REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Mémoire de MAGISTER

Présenté à l'Université de Guelma

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de Mathématiques

Option : Mathématiques

Par

ABOUATIA Hiba

Thème : Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via Lyapunov

---

Sous la direction de : Dr. MOUMENI Abdelkader

JURY

AISSAOUI M.Zine	Président	MC. A	Univ. Guelma
MOUMENI Abdelkader	Rapporteur	Prof.A	Univ. Annaba
BOUSSTILA Nadjib	Examinateur	MC. A	Univ. Guelma
HAIOUR Mohamed	Examinateur	MC. A	Univ. Annaba

— 2011 —

Table des matières

Résumé

Notre contribution dans ce travail est l'étude de l'existence globale de la solution du système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = \lambda f\left(u, v\right) & \text{sur } \left]0, +\infty\right[\times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v = -\mu f\left(u, v\right) & \text{sur } \left]0, +\infty\right[\times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \left]0, +\infty\right[\times \partial\Omega \\ u\left(0, x\right) = u_0, v\left(0, x\right) = v_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{P}$$

où :

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, a, b, d, λ, μ sont des constantes positives telles que $b \neq 0$,et $d > a$, $f(r, s)$ est une fonction continuement différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ qui vérifie les deux coditions suivantes :

i)$f\left(r, 0\right) = 0$ pour tout $r \geq 0$.

ii) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log\left(1 + f(r, s)\right)}{r} < \dfrac{2ad}{n(d-a)\left\|v_0\right\|_\infty} \min\left\{\dfrac{\mu}{\lambda}, \dfrac{d-a}{b}\right\}, \forall s \geq 0.$

Il s'agit de trouver des conditions sur la fonction f pour avoir une solution globale de (P) en utilisant les techniques de la fonctionnelle de Lyapunov.

Introduction

Plusieurs phénomènes naturels sont gouvernés par une classe de systèmes de réaction-diffusion, ces systèmes s'écrivent sous leur forme la plus simple :

$$w_t(x,t) - D\Delta w(x,t) = F(w(x,t))\,;x \in \Omega; t \in \left]0,+\infty\right[\tag{SRD}$$

où :

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière regulière $\partial\Omega$,

$w_t := \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t)$,

Δ est le laplacien, $\Delta w := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x_i}$

$w : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ est l'inconnu,

$D := diag\,(d_1, d_2, ..., d_n)$ est une matrice carré diagonale definie positive, appellée matrice de diffusion,

$F(w(x,t)) := (F_1(w(x,t)), F_2(w(x,t)), ..., F_n(w(x,t)))$ est le terme de réaction, "assez régulière" par exemple localement lipschitzienne.

L'equation (SRD) est completée par des conditions de Neuman sur le bord :

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Nous nous interesons au modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w = F(w) & \text{dans } \Omega \times \left]0,+\infty\right[, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ w(.,0) = w_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

Ce problème est la forme vectorielle du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = f\left(u,v\right) & \text{sur } \left]0,+\infty\right[\times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v = g\left(u,v\right) & \text{sur } \left]0,+\infty\right[\times \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \left]0,+\infty\right[\times \partial\Omega, \\ u\left(.,0\right) = u_0, v\left(.,0\right) = v_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où :

$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $w_0 = (u_0, v_0)$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Lorsque F est régulière et u_0 bornée, l'existence locale de la solution de ce système est classique mais l'existence globable nessecite des conditions suplementaire sur F.

D'après A.Haraux, M Kirane [11] pour prouver l'éxistane globale de la solution du système (P) pour $b = 0$ et $g(u,v) = -f(u,v)$, avec f quasi-positive il suffit de trouver une éstimation uniforme de la solution pour tout $t \geq 0$. R.H.Martin [23] a utilisé la méthode des régions invariantes pour trouver l'existance de la solution. S.Kouachi [15] a cherché l'existance de la solution en utilisant la fonctionnelle de lyapunov .

Dans le cas où $g(u,v) = -f(u,v) = -uv^{\beta}$, N.Alikakos [1] a établi l'existence globale et aussi la L^{∞}-bornitude des solutions quand $1 < \beta < \dfrac{n+2}{n}$

L'extension de ce résultat pour $\beta > 1$ est obtenue par K. Masuda [19], puis par S. L. Hollis, R. H. Martin, M.Pierre [13] qu'ils ont établi l'existence globale avec une méthode basée sur la théorie de L^p-régularité pour l'opérateur de chaleur et un principe de dualité.

A. Haraux, A. Youkana [12] ont aussi généralisé le résultat de K. Masuda [19] en utilisant la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov où $g(u,v) = -f(u,v) = -u\varphi(v)$ et φ non linéaire et satisfait

$$\lim_{v\to+\infty} \frac{(1+\varphi(v))}{v} = 0.$$

S.Kouachi et A.Youkana [16] ont généralisé la méthode de A.Haraux, A.Youkana [12] dans le cas d'une matrice triangulair inferier

S.Kouachi [17] a établi l'existence globale de la solution du système (1.1) dans le cas d'une matrice pleine.

Dans ce travail nous allons utiliser la technique de la fonctionnelle de lyapunov pour étudier l'existence globale de la solution du système (P).

Le mémoire est présenté comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux origines des systèmes de réaction-diffusion, et les démarches suivies pour modéliser certains problèmes, illustrés par quelques exemples.

Dans le deuxième chapitre, on donne un rappel sur les opérateurs m-accrétif, le produit semi-intérieur, les semi-groupes et quelques résultats importants concernant l'existence, l'unicité de la solution d'un problème semi-linéaire.

Le troisième chapitre dans lequel il a été procédé à l'étude du système (P). D'apres D.Henry [14] pour prouver l'existence globale de la solution de (P), il suffit d'estimer $\|F(u,v)\|_p$ pour un $p > \dfrac{n}{2}$, pour cela nous avons fait appel à la fonctionnelle de Lyapunov.

Quant au chapitre quatre, on s'intéressera au comportement en temps infini qui repose généralement sur le principe du maximum, des théorèmes de comparaison et en particulier les résultats de bornage de $\underset{t\geq 0}{\cup}\left\{u\left(t\right)\right\}$.

Chapitre 1

Systèmes de réaction-diffusion. Modélisation

1.1 Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent comme des modèles pour des phénomènes de plusieurs domaines :

En chimie : les réactions chimiques oscillantes (Brussélateur).

En biochimie : la réaction des enzymes ou l'inspiration et l'expiration.

En génétique des populations : la transmission d'un caractère lors d'un couplage ou d'une division cellulaire.

En dynamique de populations : la propagation d'une épidémie ou en marketing telle que la publicité sur un produit.

En environnement : le phénomène prédateur-proie.

En biophysique : la propagation des pulsations électriques à travers l'axe nerveux.

En métallurgie : la diffusion du phosphore dans une plaque de silicium...

De façon générale, on appelle système de réaction-diffusion une équation aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - D\Delta u(x,t) = f(u(x,t)) \ , \quad x \in \Omega, t \geq 0, \tag{SRD}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules,

$$u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$
$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_m(x,t)),$$

est l'inconnu (la solution qu'on cherche), $D = D(u(x,t), x, t)$ est une matrice carrée $m \times m$ appelée matrice de diffusion et $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est la réaction (généralement non linéaire).

L'équation (SRD) est complétée par des conditions sur le bord et des conditions aux limites classiques choisies selon l'origine et la nature du problème étudié, par exemple, s'il n'y a pas d'immigration d'individus à travers la frontière du domaine Ω sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann, et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

Les conditions initiales sont généralement positives ; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques,...etc.

1.2 Loi de fick

La loi empirique de la diffusion était connue depuis longtemps. C'est en 1855 qu'Adolf Fick, physiologiste allemand, réalise une série d'expériences à la fois simples et élégantes, pour justifier la « première loi » de la diffusion, qui relie le transport d'une espèce au gradient de sa concentration dans un fluide (en l'occurrence, du sel dans l'eau). De la première loi, il a déduit la «seconde loi», elle exprime le bilan des entrées-sorties dans un petit volume.

1.2.1 Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que :

le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

Considérons le flux de particules d'une certaine espèce. Les particules peuvent être des molécules, atomes, ions, défauts ponctuels, électrons libres, ou des trous électroniques,...etc. Soit $u(x,t)$ leur concentration, exprimée en nombre de particules ou de moles par unité de volume, alors la quantité d'espèce traverse l'unité d'aire est donnée par la première loi de Fick :

$$J = -d\frac{\partial u}{\partial x},$$

J est le flux de diffusion de cette substance, d est appelé coéfficient de diffusion, ou diffusivité.

Cette loi se généralise en dimensions trois ou plus :

$$J = -d\nabla u, \tag{1.2}$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$ est le gradient de la concentration u. Le signe $(-)$ indique que le flux va des endroits les plus concentrés vers les moins concentrés.

1.2.2 Seconde loi de Fick

En appliquant la loi de conservation des espèces (la variation de la quantité d'espèces dans un volume est égale au bilan des flux entrant est sortant), on déduit

$$u_t + \nabla J = 0,$$

et d'après (1.2), on a deux cas :

- Si le milieu de la diffusion est hétérogène, alors d dépend de la position x, et on a :

$$u_t = \nabla.(d\nabla u).$$

- S'il est homogène, alors d est constante, il s'ensuit

$$u_t = d\Delta u.$$

Cette relation indique simplement que si la concentration varie dans le volume, c'est que de la matière a traversé sa surface.

-La première loi de Fick est dérivée de la loi de Fourier sur la conduction de la chaleur.

-La loi de Fourier énonce que :

en tout point d'un milieu isotrope, la densité du flux thermique instantanée est proportionnelle au gradient de température

$$J = -k_0 \nabla T,$$

où J est le flux de l'énergie thermique qui traverse une surface unitaire par unité de temps et k_0 est la conductivité thermique du matériau.

1.3 Modélisation mathématique d'un système de réaction-diffusion

Modéliser un phénomène, c'est le traduire sous forme mathématique (système d'équations en fonction des paramètres déterminants l'évolution du phénomène) de façon à le rendre prévisible et à en donner une connaissance plus approfondie. Nous donnons maintenant des démarches suivies pour établir le système (S.R.D) qui modélise des phénomènes différents. Considérons une région bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (qui peut être une cellule vivante, des molécules, une surface géographique...) dans laquelle les réactions se réalisent.

Notons par u_i la concentration de la $i^{\underline{eme}}$ espèce et $f_i(x, t, u_1, u_2, ..., u_m)$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$. Soit J_i le flux de ces espèces dû à la diffusion à travers la frontière Γ de Ω. Considérons un volume V infiniment petit de la région Ω de frontière $S = \partial V$, alors la vitesse de formation de u_i est égale à la quantité (f_i) formée par la réaction moins le flux à travers la surface S ; en termes d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial u}\int\limits_V u_i(x,t)dx = \int\limits_V f_i\left(x,t,u_1(x,t)\,,...u_m(x,t)\right)dx - \int\limits_S J_i d\sigma. \tag{1.3}$$

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int\limits_S J_i d\sigma = \int\limits_V \nabla J_i dx, \tag{1.4}$$

ce qui donne

$$\int\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial t}u_i(x,t) - f_i\left(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t)\right) + \nabla J_i\right]dx = 0, \tag{1.5}$$

puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, alors on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(x,t) = f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t)) - \nabla J_i \qquad i = \overline{1,m}. \tag{1.6}$$

Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick), J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et il est donné par

$$J_i = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\nabla u_j, \tag{1.7}$$

où $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une matrice définie positive, appelée matrice de diffusion.

En substituant (1.7) dans (1.6), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\Delta u = f\left(u\right), \tag{1.8}$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_m)$, d'où enfin l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = g(v), \tag{1.9}$$

où les coefficients de diffusion d_i ne sont pas toujours positifs. Si $d_i > 0$, alors l'écoulement de la matière se fait des milieux plus concentrés vers les moins concentrés et le contraire.

Pour le cas $d_i < 0$, ce qui signifie que les organismes s'attirent vers leur espèce et le mouvement se fait alors dans le sens du gradient de concentration.

1.4 Exemples

Des systèmes de la forme (S.R.D) apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Voici quelques exemples.

