République Algérienne Démocratique et Populaire
inistère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université du 08 Mai 45 - Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

الجمهوريـــــة الجزائريـــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــم العـــالي والبحث العلمي
جـــامعة 08 مـــاي 45 - قالمـــة
كـلـيـة الـعـلـوم و الهـنـدسـة

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de Mathématiques

Année : 2007

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

Evaluation d'Actifs Financiers Avec Volatilité Stochastique

Option
Probabilités & Statistique

Par
M. SEGNI Sami

DIRECTEUR DE MEMOIRE : M.R. REMITA M.C U.B.M. Annaba

devant le jury

PRESIDENT :	H. BOUTABIA	Prof	U.B.M. Annaba
EXAMINATEURS :	M. HAIOUR	M.C	U.B.M. Annaba
	M.Z. AISSAOUI	M.C	U. GUELMA

Table des matières

1 Rappel du calcul stochastique **8**

1.1 Martingales à temps discret 8

1.1.1 Filtration et temps d'arrêt 8

1.2 Généralités sur les processus à temps continu 13

1.2.1 Mouvement brownien 13

1.2.2 Quelques résultats 15

1.2.3 Variation quadratique 16

1.2.4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô 17

1.2.5 Construction de l'intégrale stochastique 17

1.2.6 Calcul d'Itô 18

1.3 Théorème de Girsanov 20

1.3.1 Changement de probabilité 20

1.3.2 Théorème de Girsanov 21

2 Evaluation en temps continu **25**

2.1 Modèle de Black et Scholes (B.S). 25

2.1.1 Discription du modèle 25

2.1.2 Stratégies autofinancées 27

2.2 Théorème de représentation des martingales browniennes 28

2.2.1 Théorème 29

2.3 Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes . 29

2.3.1 Determination d'Une probabilité sous laquelle $\left(\widetilde{S}_t\right)$ est une martingale 29
2.3.2 Pricing 30
2.3.3 Formule de Black et Scholes 32
2.3.4 Couverture des calls et des puts 35
2.4 Théorème de valorisation dans le cas multidimensionnel et avec coefficients de diffusion stochastiques 38
2.4.1 rappel 41
2.4.2 Formule BS avec taux d'intérêt stochastique 42
2.4.3 Prix Forward d'un actif 47

3 Modèle de Smile **49**
3.1 Volatilité Black-Scholes implicite et smile 49
3.2 Modèle log-décalé 51
3.2.1 Valorisation d'un call. 52
3.2.2 Lien avec le modèle de taux Ho et Lee 52
3.3 Modèle à volatilité locale non paramétrique : modèle dit de 'Dupire' . . . 58
3.3.1 Formule de Tanaka 58
3.3.2 Application 58
3.4 Modèle SABR (Sigma Alpha Beta Rho) 60

Abstract

In this memory we studie problems of financial asset assessments with stochastic volatility, and we explain the presence of smile on markets of rates, stocks and currencies pushed operators to find processes of diffusion of the underlying that allow them to explain the phenomenon of smile. Also, we studie three models of smile : the baffled log model, that as one will see it can be interpreted as a linear combination of a normal model and a log - normal model, the model ' Dupire' to local volatility depending of the time and the level of the underlying asset and in short the SABR model where the volatility depends on the underlying but also of a stochastic parameter non correlated with the underlying asset.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les problèmes d'évaluations d'actifs financiers avec volatilité stochastique, et expliquons la présence de smile sur les marchés des taux, des actions et de change, ceci a poussé les opérateurs à trouver des processus de diffusion des sous-jacents qui leur permettent d'expliquer le phénomène .

Nous étudions, également trois modèles à smile : le modèle log-décalé, qui comme on le verra peut s'interpréter comme une combinaison linéaire d'un modèle normal et d'un modèle log-normal, le modèle 'Dupire' à volatilité locale dépendant du temps et du niveau du sous jacent et enfin le modèle SABR où la volatilité dépend du sous-jacent mais également d'un paramètre stochastique non corrélé avec le sous jacent.

Introduction

En 1973, **F. Black, M. Scholes** [3] et **R Merton** [14] ont opéré une avancée majeure en matière d'évaluation d'option en proposant un modèle avec formule fermée. Ils ont pour cela supposé que le sous-jacent suivait le modèle suivant :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

où la variable σ, supposée constante, représente la volatilité de l'actif et μ son espérance de rentabilité, dW est un processus de Wiener standard. En temps discret, la variation δW durant un court intervalle de temps de longueur δt s'écrit : $\delta W = \epsilon\sqrt{\delta t}$ où ϵ suit une loi normale $N(0,1)$ et les valeurs de δW pour deux intervalles de longueur δt sont indépenantes.

On note $U(S_1, S_2, t) = \exp(-r(T-t))\,\mathbb{E}^*(P_0(S_1, S_2, T)/F_t)$ et on peut à l'aide du lemme d'Itô, se ramener à l'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) suivante :

$$\partial_t U + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial^2_{ss} U + rS\ \partial_s U - rU = 0$$

où r est le taux d'intérêt supposée constant. D'un point de vue probabiliste, cette solution peut s'écrire sous une certaine probabilité : $U = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[P_0]$ où P_0 est la condition finale, i.e. le Payoff.

Cette équation parabolique peut, après changement de variables, se ramener à l'équation de la chaleur, qui nous permet ainsi d'obtenir par le noyau de la chaleur une formule fermée pour le calcul d'un call européen (formules de Black-Scholes). Elle peut également être résolu par les méthodes usuelles de l'analyse numérique, en particulier les méthodes de Monte-Carlo, les différences finies ou les éléments finis.

La volatilité est un paramètre essentiel en finance. C'est une mesure du risque de variation du rendement d'un actif sous-jacent, ou encore de la variation du cours du sous-jacent et se révèle dans la pratique très difficile à évaluer car non directement observable. Néanmoins, ce terme englobe plusieurs aspects. On parle en effet de volatilité implicite, historique.

Plus la volatilité est élevée, plus la probabilité d'un écart entre le cours actuel du sous-jacent et le cours prochain est importante. Pour le possesseur d'un stock (ou sous-jacent) cela importe peu ; en effet, les risques de variation à la hausse comme à la baisse se compensent en moyenne.

Cependant, ce n'est pas le cas pour le détenteur d'une option, telle un call ou un put. Prenons par exemple le cas d'un call dont le prix d'exercice (strike est à la monnaie c'est-à-dire au même prix que le prix du sous-jacent ou spot). Le détenteur de l'option exercera sa possibilité d'acheter le spot que si le prix de celui-ci est supérieur au prix d'exercice de l'option. Ainsi, plus le prix sera élevé plus il gagnera d'argent. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice, les pertes sont limitées au prix de l'option.

La volatilité est donc un élément clef pour les produits structurés. Et on comprend bien la nécessité d'avoir des modèles s'approchant au maximum de la réalité.

Lorsque l'on observe pour un même sous-jacent, les prix de plusieurs options de strike et de maturité différents, et que l'on calcule la volatilité implicite associée, on obtient des valeurs différentes. Pourtant le modèle de Black-Scholes suppose une volatilité constante. C'est un des principals défauts du modèle de Black-Scholes : il n'y a pas une unique volatilité pour un même sous-jacent mais plusieur qui diffèrent en fonction du strike et de la maturité de l'option. La variation de la volatilité implicite du sous-jacent par rapport au strike à maturité constante est connu comme le phénomène de ***Smile***

(**Derman E. and I. Kani**, **(1994)** [6]).

Ce phénomène peut s'expliquer par l'interprétation du risque par le vendeur. En effet, plus le risque sera perçu comme grand, plus la volatilité sera grande.

L'existence du smile montre les limites du modèle de Black-Scholes et d'autres modèles plus complexes ont été introduits pour palier à cette déficience. Les modèles à volatilité stochastique considèrent donc la volatilité comme suivant un processus stochastique.

Le but de notre travail est d'expliquer les modèles de smiles (modèle log-décalé, modèle "Dupire" et modèle SABR), et de calculer leurs volatilités stochastiques implicites.

Notre travail est composé de trois Chapitres :

Chapitre 1 : Nous introduissons les notions de calcul stochastique, les filtration, les martingales, les temps d'arrêts et l'intégral stochastique etc..., on va citer quelques resultats : théorèmes d'arrêts de Doob et décompostion de Doob.

Chapitre 2 : Nous nous consacrons à la construction du modèle de Black-Scholes et traitons les résultats importants pour l'évaluation et la couverture de l'option européenne dans un modèle du marché complet.

Chapitre 3 : Nous expliquons les modèles à **smile** (modèle log-décalé, modèle "Dupire" et modèle SABR) et calculons leurs volatilités stochastiques implicites.

Chapitre 1

Rappel du calcul stochastique

1.1 Martingales à temps discret

1.1.1 Filtration et temps d'arrêt

Une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$.

Notons que n représente le temps, ses valeurs seront applées dates ou instants et $\mathcal{F}_n$ s'interprète comme la liste des événements dont à la date n ou plus tard on saura s'il se réalisent ou non.

Définition 1.1 *Un processus $X = (X_n,\, n \in \mathbb{N})$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ si pour chaque n la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable.*

Définition 1.2 *Soit Y un processus tel que chaque variable Y_n soit intégrable. Le processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ défini par $X_n \doteq \mathbb{E}\left(Y_n \mid \mathcal{F}_n\right)$ est la meilleure approximation de Y ; $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera appellé la projection adaptée de Y.*

Théorème 1.1 *Une variable aléatoire X est intégrable si et seulement si $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $\int_{\{|X|>M\}} |X|\, dP < \varepsilon$.*

Définition 1.3 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite des variables aléatoires intégrable. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformiment intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $M_n > 0$ telle que $\int_{\{|X_n|>M_n\}} |X_n|\, dP < \varepsilon$, où M_n est indépendent de n.*

Définition 1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(X_n)_{n\geq 0}$ de variable aléatoires intégrables, (c'est- à - dire vérifiant $E(|X_n|) < \infty$ pour tout n) est :*
- une martingale (resp ; sousmartingale, surmartingale) si $X_n = \mathbb{E}[\mathbb{X}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$,(resp ; $X_n \leq \mathbb{E}[\mathbb{X}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$, $X_n \geq \mathbb{E}[\mathbb{X}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$) .

Notons que :
- Les martingales forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- les sousmartingales et surmartingales forment un cône convexe.
- La multiplication par un réel négatif échange les sousmartingales et surmartingales.
- Si X et Y sont deux surmartingales (resp ; sousmartingale) il en va de même pour $X \wedge Y \triangleq \inf(X, Y)$ $\Big($resp ; $X \vee Y \triangleq \sup(X, Y)\Big)$)
- Si X est une sousmartingale, f une fonction convexe croissante et $f \circ X$ est intégrable alors $f \circ X$ est une sousmartingale.
- Si X est une martingale, f convexe et $f \circ X$ intégrable alors $f \circ X$ est une sousmartingale.
- Si X est une martingale alors, $|X|$ est une sousmartingale.

Définition 1.5 *Un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une variable aléatoire T à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} \equiv \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que l'évènement $\{T \equiv n\}$ soit dans $\mathcal{F}_n$.*

Définition 1.6 *Un processus X est dit prévisible s'il est adapté, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ - mesurable, avec la convention ($\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$).*

Théorème 1.2 (transformée de martingale) *Soit X une martingale (resp ; surmartingale, sousmartingale)*
i) pour tout processus H prévisible et borné (resp ; borné positif, borné négatif) le processus

$H.X$ défini par :

$$(H.X)_n = H_0.X_0 + H_1.(X_1 - X_0) + H_2.(X_2 - X_1) + ... + H_n.(X_n - X_{n-1})$$

est une martingale (resp ; surmartingale, sousmartingale).
ii) Soit T un temps d'arrêt, le processus défini par $X_{T\Lambda n} \triangleq X_n^{|T}$ est une martingale (resp ; surmartingale, sousmartingale).

Preuve. i) Soit $Y = HX$ qui est intégrable (car X est une martingale), donc adaptée et intégrable et H borné.

