وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne
Démocratique et populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Université de 8 MAI 45
Guelma

جامعة 8 ماي 45
قالمـة

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département des Sciences Exactes

MÉMOIRE

En vue d'obtenir le diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

SEMI-GROUPES ET RÉSULTATS SPECTRAUX EN THÉORIE DE TRANSPORT

Option : Probabilités et Statistique

Par
LARIBI NAIMA
Sous la Direction du
Dr: DEHICI ABDELKADER

Devant le jury

PRESIDENT :	M. Z. AISSAOUI	M.C.	UNIVERSITÉ DE GUELMA
RAPPORTEUR :	A.DEHICI	M.C	UNIVERSITÉ DE GUELMA
EXAMINATEUR :	S. BADRAOUI	M.C.	UNIVERSITÉ DE GUELMA
EXAMINATEUR :	R. AMIAR	M.C.	UNIVERSITÉ DE ANNABA

Année : 2007-2008

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier chaleureusement Monsieur Abdelkader Dehici, maître de conférence à l'université de GUELMA qui a accepté de diriger ce travail. Ses conseils, sa patience m'ont permi d'effectuer mes travaux dans de bonnes conditions.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Messieurs M. Z. Aissaoui, S. Badraoui et Ma Dame R. Amiar qui m'ont honoré en acceptant de suivre ce travail et en voulant bien être des rapporteurs.

Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont soutenue durant toutes mes années d'études à mes frères Yacine et Abd el madjid ainsi qu'à mes soeurs Nouara, Hayette, Nabila et son mari, ses enfants Seif et Rim, à toute ma famille et mes amies Romaissa, Naima, Saliha, Assma.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier Messieurs N. Boussetila et A. Benchettah.

Résumé

Le projet de ce mémoire présenté ici a pour objectif principal l'étude du comportement asymptotique lorsque $t \mapsto +\infty$, des solutions des problèmes de Cauchy associés aux équations de transport avec des conditions aux bords abstraites. Il s'agit d'équations de type neutronique apparaîssant en cinétique des gaz complétées par des conditions aux bords qui sont modélisées par un opérateur frontière borné défini sur des espaces de traces convenables. Notre approche utilise les techniques de Jörgens-Vidav basées sur des résultats de compacité des restes de la série de Dyson-Phillips.

Mots clés : Théorie de transport, Théorie de génération, comportement asymptotique.

Abstract

The project of this thesis presented here aims at mainly the study of the time asymptotic behaviour of the Cauchy problems associated to the transport equations whith abstract boundary conditions. They are equations of neutronic type which are modelled by a bounded operator defined on a suitable spaces for traces. Our approach uses the techniques of Jôrgens-Vidav based on the compactness results of the remainders in the Dyson-Phillips expansion.

Key words : Transport theory, Generation theory, comportement asymptotic.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction Générale

Le projet de ce mémoire présenté ici a pour objectif principal l'étude du comportement asymptotique lorsque $t \mapsto +\infty$, des solutions des problèmes de Cauchy associés aux équations de transport avec des conditions aux bords abstraites. Il s'agit d'équations de type neutronique apparaîssant en cinétique des gaz complétées par des conditions aux bords qui sont modélisées par un opérateur frontière borné défini sur des espaces de traces convenables. Notre approche utilise les techniques de Jörgens-Vidav basées sur des résultats de compacité des restes de la série de Dyson-Phillips. Afin de rendre ce travail plus autonome et de limiter les renvois systématiques à la littérature, nous avons rappelé dans **le chapitre 2** quelques résultats classiques et définitions dont nous ferons usage dans ce travail.

CHAPITRE 3

Dans ce chapitre, on étudie la bien position du problème de Cauchy suivant dans les espaces $L^p(1 \leq p < +\infty)$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,v,t) + v\nabla_x\psi(x,v,t) = \Phi(\psi)(x,v,t),\ (x,v) \in \Omega \times V,\ t > 0 & (1.1) \\ \psi(x,v,0) = \psi_0(x,v),\ (x,v) \in \Omega \times V, & (1.2) \\ \psi_{|\Gamma_-}\ (x,v,t) = H\ (\psi_{|\Gamma_+})\ (x,v,t)\ \ ,(x,v) \in\ \Gamma_-\ ,\ t > 0\ . & (1.3) \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, V est le support d'une mesure de Radon $d\mu$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\psi_0 \in L^p(\Omega \times V, dxd\mu\ (v))$ $(1 \leq p < \infty)$. L'opérateur Φ à droite de (1.1) est un opérateur linéaire borné défini sur $L^p(\Omega \times V, dxd\mu\ (v))$.

Dans (1.3), Γ_- (respectivement Γ_+) désigne la partie rentrante (respectivement sortante) du bord de l'espace des phases $\Omega \times V$

$$\Gamma_{\mp} = \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ \ \mp v.\eta(x) > 0\}.$$

Où $\eta(x)$ est la normale extérieure unitaire au point $x \in \partial\Omega$. Les conditions aux bords (1.3) expliquent que le flux rentrant $\psi_{|\Gamma_-}$ est relié au flux sortant $\psi_{|\Gamma+}$ par un opérateur linéaire borné H défini sur des espaces de traces convenables. Le modèle cinétique (1.1) intervient dans différents domaines des sciences appliquées.

