

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE 8 MAI 1945

-GUELMA-



جامعة 8 ماي 1945
- قالمة -

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département des Sciences Exactes

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHEMATIQUES

M/510.024

**ESTIMATION DU TAUX DE PANNE EN
PRÉSENCE DE CENSURES**

Option : Probabilités et Statistiques

Par

ABD ELHAKIM LAMAIRIA

Sous la Direction de

Dr : CHADLI ASSIA

Devant le jury

Président :	Haddadi salim	Prof	Université de Guelma
Examineur :	Aissaoui Med-Zine	MC	Université de Guelma
Examineur :	Djellab Natalia	MC	Université de Annaba
Rapporteur :	Chadli Assia	MC	Université de Annaba

2007/2008



Table des matières

1	Rappels et compléments	9
1.1	Généralités sur les processus stochastiques	9
1.2	Premières définitions	9
1.2.1	Le mouvement Brownien	10
1.2.2	Processus de comptage	11
1.3	Martingales et martingales locales	12
1.3.1	Martingales	12
1.3.2	Martingales locales	13
1.4	Semi-martingales générales	14
1.4.1	Crochets et partie continue d'une semi martingale	14
1.4.2	Formule d'itô	16
2	Fiabilité	17
2.1	Definitions et terminologie	17
2.2	Coefficients de Fiabilité	21
2.2.1	Méthodes pratiques d'estimation des coefficients de fiabilité	26
2.3	Modèles usuels de fiabilité	28
2.4	Processus de renouvellement	43
2.4.1	Quelques bornes utiles	45
2.5	Fiabilité des systèmes	48

3	Estimateur De Kaplan-Meier	61
3.1	Introduction	61
3.2	Le lissage local de weibull	63
3.3	L'estimateur	64
4	Une loi du logarithme réitéré pour les estimateurs à noyau des fonctions de risque sous censure aléatoire	67
4.1	Introduction et Théorèmes d'approximations	67
4.2	Preuves	71

Remerciements

Je remercie dieu puissant de m'avoir donnée la force et le courage pour accomplir ce travail.

Je dois beaucoup plus que de simples remerciements à mon encadreur madame **Chadli Assia** de m'avoir proposé un sujet intéressant et d'avoir dirigé ce travail sans ses conseils, ses suggestions et sa patience cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Il m'est agréable d'exprimer ma gratitude à M^r **Haddadi salim** qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à remercier si vivement M^r **Aissaoui Med-Zine** d'avoir accepté exceptionnellement la fonction d'examineur et de participer au jury.

J'ai le plaisir d'exprimer ma profonde reconnaissance envers madame **Djellab Natalia** d'avoir accepté la fonction d'examinatrice et siège dans ce jury.

Mes remerciements vont également à tout ma famille sur tout mes chères parents ainsi qu'à tous mes collègues et amies.

Introduction

L'inférence statistique sur la loi d'une variable aléatoire ou sur ses paramètres se fait sur la base d'observations de cette variable. Il se trouve que dans ce travail, on s'intéresse à l'estimation (un des aspects de l'inférence statistique) du taux de panne en présence de données aléatoires censurées. Le taux de panne étant fonction de la densité de la variable aléatoire X ; représentant la durée de vie : .

En effet, l'observation de réalisations d'une variable aléatoire n'est pas toujours possible. L'exemple du temps de survie d'un individu atteint d'une maladie illustre bien cette difficulté. Le temps d'observation étant fixé, le patient peut décéder d'une autre cause que sa maladie (accident...) c'est la censure à droite. D'autre part, l'instant du début de la maladie peut être inconnu, c'est la censure à gauche.

Ces problèmes d'estimations non paramétriques ont été introduits pour la première fois par Kaplan-Meier (1958) pour des données censurées à droite et ont donné naissance à la théorie de l'analyse de survie qui reste à nos jours un domaine d'actualité très pointu.

Plusieurs auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique de l'estimateur de la densité par différentes méthodes de même qu'aux propriétés de cet estimateur; notamment l'étude du biais de la convergence et de la consistance de cet estimateur. Les résultats obtenus sont forts laborieux et nécessitent des notions poussées sur les processus stochastiques.

Dans ce travail; articulé autour de quatre chapitres, on a commencé le chapitre1 par des rappels sur les processus stochastiques, mouvements Browniens, martingales et semi-martingales; notions essentielles dans l'élaboration de tout estimateur non paramétrique.

Au chapitre2, des notions de fiabilité ont été étudiées, notamment les caractéristiques de fiabilité de systèmes statiques ou dynamiques. En effet, toutes les caractéristiques de fiabilité s'écrivent d'une façon ou d'une autre en fonction de la densité et il est aisé de

déduire leur estimateur à partir de l'estimateur de la densité.

Au chapitre3, on explique l'estimateur de K.M. et l'estimateur de K.M.généralisé.

On termine ce travail au chapitre4 par l'introduction d'une autre méthode d'estimation du taux de panne à partir de l'estimateur à noyau de la densité en y rappelant les résultats obtenus par (BIAO ZHANG) sur les propriétés de cet estimateur.

Resumé

Le problème de l'estimation non paramétrique du taux de panne en présence de censures trouve son origine à partir des articles traitant l'estimation de la densité en présence de données censurées. Dans ce mémoire, nous avons considéré deux approches différentes dans la résolution de ce problème

1- Utilisation de l'estimateur de Kaplan-Meier :

Dans un modèle de survie, les données censurées sont résumées par

$$\{(Z_i, \delta_i); 1 \leq i \leq n\} \text{ où } Z_i = \min(X_i, Y_i) \text{ et } \delta_i = 1_{(X_i < Y_i)} \text{ pour } i \geq 1.$$

On suppose que $\{X_i, i \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a. i.i.d.) non négatives et $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une suite de v.a. i.i.d. non négatives (temps de censures) définis sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $X = X_1, Y = Y_1, Z = Z_1, \delta = \delta_1$, de fonctions de répartitions respectives $F(x), G(x), H(x) = P(Z \leq x) = 1 - (1 - F(x))(1 - G(x))$.

Le problème de l'estimation de $F(x)$ et de la densité $f(x)$ ainsi que du taux de panne défini par $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$ a fait l'objet de plusieurs articles. Les estimateurs non paramétriques du maximum de vraisemblance basés sur des données censurées sont les produit-limite (PL) estimateurs $F_n(x)$ et $G_n(x)$ introduits par Kaplan-meier et définis par :

$$F_n(x) = 1 - \prod_{\substack{i: Z_{i,n} \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{ 1 - \frac{\delta_{i,n}}{n-i+1} \right\}$$

$$G_n(x) = 1 - \prod_{\substack{i: Z_{i,n} \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{ 1 - \frac{1 - \delta_{i,n}}{n-i+1} \right\}$$

où $Z_{i,n} \leq \dots Z_{n,n}$ est la statistique d'ordre de Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Le processus empirique de K.M. α_n et le processus censuré β_n sont définis par

$$\alpha_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$$

$$\beta_n(x) = \sqrt{n}(G_n(x) - G(x))$$

2- L'estimateur à noyau :

Dans un second aspect, nous avons étudié la loi du logarithme itéré pour l'estimateur à noyau du taux de panne en présences de censures aléatoires, nous avons, en particulier donné quelques théorèmes obtenus par Biao Zhang sur le comportement asymptotique de tels processus.

Dans cet article nous établissons une loi de point du logarithme réitéré pour les estimateurs à noyau de la fonction de risque des temps de survie sous censure aléatoire. En plus, nous considérons le problème de biais associé avec les estimateurs à noyau.

Mots clés : largeur de bande, biais, processus de calcul, martingale, estimateur Nelson, forte approximation, processus Wiener.

L'ensemble de ce travail s'articule autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, l'auteur reprend des notions sur les processus stochastiques, mouvements Browniens et martingales, en effet, ces notions d'aspects théoriques interviennent dans l'estimation des durées de vie, et en particulier du taux de panne en fiabilité.

Au second chapitre, il reprend les notions fondamentales de la théorie de la fiabilité, notamment les différents coefficients caractéristiques de la fiabilité. Il y est définis aussi quelques modèles standards et systèmes de la fiabilité à l'aide des processus de renouvellements.

Au chapitre 3 et 4, les points 1 et 2 y sont développés.

Perspectives : Il serait intéressant d'appliquer l'ensemble des résultats à des lois de survie particulières, notamment la loi exponentielle et la loi de Weibull.

Chapitre 1

Rappels et compléments

Dans le présent chapitre, on rappelle dans un cadre assez générale les notions de bases concernant la théorie des processus stochastiques, martingales et semi –martingales en citant quelques propositions et théorèmes qui sont utiles dans la suite.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

1.2 Premières définitions

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard, le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et d'une fonction $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans un espace représentant l'état du système. Pour ω fixé, c'est-à-dire pour une évolution particulière du système, les états successifs sont représentés par la fonction $t \rightarrow (t, \omega)$

qu'on appelle trajectoire. Nous sommes aussi, conduit à la définition suivante :

Définition 1.1 un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans l'espace mesurable (E, Σ) dit espace d'état. La variable aléatoire X_t donne l'état à l'instant t .

Définition 1.2 une filtration est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} , c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$. On interprète \mathcal{F}_t comme « l'information au temps t » : plus le temps croît ($s \leq t$), plus on a d'informations ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$). – Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ est dit espace de probabilité filtré. – Une filtration est dite continue à droite si $\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. – Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est dite complète si les ensembles P-nuls appartiennent à \mathcal{F}_0 . – On dit qu'une filtration satisfait aux conditions habituelles si elle est complète et continue à droite.

Définition 1.3 un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté par rapport à (\mathcal{F}_t) si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \geq 0$.

Remarque 1.4 a un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$, on associe sa filtration naturelle \mathcal{F}_t^X qui est la plus petite tribu telle que X soit adapté i.e

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma \{X_s, s \leq t\}$$

L'interprétation de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ est que \mathcal{F}_t^X contient toutes les informations sur les variables aléatoires $(X_s)_{s \leq t}$.

Définition 1.5 la tribu prévisible sur le produit $T \times \Omega$ est la plus petit tribu qui rend mesurable tous les processus continus et adaptés.

-Un processus est dit prévisible s'il est mesurable pour cette tribu. (ici, on a $T = \mathbb{R}^+$).

1.2.1 Le mouvement Brownien

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau observées par Brown en 1828. Il en résulte une dispersion des microparticules dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques avec part aléatoire (particules microscopiques en interaction).

Définition 1.6 le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard si :

$$P(B_0 = 0) = 1 \text{ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).}$$

$$\forall s \leq t, B_t - B_s \text{ est une variable aléatoire de loi Gaussienne centrée de variance}(t - s).$$

$\forall n, \forall t, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les variables $((B_{t_n} - B_{t_{n-1}}), \dots, (B_{t_1} - B_{t_0}), B_{t_0})$ sont indépendantes.

les trajectoires de $(B_t)_{t \geq 0}$ sont p.s continues.

De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \text{ C'est-à-dire } E(B_t - B_s) = 0$$

$$\text{Et } E(B_t - B_s)^2 = t - s$$

La propriété (2) est la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien.

La propriété (3) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants.

La propriété (4) traduit que la particule ne saute pas.

1.2.2 Processus de comptage

Un processus de comptage est un processus à temps continu, à valeurs entières positives et à trajectoires croissantes et continues à droite. Autrement dit $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$ est un processus de comptage si :

$$N_t(\omega) \in \mathbb{N} \text{ pour tout } \omega \in \Omega$$

$$N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \text{ pour tout couple } (s, t) : s \leq t \text{ et tout } \omega \in \Omega$$

La fonction $t \rightarrow N_t(\omega)$ est continue à droite pour tout $\omega \in \Omega$

Les processus de comptage, comme leur nom l'indique, servent à compter le nombre d'événements survenus en fonction du temps. Ces événements peuvent être de nature diverse : appels dans un central téléphonique, clients arrivant dans une file d'attente ou particules émises par un isotope radioactif. La variable aléatoire N_t représente le nombre d'événements survenus avant l'instant t et $N_t - N_s$ ($s < t$) le nombre d'événements survenus entre les instants s et t . Ces nombres sont supposés finis, ce qui permet d'introduire des variables aléatoires $S_n, n \geq 1$, représentant les instants où surviennent ces événements. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante de variables aléatoires réelles positives tendant p.s vers l'infini (si la trajectoire $t \rightarrow N_t(\omega)$ est bornée, de limite n_0 en $+\infty$, $S_n(\omega)$ n'est définie que pour $n \leq n_0$). On a alors pour tout $t \geq 0$: $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[S_n \leq t]}$. Le processus de comptage N est dit associé à la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut également définir les temps inter-arrivées X_n comme les temps séparant deux événements successifs :

$X_n = S_n - S_{n-1}$ (en posant $S_0 = 0$), de sorte que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Il est alors équivalent de se donner :

- Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles positives ;
- Une suite croissante $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles positives ;
- Le processus de comptage $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$ associé ;

Nous étudierons plus en détail au chapitre suivant le cas où les variables aléatoires X_n sont indépendantes. Un tel processus est appelé processus de renouvellement (les X_n peuvent par exemple représenter les temps de vie d'un composant ; les S_n représentent alors les instants où il faut changer ce composant).

1.3 Martingales et martingales locales

1.3.1 Martingales

Dans ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ est un espace filtré.

Définition 1.8 Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale (respectivement sous-martingale, sur-martingale) si les propriétés sont vérifiées :

- 1) M_t est \mathcal{F}_t -adapté.
- 2) $E(|M_t|) < \infty$ (autrement dit $M_t \in L^1(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$).
- 3) pour tout $0 \leq s \leq t$, $E[M_t/M_s] = M_s$ [resp $\geq M_s, \leq M_s$] p.s

On interprète une martingale comme un « jeu honnête » : à l'instant t (où l'on dispose de l'information \mathcal{F}_t), l'espérance de la somme possédée l'instant d'après est égale à la somme dont on dispose à l'instant présent.

Proposition 1.9 le mouvement Brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R})$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^B, t \geq 0)$.

Définition 1.10 Une martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ est dite de carré intégrable ou dans L^2 (resp bornée dans L^2), si pour tout $t \geq 0$, $E(|M_t|^2) < \infty$, (resp si $\sup_t E(M_t^2) < \infty$).

Définition 1.11 Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$

1.3.2 Martingales locales

Avant d'introduire la notion de martingale locale, nous avons besoin des définitions suivants :

Définition 1.12 Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique continu et adapté et τ un temps d'arrêt. Alors le processus X^τ , dit processus arrêté, défini par

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$$

Est lui aussi continu et adapté.

Proposition 1.13 Soit M une martingale continue et τ un temps d'arrêt. Alors le processus N défini par $N_t = M_{t \wedge \tau}$ est également une martingale continue.

Définition 1.14 Un processus $A = (A_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante, i.e

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega), \quad \forall t \leq s, \text{ p.s}$$

Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < \infty$$

Le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{i+1} = t$.

Notation 1.15 On note par \mathfrak{S}^+ (resp, \mathfrak{S}) l'espace des processus croissants (resp, à variation finie). On sait que tout processus $A \in \mathfrak{S}$ peut s'écrire sous la forme $A = A^+ - A^-$ où A^+ et A^- sont dans \mathfrak{S}^+ . De plus, A^+ et A^- peuvent être choisis que sorte pour tout ω , $A_t^+(\omega) - A_t^-(\omega)$ soit la décomposition minimale de $A_t^+(\omega)$.

Définition 1.16 Le processus $\int_0^t |dA|_s = A^+ + A^-$ est dans \mathfrak{S}^+ et pour presque tout ω , la mesure associée est la variation totale de $A(\omega)$, la variation de A .

Maintenant, on introduit une nouvelle classe de processus qui à défaut d'être une martingale, possèdent un comportement local de martingales.

Définition 1.17 Un processus M adapté est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\tau_n \rightarrow \infty$ et $(M_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.18 Une famille de variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ est dite uniformément intégrables si

$\sup_i \int_{|X_i| \geq a} |X_i| dP \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow \infty$

S'il existe $Y \in L^1$ telle que $|X_i| \leq Y, \forall i$ la famille $(X_i, i \in I)$ est uniformément intégrable.

1.4 Semi-martingales générales

Dans toute la suite, sauf mention contraire, les processus considérés ne sont pas généralement continus. La première difficulté vient du fait que, contrairement au cas continu, dans ce cas la décomposition d'une semi-martingale n'est pas unique

Définition 1.19 Une semi-martingale est un processus $X = X_0 + A + M$, où A est un processus à variation finie, X_0 est une variable \mathcal{F}_0 mesurable et M est une martingale locale, ces deux derniers processus étant issus de 0. Une semi martingale est donc un processus adapté càdlàg

Corollaire 1.20 Soit A un processus à variation finie issu de 0, sa variation soit localement intégrable (i.e. pour tout temps d'arrêt τ , la variation totale de A_τ est intégrable). Il existe alors un unique processus prévisible \tilde{A} à variation finie dont la variation est localement intégrable, appelé compensateur prévisible de A , tel que $A - \tilde{A}$ est une martingale locale issue de 0.

Théorème 1.21 Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale prévisible, alors elle est continue.

1.4.1 Crochets et partie continue d'une semi martingale

Définition 1.22 Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale bornée dans L^2 . On définit son crochet oblique comme l'unique processus croissant prévisible issu de 0 noté $\langle M, M \rangle$ qui vérifie

$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est une martingale uniformément intégrable.

Le processus $\langle M, M \rangle_t$ est appelé aussi la variation quadratique de M .

Définition 1.23 La variation quadratique d'une martingale locale continue M est

l'unique processus A , croissant, continu et adapté tel que A_0 et $(M_t^2 - A_t)$ est une martingale locale continue. On note $A_t = \langle M, M \rangle_t$, où $\langle M, M \rangle_t = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|^2$ avec $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = t$

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ une suite de subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0, la convergence ayant lieu en probabilité.

De plus, si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ et $N = (N_t)_{t \geq 0}$ deux martingales locales continues, on définit leur crochet par

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4} (\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M - N, M - N \rangle_t)$$

C'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale locale continue.

Définition 1.24 Soient M et N deux martingales locales issues de 0. On dit qu'elles sont orthogonales si leur produit MN est une martingale locale.

Une martingale locale est dite purement discontinue si elle est orthogonale à toute martingale locale continue.

Théorème 1.25 Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une semi martingale, elle peut s'écrire sous la forme $X = X_0 + X^C + M^D + A$, où X_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable, X^C est une martingale locale continue, M^D est une martingale locale purement discontinue localement bornée dans L^2 , et A est un processus à variation finie, cette décomposition est unique vis-à-vis de X^C qui appelé partie continu de X . Cette dernière décomposition permet de donner une expression du crochet droit de deux semi martingales.

Théorème 1.26 Si X et Y sont deux semi martingales on a :

$$[X, Y]_t = \langle X^C, Y^C \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$$

Remarque 1.27 La différence entre les deux crochets (oblique et droit) vient de la prévisibilité : le crochet oblique est prévisible alors que le crochet droit ne l'est pas en générale. On remarque aussi que les deux notions coïncident dans le cas des semi martingales continues.

1.4.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô construite par K.Itô est le pivot du calcul stochastique. C'est l'outil le plus célèbre qui nous permet d'étudier les semi-martingales et les équations différentielles stochastiques.