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n = \mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[(H.X)_{n+1} - (H.X)_n|\mathcal{F}_n\right] =$$
$$\mathbb{E}\left[\begin{array}{c} H_0X_0 + H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + ... + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) - H_0X_0 - \\ H_1(X_1 - X_0) - H_2(X_2 - X_1) - ... - H_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_n \end{array}\right]$$
$$= \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n]$$
$$= H_{n+1}[\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] - X_n] = 0$$

en effet $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$; d'où $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$.
Si X est une surmartingale, H bornée positive (X intégrable, adapté et H borné) alors Y est intégrable

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n &= \mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[H_{n+1}.(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1}\left(\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n]\right) \\ &\leq H_{n+1}\left(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n\right) \\ &\leq H_{n+1}[X_n - X_n] = 0 \end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n \leq 0$ alors $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq Y_n$, d'où Y est une surmartingale. Même raisonnement quand X est une sousmartingale.

ii) Si T est un temps d'arrêt on suppose $H_n(\omega) = \mathbf{1}_{[0,T(\omega)]}(n)$ un processus borné prévisible car $\forall n \geq 1$ alors $H_n = \mathbf{1}_{\{T>n-1\}}$ est mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$. $(H.X)_n = X_n.H_n = X_n.\mathbf{1}_{\{T>n-1\}} = X_n.\mathbf{1}_{\{T\geq n\}} = X_{n\wedge T} = X_n^{|T} = (H.X)_n$, H prévisible et borné, X une martingale alors $X^{|T}$ est une martingale. ■

Proposition 1.1 *Soit $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ une martingale et soit $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. On pose $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par :*

$$X_0 = H_0 M_0$$
$$X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + ... + H_n \Delta M_n \text{ pour } n \geq 1$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$.

(X_n) est parfois appelée " tranformée de la martingale (M_n) par la suite (H_n)".

Preuve. Il est clair que (X_n) est une suite adaptée. De plus, pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n |\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1}\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n |\mathcal{F}_n) \text{ car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ prévisible} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$$

ce qui prouve que (X_n) est une martingale. ■

La proposition suivante donne une caractérisation des martingales qui nous sera utile par la suite.

Proposition 1.2 *Une suite adaptée de variables aléatoires réelles $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible (H_n), on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \triangle M_n\right) = 0.$$

Preuve. Si (M_n) est une martingale, il en est de même, de la suite (X_n) définie par : $X_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = \sum_{n=1}^{N} H_n \triangle M_n$, pour toute suite prévisible (H_n). On a donc $\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0)$. Réciproquement, on remarque que si $j \in \{1, ..., N\}$, à tout événement $\mathcal{F}_j$-mesurable A, on peut associer la suite (H_n) définie par $H_n = 0$ pour $n \neq j+1$ et $H_{j+1} = \mathbf{1}_A$. Il est clair que la suite (H_n) est prévisible et l'égalité

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \triangle M_n\right) = 0$$

donne :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \left(M_{j+1} - M_j\right)\right) = 0$$

et par conséquent $\mathbb{E}\left(M_{j+1} \,|\mathcal{F}_j\right) = M_j$. ■

Théorème 1.3 (Décomposition de Doob) [12] *Tout processus adapté et intégrable X s'écrit d'une façon unique comme somme d'une martingale et d'un processus prévisible nul en zéro (appelé compensateur de X).*
Pour que X soit une martingale (resp ; sousmartingale, surmartingale) il faut et il suffit que son compensateur soit nul (resp ; croissant, décroissant).

Preuve. Unicité : Soit X un processus adapté intégrable. A processus prévisible tel que $A_0 = 0.$ X s'écrit : $X = M + A$

$$X_{n+1} - X_n = M_{n+1} - M_n + A_{n+1} - A_n$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1}-X_n\left|\mathcal{F}_n\right.\right] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1}-M_n\left|\mathcal{F}_n\right.\right]+\mathbb{E}\left[A_{n+1}-A_n\left|\mathcal{F}_n\right.\right] \\
&= 0+A_{n+1}-A_n \\
&= A_{n+1}-A_n \\
\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n &= A_{n+1}-A_n
\end{aligned}$$

Existence : On définit un processus prévisible A par A_0 et $A_{n+1}-A_n \stackrel{1}{=} \mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n$ le processus $M=X-A$ qui est adapté intégrable vérifie :

$$\begin{aligned}
M_{n+1}-M_n &= X_{n+1}-X_n-(A_{n+1}-A_n) \\
&= X_{n+1}-X_n-\left(\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n\right) \\
&= X_{n+1}-X_n-\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]+X_n \\
&= X_{n+1}-\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}-M_n\left|\mathcal{F}_n\right.\right]=\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]=0$$

et donc si X est une martingale, $M=X-A$ alors $A=0$ et $A_{n+1}-A_n=\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n=0,$ alors (A_n) est nulle si X est une sousmartingale c'est à dire $\left[\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n\right]$ ≥ 0 alors $.A_{n+1}-A_n\geq 0,$ d'où (A_n) est croissant si $\left[\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left|\mathcal{F}_n\right.\right]-X_n\leq 0\right]$ c'est à dire X est une surmartingale, d'où (A_n) est décroissante . La réciproque est vraie. ■

1.2 Généralités sur les processus à temps continu

1.2.1 Mouvement brownien

Nous donnons quelques éléments mathématiques nécessaires à la compréhension des modèles à temps continus. En particulier, nous introduirons le mouvement Brownien, qui est l'outil majeur du modèle de Black et Scholes et sert à construire la plupart des modèles d'actifs en finance. Puis nous étendrons la notion de martingale au cas du temps continu, enfin nous construirons l'intégrale stochastique d'Itô et nous introduirons le calcul différentiel qui lui est associé .

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le *mouvement Brownien.* Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.7 *On appelle mouvement brownien tout processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*
-continuité : $P\,ps$ *la fonction* $s \rightarrow X_s(\omega)$ *est une fonction continue.*
-indépendance des accroissements : si $s \leq t$*,* $X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u; u \leq s)$ *.*
-stationnarité des acroissements : si $s \leq t$*, la loi de* $X_t - X_s$ *est identique à celle de* $X_{t-s} - X_0$*.*

Définition 1.8 *1- Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité, une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*.*
La tribu $\mathcal{F}_t$ *représente l'information dont on dispose à l'instant* t*. On dit qu'un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, si pour chaque* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
2- On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *toute variable aléatoire* T *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *telle que, pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

On associe à un temps d'arrêt T *une tribu que l'on note* $\mathcal{F}_T$*, définie par :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F},\ \textit{pour tout}\ t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire T*.*

Définition 1.9 *Une martingale est un processus tel que la valeur à* t *est égale à l'espé-*

rance de la valeur future, conditionnellement à l'information disponible :

$$X_s = \mathbb{E}\left[X_t \left| \mathcal{F}_s \right.\right] \quad s < t.$$

De façon équivalente, l'espérance conditionnelle d'accroissement d'une martingale est nulle.

- On dit qu'un processus M adapté, et continu à droite à limite à gauche (càdlàg) est une martingale locale, s'il existe une suite croissante des temps d'arrêt $\{T_n\}$ tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} P\{T_n = T\} = 1$, et le processus $\{M(t \wedge T_n) ; 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale pour chaque n , donc le processus M est appelés processus arrété à l'instant T_n.

Lemme 1.1 [9] *Un processus positif X est une martingale si et seulement si X est une surmartingale et $\mathbb{E}(X_T) = X_0$.*

1.2.2 Quelques résultats

- Toute martingale locale positive est une surmartingale .

En effet **:** d'après le lemme de fatou conditionnel, on a :

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf M_s^{|T_n} = M_s = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \mathbb{E}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \inf M_t^{|T_n} \left| \mathcal{F}_s \right.\right) \geq \mathbb{E}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \inf M_t^{T_n} \left| \mathcal{F}_s \right.\right) = \mathbb{E}\left(M_t \left| \mathcal{F}_s \right.\right)$

d'où $\mathbb{E}\left(M_t \left| \mathcal{F}_s \right.\right) \leq M_s \, \forall s \leq t$

- Une martingale locale M, est une martingale si et seulement si : $\mathbb{E}(M_T) = M_0$

Ce ci découle du lemme 1.1.

Définition 1.10 *Un processus $A = \{A_t; 0 \leq t \leq T\}$ est dit de classe VF (à variation fini) s' il est adapté et càdlàg et de trajectoires à variation finie .*

Définition 1.11 *Un processus X est dit semimartingale s' il admet la décomposition suivante : $X = M + A$ où M est une martingale locale et A est un processus à variation finie.*

Définition 1.12 *Un processus H est dit localement borné s'il existe une suite de constantes $\{c_n\}$ et une suite croissante de temps d'arrêts $\{T_n\}$ tel que : $\lim_{n\to\infty} P\{T_n = T\} = 1$ et, $|H_t| \leq c_n$ pour $0 \leq t \leq T_n$, $n = 1, 2, ...$*

1.2.3 Variation quadratique

Définition 1.13 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2$ ($\sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$). D'aprés l'inégalité de Doob on a : $M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2$. Alors M^2 est une sousmartingale uniformiment intégrable (M^2 classe (D)) voir* [2]. *D'après la décomposition de Doob- Meyer il existe un unique processus prévisible croissant noté par : $\langle M, M\rangle$ ou $\langle M\rangle$, tel que $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_0$ (où $\mathcal{M}_0$ est l'espace des martingales uniformément intégrables nulles en zéro).*
$\langle M\rangle$ est appellé la variation quadratique prévisible de M. Soient $M, N \in \mathcal{M}^2$, on pose : $\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}[\langle M + N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle]$.
On appelle $\langle M, N\rangle$ covariation prévisible de M, N.

Définition 1.14 *Soient $M, N \in \mathcal{M}^2$. On pose :*

$$[M, N] = M_0 N_0 + \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N; \;\; t \geq 0 \tag{1.1}$$

où M^c, N^c sont les parties continues de martingales M et N respectivement. Alors $[M, N]$ est un processus adaptée à variation intégrable. $[M, M]$ est notée tout simplement par $[M]$ où $[M]$ est un processus croissant, intégrable, adapté, et $[M]$ est appelé la variation quadratique de M.
$[M, N]$ est appelé la covariation de M, N.

Remarque 1.1 *La formule (1.1) est équivalante à :*

$$[M, N] = M_0 N_0 + \lim_n \sum_{i=0}^{2^n} \left\{M\left(t_{i+1}^n\right) - M\left(t_i^n\right)\right\}\left\{N\left(t_{i+1}^n\right) - N\left(t_i^n\right)\right\} \tag{1.2}$$

où $t_i^n = \frac{it}{n}$ pour $n = 1, ..., 2$ et la série $\sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s$ est absolument convergente.

Définition 1.15 *Etant donné un prcessus X intégrable sous la probabilité P, on dit que X est localement intégrable s'il existe une suite de temps d'arrêt $\{T_n\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} P\{T_n = T\} = 1$ et $\{X(t \wedge T_n); 0 < t \leq T\}$ est intégrable pour chaque n.*

1.2.4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Dans le cas des modèles à temps discret, la valeur actualisée d'un portefeuille de valeur initiale V_0 et géré selon la stratégie autofinancée $\phi = (H_n)_{0\leq n\leq N}$ s'écrit :

$$V_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j \left(\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}\right).$$

Cette valeur apparait comme une *transformée de martingale* sous une probabilité pour laquelle le prix de l'actif actualisé $\left(\widetilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale. Dans le cas des modèles à temps continu, nous allons généraliser cette formule à l'aide d'intégrales du type $\int_0^t H_s d\widetilde{S}_s$.

1.2.5 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Nous allons donner un sens à $\int_0^t f(s,\omega)\, dW_s$ pour une classe de processus $f(s,\omega)$ adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dit *élémentaire*.

Définition 1.16 *On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega)\, \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$ et ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et borné.
L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition, le proces-

sus continu $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par, si* $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(W_t - W_{t_k}\right).$$

Noton que $I(H)_t$ *peut s'écrire :*

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq p} \phi_i \left(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}\right)$$

ce qui prouve la continuité de la fonction $t \to I(H)_t$*. On notera* $\int_0^t H_s dW_s$ *pour* $I(H)_t$*.*
On a alors le résultat essentiel suivant :
si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus élémentaire :*
-$\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-mesurable,*
-$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$
-$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right).$

1.2.6 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques .
On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô". La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier $t \to f(W_t)$ si f est une fonction deux fois continûment différentiable. Commençons par préciser la définition de la classe des processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Itô.

