الوحدة هو (15) وحدة فقط ومنه تكون الكمية المناسبة لهذه الخلية

$$(X_{12} = MIN[15, 30]) = 15$$

اذن يتم ملاء الخلية ( وحدة الهدي- المنطقة الشرقية) ب (15) وحدة ويكون الجدول من الشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 / 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**الخطوة الرابعة:**

نلاحظ في هذه المرة أن أقل تكلفة هي(5) غير أن هذه التكلفة مكررة مرتين هناك الخلية (وحدة الهدى –المنطقة الغربية) والخلية (وحدة الرحمة- المنطقة الوسطى) وفي مثل هذه الحالة نقوم بتحديد الكمية المناسبة لكل خلية وتختار الخلية التي تأخذ أكبر كمية لنملأها أولا لأنه لايمكن ملاء خليتين في نفس المرحلة. غير أننا في هذه الحالة نلاحظ أن الخليتين متشبعتين بالكامل ولايمكنا اضافة أي توزيع أي كمية عبرهما.

ومنه ننتقل إلى الخلية الأخرة الأقل تكلفة ونحاول ملأها بالكمية المناسبة وهكذا نستمر في العملية اختيار الخلية وتحديد الكمية المناسبة لها حتى يتم تصريف كل المعروض وتلبية كل الطلب ومن نتحصل على الجدول التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 / 15 | 3 / 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 / 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

ومنه نلاحظ أن جميع القيم التي في الصفوف تساوي قيمة العرض المقابل لها وأن مجموع القيم الموجودة في كل عمود تساوي الطلب المقابل لها نستنتج أنه تم تصريف كل العرض وتلبية كل الطلب إلا أنه لكي نقول عن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل لابد أن تكون عدد الخلايا المملوءة توافق شرط (3+3-1=5) أي لابد أن تكون خمس خلايا مملوءة على الاقل وهو ما نلاحظه من خلال الجدول ومنه تكون تكلفة هذه النقل تساوي:

$$(Z) = (40) + 4(15) + 3(45) + 8(15) + 9(5) = 400$$

ومنه فإن تكلفة الحل الأساسي الاولى باستخدام طريقة أقل تكلفة قدرت ب(400) وهي أقل من لتكلفة المتحصل عليها باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتي كانت (475).

**3. طريقة فوقل التقريبية (الفرق الاعظمي):**

تعتمد هذه الطريقة في عملية تحديد الخلية الواجب ملاءها على مجموعة من الخطوات التالية:

- **خطوة 1:** ايجاد الفرق بين أقل تكلفتين مواليتين في كل عمود وكل سطر.

➢ **خطوة 2:** نبحث عن أكبر فرق في الخطوة السابقة ونختار الخلية ذات التكلفة الاقل من ضمن الخليتين اللاتين نتج عنهما هذا الفرق.

➢ **خطوة 3:** نقوم بملاء هذه الخلية باستخدام قاعدة $\left(X_{ij} = MIN\left[a_i, b_j\right]\right)$ .

➢ **خطوة4:** نكرر الخطوات الثلاثة السابقة مع تفادي الخلايا المشبعة حتى يتم تصريف كل المعروض وتلبية كل الطلب.

**ملاحظة** في حالة ايجاد فروق متساوية فإننا نقارن بين أقل تكلفتين دنيويتين ونختار أقل تكلفة في حالة تساوي التكلفتين الدنيويتين نختار التكلفة الخلية التي تأخذ أكبر كمية وفي حالة تساوي الكميات نختار احدهما عشوائيا.

**مثال**: اوجد الحل الأساسي الاولى للمثال السابق باستخدام طريقة فوقل التقريبية.

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**الحل**:

➢ **الخطوة الاولى:** في المرحلة الاولى من هذه الخطوة نقوم بحساب الفرق بين أقل تكلفتين بالنسبة لكل سطر وكل عمود حيث نجد بالنسبة لعمود المنطقة الوسطى **(1-5=4)** والعمود المنطقة الشرقية **(4-7=3)** وبالنسبة لعمود المنطقة الغربية **(3-5=2).**

اما بالنسبة للأسطر فنجد عند سطر وحدة الهدى **(1-4=3)** وبالنسبة سطر وحدة الرحمة **(3-5=2)** وبالنسبة لسطر وحدة الوفاق **(8-9=1)**.

أما في المرحلة الثانية فنقوم باختيار أكبر حاصل فرق من بين الفروق المتحصل عليها حيث عند المقارنة نجد $\mathbf{4 = (1\ ,2\ ,3\ ,2\ ,3\ ,4)MAX}$ اذن أكبر فرق هو **(4)** وهو ناتج عن فرق بين **(1-5=4).**

ومنه في مرحلة اخرى نختار أقل تكلفة من بين التكلفتين التي تم الحصول على الفرق منهما حيث نجد أن **(1)** هي أقل تكلفة وهي تكلفة النقل بين (وحدة الهدى-المنطقة الوسطى) ومنه نقوم بملاء هذه الخلية وتحديد الكمية المناسبة باستخدام نفس القاعدة السابقة $\mathbf{min(55, 40) = 40}$ .

ومنه يكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

➢ **الخطوة الثانية:**

بنفس الطريقة السابقة نقوم بتحديد الخلية الثانية التي سوف نقوم بملأها مع مراعاة الخلايا المشبعة (التي لا يمكننا نقل عبرها كميات) مثل الخانتين اللتين في عمود المنطقة الوسطى حيث أن هذه المنطقة طلبها 40 وحدة وتم تلبيته من وحدة الرحمة في الخطوة السابقة ومنه فإننا لايمكننا نقل أي كمية إلى هذه المنطقة .

وبعد حساب الفروق نجد أكبر فرق يساوي (4) وهو حاصل طرح (**7-3**) ومنه أقل تكلفة بينهما هي (3) وهي تكلفة النقل عبر الخلية (وحدة الرحمة- المنطقة الغربية ) اذن يتم ملاء هذه الخلية باقل قيمة مابين العرض والطلب المقابل لها وهو (45) ويكون لدينا الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

وباتباع نفس الخطوات في تحديد الخلايا الواجب ملاها والكمية المناسبة لها نتحصل على الجدول الاخير التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1   40 | 4   15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3   45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9   5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

وبمأن مجموع القيم الموجودة في كل عمود تساوي قيمة الطلب المقابل وكذلك مجموع القيم الموجودة في كل سطر تساوي قيمة العرض المقابل وكذلك لدينا خمس خلايا مملوءة اذن الحل المتحصل عليه هو حل امثل[1].

$$(Z) = (40) + 4(15) + 3(45) + 8(15) + 9(5) = 400$$

**ب. اختبار أمثلية الحل وتحسينه:**

**1. اختبار أمثلية الحل:**

للقيام بهذه الخطوة نستخدم طريقة الحجر المتحرك حيث تتمثل هذه الطريقة في البحث عن الخلايا غير داخلة في الحل الأساسي الاولى والتي من شأنها أن تؤدي إلى تدنية التكاليف في حالة ادخالها إلى الحل لذلك يتم اختبار الخلايا غير داخلة في الحل ( الخلايا الفارغة) اذا ماكان نقل أي وحدة عبرها يؤدي إلى خفض التكاليف لدى يتم حساب التكاليف الحدية. ويتم تطبيق هذه الطريقة باتباع الخطوات التالية

- ✍ **خطوة الاولى:** تكوين ممرات على أن يكون الممر يحتوي على خلية واحدة فارغة.
- ✍ **خطوة الثانية:** وضع إشارة موجبة في المربع الذي تنقل اليه الوحدات وإشارة سالبة في المربع الذي تنقل منه الوحدات.
- ✍ **خطوة الثالثة:** مراعاة حصول التوزان في كميات العرض والطلب في الجدول على مستوى الصفوف وكذلك الاعمدة لذلك في كل صف أو عمود تكون إشارة سالبة وإشارة موجبة.

نقوم بحساب التكلة الحدية $\delta_{ij}$ لكل ممر وذلك من خلايا جمع تكلفة الخلية التي لها إشارة موجبة وطرح تكلفة الخلية التي لها إشارة سالبة.

والتكاليف الحدية لها ثلاث حالات هي:

[1] نلاحظ ان الحل المتحصل عليه وفق طريقة فوقل التقريبية هو نفسه المتحصل عليه باستخدام طريقة اقل التكاليف ومختلف تماما عن الحل المتحصل عليه وفق طريقة الزاوية الشمالية الغربية ومن هنا نستنتج انه ليس من ضروري ان تعطي كل الطرق نفس الحل بل الحلة العادية هو ان تعطي كل طريقة حلها الخاص والحالة الفردية هو الوصول إلى حل موحدة لجميع الطرق.

- **تكلفة حدية أكبر من الصفر** $\delta_{ij} > 0$ : هذا يعنى أن نقل كمية عبر هذه الخلية يؤدي إلى زيادة التكاليف.
- **تكلفة حدية أقل من الصفر** $\delta_{ij} < 0$ : هذا يعنى أن نقل كمية عبر هذه الخلية يؤدي إلى تخفيض التكاليف لدى يجب نقل أكبر كمية ممكنة عبر هذه الخلية.
- **تكلفة حدية تساوي الصفر** $\delta_{ij} = 0$ : هذا يعنى وجود خطة نقل اخرى ولكن بنفس التكلفة الخطة الاولى (حل بديل).