Théorème 1.28 (Formule d'Itô) soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ une semi martingale à valeurs dans \mathbb{R}^n et X_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable, alors $f(X)$ est une semi-martingale réelle dans \mathbb{R}^n et on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d \langle X^{i,C}, X^{j,C} \rangle_s + \sum_{s \leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s^i \right]$$

En particulier, si $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ une semi martingale continue à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors la formule d'Itô s'écrit

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d \langle X^{i,C}, X^{j,C} \rangle_s.$$

Chapitre 2

Fiabilité

2.1 Définitions et terminologie

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel, ... Elle est étroitement liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance. L'étude de fiabilité est nécessaire à différents niveaux de la vie du système (ou équipement) : au niveau de la conception ou de la fabrication afin de pouvoir élever le degré de fiabilité selon les normes spécifiques ; au niveau de l'exploitation, afin d'estimer les incidences du support logistique sur ses conditions d'utilisation ; au niveau des services de maintenance, dans le but de prévoir les dates de prophylaxie et d'arrêts préventifs ; au niveau des gestionnaires des pièces de rechange afin d'estimer le volume des stocks de sécurité et assurer par là même la disponibilité de la pièce, en évitant les stocks morts etc

Il peut paraître étrange de constater que les exigences envers la fiabilité, la sûreté ou la sécurité s'accroissent malgré les énormes progrès scientifiques effectués et l'acquisition de technologie de pointe de haute performance. Cette dialectique s'explique par la tendance à l'automatisation des systèmes opérationnels et aussi par la complexité toujours croissante des systèmes conçus qui exigent des critères rigoureux de sécurité. En effet, les concepteurs

sont confrontés à des problèmes de réalisation d'architectures complexes, de structures informatiques de plus en plus difficiles à mettre en œuvre malgré les nouvelles possibilités amenées par le développement des circuits à large échelle d'intégration. Avant de mettre sur orbite un vaisseau spatial habité, les techniciens devront être fortement convaincus de son aptitude à remplir sa mission ; outre les pertes considérables en vies humaines, l'échec de la navette spatiale challenger a eu pour conséquence une baisse de la crédibilité de la N.A.S.A. ainsi qu'une révision des projets à court et à long termes. Rappelons également les conséquences des défaillances (humaines ou matérielles) de la centrale nucléaire de Tchernobyl (URSS), de Bhopal (Inde), la série noire de catastrophes aériennes de ces derniers mois ou celle des DC 10 d'il ya deux ans. . .

On pourrait citer de nombreux autres exemples où les aspects sécurité, politique ou psychologique suscitent des études de fiabilité. Il existe aussi des motivations d'ordre économique qui s'orientent vers la recherche d'une politique « optimale » de compromis coût-fiabilité. En effet les coûts de production ou de vente sont majorés des coûts d'exploitation et de maintenance : pertes dues à l'indisponibilité des équipements défaillants (ou manque à gagner), frais de maintenance (équipes de maintenance, stocks de rechange, etc.) . . . [Jacq A. (1986)], [Corazza (1975)]. La courbe de la figure 0.1 représente l'allure approximative de la fonction coût global C_g en fonction de la fiabilité. Les courbes C_p et C_m représente respectivement les coûts de production et de maintenance. On remarque sur la courbe C_g l'existence d'une zone optimale $[R_{min}, R_{max}]$ pour laquelle le coût est pratiquement minimal. Le problème revient donc à déterminer la zone de fiabilité optimale (R_{min}, R_{max}) . Mais avant tout qu'entend-on par fiabilité ?

Dans ce paragraphe, nous tentons de dégager une terminologie pour la suite de cet ouvrage. Les différentes notions introduites seront éclaircies au fur et à mesure de l'exposé. Pour de plus amples informations, se référer à [Gnedenko (1972)], [Rudenko (1976)], [Markovici (1974)], [Monographie AFCET (1980)].

Définition 1. La fiabilité est l'aptitude d'un système à accomplir une fonction (ou mission) donnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiées d'explo-

tation.

Par système on comprend un équipement (mécanique ou électronique...), un système informatique (matériel ou logiciel)... dont on étudie la fiabilité. Les conditions sont toutes les contraintes externes qu'elles soient d'origine mécanique, chimique, physique, lumineuse, atmosphérique, humaine,...

Définition 2. On appelle élément toute partie intégrante et indécomposable du système du point de vue de la fiabilité.

C'est une notion relative et suivant la nature du problème, l'élément pourra jouer le rôle d'un système lui-même constitué d'éléments. On peut, par exemple étudier la fiabilité d'un avion-cargo en l'assimilant à un système constitué de 4 turbopropulseurs. On pourra également s'intéresser à chacun des moteurs en l'assimilant à un système, constitué d'un ensemble de composants (éléments) électroniques et mécaniques. La fiabilité d'un réseau d'ordinateurs peut être analysée en considérant séparément chaque ordinateur le composant.

Définition 3. L'exploitation est l'ensemble de toutes les phases d'existence de l'élément : transport, stockage, préparation à l'utilisation, maintenance, service et réparation.

Définition 4. la qualité de l'élément (ou du système) est l'ensemble des propriétés qui déterminent le niveau d'utilité de l'élément pour son utilisation selon la destination.

Peut alors donner une nouvelle définition de la fiabilité :

Définition 5. C'est l'aptitude à conserver la qualité dans des conditions données d'exploitation pendant une période donnée.

Définition 6. La panne ou défaillance est une perte partielle ou totale (ou simplement une variation) des propriétés de l'élément qui diminue significativement ou bien entraîne la perte totale de la capacité de fonctionnement.

Il est en effet, parfois très difficile de caractériser l'état panne de l'état de bon fonctionnement.

Définition 7. La sûreté de fonctionnement est « l'aptitude d'un système ou de son environnement à minimiser la fréquence d'apparition des défaillances et à minimiser leurs

effets ».

Cette notion sera caractérisée par :

1- la fiabilité qui est la « faculté de bon fonctionnement continu durant une période donnée ».

Généralement, on a coutume de distinguer la notion de fiabilité selon l'étape de la « vie » du système [corazza (1975)] :

La fiabilité prévisionnelle est « la fiabilité calculée sur la base d'un modèle mathématique défini à partir des données du projet et de la fiabilité estimée des composants »

La fiabilité estimée ou intrinsèque est « la fiabilité d'un dispositif mesurée au cours d'essais spécifiques effectués dans le cadre d'un programme d'essais entièrement définis ».

La fiabilité opérationnelle est la « fiabilité mesurée sur des dispositifs en exploitation normale ; elle dépend des conditions réelles d'utilisation et du support logistique ».

2- la disponibilité qui est la « faculté du système à accomplir correctement ses tâches lorsqu'il sollicité ».

3- la maintenabilité est « l'aptitude à localiser et à réparer les éléments défectueux, à corriger les erreurs ».

on appelle temps de réparation ou temps hors service « l'intervalle de temps qui s'écoule entre la manifestation d'une faute et la remise en service du système » ; ce temps hors service peut comprendre [Costes-Landrault-Laprie (1980)] :

- le temps logistique qui est « le temps nécessaire pour être en possession des sous-ensembles nécessités par la réparation » ;

- le temps actif de réparation qui est « le temps nécessaire à l'équipe de maintenance pour restituer le potentiel de la structure nécessaire à l'exécution de ses tâches » ;

- le temps dû aux contraintes administratives qui est imposé par l'organisation administrative des équipes de maintenance.

Dans le cadre des activités de maintenance intervient aussi le processus d'inspection : lancement de programme de tests affectant tout ou une partie du système ; remplacement systématique de la partie du système inspecté (prophylaxie). L'inspection d'une unité ne se conçoit généralement que si cette dernière ne participe pas à l'exécution des tâches ; cette non participation peut provenir : soit de l'introduction de parties redondantes en vue de la tolérance aux fautes ; soit de la présence du système dans un état de repos ; soit encore de l'arrêt du système pour inspection, si cela est possible.

4- La longévité qui est « l'aptitude du système à une longue exploitation (elle peut comprendre les durées de réparation et d'inspection) ».

5- La sécurité est la « faculté d'éviter les événements catastrophiques pour la mission considérée ».

Les notions définies ci-dessus sont en relation étroite avec l'efficacité ou la performance du système qui est un critère de qualité. Si on exprime par exemple l'efficacité du centre des chèques postaux d'Alger comme étant l'intensité du service par unité de temps, il est évident que cette caractéristique sera affectée par un taux de pannes élevé. C'est pourquoi on peut comprendre la sûreté comme étant la stabilité de l'efficacité compte tenu de la fiabilité des composants.

2.2 Coefficients de Fiabilité

Les définitions introduites dans le titre précédent sont assez abstraites et difficiles à se représenter concrètement. Il est donc nécessaire d'introduire des indicateurs de mesure afin de pouvoir quantifier les différents coefficients de la sûreté de fonctionnement. Nous introduisons ci-dessous différents coefficients (critères) de fiabilité et de sûreté de fonctionnement. Le choix de l'un ou l'autre de ces coefficients sera déterminé par la destination du système concret

1.Fonction de fiabilité. Admettons qu'à la date $t = 0$ l'élément (ou le système) commence à fonctionner et qu'à la date $t = w$ il se produise une panne. La v.a. w est

appelée « durée de vie » de l'élément. Cette notion peut être comprise dans un sens plus large. Par exemple dans le cas où l'élément fonctionne avec des interruptions durant lesquelles d'une part les pannes ne peuvent se produire et d'autre part les paramètres ne varient pas.

Soit $F(t) = P(w < t)$ la f.r. de la v.a.w. Elle représente la probabilité de panne au cours de $(0, t)$. Dans la suite de ce cours, nous admettrons que $F(t)$ est continue et que w admet une densité continue de probabilité $f(t) = F'(t)$.

On appelle fonction de fiabilité la probabilité de bon fonctionnement continu durant $(0, t)$

$$R(t) = 1 - F(t) = P(w > t) = \int_t^\infty f(x) dx \quad (1).$$

2. Moyenne des temps de bon fonctionnement (ou MTBF).

Par définition la M.T.B.F (mean time between failures) vaut :

$$T_0 = E(w) = \int_0^\infty x f(x) dx \quad (2)$$

Une autre expression de ce coefficient est de la forme :

$$T_0 = \int_0^\infty R(x) dx \quad (3)$$

(Indication :intégrer par partie).

3. Taux de défaillance (ou risque de panne). Soit l'évènement

$A_{t_i, t_j} = \{l' \text{ élément fonctionne sans défaillances durant } (t_i, t_j) \}$

La probabilité pour que l'élément fonctionne sans défaillances au cours de $(t, t + h)$, sachant qu'il n'est pas tombé en panne jusqu'à la date t vaut :

$$R(t, t + h) = P \{A(t, t + h)\} = \frac{P \{A(t, t + h) \cap A(0, t)\}}{P \{A(0, t)\}} = \frac{P \{A(0, t + h)\}}{P \{A(0, t)\}} = \frac{R(t + h)}{R(t)}$$

La probabilité de panne au cours de $(t, t + h)$ s'exprime alors

$$F(t, t + h) = 1 - R(t, t + h) = \frac{R(t) - R(t + h)}{R(t)}$$

On appelle **taux de défaillance** la fonction :

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(t, t + h)}{h} \right) = - \frac{R'(t)}{R(t)} \quad (4)$$

On peut interpréter $r(t) dt$ comme étant la probabilité pour que l'élément tombe en panne au cours de $(t, t + dt)$ sachant qu'il a fonctionné sans défaillance jusqu'à la date t . L'importance de cette caractéristique est due au fait qu'elle donne une idée plus précise

du processus de panne (c'est une caractéristique locale).

De (4) il résulte que la fonction de fiabilité

$$R(t) = \exp \left[- \int_0^t r(x) dx \right] \quad (5)$$

La fonction de densité est de la forme

$$f(t) = r(t) \exp \left[- \int_0^t r(x) dx \right] \quad (6)$$

La fonction $H_Z(x) = \int_0^x r(t) dt$

Est appelée **fonction de hasard** ou simplement **hasard**.

4. Variance. parfois la connaissance de la M.T.B.F. ne suffit pas et c'est pourquoi il est souvent nécessaire d'avoir une idée sur la dispersion des valeurs de la durée de vie autour de T_0 .

$$\sigma^2 = Var(w) = E(w - T_0)^2 = E(w^2) - (E(w))^2$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - T_0^2$$

Vraisemblablement, il est plus rationnel d'utiliser la dispersion comme coefficient de fiabilité lorsque $T_0 \gg \sigma$ (exemple de Kapur)

5. Autres coefficients. Les autres coefficients ayant trait à la notion de sureté de fonctionnement pourront être définis de manière analogue [Monographie AFCET (1980)] :

(i) la disponibilité (pointwise availability) $D(t)$ est la « probabilité pour que le système soit capable d'accomplir correctement ses tâches lorsqu'il est sollicité (probabilité de bon fonctionnement à la date t) ».

(cette caractéristique est appelée parfois coefficient d'aptitude).

On peut également définir la disponibilité sur un intervalle de temps (a, b)

(ii) la maintenabilité $M(t)$ est la « probabilité de localiser et de réparer les éléments défectueux ; c'est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t sachant qu'il était en panne à tout instant $t' \in (0, t)$ ».

(iii) la sécurité $S(t)$ est la « probabilité d'éviter les événements catastrophiques pour la mission considérée ; i.e. la probabilité pour qu'une défaillance dont les effets sont catastrophiques ne survienne pas. Plus concrètement $S(t)$ est la probabilité de fonctionnement de sécurité à tout instant $t' \in (0, t)$ ».

La sureté peut alors être caractérisée par le vecteur

$$\hat{S}(t) = \{R(t), D(t), M(t), S(t)\}$$

Parfois, notamment lors des études de sureté de fonctionnement des systèmes informatiques, on ajoute d'autres composantes :

(iv) la crédibilité $C(t)$ qui est la « probabilité pour que le temps moyen de latence d'une erreur soit inférieur à t ».

Une erreur est dite latente à l'instant t « si l'utilisateur du système estime au même instant que l'état du système ne recèle pas cette erreur ». Le temps de latence est alors la durée moyenne pendant laquelle cette erreur est latente. Le calcul de la crédibilité ne prend pas en général compte des erreurs de conception [Monographie AFCET (1980)].

(v) la survivabilité $SU(t)$ est la « probabilité de fonctionnement à l'instant t sachant qu'une défaillance s'est produite entre les instants 0 et t ».

Il est évident que ces critères ne sont pas indépendants et il existe un lien étroit entre eux. Il peut cependant arriver que ces coefficients s'opposent et entrent en conflit (exemple monographie de l'AFCET).

Remarque. La quantité T_0 est appelée parfois M.T.T.F ou M.T.F.F (mean time to first failure) qui traduit plus logiquement cette définition.

De la même manière, tous les coefficients de sûreté devront être définis aussi rigoureusement que possible, afin d'éviter les conflits auxquels nous avons fait allusion ci-dessus. Voici par exemple un moyen de définir la disponibilité. On peut introduire un vecteur aléatoire $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ qui décrit de manière « précise » l'état du système. Par exemple $X_i(t) = 1$ si le i -ème élément fonctionne, et 0 s'il est défaillant. Le vecteur $X(t)$ est décrit par sa distribution de probabilité

$$F(x_1, \dots, x_n, t) = P(X_1(t) < x_1, \dots, X_n(t) < x_n)$$

La disponibilité sera définie comme la probabilité

$$D(t) = P(X(t) \in G)$$

Où G est un sous-ensemble de l'ensemble des valeurs de $X(t)$ (pour l'exemple considéré $G \subset \{0, 1\}^n$; ainsi, si la disponibilité du système nécessite le fonctionnement correct

de tous les éléments

$$D(t) = P(X(t) = (1, 1, \dots, 1))$$

Si par contre le système est disponible dès qu'un élément au moins est en bon état à la date t , alors

$$D(t) = 1 - P(X(t) = (0, 0, \dots, 0))$$

Dans le premier cas, la disponibilité sur un intervalle est alors définie par :

$$D(a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(X(t) = (1, 1, \dots, 1)) dt$$

La disponibilité limite (limiting interval availability) vaut

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D(0, T)$$

Elle représente la fréquence de la durée de fonctionnement normal au cours d'une période indéfiniment grande.

Dans les études de fiabilité mécanique, on définit le **coefficient de sécurité** :

$$s = (\text{résistance à la contrainte}) / (\text{contrainte appliquée})$$

Généralement, la résistance à la contrainte (et la contrainte elle-même) possède une distribution (a priori inconnue) autour d'une valeur moyenne, et la dispersion autour de cette valeur peut être relativement importante. Pour tenir compte de ces causes de dispersion, d'autres coefficients de sécurité sont quelquefois considérés, par exemple le **coefficient extrême de sécurité** :

$$S_e = (\text{résistance minimum à la contrainte}) / (\text{contrainte maximum appliquée})$$

En vertu de l'inégalité de Tchebishev, on obtient la règle des 3 sigma en posant $\varepsilon = 3\sigma$

$$P(|\bar{X} - u| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

Dans le cas d'une loi normale, on considère souvent pour borne supérieure la valeur $u_{\max} = \bar{X} + 3\sigma$. Dans ce cas, le coefficient extrême de sécurité est donné par

$$S_e = \frac{u_R - k\sigma_R}{u_C + k\sigma_C}$$

Où k est donné par le concepteur, $3 \leq k \leq 6$.

Par fiabilité on comprend parfois la quantité

$$R = P(\text{résistance} > \text{contrainte})$$

Ces critères ne sont pas exhaustifs.

2.2.1 Méthodes pratiques d'estimation des coefficients de fiabilité

Les coefficients de fiabilité définis ci-dessus sont a priori inconnus. Ils pourront être estimés à partir d'observations empiriques antérieures ou d'essais de laboratoire. Il existe de nombreuses méthodes que nous étudierons plus loin. Ci-dessous nous présentons les principes de ces méthodes.

1. Estimation de la fonction de fiabilité. Supposons que nous désirions déterminer la valeur de $R(t)$ au point $t = t_0$ i.e. la probabilité de bon fonctionnement au cours de $(0, t_0)$. L'idée consiste à soumettre N éléments identiques durant t_0 unités de temps. A l'issue du temps t_0 on compte le nombre n d'éléments qui sont encore en vie. La procédure d'essais peut être assimilée à une série de N expériences de Bernoulli avec

A = {l'élément est encore en vie à la date t_0 }

Soit la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{s'il ya panne de l'élément } i \text{ durant } (0, t_0) \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$$

Selon le théorème de Borel

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \frac{n}{N} \rightarrow R(t_0) \text{ avec une probabilité } 1$$

En pratique on pourra admettre que

$$R(t_0) \approx \frac{n}{N}$$

Si on désire connaître la fonction $R(t)$ pour tous $t \leq t_0$, alors on doit procéder à des essais durant t_0 et noter les dates de pannes. Soit $n(t)$ le nombre d'éléments vivants à la date t . Au départ $n(0) = N$, puis à chaque date de panne $n(t)$ diminue d'une unité. La fonction

$$R_N(t) = \frac{n(t)}{N}$$

Est appelée fonction empirique de fiabilité

Remarque. On ne peut rien dire de $R(t)$ en dehors de l'intervalle d'observation $(0, t_0)$.

En général, on connaît l'allure de $R(t)$ soit à partir de considérations physiques,

soit à partir d'expériences antérieures : seuls les paramètres sont inconnus. Ces derniers pourront être estimés à l'aide de méthodes statistiques : méthodes du maximum de vraisemblance, des moments,...

2.Estimation de la M.T.B.F. on peut procéder à des essais de N éléments jusqu'à la panne du dernier. Soient w_1, w_2, \dots, w_N les durées de vie de chacun de ces éléments. Selon la loi des grands nombres

$$\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \rightarrow T_0 \text{ avec une probabilité } 1.$$

Malheureusement, en pratique les essais ne peuvent pas être réalisés jusqu'à la fin (pour des raisons évidentes de coût, de temps...). Il existe des méthodes qui permettent de prendre en considération ce problème. On pourra en guise d'approximation première adopter la méthode suivante.

Supposons qu'au cours de $(0, t)$ on procède aux essais sur N éléments et qu'il se soit produit n pannes aux dates w_1, w_2, \dots, w_n . On peut alors donner une borne inférieure de la MTBF

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \left(\frac{1}{N}\right) [w_1 + w_2 + \dots + w_n + w_{n+1} + \dots + w_N] \\ &> \left(\frac{1}{N}\right) [w_1 + w_2 + \dots + w_n + (N - n) t] \end{aligned}$$

Et donc pour N grand

$$T_0 > \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i + \left(1 - \frac{n}{N}\right) t$$

On utilisera cette approximation lorsque n est voisin de N .