Définition 1.17 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace probabilisé muni d'une filtration et* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t$ *-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \; P.p.s,$$

avec :

-X_0 *variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$ *-mesurable.*

-$(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *des processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$

-$\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty \quad P\, p.s.$

-$\int_0^T |H_s|^2\, ds < +\infty \quad P\, p.s$

Proposition 1.3 *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \ \text{avec } P\, p\ s, \ \int_0^T |K_s|\, ds < +\infty,$$

alors

$$P\ p\ s\ \forall t \leq T,\ M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

-La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

alors :

$$X_0 = X_0^{'}\, dP\, p\, s,\ H_s = H_s^{'}\, ds \times dP\ p\, p,\ K_s = K_s^{'}\, ds \times dP\, p\, p$$

-Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale de la forme* $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$*, alors* $K_t = 0$ $dt \times dP \ \ p\,p.$

Théorème 1.4 *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

et f *une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f\left(X_t\right)=f\left(X_0\right)+\int_0^t f^{'}\left(X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f^{''}\left(X_s\right)d\left\langle X,X\right\rangle ,$$

où, par définition :

$$\left\langle X,X\right\rangle =\int_0^t H_s^2 ds$$

et :

$$\int_0^t f^{'}\left(X_s\right)dX_s=\int_0^t f^{'}\left(X_s\right)K_s ds+\int_0^t f^{'}\left(X_s\right)H_s dW_s.$$

De même si $(t,x)\rightarrow f(t,x)$ est une fonction deux fois différentiables en x et une fois différentiable en t, et ces dérivées sont continues en (t,x) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$), on a :

$$f\left(t,X_t\right)=f\left(0,X_0\right)+\int_0^t f_s^{'}\left(s,X_s\right)\,ds+\int_0^t f_x^{'}\left(s,X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}\left(s,X_s\right)d\left\langle X,X\right\rangle_s .$$

1.3 Théorème de Girsanov

1.3.1 Changement de probabilité

Proposition 1.4 *Soint P et Q deux probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F}_T)$.On suppose P et Q équivalentes. Alors il existe $(L_t,t\leq T)$, $P-(\mathcal{F}_t)-$martingale strictement positive telle que $Q=L_TP$ sur $\mathcal{F}_T$ et $Q_{/\mathcal{F}_t}=L_tP_{/\mathcal{F}_t}$, c'est-à-dire telle que $E_Q(X)=E_p(L_tX)$ pour tout variable X $Q-$intéqrable $\mathcal{F}_t-$mesurable pour $t\leq T$.De plus, $L_0=1$ et $E_p(L_t)=1$, $\forall t\leq T$*

Preuve. *Si la restriction de P et Q à $\mathcal{F}_T$ sont équivalentes, il existe une v.a. L_T $\mathcal{F}_T-$mesurable telle que $Q=L_TP$ sur $\mathcal{F}_T$ (Théorème de Radon-Nikodym). On dit que L_T est la densité de Q par rapport à P et $E_Q(X)=E_p(L_TX)$ pour toute variable X $\mathcal{F}_T-$mesurable et Q-intégrable. En particulier, L_T est strictement positive et $E_p(L_T)=1$.*

Soit $L_t=E_p(L_T/\mathcal{F}_t)$. Par construction $(L_t,t\leq T)$ est une martingale et est la densité $\mathcal{F}_t-$mesurable de Radon-Nikodym de Q par rapport à P sur $\mathcal{F}_t$. En effet, si X est

$\mathcal{F}_t-$mesurable et Q intégrable (par exemple bornée),

$$E_Q(X) = E_p(L_T X) = E_p\left[E_p(XL_T/\mathcal{F}_t)\right] = E_p\left[XE_p(L_T/\mathcal{F}_t)\right] = E_p(XL_t)$$

Il est à remarquer que dans ce cas, on a $P = (L_T)^{-1}Q$ et $E_p(Y) = E_Q(L_T^{-1}Y)$ et $(L_t^{-1}, t \leq T)$ est une Q-martingale.

On parlera de la loi d'une variable (d'un processus) sous P ou sous Q suivant que l'espace est muni de la probabilité P ou Q.Une propriété vraie $P-p.s.$ est vraie $Q-p.s.$ Il convient de faire attention aux propriétés d'intégrabilité, une v.a. P intégrable n'est pas nécessairement Q-intégrable ■

Proposition 1.5 *On a équivalence entre M est $Q-$martingale et LM est une $P-$martingale.*

Preuve. Soit M une $Q-$martingale. En utilisant la formule de Bayse et la propriété de $P-$martingale de L,on obtient, pour $s \leq t$,

$$M_s = E_Q(M_t/\mathcal{F}_s) = \frac{E_p(L_t M_t/\mathcal{F}_s)}{L_s}$$

D'où le résultat. La réciproque résulte de la formule de Bayes. ■

1.3.2 Théorème de Girsanov

On peut démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de Girsanov

Théorème 1.5 *Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique. soit*

$$L_t = \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right],\ t\ \leq\ T$$

où θ est un processus $(F_t)-$adapté (autrement dit $dL_t = L_t\theta_t dB_t$). On suppose $E(L_T) = 1$. soit $dQ/_{\mathcal{F}_T} \overset{def}{=} L_T dP/_{\mathcal{F}_T}$. le processus B_t s'écrit $B_t = \widetilde{B_t} + \int_0^t \theta_s ds$ où $\widetilde{B}$ est un $Q-$mouvement brownien.

Sous la condition de Novikov $E_p(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds) \langle \infty, L_T$ *est une variable postive d'espérance* 1 *sous* P *et* L *est une* $P-$*martingale.*

Si L *n'est pas d'espérance* 1, L *est une surmartingale d'espérance strictement plus petite que* 1.

Nous verrons plus loin pourquoi nous utilisons des martingales L *de cette forme.*

Preuve. *Dans le cas* $\theta = m(constante)$ *on utilise la caractérisation du Brownien par la propriété de martingale de* $\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$, *il faut donc montrer que* $\exp\left(\lambda \widetilde{B}_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ *est une* $Q-$*martingale, ou que*

$$L_t \exp\left(\lambda(B_t - mt) - \frac{\lambda^2}{2}t\right) = \exp\left((\lambda+m)B_t - \frac{1}{2}\left[2m\lambda + (m^2+\lambda^2)\right]t\right)$$

est une $P-$*martingale, ce qui est évident. Dans le cas général, on peut facilement vérifier que* $\widetilde{B}$ *est une* $Q-$*martingale, car* $\widetilde{B}L$ *est une* $P-$*martingale. Le crochet de la* $Q-$*semi martingale* B *est le même que celui de sa partie martingale, soit celui de la* Q*-martingale*$\widetilde{B}$ *. Le crochet ne dépendant pas du choix de la probabilité, le crochet de* B *est* t, *et le crochet de* $\widetilde{B}$ *est aussi* t. *On peut également vérifier que*$\widetilde{B}_t^2 - t$ *est une* $Q-$*martingale, car* $\left(\widetilde{B_t^2} - t\right) L_t$ *est une* P *martingale.*

Une façon d'utiliser le théorème de Girsanov est la généralisation suivante. ■

Proposition 1.6 *Soit* Z *une* $P-$*martingale locale continue et* Q *définie sur* $\mathcal{F}_t$ *par*

$$dQ = \exp(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)dP = L_t dP.$$

On suppose que Q *est une probabilité. Si* N *est une* $P-$*martingale locale continue, le processus* $\left(N_t - \langle N, Z\rangle_t = N_t - \frac{1}{L_t}\langle N, L\rangle_t, t \ \geq 0\right)$ *est une* $Q-$*martingale locale continue de crochet* $\langle N\rangle_t$.

Preuve. *La martingale* $L_t = \exp(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)$ *vérifie* $dL_t = L_t dZ_t$. *le processus* $(N_t - \langle N, Z\rangle_t, t \ \geq 0)$ *est une* $Q-$*martingale locale : il suffit de vérifier que* $(L_t N_t - L_t\langle N, Z\rangle_t, t \ \geq 0)$ *est une* $P-$*martingale locale par application de la formule d'Itô. Le crochet de* N *ne dépend pas de la probabilité sous laquelle on travaille (sous réserve que cette probabilité* *soit équivalente à la probabilité de départ), car le crochet est défini comme limite des variations quadratiques.*

Une autre façon d'écrire ce résultat est de se placer sur l'espace canonique. On obtient ainsi l'absolue continuité de $\boldsymbol{W}$ *(loi du Brownien) et* $\mathbf{W}^{(\nu)}$ *(loi du Brownien de drift* v*).*

$$\mathbf{W}^{(\nu)}/_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t\right)\mathbf{W}/_{\mathcal{F}_t} \tag{1.3}$$

Quelques mots d'explication. Dans le membre de droite, W *est l'application canonique. Elle est notée* W *pour faire penser au Brownien mais pourrait être notée* X *comme nous allons le faire (comme dans une intégrale, la variable muette peut s'appeler* x *ou* y*). Cette écriture traduit que*

$$\mathbf{W}^{(\nu)}\left(F(X_u, u \ \leq t)\right) = \mathbf{W}\left(\exp(\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t)F(X_u, u \ \leq t)\right)$$

pour toute fonctionnelle F*.*

Regardons le cas particulier $F(X_u, u \leq t) = f(X_t)$*. le terme* $\mathbf{W}^{(\nu)}(F(X_u, u \leq t))$ *est alors* $\mathbf{W}^{(\nu)}(f(X_t)) = E(f(W_t + vt))$ *où dans le terme de droit* W *est un brownien. (et donc* $(W_t + vt, t \geq 0)$ *un Brownien de drift* v*).le terme* $\mathbf{W}$ $(\exp(vX_t - \frac{v^2}{2}t)F(X_u, u \leq t))$ *est* $\mathbf{W}(exp(vX_t - \frac{v^2}{2}t)f(X_t)) = E(\exp(vW_t - \frac{v^2}{2}t)f(W_t))$ *où dans le terme de droit* W *est un brownien. Le théorème de Girsanov nous dit que si* W *est un brownien sous* P *et* $dQ/_{\mathcal{F}_t} = \exp(vW_t - \frac{v^2}{2}t)dP/_{\mathcal{F}_t}$*, alors*

$$E_p(\exp(vW_t - \frac{v^2}{2}t)f(W_t)) = E_Q(f(W_t)) = E_Q(f(\widetilde{W}_t + vt))$$

où $\widetilde{W}$ *est un Brownien sous* Q*. c'est exactement l'écriture* (1.3)*.*

Remarquer que ceci se généralise au cas où t *est un temps d'arrêt et aussi au cas où le changement de probabilité est de la forme* $\exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$.

On parle de formule de Cameron-Martin quand θ *est déterministe.*

Remarque 1.2 *En utilisant les formules exponentielles, on remarque que* L *est solution* *de* $dL_t = L_t\theta_t dB_t, L_0 = 1$. *il convient de remarquer que* P *s'obtient en fonction de* Q *par* $dP = L_T^{-1} dQ$,*avec*

$$L_T^{-1} = \exp\left[-\int_0^T \theta(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right].$$

Cette formule est souvent utile, mais il faut se souvenir que B *est un brownien sous* P. *Si l'on veut écrire* L *en terme de Brownien sous* Q, *on obtient*

$$L_T^{-1} = \exp\left[-\int_0^T \theta(s)d\widetilde{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right]$$

Le processus $(L_t^{-1}, t \geq 0)$ *est une* Q *martingale, et si* $X \in \mathcal{F}_T$ *on a* $E_p(X) = E_Q(L_T^{-1}X)$.

■

Chapitre 2

Evaluation en temps continu

2.1 Modèle de Black et Scholes (B.S).

Le problème traité par Black et Scholes dans [3] est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne distribuant pas de dividendes, Dans ce chapitre, nous donnons une présentation actualisée des travaux de Black et Scholes.

2.1.1 Discription du modèle

L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \tag{2.1}$$

où r est une contante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égale à r. On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dB_t \right) \tag{2.2}$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard. Le modèle à étudier sur l'intervalle $[0, T]$, où T est la date d'échéance de l'option à étudier.