Reactions chimiques

Si on a une réaction chimique de la forme : $a + b \rightleftarrows c$, alors le système correspondant est

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial a}{\partial t} - D_a \Delta a = \lambda_1 c - \lambda_2 ab, \\
\dfrac{\partial b}{\partial t} - D_b \Delta b = \lambda_1 c - \lambda_2 ab, \\
\dfrac{\partial c}{\partial t} - D_c \Delta c = -(\lambda_1 c - \lambda_2 ab),
\end{cases} \tag{1.10}
$$

avec :

(a, b, c) est le vecteur inconnu, λ_1, λ_2 sont supposées des constantes positives.

Environnement (modél proie-prédateur)

On prend comme exemple le phenomène naturel connu sous le nom “predateur-proie” il se produit surtout dans les forets, la mer et les fleuves.

Soit le systéme de Rèaction-diffusion :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - d_1 \Delta u(x,t) = a_1 u - b_1 u^2 \pm c_1 uv & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - d_2 \Delta v(x,t) = a_2 v - b_2 v^2 \pm c_2 uv & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,
\end{cases} \tag{1.11}
$$

$\forall x \in \Omega$ et $t \geq 0$, Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$.

Ce système modelise la co-existence de deux espèces dans Ω, u et v la densité de chaque espèce à l'instant t.

$*$ $d_1, d_2 > 0$ taux de diffusion de chaque espèce $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ matrice de diffusion.

$*$ a_1 et a_2 représentent

$$
\begin{aligned}
&\text{la naissance} \quad \text{si} \quad a_i > 0, \\
&\text{la mortalité} \quad \text{si} \quad a_i < 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$*$ b_1 et b_2 deux constantes de co-existence, ie :

u et v restent bornés, quant $t \longrightarrow +\infty$.

$*$ c_1 et c_2 determinent la nature des relations entre des deux espèces (ici competition).

Modèle de réactins termiques (combustion)

Un autre domaine où les réaction-diffusion trouvent des applications importantes, est le domaine de la théorie de combustion. Nous donnons ici un modèle simple pour illustrer le role de ce type d'equations dans le phénomène de combustion. Soit dans une region bornée $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (un tube par essais par exemple) une substance qui subit une réaction chimique exothermique (qui libère de l'energie) $A \longrightarrow B$, où A est le reactif et B est le produit. Durant le temps de la reaction, la température change et la substance se diffuse à travers la surface de la region. Soit $a = a(x,t)$ la concentration (moles par volume) du reactif A, et soit $T = T(x,t)$ la temperature absolue de la région.

Nous avons alors la loi de balance de la masse et de l'energie, la balance de masse prend la forme

$$a_t + \nabla\phi = f(a,T), \tag{1.12}$$

où ϕ est le flux de A, et $f(a,t)$ est le taux de production de A (ici le taux est le taux de concentration de A par la réaction). On suppose que le flux est donné par la loi de fick $\phi = -D\nabla a$, où D est le coefficient de la diffusion de la masse.

Le taux de production f est le taux de la reaction $A \longrightarrow B$.

De la théorie de la chimie cinetique, il est connu que le taux de réaction prend la forme

$$f(a,T) = -sa^m \exp(-\frac{E}{RT}), \tag{1.13}$$

où $m > 0$ est l'ordre de la reaction, E est l'energie d'activation, R, s sont des constantes positives. L'equation (1.13) se nomme l'equation d'Arrhenues.

Finalement (1.12), (1.13) donne la loi de balance de masse suivante :

$$a_t - D\Delta a = -sa^m \exp(-\frac{E}{RT}), \tag{1.14}$$

pour la balance de l'energie, soit c la chaleur specifique par unité de volume (calories/degré.volume), cT représente la densité d'energie (en cal/vol). Nous supposons que le melange chimique tout entier possède la meme chaleur specifique. Le flux de l'energie est donné par la loi de Fourier $J = k_0 \nabla T$, ou k_0 est la conductivité thermique l'energie produite est proportionnelle

au taux de réaction et est donnée par :

$$g(a,T) = Qsa^m \ \exp(-\frac{E}{RT}) \tag{1.15}$$

où $Q > 0$ est une constante.

l'equation de balance de l'energie se donne alors par :

$$(cT)_t - \nabla.(k_0 \nabla T) = Qsa^m \exp(-\frac{E}{RT}) \tag{1.16}$$

où $k = \dfrac{k_0}{c}$ est le coefficient de diffusion.

Nous obtenons ainsi un modèle de la réaction-diffusion de la température et la concentration du réactif

$$\begin{cases} a_t - Dva = -sa^m \exp(-\frac{E}{RT}) \\ T_t - kvT = \frac{Q_s}{c} a^m \exp(-\frac{E}{RT}) \end{cases} \tag{1.17}$$

Biochimie

Considérons les deux reactions chimique suivantes :

$$Hb + O_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} HbO_2$$
$$Hb + CO_2 \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} HbCO_2$$

qui décrivent le le transfert Oxygène et dioxyde de carbone par l'hemoglobine à travers les capillaires pulmonaires, alors on a le systeme de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial [Hb]}{\partial t} = d_1\Delta[Hb] - k_1[Hb][O_2] + k_2[HbO_2] - k_3[Hb][CO_2] + k_4[HbCO_2] \\ \dfrac{\partial [O_2]}{\partial t} = d_2\Delta[O_2] - k_1[Hb][O_2] + k_2[HbO_2] \\ \dfrac{\partial [HbO_2]}{\partial t} = d_3\Delta[HbO_2] + k_1[Hb][O_2] - k_2[HbO_2] \\ \dfrac{\partial [CO_2]}{\partial t} = d_4\Delta[CO_2] - k_3[Hb][CO_2] + k_4[HbCO_2] \\ \dfrac{\partial [HbCO_2]}{\partial t} = d_5\Delta[HbCO_2] + k_3[Hb][CO_2] - k_4[HbCO_2] \end{cases} \tag{1.18}$$

où $[Hb], [O_2], [HbO_2], [CO_2]$ et $[HbCO_2]$ désignent les concentrations en Hémoglobine, Oxygène, Oxyhémoglobine, dioxyde de Carbone et Carboxyhémoglobine respectivement.

Epidémiologie

La propagation d'une épidémie (maladie contagieuse) ou une rumeur dans une population divise cette dernière automatiquement en trois groupes disjoints

(S) le groupe des susceptibles "individus non infectés mais qui peuvent le devenir".

(I) le groupe des contagieux ou infectés "individus portant le virus et donc capables de le transmettre aux individus du groupe (S)".

(R) le groupe écarté "individus qui sont définitivement guéris plus les individus isolés".

Notons par $S(x,t), I(x,t)$ et $R(x,t)$ les densités au point x de l'espace (position) à l'instant $t > 0$ des groupes $(S), (I)$ et (R) respectivement.

Nous supposons que :

1) les susceptibles (S) deviennent infectieux (I)après contact avec un infectieux et à un taux proportionnel au nombre de contacts entre les individus des groupes (S) et (I)

et un tel nombre est proportionnel au produit d'une fonction des membres de la classe (S) et d'une autre fonction de la classe (I) $(i.e., f(S) : g(I))$.

2) les individus sont écartés de la classe des infectés à un taux proportionnel à une fonction de (I).

3) la population totale est constante et est confinée dans une région bornée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Si on note par S, I et R les concentrations linéaires ou superficielles des groupes (S), (I) et (R) respectivement, alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = d_1 \Delta S - f(S)g(I) \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = d_2 \Delta I + f(S)g(I) - h(I) \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} = d_3 \Delta R + h(I) \end{cases} \tag{1.19}$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de migration à travers la frontière de Ω, on a les conditions aux bords homogènes de Neumann :

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} \qquad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

et les conditions initiales qui sont positives :

$$\begin{aligned} S(0,x) &= S_0(x), \\ I(0,x) &= I_0(x), \qquad x \in \Omega \\ R(0,x) &= R_0(x), \end{aligned}$$

Remarque 1 *Dans le cas où* $f(S) = aS$ *avec* $a > 0, g(I) = I$ *et* $h(I) = \lambda I$*, où* λ *est le coefficient de décès (par exemple dans le cas d'une grippe* $\lambda = 0$*) le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \Delta S - aSI \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = \Delta I + aSI - \lambda I \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + \lambda I \end{cases} \tag{1.20}$$

est appelé modèle de diffusion d'une **épidémie**.

Chapitre 2

Opérateurs m-accrétifs et semi-groupes

2.1 Opérateurs m-accrétifs

2.1.1 Notations et définitions

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, et $p(X)$ l'ensemble des parties de X.

On appelle opérateur multivoque de X toute application A de X dans $p(X)$, et on note par :

$D(A) = \{x \in X, Ax \neq \phi\}$ le domaine de définition de A

$R(A) = \bigcup\limits_{x \in X} Ax = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$ l'image de A

$G(A) = \{(x, y) \in X \times X,\ x \in X,\ y \in Ax\}$ le graphe de A

$(x, y) \in A$ signifie que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$

Si pour tout $x \in X$, Ax contient au plus un élément, on dit que A est un opérateur univoque de X.

Un opérateur univoque de X est complétement déterminé par la donnée de son graphe.

Dans tout ce qui suit, on considère les opérateurs univoque comme étant les seuls élements de notre travail.

Définition 1 *Un opérateur A dans X et dit accrétif si*

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A \ et \ \forall \lambda > 0, on \ a : \|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 + \lambda (v_1 - v_2)\| .$$

Remarque 2 *Si l'opérateur A est lineaire, pour montrer qu'il est accrétif il suffit de prouver*

$$\forall (u, v) \in A \ et \ \forall \lambda > 0 \ on \ a \ \|u\| \leq \|u + \lambda v\| .$$

Proposition 1 *Soit A un opérateur accrétif dans X, alors $\forall \lambda > 0$, l'équation*

$$u + \lambda A u = f, \forall f \in X, u \in D(A), \tag{2.1}$$

admet au plus une solution.

Soit u_1, u_2 deux solutions de (2.1), alors

$$u_1 - u_2 + \lambda (A u_1 - A u_2) = 0.$$

Puisque A est accrétif et $u_1, u_2 \in D(A)$, on a alors

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 + \lambda (A v_1 - A v_2)\| = 0,$$

ce qui implique $u_1 = u_2$.

Définition 2 ***(Application duale)***

Soit $x \in X$, on pose

$$F(x) = \{\omega \in X^* : \langle \omega, x \rangle = \|x\|^2 \, et \, \|\omega\|_{X^*} \leq \|x\|\}$$

où X^* est l'espace duale de X de norme $\|.\|_{X^*}$ et Fest une application de X dans X^*, *partout définie d'aprés le théorème Hahn-Banach (voir Brézis* [5]*) et on a la version de l'application duale normalisée*

$$J(x) = \{\omega \in X^*; \langle \omega, x \rangle = \|x\| \, et \, \|\omega\|_{X^*} \leq 1\}$$

2.1.2 Produit semi-intérieur

Définition 3 *Pour tout u et v dans X, on définit le produit semi-interieur noté* $[.,.]$ *par :*

$$[u, v] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$

Proprietés

$$1) \, [u, v] = \inf_{\lambda \geq 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$
$$2) \, [u, \lambda v] = \lambda \, [u, v]$$
$$3) \, [u, v + \widetilde{v}] \leq [u, v] + [u, \widetilde{v}]$$
$$4) \, [u, \alpha u + v] = \alpha \, \|u\| + [u, v]$$

Preuve :

1) $[u, v] = \inf_{\lambda \geq 0} \dfrac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$

On définit :

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\longrightarrow \quad [0, +\infty[\\ \lambda &\longmapsto \|u + \lambda v\| \end{aligned}$$

et on définit :

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \end{aligned}$$

On démontre facilement que la fonction g est croissante, de plus $0 \leq g(\lambda) \leq \|v\|$ donc, quand λ tend vers zéro, $g(\lambda)$ décroit vers une limite noté $[u, v]$. Ainsi on aura le résultat demandé.