PHYSIQUIE MATHEMATIQUE :

Dans la théorie cinétique des gaz ou bien en théorie du transport, l'inconnue $\psi(x,v,t)$ représente la densité des particules (neutrons, molécules des gaz, etc) ayant la position $x \in \Omega$ et la vitesse $v \in V$ en un temps $t \geq 0$. Dans ce cas, $\Phi(\psi)$ représente l'interaction entre les particules et le milieu dûe aux collisions ([21] , [22] , [58]).

BIOLOGIE MATHEMATIQUE :

En dynamique des populations, la fonction $\psi(x,v,t)$ est la fonction de distribution des cellules ayant l'état (x,v) en un temps $t > 0$; $\Phi(\psi)$ représente donc la transition d'un état à un autre. On renvoie à [57] pour les équations de transport intervenant dans le contexte de la dynamique des populations et plus généralement à [11] pour des modèles cinétiques généraux.

Dans ce chapitre, on va focaliser notre attention sur l'influence de l'opérateur aux bords H sur la bien position du problème de Cauchy (1.1). On va considérer seulement le cas $\Phi = 0$ "sans collisions". On va adopter ici le cadre des semi-groupes et on va montrer que pour des opérateurs aux bords H tel que $\|H\| < 1$, l'opérateur d'advection T_H (de domaine incluant les condition aux bords (1.3))

$$T_H\psi(x,v) = -v\nabla_x\psi(x,v)$$

engendre un semi-groupe de classe C_0 dans l'espace $L^p(\Omega \times V, dxd\mu(v))$ $(1 \leq p < \infty)$ [27]. Le cas multiplicatif ($\|H\| \geq 1$) est plus compliqué. Ce cas intervient naturellement dans le cadre de la dynamique des populations.

En effet dans ce cas l'opérateur aux bords H modélise la loi de naissance de la population cellulaire. La question de la bien position ou non du problème (1.1) à été traitée par plusieurs auteurs, (voir par exemple [13], [14], [33]). Dans ce chapitre, on va présenter plusieurs approches pour attaquer cette question. Plus précisémemt, on va déterminer des conditions suffisantes sur l'opérateur aux bords H pour lesquelles l'opérateur d'advection T_H engendre un semi-groupe de classe C_0. Cette étude est faite à la fois dans le cadre monodimensionnel et multidimensionnel. Ces résultats vont être appliqués au cas des conditions aux bords intervenants dans des situations pratiques.

CHAPITRE 4

Compacité des restes $R_2(t)$ dans le cadre monodimensionnel réflexif.

La préoccupation de ce chapitre est l'étude du comportement asymptotique ($t \mapsto +\infty$) des solutions du problème de Cauchy (1.1) lorsque l'opérateur frontière H modélise des conditions aux limites réflexives (cadre monodimensionnel).

En théorie du transport l'étude du comportement asymptotique remonte aux travaux de J. Lehner et M. Wing [37] et K. Jörgens [30], quant à la littérature concernant le sujet, elle est vaste (voir par exemple [2], [3], [4], [9], [27], [33], [36]).

Pour l'analyse du comportement asymptotique des solutions du problème (1.1), on dispose essentiellement de deux approches. La première consiste à exprimer la solution comme transformée de Laplace inverse de la résolvante de l'opérateur de transport $T_H + K$ comme cela a été fait pour des modèles particuliers [36]. Cette technique a été systématisée par M. Mokhtar-Kharroubi [44]. Elle est basée sur deux arguments :

- $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\left[(\lambda - T_H)^{-1} K\right]^m$ est compact pour $(\mathrm{Re}\,\lambda > \eta)$ (1.4)
- $\lim\limits_{|\mathrm{Im}\,\lambda| \mapsto +\infty} \left\| \left[(\lambda - T_H)^{-1} K\right]^m \right\| = 0$ uniformément sur $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \omega, \omega > \eta\}$ (1.5)

Où η est le type du semi-groupe $\left(e^{tT_H},\ t \geq 0\right)$. Ainsi si (1.4) et (1.5) sont satisfaites, il est possible de décrire le comportement asymptotique des solutions $(t \mapsto +\infty)$ pour des données initiales régulières.

La seconde approche, dite du semi-groupe, dûe à Jörgens-Vidav [30] et [51] et est basée sur la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips. Cette approche a l'avantage de n'imposer aucune condition sur la donnée initiale.

Dans ce chapitre, on va établir la compacité du reste d'ordre deux de la série de Dyson-Phillips moyennant l'expression explicite du semi-groupe dans le cadre monodimensionnel réflexif.

Chapitre 2

Résultats préliminaires

2.1 Théorie spectrale des semi-groupes

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques résultats et définitions dont on aura besoin dans la suite. Dans ce qui suit, on considère un espace de Banach X dont la norme est notée $\|.\|$.