2. **تحسبن الحل** لتحسين الحل نتبع الخطوات التالية:

- **خطوة الاولى- تحديد خلية التحسين:** وهي الخلية التي يمكن منة خلال تدنية تكليف النقل وهي الخلية التي لها أكبر تكلفة حدية $\delta_{ij}$ سالبة .
- **خطوة الثانية - تحديد كمية التحسين:** وهي الكمية التي نقوم بنقلها عبر خلية التحسين وهي أقل كمية في الخلايا التي لها شارة سالبة في ممر خلية التحسين.
- **خطوة الثالثة - عملية التحسين:** وذلك من خلال اضافة كمية التحسين إلى الخلايا ذات الإشارة الموجبة في ممر خلية التحسين وطرح كمية التحسين من الخلايا ذات الإشارة السالبة في ممر خلية التحسين

**مثال** اختبر أمثلية الحل المتحصل عليه باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية وحسنه إلا لم يكن أمثل.

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 / 15 | 3 / 30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 / 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

$$(Z) = (40) + 4(15) + 7(15) + 3(30) + 9(20) = 475$$

لاختبار أمثلية هذا الحل نقوم بحساب التكاليف الحدية للخلايا الفارغة حيث نلاحظ أنه لدينا أربع خلايا فارغة.

❶ **الخلية الفارغة الاولى: ( وحدة الهدى- المنطقة الغربية)**

نحاول تكوين ممر حيث يكون الممر يحتوى على خلية فارغة واحدة فقط وباقي الخلايا كلها مملوءة ويحتوى كذلك على إشارة (+) و (-) حيث الإشارة (+) تعني أنه تم اضافة وحدة واحدة من السلعة إلى هذه الخانة والإشارة (-) تعني أنه قد تم حذف وحدة واحدة من السلعة.

حيث تقوم فكرة اختبار أمثلية الحل على محاولة نقل وحدة واحدة من السلعة عبر خلية فارغة واحدة فاذا كان هذا النقل يؤدي إلى تخفيض التكلفة نقوم بنقل أكبر كمية ممكنة عبر هذه الخلية وهذا لتخفيض التكلفة إلى ادنى قيمة ممكنة.

وبتطبيق على الخلية الفارغة الاولى **(وحدة الهدى- المنطقة الغربية)** نجد مايلي:

نقوم بوضع إشارة موجب (+) في الخلية الفارغة التي سوف نقوم باختبارها وهي الخلية **(وحدة الهدى – المنطقة الغربية)** وهذه الإشارة تعتبر اضافة وحدة واحدة إلى هذا الصف والعمود الموجودة فيه هذه الخلية وبتالي سوف يصبح المجموع أكبر بوحدة واحدة من الطلب والعرض المقابل لهذه الخلية وهنا لابد من تعديل هذا الاختلال، ولإجراء هذا التعديل لابد من انقاص وحدة واحدة من خلايا الصف والعمود الموجودة فيه هذه الخلية ومن خلال الجدول نلاحظ أنه وبالنسبة للصف يمكن انقاص وحدة من خلية (وحدة الهدى – المنطقة الوسطية) غير اننا عند اتخاذ هذا الاجراء سوف نظر إلى التعامل مع الخلايا الفارغة الموجودة في عمود هذه الخلية وهذا منافي لشروط الممر الذي تشترط وجود خلية فارغة واحدة فقط وبتالي سيتم انقاص وحدة واحدة من الخلية (وحدى الهدى – المنطقة الشرقية) وذلك بوضع إشارة سالب في هذه الخلية ويكون الشكل كالتالي:

| المنابع $S_i$ \ المصبات $P_j$ | المنطقة الوسطية | المنطقة الشرقية | المنطقة الغربية | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1   40 | 4   15 (-) | 5   (+) | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7   15 | 3   30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9   20 | 20 |

بعد وضع الإشارة السالبة في الخلية (وحدة الهدى – المنطقة الشرقية) نلاحظ أن عمود هذه الخلية أصبح ناقص بوحدة واحدة والتي تم انقاصها من هذه الخلية وهنا لابد من تعديل هذا ولابد من العمود وازالت الاختلال وحيث يتم اضافة وحدة واحدة بوضع إشارة موجبة في احدى خلايا هذا العمود اختيار الخلية المملؤة وهي الخلية ( وحدة الرحمة – المنطقة الشرقية وتوضع فيها إشارة موجبة وبتالي يتم تعديل هذا العمود ويصبح الجدول كالتالي:

| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |
|---|---|---|---|---|
| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | المنطقة الوسطية | المنطقة الشرقية | المنطقة الغربية | العرض |
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 15 (−) | 5 (+) | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 15 (+) | 3 30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

إن وضع الإشارة الموجبة في الخلية (وحدة الهدى – المنطقة الشرقية) يجعل من السطر الموجودة فيه هذه الخلية مختل ولديه وحدة اضافية وبتالي لابد من تعديله بحذف هذه الوحدة والتي يتم حذفها من الخلية المقابلة لها وهي الخلية (وحدة الرحمة- المنطقة الغربية) وبتالي يكون جميع الاعمدة والاسطر متوازنة ويكون الجدول كمايلي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | المنطقة الوسطية | المنطقة الشرقية | المنطقة الغربية | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 15 (−) | 5 (+) | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 15 (+) | 3 (−) 30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 20 | 20 |

وبهذا يصبح الممر مكتمل ونلاحظ كذلك توفر شروط الممر الصحيح حيث الممر يضم خلية فارغة واحدة فقط وأن كل صف أو عمود يمر عليه الممر يحتوى على اشارتين واحدة موجبة والاخرى سالبة، وهنا تأتي الخطوة الثانية وهي حساب التكلفة الحدية للخلية (وحدة الهدى- المنطقة الغربية) وذلك بجمع تكاليف الخلايا ذات الإشارة الموجبة وطرح تكاليف الخلايا ذات الإشارة السالبة، ومنه نتحصل على المعادلة التالية:

$$\delta_{13} = {}^{[1]}\text{خ}_{13} - \text{خ}_{12} + \text{خ}_{22} - \text{خ}_{23} = 5 - 4 + 7 - 3 = (+5)$$

نلاحظ أن التكلفة الحدية تساوى (5+) وهي قيمة موجبة وتعني أن النقل عبر هذه الخلية سوف يؤدي إلى زيادة التكاليف وبتالي لايمكن نقل أي وحدة عبر هذه الخلية.

[1] يقصد بحرف (خ) اختصار لكلمة خليه، أما الارقام فرقم الاول يشير إلى سطر الذي توجد في الخلية والرقم الثاني يشير إلى عمود الذي توجد في الخلية ، فمثلا الخلية (وحدة الهدى – المنطقة الشرقية ) توجد في السطر الأول والعمود الثالث وبتالي تكتب بالشكل التالي (خ$_{13}$)

### ❷ الخلية الفارغة الثانية: ( وحدة الرحمة- المنطقة الوسطية)

بتباع نفس الخطوات السابقة انطلاقا من أول خطوة وهي وضع الإشارة الموجبة في الخلية التي نرغب في اختبارها وهي الخلية ( وحدة الرحمة – المنطقة الوسطية) ومحاولة تعيل المجاميع على مستوى الاسطر والاعمدة ومراعاة للشروط الممر الصحيح وهي وجود خليه فارغة واحدة في الممر وكل سطر أو عمود يمر عليه الممر يضم اشارتين واحدة موجبة والاخرى سالبة نتحصل على الشكل التالي:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 (−) 40 | 4 (+) 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 (+) | 7 (−) 15 | 3 30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 | 9 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

ويتم حساب التكلفة الحدية لهذه الخلية كمايلي:

$$\boldsymbol{\delta_{21} = خ_{21} - خ_{11} + خ_{12} - خ_{22} = 5 - 1 + 4 - 7 = (+1)}$$

نلاحظ أن التكلفة الحدية موجبة وبتالي فإن النقل عبر هذه الخلية سوف يعمل على زيادة تكليف النقل ومنه لايمكن نقل أي وحدة عبر هذه الخلية.

### ❸ الخلية الفارغة الثالثة (وحدة الوفاق_ المنطقة الوسطية):

نستمر في عملية اختبار الخلايا كلها وباتباع نفس الخطوات السابقة نقوم باختبار الخلية ( وحدة الوفاق – المنطقة الوسطية) فنتحصل على الشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | المنطقة الوسطية | المنطقة الشرقية | المنطقة الغربية | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 (−) 40 | 4 (+) 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 (−) 15 | 3 (+) 30 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 (+) | 8 | 9 (−) 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

ونقوم بحساب التكلفة الحدية لهذه الخلية فنجد مايلي:

$$\boldsymbol{\delta_{31} = خ_{31} - خ_{11} + خ_{12} - خ_{22} + خ_{23} - خ_{33} = 10 - 1 + 4 - 7 + 4 - 1 = (+0)}$$

نلاحظ أن التكلفة الحدية كانت اشارتها موجبة ومعدومة وبتالي فإن النقل عبر هذه الخلية لايزيد ولايقلل من تكاليف النقل حيث يمكن النقل عبر هذه الخلية بحيث تتغير خطة النقل ولكن تبقى التكاليف ثابتة وهو مانسميه بالحل البديل للمسالة النقل.