Déterminons la solution de l'équation (2.2)

Pour déterminer S_t nous faisons d'abord un calcul formèl. Posons : $Y_t = \log S_t$ où S_t est la solution de l'équation (2.2), S_t est un processus d'Itô où $K = \mu S_t$ et $H_t = \sigma S_t$. Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ d'où

$$\begin{aligned}
\log S_t &= \log S_0 + \int_0^t \frac{1}{S_u} dS_u - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_u^2} d \langle S, S \rangle_u \\
&= \log S_0 + \int_0^t u du + \int_0^t \sigma dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 du \\
&= \log S_0 + \int_0^t \left(u - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \int_0^t \sigma dB_u,
\end{aligned}$$

d'où

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(u - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \text{ où } S_0 \text{ est le cours observé à la date 0.}$$

Vérifions que c'est bien la soulution de (2). $S_t = f(t, B_t)$ où

$$f(t, x) = x_0 \exp \left\{ \left(u - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma x \right\},$$

d'où

$$S_t = f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, B_s) ds + \int_0^t f_x^{'}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{''}(s, B_s) ds$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 + \int_0^t \left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_s\, dS + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s dS$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 + \int_0^t u S_s\, dS + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

$$\Rightarrow dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right).$$

Cette solution est évidement unique. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale). Plus précisément, on voit que le processus (S_t) vérifie une équation de type (2.2) si et seulement si le processus $(\log(S_t))$ est un mouvement brownien (non nécessairement standard). Compte tenu de la définition (1.7) du premier chapitre, cela signifie que le processus (S_t) vérfie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t$, $\frac{S_t}{S_u}$ ou (ce qui revient au même), l'accroissement relatif $\frac{(S_t - S_u)}{S_u}$ est indépendant de la tribu $\sigma\left(S_\nu;\ \nu \leq u\right)$, stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $\frac{(S_t - S_u)}{S_u}$ est identique à celle de $\frac{(S_{t-u} - S_0)}{S_0}$

2.1.2 Stratégies autofinancées

Une stratégie sera définie par un processus $\phi = (\phi_t)_{0\leq t\leq T} = (H_t^0, H_t)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ du mouvement brownien, les composantes H_t^0 et H_t de ϕ_t dennant, à l'instant t les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé les stratégies autofinancées par l'égalité : $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}\left(S_{n+1} - S_n\right)$. La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T \left|H_t^0\right| dt < +\infty \quad ps \quad \text{et} \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \quad ps.$$

Alors l'intégrale :

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt,$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T H_t dS_t = \int_0^T (H_t S_t \mu)\, dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t,$$

puisque la fonction $t \to S_t$ est continue, donc borné sur $[0, T]$, presque sûrement.

Définition 2.1 *Une stratégie autofinancée est définie par un couple ϕ de processus adapté $(H_t^0)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*
1) $|H_t^0|\, dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \quad ps$
2) $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_t^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$ $ps,$ pour tout $t \in [0, T]$.

2.2 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien standrad construit sur un espace probabilisé $(\Omega, F, \mathbf{P})$ et soit $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. Rappelons que si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté tel que $\mathbf{E}\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) \langle \infty$, le processus $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)$ est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

2.2.1 Théorème

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration $(F_t)_{0\leq t\leq T}$. il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que
$\mathbf{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) \langle +\infty$ et :

$$\forall t \in [0,T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \ p.s. \tag{2.3}$$

Notre que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien.

Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire F_T- mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :

$$U = \mathbf{E}(U) + \int_0^T H_s dB_s \qquad p.s.$$

où (H_t) est une processus adapté tel que $\mathbf{E}\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) \langle +\infty$. Il suffit pour cela de considérer la martingale $M_t = \mathbf{E}(U/F_t)$. On démontre aussi que si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation du type (2.3) mais avec un processus vérifiant seulement $\int_0^T H_t^2 ds \langle \infty$ p.s.

2.3 Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes

2.3.1 Determination d'Une probabilité sous laquelle $\left(\widetilde{S}_t\right)$ est une martingale

Nous allons montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale P, sous laquelle le prix actualisé $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ de l'action est une martingale. Daprès (2.2) on a :

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \widetilde{S}_t \left((\mu - r)\, dt + \sigma dB_t \right) \end{aligned}$$

et par conséquent, si on pose $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$,

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma dW_t \tag{2.4}$$

D'aprés le théorème 2.1, posant $\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma}t$, il existe une probabilité P^* équivalente à P sous laquelle $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard. On admetra, par la suite, que la définition de l'intégrale stochastique est invariante par changement de probabilité équivalente. Alors si on place sous la probabilité P^*, on déduit de l'égalité 2.4 que $\left(\widetilde{S}_t\right)$ est une martingale et que :

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}).$$

2.3.2 Pricing

Dans ce partie, nous nous limiterons aux options européennes. Une option européenne sera définie par une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, positive X . Le plus souvent, X est de la forme $f(S_T)$, où $f(x) = (x - K)_+$, dans le cas d'un call, et $f(x) = (K - x)_+$ dans le cas d'un put . Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option en la simulant . Pour des raisons techniques que nous avons déjà montionnées, nous limiterons la classes des stratégies admissibles de la façon suivante :

Définition 2.2 *Une stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée $\widetilde{V}_t(\phi) = H_0 + H_t\widetilde{S}$ du portefeuille correspondant est de carré intégrable sous P^* et pour tout t, $\widetilde{V}_t(\phi) \geq 0$. On note par Φ^* le classe de toutes les stratégies financées admissibles.*

Définition 2.3 *On appelle actif contingent toute variable aléatoire positive, et à carré intégrable sous la probabilité P^*. De plus on dira que :*
- L'actif contingent est dit simulable s'il existe une stratégie admissible $\phi \in \Phi^*$, tel que $\widetilde{V}_T(\phi) = \beta X_T$. Dans ce cas ϕ est dite génératrice de X et $\pi = \widetilde{V}_0(\phi)$ est appellé le prix associé à X, à l'instant $t = 0$.

Proposition 2.1 *L'unique prix π associé à l'actif simulable X est donné par $\mathbb{E}^*(\beta_T X)$.*

Commentaire : C'est un résultat direct de la définition de l'actif contingent qui est simulable.

Définition 2.4 *Le marché est dit complet si tout $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ est simulable .*

Corollaire 2.1 *Si $\mathbb{P}$ est singleton, alors le marché est complet .*

Théorème 2.1 *Dans le modèle de Black et Sholes, toute option définie par une variable aléatoire X positive, $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous P^* est simulable et la valeur à l'instant t de tout portefeuille simulant est donnée par :*

$$V_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} X \,|\mathcal{F}_t\right).$$

La valeur de l'option à l'instant t est donc définie de façon naturelle par l'expression :

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} X \,|\mathcal{F}_t\right).$$

Preuve. Supposons tout d'abord qu'il existe une stratégie admissible (H^0, H) simulante l'option . La valeur à l'instant t du potefeuille (H^0, H) est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

et l'on a, par hypothèse $V_T = X$. Soit $\widetilde{V}_t = e^{-rt} V_t = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t$ où $\widetilde{V}_t$ est la valeur actualisée. Puisque la stratégie est autofinancée, daprès le théorème 2.1 et l'égalité (2.3), on trouve :

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t H_u \sigma \widetilde{S}_u dW_u.\end{aligned}$$

Sous la probabilité P^*, $\widetilde{V}_t$ est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies, et l'égalité qui précéde fait apparaître le processus $\left(\widetilde{V}_t\right)$ comme une intgérale stochastique par rapport à (W_t). Il en résulte que $\left(\widetilde{V}_t\right)$ est, sous P^*, une martingale de carré intégrable. D'où :

$$\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^* \left(\widetilde{V}_T \left|\mathcal{F}_t\right.\right),$$

et par conséquent :

$$V_t = \mathbb{E}^* \left(e^{-r(T-t)} X \left|\mathcal{F}_t\right.\right).$$

cqfd. ■

2.3.3 Formule de Black et Scholes

Lorsque la variable aléatoire X est de la forme $f(S_T)$ on peut expliciter la valeur V_T de l'option à l'instant t comme fonction de t et S_t, en effet :

$$V_t = \mathbb{E}^* \left(e^{-r(T-t)} f(S_T) \left|\mathcal{F}_t\right.\right)$$

on a

$$S_T = e^{rT} S_0 e^{\left(\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right)}$$

et

$$S_t = e^{rt} S_0 e^{\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)}$$

$$\widetilde{S}_T = \widetilde{S}_t e\left(\sigma\left(W_T - W_t\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(T-t\right)\right)$$

d'où

$$V_t = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(e^{r(T-t)} S_t e^{\left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}\right) | \mathcal{F}_t\right],$$

la variable aleatoire S_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et, sous P^*, $W_T - W_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ on a donc $V_t = F\left(t, S_t\right)$ avec

$$F\left(t, S_t\right) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(e^{r(T-t)} S_t e^{\left(\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}\right)\right] \tag{2.5}$$

sous P^*, $W_T - W_t$ est une gaussienne centrée de variance $(T - t\ )$. Si on pose :

$$W_T - W_t = y\sqrt{T-t} = y' \Rightarrow dy' = dy\sqrt{T-t}$$

dans (2.5) on obtient

$$F\left(t, S_t\right) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y'}\right) \frac{e^{\frac{-y'^2}{2}}}{\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} dy'$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t\, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y\sqrt{T-t}}\right) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Nous nous limitons au calcule de F dans le cas du call qui nous permet d'en déduire le cas du put .

$$f\left(x\right) = \left(x - k\right)_+ ,$$

alors :

$$F(t,x)=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}-K\right)_+ \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy,$$

alors :

$$e^{r(T-t)}xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}-K\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\geq \frac{K}{x}e^{-r(T-t)}$$

$$\Longleftrightarrow y\geq \frac{\log\frac{K}{x}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-t\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

On pose

$$\alpha_1=\frac{\log\frac{K}{x}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-t\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

d'où

$$F(t,x)=\int_{-\infty}^{-\alpha_1} xe^{\left(\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy-\int_{-\infty}^{-\alpha_1} Ke^{-r(T-t)}\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy.$$

On note par

$$A=\int_{-\infty}^{-\alpha_1} xe^{\left(\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy$$

et

$$B = \int_{-\infty}^{-\alpha_1} Ke^{-r(T-t)} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

d'où

$$B = Ke^{-r(T-t)} N(-\alpha_1)$$

et

$$A = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\alpha_1} e^{\left(\frac{\left(y - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2} \right)} dy.$$

Soit

$$z = y - \sigma\sqrt{T-t}$$

car

$$-\alpha_2 = -\alpha_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$A = xN(-\alpha_2)$, d'où

$$F(t, S_t) = S_t N(-\alpha_2) - Ke^{-r(T-t)} N(-\alpha_1)$$

où K est le prix d'éxercice et x est le prix de l'actif . Maintenant si on a un put, le même calcul pour

$$f(x) = (K - x)_+$$

nous donne

$$F(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)} N(\alpha_2) - S_t N(\alpha_1).$$

2.3.4 Couverture des calls et des puts

Dans la démonstration du théorème 2.1, on a utilisé le théorème de représentation des martingales browniennes pour montrer l'existence d'un portefeuille simulant.

Dans la pratique on peut construire le portfeuille simulant pour couvrir une option et on ne peut pas se contenter d'utiliser un seul théorème d' existence.

Si l'option est définie par la variable aléatoire $X = f(S_T)$ on peut expliciter le portefeuille de couverture . A chaque instant t le portefeuille simulant doit avoir une valeur actualisée égale à

$$\widetilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t) \tag{2.6}$$

où F est définie par la relation (2.5).