Définition 2.1.1 [47] :*On appelle C_0 semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X tels que :*

- $T(0) = I$ (*l'opérateur identité*).

- $T(t+s) = U(t)U(s)$ pour $t,\ s \geq 0$ (*propriété de semi-groupe*).

- $\lim\limits_{t\mapsto 0} \|T(t)x - x\| = 0 \ \ \forall\ x \in X$ (*continuité forte*).

A ce C_0 semi-groupe on peut associer un générateur A défini par

$$Ax = \lim_{t\mapsto 0}\frac{T(t)x - x}{t}$$

de domaine

$$D(A) = \left\{ x \in X : \ \lim_{t\mapsto 0}\frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Remarque 2.1.1 Le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ admet un unique générateur sur X.

Proposition 2.1.1 [47] *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X. Alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 0$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\ \forall t \geq 0.$$

De plus, $\forall x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$, est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X. Si $\omega = 0$, le C_0 semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ est dit uniformément borné. De plus, si $M = 1$, on dit que $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction. Le nombre ω est le type du semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$. Il est défini par :

$$\begin{aligned} \omega &= \inf_{t\geq 0}\left[\frac{\log\|T(t)\|}{t}\right] \\ &= \lim_{t\mapsto +\infty}\frac{\log\|T(t)\|}{t}. \end{aligned}$$

On note que si A est un opérateur linéaire sur X, l'ensemble résolvant A est un ouvert du plan complexe défini par :

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - A :\ D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif et} \\ &\qquad (\lambda - A)^{-1} :\ X \ \mapsto X \text{ est borné}\}. \end{aligned}$$

Le complémentaire, dans le plan complexe de $\rho(A)$ est le spectre de A, $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, on note $R(\lambda, A)$ la résolvante de A au point λ et

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}.$$

La fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ est holomorphe dans $\rho(A)$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.
On appelle borne spectrale de A $(s(A))$, le nombre

$$s(A) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

avec la convention $s(A) = -\infty$ si $\sigma(A) = \varnothing$ et $s(A) = +\infty$ si l'ensemble $\{\operatorname{Re}\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\} \cap [0, +\infty[$ est non borné. On note que le type ω du semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ possède les propriétés suivantes :

a) $r_\sigma(T(t)) = e^{\omega t}\ (t \geq 0)$, où $r_\sigma(T(t))$ est le rayon spectral de $T(t)$, c'est le rayon de la plus petite boule de centre 0 contenant le spectre de $T(t)$ i.e :

$$r_\sigma(T) = \max\{|\lambda| :\ \lambda \in \sigma(T)\}$$

b) $s(A) \leq \omega$ et donc

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A).$$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > \omega$,

$$R(\lambda, A) x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s) x ds \qquad (x \in X).$$

On note que la propriété c), qui dit que la résolvante de A est la transformation de Laplace du semi-groupe peut être le point de départ vers la caractérisation des générateurs des C_0 semi-groupes. C'est le théorème de Hille-Yosida qui donne cette caractérisation (voir, par exemple, [29] , [47]).

Théorème 2.1.1 **(Hille – Yosida)** : *A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$ vérifiant $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$ si et seulement si :*

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$

ii) $]\omega, +\infty[\subseteq \rho(A)$et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \ (\operatorname{Re} \lambda > \omega, \ n \geq 0).$$

Théorème 2.1.2 ***(Théorème de Lumer Phillips)*** *Soit A un opérateur de domaine $D(A)$ dans un espace de Banach X; les propositions suivantes sont équivalente :*

i) A est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X;

ii) A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.

Rappelons qu'un opérateur A dans $X = L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ est $m-$dissipatif s'il vérifie les condition suivantes :

$$\begin{cases} i) \ A \text{ est dissipatif} \\ ii) \ \operatorname{Im}(I - A) = X. \end{cases}$$

On dit que, A est un opérateur dissipatif dans $X = L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ si et seulement si :

$$\int_\Omega |\psi|^{p-2} \psi A \psi dx \leq 0, \ \forall \psi \in D(A)$$

Si $X = L^1(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors A est un opérateur dissipatif si et seulement si :

$$\int_\Omega sign \ \psi A \psi dx \leq \int_{[\psi = 0]} |A\psi| \, dx$$

tel que :

$$sign\ \psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \psi(x) > 0 \\ 0 \text{ si } \psi(x) = 0 \\ -1 \text{ si } \psi(x) < 0 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 *Un C_0 groupe sur X est une famille d'opérateurs $(T(t),\ t \in \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(X)$ vérifiant les conditions de la définition (2.1.1) avec $\mathbb{R}^+$ remplacé par $\mathbb{R}$. Le générateur A d'un C_0 groupe $(T(t), t \in \mathbb{R})$ sur X est défini par*

$$Ax = \lim_{t \mapsto 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

de domaine

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \mapsto 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Théorème 2.1.3 *On note que A est un générateur d'un C_0 groupe $(T(t), t \in \mathbb{R})$ si et seulement si : $\pm A$ engendrent des C_0 semi-groupes $T_{\pm}(t)$. Dans ce cas,*

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t), & t \geq 0 \\ T_-(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

On rappelle maintenant le théorème classique de Phillips [10] et un résultat de comparaison des rayons spectraux des semi -groupes perturbés.