### ❹ الخلية الفارغة الرابعة ( وحدة الوفاق- المنطقة الشرقية):

تعتبر هذه آخر خلية فارغة في الجدول ويتم اختبارها بنفس الطريقة حيث نقوم بتحديد ممر لهذه الخلية والذي يأخذ الشكل التالي:

| العرض | المنطقة الغربية | المنطقة الشرقية | المنطقة الوسطية | المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 55 | 5 | 4   15 | 1   40 | وحدة الهدى |
| 45 | 3   (+) 30 | 7   15 (−) | 5 | وحدة الرحمة |
| 20 | 9   (−) 20 | 8   (+) | 10 | وحدة الوفاق |

تكون تكلفتها الحدية بالشكل التالي:

$$\delta_{32} = \text{خ}_{32} - \text{خ}_{22} + \text{خ}_{23} - \text{خ}_{33} = 8 - 7 + 3 - 9 = (-5)$$

نلاحظ أن التكلفة الحدية لهذه الخلية لها إشارة سالبة وهو مايعني أن الحل ليس أمثل وأنه يمكن التقليل من تكاليف النقل عن طريق نقل كمية عبر هذه الخلية.

ولهذا لابد من تحسين الحل، ولتحسين الحل نتبع الخطوات التالية:

1. **تحديد الخلية التي سوف تتم بها عملية تحسين الحل:** وهي الخلية التي سنقوم بنقل عبرها وحداة من السلع، وستكون الخلية التي لها أكبر تكلفة حدية بإشارة سالبة وفي حالتا هذه لدينا تكلفة حدية سالبة واحدة وهي للخلية ( خ31) 'وحدة الوفاق- المنطقة الشرقية).
2. **تحديد الكمية التي سيتم بها التحسين:** وهي الكمية التي يمكن نقلها عبر خلية التحسين حيث يتم نقل أكبر كمية ممكنة وتتمثل أكبر كمية ممكنة في أقل كمية موجودة في الخلايا التي لها إشارة سالبة في الممر الخاص بهذه الخلية، حيث نجد في الممر الخاص بخلية ( وحدة الوفاق – المنطقة الشرقية )[1] هناك خليتين ذات إشارة سالبة وهما (وحدة الرحمة – المنطقة الشرقية ) وتبلغ كميتها(15) وحدة ولدينا خلية (وحدة الوفاق – المنطقة الغربية) وكميتها (20 وحدة) ومنه تكون أقل كمية بينهما هي أكبر كمية ممكن نقل عبر خلية التحسين:

$$MIN\ (15, 20) = 15$$

ومنه تكون الكمية التي سوف يتم التحسين بها هي (15) وحدة.

3. **التحسين:** للقيام بعملية التحسين يتم اضافة كمية التحسين إلى الكمية التي لها إشارة موجبة وطرحها من الخلية التي لها إشارة سالبة وذلك كمايلي:

[1] عليك بالرجوع إلى الطريقة حساب الممر.

❶ **الخلية (خ31)- ( وحدة الوفاق – المنطقة الشرقية):** هذه الخلية كانت فارغة وبالتالي تتوفر فيها **(0)** وحدة ولها إشارة موجبة يتم اضافة لها **(15)** وحدة ويكون المجموع كمايلي: **(0+ 15 =15)**

❷ **الخلية (خ22)- ( وحدة الرحمة – المنطقة الشرقية):** لهذه الخلية إشارة سالبة في الممر ويحتوى على **(15)** وحدة ومنه يتم طرح منها **(15)** وحدة ويكون النتاج مايلي: **(15-15=0)**، ومنه تكون هذه الخلية فارغة في خطة النقل المعدلة.

❸ **الخلية (خ23)- ( وحدة الرحمة – المنطقة الغربية):** إشارة هذه الخلية في الممر موجبة وتحتوى على **(30)** وحدة ويتم اضافة لها **(15)** وحدة الخاصة بالتحسين فيكون المجموع كمايلي: **(30+15 =45).**

❹ **الخلية (خ33)- (وحدة الوفاق –المنطقة الغربية):** هذه الخلية لها إشارة سالبة في الممر وتحتوى على **(20)** وحدة، نقوم بطرح منها **(15)** وحدة لتحسين الحل فيكون الناتج كمايلي: **(20– 15 =5).**

ويكون الجدول كمايلي:

| المنابع $S_i$ \ المصبات $P_j$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 / 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 / 15 | 9 / 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

وتكون تكلفة النقل تساوي:

$$(Z) = (40) + 4(15) + 3(45) + 8(15) + 9(5) = 400$$

ومنه نلاحظ أنه تم تحسين الحل وذلك بتخفيض قيمة تكلفة النقل إلى 400 ون بعد أن كانت تقدر بـ 475ون في الحل الأولي.

وهذه لا تعتبر خطوة نهائية في الحل بل يتم اعادة عملية الاختبار من جديد لجميع الخلايا الفارغة انطلاقا من جدول الحل الجديد المتحصل عليه بعد عملية التحسين وفي حالة كانت هناك خلايا لها تكاليف حدية سالبة يتم اعادة تحسين الحل بنفس الخطوات السابقة واعادة الاختبار من جديد بعد التحسين وهكذا تستمر العملية (اختبار ثم تحسين) ولا نتوقف عن هذه العملية الا إذا توصلنا بعد الاختبار أن جميع التكاليف الحدية موجبة أو معدومة وبتالي نكون قد تحصلنا على الحل الأمثل والذي له أقل تكلفة النقل ممكنة.

وبتالي سوف نعيد اختبار الخلايا الفارغة المتحصل عليها في الجدول الجديد بعد عملية التحسين وذلك كمايلي:

❶ **الخلية الفارغة الأولي: (وحدة الهدى –المنطقة الغربية):**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 (−) 15 | 5 (+) | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 (+) 15 | 9 (−) 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

$$\delta_{13} = \text{خ}_{31} - \text{خ}_{12} + \text{خ}_{32} - \text{خ}_{33} = 5 - 4 + 8 - 9 = (+0)$$

❷ **الخلية الفارغة الثانية: (وحدة الرحمة –المنطقة الوسط)**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 (−) 40 | 4 (+) 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 (+) | 7 | 3 (+) 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 (−) 15 | 9 (−) 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

$$\delta_{21} = \text{خ}_{21} - \text{خ}_{11} + \text{خ}_{12} - \text{خ}_{13} + \text{خ}_{33} - \text{خ}_{23} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = (+6)$$

❸ **الخلية الفارغة الثالثة: (وحدة الرحمة – المنطقة الشرقية)**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 40 | 4 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 (+) | 3 (−) 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 | 8 (−) 15 | 9 (+) 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

$$\delta_{22} = \text{خ}_{22} - \text{خ}_{23} + \text{خ}_{33} - \text{خ}_{31} = 7 - 3 + 9 - 8 = (+5)$$

❹ **الخلية الفارغة الرابعة: (وحدة الوفاق – المنطقة الوسط)**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | منطقة الوسط | منطقة الشرق | منطقة الغرب | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة الهدى | 1 (−) 40 | 4 (+) 15 | 5 | 55 |
| وحدة الرحمة | 5 | 7 | 3 45 | 45 |
| وحدة الوفاق | 10 (+) | 8 (−) 15 | 9 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

$$\boldsymbol{\delta_{31} = \text{خ}_{31} - \text{خ}_{11} + \text{خ}_{12} - \text{خ}_{23} = 10 - 1 + 4 - 8 = (+5)}$$

من خلال الجداول السابقة وقيمة التكاليف الحدية المبينة أسفل كل جدول يتضح لنا أن كل التكاليف الحدية موجبة أو معدومة وأنه لايوجد أي تكلفة حدية سالبة ومنه لا يمكن نقل أي كمية عبر هذه الخلايا الفارغة وأن الحل المتوصل أليه هو حل امثل وتكون خطة النقل بالشكل التالي:

- يتم نقل (40) وحدة من وحدة الهدى إلى المنطقة الوسطية وذلك بتكلفة تساوي (40ون).
- يتم نقل (15) وحدة من وحدة الهدى إلى المنطقة الشرقية وذلك بتكلفة تساوي (60ون).
- يتم نقل (45) وحدة من وحدة الرحمة إلى المنطقة الغربية وذلك بتكلفة تساوي (135ون).
- يتم نقل (15) وحدة من وحدة الوفاق إلى المنطقة الشرقية وذلك بتكلفة تساوي (90ون).
- يتم نقل (5) وحدات من وحدة الوفاق إلى المنطقة الغربية وذلك بتكلفة تساوي (45ون).

وتكون التكلفة الاجمالية لخطة النقل هذه تقدر بـ 400 ون.

## II. حالة تعظيم أرباح النقل (MAX):

إن حل مشكلة النقل لايقتصر فقط على حالة تدنية التكاليف فقد يكون الهدف من عملية النقل تعظيم الارباح وفي هذا الحالة فعوض عن اشتمال الجدول على تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المنبع إلى المصب سيكون يحتوى على الربح المحقق من نقل وحدة واحدة من المنبع إلى المصب وهذا الامر سيجعلنا نغير بعض المبادئ التي قامت عليها طرق الحل السابقة، إلا أننا وللحفاظ على نفس الخطوات الحل السابقة بكل تفاصيلها نحاول أن نحول مشكل النقل من تعظيم الارباح إلى مشكلة تدنية التكاليف وذلك باتباع القاعدة التالية: $\boldsymbol{C'_{ij} = MAX\ C_{ij} - C_{ij}}$

حيث:

$C'_{ij}$ : تمثل تكاليف النقل الخاصة بجدول النقل الجديد.