3.Estimation de la dispersion.

$$Var(w) \approx S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2$$

C'est un estimateur sans biais, convergent et asymptotiquement efficace [Cramer (1946)].

4.Estimation de la fonction de densité.

On partage l'intervalle $(0, t)$ en plusieurs segments de durée h et on enregistre le nombre de pannes dans chaque segment. On construit ensuite l'histogramme des fréquences.

Si N éléments sont soumis aux essais et si n_i désigne le nombre de pannes au cours

de l'intervalle $[(i-1)h, ih]$, $i = 1, 2, \dots$ alors la fonction empirique de densité vaut

$$f_N(t) = \frac{n_i}{Nh} \text{ si } (i-1)h < t < ih$$

Si N est suffisamment grand et h suffisamment petit $f_N(t) \approx f(t)$.

5. Estimation du risque de panne. Soit $n(t)$ le nombre de vivants à la date t .

Alors si h est suffisamment petit

$$r(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \cdot \frac{R(t) - R(t+h)}{hR(t)} \cdot \frac{\Delta n}{hn(t)}$$

Où Δn est le nombre de pannes au cours de $(t, t+h)$.

Deuxième méthode. On partage $(0, t)$ en segments de longueur h ; soit n_i le nombre de pannes au cours de $[(i-1)h, ih]$. Le taux de défaillance empirique est de la forme :

$$r_N(t) = \frac{n_i}{(N - n_1 - \dots - n_{i-1})h} \text{ si } (i-1)h < t < ih$$

2.3 Modèles usuels de fiabilité

1. Modèle exponentiel. De nombreuses données expérimentales montrent que pour une large classe d'éléments, le taux de défaillance $r(t)$ varie de forme arc.

Durant la période initiale (t_0, t_1) les valeurs de $r(t)$ sont élevées. Ceci est dû à une fréquence élevée des pannes précoces résultant de défauts des matériaux ou de production. Le contrôle de la qualité et les essais des premiers exemplaires permettent en général d'éliminer de nombreux articles ne répondant pas aux normes techniques. Par analogie avec la terminologie utilisé en démographie, cet intervalle de temps est appelé période de « mortalité infantile ». la seconde période (t_1, t_2) est caractérisée par des pannes aléatoires dues à des variations imprévues des paramètres dans des conditions lourdes d'exploitation. Dans les équipements mécaniques tels que les automobiles, de telles pannes peuvent être atténuées en réalisant une conception calculée dans des conditions extrêmes d'exploitation. La dernière période (t_2, ∞) est caractérisée par les pannes d'usure qui sont inévitables. Le taux de défaillance croit avec le vieillissement de l'équipement. Si l'on pouvait prévoir la date t_2 , alors la panne pourrait être éliminée avant son occurrence (par exemple en renouvelant l'élément usé). La théorie de la fiabilité traite également ce

type de problème.

Il est évident que ce modèle de variation du taux des pannes n'est pas universel. Il existe des éléments qui se caractérisent par une absence de période mortalité infantile (par exemple moyennant un contrôle rigoureux). Cependant la majorité des éléments (notamment les composants électroniques) se caractérisent par une longue période de fonctionnement normal durant laquelle le taux de défaillance est constant (ou pratiquement constant). En effet d'une part les éléments sont soumis à des essais préliminaires et ce n'est qu'à l'issue de cette période de rodage que l'élément est mis en exploitation (au voisinage de la date t_1). D'autre part la « durée de vie » (ou plutôt la durée de service utile) se termine avant que l'on observe une panne apparente. Cette « durée de service utile » n'a rien à voir avec la notion de durée de vie définie au 1.5.2; elle est donnée par le constructeur et au-delà de cette période, ce dernier dégage sa responsabilité quand à la performance de son produit. Si l'on tient compte de ses considérations alors on peut admettre que

$r(t) = a = Cste$ dans ce cas :

$$R(t) = e^{-at}, a > 0$$

Et la v.a.w. obéit à une loi exponentielle de paramètre a :

$$F(t) = 1 - e^{-at}, f(t) = ae^{-at}, t \geq t_0$$

La loi exponentielle jouit d'une grande popularité en Théorie de fiabilité en raison de la remarquable propriété d'absence de mémoire que nous démontrons ci-dessous. D'autre part cette loi surgit naturellement dans de nombreux problèmes pratiques, comme le montrent les expériences effectuées sur de nombreux types d'éléments [Military standardization Handbook (1974)]. Ce phénomène admet une justification théorique grâce aux théorèmes d'[Ossoskov (1956)] et de [Griguelionis (1964)] stipulant que la superposition d'un grand nombre de flots d'évènements indépendants conduit souvent à des flots poissonniers pour lesquels la durée entre deux évènements successifs obéit à une loi exponentielle : c'est le cas des dispositifs électroniques qui sont constitués d'une multitude de composants dont les flots de pannes peuvent être considérés comme indépendants (Cf.

cours de files d'attente). D'un autre côté l'hypothèse d'exponentialité simplifie énormément les calculs et les résultats obtenus revêtent une forme simple, commode et souvent facilement interprétable.

Théorème 1. La loi exponentielle possède la propriété d'absence de mémoire :

La probabilité de bon fonctionnement au cours de la période $(t, t + T)$ ne dépend pas de la durée de fonctionnement écoulee t ; elle ne dépend que de la longueur de cet intervalle T .

La loi exponentielle est la seule loi continue possédant cette propriété.

Preuve. La probabilité de bon fonctionnement durant $(t, t + t')$ sachant que l'élément n'est pas tombé en panne durant $(0, t)$ vaut :

$$R(t, t + t') = \frac{R(t+t')}{R(t)} = \frac{e^{-a(t+t')}}{e^{-at}} = e^{-at'}$$

Montrons que la loi exponentielle est la seule loi continue possédant cette propriété i.e. si $R(t, t + t') = g(t')$ alors elle correspond à une loi exponentielle. Dans ce cas,

$$g(t') = \frac{R(t+t')}{R(t)}$$

Puisque $R(0) = 1$ alors $R(t') = g(t')$ et donc

$$R(t + t') = R(t) R(t'), t \geq 0, t' \geq 0$$

$$\text{Par récurrence, } R(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = R(t_1) R(t_2) \dots R(t_n) \quad (1)$$

Il est évident que $R(n) = R(1 + 1 + \dots + 1) = [R(1)]^n = q^n \quad (q = R(1))$.

Montrons que (1) est vraie pour $x \in \mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels);

Soit $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$. En vertu de (1) $q = R(1) = [R(\frac{1}{n})]^n$; d'où

$R(\frac{1}{n}) = q^{\frac{1}{n}}$. Soit $t_1 = t_2 = \dots = t_m = \frac{1}{n}, n \geq 1, m \geq 1$ alors

$$R(\frac{m}{n}) = R(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) = [R(\frac{1}{n})]^m = q^{\frac{m}{n}}$$

Montrons maintenant que la propriété est vraie pour tout réel $t > 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$ (arbitraire), alors pour n donné, il existe un entier naturel m unique tel que l'on ait :

$$\frac{m-1}{n} \leq t \leq \frac{m}{n}$$

Comme $R(\cdot)$ est monotone décroissante :

$$q^{\frac{m-1}{n}} = R(\frac{m-1}{n}) \geq R(t) \geq R(\frac{m}{n}) = q^{\frac{m}{n}}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, $\frac{m}{n}$ et $\frac{m-1}{n}$ convergent vers t . On distingue 3 cas :

Si $q = 0$ alors $R(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ i.e. l'élément tombe en panne à l'instant de mise en fonctionnement (c'est le cas de certains composants électroniques, par exemple des ampoules électriques) ;

Si $q = 1$, alors $R(t) = 1$ i.e. l'élément est absolument fiable ;

Nous rejetons ces deux cas extrêmes qui ne présentent pas d'intérêt pratique et nous admettons que

$$1 > q > 0 ; \text{ si on pose } q = e^{-a}, a > 0 \text{ alors } R(t) = e^{-at}$$

Remarque.1. la loi exponentielle est donc la seule loi à taux de défaillance constant.

2. un taux de défaillance constant signifie intuitivement que le composant exponentiel est essentiellement aussi bon qu'à l'état neuf : (as good as new) [Barlow-Proshan (1975)].

3. Si h est petit ($h \rightarrow 0$), alors

$$P(w < h) = ah + O(h)$$

Où O est le symbole de Landau.

L'interprétation de ce résultat est la suivante. Admettons qu'à la date t_0 l'élément fonctionne. La probabilité de panne dans $(t_0, t_0 + h)$ vaut $ah + O(h)$.

Admettons qu'à la date t_0 , n éléments fonctionnent normalement.

Soit w_i la durée de bon fonctionnement de puis t_0 jusqu'à la panne du i -ème élément, $i = \overline{1, n}$.

Théorème 2. Si pour tout i , la v.a. w_i est de loi exponentielle de paramètre a_i et si les v.a. $(w_i)_{i \in \overline{1, n}}$ sont indépendantes (les pannes des éléments sont indépendantes), alors la v.a. $w_{\min} = \min(w_1, \dots, w_n)$ est de loi exponentielle de paramètre $a_{\min} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

De plus, indépendamment de $t \geq 0$,

$$P(w_{\min} = w_i | w_{\min} = t) = \frac{a_i}{a_{\min}}, 1 \leq i \leq n$$

Preuve.
$$P(w_{\min} > t) = P(\min(w_i) > t) = P(w_1 > t, \dots, w_n > t) = \\ = P(w_1 > t) \dots P(w_n > t) = e^{-a_1 t} \dots e^{-a_n t} = e^{-a_{\min} t}$$

Montrons le second point du théorème.

$$P(w_{\min} = w_i | w_{\min} = t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(w_{\min} = w_i, t < w_{\min} < t+h)}{P(t < w_{\min} < t+h)}$$

Cependant,

$$\begin{aligned} P(w_{\min} = w_i, t < w_{\min} < t + h) &= P(t < w_i < t + h, w_j > w_i, i \neq j) = \\ &= \int_t^{t+h} a_i e^{-a_i x} P(w_j > x, i \neq j) dx = \int_t^{t+h} a_i e^{-a_i x} \exp\left[-\sum_{j \neq i} a_j x\right] dx = \\ &= a_i \int_t^{t+h} \exp[-a_{\min} x] dx = a_i \exp(-a_{\min} t) h + O(h) \end{aligned}$$

D'autre part, $P(t < w_{\min} < t + h) = \int_t^{t+h} a_{\min} \exp[-a_{\min} x] dx = a_{\min} \exp[-a_{\min} h] + O(h)$

En substituant ces deux dernières formules dans l'expression de la probabilité conditionnelle cherchée, on obtient le résultat du théorème.

Théorème 3. Dans les conditions du théorème précédent, notons par N_n le nombre de pannes au cours de $(t_0 + t_0 + h)$.

$$P(N_n = 0) = 1 - ah + O(h)$$

$$P(N_n = 1) = ah + O(h)$$

$$P(N_n \geq 1) = ah + O(h)$$

$$P(N_n \geq 2) = O(h)$$

Preuve. L'évènement $\{N_n = 0\}$ est équivalent à $\{w_{\min} > h\}$

$$P(N_n = 0) = P(w_{\min} > h) = e^{-ah} = 1 - ah + O(h)$$

$$P(N_n \geq 1) = 1 - P(N_n = 0) = ah + O(h)$$

La probabilité pour qu'il y ait exactement un évènement dans l'intervalle $(t_0 + t_0 + h)$

$$\begin{aligned} P(N_n = 1) &= P(\cup_{i=1}^n w_i < h, w_j > h, j \neq i) = \\ &= \sum_{i=1}^n [a_i h + O(h)] \cdot \exp\left(-\sum_{j \neq i} a_j h\right) = a_{\min} h + O(h) \end{aligned}$$

Enfin $P(N_n \geq 1) = P(N_n = 1) + P(N_n \geq 2)$.

Remarque. Les résultat ci-dessus peuvent être appliqués aux durées de réparation et d'inspection. Supposons qu'à la date t_0 , n équipements sont en cours de réparation (inspection) et soit w_i la durée écoulée depuis t_0 jusqu'à la fin de la réparation (inspection). Alors la probabilité pour qu'une réparation (inspection) se termine au cours de $(t_0, t_0 + h)$ vaut $a_{\min} h + O(h)$. De plus $\frac{a_i}{a_{\min}}$ est la probabilité pour que ce soit la réparation du i -ème équipement qui se termine, sachant qu'à la date t une réparation a pris fin (cette probabilité est indépendante de t).

2.Modèle de la loi normale. Au cours de son exposé au VI0 congrès international de l'E.O.Q.C. (Aix-en-provence,5-7 sept.1962) R. Lusser faisait remarquer que la plupart des défaillances d'avions provenaient de la partie électronique. dans sa préface de l'ouvrage de Markovici, Vigier M.G. notait à ce sujet que si cela était probablement vrai à l'époque, aujourd'hui il est nécessaire de tenir compte des défaillances mécaniques. Les experts ont pris l'habitude aujourd'hui de classer les pannes en deux classes :défaillances électroniques qui conduisent généralement au modèle exponentiel (risque de panne constant) et les défaillances mécaniques pour lesquelles on pense à une certaine dispersion autour de la valeur moyenne. Ces derniers types de pannes conduisent généralement à des lois normale, gamma, de weibull, des valeurs extremales. . . que nous passons en revue ci-dessous.

La fonction de répartition de la loi normale est de la forme

$$F(t) = P(w < t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(x-T_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

D'où la fonction de fiabilité :

$$R(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-T_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Théorème 4. Si la durée de vie de l'élément obéit à une loi normale, alors le taux des pannes est une fonction monotone croissante du temps.

Démontrer à titre d'exercices. Indication : il suffit de montrer que $r'(t) > 0$, pour tout t . Mais $r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$, donc $r'(t) = \frac{R(t)f'(t)+f^2(t)}{R^2(t)}$

Il suffit de prouver que le numérateur est positif. Utiliser pour cela l'expression de la fonction de densité de la loi normale.

3.Modèle log-normale. La fonction de densité vaut

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log t-u)^2}{2\sigma^2}\right], t > 0$$

Dans ce cas la v.a. $X = \log w \sim \mathfrak{N}(u, \sigma^2)$ avec $E(X) = E(\log w)$,

$Var(X) = Var(\log w) = \sigma^2$. Comme $w = e^X$ alors on peut obtenir les moments en utilisant la loi normale :

$$\begin{aligned} E(w) &= E(e^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[x - \frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\ &= \exp\left(u + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(x-(u+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right] dx \end{aligned}$$

$$T_0 = E(w) = \exp\left(u + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

De la même manière $E(w^2) = E(e^{2X}) = \exp(2u + \sigma^2)$

$$\text{D'où } Var(w) = e^{2u+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

4. Modèle à taux de pannes linéairement croissant (loi de Rayleigh).

Un tel taux est observé durant la période (t_2, ∞) . dans le cas général c'est une fonction non linéaire. Si par contre

$$r(t) = ct, (c > 0)$$

Alors

$$f(t) = ct \exp\left[-\int_0^t cxdx\right] = ct \exp\left[-\frac{ct^2}{2}\right], t > 0$$

C'est la fonction de densité de la loi de Rayleigh. La fonction de fiabilité est alors de la forme :

$$R(t) = \frac{f(t)}{r(t)} = \exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right)$$

La M.T.B.F

$$T_0 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2c}}, \sigma^2 = \frac{4-\pi}{2c}$$

5. Taux linéaire par morceaux.

Un exemple de ce type de modèle est décrit dans le livre de [Shooman M.L (1968)].

$$r(t) = \begin{cases} a_0 - a_1 t + d & , 0 \leq t < \frac{a_0}{a_1} \\ d & , \frac{a_0}{a_1} < t < T_1 \\ a(t - T_1) + d & , T_1 < t, d > 0 \end{cases}$$

Le taux des pannes croit linéairement jusqu'à la valeur qui est atteinte à la date $\frac{a_0}{a_1}$.

Il reste constant jusqu'à la date T_1 et de nouveau croit linéairement.

La fonction de densité de cette distribution est de la forme.

$$f(t) = \begin{cases} (a_0 + d - a_1 t) \exp\left[-(a_0 + d)t - a_1 \left(\frac{t^2}{2}\right)\right] & , 0 \leq t < \frac{a_0}{a_1} \\ d \exp\left[-\left(dt + \frac{a_0^2}{2a_1}\right)\right] & , \frac{a_0}{a_1} \leq t \leq T_1 \\ [a(t - T_1) + d] \exp\left[-\left(\frac{a}{2}(t - T_1)^2 + \frac{a_0^2}{2a_1} + dt\right)\right] & , T_1 < t \end{cases}$$

La fonction de fiabilité vaut :

$$R(t) = \begin{cases} \exp\left[-(a_0 + d)t - a_1 \left(\frac{t^2}{2}\right)\right] & , 0 \leq t < \frac{a_0}{a_1} \\ \exp\left[-\left(dt + \frac{a_0^2}{2a_1}\right)\right] & , \frac{a_0}{a_1} \leq t \leq T_1 \\ \exp\left[-\left(\frac{a}{2}(t - T_1)^2 + \frac{a_0^2}{2a_1} + dt\right)\right] & , T_1 < t \end{cases}$$

6. Loi de Weibull.

Si le taux des pannes s'exprime sous forme de puissance :

$$r(t) = \frac{bt^{b-1}}{\theta^b}$$

Alors nous obtenons la loi de weibull.

$$f(t) = \frac{bt^{b-1}}{\theta^b} \exp \left[- \left(\frac{t}{\theta} \right)^b \right]$$

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\theta} \right)^b \right]$$

Selon la valeur de b , on peut obtenir des taux de pannes croissant ($b > 1$), décroissant ($b < 1$), ou constant ($b = 1$).

$$T_0 = \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{t}{\theta} \right)^b \right] dt = \theta \cdot \Gamma \left(\frac{1}{b} + 1 \right)$$

$$\sigma^2 = \theta^2 \left[\Gamma \left(\frac{1}{b^2} + 1 \right) - \Gamma^2 \left(\frac{1}{b} + 1 \right) \right]$$

La popularité de la loi de weibull résulte du fait que non seulement elle généralise la loi exponentielle ($b = 1$), mais contient un paramètre supplémentaire b . On peut obtenir un meilleur ajustement des données empiriques qu'avec la loi exponentielle. Ainsi un élément pour lequel on rencontre des défauts cachés fréquents mais qui ne « vieillit » pas au cours d'une longue période est tel que le risque de panne est élevé au début et ensuite il décroît. La fonction de fiabilité d'un tel élément est bien approchée par une loi de weibull avec $b < 1$. Par contre si l'élément ne contient pas de défauts cachés mais « vieillit » rapidement, alors le risque de panne croît de manière monotone et là une approximation adéquate est donnée par une loi de weibull avec $b > 1$.

La distribution de weibull a été utilisée pour la première fois pour décrire

-la fatigue des équipements mécaniques, [weibull W.A. (1939)].

-les pannes d'un tube à vide, [Kao J.H.K. (1958)].

-les défaillances des roulements à billes [Lieblein J.(1956)].

-la fatigue humaine [Babès (1987)].

La loi de weibull est connue en statistique mathématique sous le nom de loi de Fisher-Tippet de type III ou loi des valeurs minimales de type III (cf. plus loin).

7. Taux des pannes exponentiel.

$$r(t) = ce^{at}$$

Dans ce cas : $f(t) = ce^{at} \exp\left[-\left(\frac{c}{a}\right)(e^{at} - 1)\right]$

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{c}{a}\right)(e^{at} - 1)\right]$$

C'est la loi des valeurs extrêmes que nous rencontrerons plus loin.

8. Loi de puissance. La fonction de fiabilité est de la forme :

$$R(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{m}\right)^a}$$

La M.T.B.F. est finie si $a > 1$, $T_0 = \frac{m}{a-1}$

9. Fiabilité des éléments provenant d'un lot homogène.

Soit un lot homogène de N éléments. Notons par $N(t)$ le nombre d'éléments vivants à la date t . Cette variable aléatoire obéit à une loi binomiale de paramètre N et $R(t)$.