Théorème 2.1.4 ***(Théorème de Phillips)*** *Soient X un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$ sur X vérifiant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Si $\beta \in \mathcal{L}(X)$, alors $A + \beta$ engendre un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X vérifiant*

$$\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|\beta\|)t} \ \forall t \geq 0$$

De plus , $\forall x \in X$ et $t \geq 0$ on a :

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\beta S(s)x ds \tag{2.1}$$

On note que le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est donné, en itérant l'équation (2.1), au moyen de la série de Dyson-Phillips

$$S(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} T_j(t) \tag{2.2}$$

où

$$T_0(t) = T(t)$$

et

$$T_j(t) = \int_0^{+\infty} T(s)\,\beta T_{j-1}(t-s)\,ds \quad (j \geq 1).$$

La série (2.2) converge dans $\mathcal{L}(X)$ uniformément sur les intervalles bornés. De plus le reste d'ordre n de cette série est donné par

$$R_n(t) = \sum_n^{+\infty} T_j(t)$$

et

$$R_n(t) = \int_{s_1+s_2+....+s_n \leq t} T(s_1)\,\beta....T(s_n)\,\beta S\left(t - \sum_{i=1}^n s_i\right) ds_1...ds_n,\ s_i \geq 0 \tag{2.3}$$

Soit $C \in \mathcal{L}(X)$. Le rayon spectrale essentiel de C est défini par

$$\begin{aligned} r_e(C) &= \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(C) \text{ n'est pas une valeur} \\ &\qquad \text{propre de multiplicité algébrique finie}\} \end{aligned}$$

Le comportement asymptotique du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ $(t \mapsto +\infty)$ peut être décrit en analysant directement son spectre, une telle démarche permettre d'obtenir des estimations portant sur son type essentiel et son rayon spectral essentiel qu'on définit, respectivement, par

$$\begin{aligned} \omega_e(S(t)) &= \inf\{\omega \in \mathbb{R};\ \exists P_j \in \mathcal{L}(X) \text{ une projection de rang fini qui commute} \\ &\qquad \text{avec } (S(t))_{t\geq 0},\ \exists M \geq 1;\ \|(I-P_j)S(t)\| \leq Me^{\omega t}\}. \end{aligned}$$

On note que $\omega_e \in [-\infty, \omega]$ et

$$r_e(S(t)) = e^{\omega_e t} \quad t \geq 0$$

(voir [45] ou [53]). On énonce maintenant le résultat suivant de comparaison.

Théorème 2.1.5 [45] *On suppose que X est isomorphe à un certain L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ où à $C(\Sigma)$ avec Σ un compact. Alors, avec les notations ci-dessus, si un certain reste de la série de Dyson-Phillips $R_n(t)$ est compact pour $t \geq t_0$, alors*

$$r_e(S(t)) = r_e(T(t)) \quad \forall t \geq 0$$

2.2 Cadre fonctionnel

Soit

$$X_p = L^p(\Omega \times V,\ dxd\mu(v)) \quad (1 \leq p < \infty).$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$. La frontière de l'espace des phases $\partial\Omega \times V$ est donnée par :

$$\partial\Omega \times V = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_0$$

où

$$\Gamma_\pm = \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ \ \pm\, v.\eta(x) > 0\}$$

et

$$\Gamma_0 = \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ v.\eta(x) = 0\}\,.$$

On définit l'espace de Sobolev partiel par :

$$W_p = \{\psi \in X_p;\ v.\nabla_x\psi \in X_p\}\,.$$

Les espaces des traces appropriés sont définis par :

$$L^P_\pm = L^P(\Gamma_\pm,\ \ |v.\eta(x)|\, d\gamma(x)d\mu(v)).$$

Pour tout $\psi \in W_P$,on peut trouver $\psi_{|_{\Gamma_\pm}} \notin L^p_\pm$: pour cela on définit :

$$\widetilde{W_p} = \left\{\psi \in W_P;\ \psi_{|_{\Gamma_\pm}} \in L^P_\pm \right\}.$$

Soit $H \in \mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)$ ($1 \leq p < +\infty$). On lui associe l'opérateur libre d'advection

$$\begin{cases} T_H : & D(T_H) \in X_P \mapsto X_P \\ & \varphi \mapsto T_H\varphi(x,v) = -v.\nabla_x\varphi(x,v) \end{cases}$$

de domaine

$$D(T_H) = \left\{\psi \in \widetilde{W_P};\ \psi_{|_{\Gamma_-}} = H(\psi_{|_{\Gamma_+}})\right\}.$$

Un rôle crucial va être joué dans la suite par ce qu'on appelle le temps de Séjour de la particule dans Ω.