2) $[u, \lambda v] = \lambda \, [u, v]$

On a :

$$[u, \lambda v] = \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{\|u + \alpha\lambda v\| - \|u\|}{\alpha} = \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \lambda \left[\frac{\|u + \alpha\lambda v\| - \|u\|}{\lambda\alpha} \right]$$

posons :

$$\beta = \alpha\lambda,$$

donc :

$$[u, \lambda v] = \lambda \lim_{\beta \longrightarrow 0} \frac{\|u + \beta v\| - \|u\|}{\beta},$$

ainsi :

$$[u, \lambda v] = \lambda [u, v]$$

3) $[u, v + \widetilde{v}] \leq [u, v] + [u, \widetilde{v}]$

on :

$$\begin{aligned} \|u + \lambda (v + \widetilde{v})\| &= \frac{1}{2} \|u + 2\lambda v + u + 2\lambda\widetilde{v}\| \\ &\leq \frac{1}{2} [\|u + 2\lambda v\| + \|u + 2\lambda\widetilde{v}\|] \end{aligned}$$

donc :

$$\|u + \lambda (v + \widetilde{v})\| - \|u\| \leq \frac{\|u + 2\lambda v\| - \|u\| + \|u + 2\lambda\widetilde{v}\| - \|u\|}{2},$$

ainsi :

$$\frac{\|u + \lambda (v + \widetilde{v})\| - \|u\|}{\lambda} \leq \frac{\|u + 2\lambda v\| - \|u\|}{2\lambda} + \frac{\|u + 2\lambda\widetilde{v}\| - \|u\|}{2\lambda},$$

lorsqu'on passe à la limite quand λ tend vers 0, on obtient

$$[u, v + \widetilde{v}] \leq [u, v] + [u, \widetilde{v}] .$$

4)$[u, \alpha u + v] = \alpha \|u\| + [u, v]$

ona :

$$
\begin{aligned}
\frac{\|u+\lambda(\alpha u+v)\|-\|u\|}{\lambda} &= \frac{\|(1+\lambda\alpha)\,u+\lambda v\|+\|u\|}{\lambda} \\
&= \frac{(1+\lambda\alpha)\left\|u+\dfrac{\lambda v}{1+\lambda\alpha}\right\|}{\lambda}-\frac{\|u\|}{\lambda}
\end{aligned}
$$

posons :

$$
\lambda' = \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{\|u+\lambda(\alpha u+v)\|-\|u\|}{\lambda} &= \frac{\|u+\lambda' v\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda} \\
&= \frac{\|u+\lambda' v\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda'}+\frac{\|u\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda} \\
&= \frac{\|u+\lambda' v\|-\|u\|}{\lambda'}+\alpha\,\|u\|
\end{aligned}
$$

par passage à la limite quand λ tend vers 0, il en résulte que :

$$
[u,\alpha u+v]=[u,v]+\alpha\,\|u\|
$$

Proposition 2 $\forall u,v\in X,$ *on a* $[u,v]=\max\limits_{\omega\in J(u)}\langle\omega,v\rangle_{X^*\times X}$

Preuve. pour tout u,v, on a :

$$
\langle\omega,v\rangle=\frac{\langle\omega,u+\lambda v\rangle-\langle\omega,u\rangle}{\lambda}=\frac{\|u+\lambda v\|-\|u\|}{\lambda},
$$

et comme $\lambda\longrightarrow\dfrac{\|u+\lambda v\|-\|u\|}{\lambda}$ est croissante, donc

$$
\langle\omega,v\rangle\leq\inf_{\lambda>0}\frac{\|u+\lambda v\|-\|u\|}{\lambda},
$$

d'où $\forall\omega\in J(u),\langle\omega,u\rangle_{X^*\times X}\leq[u,v]\,.$

Montrons qu'il existe $\omega\in J(u)$ qui réalise l'égalité :

$*$ Si u, v sont colinéaires, on a le résultat.

$*$ Si u, v ne sont pas colinéaires :

Posons : V l'espace engendré par u, v, et soit $\Psi \in V^*$ tel que :

$$\Psi(\alpha u + \beta v) = \alpha \|u\| + \beta[u, v].$$

Montrons maintenant que $\|\Psi\|_* \leq 1$:

► Si $\beta \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\Psi(\alpha u + \beta v)\| &= \|\alpha \|u\| + \beta[u, v]\| \\ &= \|[u, \alpha u + \beta v]\| \end{aligned}$$

d'après les propriétés du produit semi-intérieur on a

$$\|\Psi(\alpha u + \beta v)\|_* \leq \ \|\alpha u + \beta v\|$$

ce qui implique $\|\Psi\|_* \leq 1$.

► Si $\beta < 0$:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha u + \beta v) &= \alpha \|u\| - (-\beta)[u, v] = \alpha \|u\| - [u, -\beta v] \\ &\leq \alpha \|u\| + \beta [u, v] \end{aligned}$$

donc :

$$\|\Psi(\alpha u + \beta v)\|_* \leq \|\alpha u + \beta v\|$$

ce qui implique $\|\Psi\|_* \leq 1$.

D'aprés le théorème de Hahn-Banach, $\exists \omega \in X^*$tel que :

$i)$ ω prolonge Ψ

$ii)$ $\|\omega\|_* \leq 1$

$iii)$ $\alpha = 1, \beta = 0, \langle \omega, u \rangle = \Psi(u) = \|u\|$ donc $\omega \in J(u)$

$\alpha = 0, \beta = 1, \langle \omega; v \rangle = \Psi(v) = [u, v]$ donc $\omega \in J(u)$

d'où ω réalise le minimum. ■

Proposition 3 *Les propréités suivantes sont équivalentes :*

1) *A est accrétif.*
2) $\forall(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A : [u_1 - u_2, v_1 - v_2] \geq 0.$
3) $\forall(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A : \exists\omega \in J(u_1 - u_2)$ *tel que* $\langle \omega, v_1 - v_2 \rangle \geq 0.$
4) $\forall\lambda > 0, (I + \lambda A)^{-1} : R(I + \lambda A) \longrightarrow X$ *est une contraction .*

Preuve. (1) $\iff$ (2) soit $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$, posons $U = u_1 - u_2, V = v_1 - v_2$

et définissons

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto g(\lambda) = \frac{\|U + \lambda V\| - \|U\|}{\lambda} \end{aligned}$$

d'où

$$[U, V] = \inf_{\lambda > 0} \frac{\|U + \lambda V\| - \|U\|}{\lambda}$$

ainsi,

$$A \text{ accrétif } \iff \frac{\|U + \lambda V\| - \|U\|}{\lambda} \geq 0$$

.

(1) $\iff$ (3) d'aprés la proposition 2 on a : $[U, V] = \max_{\omega \in J(U)} \langle \omega, V \rangle$,
ainsi, on a A est acrrétif $\iff$ $\exists\omega \in J(U)$ tel que $\langle \omega, V \rangle \geq 0.$
(1) $\iff$ (4) soit $x_1, x_2 \in R(I + \lambda A)$ donc $\exists u_1, u_2 \in D(A)$ tel que

$$x_1 = u_1 + \lambda A u_1$$
$$x_2 = u_2 + \lambda A u_2$$

donc :

$$u_1 = (I + \lambda A)^{-1} x_1$$
$$u_2 = (I + \lambda A)^{-1} x_2$$

comme A est accrétif, on a

$$\begin{aligned}\left\|(I+\lambda A)^{-1}x_1-(I+\lambda A)^{-1}x_2\right\| &= \|u_1-u_2\| \\ &\leq \|u_1-u_2+\lambda(Au_1-Au_2)\| \\ &\leq \|x_1-x_2\|\end{aligned}$$

d'ou A est accrétif $\iff$ $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction.

La reciproque est clair, d'où le résultat. ■

Définition 4 *Un opérateur A dans X est dit m- accrétif dans X si :*

$i)$ A est accrétif dans X

$ii)$ $\forall\lambda>0, R(I+\lambda A)=X$ i.e, $\forall f\in X, \exists u\in D(A): u+\lambda Au=f.$

Remarque 3 *Soit A un opérateur dans X, alors*

A dissipatif $\iff$ $(-A)$ est accrétif

A m-dissipatif $\iff$ $(-A)$ est m-accrétif

Proposition 4 *Soit A un opérateur accrétif dans X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$i)$ $\forall\lambda>0,\ R(I+\lambda A)=X.$

$ii)$ $\exists\lambda_0>0,\ R(I+\lambda_0 A)=X.$

Preuve. $(i)\implies(ii)$ elle est claire.

$(ii)\implies(i)$ si $u+\lambda Au=f$ avec $\lambda>0$

alors :

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}f &= \lambda^{-1}u+Au \\ &= \lambda^{-1}u+Au+\lambda_0^{-1}u-\lambda_0^{-1}u\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lambda_0\lambda^{-1}f &= \lambda_0\left(\lambda^{-1}-\lambda_0^{-1}\right)u+u+\lambda_0 Au \\ &= \lambda_0\left(\lambda^{-1}-\lambda_0^{-1}\right)u+(I+\lambda_0 A)u\end{aligned}$$

donc :

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right].$$

Soit $T : X \longrightarrow X$ définie par

$$Tu = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f - \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right].$$

Montrons que T est une contraction

On a :

$$\|Tu - Tv\| = \left\| (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) (u - v) \right] \right\|$$

donc :

$$\|Tu - Tv\| = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) \left\| (I + \lambda_0 A)^{-1} (u - v) \right\|$$

et commes $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ est une contraction, alors :

$$\|Tu - Tv\| \leq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) \|u - v\|.$$

Par conséquent, T est une contraction si $\dfrac{\lambda_0}{\lambda} - 1 < 1$ i.e, $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$ et la proprieté (i) est satisfaite pour $\lambda \in \left] \dfrac{\lambda_0}{2}, +\infty \right[$.

En iterant ce procédé, on résout l'équation pour tout λ dans l'intervalle $\left] \dfrac{\lambda_0}{2^n}, +\infty \right[$, $n \in \mathbb{N}$ et donc pour tout $\lambda > 0$, ainsi, on aura (i). ■

2.1.3 Application dualité dans les espaces L^p

Notons

$[.,.]_p$ le produit semi-intérieur dans L^p.

$J_p(.)$ l'application duale normalisée dans L^p.

On définit les deux graphes suivants :

$$sign\,(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ [-1,1] & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases} \qquad sign_0\,(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Soit $X = L^p(\Omega)$ tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On sait que si $p = 1$, $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$,

et si $1 < p < \infty$, $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Proposition 5 *$\forall u, v \in L^p(\Omega)$, on a*

pour $p = 1$

i) $[u,v]_1 = \displaystyle\int_{\{x:u(x)\neq 0\}} sign_0(u(x))v(x)dx + \int_{\{x:u(x)=0\}} |v(x)|\,dx$

ii) $J_1(u) = \{\omega \in L^\infty(\Omega) : \omega(x) \in sign_0\,(u\,(x)) \quad p.p\}$.

pour $1 < p < \infty$

iii) $[u,v]_p = \dfrac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \displaystyle\int_\Omega sign_0\,(u\,(x))\,|u\,(x)|^{p-1}\,v(x)dx$

iv) $J_p(u) = \left\{\omega \in X^* = L^q\,(\Omega) : \langle \omega, u \rangle = \|u\|_p \text{ et } \|\omega\|_q \leq 1\right\}$ est constitué d'un seul élément, noté encore $J_p\,(u)$, donnée par :

$$J_p\,(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0\,(u\,(.))\,.\,|u\,(.)|^{p-1}$$

Preuve.

i) On a :

$$[u,v]_1 = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\|u+\lambda v\|_1 - \|u\|_1}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |u\,(x) + \lambda v\,(x)|\,dx - \int_\Omega |u\,(x)|\,dx}{\lambda}$$

Quand $\lambda \longrightarrow 0$, on a :

$$\frac{|u(x)+\lambda v(x)|-|u(x)|}{\lambda}=\begin{cases} v(x) & \text{si} \quad u(x)>0 \\ |v(x)| & \text{si} \quad u(x)=0 \\ -v(x) & \text{si} \quad u(x)<0 \end{cases}$$

alors :

$$[u,v]_1=\int_{\{x:u(x)\neq 0\}} sign_0(u(x))\,v(x)\,dx+\int_{\{x:u(x)=0\}}|v(x)|\,dx$$

$ii)$ D'autre part, on a

$$J_1(u)=\{\omega\in L^\infty(\Omega):\langle\omega,u\rangle=\|u\|_1\,,\|\omega\|_\infty\leq 1\}$$

donc :

$$\int_\Omega \omega(x)\,.u(x)dx=\int_\Omega |u(x)|\,dx.$$

Ce qui implique

$$\int_\Omega (\omega(x)\,.u(x)-\;|u(x)|)dx=0,$$

$$\int_\Omega (sign_0(u(x)).\omega(x)-1)\,|u(x)|\,dx=0.$$

Donc

$$sign_0(u(x)).\omega(x)-1=0,\ \text{ c-à-d}$$

$$sign_0(u(x)).\omega(x)=1.$$

Ce qui implique : $\omega(x)\in sign_0(u(x))$, d'où

$$J(u)=\{\omega\in L^\infty(\Omega):\omega(x)\in sign_0(u(x))\quad p.p\}\,.$$

$iii)$ $[u,v]_p=\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0}\dfrac{\|u+\lambda v\|_p-\|u\|_p}{\lambda}$

$$= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{\left(\int\limits_{\Omega} |u(x) + \lambda v(x)|^p \, dx \right)^{1/p} - \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}}{\lambda}.$$

Difinissons :

$$\begin{aligned} f : [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ \lambda &\longmapsto \int\limits_{\Omega} |u(x) + \lambda v(x)|^p \, dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto (f(\lambda))^{1/p} \end{aligned}$$

donc

$$[u,v]_p = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = g'_d(0),$$

tel que $g'_d(0)$ est la dérivée à droite de g en zero,

et on a $g'(\lambda) = \dfrac{1}{p} (f(\lambda))^{1/p-1} f'(\lambda)$.