$MAX\ C_{ij}$: تمثل أكبر ربح في جدول النقل.

$C_{ij}$: تمثل أرباح النقل من المنبع $i$ إلى المصب $j$.

وبتطبيق هذه القاعدة نتحصل على جدول نقل جديد نعتبره كمشكلة نقل هدفها تدنية التكاليف ونتبع نفس الخطوات السابقة في الحصول على الحل الأمثل، ماعدا في حالة حساب الربح الاجمالي للعملية النقل يتم استخدام الارباح الأولية.

**مثال**: مؤسسة ترغب في نقل منتجاتها من وحداتها الانتاجية الثلاث (A ,B,C) إلى مناطق التسويق (D,E,F) وذلك لتعظيم أرباحها والجدول التالي يوضح ذلك:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 6 | 1 | 800 |
| B | 4 | 8 | 3 | 400 |
| C | 6 | 7 | 5 | *700* |
| الطلب | 500 | 1100 | 300 | 1900 |

هذه المسألة تعتبر مشكلة نقل هدفها تعظيم الأرباح ولحلها لابد من تحويلها إلى مشكلة نقل هدفها تدنية التكاليف وذلك باستخدام القاعدة السابقة:

$$C'_{ij} = MAX\ C_{ij} - C_{ij}$$

حيث نقوم باستخراج أكبر ربح من الجدول ونطرح منه جميع التكاليف، ومن خلال الارباح المدونة في الجدول نجد أكبر ربح هو (8) حيث $\mathrm{MAX}(7, 6, 1, 4, 8, 3, 5) = 8$

نقوم بطرح القيمة (8) من جميع الارباح الموجودة في الجدول فنتحل على الجدول التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 7 | 800 |
| B | 4 | 0 | 5 | 400 |
| C | 2 | 1 | 3 | *700* |
| الطلب | 500 | 1100 | 300 | 1900 |

وانطلاقا من هذا الجدول يتم اتباع الخطوات الخاصة بحل مسائل النقل لنتحصل على الحل الأمثل بنفس الخطوات التي تم اتباعها في المثال السابق في حالة تدنية التكاليف، غير أنه عند الوصول إلى الحل الأمثل يتم احتساب الارباح اعتمادا على الارباح المدونة في الجدول الاصلي.

## خامسا: حالات خاصة في مسائل النقل

### 1. حالة عدم تساوي مجموع العرض مع مجموع الطلب:

إن تساوي مجموع الطلب مع مجموع العرض تعتبر شرط من شروط استخدام مسائل النقل إلا أنه قد يحدث أحيانا وأن يكون هناك اختلال بين المجموعين، وفي هذه الحالة نلجأ إلى اضافة مصب وهمي أو منبع وهمي حسب الطرف الأقل تكون كميته تساوي الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض وتكاليف أو أرباحه تساوي صفر.

**مثال (1): حالة مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 6 | 1 | 800 |
| B | 4 | 8 | 3 | 400 |
| C | 6 | 7 | 5 | *700* |
| الطلب | 500 | 1100 | 200 | *1900* / *1800* |

نلاحظ أن مجموع العرض يساوي 1900 وحدة أما الطلب فمجموعه يساوي 1800 وحدة وبتالي هناك اختلال بين المجموعين ولابد من تعديله قبل البداء في عملية الحل، لأن حل مسالة النقل يشترط تساوي المجموعين.

وبمأن العرض أكبر من الطلب فسيتم اضافة مصب وهمي (G) تكون كميته الفرق بين المجموعين، أي (1900-1800=100) وتكاليفه تساوي الصفر ويكون الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | G وهمي | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 6 | 1 | 0 | 800 |
| B | 4 | 8 | 3 | 0 | 400 |
| C | 6 | 7 | 5 | 0 | *700* |
| الطلب | 500 | 1100 | 200 | 100 | *1900* / *1900* |

**مثال (2): حالة مجموع الطلب أكبر من مجموع العرض**

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 6 | 1 | *600* |
| B | 4 | 8 | 3 | 400 |
| C | 6 | 7 | 5 | *700* |
| الطلب | 500 | 1100 | 300 | *1700* / *1900* |

إذن نلاحظ في هذه الحالة أن مجموع الطلب أكبر من مجموع العرض ولتعديل هذه الحالة يتم اضافة مصب وهمي (Z) تكون كميته الفرق بين الطلب والعرض (1900-1700=200) وتكاليف تساوي الصفر كمايلي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | D | E | F | العرض |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 6 | 1 | *600* |
| B | 4 | 8 | 3 | 400 |
| C | 6 | 7 | 5 | *700* |
| Z وهمي | *0* | *0* | 0 | *200* |
| **الطلب** | 500 | 1100 | 300 | *1900* / *1900* |

2. **حالة طرق التوزيع الممنوعة:** وهي مسألة النقل التي تتوفر على حالة ممنوع النقل عبرها أي هناك شروط بعدم نقل السلع من منبع معين إلى مصب معين، وتعتبر حالة استثنائية في مسائل النقل ويتم حل مسائل النقل في هذه الحالة بفرض تكلفة للعملية النقل الممنوعة هذا يرمز لها بالرمز **(M)** تكون كبيرة جدا في حالة كان الهدف من مسألة النقل تدنية التكليف وتأخد قيمة صغيرة جدا في حالة كان الهدف من مسالة النقل تعظيم الأرباح.

**مثال**: أوجد خط النقل للمسألة التالية بأقل تكلفة ممكنة إذا علمت أنه لا يمكن نقل السلع من ميناء الشرق إلى مصانع الهلال؟

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | مصانع الرحمة | مصانع الهلال | مصانع السلام | العرض |
|---|---|---|---|---|
| ميناء الشرق | 4 | / | 3 | 1000 |
| ميناء الوسط | 2 | 1 | 7 | 2100 |
| ميناء الغرب | 5 | 3 | 2 | 1500 |
| الطلب | 1700 | 2500 | 400 | 4600 / 1900 |

إذن نلاحظ من خلال جدول مسألة النقل بأنه لاتوجد تكلفة للنقل من ميناء الشرق باتجاه مصانع الهلال مما يعني بأن هذا النقل ممنوع أو مقطوع وللحل المسألة نقوم بفرض أن تكلفة النقل عبر هذا الطريق الممنوع تساوي **(M)** بحث تأخذ **(M)**قيمة كبيرة جدا أكبر من كل تكاليف الموجودة في الجدو ويصبح الجدول بالشكل التالي:

| المصبات $P_j$ / المنابع $S_i$ | مصانع الرحمة | مصانع الهلال | مصانع السلام | العرض |
|---|---|---|---|---|
| ميناء الشرق | 4 | M | 3 | 1000 |
| ميناء الوسط | 2 | 1 | 7 | 2100 |
| ميناء الغرب | 5 | 3 | 2 | 1500 |
| الطلب | 1700 | 2500 | 400 | 4600 / 1900 |

**ملاحظة**: في حالة كان هدف مسألة النقل تعظيم الأرباح وكان هناك مشكل طريق مقطوع وممنوع فإنه يتم فرض القيمة (M) بعد تعديل المسألة باستخدام القاعدة: $C'_{ij} = MAX\ C_{ij} - C_{ij}$.

**3. حالة الحل الأساسي الناقص:** نعلم أنه مشروط تحسين الحل الأولي أن تكون الخلايا المملوءة تساوي عدد المنابع + عدد المصبات-1 **(m+n-1)**، حيث في حالة عدم توفر هذا الشرط في الجل الأولي فإنه تكون هناك صعوبة في تكوين ممر لبعض الخلايا الفارغة وهذا لاختبارها.

ولحل هذه المشكلة نملأ إحدى الخانات الفارغة بالقيمة $(\varepsilon)$ وهي قيمة متناهية الصغر ونختار الخلية الفارغة التي لها أقل تكلفة.

## خلاصة عملية

تعتبر مسائل النقل من الحالات الخاصة للبرمجة الخطية وتستخدم عند حل مشاكل المتعلقة بعملية نقل السلع أو الأشخاص من أماكن معلومة إلى مناطق معلومة ولحل هذه المسائل هناك خطوتين أساسيتين هما:

**أولا- ايجاد حل أولي:** وهو خطة نقل مبدئية يتم تحسينها فيما بعد، وللحصول على حل أولي هناك ثلاث طرق هي:

**1 - طريقة الزاوية الشمالية الغربية.**

**2- طريقة أقل التكاليف.**

**3- طريقة فوقل (الفرق الاعظمي).**

**ثانيا: اختبار أمثلية الحل وتحسينه:** في هذه الخطوة نقوم باختبار فيما إذا كان الحل الأولى المتحصل عليه أمثل أم لا؛ حيث إذا كان أمثل نقوم بتباع خطة النقل المتحصل عليها أما إذا كان غير أمثل فنقوم بإعادة تحسينة حتى يكون حل أمثل وللقيام بهذه الخطوة تبع **طريقة الحجر المتحرك.**

إن طريقة حل مسائل النقل في حالة تدنية التكاليف تختلف عن حالة تعظيم الأرباح إلا أنه هناك طريقة لتحويل مسألة تعظيم الأرباح إلى مسألة تدنية التكاليف واتباع نفس الخطوات، ولإجراء هذا التحويل نتبع العلاقة التالية:

$$C'_{ij} = MAX\ C_{ij} - C_{ij}$$

وهناك بعض الحالات الخاصة لمسألة النقل والتي قد تنشأ عن عدم توفر بعض الشروط مثل حالة عدم تساوي مجموع العرض مع مجموع الطلب أو أن تكون عدد الخلايا المملوءة في الحل الأولي أقل من مجموع **عدد المنابع وعدد المصبات ناقص واحد**، وقد تكون نتيجة ظروف خاصة بالمسألة مثل حالة التوزيع الممنوع. ولكل من هذه الحالات هناك طريقة خاصة لحل المشكل وإيجاد الحل المثل.