Définition 2.2.1 *Pour tout* $(x,v)\in\overline{\Omega}\times V$, *on définie*

$$\begin{aligned} t(x,v) &= \sup\{t>0;\ x-sv\in\Omega,\ \forall s,\ 0<s<t\} \\ &= \inf\{s>0,\ x-sv\notin\Omega\}. \end{aligned}$$

Pour la convenance, on pose

$$t(x,v)=\tau(x,v)\ si\ (x,v)\in\partial\Omega\times V.$$

D'aprés le point de vue heuristique, $t(x,v)$ est le temps mis par un neutron, ayant la position $x\in\Omega$ et la vitesse $-v\in V$, pour atteindre (pour la première fois) le bord $\partial\,\Omega$. D'autre part [54] montre que $\tau(x,v)=0$ pour tout $(x,v)\in\Gamma_-$ et si $v.\eta(x)>0$, $\tau(x,v)>0$.

En particulier,

$$\{(x,v)\in\Gamma_+;\ \tau(x,v)=0\ \}=\{(x,v)\in\Gamma_+;\ v.\eta(x)=0\}.$$

de plus, $\forall(x,v)\in\overline{\Omega}\times V$.

$$(x-t\,(x,v)\,v,v)\in\Gamma_-.$$

Etablissons maintenant la résolvante de T_H. $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda>0$, on définit

$$\begin{cases} M_\lambda: \quad L^p_-\mapsto L^p_+ \\ \qquad u\mapsto M_\lambda u(x,v)=u(x-\tau(x,v)v,v)e^{-\lambda.\tau(x,v)},\ (x,v)\in\Gamma_+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\lambda: \quad L^p_-\mapsto X_p \\ \qquad u\mapsto B_\lambda u(x,v)=u(x-t(x,v)v,v).e^{-\lambda t(x,v)},\ (x,v)\in\Omega\times V \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_{\lambda:}: \quad X_p\mapsto L^p_+ \\ \qquad \varphi\mapsto G_\lambda\varphi(x,v)=\displaystyle\int_0^{\tau(x,v)}\varphi(x-sv,v)e^{-\lambda s}ds,\ (x,v)\in\Gamma_+ \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} C_\lambda:\ X_p\mapsto X_p \\ \qquad \varphi\mapsto C_\lambda\varphi(x,v)=\displaystyle\int_0^{t(x,v)}\varphi(x-tv,v)e^{-\lambda t}dt,\ (x,v)\in\Omega\times V. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, tous ses opérateurs sont bornés. Plus précisément, pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\|M_\lambda\| &\leq 1, \\
\|G_\lambda\| &\leq (q\operatorname{Re}\lambda)^{-\frac{1}{q}} \\
\|B_\lambda\| &\leq (p\operatorname{Re}\lambda)^{-\frac{1}{p}}, \\
\|C_\lambda\| &\leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}$$

La résolvante de T_H est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 *Soit $H \in \mathcal{L}(L^p_+, L^p_-)$ tel qu'il exist λ_0 avec $r_\sigma(M_\lambda H) < 1 \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$. Donc, pour $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$*

$$(\lambda - T_H)^{-1} = B_\lambda H(I - M_\lambda H)^{-1}G_\lambda + C_\lambda.$$

pour plus de détails voir [8]

Chapitre 3

Propriétés de génération de semi-groupes

Dans ce chapitre, on va étudier la bien position de problème de Cauchy (0.1) avec des conditions aux bords abstraites. On commence d'abord par le cadre contractif $\|H\| < 1$.

3.1 Cas contractif

On rappelle ici le résultat bien connu de génération concernant les conditions aux bords de contractions. On peut trouver sa preuve dans [8]. On donne ici une preuve classique de ce résultat qui va jouer un rôle important dans la suite.

Théorème 3.1.1 *Soit $H \in \mathcal{L}(L_+^P, L_-^P)$ ($1 \leq p < +\infty$) tel que $\|H\| < 1$. Alors, T_H engendre un C_0 semi-groupe de contraction dans X_p.*

Preuve. La preuve consiste à montrer que T_H est dissipatif. Il s'ensuit de la proposition (2.1.1), que $\{\lambda \in \mathbb{C}\ ,\ \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \subseteq \rho\,(T_H)$, où $\rho\,(T_H)$ désigne l'ensemble résolvant de T_H (en particulier T_H est fermé). Considérant d'abord le cas $1 < p < \infty$.
Soit $\psi \in D(T_H)$, on a

$$v\ .\nabla_x(|\psi|^p)(x,v) = p\,|\psi|^{p-2}\,(x,v)\psi(x,v)(v.\nabla_x\psi(x,v))$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\left\langle T_H\psi, |\psi|^{p-2}\,\psi\right\rangle &= \int_{\Omega\times V}|\psi|^{p-2}\,(x,v)\psi(x,v)(-v.\nabla_x\psi(x,v))dxd\mu(v)\\ &= -\frac{1}{p}\int_{\Omega\times V} v\ .\nabla_x\left(|\psi|^p\right)(x,v)dxd\mu(v).\end{aligned}$$