Puisque f et f' sont continues, donc $g'(\lambda)$ est continue en zéro, ce qui donne :

$$g'_d = g'(0) = \frac{1}{p} (f(0))^{1/p-1} f'(0).$$

On a :

$$f'(\lambda) = p \int\limits_{\Omega} sign_0 (u(x) + \lambda v(x)) \,.\, |u(x) + \lambda v(x)|^{p-1} v(x) dx,$$

d'où

$$f'(0) = p \int\limits_{\Omega} sign_0 (u(x)) \,.\, |u(x)|^{p-1} v(x) dx,$$

on a aussi

$$(f(0))^{1/p-1} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{1/p-1} = (\|u\|^p)^{1/p-1},$$

d'où

$$[u,v]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_{\Omega} sign_0\left(u(x)\right)|u(x)|^{p-1} v(x)dx.$$

iv) De $J_p(u) = \left\{\omega \in L^q(\Omega) : \langle \omega, u\rangle = \|u\|_p \text{ et } \|\omega\|_q \leq 1\right\}$, on peut déduire que l'ensemble $J_p(u)$ est constitué d'un seul élément donné par :

$$J_p(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0\left(u(x)\right)|u(x)|^{p-1}$$

$$J_p(u) \in L^q(\Omega). \ \blacksquare$$

Remarque 4

1) Pour montrer qu'un opérateur linéaire A est accrétif dans L^1, il suffit de montrer en général que

$$\int_{\Omega} sign_0 u.Audx \geq \int_{\{u=0\}} |Au|\, dx \tag{$\sharp$}$$

2) Pour montrer que A est accrétif dans L^p, $1 < p < \infty$, il suffit de prouver

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\|u_1 - u_2\|^{p-1}} sign_0\left[(u_1 - u_2)(.)\right]|(u_1 - u_2)(.)|^{p-1}(Au_1 - Au_2)\, dx \geq 0$$

Théorème 1 ***(formule de Green)***

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, alors pour toutes fonction $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et $v \in C^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

où

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) &= \langle \nabla u(x), \eta(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\eta_i(x) \quad \text{(dérivée normale de } u\text{)}\end{aligned}$$

η : le vecteur normal exterieur a $\partial\Omega$

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}(x) \ \text{ Laplacien de } u$$

Proposition 6 *Soit l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega)\,;\, \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

alors A est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

Preuve. Puisque $A = -\Delta$ est linéaire, alors d'aprés la proposition 3, il suffit de montrer que :

$[u, Au]_p \geq 0$

♦ pour $p = 1$, d'aprés la proposition 5

$$[u, Au]_1 = \int\limits_{\{x:u(x)\neq 0\}} -\Delta u(x)\, sign_0(u(x))\, dx + \int\limits_{\{x:u(x)=0\}} |\Delta u(x)|\, dx \geq 0$$

♦ pour $1 < p < +\infty$

$$[u, Au]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int\limits_{\Omega} -\Delta u(x)\, |u(x)|^{p-1}\, sign_0(u(x))\, dx$$

et on a d'aprés la formule de green

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta u(x)\, |u(x)|^{p-1}\, sign_0(u(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} \nabla(u(x))\, \nabla\left[|u(x)|^{p-1}\, sign_0(u(x))\right] dx$$

comme

$$\nabla\left[|u(x)|^{p-1}\, sign_0\left(u(x)\right)\right]=(p-1)\, sign_0\left(u(x)\right)|u(x)|^{p-2}\,\nabla\left(u(x)\right)$$

donc :

$$\int_{\Omega}-\Delta u(x)\,|u(x)|^{p-1}\, sign_0(u(x))dx=(p-1)\int_{\Omega}\left[sign_0\left(u(x)\right)\nabla\left(u(x)\right)\right]^2.\,|u(x)|^{p-2}\,dx$$

d'où

$$[u,Au]_p\geq 0$$

c'est-à-drie $\forall p\in[1,+\infty[$, A est accrétif.

Pour montrer que A est m-accrétif il suffit de montrer que

$$R(I-A)=L^p(\Omega)\iff\forall f\in L^p(\Omega),\exists u\in D(A):u-Au=f$$

On suppose maintenant que $p=2$.

$\forall v\in W^{2,p}\left(\Omega\right),\forall i=1,...,n$, la formule de Green donne

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}vdx=\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}v\eta_i ds$$

donc

$$\int_{\Omega}\left(u-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right)vdx=\int_{\Omega}fvdx$$

$$\iff\int_{\Omega}uvdx+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}vds=\int_{\Omega}fvdx$$

$$\iff\int_{\Omega}uvdx+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}fvdx$$

On pose : $\forall (u,v) \in D(A) \times W^{2,p}(\Omega)$

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$$

et

$$l(v) = \int\limits_{\Omega} fv dx$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

$a(.,.)$ coercive :

$$\exists \alpha = 1 > 0 : a(u,v) = \|u\|_{D(A)}^2 \geq \alpha \|u\|_{D(A)}^2$$

$a(.,.)$ continue :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n} \cdot \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\|u\|_{D(A)} \cdot \|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

$l(.)$ continue :

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int\limits_{\Omega} fv dx \right| \\ &\leq \int\limits_{\Omega} |fv| \, dx \end{aligned}$$

l'inégalité de Holder donne :

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

donc d'aprés le théorème de lax-milgram il existe une solution unique u dans $D(A)$ tel que :

$$a(u,v) = l(v)$$

car $A = -\Delta$, $f \in L^p(\Omega)$, et d'après la théorie de Schauder $u \in D(A)$. ■

2.2 Semi-groupes et générateurs infinitésimaux

2.2.1 Semi-groupes

Soit X un éspace de Banach reél, et soit la famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires et continus dans X.

Définition 5 *La famille $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe si elle verifiée :*

i) $T(0) = I$

ii) $T(s+t) = T(s).T(t), \forall s,t \in \mathbb{R}^+$

Définition 6 *Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe fortement continu, noté C^0semi-groupe, si l'application $t \longrightarrow T(t)$ est continu pour la topologie forte d'opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$ i.e :*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0 \text{ pour tout } f \in X \text{ et } t, t_0 \in \mathbb{R}^+$$

Proposition 7 *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C^0semi-groupe,alors il éxiste $\omega \geq 0, M \geq 1$ tq : $\forall t \geq 0$ on a : $\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t)$.*

Définition 7 *On appelle type d'un semi-groupe T(t) le nombre :*

$$\begin{aligned}
\omega &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}, \textit{il existe } M \in \mathbb{R}^+ \ tq : \|T(t)\| \leq M \exp(\omega t), \textit{pour } t \geq 0\right\} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \\
&= \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|
\end{aligned}$$

En particulier on a les semi-groupe importants suivants :

1) $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$ (*semi-groupes bornés*)

2) $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$ (*semi-groupes de contraction*)

Remarque 5 *Le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur* X *est fortement continu si et seulement si* $\forall f \in X$ *ona :* $T(t)f \longrightarrow f$ *quand* $t \longrightarrow 0$.

2.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Soit X un espace de banach.

Définition 8 *Soit* $(G(t))_{t\geq 0}$ *un* C^0*semi-groupe. On appelle génerateur infinitesimal de* $(G(t))_{t\geq 0}$, *l'opérateur* $(A, D(A))$ *défini par :*

$$D(A) = \left\{ f \in X, \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h)f - f}{h} \text{ existe dans } X \right\}$$

$$Af = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h)f - f}{h} \text{ pour } f \in D_A$$

Il est clair que $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X et A est lineaire de $D(A)$ dans X.

Proposition 8 *Soit* $G(t)_{t\geq 0}$ *un* C^0*semi-groupe,* A *son générateur infinitesimal. Alors :*

a) $\forall x \in X$, $\lim \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)\,x ds = G(s)\,x$

b) $\forall x \in X$, $\int_0^t G(s)\,x ds \in D_A$ et $A\left(\int_0^t G(s)\,x ds\right) = G(t)\,x - x$

c) $\forall x \in D_A$, $G(t)\,x \in D_A$ et $\frac{d}{dt} G(t)\,x = AG(t)\,x$

d) $\forall x \in D_A, G(t)\,x - G(s)\,x = \int_s^t AG(\tau)\,x d\tau$

$$= \int_{s}^{t} G(\tau) Ax d\tau.$$

Preuve. Voir T.Cazenave-A.Haraux [8] ■

Définition 9 *Soit A un opérateur accrétif dans l'espace de Banach X, et soit $\lambda > 0$. On pose $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ et $A_\lambda = \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$*

Par difinition J_λ s'appelle la resolvante de A et A_λ l'**approximation de Yosida** (ou **regularisante de Yosida**) de A.

Théorème 2 *a) Pour tout $u_0 \in X$, la suite de fonctions $u_\lambda(t) = S_\lambda(t) u_0$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0, T]$ vers une fonction u continue sur $[0, \infty]$ à valeurs dans X, quand $\lambda \searrow 0$.*

b) Si on pose $u(t) = S(t) u_0$, $\forall u_0 \in X$ et $\forall t \geq 0$, alors on a les propriétés suivantes :

i) $S(t) \in \mathcal{L}(X)$

ii) $\|S(t)\| \leq 1$

iii)$S(0) = I$

iv)$S(t+s) = S(t) S(s) \quad \forall t \geq 0, \forall s \geq 0$.(i.e. $S(t)$ est un semi-groupe de contraction de classe C^0).

c) De plus, $\forall u_0 \in D(A), u(t) = S(t) u_0$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} u \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X) \\ \dfrac{du}{dt}(t) - Au(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{H}$$

d) Enfin, pour tout $u_0 \in D(A)$ et $\forall t \geq 0$, on a :

$$S(t) Au_0 = AS(t) u_0$$

i.e. $S(t)$ et A commutes sur le domaine de A.