Dans ce cas,

$$p_n = P(N(t) = n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} [R(t)]^n [1 - R(t)]^{N-n}, n = \overline{0, N}$$

$$E(N(t)) = N \exp\left[-\int_0^t r(x) dx\right]$$

10. Cas d'un lot non homogène.

Les éléments du lot proviennent de n unités de production. l'unité U_i fournit $100p_i\%$ de toute la production ; $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. on admet que la production des n unités est mélangée au hasard et que le taux de défaillance des éléments de l'unité U_i est constant a_i . La formule des probabilités totales donne immédiatement :

$$R(t) = \sum_{i=1}^n p_i e^{-a_i t}$$

11. Modèle avec deux types de pannes.

Très souvent l'élément peut être sujet à deux types de pannes :subites (dûes à des variations brusques des paramètres) et graduelles (dûes au « vieillissement » de l'élément. Comme nous l'avons déjà fait remarquer pour les pannes subites on peut admettre que le taux de défaillance est constant $a > 0$;pour les pannes graduelles il est nécessaire de tenir compte de la dispersion et c'est pourquoi on peut penser à une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La durée de vie de l'élément

$w = \min(w_1, w_2)$ où w_1 (resp. w_2) est la durée jusqu'à l'occurrence d'une panne subite (resp.graduelle). la fonction de fiabilité s'exprime alors sous la forme :

$$R(t) = R(t_1) \cdot R(t_2) = e^{-at} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Théorème 5. Si $\sigma \ll m$ alors $T_0 \approx \left(\frac{1}{a}\right) \left(1 - \exp\left[-am + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right]\right)$

Preuve.

$$T_0 = \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty e^{-at} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-m}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Faisons le changement de variable $x = \frac{t-m}{\sigma}$. Alors

$$T_0 = \int_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty e^{-a\sigma x - am} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

En intégrant par partie, on obtient

$$T_0 = \frac{\sigma e^{-am}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-\frac{1}{a\sigma} e^{-a\sigma x} \left(\int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \right]_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty - \int_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty \left(-\frac{1}{a\sigma} e^{-a\sigma x} \right) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \right\}$$

$$T_0 = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{e^{-am}}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty e^{-a\sigma x - \frac{x^2}{2}} dx \quad (2)$$

Puisque $\sigma \ll m$ alors

$$T_0 \approx \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{e^{-am}}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-a\sigma x - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{a} - \frac{e^{-am}}{a} \frac{e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x+a\sigma)^2}{2}} dx$$

D'où le résultat. La valeur exacte de T_0 pourra être obtenue en utilisant les tables de la loi normale. De (2) il résulte que

$$T_0 = \left[\frac{1}{a} - \frac{e^{-am + \frac{a^2\sigma^2}{2}}}{a} \right] [1 - \Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right)]$$

Où $\Phi(z)$ est la f.r. de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

12. Modèle des éléments « vieillissants ».

Définition. On dit que l'élément est « vieillissant » si son taux de pannes $r(t)$ est monotone non décroissant i.e. $0 \leq t_1 \leq t_2$, $r(t_1) \leq r(t_2)$

Barlow et Proshan (1975) définissent ainsi un élément pour lequel la probabilité de survie au cours de la période $(t, t+x)$ sachant que l'élément a fonctionné sans défaillance jusqu'à t :

$$R(x|t) = \frac{R(t+x)}{R(t)} \text{ est croissante pour tout } x \geq 0.$$

Mais dans ce cas, on montre que si la fonction de densité existe,

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{R(t+h)}{R(t)} \right) \text{ est décroissante.}$$

La fonction $F(\cdot)$ est alors dite distribution DFR (decreasing failure rate distribution). De la même manière, $F(\cdot)$ est dite distribution IFR (increasing failure rate) si $R(x|t)$ est décroissante (cela correspond à un taux de défaillance croissant).

Théorème 6. si $F(\cdot)$ est une distribution DFR alors

$$R(t) > e^{-\frac{t}{T_0}} \text{ pour } t < T_0$$

$$\sigma^2 = Var(w) < T_0^2$$

Notons que pour la loi exponentielle $\sigma^2 = T_0^2$

13. Modèle de la résistance à la contrainte.

Ce type de modèle est utilisé lors de l'analyse de la fiabilité d'un équipement mécanique. On part du principe que tout équipement (mécanique) possède une résistance F à une contrainte C qu'il subit au cours de son exploitation. La défaillance se produit dès que la contrainte appliquée dépasse la valeur de la résistance $F : C > F$, par conséquent, la fiabilité est définie par $R = P(F > C)$ (au sens statique).

Les constructeurs assurent souvent la solidité d'une réalisation par le coefficient $n = \frac{F}{C}$ appelé facteur de sécurité. Ils supposent que la résistance d'une pièce peut être assimilée à une valeur moyenne et ignorent la distribution autour de cette moyenne.

En fait, les hétérogénéités de la matière et l'imprécision sur les dimensions sont telles que F est une v.a. qui peut obéir à une loi normale $\mathcal{N}(u_F, \sigma_F^2)$ et avoir une dispersion relativement importante. Il en est de même de la contrainte appliquée qui peut fluctuer suivant la mission et l'environnement. Si C est de loi normale $\mathcal{N}(u_C, \sigma_C^2)$, alors il en est de même de $Y = C - F$ qui est de loi

$\mathcal{N}(u_C - u_F, \sigma_C^2 + \sigma_F^2)$ et par conséquent la fiabilité peut être lue directement dans la table de la loi normale centrée réduite.

$$R = 1 - \Phi\left(\frac{u_C - u_F}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_F^2}}\right)$$

On utilise alors le coefficient central de sécurité défini par

$$\tilde{n} = \frac{u_F}{u_C}$$

La théorie de la résistance à la contrainte est bien détaillée dans [Markovici (1974)]; ainsi que dans [Kapur (1978)] où l'on procède notamment à des calculs de la fiabilité R pour divers types de lois de F et de C .

14. Modèles statiques d'analyse des systèmes.

Dans ce point, nous décrivons brièvement les structures de système les plus courantes.

Système en série. Un système monté en série fonctionne si et seulement si tous ses éléments fonctionnent.

Soit R_i = probabilité de bon fonctionnement du i -ème élément.

R_S = probabilité de bon fonctionnement du système.

On admet que les pannes des éléments se produisent indépendamment les unes des autres. Dans ce cas

$$R = \prod_{i=1}^n R_i$$

Le montage en série est le modèle le plus répandu et le plus facile à étudier. Cependant la fiabilité du système décroît rapidement lorsque n croît. La fiabilité du système est toujours inférieure à celle de l'élément le moins fiable :

$$R_S \leq \min(R_1, \dots, R_n)$$

On peut obtenir rapidement une approximation de R_S de la manière suivante. Soit $Q_i = 1 - R_i$ la probabilité de panne de l'élément i . si les éléments sont homogènes $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$, alors

$$R = (1 - Q)^n$$

En utilisant le développement du binôme de Newton,

$$R = 1 + n(-Q) + \frac{n(n-1)}{2}(-Q)^2 + \dots + (-Q)^n$$

En admettant que Q est petit ($Q \approx 0$) et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on a :

$$R = 1 - nQ$$

Si les éléments sont non homogènes :

$$R \approx 1 - \sum_{i=1}^n Q_i$$

Système en parallèle. Un tel système fonctionne si au moins un élément fonctionne.

$$\text{dans ce cas : } R = 1 - Q = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$\text{Si } R_1 = R_2 = \dots = R_n = R \text{ alors } R = \sum_{i=1}^n C_n^i R^i (1 - R)^{n-i}$$

Système k parmi n. (k-out-of-n).

Un tel système fonctionne si au moins k éléments parmi les n fonctionnent.

Il existe aussi des possibilités de combinaison de systèmes série et parallèle.

15. Loi des valeurs extrêmes.

Soit un ensemble de v.a. $\{X_1, \dots, X_n\}$ de même loi $F_i(x) = P(X_i < x) = F(x)$.
 posons

$$Y_n = \min \{X_1, \dots, X_n\} \text{ et } Z_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

Les lois de ces v.a. se rencontrent fréquemment en théorie de fiabilité et portent le nom de lois des valeurs extrêmes.

Dans le cas général, ce type de loi peut être appliqué lorsque le phénomène qui entraîne la panne dépend de la plus grand ou plus petite valeur d'une suite de v.a.i. ; par exemple modèle du nœud le plus faible. Ces lois ont été étudiées par [Gumbel (1958)] et [Epstein (1960)] dans le cas de la destruction du matériau suite à la fatigue.

Il est évident que :

$$L_n(x) = P(Z_n < x) = P(X_1 < x, \dots, X_n < x) = F^n(x)$$

$$G_n(x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

Pour chaque valeur extrême, il existe trois types de distribution asymptotique [Barlow-proshan (1975)] , [Kapur-Lamperson (1978)], [Gnedenko-Beliaev-Soloviev (1972)].

Distribution asymptotique des valeurs minimales.

Type.I $G_I(x) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{x-\delta}{\theta} \right) \right] , x \in \mathbb{R}, \theta > 0$

Type.II

$$G_{II}(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(-\frac{x-\delta}{\theta} \right)^{-b} \right] , & x \leq \delta, \theta > 0, b > 0 \\ 1 & , \quad x > \delta \end{cases}$$

Type.III

$$G_{III}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \delta \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x-\delta}{\theta} \right)^b \right] , & x \geq \delta, \theta > 0, b > 0 \end{cases}$$

Chaque type apparaît dans des conditions déterminées. La distribution de type I a lieu si la densité de probabilité tend exponentiellement vers zéro lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Kramer montre que si $X_i \sim \aleph(0, 1)$ alors la distribution asymptotique de Y_n est de type I. si le domaine de la densité de probabilité n'est pas borné inférieurement et si pour $\theta > 0, b > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^\theta F(x) = b$

Alors $G_n(x) \rightarrow G_n(x)$.

La distribution de type III a lieu lorsque :

Le domaine de la densité de probabilité est borné inférieurement ($x \geq \delta$)

$F(x)$ se comporte comme $(\theta - \delta)^b$ pour $\theta > 0, b > 0, x \rightarrow \delta$

Distribution asymptotique des valeurs maximales.

Type.I $L_I(x) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x-\delta}{\theta} \right) \right], x \in \mathbb{R}, \theta > 0$

Type.II

$$L_{II}(x) = \begin{cases} 0 & , x < \delta \\ \exp \left[- \left(\frac{x-\delta}{\theta} \right)^{-b} \right] & , x \geq \delta, \theta > 0, b > 0 \end{cases}$$

Type.III

$$L_{III}(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(- \frac{x-\delta}{\theta} \right)^b \right] & , x \leq \delta, \theta > 0, b > 0 \\ 1 & , x \geq \delta \end{cases}$$

Le type I a lieu lorsque $f(x)$ tend exponentiellement vers zéro lorsque

$x \rightarrow \infty$. le type II lorsque pour $\theta > 0, b > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\theta [1 - F(x)] = b$$

Le type III a lieu lorsque le domaine est borné supérieurement ($x \leq \delta$) et si pour δ fini la fonction $1 - F(x)$ se comporte comme $\theta(\delta - x)$.

Remarque. La loi des valeur extrêmes a trouvé des applications importantes pour expliquer la destruction des matériaux suite à la fatigue. En effet, deux grandes théories tentent d'expliquer le mécanisme d'apparition des fissures et la destruction par fatigue qui s'ensuit. La première soutient que les structures liées entre elles dans le métal se renforce les unes les autres de la même manière que les fils parallèles d'un faisceau. Dans ce cas, en vertu du théorème de limite centrale, on peut admettre l'hypothèse d'une distribution normale de la durée de vie. La seconde théorie affirme que dans la structure de tout métal, il existe des défauts microscopiques et la destruction débute au point le plus faible. Puisque le nombre de tels nœuds est grand, alors en guise de modèle de durée de vie (exprimée en heures, en nombre de cycles, ...), on peut utiliser la distribution des valeurs extrêmes [Kapur-Lamperson (1978)].

Notons cependant que les résultats expérimentaux ne permettent pas d'émettre des conclusions universelles et définitives. En guise de modèles satisfaisants de la durée de vie, on conseille généralement les lois normale, de Galton, de Weibull et des valeurs extrêmes

[Kapur-Lamperson (1978)], [Markovici (1974)].

Notons également que la loi des valeurs extrêmes décrit la distribution d'un système constitué d'éléments en parallèle. En effet la durée de vie d'un tel système s'exprime sous la forme

$$w_S = \min(w_1, \dots, w_n)$$

Où w_i est la durée de vie du i -ème élément.

16. Modèle de Pollyak. Généralement, la fiabilité dépend de l'environnement (axiome III de la définition de la fiabilité), même si pour des raisons de simplification la majorité des modèles n'en tiennent pas compte. L'influence de l'environnement sera caractérisé par un ensemble de contraintes (température, radioactivité de vibration, humidité, ...), et quantifiée à l'aide d'un vecteur aléatoire

$c = (c_1, \dots, c_k)$ à valeur dans un domaine D de \mathbb{R}^k , et de densité $g(c)$.

La fiabilité du i -ème élément, s'exprime sous la forme

$$R_i(t) = \int_D R_i(t|c) g(c) dc$$

Où $R_i(t|c)$ est la fiabilité de l'élément i sous environnement c .

Ainsi, la fiabilité d'un système série à n éléments indépendants vaut

$$R(t) = \int_D \prod_{i=1}^n R_i(t|c) dG(c)$$

Où $G(\cdot)$ est la f.r. de c et D , l'ensemble des valeurs de $c \in \mathbb{R}^k$.

Définition. On dit que deux fonction $F(t, x)$, $G(t, x)$ d'un paramètre t et d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sont également ordonnées par rapport aux variable x_1, \dots, x_n si pour tout couple de vecteur x et y ,

$$[F(t, x) - F(t, y)] \cdot [G(t, x) - G(t, y)] \geq 0$$

Dans ce cas, on dit que les v.a. x_1, \dots, x_n sont associées. (il existe d'autre définitions).

Théorème.7 [Pollyak (1963)]. Soit $R_i(t|c)$ et $R_j(t|c)$ des fonctions des vecteurs d'ordre k , également ordonnées dans le sens de la définition ci-dessus. Soit $g(c)$ une fonction définie pour tout $c \in D$, non négative et telle que

$$\int_D g(c) dc = 1$$

$$\text{Alors } \int_D R_i R_j g(c) dc = \int_D R_i g(c) dc \cdot \int_D R_j g(c) dc$$

Ce théorème traduit l'influence de l'environnement aléatoire sur la fiabilité du système. D'ici il résulte que $cov(R_i, R_j) \geq 0$. c'est parfois à l'aide de cette relation qu'on définit des variables associées [Barlow-Proshan (1975)].

L'interprétation est la suivante. si les éléments ont des fiabilités indépendantes en ambiance fixe, le fait de les placer dans un environnement aléatoire introduit une corrélation positive. La fiabilité d'un système série est au moins égale à celle prévue sous l'indépendance statistique des défaillances des éléments. Celle d'un système parallèle est au plus égale à celle prévue dans l'hypothèse d'indépendance. Dans les chapitres suivants, des bornes plus précises seront établies.

2.4 Processus de renouvellement

Définition.1 soit un flot d'évènements aléatoires

$$\{t_1 = w_1, t_2 = w_1 + w_2, \dots, t_n = w_1 + \dots + w_n\}$$

Tel que :

les v.a. $\{w_1, w_2, \dots\}$ forment une suite de v.a.i. non toutes nulles avec une probabilité égale à 1.

Les v.a. $(w_i)_{i \geq 1}$ sont identiquement distribuées $P(w_i < t) = F(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Le flot $\{w_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1 (t_0 = 0)\}$ est appelé processus ordinaire de renouvellement ou tout simplement processus de renouvellement.

Interprétation. Considérons un élément (ou un système) fonctionnant au cours d'une période indéfinie. Dès que l'élément tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un autre, neuf et identique (on peut considérer aussi que l'élément est réparé). La durée de remplacement (ou de réparation) est négligeable. La suite des intervalles entre deux pannes successives (ou entre deux renouvellements successifs) forme un processus ordinaire de renouvellement.

Remarque. Il se peut que le premier intervalle ne corresponde pas à la durée entre deux pannes successives et

$$P(w_1 < t) = F_1(t) \neq F(t)$$

$$P(w_i < t) = F(t), i = 2, 3, \dots$$

Dans ce cas, on a un processus de renouvellement avec retard. Nous admettrons ci-dessous que la M.T.B.F. et la dispersion de la durée de vie sont finies :

$$T_0 = E(w_n) = \int_0^\infty [1 - F(t)] dt$$

$$\sigma^2 = Var(w_n) = 2 \int_0^\infty t [1 - F(t)] dt - T_0^2$$

Et que la fonction de densité de w existe et est continue.

Définition.2 la v.a. aléatoire $N(t)$ égale au nombre de renouvellements (ou de pannes) au cours de $(0, t)$ est appelée v.a. de renouvellement :

$$N(t) = \max(k; t_k \leq t)$$

$$N(t) = 0, \text{ si } w_1 > t$$

Le processus $\{N(t); t \geq 0\}$ est aussi appelé processus de renouvellement [Barlow-Proshan (1975)].

Définition.3 on appelle fonction de renouvellement, le nombre moyen de renouvellement (ou de pannes) au cours de $(0, t)$

$$H(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^\infty n P(N(t) = n) \quad (1)$$

Cette fonction joue un rôle important dans la théorie du renouvellement. Elle trouve de nombreuses applications en théorie de fiabilité, notamment dans les modèles de maintenance.

Théorème. Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ processus de renouvellement,

(i) La distribution de probabilité de la v.a. de renouvellement est de la forme

$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)$ où $F^{(n)}(\cdot)$ est le produit de convolution d'ordre n pour la fonction $F(\cdot)$ (c'est la f.r de la somme de n v.a.i. de même f.r $F(\cdot)$). on pose par convention : $F^{(1)}(t) = F(t)$.

(ii) La fonction de renouvellement $H(t)$ s'exprime sous la forme : $H(t) = \sum_{n=1}^\infty F^{(n)}(t)$ (2)

Elle est solution de l'équation intégrale du renouvellement

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x) \quad (3)$$

De plus ; $Var (N (t)) = 2 \int_0^t H (t - x) dH (x) + H (t) - H^2 (t)$

2.4.1 Quelques bornes utiles

Nous aurons besoin ci-dessous du résultat suivante :

Théorème .8 de Prokhorov-Kolmogorov. (Identité de Wald)

Soit X_1, \dots, X_n une suite de v.a. telle que

(i) $(X_i)_{i \geq 1}$ forme une suite de v.a.i. identiquement distribuées d'espérance finie $E (X_i) < \infty$

(ii) soit V une v.a. à valeurs entières telle que l'évènement $\{V = n\}$ est indépendant de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots

Alors

$$E \left(\sum_{i=1}^V X_i \right) = E (V) E (X_i)$$

Preuve. Cf. [Barlow-Proshan (1975)], [Gnedenko-Kolmogorov (1951)]

Corollaire. $E (t_{N(t)}) = T_0 H (t)$

Il suffit en effet, de remarquer que

$$t_{N(t)} = \sum_{j=1}^{N(t)} w_j$$

Théorème.9 (bornes pour la fonction de renouvellement).

(i) $F (t) \leq H (t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)}$

(ii) Si de plus l'élément est vieillissant ($F (\cdot)$ est IFR)

Alors pour tout t

$$\frac{t}{T_0} - 1 \leq H (t) \leq \frac{t}{T_0}$$

Preuve. Puisque $\max_{1 \leq i \leq n} (w_i) < \sum_{i=1}^n w_i = t_n$

Alors

$$F^{(n)} (t) = P (t_n < t), P (\max w_i < t) = \prod_{i=1}^n P (w_i < t) = [F (t)]^n$$

Par conséquent

$$H (t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)} (t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F (t)]^n = \frac{F(t)}{1-F(t)}$$

Mais $H (t) \geq F (t)$ d'où le résultat du point (i).