La formule de Green donne

$$\begin{aligned}
\left\langle T_H\psi, |\psi|^{p-2}\psi\right\rangle &= -\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega\times V} |\psi|^p(x,v)v.\eta(x)d\gamma(x)d\mu(v) \\
&= \frac{1}{p}\int_{\Gamma_-}\left|\psi_{|\Gamma_-}(x,v)\right|^p |v.\eta(x)|\ d\gamma(x)d\mu(v) \\
&\quad -\frac{1}{p}\int_{\Gamma_+}\left|\psi_{|\Gamma_+}(x,v)\right|^p |v.\eta(x)|\ d\gamma(x)d\mu(v) \\
&= \frac{1}{p}(\left\|\psi_{|\Gamma_-}\right\|^p_{L^P_-} - \left\|\psi_{|\Gamma_+}\right\|^p_{L^P_+}).
\end{aligned}$$

Puisque H est contractif et $\psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+})$, on déduit que

$$\left\langle T_H\psi, |\psi|^{p-2}\psi\right\rangle < 0.$$

Pour $P = 1$, on montre d'une façon analogue que

$$\langle T_H\psi, sign\ \psi\rangle < 0\ \forall\psi \in D(T_H).$$

Maintenant, soit $\psi \in D(T_H)$ et $\operatorname{Re}\lambda > 0$ est fixé. Posons

$$\varphi = (\lambda - T_H)\psi$$

on note

$$\psi^* = \begin{cases} |\psi|^{p-2}\psi & si\ 1 < p < \infty \\ sign\ \psi & si\ p = 1. \end{cases}$$

On a

$$Re\lambda\,\|\psi\|^p = \operatorname{Re}\langle\lambda\psi, \psi^*\rangle\,.$$

De plus

$$\begin{aligned}
Re\lambda\,\|\psi\|^p &\leq \operatorname{Re}\langle\lambda\psi, \psi^*\rangle - \langle T_H\psi, \psi^*\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle\lambda\psi - T_H\psi, \psi^*\rangle \leq \|\varphi\|\,\|\psi\|^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que, pour tout $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

$$\|\psi\| \leq \frac{\|\varphi\|}{\operatorname{Re}\lambda},$$

C'est à dire que :

$$\left\|(\lambda - T_H)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \qquad (Re\lambda > 0) \tag{3.1}$$

La preuve découle donc du théorème de Lumer-Phillips. ■

Remarque 3.1.1 Notons que, si on remplace la condition de contraction par

$$\|H\psi\| = \|\psi\| \qquad \forall \psi \in L^P_+,$$

l'inégalité (3.1) reste valable, dans la preuve du théorème précédent. En effet

$$\langle T_H\psi, \psi^*\rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(T_H).$$

Malheureusement, ce n'est pas une condition suffisante de montrer que T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_p. Comme le montre l'exemple suivant dû à J. Voigt [8] .

Exemple 3.1.1 considérons le modèle de transport suivant dans L_1.
On définit

$$\Omega =]0,1[\ \ et \ V = [0,+\infty[$$

et on suppose que $d\mu$ est la mesure de Lebesgue sur V. Alors

$$\Gamma_+ = \{1\} \times V$$

et

$$\Gamma_- = \{0\} \times V,$$

donc

$$L^P_\pm = L^1([0,\infty[, vdv).$$

Et soit l'opérateur de trace

$$H(\psi(1,.)) = \psi(0,.) \qquad \forall \psi \in W_1.$$

On va prouver que T_H n'est pas un opérateur fermé dans X_1. Soit $h \in L^1([0,+\infty[, dv)$ tel que

$$\int_0^{+\infty} |h(v)|\, vdv = \infty \quad . \tag{3.2}$$

Par exemple

$$h\,(v) = \frac{1}{1+v^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on désigne

$$\varphi_n(x,v) = \begin{cases} h(v) \; si \; 0 < v < n \\ 0 \qquad sinon \end{cases}.$$

Il est clair que $\varphi_n \in W_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, puisque

$$\int_0^n |h(v)| \, v dv < +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On obtient

$$\varphi_n \mid_{L^P_\pm} \in L^1_\pm \; et \; \varphi_n \in D(T_H) \; pour \; tout \; n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, on peut montrer que

$$\varphi_n \mapsto \varphi \quad et \quad T_H \varphi_n \mapsto 0 \qquad\qquad (n \mapsto \infty).$$

Avec

$$\varphi(x,v) = h(v)$$

pour presque tout $(x,v) \in \Omega \times V$, $\varphi \in X_1$. D'aprés (3.2)

$$\varphi_{|\Gamma_-} = h \notin L^1_-.$$

Ceci prouve que $\varphi \notin D(T_H)$ et par suite T_H n'est pas un opérateur fermé dans X_1 .