Preuve. Etape1 Montrons que $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)\, u_0$ est bornée, en effet

$$S_\lambda(t) = \exp(tA_\lambda) = \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right).\exp\left(\frac{t}{\lambda}J_\lambda\right)$$

donc :

$$\|S_\lambda(t)\| \leq \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right).\exp\left(\frac{t}{\lambda}\|J_\lambda\|\right) \leq 1$$

En particulier

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|, \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0 \tag{2.2}$$

Etape2 Montrons que $u_\lambda(t)$ converge dans $C([0,T], X)$.

soit $u_0 \in D(A), \forall t \geq 0$ et $\forall s \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{ds}[S_\lambda(ts)\, S_\mu(t-ts)] = t\,[S_\lambda(ts)\, S_\mu(t-ts)]\,(A_\lambda - A_\mu)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| &= \|S_\lambda(t)\, u_0 - S_\mu(t)\, u_0\| \\
&= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}[S_\lambda(ts)\, S_\mu(t-ts)]\, u_0 ds\right\| \\
&\leq t\,\|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|
\end{aligned}$$

d'où $u_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T], X)$, pour tout $T > 0$, posons $u \in ([0, +\infty[, X)$ sa limite

On pose $u(t) = S(t)\, u_0$, d'aprés (2.2) on a :

$$\|S(t)\, u_0\| \leq \|u_0\| \text{ pour tout } t \geq 0, u_0 \in D(A)$$

et donc

$$\|S(t)\| \leq 1$$

Etape 3 Soit $u_0 \in \overline{D(A)} = X, \exists u_{0_n} \in D(A)$ tel que $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ dans X

on a :

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leq \|S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)u_{0_n}\| + \|S_\lambda(t)u_{0_n} - S(t)u_{0_n}\| \\ &\quad + \|S(t)u_{0_n} - S(t)u_0\| \\ &\leq 2\|u_{0_n} - u_0\| + \|S_\lambda(t)u_{0_n} - S(t)u_{0_n}\| \end{aligned}$$

puisque $S_\lambda(t)$ converge quand $\lambda \longrightarrow 0$, alors $S_\lambda(t)u_0$ converge uniformément vers $S(t)u_0$ sur $[0,T]$.

Etape 4 De plus, on a

$$S_\lambda(t)S_\lambda(s) = S_\lambda(t+s)$$

donc :

$$\begin{aligned} \|S(t)S(s)u_0 - S(t+s)u_0\| &\leq \|S(t)S(s)u_0 - S(t)S_\lambda(s)u_0\| \\ &\quad + \|S(t)S_\lambda(s)u_0 - S_\lambda(t)S_\lambda(s)u_0\| \\ &\quad + \|S_\lambda(t)S_\lambda(s)u_0 - S(t+s)u_0\| \end{aligned}$$

alors :

$$\|S(t)S(s)u_0 - S(t+s)u_0\| \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$$

d'où

$$S(t)S(s) = S(t+s)$$

donc $S(t)$ est un semi-groupe.

Etape 5 : Montrons que $u(t)$ est une solution de (H)

posons

$$v_\lambda(t) = A_\lambda S_\lambda(t)u_0 = S_\lambda(t)A_\lambda u_0 = u'_\lambda(t)$$

on a

$$\begin{aligned}\|v_\lambda(t) - S(t)Au_0\| &\leq \|A_\lambda S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)Au_0\| + \|S_\lambda(t)Au_0 - S(t)Au_0\| \\ &\leq \|A_\lambda u_0 - Au_0\| + \|S(t)Au_0 - S_\lambda Au_0\|\end{aligned}$$

donc $v_\lambda(t) \longrightarrow S(t)Au_0$ lorsque $\lambda \searrow 0$ uniformement sur $[0,T]$ pour tout $t > 0$, on ecrit alors :

$$u_\lambda(t) = u_0 + \int_0^t v_\lambda(s)\,ds.$$

Quand $\lambda \searrow 0$, on a $u(t) = u_0 + \int_0^t S(s)Au_0 ds$, donc $u \in C([0,+\infty], X)$

$u' = S(t)Au_0$ pour tout $t > 0$.

On a :

$$v_\lambda(t) = A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)$$

d'où

$$\|J_\lambda S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| \leq \|J_\lambda S(t)u_0 - S(t)u_0\| + \|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\|$$

donc

$$(J_\lambda S_\lambda(t)u_0, A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} (S(t)u_0, S(t)Au_0) \text{ dans } X \times X$$

puisque $D(A)$ est fermé, il en resulte que $S(t)u_0 \in D(A), \forall t \geq 0$, et $AS(t)u_0 = S(t)Au_0$ on en déduit que $u \in C([0,+\infty[, D(A))$.

En combinant ce résultat avec $u'(t) = S(t)Au_0$, on obtient, $u'(t) = Au(t)$.

Etape6 l'unicité de la solution de (H). posons

$$v(t) = S(\tau - t)u(t), \tau \geq 0,$$

on a

$$v \in C([0,\tau], D(A)) \cap ([0,\tau], X)$$

$$\begin{aligned} v' &= -AS(\tau - t)\, u(t) + S(\tau - t)\, u'(t) \\ &= S(\tau - t)\left[u'(t) - Au(t)\right] = 0 \quad \forall t \in [0,\tau] \end{aligned}$$

donc $v(\tau) = u(\tau), v(0) = S(\tau)\, u_0, \tau \geq 0$ etant arbitraire. ■

2.3 Problemes d'évolution semi-linéaires

2.3.1 Préliminaires

Définition 10 *Une fonction $F : X \longrightarrow X$ est dite localement lipschitzienne sur les bornés de X si :*

$\forall M > 0, \exists K(M)$ telle que : $\|F(x) - F(y)\| \leq K(M)\|x - y\|$

$\forall x, y \in B_M$ ou B_M est la boule de centre 0 et rayon M.

Dans tout le paragraphe 2.3, $F : X \longrightarrow X$ est une fonction lipschitzienne sur les bornés de X, on note $K(M)$ la constante de lipschitz de F sur B_M, pour $M > 0$.

Soit A un opérateur m-dissipatif dans X et $S(t)$ le semi-groupe engendré par A i.e. :

$$Au = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)u - u}{h}.$$

Pour $t \in [0, T]$ et $u_0 \in X$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X) \\ \dfrac{du}{dt} - Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{P1}$$

Lemme 1 *Etant $u_0 \in X$, si u est une solution de(P1), alors u vérifie l'équation integrale suivante :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \forall t \in [0,T] \tag{2.3}$$

Preuve. Soit u une solution de (P1), on définit w par : $w(s) = S(t-s)u(s)$ qui est différentiable pour $0 < s < t$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{w(h+s)-w(s)}{h} &= \frac{S(t-h-s)u\,(h+s) - S(t-s)u(s)}{h} \\
&= S(t-h-s)\frac{u\,(h+s) - S\,(h)\,u\,(s)}{h} \\
&= S(t-h-s)\frac{u\,(h+s) - u(s) + u(s) - S\,(h)\,u\,(s)}{h} \\
&= S(t-h-s)\left[\frac{u\,(h+s)-u(s)}{h} - \frac{S\,(h)-I}{h}u\,(s)\right]
\end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand h tend vers zéro, on aura :

$$w'\,(s) = S(t-s)\,[u'(s) - Au(s)] = S(t-s)F(u\,(s))$$

puis on intégre de 0 à $\tau < t$ pour avoir :

$$w\,(\tau) - w\,(0) = \int_0^\tau S(t-s)F\,(u\,(s))\,ds$$

par suite :

$$w\,(\tau) = S(t)u\,(0) + \int_0^\tau S\,(t-s)\,F\,(u\,(s))\,ds$$

Si on fait tendre τ vers t, on aura :

$$w(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

Puisque

$$w(t) = S(0)\,u(t) = u(t)$$

on obtient donc $$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\,F(u(s))\,ds, \forall t \in [0,T]\ .\ \blacksquare$$

Remarque 6 *La formule (2.3) nous définit une solution* $u \in C([0,T], X)$ *.*

Lemme 2 *(Gronwall)*

Soit $T > 0$*,* $\lambda \in L^1(0,T)$ *vérifiant* $\lambda \geq 0$ *p.p et* c_1, c_2 *deux constantes positives, et soit* $\phi \in L^1(0,T), \phi \geq 0$ *telle que* $\lambda\phi \in L^1(0,T)$*.Si*

$$\phi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\,\phi(s)\,ds, \textit{pour presque tout } t \in [0,T]$$

alors :

$$\phi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \lambda(s)\,ds\right), \textit{pour presque tout } t \in [0,T]$$

Preuve. (voir T.Cazenave-A.Haraux [8]). $\blacksquare$

Remarque 7 *Si* $c_1 = 0$ *alors* $\phi = 0$*, p.p.*

2.3.2 Résultat d'éxistance locale

Nous commençons avec un résultat d'unicité.

Lemme 3 *Pour tout* $u_0 \in X$*,* $T > 0$*, le problème (P1) admet au plus une solution.*

Preuve. Soitent u et v deux solutions de (P1), elles sont donc deux solutions de (2.3).

Posons

$$M = \max\left\{\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|, \sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|\right\}$$

on a :

$$u(t) - v(t) = \int_0^t S(t-s)\left[F(u(s)) - F(v(s))\right] ds$$

donc :

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leq \int_0^t \|[F(u(s)) - F(v(s))]\|\, ds \\ &\leq K(M)\int_0^t \|u(s)-v(s)\|\, ds\end{aligned}$$

d'après le lemme de Gronwall, on a :

$$\|u(t) - v(t)\| = 0$$

ce qui implique

$$u = v$$

d'où l'unicité. ■

Proposition 9 *Soit* $M > 0$*, posons :*

$$T_M = \left[2K\left(2M + \|F(0)\|\right) + 2\right]^{-1} > 0$$

soit $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| \leq M$, alors il existe une unique solution $u \in C\left([0, T_M], X\right)$ de (2.3) avec $T = T_M$.

Preuve. ■

– Pour l'unicité, on utilise le lemme 3.

– Pour l'existence locale de la solution, on procède comme suit :

Soit $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| \leq M$, on note :

$$L = 2M + \|F(0)\|$$

et

$$E = \{u \in C([0, T_M], X), \|u(t)\| \leq L, \ \forall t \in [0, T_M]\}$$

On équipe E de la distance d induite par la norme de $C([0, T_M], X)$ donnée par :

$$d(u, v) = \max_{t \in [0, T_M]} \|u(t) - v(t)\| \text{ pour tout } u, v \text{ dans } E$$

L'espace E muni de la distance d est un espace métrique complet .

Pour tout $u \in E$, on définit $\phi_u \in C([0, T_M], X)$ par :

$$\phi_u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \forall t \in [0, T_M].$$

1) Montrons que $\phi_u : E \longrightarrow E$ est bien définie.

On a :

$$F(u(s)) = F(0) + (F(u(s)) - F(0))$$

donc :

$$\begin{aligned} \|F(u(s))\| &\leq \|F(0)\| + K(L)L \\ &\leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M} \end{aligned}$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned}\left\|\phi_u(t)\right\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\|\,ds \\ &\leq \frac{(M+\|F(0)\|)\,t}{T_M} \leq L \qquad \forall t \in [0, T_M]\end{aligned}$$

donc on a bien $\phi_u : E \longrightarrow E$.

2) Montrons que ϕ_u est une contraction :

pour tout $u, v \in E$ on a :

$$\left\|\phi_u(t) - \phi_v(t)\right\| = \left\| \int_0^t S(t-s)\left[F(u(s)) - F(v(s))\right] ds \right\|$$

donc :

$$\begin{aligned}\left\|\phi_u(t) - \phi_v(t)\right\| &\leq K(L)\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\,ds \\ &\leq K(L)T_M d(u,v)\end{aligned}$$

mais :

$$\|F(0)\| + K(L)\,L \leq \frac{M+\|F(0)\|}{T_M}$$

donc :

$$K(L)\,L \leq \frac{M+\|F(0)\|}{T_M}$$

doù :

$$
\begin{aligned}
K\left(L\right)T_M &\leq \frac{M+\|F(0)\|}{L} \\
&= \frac{M+\|F(0)\|}{2M+\|F(0)\|} \leq 1
\end{aligned}
$$

par conséquent ϕ est une contraction sur E, donc possède un point fixe $u \in E$ qui est une solution de (2.3).

2.3.3 L'alternative : Existence globale-Explosion en temps fini

Théorème 3 *Il existe une fonction $T : X \longrightarrow]0,+\infty[$ avec les propriétés suivantes :*

Pour tout $u_0 \in X$, il existe $u \in C(]0,T(u_0)[,X)$, qui pour tout $T < T(u_0)$ est l'unique solution de (2.3) dans $C([0,T],X)$.

de plus

$$
2K(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T(u_0)-t} - 2, \forall t \in [0,T(u_0)[\tag{2.4}
$$

En particulier l'une des deux éventualités suivantes a lieu :

$$
\begin{aligned}
&i)\ T\left(u_0\right) = +\infty \\
&ii)\ T\left(u_0\right) < +\infty \text{ et } \lim_{t\to T(u_0)} = +\infty
\end{aligned}
$$

Preuve. Il est clair que la formule (2.4) implique que si $T(u_0) < \infty$ alors :

$$
\|u\left(t\right)\| \longrightarrow \infty \ \text{ lorsque } t \longrightarrow T(u_0).
$$

Soit $u_0 \in X$, on introduit :

$$
T(u_0) = \sup\left\{T > 0, \exists u \in C(]0,T(u_0)[,X) \ \text{ solution de } (2.3)\right\}
$$

D'aprés la proposition 9 on a $T(u_0) > 0$

d'autre part, la proprieté d'unicité permet de construire une solution maximale $u \in C\left([0, T\left(u_0\right)[\,, X\right)$ de (2.1), il reste alors à montrer (2.4).