# المحور الثالث

# البرمجة غير خطية

# بقيود وبدون قيود

# المحور الثالث: مدخل إلى البرمجة غير خطية بقيود وبدون قيود

**مقدمة:**

البرمجة غير الخطية ***Nonlinear Programming*** أو البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما غير خطية، ويعتقد أن أكثر الطرق شيوعاً لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية، ويعتبر البرنامج غير الخطي أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق على أمثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية.

**1- أمثلية المتغير المفرد بقيد وبدون قيد**

البرنامج غير الخطي، غير المقيد، للمتغير المفرد يأخذ الصيغة الآتية: $y = f(x)$، حيث أن: $f(x)$ دالة غير خطية في المتغير المفرد $x$، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المقيدة (∞ ,∞-). أما إذا كانت الفترة مقيدة **[a,b]**، فإن المسألة تصبح على الشكل الآتي:

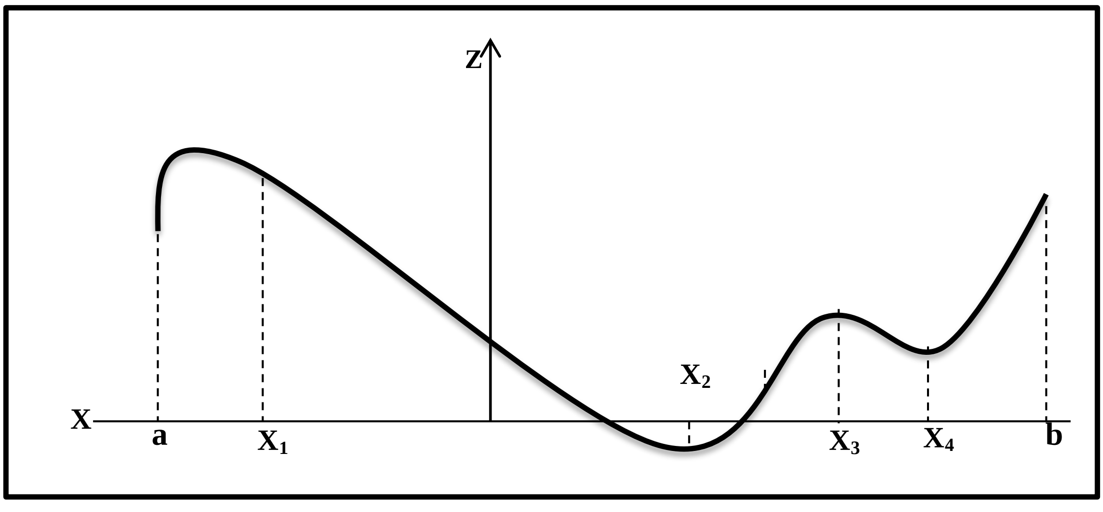
أمثلية: $y = f(x)$

علماً بأن: $a \le x \le b$

فهو يعتبر برنامجاً غير خطياً، مقيداً، لمتغير واحد.

**1-1-الأمثلية المحلية والشاملة:** للدالة الهدفية $f(x)$ حد أدنى محلي (نسبي) عند $x_0$ إذا وجدت فترة صغيرة ذات مركز عند $x_0$ بحيث $f(x) \ge f(x_0)$، لكل قيم $x$ التي تحدد فيها الدالة. فيكون الحد الأدنى عند $x_0$محلياً(نسبياً) أو شاملاً(مطلقاً) وتعرف الحدود الأعلى المحلية والشاملة بالتماثل.

**مثال:** الدالة المرسومة في الشكل أدناه مقيدة في المجال **[a,b]**، ولها حد أدنى نسبي عند $a, x_2, x_4$ وحد أعلى نسبي **عند**$x_1, x_3, b$ وحد أدنى شامل عند **a** وحد أعلى شامل عند $x_1$, **b**.



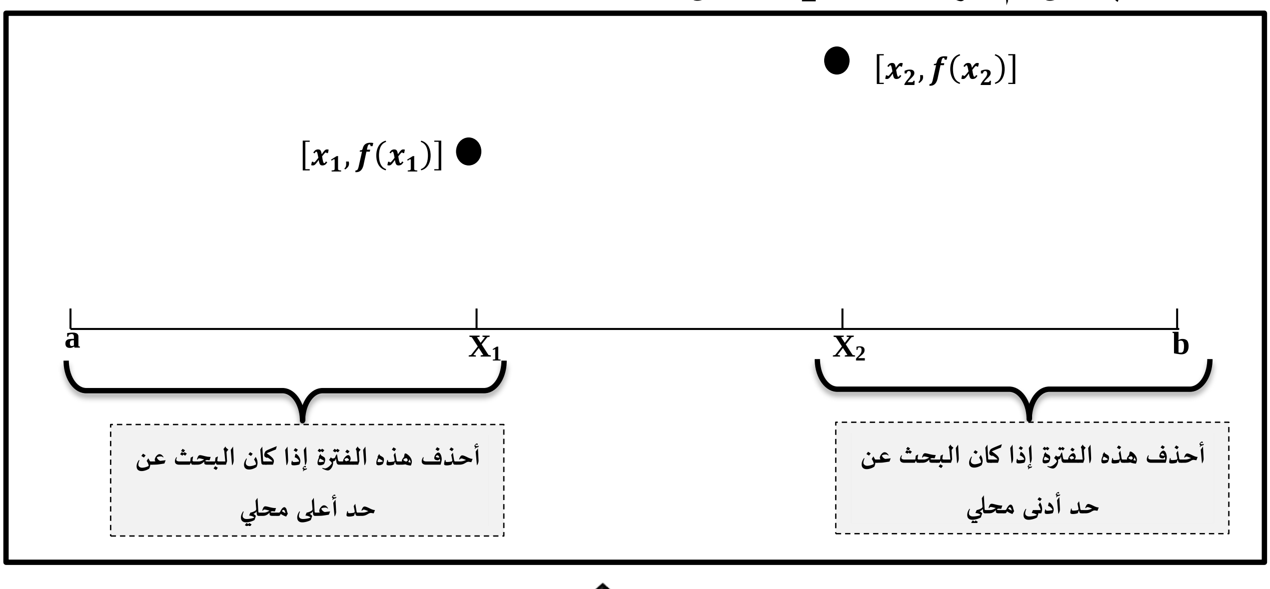
**1-2- نظريات حول التكامل والتفاضل:**

- ✓ إذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة**[a,b]**فان$f(x)$ يكون لها أمثلية شاملة (كلا من التعظيم والتصغير) على هذه الفترة؛
- ✓ إذا كانت لـ $f(x)$ أمثلية محلية عند $x_0$، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في جزء الفترة ذات المركز عند $x_0$ فإن $f`(x) = 0$؛
- ✓ إذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين في جزء الفترة ذات المركز عند $x_0$، فإذا كانت: $f`(x) = 0$، $f``(x) < 0$ فإن $f(x)$ يكون لها حدا أعلى نسبي عند $x_0$،

أما إذا كان $f`(x) = 0$، $f``(x) > 0$ فإن $f(x)$ يكون لها حدا أدنى نسبي عند $x_0$.

**1-3- أساليب البحث التتابعي:** قد يكون تحديد الأمثلية عن طريق التكامل والتفاضل غير مجدي نظراً لكون الدالة الهدفية غير معروفة حسابياً فيكون التفاضل مستحيلاً أو النقط الساكنة لا يمكن الحصول عليها جبرياً، في هذه الحالة نستخدم الطرق العددية لتقريب مكان المحلية الأمثلية في حدود تفاوتات مقبولة. تبدأ أساليب البحث التتابعي بفترة محددة يفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية ذات نموذج أحادي، بمعنى هذه الفترة يفترض أن تحتوي على نقطة واحدة فقط عندها $f(x)$ يكون لها حد أدنى، أو حد أعلى ثم تقلل هذه الأساليب بانتظام الفترة حول القيمة المثلى المحلية، حتى تضيق القيمة المثلى ضمن حدود مقبولة، وهذا التقليص يتأثر بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقاط مختارة، ثم استخدام خاصية النموذج الأحادي بحذف أجزاء من الفترة الحالية.