Selon l'identité de wald

$$t \leq E(w_1 + w_2 + \dots + w_{N(t)+1}) \leq T_0 [H(t) + 1]$$

$$\text{D'où } H(t) \geq \frac{t}{T_0} - 1.$$

Pour l'élément vieillissant $r(t)$ est croissant et on obtient que $H(t) \leq \frac{t}{T_0}$ [Barlow-Proshan (1975)].

Théorème.10 (bornes pour la durée de vie restante).

Si $r(t)$ est croissant ($F(\cdot)$ est IFR) alors

$$1 - \frac{t}{T_0} \leq \widehat{R}(t) \leq e^{-\frac{t}{T_0}}$$

En d'autre terms, pour l'élément vieillissant, on peut utiliser l'approximation $R(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}$ avec une erreur ne dépassant pas

$$0.5 \times \left(\frac{t}{T_0}\right)^2.$$

Nous avons précédemment introduit les distributions à taux de défaillance croissant (IFR-distribution) et à taux de défaillance décroissant (DFR-distribution). En théorie du renouvellement on utilise fréquemment d'autres classes de distribution [Marshall-Proshan (1972)].

Définition.1 une distribution $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ est appelée NBU-distribution (nouveau meilleur que l'existant) si

$$R(x+y) \leq R(x) \cdot R(y), x \geq 0, y \geq 0$$

Interprétation; la probabilité de survie de l'élément d'âge x , $\frac{R(x+y)}{R(x)}$ est inférieure à la probabilité de survie d'un nouvel élément.

Définition.2 $F(\cdot)$ est dite NWU-distribution (nouveau moins bon que l'existant) si

$$R(x+y) \geq R(x) \cdot R(y), x \geq 0, y \geq 0$$

L'égalité dans les définitions 1 et 2 n'a lieu que pour la loi exponentielle.

Notons d'autre part qu'une IFR-distribution est aussi NBU. (par analogie une DFR-distribution est aussi NWU); la réciproque est fausse.

Théorème.11 si $F(\cdot)$ est IFR de M.T.B.F. T_0 alors

$$R(t) \geq \begin{cases} e^{-\frac{t}{T_0}}, & t < T_0 \\ 0 & , t > T_0 \end{cases}$$

De même si $F(\cdot)$ est DFR, alors

$$R(t) \leq \begin{cases} e^{-\frac{t}{T_0}}, & t < T_0 \\ \frac{T_0 e^{-1}}{t}, & t \geq T_0 \end{cases}$$

Théorème.12 [Straub E. (1970)] si

- (i) $F(\cdot)$ est continue avec $F(0) = 0$
- (ii) $A(t) = -\log R(t)$
- (iii) $F(\cdot)$ est NBU (resp. NWU)

Alors ,

$$P(N(t) \leq n) \geq (\text{resp. } \leq) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[A(t)]^j}{j!} e^{-A(t)}$$

Remarque. Ce théorème reste valable dans un contexte plus général [Barlow (1975)].

Intuitivement, il est raisonnable de penser qu'un nouveau pneu est meilleur qu'un pneu utilisé. [Barlow-Proshian (1975)] proposent le modèle suivant pour la probabilité de survie :

$$R(t) = e^{-a \lceil \frac{t}{h} \rceil} \text{ pour } t \geq 0$$

Où $\lceil t \rceil$ désigne la partie entière de t et h représente la durée entre deux vols successifs (pour la simplicité, on suppose h constant). Dans ce cas

$$P(N(t) \leq n) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^j \lceil \frac{t}{h} \rceil^j}{j!} e^{-a \lceil \frac{t}{h} \rceil}.$$

Théorème.13 si $F(\cdot)$ est NBU (resp. NWU) alors

$$P(\gamma(t) > z) \leq (\geq) R(z)$$

Preuve. $P(\gamma(t) > z) = R(t+z) + \int_0^t R(t-x+z) dH(x) \leq R(t)R(z) + \int_0^t R(z)R(t-x) dH(x) = R(z).P(\gamma(t) > 0) = R(z)$

Théorème.14 (Super-additivité de $H(t)$). Si $F(\cdot)$ est NBU (resp. NWU) alors,

$$H(h) \leq (\geq) \frac{h}{T_0}$$

En effet, d'après le théorème précédent

$$H(h) \leq (\geq) \lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+h) - H(t)]$$

Mais d'après le théorème de blackwell, cette limite vaut $\frac{h}{T_0}$, d'où le résultat.

2.5 Fiabilité des systèmes

A priori, les méthodes présentées dans les précédents s'appliquent aussi bien à l'équipement (système), qu'à ses composants (éléments). L'information obtenue sur le système est, sans aucun doute bénéfique dans une première étape ; cependant lors d'une analyse plus poussée, il est nécessaire de tenir compte aussi de la structure du système. Dans les titre suivants, on s'intéresse à la fiabilité du système, connaissant sa structure et la fiabilité des éléments le constituant.

1. systèmes cohérents

Pour caractériser l'aptitude du système à l'exploitation, on introduit la notion d'indicateur de panne (i.p.) (ou indicateur d'état) qui est une v.a. dichotomique (de Bernoulli)

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si le système est en bon état} \\ 0 & \text{s'il est en panne} \end{cases}$$

Si p désigne la probabilité pour que le système soit en bon état,

$$p = P(f = 1)$$

$$E(f) = 0.(1 - p) + 1.p$$

$$Var(f) = p.(1 - p)$$

Soit un système d'indicateur de panne f , constitué de n éléments, d'indicateurs X_1, X_2, \dots, X_n .

Définition.1 la fonction $f = f(\bar{X}) = f(X_1, \dots, X_n)$ est appelée fonction de structure du système d'ordre n .

Remarque. Les définitions précédentes concernent l'état du système à un instant fixé (notion statique). Elles peuvent cependant être étendues aux modèles dynamiques.

Si w_i désigne comme précédemment, la durée de vie de l'élément i ,

Alors on introduit le processus aléatoire indicateur

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i > t \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans ce cas

$$R_i(t) = P(X_i(s) = 1) \text{ pour } 0 \leq s \leq t$$

$$R_i(t) = P(X_i(t) = 1) = E(X_i(t))$$

Cette notion pourra être étendue aux systèmes cohérents que nous introduisons plus loin. Dans ce cas,

$$R(t) = P(X(s) = 1, 0 \leq s \leq t)$$

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } w > t \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Où w est la durée de vie du système. Pour de tels systèmes,

$$R(t) = h_f(R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t))$$

Notation. Soit $p_i = P(X_i = 1) = E(X_i)$ et soit $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

La fiabilité du système est donnée par

$$h = h(\bar{p}) = P(f(\bar{X}) = 1) = E(f(\bar{X}))$$

où $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

Si $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, alors on note $h = h(\bar{p}) = h(p)$

Définition.2 le i -ème élément est dit non essentiel pour la structure f , si f ne dépend pas de la valeur de X_i (dans le cas contraire, on dit qu'il est essentiel) : $f(1_i, \bar{X}) = f(0_i, \bar{X})$, pour tout (\cdot, \bar{X}) .

Notation : $(1_i, \bar{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$

Théorème fondamental de décomposition.1

Toute fonction de structure d'ordre n peut être représentée sous la forme :

$$f(\bar{X}) = X_i f(1_i, \bar{X}) + (1 - X_i) f(0_i, \bar{X}), \forall \bar{X}, i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Ou bien

$$f(\bar{X}) = \sum_{\bar{Y}} \prod_{j=1}^n X_j^{Y_j} (1 - X_j)^{1-Y_j} f(\bar{Y}) \quad (2)$$

Où la somme est étendue aux vecteurs binaires d'ordre n ($0^0 = 1$).

Définition.3 un système est dit cohérent si

- (i) Sa fonction de structure est croissantes au sens large (non décroissante);
- (ii) Chaque élément est essentiel.

Remarque. Si f est cohérente, alors

$$f(\bar{0}) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

$$f(\bar{1}) = f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

Théorème.2 Pour toute structure cohérente f d'ordre n

$$\prod_{i=1}^n X_i \leq f(\bar{X}) \leq \bigvee_{i=1}^n X_i$$

En d'autres termes, toute structure cohérente est plus performante qu'une structure série et moins performante qu'une structure parallèle.

Preuve. Si $\prod_{i=1}^n X_i = 1$ alors $X_1 = \dots = X_n = 1$ d'où $f(\bar{X}) = 1$

Si $\bigvee_{i=1}^n X_i = 0$, alors $X_1 = \dots = X_n = 0$ d'où $f(\bar{X}) = 0$

La théorie des fonctions de structure est bien détaillée dans les ouvrages cités en référence (par exemple [Barlow-Proshan (1975)]).

L'utilisation des fonctions de structure permet l'étude de systèmes à structure complexes :

- Grand nombre d'éléments ;
- Disposition quelconque (non série , non parallèle, ...).

On représente le système sous forme d'arbre de fautes, ce qui permet de détecter les évènements qui mènent à la défaillance de la structure. Un outil de description plus récent est les réseaux de Pétri, la notion de structure cohérente a été introduite dans [Birnbbaum-Esary-Saunders (1961)]. Dans certains ouvrages, au lieu de système (ou structure) cohérent(e), on utilise le terme de structure monotone [Barlow-Proshan (1965)], [Corazza (1975)].

Remarque. [Barlow-Proshan (1975)] préfèrent utiliser le terme de « relevant component » au lieu d'élément essentiel, comme c'est le cas dans certains ouvrages [Esary-Proshan (1962)], [Barlow-Proshan (1965)]... Ils justifient ce terme par le fait qu'un tel élément n'est pas essentiel (au sens habituel) au fonctionnement du système, mais détermine si le système fonctionne ou non.

Théorème.3 soit f une structure cohérente, alors

$$f(\bar{X} @ \bar{Y}) \geq f(\bar{X}) @ f(\bar{Y}) \quad (4)$$

$$f(\bar{X} . \bar{Y}) \leq f(\bar{X}) . f(\bar{Y}) \quad (5)$$

Où $\overline{X}@\overline{Y} = (X_1@Y_1, X_2@Y_2, \dots, X_n@Y_n)$

$\overline{X}.\overline{Y} = (X_1.Y_1, X_2.Y_2, \dots, X_n.Y_n)$

$f(\overline{X}@\overline{Y}) = f(\overline{X})@f(\overline{Y})$ si et seulement si f est une structure série.

$f(\overline{X}.\overline{Y}) = f(\overline{X}).f(\overline{Y})$ si et seulement si f est une structure parallèle.

Remarque : nous noterons

$$X_1@X_2 = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2)$$

$$\bigvee_{i=1}^n X_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$$

De la relation (1), il résulte

Lemme. $h(\overline{p}) = p_i h(1_i, \overline{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \overline{p}), i = \overline{1}, \overline{n}$

Théorème.4 soit $h(\overline{p})$ la fonction de fiabilité d'une structure cohérente. Alors $h(\overline{p})$ est strictement croissante par rapport à tout $p_i, 0 \ll p \ll 1$

$$(\overline{a} \ll \overline{b} \implies a_i < b_i, \forall i)$$

Preuve. En vertu du lemme

$$\partial h / (\partial p_i) = h(1_i, \overline{p}) - h(0_i, \overline{p})$$

$$\partial h / (\partial p_i) = E(f(1_i, \overline{p}) - f(0_i, \overline{p}))$$

Comme f est croissante, alors $(f(1_i, \overline{p}) - f(0_i, \overline{p})) > 0$. De plus

$f(1_i, \overline{X}^0) - f(0_i, \overline{X}^0) = 1$, pour tout \overline{X}^0 , car chaque élément est « essentiel ».

Puisque $\overline{0} \ll \overline{p} \ll \overline{1}$, alors \overline{X}^0 a une probabilité positive d'occurrence. Le résultat cherché découle du fait que

$$E(f(1_i, \overline{p}) - f(0_i, \overline{p})) > 0$$

Théorème.5 soit h la fonction de fiabilité d'une structure cohérente, alors pour tout p, p' tels que

$$\overline{0} \ll \overline{p} \ll \overline{1}, \overline{0} \ll \overline{p}' \ll \overline{1}$$

$$(i) h(\overline{p}@\overline{p}') > h(\overline{p})@h(\overline{p}')$$

$$(ii) h(\overline{p}.\overline{p}') > h(\overline{p}).h(\overline{p}')$$

(iii) $h(\overline{p}@\overline{p}') = h(\overline{p})@h(\overline{p}')$ si et seulement si le système a une structure parallèle.

(iv) $h(\overline{p}.\overline{p}') = h(\overline{p}).h(\overline{p}')$ si et seulement si le système a une structure séri

d'autres comparaisons sont envisagées plus loin.

2.Représentation des systèmes cohérents.

Soit $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls, on note

$$C_0(\bar{X}) = \{i : X_i = 0\}, C_1(\bar{X}) = \{i : X_i = 1\}$$

Définition.1 on appelle vecteur chemin tout vecteur \bar{X} tel que $f(\bar{X}) = 1$. l'ensemble $C_1(\bar{X})$ correspondant est appelé ensemble chemin.

Notation. $\bar{X} > \bar{Y}$ a lieu si $X_i \geq Y_i$ ($i = \overline{1, n}$) avec $X_i > Y_i$ pour un certain i .

Définition.2 un vecteur-chemin \bar{X} tel que

$$\bar{X} > \bar{Y} \implies f(\bar{Y}) = 0$$

Est appelé vecteur chemin minimal (v-cmin). A un v-cmin correspond un ensemble-chemin minimal (e-cmin) $C_1(\bar{X})$.

Interprétation. Un e-cmin est l'ensemble minimal d'éléments dont le fonctionnement assure celui du système. Un chemin est minimal s'il ne passe pas plus d'une fois par un nœud du diagramme de fiabilité et relie l'entrée à la sortie du diagramme.

Définition.3 un vecteur-coupe est un vecteur \bar{X} tel que $f(\bar{X}) = 0$.

Il lui correspond un ensemble-coupe $C_0(\bar{X})$.

Définition.4 un vecteur-coupe \bar{X} tel que $\bar{Y} > \bar{X} \implies f(\bar{Y}) = 1$

Est appelé vecteur-coupe minimal (v-comin).

Il lui correspond un ensemble-coupe minimal (e-comin) $C_0(\bar{X})$.

Interprétation. Un (e-comin) est l'ensemble minimal d'éléments dont la défaillance cause celle du système. Une coupe minimal est la plus petite coupe qui sépare le diagramme de fiabilité en deux diagramme disjoints dont l'un contient l'entrée et l'autre la sortie.

Soit P_j le j-ème (e-cmin) d'une structure cohérente f et soit

$$g_j(\bar{X}) = \prod_{i \in P_j} X_i \quad , j = \overline{1, m}$$

(m =nombre d'e-cmin de f)

Il est clair que g_j est la fonction de structure d'un arrangement en série des éléments du j-ème e-c. on l'appelle la j-ème e-cmin-série.

Proposition.1

$$f(\overline{X}) = \bigvee_{j=1}^m g_j(\overline{X})$$

En effet, la structure de base fonctionne si au moins l'une des structures de chemin minimal fonctionnent. On représente ainsi la fonction de structure comme un arrangement parallèle de e-cmin-série.

De manière analogue, au j-ième e-comin d'une structure cohérente, on peut associer la fonction binaire

$$h_j(\overline{X}) = \bigvee_{i \in K_j} X_i \quad , j = \overline{1, k}$$

(k =nombre d'e-comin de f)

C'est la fonction de structure d'un arrangement parallèle des composants du j-ième e-co.

Proposition.2

$$f(\overline{X}) = \prod_{j=1}^k h_j(\overline{X})$$

En effet la structure de base est en panne si au moins l'une des structures e-comin est défaillance. On représente ainsi la fonction de structure comme un arrangement série de e-co parallèle.

En conclusion, toute structure cohérente peut-être représentée sous forme de diagramme « circuits » série-parallèle ou parallèle-série.

Il existe d'autres représentations qui permettent de mieux cerner l'analyse : arbres de fautes [Barlow-Proshan (1975)], [Corraza (1975)]. En termes de « ou » et de « et » (cf. exercices) ; réseaux de [Pétri ayache (1982)], en termes de places transitions.

Le résultat de la proposition 2 peut être étendu aux variables de \mathbb{R}^+ (pas forcément binaires).

Rappelons que pour les variables binaires,

$$\prod_{i=1}^n X_i = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$\bigvee_{i=1}^n X_i = \max(X_1, \dots, X_n)$$

On a alors,

$$f(\bar{X}) = \max_{1 \leq j \leq m} g_j(\bar{X}) = \max_{1 \leq j \leq m} \min_{i \in P_j} X_i$$

De même,

$$f(\bar{X}) = \min_{1 \leq j \leq k} h_j(\bar{X}) = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} X_i$$

Considérons maintenant l'interprétation dynamique. Soit w_i la durée de vie du i -ième élément d'une structure cohérente f et soit w_f la durée de vie de la structure.

Théorème.6 si f est un structure cohérente de e-cmin P_1, P_2, \dots, P_m et de e-comin K_1, K_2, \dots, K_k , alors

$$\max_{1 \leq j \leq m} \min_{i \in P_j} w_i = w_f = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} w_i$$

3. Système a éléments dépendants.

Dans de nombreux cas, les v.a. qui nous intéressent (en l'occurrence l'indicateur d'état X ou la durée de vie w_i) ne sont pas indépendantes : [Barlow-Proshan (1975)] disent qu'elles sont associées.

Définition.1 on dit que deux v.a. S et T sont associées (non indépendantes) si $cov(S, T) \geq 0$

Il existe d'autres définitions, par exemple si pour toutes structures cohérentes f et g croissantes $cov(f(S), g(T)) \geq 0$, [Barlow-Proshan (1975)], [Esary-Proshan (1970)].

Définition.2 les v.a. w_1, w_2, \dots, w_n (pas forcément binaires) sont dites associées si $cov(\Gamma(\bar{w}), \Delta(\bar{w})) \geq 0$

Pour toute paire de fonctions croissantes binaires Γ et Δ .

Remarque. Ne pas confondre ici avec la même notation

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \text{ (moyenne empirique)}$$

Dans ce paragraphe, $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. en particulier, des v.a. sont associées ;

Si (X_1, \dots, X_n) sont des v.a. binaires associées, alors $(1 - X_1, \dots, 1 - X_n)$ sont aussi des v.a. binaires associées

Bornes. Il est intéressant d'avoir une estimation de l'erreur commise en calculant la fiabilité d'un système (série par exemple)

En supposant que les éléments sont indépendants alors qu'ils sont en fait associés.

Théorème.7 si X_1, \dots, X_n sont des v.a. binaires alors,

$$P\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \geq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1)$$

$$P\left(\bigvee_{i=1}^n X_i = 1\right) \leq \bigvee_{i=1}^n P(X_i = 1)$$

Preuve. Cf. [Barlow-Proshan (1975)] et pour la généralisation [Esary-Proshan (1967)].

Théorème.8 si w_1, \dots, w_n sont des v.a. (pas forcément binaires), alors

$$P(w_1 > t_1, \dots, w_n > t_n) \geq \prod_{i=1}^n P(w_i > t_i)$$

$$P(w_1 \leq t_1, \dots, w_n \leq t_n) \geq \prod_{i=1}^n P(w_i \leq t_i)$$

Preuve. Soit

$$X_i(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i > t_i \\ 0 & \text{si } w_i \leq t_i \end{cases}$$

Alors $X_i(t)$ est non décroissante en w_i . de plus en tenant compte du fait qu'une fonction croissante de v.a. associées engendre une suite de v.a. associées, $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$ sont associées.

Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent.