L'inégalité (2.4) étant immédiate si $T(u_0) = \infty$, on peut supposer que $T(u_0) < \infty$, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $t_0 \in [0, T\left(u_0\right)[$ tel que (2.4) n'est pas vérifiée.

On a alors :

$$T(u_0) - t_0 < T_M,\ avec\ \ M = \|u(t_0)\|\,.$$

Soit $v \in C\left(\left[0, T_M\right], X\right)$ la solution donnée par la proposition9 de l'équation :

$$v(t) = S(t)u(t_0) + \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds, \forall t \in \left[0, T_M\right].$$

On définit la fonction $w \in C\left(\left[0, t_0 + t_M\right], X\right)$ par :

$$w\left(t\right) = \begin{cases} u(t) \ \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0 \\ v(t-t_0) \ \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + T_M \end{cases}.$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T_M$, on a :

$$w(t) = v(t-t_0) = S(t-t_0)u(t_0) + \int_0^{t-t_0} S(t-t_0-s)F(v(s))ds$$

mais :

$$u(t_0) = S(t_0)u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0-s)F(u(s))ds$$

donc :

$$\begin{aligned}
w(t) &= v(t-t_0) = S(t-t_0)\left[S(t_0)\,u_0 + \int\limits_0^{t_0} S(t_0-s)\,F(u(s))\,ds\right] \\
&\quad + \int\limits_0^{t-t_0} S(t-t_0-s)\,F(v(s))\,ds \\
&= S(t-t_0)\left[S(t_0)\,u_0 + \int\limits_0^{t_0} S(t_0-s)\,F(w(s))\,ds\right] + \int\limits_0^{t-t_0} S(t-t_0-s)\,F(v(s))\,ds
\end{aligned}$$

On pose $s' = s + t_0$, il vient

$$\int\limits_0^{t-t_0} S(t-t_0-s)\,F(v(s))\,ds = \int\limits_{t_0}^{t} S(t-s')\,F(v(s'-t_0))\,ds'$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} S(t-s)\,F(w(s))\,ds$$

d'où

$$w(t) = S(t-t_0)\left[S(t_0)\,u_0 + \int\limits_0^{t_0} S(t_0-s)\,F(w(s))\,ds\right] + \int\limits_{t_0}^{t} S(t-s)\,F(w(s))\,ds$$

par conséquent :

$$w(t) = S(t)\,u_0 + \int\limits_0^{t} S(t-s)\,F(w(s))\,ds$$

w est donc solution de (2.1) sur $[0, t_0 + T_M]$, c'est-à-dire qu'on a pu construire une solution de (2.4) avec :

$T = t_0 + T_M > T(u_0)$, ce qui contredit la difinition de $T(u_0)$

donc on a bien :

$$2K\left(\|F(0)\|+2\|u(t)\|\right)\geq\frac{1}{T(u_0)-t}-2$$

D'ou le théorème 4.

-Si la propriété (i) a lieu, on dit que la solution est globale.

-Si la propriété (ii) qui est satisfaite on dit que la solution est explosive en tenps fini.

Puisque une de ces propriétés doit ètre satisfaite, donc l'existence globale de la solution signifie l'existence d'une estimation a priori de $\|u(t)\|$ dans $[0, T(u_0)[$. ■

Chapitre 3

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion

3.1 Introduction

Soit le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = \lambda f(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d\Delta v = -\mu f(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0, v(0,x) = v_0 & \text{sur } \Omega \text{ (3.1)} \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose que a, b, d, λ, μ sont des constantes positives telles que $b \neq 0$, $d > a$.

$f(r,s)$ est une fonction continuement différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

$f(r,0) = 0$ pour tout $r \geq 0$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log(1 + f(r,s))}{r} < \frac{2ad}{n(d-a)\|v_0\|_\infty} \min\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{d-a}{b}\right\}, \forall s \geq 0. \tag{3.2}$$

On va utiliser la méthode des semi-groupes pour étudier l'existence locale de ce système.

3.2 Existence locale

Le problème (P) se transforme en :

$$\begin{cases} U'(t) = H\left(U(t)\right) + F(U(t)) \\ U(0) = U_0 \in X \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} H \quad &: \quad D_\infty\left(A\right) \times D_\infty\left(A\right) \longrightarrow X \times X \\ H\left(U(t)\right) \quad &= \quad \left(a\Delta u(t) + b\Delta v(t), d\Delta v(t)\right) \end{aligned}$$

$$F(U(t)) = (\lambda f(u,v), -\mu f(u,v))$$

avec $U = (u,v)$ et le domaine de définition de Δ est :
$D_\infty(\Delta) = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) \text{ pour } p > \frac{n}{2}, \Delta u \in C(\overline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}$

Théorème 4 *Pour tout $U_0 \in X$ le problème (P) admet une solution locale unique.*

Preuve. *Montrons que F est localement lipschitzienne en U dans X.*

$$\begin{aligned} \|F(U_1) - F(U_2)\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} &= \|(\lambda f(u_1,v_1) - \lambda f(u_2,v_2), -\mu f(u_1,v_1) + \mu f(u_2,v_2)\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} \\ &= \|(\lambda f(u_1,v_1) - \lambda f(u_2,v_2)\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} \\ &\quad + \|-\mu f(u_1,v_1) + \mu f(u_2,v_2)\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \lambda K(M)\left\|U_1 - U_2\right\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} + \mu K(M)\left\|U_1 - U_2\right\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \max(\lambda,\mu) K(M)\left\|U_1 - U_2\right\|_{C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})} \end{aligned}$$

d'aprés la proposition 9 et le théorème 3 le problème (P) admet une solution locale unique.

■

3.3 Existence globale

Soit (u, v) la solution local du problème (P)

On a d'après le principe du Maximum :

$$\forall t \in [0, T_{\max}[\,, \|v(t)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty$$

s'il était possible de trouver une estimation de u l'existence globale découle, mais une telle estimation n'est pas évidente d'après D.Henry [14]

Pour prouver l'existence globale de la solution du système (P), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|f(u, v)\|_p$ sur $[0, T_{\max}[\times \Omega$, pour tout $p > \frac{n}{2}$.

Lemme 4 *Soit $(u(t, .), v(t, .))$ une solution du probleme (P) alors la fonctionnelle :*

$$t \longrightarrow L(t) = \int_\Omega (M - v(t, x))^{-\gamma} \exp(Bu(t, x))\, dx$$

est décroissant sur $[0, T_{\max}[$ pour toute constante B et γ telles que

$$BM \max\left\{\frac{\lambda}{\mu}, \frac{b}{(d-a)^2}\right\} < \gamma < \frac{ad}{(d-a)^2} \tag{3.3}$$

où M satisfait la condition :

$$\|v_0\|_\infty \leq M \tag{3.4}$$

Preuve. Puisque la solution v est continue et v_0 vérifie (3.1), la fonctionnelle de Lyapunov est définie pour $t \geq 0$ et s'annule en zéro.

En dérivant L par rapport à t on trouve :

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \int_{\Omega} \left[\left(\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \exp(Bu) \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \left(B (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu) \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \exp(Bu) \right) [d\Delta v - \mu f(u,v)]\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(B (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu) \right) [a\Delta u + b\Delta v + \lambda f(u,v)]\, dx \\
&= \int_{\Omega} (d\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \exp(Bu)\, \Delta v - \mu\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \exp(Bu)\, f(u,v)) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \big[aB (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu)\, \Delta u + bB (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu)\, \Delta v \\
&\quad + \lambda B (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu)\, f(u,v)\, dx \big] \\
&= \int_{\Omega} \big[\left[aB (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu) \right] \Delta u + \left[d\gamma (M-v)^{-\gamma-1} + bB (M-v)^{-\gamma} \right] \exp(Bu)\, \Delta v \\
&\quad + \left[\lambda B (M-v)^{-\gamma} - \mu\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \right] \exp(Bu)\, f(u,v) \big] \, dx \\
&= \int_{\Omega} \left[aB (M-v)^{-\gamma} \exp(Bu) \right] \Delta u + \left[d\gamma (M-v)^{-\gamma-1} + bB (M-v)^{-\gamma} \right] \exp(Bu)\, \Delta v dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\lambda B (M-v)^{-\gamma} - \mu\gamma (M-v)^{-\gamma-1} \right] \exp(Bu)\, f(u,v)\, dx
\end{aligned}$$

donc $L'(t) = I + J.$

Par application de la formule de Green on obtient :

$$I = -\int_{\Omega} T(\nabla u, \nabla v)\,(M-v)^{-\gamma-2} \exp(Bu)\, dx$$

où

$$\begin{aligned}
T\left(\nabla u, \nabla v\right) &= aB^2\left(M-v\right)^2\left|\nabla u\right|^2+\left(d\gamma\left(\gamma+1\right)+bB\gamma\left(M-v\right)\right)\left|\nabla v\right|^2 \\
&\quad+\left[aB\gamma\left(M-v\right)+\left(d\gamma\left(M-v\right)+bB\left(M-v\right)^2\right)B\right]\nabla u\nabla v \\
&= aB^2\left(M-v\right)^2\left|\nabla u\right|^2+\gamma\left(d\left(\gamma+1\right)+bB\left(M-v\right)\right)\left|\nabla v\right|^2 \\
&\quad+\left[B\left(M-v\right)\left(d\gamma+a\gamma+bB\left(M-v\right)\right)\right]\nabla u\nabla v
\end{aligned}$$

Le déterminant de T est donné par :

$$\begin{aligned}
&\left(\left(a+d\right)\gamma+bB\left(M-v\right)\right)^2-4a\gamma\left(d\left(\gamma+1\right)+bB\left(M-v\right)\right) \\
=\ &\left(a+d\right)^2\gamma^2+b^2B^2\left(M-v\right)^2+2\left(a+d\right)\gamma bB\left(M-v\right)-4a\gamma d\left(\gamma+1\right)-4a\gamma bB\left(M-v\right) \\
=\ &\left(a+d\right)^2\gamma^2+b^2B^2\left(M-v\right)^2-2a\gamma bB\left(M-v\right)-4ad\gamma\left(\gamma+1\right)+2d\gamma bB\left(M-v\right) \\
=\ &\left(a+d\right)^2\gamma^2+2\left(d-a\right)\gamma bB\left(M-v\right)+b^2B^2\left(M-v\right)^2-4ad\gamma^2-4ad\gamma \\
=\ &\left(a^2+d^2-2ad\right)\gamma^2+2\left(d-a\right)\gamma bB\left(M-v\right)+b^2B^2\left(M-v\right)^2-4ad\gamma \\
=\ &\left(d-a\right)^2\gamma^2+2\left(d-a\right)\gamma bB\left(M-v\right)+b^2B^2\left(M-v\right)^2-4ad\gamma \\
=\ &\left(\left(d-a\right)\gamma+bB\left(M-v\right)\right)^2-4ad\gamma.
\end{aligned}$$