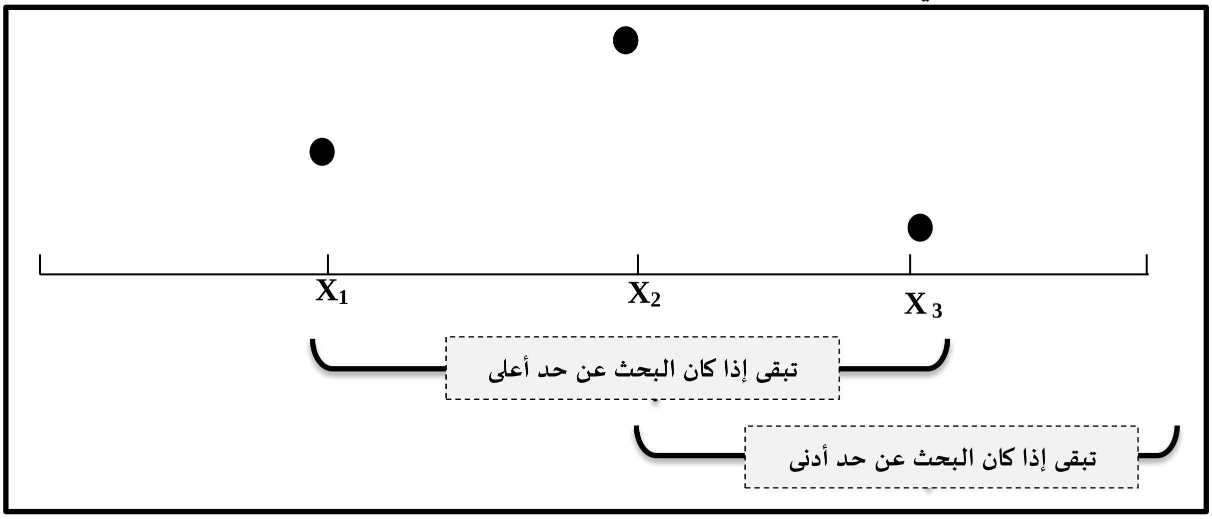
**مثال:** يفترض الشكل الموالي قيم الدالة الهدفية عند النقط $x_2$، $x_1$، إذا عرف حد أدنى محلي ليكون الطرف الوحيد في الفترة **[a,b]** فإن هذا الحد الأدنى يجب أن يكون إلى اليسار من $x_2$، لذلك فإن $f(x)$تبدأ في الزيادة حول هذه النقطة وبخاصية البرنامج الأحادي، يجب أن تستمر في الزيادة لجهة اليمين منها ومن ثم جزء الفترة **[$x_2$,b]** يمكن حذفه.



أما إذا كان الحد الأعلى المحلي هو الطرف الوحيد في الفترة **[a,b]**، فإنه يجب أن يكون على اليمين من $x_1$، ويمكن حذف جزء الفترة**[a,$x_1$[**.

**-بحث فترة الثلاث نقط:** تقسم الفترة إلى أرباع، وتقيم الدالة الهدفية عند ثلاث نقط الداخلية على مسافات متساوية، وتحدد النقطة الداخلية التي تؤدي إلى أفضل قيمة للهدف (في حالة الاشتراك اختر احدى النقط)، ويحل جزء الفترة التي مركزها عند هذه النقطة، والمتكونة من ربعين من الفترة المحلية يحل محل الفترة المحلية.

**مثال:** أنظر الشكل الموالي:




يعتبر بحث فترة الثلاث نقط أكفأ طريقة بحث على مسافات متساوية بالنسبة إلى الوصول إلى تفاوت محدد مسبقاً بأقل عدد من تقييمات الدوال، وهو أحد أسهل البحوث التتابعية لاستخدام الحاسبات.

**-بحث فيبوناكس:** يمثل تتابع فيبوناكس(**...55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 1) =$F_n$** أساس أحد أكفأ أساليب البحث التتابعي ويتم الحصول على كل عدد في التتابع بإضافة العددين السابقين باستثناء العددين الأولين، **$F_0, F_1$**الذين يكونان **1**.

ينشأ بحث فيبوناكس بتحديد أصغر عدد فيبوناكسي يحقق**a** و **ϵ $F_N$ b ≥** حيث **ϵ** تفاوت محدد مسبقا، و **[a,b]** الفترة الأصلية كون **ϵ`= (b-a)/FN**. تقع النقطتان الأوليتان في البحث إلى الداخل عدد $F_{N-1}$**ϵ`** وحدة من نقط النهاية **[a,b]**، حيث أن $F_{N-1}$هو عدد فيوناكس الذي يسبق $F_N$. ويمكن أخذ النقط الأخرى في الحسبان واحدة بواحدة، وتوضع إلى الداخل عدد **Fjϵ` (j = N-2, N-3, …, 2)** وحدة من أجدد نقطة نهاية الفترة الحالية، نلاحظ أنه بطريقة فيبوناكس يمكن مقدما تحديد تقييمات الدوال المطلوبة لتحقيق دقة معينة، وأكثر من ذلك هذا العدد لا يعتمد على الدالة الخاصية الأحادية النموذج.

**-بحث المتوسط الذهبي:** يبني بحث فيبوناكس القريب من الكفاءة على... $\mathbf{0.6180} = \mathbf{2}/(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}})$ الذي يعرف بالمتوسط الذهبي وتقع النقطتان الأوليتان للبحث على مسافة **(0.6180)(b-a)** وحدة إلى الداخل ،

من النقط النهائية للفترة الأولية **[a,b]** وتؤخذ النقط المثالية التالية في الاعتبار، الواحدة تلو الأخرى، وتوضع إلى الداخل **0.6180 $L_I$** وحدة، من أجدد نقطة نهائية للفترة الحالية، حيث **$L_i$** تدل على طول هذه الفترة.

- **الدوال المقعرة:** تضمن طرق البحث تقريب القيم المثلى الشاملة في فترة البحث فقط، عندما تكون الدالة الهدفية أحادية النموذج، وعملياً لا نعرف ما إذا كانت الدالة الهدفية أحادية النموذج في فترة محددة، وعند تطبيق طريقة البحث في هذه الحالة فإنه ليس من المؤكد أنها ستكشف القيمة المثلى الشاملة المطلوبة ،ويستثنى من ذلك البرامج التي تحتوي على الدوال الهدفية المحدبة والمقعرة. تكون الدالة $f(x)$ مقعرة في الفترة $\vartheta$ (محددة أو غير محددة)، إذا كانت النقطتان $x_2$، $x_1$ في $\vartheta$ولكل

**1 ≥ ∝ ≥ 0** فإن $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f x_2$

فإذا تحقق معكوس المتباينة فإن$f(x)$ تكون محدبة لذلك فالقيمة السالبة للدالة المقعرة تكون محدبة، والعكس صحيح.

**نظرية:**

- ✓ **إذا كانت $f(x)$ تفاضل مرتين في $\vartheta$، فإن $f(x)$ تكون مقعرة في $\vartheta$ إذا كانت فقط$0 \ge f``(x)$لكل قيم x في$\vartheta$، وتكون محدبة إذا كانت فقط $0 \le f``(x)$لكل قيم x في $\vartheta$؛**
- ✓ **إذا كانت $f(x)$مقعرة في $\vartheta$، فإن أي حد أدنى محلي في $\vartheta$ يكون حداً أدنى شاملاً في $\vartheta$، واذا كانت $f(x)$ محدبة في $\vartheta$، فإن أي حد أدنى محلي يكون حداً أعلى في $\vartheta$.**

**تمارين:** أوجد الحدود الدنيا أو العليا حسب الحالات الآتية:

**1/** $f(x) = x(5\pi - x)$ ضمن المجال[0,20]وفي حالة تعظيم.

الدالة متصلة ضمن المجال أعلاه ودالتها المشتقة $f`(x) = 5\pi - 2x$ وتنعدم عند النقطة $x_1=$ $5\pi/2$ التي تمثل حلاً أعلى تكون عنده $f(x) = 61.69$.

**2- أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود**

البرنامج غير الخطي، غير المقيد، لأكثر من متغير يأخذ الصيغة الآتية: $y = f(x)$حيث أن $x = [x_1, x_2, x_3, \dots \dots, x_n]^T$،حيث أن:$f(x)$ دالة غير خطية لأكثر من متغير$x$،ويكونالبحثعنالأمثلية(تعظيم) في جميع المراحل وفي الفترة غير المقيدة (∞ ,∞-). وتنطبق جميع النتائج على برامج التصغير إذا استبدلت $f(x)$بـ $f(x)$ -.

**2-1-الحدود العظمى المحلية والشاملة:** إذا كان$(\epsilon > 0)$حول$\widehat{x}$ هومجموعةكل الاتجاهات $X$ بحيث إن:

$$(x - \widehat{x})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}}) = (\mathrm{x_1} - \widehat{\mathrm{x_1}})^2 + (\mathrm{x_2} - \widehat{\mathrm{x_2}})^2 + \cdots + (\mathrm{x_n} - \widehat{\mathrm{x_n}})^2 \le \epsilon^2$$

بالتعبير بالهندسة التحليلية $\epsilon$ حول $\widehat{\ }$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها $\epsilon$ومركزها $\widehat{x}$. والدالة الهدفية $f(x)$ لها حد أعلى نسبي عند $\hat{\mathrm{x}}$ إذا وجد جوار $\epsilon$ حول $\hat{\mathrm{x}}$، بحيث أن: $f(x) \le f(\widehat{x})$ لكل قيم $x$ في هذا الجوار $\epsilon$ الذي تحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة $\epsilon$ (ليس المهم القيمة نفسها) فإن $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل عند $\hat{\mathrm{x}}$.