Dans le cas du call et du put et avec les formules qu'on a vu $F \in C^\infty([0,T[\times \mathbb{R})$: si on pose

$$\widetilde{F}_t(t,x) = e^{-rt} F\left(t, xe^{rt}\right),$$

et $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}_t\left(t, \widetilde{S}_t\right)$ pour $t < T$ de la formule d'Itô :

$$\widetilde{F}_t\left(t, \widetilde{S}_t\right) = \widetilde{F}_t\left(0, \widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u, \widetilde{S}_u\right) d\widetilde{S}_u + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}\left(u, \widetilde{S}_u\right) du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}\left(u, \widetilde{S}_u\right) d\left\langle \widetilde{S}, \widetilde{S}\right\rangle_u$$

où

$$d\left\langle \widetilde{S}, \widetilde{S}\right\rangle_u = \left\langle d\widetilde{S_u}, d\widetilde{S}_u\right\rangle = \left\langle \widetilde{S}_u \sigma dW_u, \widetilde{S}_u \sigma dW_u\right\rangle = \widetilde{S}_u^2 \sigma^2 \left\langle dW_u, dW_u\right\rangle = \widetilde{S}_u^2 \sigma^2 d\left\langle W, W\right\rangle_u = \widetilde{S}_u^{2u} \sigma^2 du.$$

Donc

$$\widetilde{F}_t\left(t, \widetilde{S}_t\right) = \widetilde{F}_t\left(0, \widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u, \widetilde{S}_u\right) d\widetilde{S}_u + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}\left(u, \widetilde{S}_u\right) du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widetilde{\partial^2 F}}{\partial x^2}\left(u, \widetilde{S}_u\right) d\left\langle \widetilde{S}, \widetilde{S}\right\rangle_u$$

$$= \widetilde{F}_t\left(0, \widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u, \widetilde{S}_u\right) \widetilde{S}_u \sigma dW + \int_0^t \left[\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}\left(u, \widetilde{S}_u\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widetilde{\partial^2 F}}{\partial x^2}\left(u, \widetilde{S}_u\right) \widetilde{S}_u^2 \sigma^2\right] du$$

$$= \widetilde{F}_t\left(0,\widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\widetilde{S}_u \sigma dW + \int_0^t K_u du,$$

comme $\widetilde{V}_t. = \widetilde{F}_t\left(t,\widetilde{S}_t\right)$ est une martingale sous P^* , $K_u = 0$ d'après la proposition (1.3) d'où

$$\widetilde{F}_t\left(t,\widetilde{S}_t\right) = \widetilde{F}_t\left(0,\widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\widetilde{S}_u \sigma dW = \widetilde{F}_t\left(0,\widetilde{S}_0\right) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(u,\widetilde{S}_u\right) d\widetilde{S}_u.$$

Le processus de couverture est

$$H_t = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}\left(t,\widetilde{S}_t\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(t,S_t\right),$$

et comme

$$\widetilde{V}_t = \phi_t^0 + \phi_t \widetilde{S}_t = \widetilde{F}_t\left(t,\widetilde{S}_t\right)$$

alors

$$H_t^0 = \widetilde{F}_t\left(t,\widetilde{S}_t\right) - \phi_t \widetilde{S}_t$$

d'où le portefeuille (H_t^0, H_t) est autofinancé et sa valeur actualisée est bien

$$\widetilde{V}_t. = \widetilde{F}_t\left(t,\widetilde{S}_t\right).$$

Remarque 2.1 *Le raisennement qui précéde montre qu'on peut traiter les options de la forme $f(S_t)$ sans utiliser le théorème de représentation Brownienne.*

Remarque 2.2 *Dans le cas du call avec les notations précédentes*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = N(-\alpha_2)$$

et dans le cas du put

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -N(-\alpha_1)$$

2.4 Théorème de valorisation dans le cas multidimensionnel et avec coefficients de diffusion stochastiques

Soit un marché composé de $d+1$ actifs.

· un actif sans risque dont la diffusion sous la probabilité historique P est donnée par

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r_\tau d\tau$$

· d actifs risqués qui sous P ont la diffusion suivante :

$$\frac{dS^i_\tau}{S^i_\tau} = \mu^i_\tau d\tau + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{i,j}_\tau dW^p_j$$

ou avec des notations vectorielles

$$\frac{dS^i_\tau}{S^i_\tau} = \mu^i_\tau d\tau + \overrightarrow{\sigma^i_\tau}^{T_r}.\overrightarrow{dW^p}$$

avec $W = (W^p_1, ..., W^p_j ..., W^p_d)$ brownien d-dimmensionnel. On note F_τ la filtration naturelle associée à W.On suppose par ailleurs que

· r, μ et σ sont mesurables, F_τ-adaptés, uniformément bornés sur $[t,T]*\Omega; r$ est positif.

· La matrice σ_τ est inversible, son inverse est borné pour tout $\tau \in [t,T], \sigma_\tau$ est prévisible.

· une stratégie autofinaçante est le $d+1$-uplet $(\pi^i)_{0\leq i\leq d} = (\pi^0, (\pi^i)_{1\leq i\leq d})$ de processus F_τ adaptés et tels que si l'on note $\overrightarrow{\pi_\tau}$ le vecteur formé des d dernières coordonnées de $\overrightarrow{\pi_\tau}$ et $X_\tau = \pi^0 M_\tau + \overrightarrow{\pi_\tau}^{T_r}.\overrightarrow{S_\tau}$ la valeur en τ de la stratégie on ait

$$dX_\tau = \pi^0_\tau dM_\tau + \overrightarrow{\pi_\tau}^{T_r}.\overrightarrow{dS_\tau}$$

Théorème 2.2 *Dans le marché tel que définit précédemment on demontre que :*

$\cdot\exists$ *probabilité Q équivalente à P telle*

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \sum_{j=1}^{d} \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q$$

soit avec des notations vectorielles

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \overrightarrow{\sigma_\tau^i}^{T_r} . \overrightarrow{dW^Q}$$

$\cdot$ *quelque soit Z variable F_T-mesurable et telle que $E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} Z/F_t\right]$ alors il existe une stratégie autofinançante fondée sur les actifs de base (activ sans risque et les d actifs risqués) qui finance Z.*

$\cdot$ *et dont la valeur pour tout $\tau \in [t,T]$ est donnée par :*

$$C_\tau = E^Q\left[e^{-\int_\tau^T r_s ds} Z/F_\tau\right]$$

$\cdot$ *la diffusion de C_τ sous P peut s'écrire*

$$\frac{dC_\tau}{C_\tau} = \mu_\tau^c d\tau + \overrightarrow{\sigma_\tau^C}^{T_r} . \overrightarrow{dW^p}$$

avec $\mu_\tau^C = r_\tau + \overrightarrow{\sigma_\tau^C} . \overrightarrow{\lambda_\tau}$ avec $\overrightarrow{\lambda_\tau}$ vecteur de prime de risque indépendant de l'actif C.

Preuve. $\cdot$ on pose $\overrightarrow{\lambda_\tau} = \sigma_\tau^{-1}.\left[\overrightarrow{\mu_\tau} - r_\tau \overrightarrow{1}\right]$.Les hypothèses faites sur σ_τ,$\overrightarrow{\mu_\tau}$ et r_τ impliquent que $\overrightarrow{\lambda_\tau}$ est borné. On peut alors appliquer le théorème de Girsanov multidimentionnel qui montre qu'il existe probabilité Q équivalente à P sous laquelle on a :

$$\frac{dS_\tau^i}{S_\tau^i} = r_\tau d\tau + \sum_{j=1}^{d} \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q$$

avec $(dW_j^Q)_j$ brownien sous Q.

· sous cette probabilité Q les stratégies autofinaçantes vérifient :

$$dX_\tau = \pi_\tau^0 dM_\tau + \overrightarrow{\pi_\tau}^{T_r}.\overrightarrow{dS_\tau}$$

$$= \pi_\tau^0 dM_\tau + \sum_{i=1}^{i=a} \pi_\tau^i * dS_\tau^i$$

$$\begin{aligned} &= \pi_\tau^0 r_\tau M_\tau d_\tau + \sum_{i=1}^{i=d} \pi_\tau^i S_\tau^i r_\tau dr + \sum_{i=1}^{i=d} \pi_\tau^i S_\tau^i \left[\sum_{j=1}^{d} \sigma_\tau^{i,j} dW_j^Q \right] \\ &= X_\tau r_\tau d\tau + \overrightarrow{\theta_\tau}^{T_r}. \left[\sigma_\tau.\overrightarrow{dW^Q} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\overrightarrow{\theta} = \left| \begin{array}{c} \pi^1 * S^1 \\ \pi^2 * S^2 \\ \ldots \\ \pi^{d-1} * S^{d-1} \\ \pi^d * S^d \end{array} \right.$$

puis en posant

$$R_\tau = e^{-\int_t^\tau r_s ds} (= \frac{1}{M_\tau})$$

on obtient :

$$d(X_\tau R_\tau) = R(\tau)\, \overrightarrow{\theta_\tau}^{T_r}. \left[\sigma_\tau.\overrightarrow{dW^Q} \right]$$

soit encore :.

$$X_\tau R_\tau = X_t R_t + \int_t^\tau R_s \overrightarrow{\theta_s}^{T_r}. \left[\sigma_s.\overrightarrow{dW_s}^Q \right]$$

· on pose $N_\tau = E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} Z/F_\tau \right]$. N_τ est une martingal sous $\mathbf{Q}$, d'après le théorème de représentation des martingales il existe un processus $\overrightarrow{h_\tau}$ tel que $N_\tau = N_t + \int_t^\tau \overrightarrow{h_\tau}^{T_r}.\overrightarrow{dW}^Q$.

En identifiant N_τà $X_\tau R_\tau$, on pose :

$$\overrightarrow{\theta_\tau} = \frac{\left[\sigma_\tau^{Tr}\right]^{-1} \overrightarrow{h_\tau}}{R_\tau}$$

et l'on obtient : $N_\tau = N_t + \int_t^\tau R_s \overrightarrow{\theta_s}^{Tr}. \left[\sigma_s.\overrightarrow{dW_s}^Q\right]$ avec $N_T = e^{-\int_t^T r_s ds} Z$.

On conclut en posant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, .., d\} \\ \pi_i = \dfrac{\theta_i}{S_i} \\ \text{et} \\ \pi_\tau^0 = \dfrac{\frac{N_\tau}{R_\tau} - \sum_1^d \pi_i S_i}{M_\tau} \end{cases}$$

et en vérifiant que la stratégie obtenue est effectivement autofinançante et que sa valeur est X_τ avec

$$X_\tau = E^Q \left[e^{-\int_\tau^T r_s ds} Z / F_\tau\right]$$

■

2.4.1 rappel

Le théorème de représentation des martingales qui a été utilisé ici est une extension du théorème classique. Nous rappellerons ici l'énoncé, de cette extension :

Soit $(B_s)_{t\geq 0}$ un P-mouvement brownien, soit $F_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration. soit L_t un densité de Girsanov s'écrivant

$$L_t = e^{\left(\int_0^t h(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds\right)}$$

avec h bornée. On sait que $\widetilde{B_s} = B_s - \int_0^t h(s) ds$ est un Q-mouvement brownien.

En général, la filtration $\widetilde{F_t} = \sigma\left(\widetilde{B_s}, s \leq t\right)$ n'est pas égale à F_t. Cependant on peut montrer que le théorème de représentation prévisible des martingales est encore vérifié sous Q :

Tout $Q - F_t$ martingale continue s'écrit $\int_0^t \phi(s) d\widetilde{B_s}$, où ϕ est un processus prévisible satisfaisant :

$$\int_0^t \phi^2(s) ds \; \langle \; +\infty \text{ P-p.s. (ou P-p.s.)}$$

Définition 2.5 *Prix d'une obligation zéro coupon ou "strip" Une obligation zéro coupon est un actif qui verse un flux fixe à une date future T. On peut résumer cet actif plus généralement*

$$N * B(t,T)$$

avec N le notionnel de l'obligation Zéro-coupon et $B(t,T)$ le prix zéro-coupon.

Introduisons la notion corollaire de taux Zéro-coupon $R(t,T)$, qui est le taux de rendement actuariel du Zéro-coupon. la formule qui le définit est la suivante :

$$B(t,T) = \frac{1}{(1 + R(t,T))^{(T-t)}}$$

Remarque 2.3 *Les taux qui prévalent à chaque instant sur le marché résultent d'un équilibre entre l'offre et la demande de liquidité immédiate et à terme. Ils sont le reflet d'un équilibre macro économique qui s'établit entre les intervenants prêteurs et les intervenants emprunteurs.*

2.4.2 Formule BS avec taux d'intérêt stochastique

On se place à nouveau dans la configuration d'un call sur un actif ne versant pas de dividendes. Nous allons calculer la formule BS lorsque le taux court est stochastique. Supposons que dans notre monde multidimensionnel nous avons l'actif sans risque M, l'actif risqué et le Zéro-coupon maturant en T. D'après le théorème de valorisation précédent nous avons

$$C_t = E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right] \tag{2.7}$$

Avec sous Q :

$$\begin{aligned} \frac{dS_\tau}{S_\tau} &= r_\tau d\tau + \overrightarrow{\sigma_s}\overrightarrow{dW}^Q \\ \frac{dB_\tau}{B_\tau} &= r_\tau d\tau + \overrightarrow{\sigma_B}\overrightarrow{dW}^Q \\ \frac{dM_\tau}{M_\tau} &= r_\tau d\tau \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec donc, cette fois, r_τ stochastique.