Si $D \leq 0$:

$$\left(\left(d-a\right)\gamma+bB\left(M-v\right)\right)^2 \leq 4ad\gamma$$

$$bB\left(M-v\right) \leq \left(d-a\right)\gamma$$

et :

$$(d-a)^2\gamma^2-ad\gamma<0$$

par cette inégalité on trouve

$$\frac{bB\left(M-v\right)}{\left(d-a\right)} \leq \gamma\frac{ad}{\left(d-a\right)^2}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$\varepsilon x^2 + \sigma xy + \rho y^2 \leq -\frac{\sigma^2 - 4\rho\varepsilon}{2}\left(\frac{x^2}{4\rho} + \frac{y^2}{4\varepsilon}\right), \text{ voir S.Kouachi [17]}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où ε, ρ sont deux constantes non négatives, on observe que :

$$I \leq \int_{\Omega} \left(m_1 |\nabla v|^2 + m_2 |\nabla u|^2\right)(M - v)^{-\gamma-2} \exp(Bu)\, dx$$

où m_1 et m_2 sont donnés par :

$$m_1 = \frac{B^2 (M-v)^2 (\gamma(a+d) + bB(M-v))^2 - 4\left(aB^2(M-v)^2 \gamma (d(\gamma+1) + bB(M-v))\right)}{2 \times 4 (\gamma (d(\gamma+1) + bB(M-v)))}$$

$$m_2 = \frac{B^2 (M-v)^2 (\gamma(a+d) + bB(M-v))^2 - 4\left(aB^2(M-v)^2 \gamma (d(\gamma+1) + bB(M-v))\right)}{8aB^2 (M-v)^2}$$

donc :

$$m_1 = \frac{\left(ad - \gamma(d-a)^2\right)\gamma}{2dB^2M^2}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{((d-a)\gamma + bB(M-v))^2 - 4ad\gamma B^2 (M-v)^2}{8aB^2(M-v)^2} \\ &= \frac{\left(ad - \gamma(d-a)^2\right)}{2(d(\gamma+1) + bBM)} \end{aligned}$$

Comme

$$J = \int_{\Omega} \left(\lambda B (M-v)^{-\gamma} - \mu\gamma (M-v)^{-\gamma-1}\right) \exp(Bu)\, f(u,v)\, dx$$

on obtient :

$$J \leq -C(B, \gamma, \lambda, \mu, M) \int_{\Omega} \exp(Bu)\, f(u,v)\, dx$$

où $C(B,\gamma,\lambda,\mu,M)$ est une constante positive, donc :

$$L'(t) \leq -\int\limits_{\Omega} \left(m_1 |\nabla v|^2 + m_2 |\nabla u|^2\right) (M-v)^{-\gamma-2} \exp(Bu)\, dx - C \int\limits_{\Omega} \exp(Bu) f(u,v)\, dx$$

d'où L est décroissant. ■

Corollaire 1 *Supposons que $f(r,s)$ est une fonction continuement diffirentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ non négative ,qui vérifie $f(r,0)=0$, pour tout $r \geq 0$, alors chaque solution de (P), qui satisfait la condition (3.2) avec condition initiales , tel que : $\|v_0\|_\infty \leq M$ est globale de plus, elle est uniformément bornée dans $]0,+\infty[\times\Omega$.*

Preuve. D'aprés (3.2) on a :

$$1 + f(r,s) \leq C \exp(\alpha r) \qquad \text{pour } r \geq 0, s \in [0,M]$$

$$\alpha < \frac{2ad}{n(d-a)^2 \|v_0\|_\infty} \min\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{d-a}{b}\right\} \qquad \forall s \geq 0$$

On peut choisir $p > \dfrac{n}{2}$ de tel sorte que :

$$p\alpha < \frac{ad}{(d-a)^2 \|v_0\|_\infty} \min\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{d-a}{b}\right\}$$

soit $\beta = p\alpha$ alors :

$$\beta \|v_0\|_\infty < \frac{ad}{(d-a)^2} \min\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{d-a}{b}\right\}$$

donc on peut choisir γ et M tels que (3.4) soit vérifie, en utilisant le lemme 4 on déduit que :

$$\exp(\beta u(t,.)) = (\exp(\alpha u(t,.)))^p \in L^\infty\left([0,T_{\max}[\,, L^1(\Omega)\right)$$

donc :

$$\exp(\alpha u(t,.)) \in L^\infty([0,T_{\max}[\,, L^p(\Omega)), \text{pour } p > \frac{n}{2}$$

d'où

$$f\left(u\left(t,.\right),v\left(t,.\right)\right)\in L^{\infty}\left(\left[0,T_{\max}\right[,L^{p}\left(\Omega\right)\right),\ \text{ pour } p>\frac{n}{2}$$

Il résulte que la solution est globale, de plus elle est uniformément bornée. ■

Chapitre 4

Comportement asymptotique de la solution

Soit l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + F(u(t)), \forall t \geq 0,$$

et soit $u(t)$, $0 \leq t \leq +\infty$ la solution de cette équation.

Les résultats du comportement à l'infini reposent généralement sur les propriétés de compacité de $\underset{t\geq 0}{\cup}\{u(t)\}$, et en particulier les résultats de bornage de $\underset{t\geq 0}{\cup}\{u(t)\}$. Pour établir ces résultats, nous allons donner quelques propriétés élémentaires des systèmes dynamiques.

Soit (E, d) un espace métrique complet.

4.1 Les systèmes dynamiques

Définition 11 *Soit $\{S_t\}_{t\geq 0}$ une famille d'applications sur E. On dit que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est un système dynamique sur E si*

(i) $S_t \in C(E, E), \forall t \geq 0.$

(ii) $S_0 = I$.

(iii) $S_{t+s} = S_t S_s$, $\forall s, t \geq 0$.

(iV) $\forall u \in E$, $t \longmapsto S_t u \in C([0, \infty[, E)$.

Définition 12 *Pour tout $u \in E$, la courbe continue $t \longmapsto S_t u$ est appelée trajectoire issue de u.*

Définition 13 *Soit $u \in E$, l'ensemble*

$$w(u) = \{v \in E; \exists t_n \longmapsto \infty, S_{t_n} u \longmapsto v \text{ lorsque } n \longmapsto \infty\}$$

et appelé ensemble w-limite de u.

Proposition 10 *Pour tout $u \in E$ et tout $t \geq 0$, on a :*

(i) $w(u) = \underset{s>0}{\cap} \overline{\underset{t \geq s}{\cup} \{S_t u\}}$.

(ii) $w(u) = w(S_t u)$.

(iii) Si $\underset{t \geq s}{\cup} \{S_t u\}$ est relativement compact, alors $w(u) = S_t w(u)$.

(iV) $\lim\limits_{t \to \infty} d(S_t u, w(u)) = 0$.

Preuve. Voir D.Henry [14] ■

4.2 Les points d'équilibre

Définition 14 *Un point $u \in E$ est dit point d'équilibre de $\{S_t\}_{t \geq 0}$ si :*

$$\forall t \geq 0, S_t v = v.$$

Corollaire 2 *Soit E l'ensemble des points d'équilibre de $\{S_t\}_{t \geq 0}$ dans E. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte pour S_t, alors pour tout $v \in E$, tel que $\underset{t \geq 0}{\cup} \{S_t u\}$ soit relativement compact dans E, on a :*

$$\lim_{t \to \infty} d(S_t u, E) = 0$$

Preuve. *Voir L.Benaon* [7] ■

4.3 Les fonctions de Lyapunov

Définition 15 *On dit que la fonction continue* Ψ *définie de* $E \longrightarrow R$ *est une fonction de Lyapunov pour* S_t *si :*

$$\forall u \in E, \forall t \geq 0, \Psi(S_t u) \leq \Psi(u).$$

Remarque 8 *D'après la définition* 15*, on peut conclure que* $t \longmapsto \Psi(S_t u)$ *est une fonction décroissante quelque soit* $u \in E$*, car*

$$\forall u \in E; \forall t \geq 0; \Psi(S_t u) \leq \Psi(S_0 u) = \Psi(u).$$

Définition 16 *Une fonction de Lyapunov continue* Ψ *sur* E *est dite fonction de Lyapunov stricte si on a :*

$$\forall u \in E, u \text{ n'est pas point d'équilibre}$$

$$\Longrightarrow \forall t \geq 0 : \Psi(S_t u) < \Psi(u).$$

Théorème 5 *Soit* Ψ *une fonction de Lyapunov pour* S_t *et* $u \in E$ *telle que :*

$$\bigcup_{t \geq 0} \{S_t u\} \text{ soit relativement compact dans } E$$

alors, on a :

$$\forall v \in w(u) : \Psi(v) = \lim_{t \to \infty} \Psi(S_t u)$$

de plus :

$$\text{la fonction } t \longmapsto \Psi(S_t u) \text{ est constante pour tout } v \in w(u)$$

Soit $v \in w(u)$*, alors :*

$$\exists t_n \longrightarrow \infty \text{ tel que } \lim_{n \to \infty} S_{t_n} u = v$$

puisque :

$$\Psi \in C(E, R)$$

on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Psi(S_{t_n} u) = \Psi(v)$$

puisque $\Psi(S_t u)$ *est une fonction décroissante de* t *on obtient :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(S_t u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(S_{t_n} u) = \Psi(v)$$

de plus, on a $\underset{t \geq 0}{\cup} \{S_t u\}$ *est relativement compact, donc :*

$$\forall t \geq 0, S_t v \in w(u)$$

c'est-à-dire :

$$\exists t_n \longrightarrow \infty \text{ où } S_{t_n} u \longrightarrow S_t v \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(S_{t_n} u) = \Psi(S_t u) = \Psi(v)$$

en conclusion

la fonction $t \longmapsto (S_t v)$ *est constante pour tout* $v \in w(u)$

Remarque 9 *Le théorème* 5 *on l'appelle aussi le principe d'invariance, est un principe fort dans l'étude du comportement à l'infini des solutions positives des systèmes de réaction-diffusion.*

4.4 Le critère de comparaison

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u) \quad \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

L'objet est de chercher un majorant à la solution en démontrant le théorème suivant :

Théorème 6 *Supposons :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - F(u) \leq v_t - \Delta v - F(v) \quad sur \;\; \Omega \times [0,T] \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \\ u_0 \leq v_0 \;\; sur \;\; \Omega \end{cases}$$

où F' existe sur $[0,T]$ et continue, alors :

$$u(x,t) \leq v(x,t) \quad sur \;\; \Omega \times [0;T]$$

Preuve. On a :

$$u_t - \Delta u - F(u) \leq v_t - \Delta v - F(v)$$

$$\iff (u_t - v_t) - \Delta(u - v) - (F(u) - F(v)) \leq 0 \tag{4.1}$$

posons :

$$w := u - v$$

donc :

$$w_t - \Delta w - (F(u) - F(v)) \leq 0$$

d'après le théorème des accroissements finis on aura :

$$\exists c \text{ tel que } u < c < v : F(u) - F(v) = (u - v)F'(c)$$

donc à partir de l'inéquation (4.1) on a :

$$w_t - \Delta w - wF'(c) \leq 0 \tag{4.2}$$

On multiplie (4.2) par w^+ ensuite on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega w_t w^+ - \int_\Omega \Delta w w^+ - \int_\Omega wF'(c)w^+ \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left(w^+\right)^2 + \int_\Omega \left(\nabla\left(w^+\right)\right)^2 - k\int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq -\int_\Omega \left(\nabla\left(w^+\right)\right)^2 + k\int_\Omega \left(w^+\right)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq k\int_\Omega \left(w^+\right)^2$$

On intègre sur $[0,t]$:

$$\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 - \int_\Omega \left(w_0^+(x)\right)^2 \leq \int_0^t k\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

$$\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 \leq \int_\Omega \left(w_0^+(x)\right)^2 + \int_0^t k\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

$$w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \leq 0 \Longrightarrow w_0^+(x) \leq 0$$

$$0 \leq \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 \leq \int_0^t k\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

et d'aprés le lemme de Gronwall :

$$\int_\Omega (w^+(t,x))^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\|w^{+}\right\|_{2,\Omega}^{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow w^{+}=0$$

$$\Longleftrightarrow w\leq 0$$

$$\Longleftrightarrow u-v\leq 0$$

$$u\leq v.$$

■

4.5 Comportement asymptotique

Il existe des outils simples qui nous permettent d'étudier le comportement à l'infini des solutions lorsque $t\to\infty$ dont l'explication est donnée par l'exemple ci-dessus :

Exemple :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\Delta u=\lambda\Phi(v)\Psi\left(u\right)-\sigma u & (x,t)\in\Omega\times\left]0,+\infty\right[\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-a\Delta v=\Lambda-\lambda\Phi(v)\Psi\left(u\right)-\varkappa v & (x,t)\in\Omega\times\left]0,+\infty\right[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\left(x,t\right)=\dfrac{\partial v}{\partial \eta}\left(x,t\right)=0 & (x,t)\in\Omega\times\left]0,+\infty\right[\\ u\left(x,0\right)=u_0\geq 0, v(x,0)=v_0\geq 0 & x\in\Omega \end{cases}$$

Où Φ, Ψ des fonctions positives, telles que $\Phi,\Psi\in C^1(\Omega)$

Φ,Ψ' des fonctions croissantes, $\lambda>0,\sigma=\varkappa+\delta$ tel que $\delta>0,\varkappa>0.$
$\dfrac{\lambda}{\sigma}\Phi\left(\dfrac{\Lambda}{\varkappa}\right)\Psi'\left(\dfrac{\Lambda}{\varkappa}\right)<1$ et $\left\|u_0+v_0\right\|_{\infty}\leq\dfrac{\Lambda}{\varkappa}.$
Pour étudier le signe de u, on applique le principe du maximum.