Corollaire. Si w_1, \dots, w_n sont associées alors

$$P(\min_{1 \leq i \leq n} (w_i) > t) \geq \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} (w_i) > t) \geq \bigvee_{i=1}^n R_i(t)$$

Théorème.9 soit f une structure cohérente d'éléments associées de fiabilité p_1, \dots, p_n

alors

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq P(f(\bar{X}) = 1) \leq \bigvee_{i=1}^n p_i$$

Théorème.10 dans les conditions du théorème précédent, si $g_1(\bar{X}), \dots, g_n(\bar{X})$ sont les structures séries à chemin minimal et $h_1(\bar{X}), \dots, h_k(\bar{X})$ les structures parallèles à coupe minimal, alors ;

$$\prod_{j=1}^k P(h_j(\bar{X}) = 1) \leq P(f(\bar{X}) = 1) \leq \bigvee_{j=1}^m P(g_j(\bar{X}) = 1)$$

Corollaire. Dans les conditions du théorème précédent, si les éléments sont indépendants, on a

$$\prod_{j=1}^k \bigvee_{i \in K_j} p_i \leq P(f(\bar{X}) = 1) \leq \bigvee_{j=1}^m \prod_{i \in P_j} p_i$$

Théorème.11 (Bornes mini-max). soit f une structure cohérente ; P_1, \dots, P_n et K_1, \dots, K_n

les ensembles c_{\min} et c_{\max} correspondants, alors

$$\max_{1 \leq r \leq m} P(\min_{i \in P_r} X_i = 1) \leq P(f(\bar{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq s \leq k} P(\max_{i \in K_s} X_i = 1)$$

Si de plus les éléments sont associées, alors

$$\max_{1 \leq r \leq m} \prod_{i \in P_r} p_i \leq P(f(\bar{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq s \leq k} \bigvee_{i \in K_s} p_i$$

4. Bornes pour la fiabilité d'un système.

Soit h la fonction de fiabilité d'un système cohérent d'ordre n .

Généralement, la f.r. de la durée de vie w_i du i -ème élément

$$F_i(t) = 1 - R_i(t)$$

Est inconnue de M.T.B.F = T_{0i} , $i = \overline{1, n}$.

On montre aisément que si les éléments sont indépendants

$$h(R_1(t), \dots, R_n(t)) \geq h(e^{-\frac{t}{T_{01}}}, \dots, e^{-\frac{t}{T_{0n}}})$$

pour $t < \min(T_{01}, \dots, T_{0n})$

considérons maintenant un cas plus général.

Soit un système cohérent de fonction de structure inconnue f et dont les éléments sont associés.

Théorème.12 si les éléments sont IFR avec des M.T.B.F. (connues) T_{01}, \dots, T_{0n} alors

$$R(t) \geq \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{0i}}\right) \text{ pour } t < \min(T_{01}, \dots, T_{0n})$$

Preuve.

$$R(t) \geq P(f(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 1) \geq \prod_{i=1}^n P(X_i(t) = 1) \geq \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t}{T_{0i}}} = \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{0i}}\right)$$

Théorème.13 [Moore-Shannon (1956)].

Soit $h(p)$ la fonction de fiabilité d'une structure cohérente d'ordre $n \geq 2$ à éléments indépendants et de fiabilité identique p

(i) si $\exists p_0, 0 < p_0 < 1$ tel que $h(p_0) = p_0$, alors

$$h(p) < p \text{ pour } 0 \leq p < p_0$$

$$h(p) > p \text{ pour } p_0 < p \leq 1$$

(ii) si la structure ne possède pas d'e-c ou d'e-co de taille 1, alors

$$\exists p_0, 0 < p_0 < 1 \text{ tel que } h(p_0) = p_0$$

L'application de ce résultat est la suivante : pour un système cohérent avec redondance, lorsque tous les éléments ont atteint un degré de fiabilité suffisamment haut, alors la fiabilité du système est supérieure à celle de l'élément.

Théorème.14 soit une structure S d'ordre n .

Soit $w_i^1(w_i^2)$ la durée de vie du i -ème élément

$$R_i^1(t) = P(w_i^1 > t)$$

$$R_i^2(t) = P(w_i^2 > t), i = \overline{1, n}$$

Supposons que $w_1^1, \dots, w_n^1 (w_1^2, \dots, w_n^2)$ sont des v.a.i. et

$$\left(\frac{1}{t}\right) \left((R_i^2)^{-1} \circ R_i^1\right)(t) \text{ est croissante}$$

(si R_i^1 est exponentielle, alors cela veut dire que $1 - R_i^2$ est IFR).

(i) Si S est une structure série,

$$E(\min(w_1^1, \dots, w_n^1)) \geq E(\min(w_1^2, \dots, w_n^2))$$

(la durée de vie moyenne d'un système série constitué des éléments de type1 est plus grande que celle qui utilise les éléments de type2).

(ii) Si S est une structure parallèle,

$$E(\max(w_1^1, \dots, w_n^1)) \leq E(\max(w_1^2, \dots, w_n^2))$$

Corollaire. Soit $T_{0S} (T_{0P})$ la durée de vie moyenne d'un système série (parallèle) de n éléments associés. si le i -ème élément est tel que

$$-\frac{1}{t} \log R_i(t) \text{ est croissante}$$

(on dit aussi que F a une distribution à taux de défaillance moyen croissant ou que $f(\cdot)$ est IFRA)

$$\text{De moyenne } T_{0i} = \int_0^\infty R_i(t) dt$$

$$\text{Alors, } T_{0S} \geq \int_0^\infty \prod_{i=1}^n R_i^2(t) dt = \left(\sum_{i=1}^n T_{0i}^{-1}\right)^{-1}$$

$$T_{0P} \leq \int_0^\infty \bigvee_{i=1}^n R_i^2(t) dt$$

$$R_i^2(t) = e^{-\frac{t}{T_{0i}}}, i = \overline{1, n}$$

Corollaire. Dans les conditions du corollaire précédent, si

$-\frac{1}{t} \log R_i(t)$ est décroissante

Alors

$$T_{0S} \leq \int_0^\infty \prod_{i=1}^n R_i^2(t) dt = \left(\sum_{i=1}^n T_{0i}^{-1} \right)^{-1}$$

$$T_{0P} \geq \int_0^\infty \bigvee_{i=1}^n R_i^2(t) dt$$

Remarque. Si $T_{01} = \dots = T_{0n} = T_0$, alors la borne T_{0S} est de la forme

$$\int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \right) \right]^n dt = \frac{T_0}{n}$$

et la borne T_{0P} est de la forme

$$\int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \right) \right]^n dt = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Théorème.15 soit f un système cohérent d'e-comin K_1, \dots, K_k et de ec-min P_1, \dots, P_m .

Si les éléments ont des durées de vie associées et des distributions marginales DFRA

de moyenne $T_{01} = \dots = T_{0n}$ et si w est la durée de vie du système, alors

$$\max_{1 \leq r \leq m} \left(\sum_{i \in P_r} T_{0i}^{-1} \right)^{-1} \leq E(w) \leq \min_{1 \leq s \leq k} \int_0^\infty \bigvee_{i \in K_s} R_i^2(t) dt$$

5. Distribution limites.

Si w_1, \dots, w_n désignent les durées de vie des éléments d'une structure série ou parallèle, alors la durée de vie du système vaut

$w = \min(w_1, \dots, w_n)$ pour une structure série

$w = \max(w_1, \dots, w_n)$ pour une structure parallèle

La fonction de fiabilité $R(t)$ de la structure est donc la loi des valeurs extrêmes. On montre que la loi des valeurs minimales (maximales) est nécessairement de l'un des trois types décrits précédent.

Ces distributions ont trouvé de nombreuses applications, notamment en mécanique [Larsen (1969)], [Gumbel (1958)], [Weibull (1939)].

D'autres applications sont mentionnées dans [David (1970)].

6. Préservation de la durée de vie.

Dans [Barlow-Proshan (1975)], on trouvera une classification des opérations de fiabilité pour lesquelles les classes de type NBU et NWU (ainsi que d'autres) sont préservées.

Ce sont :

- Formation de système cohérents ;
- Addition des durées de vie ;
- Mélange de distributions.

Théorème.16 si la distribution de la durée de vie de chaque élément d'une structure cohérente est NBU, alors la distribution de la durée de vie du système est aussi NBU.

Remarque. La classe NWU n'est pas conservée pour la formation de système cohérent.

Théorème.17 si F_1 et F_2 sont des distributions NBU, alors le produit de convolution $F(t) = \int_0^t F_1(t-x) dF_2(x)$

Est aussi NBU.

Preuve.

$$\begin{aligned}
 R(x+y) &= \int_0^x R_2(x+y-z) dR_1(z) + \int_0^\infty R_2(y-z) dR_1(x+z) \\
 \int_0^x R_2(x+y-z) dR_1(z) &\leq R_2(y) \int_0^x R_2(x-z) dR_1(z) = R_2(y)[R(x) - R_1(x)] \\
 \int_0^\infty R_2(y-z) dR_1(x+z) &= R_2(y)R_1(x) + \int_0^\infty R_1(x+z) [-d_z R_2(y-z)] \leq R_2(y)R_1(x) + \\
 R_1(x) \int_0^\infty R_1(z) [-d_z R_2(y-z)] \\
 &= R_2(y)R_1(x) + R_1(x)[R(x) - R_2(x)] \\
 \implies R(x+y) &\leq R_2(y)R(x) + R_1(x)R(y) - R_1(x)R_2(y) \\
 &= R(x)R(y) - [R(x) - R_1(x)].[R(y) - R_2(y)] \leq R(x)R(y)
 \end{aligned}$$

Remarque. La classe NWU n'est pas préservée pour le produit de convolution.

7.Méthode de l'arbre des fautes.

Cette méthode est très importante pour l'ingénieur lors de l'analyse d'une structure complexe. Cette représentation permet d'une part d'effectuer le passage au système réel dans la terminologie mathématique des chapitres précédents ; d'autre part, elle permet de faire intervenir des évènements (erreurs humaines, effets parasites, ...) qui ne sont généralement pas introduits dans les calculs de fiabilité centrés essentiellement sur l'aspect « hardware ».l'intérêt de cette méthode intervient également au stade de la conception lorsque les critères de sécurité de fonctionnement sont élevés (centrale nucléaire, pilotage

automatique d'un métro, . . .). L'arbre des fautes étant construit, il est possible de transférer l'information acquise à un ordinateur, déterminer les chemins et coupes minimales. . . De tels algorithmes sont décrits dans [Barlow-Proshan (1975)]. Notons ici l'analogie avec les réseaux de Pétri [Brams (1983)] qui est un outil de description performant. L'arbre des fautes est un diagramme logique (exprimé à l'aide des opérateurs « et » et « ou ») des évènements reliant la défaillance des éléments à un état défaillant particulier du système (par exemple un évènement catastrophique).

Chapitre 3

Estimateur De Kaplan-Meier

3.1 Introduction

Soit $F(x), x \geq 0$ la fonction de la distribution cumulative (FDC) du temps à perdre X d'un individu (ou élément statistique) et soit $G(y), y \geq 0$ la FDC du temps aléatoire pour censurer Y de cet individu. Que $T = \min(X, Y)$ et $I(A)$ dénotent l'indicateur de la fonction du groupe A , et soit $\delta = I(X \leq Y)$. Etant donné $t > 0$, le problème est pour estimer la « probabilité de survie » $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ de l'échantillon tronqué « incomplet » $(T_1, \delta_1), (T_2, \delta_2), \dots, (T_n, \delta_n), T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ (1)

L'estimateur (KM) de Kaplan-Meier (1958) appelé aussi l'estimateur de limite est défini comme $KM(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (1 - \frac{\delta_i}{n-i+1})^{I(T_i \leq t)} & \text{pour } t \leq T_n \\ \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_n = 1 \\ \text{non défini si } \delta_n = 0 \end{cases} & \text{pour } t > T_n \end{cases}$ (2)

Au cas des liens parmi T_i nous adoptons la convention usuelle que les failles ($\delta_i = 1$) précèdent la censure. Par définition, l'estimateur KM est uniformément continu.

Efron (1967) a modifié l'estimateur en définissant sa version KMe comme $KMe(t) = \begin{cases} KM(t) & \text{pour } (t > T_n \text{ et } \delta_n = 1) \text{ ou } (t \leq T_n \text{ et } \delta_n = 0) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$ (3)

Gill (1980) a proposé une autre modification, nous devons désigner cette version de

$$\text{KMg comme } KMg(t) = \begin{cases} KM(t) & \text{si } (t > T_n \text{ et } \delta_n = 1) \text{ ou } (t \leq T_n) \\ KM(T_n) & \text{autrement} \end{cases} \quad (4)$$

Pour avoir quelque intuition concernant ces versions et pour illustrer notre approche nous devons désigner l'exemple le plus connu de Freireich et al. (1963) voir aussi Peterson (1983) ou Marubini et Valsecchi (1995).

Exemple illustratif

Les « temps de survie » de 21 patients cliniques étaient

$$6,6,6,6^*,7,9^*,10,10^*,11^*,13,16,17^*,19^*,20^*,22,23,25^*,32^*,32^*,34^*,35^*. \quad (5)$$

Où * représente une observation tronquée. L'estimateur Kaplan-Meier pour ces données est

présenté dans Fig. 1, et Efron et versions de Gill dans Fig. 2.

Un inconvénient de ces estimateurs est que dans les échantillons petits et modérés il peut arriver, et cela arrive souvent, que même si la différence entre deux instants différents t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) est considérablement large, pour les valeurs des estimateurs Kaplan-Meier $KM(t_1)$ et $KM(t_2)$ à ces instants nous pouvons avoir $KM(t_1) = KM(t_2)$. Par exemple, pour les données ci-dessus nous avons $KM(17) = KM(20) = 0.627$ et $KM(25) = KM(33) = 0.448$. Il est aussi très difficile pour un statisticien d'expliquer à un praticien pourquoi la probabilité pour survivre au moment $t = 25$ est égale à la probabilité de survie au moment $t = 33$. L'estimateur que nous proposons, dénoté par sKM , nous donne $sKM(17) = 0.6402$, $sKM(20) = 0.5824$, $sKM(25) = 0.5275$, et $sKM(33) = 0.4465$ qui semble clairement plus raisonnable. (voir Fig.3).

Un autre inconvénient des estimateurs d'Efron et de Gill est qu'ils estiment la probabilité de survie au-delà de ce que l'on pourrait conclure raisonnablement de l'échantillon. Il est clair que la devinette d'Efron sera préférable pour les distributions à courtes durées (« un prophète pessimiste ») et Gill pour les distributions à large queues (« un prophète optimiste ») mais pour choisir raisonnablement entre eux l'on doit se restreindre d'une certaine façon au modèle non paramétrique original. Pour cette raison nous nous limitons à la version originale de Kaplan-Meier (2).

3.2 Le lissage local de weibull

L'estimateur Kaplan-Meier est adéquat pour le modèle statistique non paramétrique dans lequel les seules hypothèses concernant les distributions possibles du temps de vie sont leur continuité et monotonie stricte. Il y a quelques représentations de cette famille de distribution :

- l'exponentiel $E(\lambda)$ avec une fonction de densité de probabilité (FDP) $\alpha \cdot \exp\{-\lambda t\}$.
- Weibull $W(\lambda, \alpha)$ avec FDP $W(t; \lambda, \alpha) = \exp\{-\lambda t^\alpha\}$
- Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ avec FDP $\alpha t^{\alpha-1} \exp\{-\lambda t\}$
- General Gamma $\Gamma_g(\lambda, \alpha, k)$ avec FDP $\alpha t^{\alpha k-1} \exp\{-\lambda t^\alpha\}$
- Lognormale $\log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- Gompertz $Gom(\lambda, \alpha)$ avec une probabilité de survie $\exp\{\lambda(1 - \exp(at))\}$
- Pareto $Par(\lambda, \alpha)$ avec probabilité de survie $(1 + \lambda t)^{-\alpha}$
- Loglogistique $\log L(\lambda, \alpha)$ avec probabilité de survie $\frac{1}{(1+\lambda t^\alpha)}$
- Puissance exponentielle $EP(\lambda, \alpha)$ avec FDP $\alpha \cdot \exp\{-\lambda t^\alpha\}$

Pour en citer les plus célèbres (ex. Kalbfleisch et Prentice 1980, Klein et al.1990). Ici α signifie comme d'habitude « proportionnel à ».

Il est clair que dans un intervalle suffisamment court sur un segment donné chacune des lois peut être considérée comme une approximation raisonnablement bonne de n'importe quelle FDC de la famille non paramétrique. Nous avons choisi la queue $W(t; \lambda, \alpha) = \exp\{-\lambda t^\alpha\}$ principalement parce que cela nous donne un simple algorithme pour calculer l'estimateur : il suffit de faire des transformation logarithmiques des données et appliquer l'estimation standard pour A et B dans le modèle de la régression simple $y = Ax + B$. D'autre part, la famille de Weibull $\{\exp\{-\lambda t^\alpha\}, \lambda > 0, \alpha > 0\}$ des queues semble être suffisamment flexibles pour ajuster toutes les distributions typiques de survie.

Soit $M > 1$ un entier positif et, pour une distribution de survie donnée H , divisons demi-ligne positive aux intervalles M disjoints $I(j) = [x(\frac{j-1}{M}), x(\frac{j}{M})], j = 1, 2, \dots, M$ où $x(\beta) = H^{-1}(\beta)$ est la quantile β (quantile d'ordre β) de la distribution, H . Soit ,

pour λ et α fixes $m_j(q) = \max_{t \in I(j)} |H(t) - W(t; \lambda, \alpha)|$. Il est clair que, pour un H donné et $\varepsilon > 0$, l'on peut trouver $M > 1$, et pour tout $j = 1, 2, \dots, q$, l'on peut trouver λ et α , comme $m_j(q) < \varepsilon, j = 1, 2, \dots, q$, nous donne les valeurs $m_j(4), j = 1, 2, 3, 4$, pour un groupe de représentations H . Il semble que si $\varepsilon = 0.01$ alors $M = 4$ est suffisant largement pour assurer l'approximation locale au sein de l'erreur de ε .

Si nous sommes intéressés à l'estimation de la probabilité de survie $P\{X > t\}$ pour un t donnée, il y a deux possibilités pour lisser une fonction empirique de survie (FES) « localement ». Nous pouvons choisir un « petit » nombre positif $h > 0$ et une FES approximatif par la fonction de survie de Weibull sur l'intervalle $(t - \frac{h}{2}, t + \frac{h}{2})$ (une largeur fixe d'une fenêtre). Ou nous pouvons fixer un entier relatif $m < n$ et un FES approximatif sur un intervalle aléatoire fixe $[T_\omega, T_{\omega+m-1}]$ qui contient m points (voisins de t) avec un $[T_\omega, T_{\omega+m-1}]$ convenablement choisi ω (un nombre fixe de voisins). Nous préférons le dernier.