Notons $\beta_\tau = e^{\int_0^\tau r_s ds}$.En appliquant Itô on montre facilement que :

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{S_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{S_\tau}{\beta_\tau}} &= \overrightarrow{\sigma_s}\overrightarrow{dW}^Q \\ \frac{d\frac{B_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{B_\tau}{\beta_\tau}} &= \overrightarrow{\sigma_B}\overrightarrow{dW}^Q \end{aligned} \tag{2.9}$$

posons maintenant :

$$L_\tau = \frac{B_\tau}{\beta_\tau}\frac{1}{B_0}$$

(2.9) implique que L_τ est une martingale sous Q strictement positive. par ailleurs $L_t = E^Q(L_T \diagup F_0) = 1.L_T$ peut donc s'interpréter comme une densité de Radon Nycodym $\frac{dQ^T}{dQ}$ caractérisant une probabilité Q^T dite probabilité forward neutre associée à la maturité T. par ailleur on remarque que :

$$\frac{dL_\tau}{L_\tau} = \frac{d\frac{B_\tau}{\beta_\tau}}{\frac{B_\tau}{\beta_\tau}} = \overrightarrow{\sigma_B}\overrightarrow{dW}^Q$$

et donc

$$L_\tau = e^{\left[\int_t^\tau \overrightarrow{\sigma_B}\overrightarrow{dW}^Q - \frac{1}{2}\int_t^\tau \overrightarrow{\|\sigma_B\|}^2 ds\right]}$$

Ainsi en appliquant le théorème de Girsanov on a

$$\overrightarrow{dW_\tau}^{Q^T} = \overrightarrow{dW_\tau}^{Q} - \overrightarrow{\sigma_B} d\tau$$

avec $\overrightarrow{dW_\tau}^{Q^T}$ brownien sous Q^T . L_τ s'écrit également en fonction de $\overrightarrow{dW_\tau}^{Q^T}$

$$L_\tau = e^{\left[\int_t^\tau \overrightarrow{\sigma_B}\overrightarrow{dW}^Q + \frac{1}{2}\int_t^\tau \overrightarrow{\|\sigma_B\|^2} ds\right]}$$

Montrons maintenant que $\frac{S_\tau}{B_\tau}$ et $\frac{\beta_\tau}{B_\tau}$ ainsi que $\frac{M_\tau}{B_\tau}$ sont martinguales sous Q^T :

$$\begin{aligned}
E^{Q^T}\left(\frac{S_\tau}{B_\tau}/F_s\right) &= \frac{E^Q\left(\frac{dQ^T}{dQ}\frac{S_\tau}{B_\tau}/F_s\right)}{E^Q\left(\frac{dQ^T}{dQ}/F_s\right)} \\
&= \frac{E^Q\left(\frac{B_\tau}{\beta_\tau}\frac{1}{B_0}\frac{S_\tau}{B_\tau}/F_s\right)}{E^Q\left(\frac{B_\tau}{\beta_\tau}\frac{1}{B_0}/F_s\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{B_0}E^Q\left(\frac{S_\tau}{\beta_\tau}/F_s\right)}{\frac{1}{B_0}E^Q\left(\frac{B_\tau}{\beta_\tau}/F_s\right)} \\
&= \frac{S_s}{B_\tau}
\end{aligned}$$

Un calcul similaire nous montre que $\frac{\beta_\tau}{B_\tau}$ ainsi que $\frac{M_\tau}{B_\tau}$ sont également martingales sous Q^T. On en déduit alors rapidement :

$$\frac{d\frac{S_\tau}{B_\tau}}{\frac{S_\tau}{B_\tau}} = \left[\overrightarrow{\sigma}_S - \overrightarrow{\sigma}_B\right]\overrightarrow{dW}^{Q^T} \tag{2.10}$$

ainsi que

$$\frac{d\frac{\beta_\tau}{B_\tau}}{\frac{\beta_\tau}{B_\tau}} = -\overrightarrow{\sigma}_B \overrightarrow{dW}^{Q^T} \tag{2.11}$$

Reformulons notre équation de valorisation (2.7)

$$C_t = E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right]$$

$$= \frac{E^{Q^T} \left[\frac{dQ}{dQ^T} e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right]}{E^{Q^T} \left[\frac{dQ}{dQ^T} / F_t \right]}$$

Calculons les deux termes de ce ratio. Au nominateur :

$$\begin{aligned}
& E^{Q^T} \left[\frac{dQ}{dQ^T} e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right] \\
= \; & E^{Q^T} \left[\frac{1}{L_T} e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right] \\
= \; & E^{Q^T} \left[\frac{1}{\frac{B_T}{\beta_T} \frac{1}{B_0}} e^{-\int_t^T r_s ds} \left(S_T - K \right)^+ / F_t \right] \\
= \; & B_0 E^{Q^T} \left[\left(S_T - K \right)^+ / F_t \right]
\end{aligned}$$

en remarquant que $B_T = 1$. Au dénominateur :

$$E^{Q^T} \left[\frac{dQ}{dQ^T} / F_t \right]$$

$$= E^{Q^T}\left[\frac{1}{L_T}/F_t\right]$$
$$= E^{Q^T}\left[\frac{1}{\frac{B_T}{\beta_T}\frac{1}{B_0}}/F_t\right]$$

$$= B_0 E^{Q^T}\left[\frac{\beta_T}{B_T}/F_t\right]$$

d'après l'équation (2.11)

$$E^{Q^T}\left[\frac{\beta_T}{B_T}/F_t\right] = \frac{\beta_t}{B_t}$$

d'où

$$E^{Q^T}\left[\frac{dQ}{dQ^T}/F_t\right]$$

$$= \frac{\beta_t}{B_t} * B_0$$

ainsi :

$$\begin{aligned} C_t &= E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\left(S_T - K\right)^+ /F_t\right] \\ &= B_t E^{Q^T}\left[\left(S_T - K\right)^+ /F_t\right] \\ &= B_t E^{Q^T}\left[\left(\frac{S_T}{B_T} - K\right)^+ /F_t\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

que l'on peut résoudre avec la connaissance de la diffusion de $\frac{S_\tau}{B_\tau}$ sous Q^T qui nous est justement donnée par (2.10). Si l'on suppose que $\overrightarrow{\sigma}_S - \overrightarrow{\sigma}_B$ n'est pas stochastique on obtient

$$C_t = B_t\left[\frac{S_t}{B_t}N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

avec

$\cdot\ d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{B_t}/K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$\cdot\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

$\cdot\ \sigma = \|\overrightarrow{\sigma}_s - \overrightarrow{\sigma}_B\|$

Soit si l'on pose $S_\tau^T = \dfrac{S_\tau}{B_\tau}$

$$C_t = B_t\left[S_t^T N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

avec

$\cdot\ d_1 = \dfrac{\ln(S_t^T/K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$\cdot\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

2.4.3 Prix Forward d'un actif

Le prix forward en t d'un actif pour un contrat forward maturant en T est tel que le prix en t des flux en T induits par le contrat forward est 0.

Soit, en notant P^f ce prix forward :

$$E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} P^f / F_t\right] = E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T / F_t\right]$$

Or d'aprés le théorème de valorisation de la section (2.4)

$$\begin{aligned}
E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} P^f / F_t\right] &= P^f E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} / F_t\right] \\
&= P^f E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} B(T,T) / F_t\right] \\
&= P^f B(t,T)
\end{aligned}$$

et

$$E^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T / F_t\right] = S_t$$

En conclusion :

$$P^f = \frac{S_t}{B(t,T)}$$

Où $B(t,T)$ est le prix en t du zéro-coupon maturant en T.

Un des traits majeurs du modéle de Black-Scholes (et une des raisons de son succés) est que les formules de prix obtenues, de même que les formules de couverture que nous donnerons plus loin, dépendent d'un seul paramétre non directement observable : le paramétre σ, appelé "volatilité" par les praticiens (le paramétre de dérive μ disparait sous l'effet du changement de probabilité).Dans la pratique, deux méthodes sont utilisées pour évaluer σ :

1- la méthode historique : dans le cadre du modèle, $\sigma^2 T$ est la variance de $log(S_T)$ et les variables $log(S_T \diagup S_0)$, $log(S_{2T} \diagup S_T)$,..., $log(S_{NT} \diagup S_{(N-1)T})$ sont indépendantes équidistribuées.Dés lors, on peut, à partir des valeurs du cours observées dans le paasé, estimer σ par des voies statistique (par exemple à l'aide de variances empiriques).

2-la méthode "implicite" : certaines options sont cotées sur des marchés organisés et le prix des options (call et puts) étant une fonction strictement croissante de σ, à chaque options cotée, on peut associer une volatilité "implicite", par inversion de la formule de Black-Scholes.le modèle ainsi identifié peut ensuite être utilisé pour les calculs de couverture.

Dans ces questions de volatilité, on se heurte vite aux imperfections du modèle de Black-Scholes : on constate des différences importantes entre volatilité historique et volatilité implicite et la volatilité implicite semble dépendre du prix d'exercice et de l'échéance.

Malgré ces incohérences, le modèle constitue une référence indispensable pour les praticiens.

Chapitre 3

Modèle de Smile

La présence de smile sur les marchés des taux, des actions et du change ont poussé les opérateurs à trouver des processus de diffusion des sous-jacents qui leur permettent d'expliquer le phénomène de "smile". l'objectif est double : il s'agit de pouvoir donner un prix à des payoffs où la réplication statique n'est pas enviseageable mais aussi de mieux se couvrir. Nous alons étudier 3 modèles à smile : le modèle" log-décalé", qui comme on le verra peut s'interpréter comme une combinaison linéaire d'un modèle normal et d'un modèle log-normal, le modèle "Dupire" à volatilité locale dépendant du temps et du niveau du sous jacent et enfin le modèle" SABR" où la volatilité dépend du sous-jacent mais également d'un paramètre stochastique non corrélé avec le sous jacent.

3.1 Volatilité Black-Scholes implicite et smile

Pour une date de maturité T (date fixée à l'avance) donnée sont côtés sur le marché un certain nombre de calls et de puts pour différents niveaux de strike K (le prix fixé d'avance). Or les cotations ne sont pas données en prix mais en terme de volatilité Black-Scholes, dite "volatilité implicite".

Si l'on note $F_{BS}^{K}(\sigma)$ la fonction telle que :

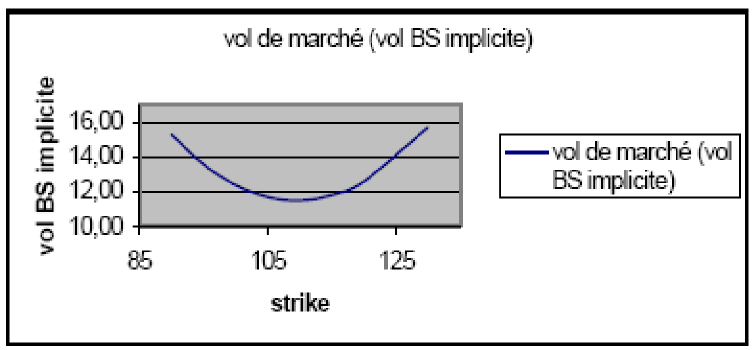
$$F_{BS}^{K}(\sigma) = C_{BS}(t, T, r, S, K, \sigma)$$

alors la volatilité implicite d'un call de strike K et de prix P_K est la valeur de $\sigma^{BS\ implicite}$ telle $F_{BS}^{K}(\sigma) = P_K$ .On a donc :

$$\sigma^{BS\ implicite} = F_{BS}^{K-1}(P_K)$$

Or sur de nombreux marchés on s'aperçoit la volatilité implicite dépend de K. Ce phénoméne est appelé "**smile**" du fait de forme de la fonction $\sigma^{BS\ implicite}(K)$. Nous en donnons un exemple numérique sur **la figure** 01.

spot		110							
T-t		2							
discount		0,9							
vol	strike	90	95	100	105	**110**	115	120	130
	vol de marché (vol BS implicite)	15,30	13,60	12,40	11,70	**11,50**	11,80	12,60	15,7
	prix du marché	29,72	25,33	21,09	17,14	13,64	10,81	8,78	6,92
	prix BS calculé avec la vol ATM	29,18	24,91	20,84	17,06	13,64	10,65	8,11	4,38



$Figure$ 01 : Smile

un tel phénomène vient contre dire l'hypothèse de diffusion que nous avions donnée à savoir que sous la probabilité historique on a :

$$\frac{dS_\tau}{S_\tau} = \mu d\tau + \sigma dW^p$$

$$\frac{dM_\tau}{M_\tau} = r d\tau$$

avec des coefficients μ,r et σ non stochastique. Le marché continue d'adhérer à la formalisation BS, sait qu'elle est fausse et apport des corrections qui se traduisent par l'apparition de smile.