Remarque 3.1.2 L'exemple précédent montre que pour $\|H\| = 1$, T_H n'est pas toujours fermé. Donc il ne peut pas être un générateur d'un C_0 semi-groupe dans X_p.

3.2 L'approche de l'espace des phases (cadre monodimensionnel)

On commence cette section par l'étude de l'opérateur libre d'advection dans la géométrie monodimensionnelle mono énergétique. Ce cas particulier a une importance historique et a suscrité un intérêt particulier pendant la dernière décennie (voir par exemple [14] , [49]). Précisément, soit

$$\Omega \times V =]-a, a[\times [-1, 1] \quad (a > 0)$$

et

$$X_p = L^P(]-a, a[\times [-1,1], dxd\xi) \qquad (1 \leq p < +\infty).$$

Dans ce cas, les parties rentrantes et sortantes de $\Omega \times V$ sont :

$$\begin{cases} \Gamma_- = \{-a\} \times [0,1] \cup \{a\} \times [-1,0] \\ \Gamma_+ = \{-a\} \times [-1,0] \cup \{a\} \times [0,1] \end{cases} \tag{3.3}$$

Pour tout $H \in \mathcal{L}(L_+^P, L_-^P)$, l'opérateur d'advection est donné par :

$$T_H\psi(x,\xi) = -\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi) \qquad (\psi \in D(T_H))$$

avec

$$D(T_H) = \left\{ \psi \in W_p;\ H(\psi_{|\Gamma_+}) = \psi_{|\Gamma_-} \right\},\ R(T_H) \subset X_p.$$

On a donc :

Théorème 3.2.1 $\forall\ H \in \mathcal{L}(L_+^P, L_-^P)$, *l'opérateur libre d'advection* T_H *engendre un* C_0*semi-groupe* $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$*dans* X_p $(\ 1 \leq p < +\infty)$. *De plus,*

$$\|U_H(t)\| \leq \max\{1, \|H\|\}\, e^{t \max\left\{\frac{1}{2a}\ln\|H\|, 0\right\}} \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Ce théorème a été démontrer indépendamment par plusieurs auteurs. On cite par exemple les travaux ([13] , [49]) dans lesquels les auteurs ont montré le résultat dans le cas $p = 1$ en utilisant le théorème de Batty-Robinson [7] (pour plus des détails sur le résultat de Batty-Robinson, voir l'appendice). Récemment, M. Boulanouar a montré ce résultat en utilisant un processus de renormalisation (voir [14]).

Le résultat précédent est surprenant car il affirme que pour n'importe quel opérateur aux bords H, l'opérateur d'advection T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_p $(\ 1 \leq p < +\infty\ )$ en géométrie monodimensionnelle. L'inconvénient de ce résultat est qu'il ne fournit aucune information de ce qui peut se produire dans l'autre cas de géométrie et laisse dans l'obscurité la véritable difficulté mathématique. En effet, le théorème (3.2.1) est une simple conséquence du cadre général qui va être étudié dans la suite.

3.3 L'approche générale de l'espace des phases

Cette section illustre le fait que la géométrie de l'espace des phases joue un rôle important dans la bien position des équations cinétiques (voir [15] , [50]).

Théorème 3.3.1 *On suppose que l'espace des phases* $\Omega \times V$ *satisfait*

$$\tau_0 = \inf ess \tau(x, v) > 0 \quad (x, v) \in \Gamma_+. \tag{3.5}$$

Donc, pour tout $H \in \mathcal{L}(L^p_+, L^p_-)$, T_H *engendre un* C_0 *semi-groupe* $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$ *dans* X_p $(1 \leq p < +\infty\ )$ *tel que*

$$\|U_H(t)\| \leq \max\{1, \|H\|\}\, e^{t\max\left\{\ln \frac{\|H\|}{\tau_0}, 0\right\}} \quad t \geq 0\ . \tag{3.6}$$

Remarque 3.3.1 En utilisant la terminologie de [15], l'espace des phases $\Omega \times V$ qui satisfait (3.5) est dit régulier.

Les équations de transport dans le cadre monodimensionnel vérifient (3.6) car l'espace de phase $]-a, a[\, \times [-1, 1]$ est régulier. En effet, pour tout

$$(x, \xi) \in\,]-a, a[\, \times [-1, 1]$$

$$t(x, \xi) = \begin{cases} \inf\{s > 0;\ x - \xi s \leq -a\} & \text{si } \xi > 0 \\ \inf\{s > 0;\ x - \xi s \leq a\} & \text{si } \xi < 0 \end{cases},$$

c'est à dire :

$$t(x, \xi) = \frac{x - sign\ (\xi)a}{|\xi|} \qquad (x, \xi) \in\,]-a, a[\, \times [-1, 1] \qquad \xi \neq 0.$$

Ce qui donne

$$\tau_0 = \inf_{(x,\xi) \in\ \Gamma_+} ess\ \tau(x, \xi) = 2a > 0\ . \tag{3.7}$$

Ce qui prouve que l'espace des phases est régulier.