3.3 L'estimateur

Soit $N - 1$ le nombre des éléments distincts de l'échantillon (1) dans lequel $\delta_i = 1, i < n$, et soit i_1, i_2, \dots, i_{N-1} des indexes de ces éléments. Soit $T'_0 = 0$ et définissons $T'_j = T_{i_j}, T'_N = T_n$. Alors $KM(T'_0) = 1$ et $KM(t), t < T_n$ ont des transitions aux points $T'_j, j = 1, 2, \dots, N - 1$, et seulement à ces points. Si $\delta_n = 1$, et alors $t = T_n$ est un point de transition de KM, nous devons écrire l'estimateur Kaplan-Meier dans la forme de la séquence

$$\text{des paires } (T'_j, KM'_j), j = 1, 2, \dots, N, \text{ où } KM'_j = \begin{cases} \frac{KM(T'_{j-1}) + KM(T'_j)}{2} & \text{si } j = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \begin{cases} \frac{KM(T_n)}{2} & \text{si } \delta_n = 1 \\ KM(T_n) & \text{si } \delta_n = 0 \end{cases} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Supposons que nous voulons estimer la probabilité de survie $P\{X > t\}$ en un point t . Si $t > T_n$ et $\delta_n = 0$, notre estimateur, comme l'estimateur original Kaplan-Meier (2), n'est pas défini, sinon nous construisons notre estimateur comme suit. Premièrement, choisissons $\varepsilon > 0$ comme un niveau satisfaisant de l'erreur de l'approximation locale d'une probabilité de survie par une queue de Weibull et trouvons M (voir la section

précédente). Choisissons $m = \lfloor \frac{N}{M} \rfloor$ « voisins » du point t ; ici $[x]$ est le plus grand nombre entier

plus petit ou égal à x . Notons que pour ajuster une queue de Weibull à m points, le nombre de points m ne doit pas être plus petit que 2. Si $m = 2k$ est pair, définissons

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{si} & t < T'_k \\ j - k + 1 & \text{si} & T'_{j-k+1} < \dots < T'_j \leq t < T'_{j+1} < \dots < T'_{j+k} \\ N - m + 1 & \text{si} & T'_{N-k+1} < t \end{cases}$$

Si $m = 2k + 1$ est impair, trouvons T'_{j^*} de tel que $|T'_{j^*} - t| \leq |T'_j - t|, j = 1, 2, \dots, N$,

et définissons

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{si} & j^* \leq k + 1 \\ j^* - k & \text{si} & k + 1 < j^* \leq N - k \\ N - m + 1 & \text{si} & N - k < j^* \end{cases}$$

Prenons $T'_\omega, T'_{\omega+1}, \dots, T'_{\omega+m-1}$ comme voisins du point t . Puis ajustons les à une queue de Weibull $\exp\{-\lambda t^\alpha\}$. On linéarise ensuite en introduisant des variables auxiliaires

$$x_j = \log(T'_j), y_j = \log(-\log KM'_j), j = \omega, \omega + 1, \dots, \omega + m - 1$$

et en estimant des coefficients de régression Λ et α dans $y = \Lambda + \alpha x$ où $\Lambda = \log \lambda$. Finalement si $(\hat{\Lambda}, \hat{\alpha})$ sont des estimateurs de ces coefficients et $\hat{\lambda} = \exp\{\hat{\Lambda}\}$, estimons la probabilité de survie $P\{X > t\}$ par $S(t) = \exp\{-\hat{\lambda}t^{\hat{\alpha}}\}$. Comme l'estimateur original Kaplan-Meier KM , l'estimateur lissé (7) est difficile pour une analyse théorique. Il est cependant clair que pour un large n et en conséquence pour un large N (si la probabilité de censure n'augmente pas avec n), et pour $m = m(N)$ convenablement augmentant avec $\frac{m}{N}$ limité, l'estimateur $S(t)$ se comportera comme KM . Dans les échantillons petits et modérés l'estimateur lissé peut considérablement différer de l'original, dans de telles situations cependant des conclusions théoriques générales peuvent être impossibles.

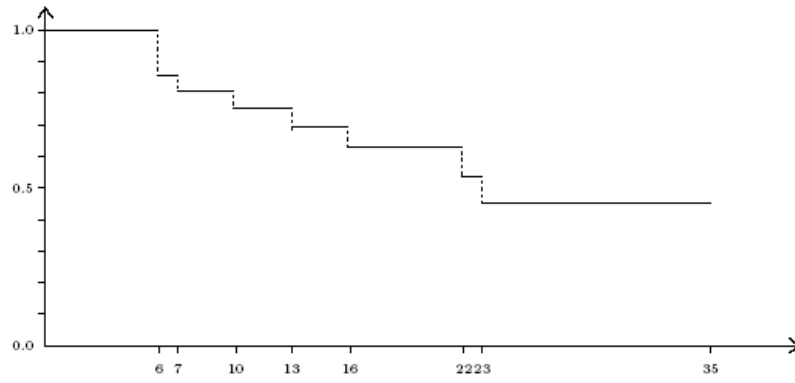


Fig.1 The Kaplan-Meier estimator KM

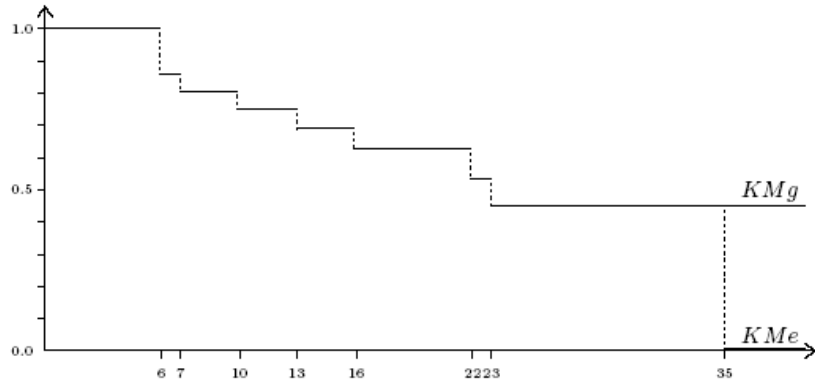
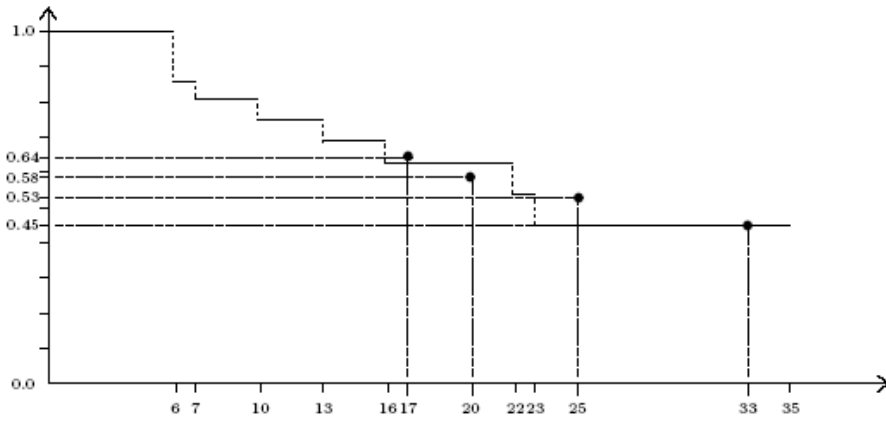


Fig.2 The Efron's and Gill's versions of the Kaplan-Meier estimator



Chapitre 4

Une loi du logarithme réitéré pour les estimateurs à noyau des fonctions de risque sous censure aléatoire

4.1 Introduction et Théorèmes d'approximations

Dans ce chapitre nous reprenons l'article de [19] qui établit une loi du logarithme réitéré pour les estimateurs à noyau de la fonction de risque des temps de survie sous censure aléatoire, avec une étude du biais des estimateurs à noyau.

Soit T_1, \dots, T_n une séquence de variables aléatoires, non-négatives, indépendantes avec une fonction de distribution continue et commune F et une fonction de densité f . Indépendantes de T_i . Soit U_1, \dots, U_n une autre séquence de variables aléatoires, non-négatives et indépendantes avec une fonction de distribution continue et commune G . Nous allons désigner T_i comme des temps de survie et U_i comme des temps de censure. Sous le modèle de censure aléatoire, nous pouvons seulement observer la plus petite de T_i et U_i et un indicateur dont la variable était plus petite :

$$X_i = \min(T_i, U_i), \delta_i = I_{[T_i \leq U_i]}, \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

où I_A pour tout événement A dénote la fonction d'indicateur A . Soit $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$

la fonction de risque des temps de survie et $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ la fonction de risque cumulative correspondante. En se basant sur des données aléatoirement censurées dans (1.1), l'estimateur cumulatif de risque Nelson (1969) pour $\Lambda(t)$ est défini par

$$\Lambda_n(t) = \sum_{k: X_{(k)} \leq t} \frac{\delta_{(k)}}{n-k+1} \quad (1.2)$$

où $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ est les statistiques d'ordre de X_1, \dots, X_n et $\delta_{(i)}$ est la valeur de δ associée avec $X_{(i)}$ qui est $\delta_{(i)} = \delta_j$ quand $X_{(i)} = X_j$. En facilitant les différentielles dans l'estimateur Nelson Λ_n , l'estimateur à noyau de la fonction aléatoire $\lambda(t)$ est défini par

$$\lambda_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) d\Lambda_n(s) \quad (1.3)$$

où K est une fonction du noyau ayant un support fini dans $(-1, 1)$ et h_n est une séquence de largeurs de bande s'inclinant à 0 comme $n \rightarrow \infty$. Les propriétés de l'estimateur à noyau λ_n ont été examinées par Rammlau-Hansen (1983), Tanner & Wong (1983) et Yandell (1983), entre autres. Il est dans le but de cet article d'établir des lois de logarithme réitéré pour $\lambda_n - E\lambda_n$ et $\lambda_n - \lambda$ en utilisant la forte approximation technique développée par Burke et al. (1981, 1988) au cas censuré. Au cas non censuré, Hall (1981) a obtenu une loi de logarithme réitéré pour les estimateurs à noyau de densité dans un contexte plus général en utilisant la forte approximation technique développée par al. (1975) pour le processus empirique ordinaire. Notre approche est d'appliquer premièrement la forte approximation technique pour démontrer $\lambda_n - \hat{\lambda}_n$ (voir 2.1) pour la définition de $\hat{\lambda}_n$ obéit à la loi du logarithme réitéré. Après nous démontrons que $\hat{\lambda}_n - E\lambda_n$ converge à zéro à un taux exponentiel en employant la théorie des martingales pour compter les processus et que $\hat{\lambda}_n - \lambda$ converge à zéro à un taux de $O\left(\sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}\right)$ en utilisant une analyse mathématique directe. Comme conséquence indirecte, nous considérons l'exactitude statistique de l'estimateur à noyau λ_n en terme de ses biais comme un estimateur de λ . Nous démontrons que le biais de λ_n converge à zéro avec un taux de $O\left(\sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}\right)$ sous des conditions appropriées sur la fonction du noyau K et la largeur de bande h_n . L'approche martingale à l'analyse statistique pour compter les processus à été introduite par Aalen (1976, 1977, 1978) et a été prouvée extrêmement à succès en produisant des résultats

sur les méthodes statistiques pour nombre de problèmes qui ont surgi dans les données aléatoirement censurées depuis des études biomédicales. Fleming & Harrington (1991) et Anderson et al. (1993) ont fourni d'excellentes expositions sur le processus comptant et les méthodes martingale utilisées avec des données de survie censurées.

Dans le but de formuler nos résultats, nous introduisons avant tout quelques notations. Soit $S(t) = 1 - F(t)$, $C(t) = 1 - G(t)$, $\pi(t) = P(X_i \geq t) = S(t)C(t)$. En plus, nous avons besoin des suppositions suivantes sur la fonction du noyau.

(A1) K est de variation limitée et est continue à droite sur $(-1, 1)$ et

$$K(t) = 0 \text{ si } t \notin (-1, 1).$$

$$(A2) \int_{-1}^{+1} K(t) dt = 1$$

$$(A3) \int_{-1}^{+1} tK(t) dt = 0$$

$$(A4) \int_{-1}^{+1} t^2 K(t) dt = k_2 \neq 0$$

Nos principaux résultats de cet article sont les deux théorèmes suivants dont les preuves sont données dans la section 2. Le premier théorème concerne la loi du logarithme réitéré pour $\lambda_n - E\lambda_n$.

Théorème 1.1

Soit $\tau > 0$ tel que $\pi(\tau) > 0$ et h_n une séquence de largeurs de bande positives s'inclinant à 0 comme $n \rightarrow \infty$. Supposons que l'hypothèse (A1) tient et λ est continue et positive à $t \in [0, \tau)$ supposons plus que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(1-\varepsilon)n \leq m \leq (1+\varepsilon)n} \left| \frac{h_m}{h_n} - 1 \right| = 0 \quad (1.4)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^4}{nh_n \log \log n} = 0 \quad (1.5)$$

Alors pour $t \in [0, \tau)$ on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{2 \log \log n}} [\lambda_n(t) - E\lambda_n(t)] = \sqrt{\frac{\lambda(t)}{\pi(t)} \int_{-1}^{+1} K^2(u) du} . \text{ P.s}$$

Le théorème suivant dépend de la loi du logarithme réitéré pour $\lambda_n - \lambda$.

Théorème 1.2

En plus des conditions au théorème 1.1, si l'hypothèse (A2)-(A4) tient, λ est deux fois continûment différentiables à t et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^5}{\log \log n} = 0 \quad (1.6)$$

Alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{2 \log \log n}} [\lambda_n(t) - \lambda(t)] = \sqrt{\frac{\lambda(t)}{\pi(t)} \int_{-1}^{+1} K^2(u) du} . \text{ P.s}$$

Remarque 1.1. Comme dénoté par Hall (1981), les conditions (1.4) et (1.5) sont satisfaites si la largeur de bande h_n est choisie pour être $h_n \sim an^{-b}$ avec $a > 0$ et $0 < b < 1$. En plus, les conditions (1.6) sont satisfaites si bien si $a > 0$ et $\frac{1}{5} \leq b < 1$.

Remarque 1.2 Le théorème 1.1 indique que les hypothèses standard (A2)-(A4) sur la fonction du noyau K ne sont pas demandées pour établir la loi du logarithme réitéré pour $\lambda_n - E\lambda_n$. Cependant, ces hypothèses sont requises quand l'on établit la loi du logarithme réitéré pour $\lambda_n - \lambda$ et le taux de convergence pour le biais de λ_n comme indiqué au théorème (1.2) et la corollaire suivant.

Corollaire 1.1

Supposons que la condition (1.6) et que les hypothèses (A1)-(A4) tiennent. Si π est positive dans un voisinage de t et λ et deux fois continûment différentiable à t alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{\log \log n}} |E\lambda_n(t) - \lambda(t)| = 0$$

Remarque 1.3 Le théorème 1.1 et le corollaire 1.1 ensemble impliquent que le taux de convergence de l'estimateur à noyau λ_n à la fonction de risque λ dépend du taux de convergence de l'erreur de la moyenne $\lambda_n - E\lambda_n$ et le taux de convergence du biais $E\lambda_n - \lambda$. Comme dénoté par Hall (1981) pour les estimateurs de densité du noyau au cas non-censuré, ces deux facteurs marchent en général l'un contre l'autre dans le sens où une construction qui réduit une s'inclinera pour hausser l'autre.

Remarque 1.4 Les conditions (1.4)-(1.6) sont toutes satisfaites quand la largeur de bande h_n est de l'ordre $O(n^{\frac{1}{5}})$. Notez que ce choix de h_n inclut la largeur de bande dérivée par Anderson et al. (1993), p.240), qui balance l'effet du 'terme de biais carré' et le 'terme de variance' de l'erreur quarrée intégrée moyenne.

4.2 Preuves

Les preuves du théorème 1.1 et 1.2 et du corollaire 1.1 sont basées sur les quatre lemmes suivants. Nous commençons par introduire quelques autres notations. Soit $\{W(t), t \geq 0\}$ (un paramètre) un processus standard de Wiener et $\{W(s, t), 0 \leq s, t < \infty\}$ un processus standard à deux paramètres de Wiener. Sans perte de généralité, nous supposons à travers que toutes les variables aléatoires et les processus et article sont définis sur le même espace de probabilité. En plus, nous définissons

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_n(t) &= \frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \lambda(s) ds \\
v(t) &= \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\pi(s)} ds \\
B_n^m(t) &= -\frac{1}{nh_m} \int_0^\infty W(v(s), n) dK\left(\frac{t-s}{h_m}\right) \\
B_n(t) &= B_n^n(t) = -\frac{1}{nh_n} \int_{-1}^{+1} W(v(t-h_n u), n) dK(u) \\
C_n(t) &= -\frac{1}{\sqrt{nh_n}} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \sqrt{v'(s)} dW(s) \\
\sigma_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}(t) &= Cov(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t)) \\
\sigma_{mn}(t) &= \sigma_{mn}^{mn}(t) = Cov(B_m(t), B_n(t)) \\
\sigma_n^2(t) &= \sigma_{nn}(t) = Var(B_n(t)) \\
\Phi_n(t) &= \sqrt{2\sigma_n^2(t) \log \log n} \\
\sigma^2(t) &= \frac{\lambda(t)}{\pi(t)} \int_{-1}^{+1} K^2(u) du
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Le premier lemme concerne la distribution du vecteur aléatoire bivarié $(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t))$.

Lemme 2.1

Supposons l'hypothèse (A1) tient. Soit τ tel que $\pi(\tau) > 0$ alors pour tout $t \in [0, \tau)$, $(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t))$, a une distribution normale bivariée avec une moyenne zéro et une covariance

$$\sigma_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}(t) = Cov(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t)) = \frac{\min(n_1, n_2)}{n_1 n_2 h_{m_1} h_{m_2}} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_{m_1}}\right) K\left(\frac{t-s}{h_{m_2}}\right) v'(s) ds$$

Preuve. Il est simple de voir que pour chaque t , $(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t))$ est un vecteur aléatoire normal bivarié avec moyenne zéro. En plus, l'application de la fonction de covariance d'un processus Wiener à deux paramètres et la version générale des formules pour intégration par parties (th. A.1.2. de Fleming & Harrington, 1991, p. 320) donne

$$\sigma_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}(t) = Cov(B_{n_1}^{m_1}(t), B_{n_2}^{m_2}(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n_1 n_2 h_{m_1} h_{m_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{Cov}(W(v(s), n_1), W(v(r), n_2)) dK\left(\frac{t-s}{h_{m_1}}\right) dK\left(\frac{t-r}{h_{m_2}}\right) = \\
&= \frac{\min(n_1, n_2)}{n_1 n_2 h_{m_1} h_{m_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty v(\min(s, r)) dK\left(\frac{t-s}{h_{m_1}}\right) dK\left(\frac{t-r}{h_{m_2}}\right) = \\
&= -\frac{\min(n_1, n_2)}{n_1 n_2 h_{m_1} h_{m_2}} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty K\left(\frac{t-r}{h_{m_2}}\right) dv(r) \right] dK\left(\frac{t-s}{h_{m_1}}\right) = \\
&= \frac{\min(n_1, n_2)}{n_1 n_2 h_{m_1} h_{m_2}} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_{m_1}}\right) K\left(\frac{t-s}{h_{m_2}}\right) v'(s) ds
\end{aligned}$$

La preuve du lemme 2.1 est accomplie.

Nous prouvons maintenant le lemme suivant, qui montre que $\lambda_n - \widehat{\lambda}_n$ obéit à la loi du logarithme réitéré.