Ce phénomène est très présent sur le marché des action, sur le marché des changes mais aussi sur le marché des taux d'intérêt.

3.2 Modèle log-décalé

On se place sous la probabilité forward neutre Q^T associé à la maturité T. Sous cette probabilité le prix forward de l'actif est martingale. La diffusion du sous-jacent s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dS_\tau^T}{S_\tau^T + m} = \sigma dW^{Q^T} \tag{3.1}$$

où m est un paramétre constant.

encore

$$\frac{dS_\tau^T}{S_\tau^T} = \sigma_{loc}(S_\tau^T) dW^{Q^T}$$

avec

$$\sigma_{loc}(S_\tau^T) = \sigma * \frac{S_\tau^T + m}{S_\tau^T}$$

3.2.1 Valorisation d'un call.

On se place dans le cadre du paragraphe 'formule BS avec taux d'intérêt stochastique' et l'on reprend le calcul de valorisation du call à partir de l'équation (2.12) .On pose

$$L_\tau = S_\tau^T + m$$

On a : $\cdot\ L_t = S_t^T + m$

$\cdot\ L_T = S_T^T + m$

$\cdot\ \dfrac{dL_\tau}{L_\tau} = \sigma dW^{Q^T}$

$\cdot\ C_t = B_t\ E^{Q^T}\left[\left(S_T^T - K\right)^+ / F_t\right] = B_t E^{Q^T}\left[\left(L_T - (K+m)\right)^+ / F_t\right]$

et donc :
$$\begin{aligned} C_t &= B_t\left[L_t N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right] \\ &= B_t\left[\left(S_t^T + m\right) * N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right] \end{aligned}$$

avec
$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_t^T + m}{K+m}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

3.2.2 Lien avec le modèle de taux Ho et Lee

Description du modèle de taux Ho et Lee [5]

Le modèle est binomial : chaque état e_t est suivi par deux états. notés $(e_t, 1)$ et $(e_t, 0)$ .Ainsi un état à t est caractérisé par une suite de t "chocs" égaux à 1 ou 0.

Quelque soit l'état $t \geq 1$, il existe un zéro-coupon pour toute maturité τ. Nous supposerons que les prix ne dépendent pas de l'ordre des chocs mais seulement du nombre des chocs 1 et 0 qui se sont produits. Aussi, si l'état e_t comprend n chocs 1 le prix d'un zéro-coupon de maturité τ dans cet état sera noté $p\left(e_t, \tau\right)$ ou $p\left(t, n, \tau\right).$ Cette hypothèse sera appelée condition d'indépendance.

Le prix dans l'état (t, n) d'un zéro-coupon de maturité τ est relié au prix à terme de la date précédente par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{c} p\left(t, n, \tau\right) = \dfrac{p\left(t-1, n, \tau+1\right)}{p\left(t-1, n, 1\right)} \times h^*(\tau) \\ \text{et} \\ p(t, n+1, \tau) = \dfrac{p\left(t-1, n, \tau+1\right)}{p\left(t-1, n, 1\right)} \times h(\tau) \end{array} \right.$$

Ainsi le prix au comptant dévie par rapport au prix à terme de la date précédente uniquement en fonction de la maturité et du choc : il s'obtient en multipliant le prix à terme par un facteur $h(\tau)$ ou $h^*(\tau)$ suivant que le choc a été 1 ou 0.Puisque le prix d'un coupon de maturité 0 est égal à 1, $h(0)$ et $h^*(0)$ doivent être égaux à 1.

Cette hypothèse restrictive mais simple semble bien adaptée au cas des zéro-coupons car la sensibilité de leur prix dépend principalement de leur maturité. Remarquons enfin que le processus suivi par le prix d'une action dans le modèle binomial ne peut en aucun cas être retenu pour un zéro-coupon : le prix de l'action peut prendre de plus en plus de valeurs différentes quand t augmente, alore que le prix d'un zéro-coupon est nécessairement égal à 1 à sa date de liquidation, quel que soit l'état.

Nous sommes en t. On cherche à valoriser un cap sur taux θM maturant en T.

On se place dans le cadre 'pre fixing post payment,

c'est-à-dire que payoff du cap fixe en T mais le payment est effectué en $T+\theta$ On note C_τ la valeur du cap en τ.On a :. $C_t = E^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds \right) * \left(Y_T - K\right) * B\left(T, T+\theta\right) / F_t \right]$

$$= E^Q \left[\exp\left(-\int_t^{T+\theta} r_s ds \right) * \left(Y_T - K\right) / F_t \right]$$

$$= B\left(t, T+\theta\right) E^{Q^{T+\theta}}\left[\left(Y_T - K\right)/F_t\right]$$

Le taux θM en T est donné par :

$$\frac{1}{1+\theta_{YT}} = B\left(T, T+\theta\right)$$

soit $Y_T = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{B\left(T, T+\theta\right)} - 1\right]$

posons $\quad Y_\tau^T = \frac{1}{\theta}\left[\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)} - 1\right]$

(il s'agit du taux forward).On a

$\cdot\ Y_\tau^T = Y_T$

$$\cdot\ \frac{dY_\tau^T}{1+\theta_{Y_\tau^T}} = \frac{d\left(\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)}\right)}{\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)}}$$

Dans le cadre du modéle Ho and Lee les prix zéro-coupon suivent sous la probabilité risque neutre la diffusion :

$$\frac{dB\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T\right)} = r_\tau d\tau + \sigma_{HL} * \left(T-\tau\right) dW^Q$$

On montre aisément en utilisant des raisonnements analogues à ceux développés dans le paragraphe 'formule BS avec taux d'intérêt stochastique' que $\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)}$ est une martingale sous $Q^{T+\theta}$. On en déduit que sous $Q^{T+\theta}$ on a :

$$\frac{d\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)}}{\frac{B\left(\tau, T\right)}{B\left(\tau, T+\theta\right)}} = -\sigma_{HL} * \theta * dW^{Q^{T+\theta}}$$

et donc

$$\frac{dY_\tau^T}{1+\theta_{Y_\tau^T}} = -\sigma_{HL} * \theta * dW^{Q^{T+\theta}}$$

soit encore

$$\frac{dY_\tau^T}{1/\theta + Y_\tau^T} = -\sigma_{HL} * \theta^2 * dW^{Q^{T+Q}}$$

Remarques et exemples numériques

Remarque 3.1 *Une bonne approximation des volatilités implicites est donnée par :*

$$\sigma_{BS}\left(S_t^T, K\right) = \sigma_{loc}\left(\frac{S_t^T + K}{2}\right) * \left[1 + \frac{1}{24} * \frac{\sigma_{loc}^{"}\left(\frac{S_t^T + K}{2}\right)}{\sigma_{loc}\left(\frac{S_t^T + K}{2}\right)} * \left(S_t^T - K\right)^2\right] \tag{3.2}$$

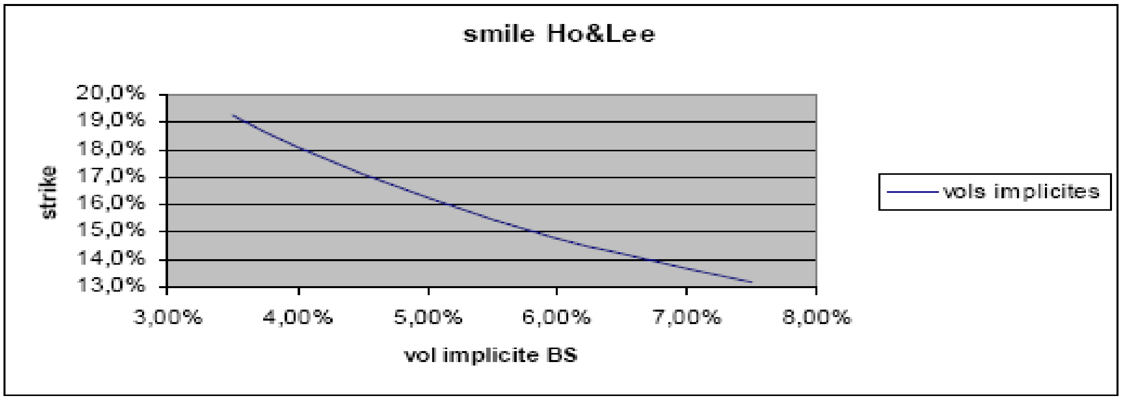
Remarque 3.2 *L'équation de diffusion (3.1) peut également s'écrire :*

$$dS_\tau^T = q\widetilde{\sigma}dW^{Q^T} + (1-q)\, S_\tau^T \widetilde{\sigma} dW^{Q^T}$$

avec $m = q\widetilde{\sigma}$ *et* $(1-q)\,\widetilde{\sigma} = \sigma$

Exemples numériques : cf figures 2 et 3.

S_t	5%	strike	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	5,50%	6,00%	6,50%	7,00%	7,5
T-t	2	prix	1,396%	1,008%	0,675%	0,411%	0,225%	0,109%	0,046%	0,017%	0,00
discount	0,9	BS implied vol	19,276%	18,088%	17,096%	16,230%	15,473%	14,801%	14,202%	13,665%	13,19
vol	0,2%	proxy (ATM)				16,20%					
m	4	proxy	19,22%	18,05%	17,06%	16,20%	15,45%	14,79%	14,19%	13,66%	13,1
volbar	16%										



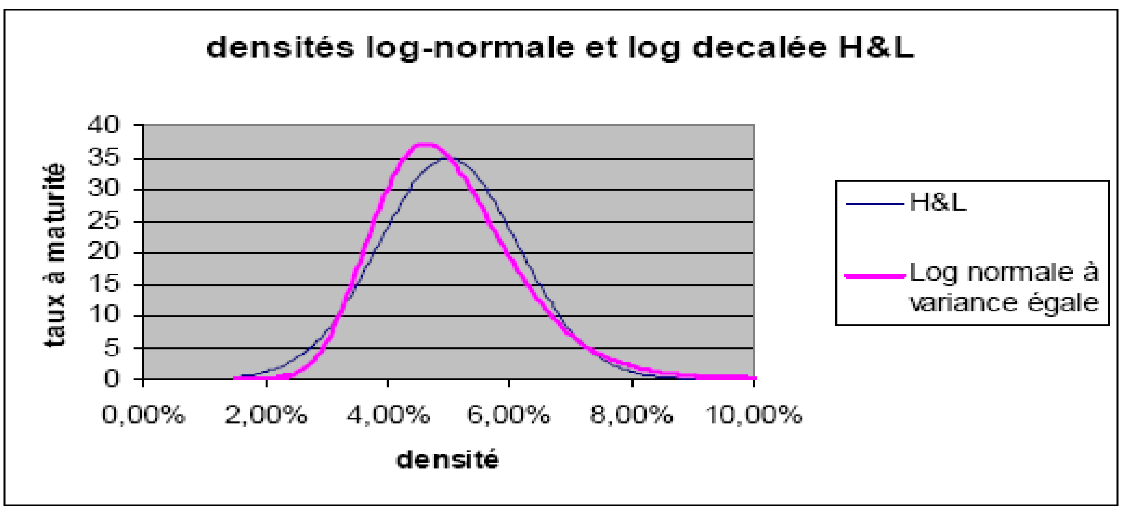
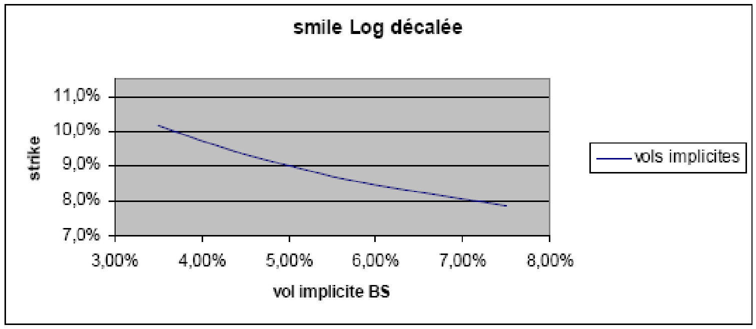