On multiplie la première équation par u^{-} et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}u^{-}dx-\int_{\Omega}a\Delta u u^{-}dx=\int_{\Omega}\lambda\Phi(v)\Psi\left(u\right)u^{-}dx-\int_{\Omega}\sigma u u^{-}dx$$

la formule de Green donne

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\left|u^{-}\right|^{2}dx-\int\limits_{\Omega}a\left(\nabla u^{-}\right)^{2}dx=\int\limits_{\Omega}\lambda\Phi(v)\Psi\left(u\right)u^{-}dx+\int\limits_{\Omega}\sigma\left|u^{-}\right|^{2}dx$$

puisque Φ, Ψ et u^{-} sont des fonctions positives, il vient :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\left|u^{-}\right|^{2}dx &\geq \int\limits_{\Omega}\sigma\left|u^{-}\right|^{2}dx\\ \Longrightarrow\ -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\left|u^{-}\right|^{2}dx &\geq 0\\ \Longrightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\left|u^{-}\right|^{2}dx &\leq 0\end{aligned}$$

par intègration sur $(0,t)$, on obtient :

$$\int\limits_{\Omega}\left(u^{-}\right)^{2}(x,t)\,dx-\int\limits_{\Omega}\left(u^{-}\right)^{2}(x,0)\,dx\leq 0$$

car $\int\limits_{\Omega}\left(u^{-}\right)^{2}(x,0)\,dx=0$

on obtient :

$$\begin{aligned}0 &\leq \int\limits_{\Omega}\left(u^{-}\right)^{2}(x,t)\,dx\leq 0\\ &\Longrightarrow \left\|u^{-}\right\|_{2,\Omega}^{2}=0\\ &\Longrightarrow u^{-}=0\\ &\Longrightarrow u\geq 0\end{aligned}$$

La question importante dans ce chapitre est la suivante :

comment se comporte $u(t)$ et $v(t)$, lorsque $t\rightarrow\infty$?

on pose :

$$w = u + v$$

alors :

$$\begin{aligned} w_t - a\Delta w &= \Lambda - \varkappa v - \sigma u \\ &= \Lambda - \varkappa v - \varkappa u - \delta u \\ &= \Lambda - \varkappa (u + v) - \delta u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad w_t - a\Delta w + \varkappa w = \Lambda - \delta u \\ &\Longrightarrow \quad e^{\varkappa t} w_t - a e^{\varkappa t} \Delta w + \varkappa e^{\varkappa t} w = e^{\varkappa t} \Lambda - e^{\varkappa t} \delta u \end{aligned}$$

on pose :

$$W = e^{\varkappa t} w$$

donc :

$$\begin{aligned} W_t - a\Delta W &= e^{\varkappa t} \Lambda - e^{\varkappa t} \delta u \\ &\leq e^{\varkappa t} \Lambda \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$W_t - a\Delta W \leq \left(\frac{\Lambda}{\varkappa} \left(e^{\varkappa t} - 1 \right) + \|w_0\|_\infty \right) - a\Delta \left(\frac{\Lambda}{\varkappa} \left(e^{\varkappa t} - 1 \right) + \|w_0\|_\infty \right)$$

d'après le critère de comparaison, on a :

$$
\begin{aligned}
& e^{\varkappa t} w \leq \frac{\Lambda}{\varkappa}\left(e^{\varkappa t}-1\right)+\left\|w_0\right\|_{\infty} \\
& \Longrightarrow w \leq \frac{\Lambda}{\varkappa}\left(1-e^{-\varkappa t}\right)+\left\|w_0\right\|_{\infty} e^{-\varkappa t} \\
& \Longrightarrow w \leq \frac{\Lambda}{\varkappa}\left(1-e^{-\varkappa t}\right)+\frac{\Lambda}{\varkappa} e^{-\varkappa t} \\
& \Longrightarrow w=u+v \leq \frac{\Lambda}{\varkappa}
\end{aligned}
$$

ce qui implique que :

$$w \text{ est borné.}$$

on a :

$$u, v, \frac{\Lambda}{\varkappa} \geq 0$$

donc :

$$u \leq \frac{\Lambda}{\varkappa} ; v \leq \frac{\Lambda}{\varkappa}$$

d'autre part, on a :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)-a \Delta u=\lambda \Phi(v) \Psi(u)-\sigma u \\
& S_t-a \Delta S=r e^{r t} u+e^{r t} u_t+e^{r t} a \Delta u \\
& r e^{r t} u+e^{r t}\left(u_t+a \Delta u\right)=r e^{r t} u+e^{r t} \lambda \Phi(v) \Psi(u)-\sigma e^{r t} u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_t-a \Delta S & \leq r e^{r t} u+e^{r t}\left(\lambda \Phi(\frac{\Lambda}{\varkappa}) \Psi^{\prime}(\frac{\Lambda}{\varkappa})-\sigma\right) u \\
& \leq r e^{r t} u-r e^{r t} u \\
& =\left(\left\|u_0\right\|_{\infty}\right)_t+a \Delta\left\|u_0\right\|_{\infty}
\end{aligned}
$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
& r=\sigma-\lambda \Phi(\frac{\Lambda}{\varkappa}) \Psi^{\prime}(\frac{\Lambda}{\varkappa})>0 \\
& S=e^{r t} u
\end{aligned}
$$

d'après le critère de comparaison, on a :

$$S = e^{rt}u \leq \|u_0\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \; u \leq \|u_0\|_\infty e^{-rt}$$

lorsque $t \to \infty$, on obtient que : $u \to 0$

En ce qui concerne le comportement de v(t), lorsque $t \to \infty$, on a :

$$\begin{aligned} & W_t - a\Delta W = e^{\varkappa t}\Lambda - e^{\varkappa t}\delta u \\ & \Longrightarrow \; W_t - a\Delta W \geq e^{\varkappa t}\Lambda - e^{\varkappa t}\delta \|u_0\|_\infty e^{-rt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_t - a\Delta W \;&\geq\; e^{\varkappa t}\left(\Lambda - \delta \|u_0\|_\infty e^{-rt}\right) \\ &\geq\; e^{\varkappa t}\left(\Lambda - \delta \|u_0\|_\infty e^{-r\frac{T}{2}}\right) \qquad\qquad \text{pout } t \geq \frac{T}{2} \\ &\geq\; e^{\varkappa t}\left(\Lambda - \delta \|u_0\|_\infty e^{-r\frac{T}{2}}\right) \\ &\geq\; e^{\varkappa t}\Lambda\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$W_t - a\Delta W \geq \left(\frac{\Lambda\left(\frac{T}{2}\right)}{\varkappa}\left(e^{\varkappa t} - e^{\varkappa\frac{T}{2}}\right)\right)_t - a\Delta\left(\frac{\Lambda\left(\frac{T}{2}\right)}{\varkappa}\left(e^{\varkappa t} - e^{\varkappa\frac{T}{2}}\right)\right)$$

d'après le critère de comparaison, on a :

$$w \geq \frac{\Lambda\left(\frac{T}{2}\right)}{\varkappa}\left(1 - e^{\varkappa\left(t - \frac{T}{2}\right)}\right)$$

pour $t = T$, on trouve que :

$$w(x,t) \geq \frac{\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)}{\varkappa}\left(1 - e^{\varkappa\frac{t}{2}}\right)$$

alors :

$$v(x,t)=\frac{\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)}{\varkappa}\left(1-e^{\varkappa\frac{t}{2}}\right)-u(x,t)$$

de l'autre côté, on a :

$$w(t,x)=u(t,x)+v(t,x)\leq\frac{\Lambda}{\varkappa}$$

$$\Longrightarrow\ v\left(x,t\right)\leq\frac{\Lambda}{\varkappa}-u(x,t)$$

lorsque $t\to\infty$, on obtient que $v\to\dfrac{\Lambda}{\varkappa}$.

Bibliographie

[1] N.ALIKALOS, L^P bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm, in P.D.E., 4 : 827-868, 1979.

[2] P.BENLAN-H.TOURE, Solution entropique pour une equation parabolique-hyperbolique non linéaire, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e serie, tome 3, n^0 1(1994), pp. 63-80.

[3] S.BENZONI, Equations différentielles ordinaires, 11 mai 2007.

[4] A.R.BERNAL-A.V.LOPEZ, Extremal equilibria for reaction–diffusion equations in bounded domains and applications, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid 28040, Spain 13 July 2007.

[5] H.BREZIS : "Analyse Fonctionnelle (Théorie et Application)", Dunod, Paris, 1999.

[6] H.BREZIS, Problème elliptiques paraboliques non linéaires avec données mesures, Séminaire Equations aux dérivées partielles(Polytechnique) (1981-1982), exp. n^0 20,pp. 1-12.

[7] L.BENAON, Mémoire de magister, Département des mathématiques, université de Annaba, Année 2008.

[8] T.CAZENAVE-A.HARAUX, Introduction au problèmes d'évolution semi linéaires, Edition Ellipses.

[9] P.COLLET-J.XIN, Global Existance and Large Time Asymptotic Bounds of L^∞ Solutions of Thermal Diffusive Combustion Systems on $\mathbb{R}^n$, arXiv :chao-dyn/9412003 v1, 5 Dec 1994.

[10] E.H. DADDIOUAISSA, Existence of global solutions for a system of reaction-diffusion equations having a triangular matrix, EJDE Vol. 2008(2008), No. 141, pp. 1–9.

[11] A.HARAUX-M.KIRANE, Estimations C1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e serie, tome5, n^0 3-4(1983), pp. 265-280.

[12] A.HARAUX-A.YOUKANA, On a result of K.Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tohoku Math. J. 40(1988), 159-163.

[13] S.L.HOLLIS, R.H.MARTIN and M.PIERRE, Global existence and boundedness in reaction in reaction-diffusion systems. SIAM J.Math anal., 18 : 744-761, 1987.

[14] D.HENRY, Geometric theory of semilinear parabolic equations. volume 840, lecture notes in mathematics, Springer 1981

[15] S.KOUACHI, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a lyapunov functional, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2001(2001), No. 68, pp. 1-10.

[16] S. KOUACHI and A.YOUKANA, Global existence for a class of reaction-diffusion systems.Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49(2001), N^o. 3, 303–308.

[17] S. KOUACHI, Uniform boundedness and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients. Electron. J. Qual.Theory Differ. Equ. 2001, N^o. 7, 9 pp. (electronic).

[18] S.D.LYLYA, Mémoire de magister, Département des mathématiques, université de Annaba, Année 2001.

[19] K.MASUDA, On the global existence and asymptotique behavior of reaction-diffusion equations. Hokkaido Math, J., 12 : 360-370, 1983.

[20] A.MOUMENI and L.SALAH DERRADJI, Global Existence of Solution for Reaction Diffusion Systems IAENG International Journal of Applied Mathematics, 40 :2, IJAM_40_2_06, 13 May 2010.

[21] A.MUNNIER, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Nancy-université, Institut Elie Cartan, 2006-2007.

[22] M.PIERRE, Systèmes de réaction-diffusion, Ecole de printemps, "Equations aux dérivées partielles non linéaires", Marrakech, 31 mars-5 avril 2008, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Antenne de Bretagne et Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR), France.

[23] R.H.Martin Jr, Global existence questions for reaction-diffusion systems in Semi-groups. Theory and Applications". Ed. H.Brezis, M.Crandall, F.Kappel. PitmanResearch Notes in Math, Vol. 1 (1986). 169-177.