Lemme 2.2

Sous les mêmes conditions comme au théorème 1.1, nous avons, pour tout $t \in [0, \tau)$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{2 \log \log n}} \left[\lambda_n(t) - \widehat{\lambda}_n(t) \right] = \sqrt{\frac{\lambda(t)}{\pi(t)} \int_{-1}^{+1} K^2(u) du} . \text{ P.s}$$

Preuve. Selon le th. 2 de Burke et al. (1988), nous pouvons définir un processus Wiener à deux paramètres $\{W(s, t), 0 \leq s, t < \infty\}$ tel que

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \sqrt{n} (\Lambda_n(t) - \Lambda(t)) - n^{-\frac{1}{2}} W(v(t), n) \right| = O\left(n^{-\frac{1}{2}} (\log n)^2\right) \text{ P.s}$$

où τ est tel que $\pi(\tau) > 0$. pour $t \in [0, \tau)$ et large n , nous avons, avec la probabilité 1.

$$\begin{aligned}
\lambda_n(t) - \widehat{\lambda}_n(t) &= -\frac{1}{\sqrt{nh_n}} \int_0^\infty \sqrt{n} (\Lambda_n(t) - \Lambda(t)) dK\left(\frac{t-s}{h_n}\right) = \\
&= -\frac{1}{nh_n} \int_{-1}^{+1} W(v(t - h_n u), n) dK(u) + O\left(\frac{(\log n)^2}{nh_n}\right) \\
&= B_n(t) + O\left(\frac{(\log n)^2}{nh_n}\right) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Pour n fixe, $n^{-\frac{1}{2}} W(v(t - h_n u), n)$ est un processus Wiener (à un paramètre) $W(v(t - h_n u))$, et

$$B_n(t) = -\frac{1}{\sqrt{nh_n}} \int_{-1}^{+1} n^{-\frac{1}{2}} W(v(t - h_n u), n) dK(u) = -\frac{1}{\sqrt{nh_n}} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) dW(v(s)).$$

Du moment que

$$\{B_n(t), t \geq 0\} = \{C_n(t), t \geq 0\}$$

L'application du lemme 2.1 donne

$$\sigma_n^2(t) = \text{Var}(B_n(t)) = \text{Var}(C_n(t)) = \frac{1}{nh_n} \int_{-1}^{+1} K^2(u) v'(t - h_n u) du.$$

Du moment que λ est continu à t , il est simple de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n \sigma_n^2(t) = \sigma^2(t) \quad (2.3)$$

Combinant (2.3) avec (1.5) implique que, pour chaque $t \in [0, \tau)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^2}{nh_n \Phi_n(t)} = 0 \quad (2.4)$$

Vu (2.2)-(2.4), il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(t)}{\Phi_n(t)} = 1 \quad (2.5)$$

(2.5) est équivalent à l'assertion que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(B_n(t) > (1 + \varepsilon)\Phi_n(t) \text{ i.o.}) = 0 \quad (2.6)$$

et

$$P(B_n(t) > (1 - \varepsilon)\Phi_n(t) \text{ i.o.}) = 1 \quad (2.7)$$

Pour démontrer (2.6), soit $m_k = [\rho^k]$ (la part d'entier de ρ^k) où $\rho > 1$. Pour $m_{k-1} < n \leq m_k$ lemme 2.1 implique que

$$B_{m_k}(t) | B_n(t) = z \sim \mathfrak{N} \left(\frac{\sigma_{m_k n}(t)}{\sigma_n^2(t)} z, \sigma_{m_k}^2(t) - \frac{\sigma_{m_k n}(t)}{\sigma_n^2(t)} \right) \quad (2.8)$$

Du moment que la fonction du noyau K est de variation limitée, elle est continue presque partout (a.e.), et alors sous la condition (1.4) nous avons

$$K \left(\frac{h_m}{h_n} u \right) \rightarrow K(u) \text{ comme } m, n \rightarrow \infty \text{ avec } \frac{m}{n} \rightarrow 1.$$

En plus, pour $t \in [0, \tau]$, v' est limitée dans un voisinage de t par la continuité de λ à t . L'application de la condition (1.4) et th. 16.5 de Bilingsley (1986, p.214) donne, avec $\frac{m}{n} \rightarrow 1$.

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{mn}(t)}{\sigma_n^2(t)} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\min(m, n)}{m} \frac{\int_{-1}^{+1} K(u) K \left(\frac{h_m}{h_n} u \right) v'(t - h_m u) du}{\int_{-1}^{+1} K^2(u) v'(t - h_n u) du} = 1$$

et alors

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{mn}(t)}{\sigma_m(t)\sigma_n(t)} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(t)}{\sigma_m(t)} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \frac{h_m}{h_n} \frac{\int_{-1}^{+1} K^2(u) v'(t - h_n u) du}{\int_{-1}^{+1} K^2(u) v'(t - h_m u) du} = 1 \quad (2.9)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $m_{k-1} < n \leq m_k$, nous pouvons choisir ρ suffisamment proche à 1 et k large suffisamment de façon que

$$3(1 + \varepsilon)\sqrt{\log \log n} \geq (3 + \varepsilon)\sqrt{\log \log m_k} \quad (2.10)$$

$$\frac{\sigma_{m_k n}(t)}{\sigma_n(t)} \geq \frac{3 + \varepsilon}{3 + 3\varepsilon} \sigma_{m_k}(t) \quad (2.11)$$

Soit Φ la fonction de distribution normale standard. Alors, pour ρ suffisamment proche à 1 et n suffisamment large, si $\sigma_{m_k n}(t) > 0$ et $z \geq (1 + \varepsilon)\Phi_n(t)$ combinant (2.8) et (2.10) et (2.11) donne

$$\begin{aligned} & P(B_{m_k}(t) > (1 + \frac{\varepsilon}{3})\Phi_{m_k}(t) | B_n(t) = z) = \\ & = 1 - \Phi \left(\frac{(1 + \frac{\varepsilon}{3})\Phi_{m_k}(t) - \sigma_{m_k n}(t)z / \sigma_n^2(t)}{\sqrt{\sigma_{m_k}^2(t) - \sigma_{m_k n}^2(t) / \sigma_n^2(t)}} \right) \geq \\ & \geq 1 - \Phi \left(\frac{(1 + \frac{\varepsilon}{3})\Phi_{m_k}(t) - \sigma_{m_k n}(t)(1 + \varepsilon)\Phi_n(t) / \sigma_n^2(t)}{\sqrt{\sigma_{m_k}^2(t) - \sigma_{m_k n}^2(t) / \sigma_n^2(t)}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \Phi \left(\frac{\sigma_{m_k}(t)(1+\frac{\varepsilon}{3})\sqrt{2 \log \log m_k} - [\sigma_{m_k n}(t)/\sigma_n(t)](1+\varepsilon)\sqrt{2 \log \log n}}{\sqrt{\sigma_{m_k}^2(t) - \sigma_{m_k n}^2(t)/\sigma_n^2(t)}} \right) \\
&\geq 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

uniformément à $m_{k-1} < n \leq m_k$. Maintenant, soit

$$A_k = \{B_n(t) > (1 + \varepsilon)\Phi_n(t) \text{ pour quelques-uns } m_{k-1} < n \leq m_k\}$$

$$B_k = \{B_{m_k}(t) > (1 + \frac{\varepsilon}{3})\Phi_{m_k}(t)\}$$

Alors, pour ρ suffisamment proche à 1, l'application de (2.12) ensemble avec l'approximation bien connue jusqu'à la distribution normale implique pour k large et tout $\varepsilon > 0$ que

$$P(A_k) \leq \frac{P(B_k)}{P(B_k|A_k)} \quad (2.13)$$

$$P(A_k) \leq \frac{P(B_k)}{P(B_k|A_k)} \leq C_1 e^{-(1+\frac{\varepsilon}{3})^2 \log \log[\rho^k]} = O\left(k^{-(1+\frac{\varepsilon}{3})^2}\right) \quad (2.14)$$

où C_1 est une constante et l'infimum dans (2.13) prévaut à l'entier n avec $m_{k-1} < n \leq m_k$ et nombres réels $z \geq (1 + \varepsilon)\Phi_n(t)$. Alors, il s'ensuit de (2.14) et du premier lemme Borel-Cantelli que (2.6) tient pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous nous dirigeons maintenant à la preuve de (2.7). Pour $\varepsilon > 0$ donnée, choisissez un entier $N > 1$ et $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}} > 1 - \varepsilon \quad (2.15)$$

En plus, soit $m_k = N^k$ et

$$U_k(t) = m_k B_{m_k}^{m_k}(t) - m_{k-1} B_{m_{k-1}}^{m_k}(t)$$

$$V_k(t) = \sqrt{2m_k(m_k - m_{k-1})\sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k}$$

$$C_k = \{U_k(t) > \alpha V_k(t)\}$$

$$D_k = \left\{ m_{k-1} B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \leq -\sqrt{4m_k m_{k-1} \sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k} \right\} \quad (2.16)$$

Le lemme 2.1 implique que les variables aléatoires $U_k(t)$ sont indépendantes et normalement distribuées avec moyennes zéro et variances $m_k(m_k - m_{k-1})\sigma_{m_k}^2(t)$. Selon l'approximation jusqu'à la distribution normale, nous avons

$$P(C_k) = P(U_k(t) > \alpha V_k(t)) = P\left(U_k(t) > \alpha \sqrt{2 \text{Var}(U_k(t)) \log \log m_k}\right) \geq \frac{C_2}{K \alpha^2} \quad (2.17)$$

où $C_2 > 0$ est une constante. Du moment que $U_k(t)$ sont indépendantes, il s'ensuit du deuxième lemme Borel-Centelli que

$$P(C_k \text{ i.o.}) = P(U_k(t) > \alpha V_k(t) \text{ i.o.}) = 1 \quad (2.17)$$

En plus, l'application du lemme 2.1 encore implique que les variables aléatoires $m_{k-1}B_{m_{k-1}}^{m_k}(t)$ sont normalement distribuées avec moyenne zéro et variances $m_k m_{k-1} \sigma_{m_k}^2(t)$.

Utilisant les approximations jusqu'à la distribution normale encore implique que

$$\begin{aligned} P(D_k) &= P\left(m_{k-1}B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \leq -\sqrt{4m_k m_{k-1} \sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k}\right) = \\ &= P\left(m_{k-1}B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \geq \sqrt{4\text{Var}(m_{k-1}B_{m_{k-1}}^{m_k}(t)) \log \log m_k}\right) \\ &\leq \frac{C_3}{K^2} \end{aligned}$$

où C_3 est une constante. Le premier lemme Borel-Cantelli déduit maintenant que

$$P(D_k \text{ i.o.}) = P\left(m_{k-1}B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \leq -\sqrt{4m_k m_{k-1} \sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k} \text{ i.o.}\right) = 0 \quad (2.18)$$

(2.17) et (2.18) impliquent que $P(C_k \cap D_k^C \text{ i.o.}) = 1$. En plus, sur $C_k \cap D_k^C$, nous pouvons démontrer par (2.15) et (2.16) que pour infiniment beaucoup de valeurs de k

$$\begin{aligned} m_k B_{m_k}^{m_k}(t) &= U_k(t) + m_{k-1} B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \geq \alpha V_k(t) + m_{k-1} B_{m_{k-1}}^{m_k}(t) \\ &> \alpha \sqrt{2m_k(m_k - m_{k-1}) \sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k} - \sqrt{4m_k m_{k-1} \sigma_{m_k}^2(t) \log \log m_k} = \\ &= \sqrt{2} m_k \Phi_{m_k}(t) \left(\alpha \sqrt{1 - \frac{1}{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}}\right) \\ &> m_k(1 - \varepsilon) \Phi_{m_k}(t). \end{aligned}$$

qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(B_{m_k}(t) > (1 - \varepsilon) \Phi_{m_k}(t) \text{ i.o.}) = 1.$$

Il en résulte, 2.7 tient pour tout $\varepsilon > 0$ et ceci accomplit la preuve du lemme 2.2.

Après nous établissons le lemme suivant, ce qui indique que $\widehat{\lambda}_n - E\lambda_n$ converge à zéro à un taux exponentiel.

Lemme 2.3

Supposons l'hypothèse (A1) tient. Si λ est continu à t et π est positive dans un voisinage de t alors pour une large n .

$$|E\lambda_n(t) - \widehat{\lambda}_n(t)| \leq \exp(-n\pi(t + h_n)) \int_{-1}^{+1} |K(u)| \lambda(t - h_n u) du$$

Il en résulte, $E\lambda_n(t) - \widehat{\lambda}_n(t)$ converge à zéro à un taux exponentiel comme $n \rightarrow \infty$ et $h_n \rightarrow 0$.

Preuve. Pour $t \in [0, \infty)$, définissons

$$N(t) = \sum_{i=1}^n I_{[X_i \leq t, \delta_i = 1]}$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n I_{[X_i \geq t]}$$

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_0^t Y(u) d\Lambda(u) \\
M(t) &= N(t) - A(t) = N(t) - \int_0^t Y(u) \lambda(u) du \\
\Lambda_n^*(t) &= \int_0^t I_{[Y(u)>0]} d\Lambda(u) \\
\lambda_n^*(t) &= \frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) d\Lambda_n^*(s)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Selon le théorème 1.3.1 de Fleming & Harrington (1991, p. 26), le processus M donné dans (2.19) est une \mathcal{F}_t -martingale. où

$\mathcal{F}_t = \{I_{[X_i \leq t, \delta_i=1]}, I_{[X_i \leq t, \delta_i=0]} : 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, n\}$ En fait, M est une martingale intégrable carrée. En plus, l'estimateur Nelson dans (2.1) peut être exprimé en terme de processus stochastiques $N(t)$ et $Y(t)$ comme suit :

$$\Lambda_n(t) = \int_0^t \frac{dN(s)}{Y(s)} \tag{2.20}$$

L'algèbre simple démontre de (1.3), (2.19) et (2.20) que

$$\Lambda_n(t) - \Lambda_n^*(t) = \int_0^t \frac{I_{[Y(u)>0]}}{Y(u)} dM(u)$$

et

$$\lambda_n(t) - \lambda_n^*(t) = \frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \frac{I_{[Y(s)>0]}}{Y(s)} dM(s)$$

Alors, $\lambda_n(t) - \lambda_n^*(t)$ est une intégrale stochastique respectivement à la martingale intégrable carrée locale $M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(s) Y(s) ds$. Utilisant le th. 2.4.5 de Fleming & Harrington (1991, p. 73) et notant que $\langle M, M \rangle(t) = \int_0^t Y(s) \lambda(s) ds$, nous avons

$$\begin{aligned}
E[\lambda_n(t) - \lambda_n^*(t)]^2 &= \frac{1}{h_n^2} E \left[\int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \frac{I_{[Y(s)>0]}}{Y(s)} dM(s) \right]^2 = \\
&= \frac{1}{h_n^2} E \int_0^\infty K^2\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \frac{I_{[Y(s)>0]}}{Y^2(s)} d\langle M, M \rangle(s) = \\
&= \frac{1}{h_n} \int_{-1}^{+1} K^2(u) E \left[\frac{I_{[Y(t-h_n u)>0]}}{Y(t-h_n u)} \right] \lambda(t-h_n u) du \leq \\
&\leq \frac{1}{h_n} \int_{-1}^{+1} K^2(u) \lambda(t-h_n u) du < \infty
\end{aligned}$$

et alors

$$E\lambda_n(t) = E\lambda_n^*(t) = E \left[\frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) d\Lambda_n^*(s) \right] = \frac{1}{h_n} \int_0^\infty K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) (1 - E[I_{[Y(s)=0]}]) d\Lambda(s)$$

Il en résulte, pour un large n

$$\begin{aligned}
|E\lambda_n(t) - \hat{\lambda}_n(t)| &= |E\lambda_n^*(t) - \hat{\lambda}_n(t)| \leq \frac{1}{h_n} \int_0^\infty \left| K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) \right| E[I_{[Y(s)=0]}] \lambda(s) ds = \\
&= \int_{-1}^{+1} |K(u)| [1 - \pi(t-h_n u)]^n \lambda(t-h_n u) du \leq \\
&\leq [1 - \pi(t+h_n)]^n \int_{-1}^{+1} |K(u)| \lambda(t-h_n u) du \leq \\
&\leq e^{-n\pi(t+h_n)} \int_{-1}^{+1} |K(u)| \lambda(t-h_n u) du
\end{aligned}$$

La preuve est accomplie.

Finalement, nous prouvons que le suivant lemme concerne le taux de convergence pour $\widehat{\lambda}_n - \lambda$. Voir aussi Bretagnolle & Huber (1979).

Lemme 2.4

Sous les mêmes conditions comme dans un corollaire 1.1, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{\log \log n}} \left| \widehat{\lambda}_n(t) - \lambda(t) \right| = 0$$

Preuve. En appliquant une expansion Taylor à deux termes nous avons, du moment que $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{nh_n}{\log \log n}} \left| \widehat{\lambda}_n(t) - \lambda(t) - \frac{1}{2} h_n^2 \lambda''(t) k_2 \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{nh_n^5}{\log \log n}} \left| \int_{-1}^{+1} u^2 K(u) \lambda''(\xi_n) du - \lambda''(t) k_2 \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{nh_n^5}{\log \log n}} \left| \int_{-1}^{+1} u^2 K(u) [\lambda''(\xi_n) - \lambda''(t)] du \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{nh_n^5}{\log \log n}} \int_{-1}^{+1} u^2 |K(u)| |\lambda''(\xi_n) - \lambda''(t)| du \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où $\xi_n \in (\min(t, t - h_n u), \max(t, t - h_n u))$ avec $u \in (-1, 1)$. Comme résultat, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n}{\log \log n}} \left| \widehat{\lambda}_n(t) - \lambda(t) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nh_n^5}{4 \log \log n}} |\lambda''(t) k_2| = 0$$

La preuve du lemme 2.4 est accomplie.

Preuve du théorème 1.1 Le théorème 1.1 est une conséquence directe des lemmes 2.2 et 2.3 et l'égalité $\lambda_n - E\lambda_n = \lambda_n - \widehat{\lambda}_n + \widehat{\lambda}_n - E\lambda_n$.

Preuve du théorème 1.2 le théorème 1.2 est une conséquence directe des lemmes 2.2 et 2.4 et l'égalité $\lambda_n - \lambda = \lambda_n - \widehat{\lambda}_n + \widehat{\lambda}_n - \lambda$.

Preuve du corollaire 1.1 le corollaire 1.1 est une conséquence directe des lemmes 2.3 et 2.4 et l'égalité $E\lambda_n - \lambda = E\lambda_n - \widehat{\lambda}_n + \widehat{\lambda}_n - \lambda$.

Bibliographie

- [1] -Aalen .O.O.(1976).Nonparametric inference in connection with multiple decrement models.Scand.J.Statist.3,15.27.
- [2] -Aalen .O.O.(1977).weak convergence of stochastic integrals related to counting processes.Z.Wahrsch.verw.Gebiete 38,261-277.
- [3] -Aalen .O.O.(1978).Nonparametric inference for a family of counting processes.Ann.Statist.6,701-726.
- [4] -Aissani A.Modèles stochastiques de la Théorie de Fiabilité.
- [5] -Andersen.P.K.Borgan,O.Gill,R.D.& Keiding, N.(1993), Stochastic models based on counting processes.Springer-Verlag,Berlin,New York.
- [6] -Billingsly,P.(1986).Probability and measure.2nd edn.Wiley,New York.
- [7] -Bretagnolle,J.& Huber,C.(1979).Estimation des densités ;risque minima.Z.Wahrsch.verw Gebiete 47,119-137.
- [8] -Burke.M.D.,Csorgo,S.& Horvath,L.(1981).Strong approximations of some biometric estimates under random censorship.Z.Wahrsch.verw.Gebiete 56,87-112.
- [9] -Burke.M.D.,Csorgo,S.& Horvath,L.(1981).A correction to and improvement of strong approximations of some biometric estimates under random censorship ;Probab.Theory Related 79,51-57.
- [10] -Csorgo.M.& Révész.P.(1981).Strong approximations in probability and statistics.Academic Press New York.

- [11] -Deheuvels P. et Einmahl Functional limit laws for the increments of Kaplan-Meier product-limit processes and applications. *The Annals of probability* (2000) Vol 28 N3 1301-1335.
- [12] -Fleming.T.R & Harrington.D.P.(1991). *Counting processes and survival analysis*. Wiley, New York.
- [13] -Hall.P.(1981). Laws of the iterated logarithm for nonparametric density estimators. *Z. Wahrsch verw Gebiete* 56,47-61.
- [14] -J.D.Kalbfleisch and R.L.Prentice. *The statistical Analysis of failure time data*. Wiley and Sons, 1980.
- [15] -Kaplan E.L. et Meier P. Non parametric estimation from incomplete observations *J. Amer. Statisti. Assoc.* (1958) Vol 53 457-481.
- [16] -Komlos.J.Major.P.& Tusnady,G.(1975). An approximation of partial sums of independent R.V. and sample DF. *L.Z. Wahrsch verw Gebiete* 32,111-131.
- [17] -Nelson.W.(1969). Hazard plotting for incomplete failure data. *J. Qual. Technol* 1,27-
- [18] -Ramlau-Hansen.H.(1983). Smoothing counting process intensities by means of Kernel functions *Statist* 11,453-466.
- [19] -Tanner.M.& Wong.W.W.(1983). The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel method. *Ann. Statist.* 11,989-993.
- [20] -Yandell.B.S.(1983). Nonparametric inference for rates with censored survival data *Ann Statist.* 11 1119-1135.