Figure 02 Log-Décalée : Modèle de taux Ho& Lee

S_t	5%	strike	3,50%	4,00%	4,50%	5,00%	5,50%	6,00%	6,50%	7,00%	7,50%
T-t	2	prix	1,351%	0,912%	0,518%	0,228%	0,073%	0,017%	0,003%	0,000%	0,000%
discount	0,9	BS implied vol	10,150%	9,709%	9,324%	8,998%	8,710%	8,462%	8,253%	8,065%	7,876%
vol	3,0%	proxy (ATM)				9,00%					
m	0,1	proxy	10,13%	9,69%	9,32%	9,00%	8,72%	8,47%	8,25%	8,05%	7,86%
volbar	9%										



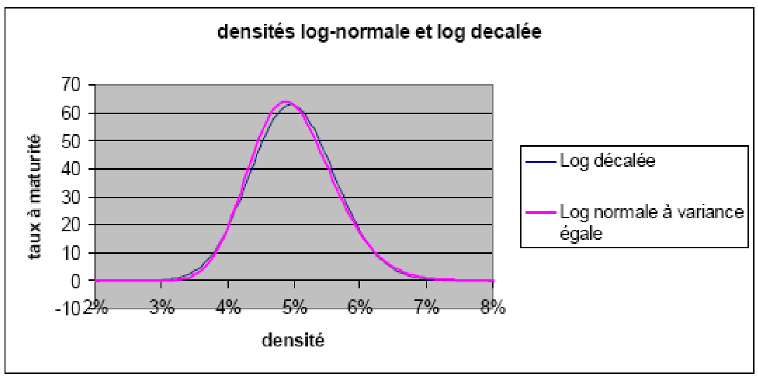


Figure 03 : Log-Décalée

3.3 Modèle à volatilité locale non paramétrique : modèle dit de 'Dupire'

3.3.1 Formule de Tanaka

La formule de Tanaka est une extension du lemme d'Itô que l'on applique aux distributions. Soit $f(t,x)$ une fonction et X un processus d'Itô qui s'écrit

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

On a :

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t^2}\sigma_t^2 dt$$

Où $\frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X_t}$ et $\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X_t^2}$ sont à prendre, si nécessaire, au sens des distributions.

3.3.2 Application

Equation de Focker-Plank

On prend $f(t,X_t) = \delta_x(X_t)$ et

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

On obtient :

$$d\delta_x(X_t) = \left[\delta_x'(X_t)\mu(t,X_t) + \frac{1}{2}\delta_x''(X_t)\sigma^2(t,X_t)\right]dt + \delta_x'(X_t)\sigma(t,X_t)dW_t$$

équation à laquelle on applique l'opérateur Espérance :

$$d\varphi_t(x) = \left[\frac{\partial_{\varphi_t(x)\mu(t,x)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_t(x)\sigma^2(t,X_t)}{\partial x^2}\right]dt$$

Or $\varphi_t(x) = \mathbb{E}\left[\delta_x(X_t)\right]$

et donc

$$\varphi_t(x) = \frac{\partial_{\varphi_t(x)\mu(t,x)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_t(x)\sigma^2(t,X_t)}{\partial x^2}$$

soit l'équation de Focker-Plank régissant la densité du processus X_t.

EDP suivi par le prix des calls et équation de la volatilité locale [8]

On prend $f(t,X_t) = (X_t - K)^+$ et

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

L'application de la formule de Tanaka nous donne :

$$d(X_t - K)^+ = \mathbf{1}_{\{X_t > K\}} dX_t + \frac{1}{2}\delta_K(X_t)\sigma^2(t,X_t)dt$$

soit, en appliquant l'opérateur espérance :

$$dE\left(X_t - K\right)^+ = \frac{1}{2}\varphi_t(K)\sigma^2\left(t,K\right)dt$$

On note $C\left(t,K\right)$ le prix au temps 0 d'un call de strike K maturant en t. En supposant les taux à zéro on a $C\left(t,K\right) = E\left(X_t - K\right)^+$ .L'équation précédante s'écrit :

$$\frac{\partial C(t,K)}{\partial t} = \frac{1}{2}\varphi_t(K)\sigma^2\left(t,K\right)$$

En utilisant le fait que

$$\varphi_t(K) = \frac{\partial^2 C(t,K)}{\partial K^2}$$

On obtient :

$$\sigma(t,K) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C(t,K)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(t,K)}{\partial K^2}}}$$

3.4 Modèle SABR (Sigma Alpha Beta Rho)

Le modèle SABR propose de ne pas réduire la stochasticité de volatilité locale à la seule dépendance de cette volatilité au sous jacent et ajoute une source de bruit supplémentaire. Le forward suit la diffusion suivante :

· $dF = F^{\beta}\sigma_{\beta}dW^1$

· $d\sigma_{\beta} = \alpha\sigma_{\beta}dW^2$

· $\langle dW^1 dW^2\rangle = \rho$

L'impact des paramètres sur la forme des smiles implicites est illustré par les figures 4 et 5.

Une augmentation du paramètre σ_{β} induit une translation du smile vers le haut. Une diminution du paramètre β accroit le 'skew' de même qu'une diminution du paramètre ρ. Enfin une augmentation du paramètre α, la volatilité de la volatilité σ_{β} accroit la convexité du smile. L'ajout d'une dimension stochastique pour la volatilité permet donc d'atteindre des smiles convexes qui n'étaient pas accesibles sous des modèles du type 'log-décalé'. Mais ce que permet surtout l'utilisation du SABR c'est un hedge plus compatible avec la dynamique du smile. À partir d'une analyse simple de la formule (3.2) pour le modèle log-décalé, l'évolution du forward, à paramètre m inchangé, fait évoluer le smile d'une façon qui peut être incompatible avec l'évolution réelle du smile de marché et induire un delta hedge moins efficace qu'un delta hedge évalué à partir d'un simple modèle BS.

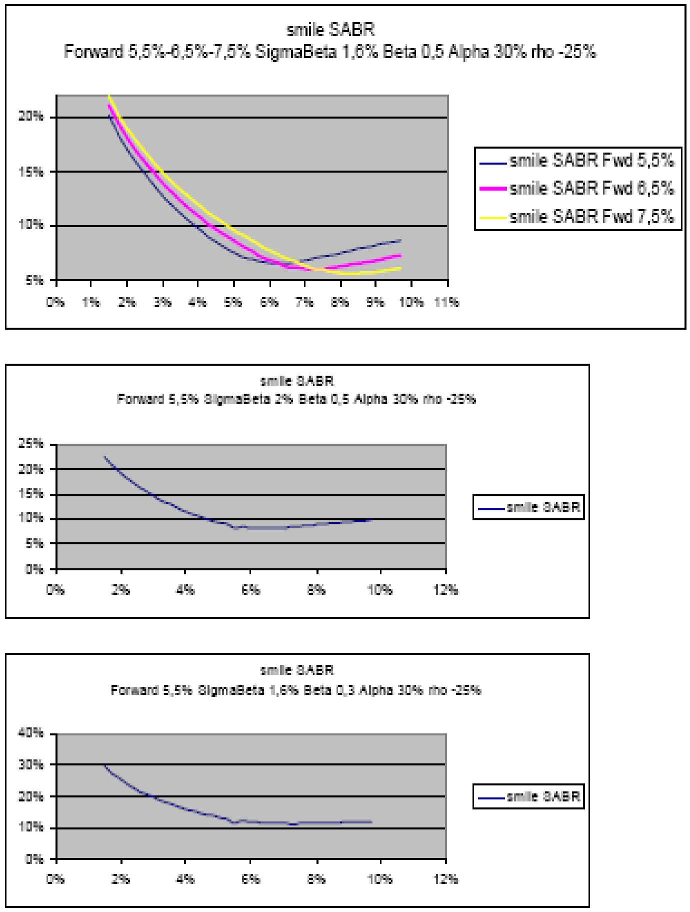
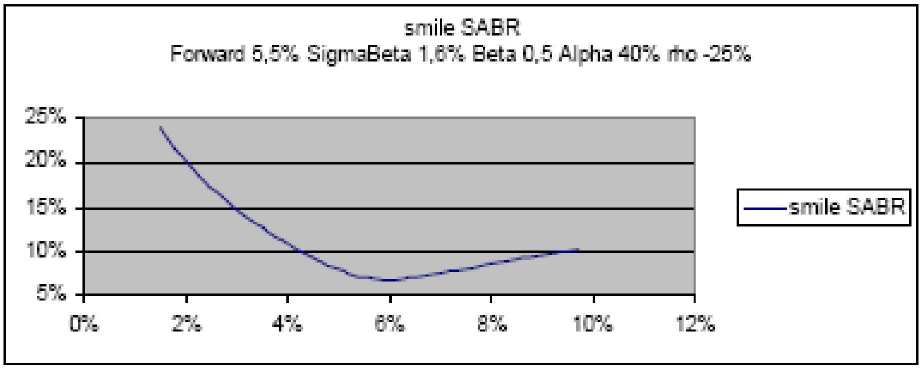


Figure 04 : Smile SABR 1



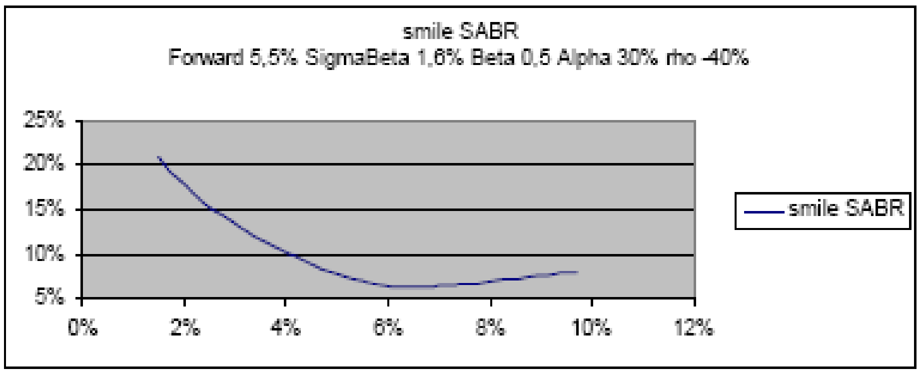


Figure 05 : Smile SABR 2

Bibliographie

[1] **Bouleau. N**, Processus stochastique et application, Hermann, 1998

[2] **Bates D.**, **(1996)**, "Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Process Implicit in Deutsche Mark Options", Review of Financial Studies 9 (1)

[3] **Black F. et Scholes M., 1973.** The pricing of Option and Corporate liabilities, Journal of political Economie 81, p. 673-659.

[4] **Demange G.et J-C. Rochet**. Methodes, mathématiques de la finance. 2^{ieme} Edition.Economica, **1997**

[5] **Derman E. and I. Kani, (1994), "Riding on a Smile", Risk 7 (2), 32-39.**

[6] **Duffie D. ,** Security Markets, Stochastic Models, Academic Press, **1988**.

[7] **Dupire B.**, **(1998)**, "Pricing and Hedging with Smiles", Volatility New Estimation Techniques for Pricing Derivatives, R. Jarrow (éd.), RISK Books.

[8] **Harrison, J. M. , Pliska, S. R. (1981)** : " Martingales and stochastic integrals in the Theory of continus trading ." Evaluation, Northwestern university.

[9] **Hull J. and A.White**, **(1987)**, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", Journal of Finance, 42 (2)

[10] **Hobson D.G. and L.C.G. Rogers**, **(1998)**, "Complete Models with Stochastic Volatility", Mathematical Finance, 8 (1)

[11] **Karatzas. I, S.E Shreve**, Brownian Motion and stochastic calculs, springer-Verlag, New York, **1988.**

[12] **Lamberton, D ., Lapeyre, B., (1992)** : "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance." Mathématique & Application, némuro 9, ellipses.

[13] **Merton. R.C..** Theory of rational option pricing. Bell J. of Econom. and Management Sci., 4 :141-183,**1973**

[14] **Revuz.A et Yor. M.** Continuous Martingale Calculus.Springer-Verlag, 1990

[15] **Dellacherie C. et Meyer P.A.** . Probabilities and Potential B : Theory of Martingales. North-Holland, Amsterdam, **1982**

[16] **P. Protter**. Stochastic Integration and Differential Equations : A New Approach. Springer-Verlag, 1990

: :