**2-2- المتجه المتدرج ومصفوفة هيسي:** المتجه المندرج $\nabla f$ الذي تعرف له الدالة $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{a x_n}\right]^T$ الذي تعرف له المشتقة الجزئية الأولى $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ والتعبير $\nabla f|_{\widehat{x}}$ يحقق قيمة التدرج عند $\hat{\mathrm{x}}$ لأي إزاحة صغيرة من $\hat{\mathrm{x}}$ غي الاتجاهات المختلفة، واتجاه أعلى زيادة في $f(x)$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|_{\widehat{x}}$.

**مثال:** إذا كان لدينا: $f(\ \ _1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - x_2^2x_3^3$ مع $\hat{\mathbf{x}} = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2x_3^3 \\ -3x_2^2x_3^2 \end{bmatrix}$$

حيث إن: x
$$\nabla f|_{\widehat{\ }} = \begin{bmatrix} (1)(2) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3^3) \\ -3(2^2)(3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{bmatrix}$$

لذلك عند $[1{,}2{,}3]^{\mathrm{Tj}}$ تزيد الدالة بسرعة في الاتجاه $[12, -105, -108]^{\mathrm{T}}$، ومصفوفة هسي المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ هي لها مشتقة جزئية ثابتة تكون$Hf = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right]$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ والتعريف $H_{\mathrm{f}}|_{\widehat{x}}$ يحقق قيمة المصفوفة هسي عند $\hat{\mathbf{x}}$ .

**نظرية:**$A = [\ \ _{ij}]$ لتكن مصفوفة متماثلة $\mathbf{n} * \mathbf{n}$

$$A_1 = |a_{11}| \quad ,A_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_n = (-1)^{n-1} \det A$$

تكون $A$ سالبة مؤكدة إذا كانت فقط$A_1, A_2, \dots . A_n$ كلها سالبة، وتكون $A$ سالبة نصف مؤكدة إذا كانت فقط $(t < n)$ $A_1, A_2, \dots . A$ كلها سالبة، وعناصر $A$ الباقية تكون صفراً.

**مثال:** لدينا: $H_f = \begin{bmatrix} 6x_2 & x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^3 & -6x_2x_3^2 \\ 0 & -6x_2x_3^2 & -6x_2^2x_3 \end{bmatrix}$ حيث: $H_{\mathrm{f}}|_{\widehat{x}} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & -54 & -108 \\ 0 & -108 & -72 \end{bmatrix}$

$A_1 = 12 > 0$ إذن $f$ لا تكون سالبة مؤكدة ولا حتى سالبة نصف مؤكدة عند $\hat{\mathbf{X}}$

**3-2-نتائج من التفاضل والتكامل:**

- ✓ إذا كانت $f(x)$ متصلة في منطقة محددة مغلقة فإن $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل وحد أدنى شامل أيضا في هذه المنطقة؛
- ✓ إذا كانت $f(x)$ لها حد أدنى نسبي أو حد أعلى نسبي عند $\mathbf{X}^*$ وإذا كانت $\nabla f$ توجد في بعض الجوار $\epsilon$ حول $\mathbf{X}^*$ فإن $\nabla f|_{X^*} = 0$.
- ✓ إذا كانت $f(x)$ لها مشتقة جزئية ثانية في الجوار $\epsilon$ حول $\mathbf{X}^*$، وإذا كانت $\nabla f|_{X^*} = 0$ و $H_f|_{x^*}$ سالبة مؤكدة فإن $f(x)$ يكون لها حد أعلى محلي عند $\mathbf{X}^*$.

في بعض الحالات يصعب استخدام التكامل والتفاضل لذلك نستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا في حدود تفاوت موصف. والتي نذكر منها: طريقة أقصى ميل صعود، طريقة نيوتن - رافسون، طريقة فلتشر – بويل، بحث نمط هوك – جيف، بحث النمط المعدل، اختبار التقريب الأول. الدوال المحدبة.

**3-أمثلية متعدد المتغيرات مع قيود**

إذا كان $x = [x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n]^T$ تكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متساويات فيود هي:

تعظيم: $z = f(x)$

علماً أن:

$$g_1(\quad) = 0$$

$$g_2(x) = 0$$

..............

$$g_m(x) = 0$$

عند $m < n$(عدد القيود أقل من عدد المتغيرات).

وتتحول برامج التصغير إلى برامج تعظيم بالضرب في(1-)وتكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متباينات للقيود فقط هي:

تعظيم: $z = f(x)$

علما أن:

$$g_1(\quad) \le 0$$

$$g_2(x) \le 0$$

..............

$$g_p(x) \le 0$$

أو

تعظيم: $z = f(x)$

علما أن: $g_1(\quad) \leq 0$

$$g_2(x) \leq 0$$

..............

$$g_m(x) \leq 0$$

عند $x \geq 0$

الصيغتان السابقتان تكونان متكافئتين $m = p$ وتحل البرامج غير الخطية والتي ليست في الصيغة $\Lambda$ القياسية، إما بوضعها في الصيغة القياسية أو بتطوير طرق الحل المعطاة للبرامج من الصيغة القياسية.

**3-1-مضروبات لاغرانج:** لحل البرامج نكون دالة لاغرانج:

$L(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ حيث:

$\lambda_i$ $i = 1, 2, \dots m$ ثوابت مجهولة تسمى مضروبات لاغرانج. ثم نحل النموذج ذو (n+m)معادلة

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

إضافة إلى طريقة مضاعف لاغرانج هناك طرق أخرى كطريقة نيوتن –رافسون، طريقة كون توكر والدوال الجزئية، طريقة الاتجاهات الممكنة،

**مثال:** ليكن لدينا البرنامج الآتي: تعظيم: $z = -x_1 - x_2 - x_3$

علما أن: $x_1^2 + x_2 - 3 = 0$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

لدينا: $f(x, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$، $n = 3$ متغيرات، وقيدان $m = 2$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 3 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

دالة لاغرانج:

$$L = (-x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7)$$

ويصبح النموذج بتطبيق مضاعف لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\left(x_1^2 + x_2 - 3\right) - 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0$$

وبعد التعويضات وإجراء الحسابات نجد الحل الواحد:

$$\lambda_2 = -0.5, \lambda_1 = 0.5, x_1 = -0.5, x_2 = 2.75, x_3 = -0.375, z = -1.875$$

وحيث أن المشتقات الجزئية الأولى لـ:

$g_1(x_1, x_2, x_3) g_2(x_1, x_2, x_3)\ f(x_1, x_2, x_3)$ متصلة وحيث أن:

$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ من الرتبة الثانية،

وبالتالي الحل أمثل وهو حد أعلى شامل وبالتالي الحد الأدنى الشامل عند $^{*} = 1.875$ .

# نماذج امتحانات

# النموذج الأول

**التمرين الأول:**

ترغب مطبعة الفيصل في طباعة ثلاثة كتب وهي: الإحصاء، الرياضيات والاقتصاد، ويحتاج كتاب الإحصاء إلى 60 ورقة وكتاب الرياضيات إلى 80 ورقة وكتاب الاقتصاد إلى 90 ورقة.

تمر طباعة الكتب على ثلاثة ورشات وهي ورشة الكتابة وورشة الطباعة وورشة التجليد، الجدول التالي يوضح الوقت اللازم وتكاليف طباعة كل كتاب

**الوحدة: دقيقة**

| | الكتاب الإحصاء | كتاب الرياضيات | كتاب الاقتصاد | تكاليف الدقيقة الواحدة (دج) |
|---|---|---|---|---|
| ورشة الكتابة | 20 | 15 | 10 | 10 |
| ورشة الطباعة | 5 | 10 | 10 | 12 |
| ورشة التجليد | 10 | 20 | 15 | 8 |
| سعر الكتاب (دج) | 84 | 103 | 124 | |

تتوفر المؤسسة على 600 ساعة عمل في ورشة الكتابة، 800 ساعة في ورشة الطباعة، و 500 ساعة في ورشة التجليد. كما تتوفر المؤسسة على 10000ورقة، وترغب المؤسسة في إنتاج على الأقل 100 كتاب إحصاء، 150 كتاب رياضيات و300 كتاب إقتصاد. كما ترغب المؤسسة أن يكون عدد كتب الاقتصاد تزيد عن مجموع كتبي الإحصاء والرياضيات.

**<u>المطلوب:</u>**

1. حدد النموذج الخطي المناسب للمسالة؟
2. في حالة ما رغبت المؤسسة أن تكون تكاليف الطباعة لاتزيد عن 250000دج ، غيِر ما يجب تغيره في النموذج السابق

**<u>التمرين الثاني:</u>**

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$MIN\ Z = 4x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 = 18 \\ x_1 + 2x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**<u>المطلوب</u>:**

1. أوجد حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس؟
2. تأكد من الحل المتوصل إليه في السؤال (1) باستخدام طريقة الحل البياني؟

**التمرين الثالث:**

تنتج مؤسسة سلعة واحدة في ثلاثة أماكن مختلفة وترغب في توزيعها في أربع أسواق مختلفة، وتقدر الطاقة الإنتاجية للوحدات الثلاثة على التوالي بـ: 200وحدة، 300 وحدة، 400وحدة، أما الطاقة الاستيعابية للأسواق الأربع فهي على التوالي: (150، 180، 250، 320)،

كما أن الأرباح المحققة من نقل الوحدة الواحدة من الوحدات الإنتاجية إلى الأسواق مبينة في الجدول التالي:

| | السوق الأول | السوق الثاني | السوق الثالث | السوق الرابع |
|---|---|---|---|---|
| الوحدة الأولى | 10 | 8 | 7 | 9 |
| الوحدة الثانية | 5 | 11 | 12 | 14 |
| الوحدة الثالثة | 13 | 15 | 6 | 8 |

**المطلوب:** كيف يتم توزيع إنتاج الوحدات الثلاثة على مختلف الأسواق حتى يكون الربح أكبر مايمكن؟

# النموذج الثاني

**التمرين الأول:**

تقوم مؤسسة نفطال بتزويد مادة المازوت لثلاث مناطق نائية C,B,A. وبسبب اختلاف بعد هذه المناطق عن محطة التعبئة، فإن أجر توزيع اللتر الواحد من المازوت هي 3 وحدة نقدية المنطقة A و4 وحدة نقدية للمنطقة B و10 وحدة نقدية للمنطقة C. وقد تبين أن وقت تزويد البيت الواحد هو 4 دقائق في المنطقة A و 8 دقائق في المنطقة B و 12 دقيقة في المنطقةC كما أنه لا يمكن العمل أكثر من عشر ساعات يوميا، ولا يمكن قضاء أكثر من ثماني ساعات في المنطقتين A وB معا، وكذلك لا يمكن قضاء أقل من خمس ساعات في المنطقتين B وC معا ولا يمكن قضاء أكثر من ثلاث ساعات في المنطقة A بالإضافة إلى هذا فإن متوسط تزويد البيت الواحد يقدر بـ25 لتر، ولا يمكن توزيع أكثر من 3000 لتر يوميا، بالإضافة إلى أنه لا يمكن تزويد المنطقتين B,A معا بأكثر من 2000 لتر يوميا.

المطلوب: أوجد النموذج الخطي الذي يحدد عدد البيوت التي يمكن تزويدها بالمازوت في كل منطقة ليكون الأجر الكلي أكبر ما يمكن؟

**التمرين الثاني:**

ليكن لديك النموذج الخطي التالي:

$$MIN\ Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 4X_2 - 3X_3 \leq 3 \\ X_1 + 1/2X_2 \leq 1 \\ 2X_1 - 2X_2 \leq 2 \\ X_1.X_2.X_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. أوجد النموذج الثنائي لهذا النموذج الخطي؟
2. أوجد حل النموذج الثنائي باستخدام طريقة
3. استنتج حل النموذج الأصلي؟

**تمرين الثالث:**

ترغب مؤسسة في نقل منتجاتها من أربع وحدات إنتاجية وهي (Z.Y.X.W) قدرتها الإنتاجية 1000، 5000، 3000، 2000.على التوالي، إلى أربع وحدات توزيع (A.B.C.D) قدرتها الإستعابية بـ 1500، 3200، 3200، 3100. وحدة على التوالي، بهدف تحقيق أعظم ربح ممكن،

حسب قسم المحاسبة التحليلية بالمؤسسة فإن الربح المحقق من نقل وحدة واحدة من نقطة الإنتاج إلى نقطة التوزيع هي مبينة في الجدول التالي:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| W | 8 | 3 | 7 | 4 |
| X | 3 | 6 | 8 | 9 |
| Y | 3 | 5 | 8 | 1 |
| Z | 5 | 4 | 1 | 8 |

المطلوب:

أوجد أفضل توزيع بأكبر ربح ممكن؟

# النموذج الثالث

**التمرين الأول**

تمتلك مؤسسة تعاونية فلاحية أرض زراعية تبلغ مساحتها 130 هكتار، تزرع فيها ثلاثة أنواع من المحاصيل وهي القمح، الشعير والذرة، وتعمل المؤسسة على تلبية جميع طلبات شراء المحاصيل التي يتقدم بها عمال المؤسسة ثم تبع الفائض في السوق ويبين الجدول التالي كمية الإنتاج في كل هكتار واحد لكل نوع من المحاصيل مقدرة بالأكياس، والكمية المطلوبة من طرف عمال المؤسسة، والحد الأقصى لكمية الطلب الموجودة في السوق ، ومقدار الربح المتوقع من بيع الكيس الواحد من كل محصول.

**الوحدة: عدد الأكياس**

| المحصول | الكمية المنتجة في الهكتار الواحد | الكمية التي يطلبها الأعضاء | الكمية المطلوبة في السوق | الربح في الكيس الواحد (دج) |
|---|---|---|---|---|
| الشعير | 420 | 2000 | 10000 | 1.5 |
| القمح | 200 | 5000 | 8000 | 1.8 |
| الذرة | 70 | 1000 | 3000 | 2.5 |

**المطلوب: تحديد البرنامج الخطي الذي يبين للمؤسسة الهكتارات التي تخصصها لكل محصول لتحقيق أكبر ربح ممكن**

**التمرين الثاني:**

❶ حل البرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلاكس ؟

$$MIN\ Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$\begin{cases} 4X_1 + 6X_2 \geq 60 \\ 6X_1 + 4X_2 \leq 90 \\ 4X_1 + 2X_2 = 44 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

**التمرين الثالث:**

مؤسسة مختصة في صناعة الأثاث لديها مصنعين، طاقة وتكلفة إنتاج كل منهما كالتالي:

| المصنع | الطاقة الإنتاجية (وحدة) | تكلفة الإنتاج (دج) |
|---|---|---|
| مصنع هبة | 2300 | 20 |
| مصنع آية | 2500 | 22 |

وترغب أربع فنادق في شراء هذا الأثاث وقد قدرت الأخيرة احتياجاتها والأسعار التي تقدمها كمايلي:

| | فندق السعادة | فندق الأحلام | فندق السلام | فندق الوئام |
|---|---|---|---|---|
| الاحتياج الكلي | 1500 | 2000 | 500 | 1200 |
| السعر المقدم | 36 | 28 | 35 | 32 |

**المطلوب:** تحديد خطة التوزيع المثلي للأثاث إذا علمت أن تكلفة نقل الأثاث من كل المصنع إلى كل الفندق كالآتي

| | فندق السعادة | فندق الأحلام | فندق السلام | فندق الوئام |
|---|---|---|---|---|
| مصنع هبة | 10 | 7 | 8 | 7 |
| مصنع آية | 10 | 5 | 9 | 6 |

# قائمة المراجع

## قائمة المراجع:


**1-** ابراهيم بن صالح العليان، مقدمة في البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود النشر العلمي والمطابع، السعودية، 2007.

**2-** أحمد محمد الهزاع الصمادي، أساسيات بحوث العمليات، دار قنديل، عمان، 2008.

**3-** بوقرة رابح، بحوث العلميات، مؤسسة شباب الجامعة، الاسكندرية، مصر، 2009.

**4-** جهاد صياح بني هاني واخرون، تطبيقات بحوث العمليات في ادارة الاعمال، دار الحامد، عمان، 2013.

**5-** حمدان فتحي خليل، مرعي رشيق رفيق، مقدمة في بحوث العلميات، دار وائل، عمان الاردن ، 2004

**6-** حمدى طه واخرون، مقدمة في بحوث العلميات، دار المريخ، الرياض، 2011.

**7-** الحميد محمد دباس، بحوث العلميات، الجزء 1، منشورات جامعة حلب، حلب ، سوريا، 2002.

**8-** ريتشارد بورنسن، ترجمة حسن حسني الغباري، نظريات ومسائل في بحوث العمليات- سلسلة ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002.

**9-** سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة بطرابلس، ليبيا، الطبعة الأولى، 2002.

**10-** سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الاساليب الكمية وبحوث العلميات، دار الحامد، عمان، الاردن، 2007.

**11-** شفيق العتوم، بحوث العمليات، دار المناهج، عمان، 2006.

**12-** صالح مهدي محسن العامري وعواطف ابراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، مكتبة الجامعة الشارقة واثراء للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2009.

**13-** عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الاساليب الكمية التطبيقية في ادارة الاعمال – التالف العلمي الثلاثي: الادارة- بحوث العمليات- الاحصاء، دار وائل، عمان، 2008.

**14-** عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل، عمان، 2001.

**15-** فتحي خليل حمدان، بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2010.

**16-** فريد النجار، بحوث العمليات في الادارة، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2009.

**17-** ماجدة عبد اللطيف محمد التميمي، احمد عبد اسماعيل الصفار، بحوث العمليات : تطبيقات على الحاسوب، دار المناهج، عمان، 2007.

**18-** محمد اسماعيل بلال، بحوث العمليات -استخدام الاساليب الكمية في صنع القرار-، الدار الجديدة، الاسكندرية، 2005.

**19-** محمد الطراونة، سليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات، دار المسيرة، عمان، 2009.

**20-** محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون الجزائر، الطبعة الثالثة، 2008.

**21-** محمد عبد العال النعيمي وأخرون، بحوث العمليات، دار وائل، عمان، 2011.

**22-** محمود الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان، 2007.

**23-** مجلخ سليم، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة قالمة، 2016.

**24-** مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية بحوث العمليات، دار البداية، عمان، 2010.

**25-** منعم زمزير الموسموي، بحوث العمليات: مدخل علمي لاتخاذ القرارات، دار وائل، عمان، 2009.

**26-** اليمين فالته، بحوث العمليات، دار ايتراك، القاهرة، 2006.