Remarque 3.3.2 On montre que l'estimation (3.4) se déduit de (3.7) et (3.6). Comme conséquence, le théorème (3.2.1) devient un cas très simple du théorème (3.3.1) .

Le théorème (3.3.1) illustre le fait important que le temps de séjour est la quantité à manipuler pour traiter le cas de la bien position des équations cinétiques. Malheureusement, dans

les situations pratiques, ce théorème est applicable seulement dans le cas de la géométrie monodimensionnelle et dans des cas particuliers de la dynamique de populations (modèle de Rotenberg avec la vitesse de maturation bornée [17]). Prenons par exemple, ce qui suit :
Pour un domaine convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$, si

$$V = S^{N-1} = \{v/\left|v\right|, v \in V,\ v \neq 0\} \text{ (la sphère unité de } \mathbb{R}^N).$$

On peut facilement vérifier que

$$\inf \{\tau(x,v),\ (x,v) \in \Gamma_+\} = 0$$

c'est à dire que $\Omega \times V$ n'est pas un espace de phase régulier (il est non régulier).

3.4 L'influence de l'opérateur aux bords

Les résultats de la section précédente illustrent le fait que, pour prouver la bien position des équations cinétiques associées aux opérateurs aux bords multiplicatifs (qui ne sont pas de contraction), la difficulté majeure est liée au fait que pour des domaine convexes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec $(N > 1)$, le temps de Séjour des particules peut être suffisamment petit. Rappelons que le théorème (3.3.1) affirme que, pour un espace de phase régulier aucune condition sur l'opérateur de trace est montionnée. Ce n'est plus le cas dans le cadre général comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 2.4.1 (Les réflexions rebondissantes en arrière) : Soit Ω un ouvert convexe et régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et soit $V = \mathbb{R}^N$ équipé avec la mesure de Lebesgue. Considérons l'opérateur aux bords

$$H(\psi)(x,v) = \alpha\psi(x,-v) \qquad (x,v) \in \Gamma_-,\ \psi \in L^P_+$$

avec $\alpha > 1$, il est clair que $H \in \mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)$ et $\|H\| = \alpha > 1$. Dans [41], le spectre de l'opérateur libre d'advection T_H est

$$\sigma(T_H) \subset \overline{\underset{K\in\mathbb{Z}}{\cup} R_{ess}(F_K)}$$

tel que $R_{ess}(F_K)$ est l'image essentielle de la fonction mesurable

$$F_K : (x,v) \in \Omega \times V \longmapsto F_K(x,v) = \frac{\ln\ \alpha - 2iK\pi}{t(x,v) + t(x,-v)},\ (K \in \mathbb{Z}).$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} s(T_H) &= \sup\{\operatorname{Re}\lambda; \lambda \in \sigma(T_H)\} \\ &= \sup ess \frac{\ln\ \alpha}{t(x,v)+t(x,-v)} \\ &= +\infty \qquad (x,v) \in \Omega \times V. \end{aligned}$$

Ce qui montre que le spectre de T_H n'est pas contenu dans aucun demi-plan. En particulier, T_H n'est pas un générateur d'aucun C_0 semi-groupe dans X_p $(1 \leq p < +\infty)$.

L'exemple précédent montre que, pour les espaces de phase non réguliers, les hypothèse sur l'opérateur aux bords sont établies pour montrer que l'opérateur libre d'advection T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_p. De plus, le théorème (3.3.1) indique intuitivement que l'opérateur T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_p à condition qu'on "ne tient pas compte de trop de l'ensemble"

$$\{(x,v) \in \Gamma_+,\ \tau(x,v) = 0\}.$$

Rendons plus précis ce que nous voulons dire par ceci. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note χ_ε l'opérateur de multiplication dans L^p_+ par la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{(x,v) \in \Gamma_+,\ \tau(x,v) \leq \varepsilon\},$$

c'est à dire $\chi_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^P_+)$ est donné par :

$$\chi_\varepsilon u(x,v) = \begin{cases} u(x,v) & si \quad \tau(x,v) \leq \varepsilon \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

pour tout $u \in L^P_+$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.4.1 *Soit $H \in \mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)$. Si*

$$\limsup_{\varepsilon \mapsto 0} \|H\chi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)} < 1 \tag{3.8}$$

alors T_H engendre un C_0 semi-groupe $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$ dans X_p $(1 \leq p < +\infty)$. De plus, il existe $C \geq 1$ telle que

$$\|U_H(t)\| \leq Ce^{t\max\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\|H\|,0\right)} \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.9}$$

où

$$\varepsilon_0 = \sup \{\varepsilon > 0;\ \|H\chi_\varepsilon\| < 1\}.$$

Remarque 3.4.1 En général l'hypothèse (3.9) est une petite hypothèse sur H dans le voisinage de l'ensemble

$$\{(x,v) \in \Gamma_+;\ \tau(x,v) = 0\} = \{(x,v) \in \Gamma_+,\ v.\eta(x) = 0\}.$$

Ceci signifie que les vitesses tangentielles sont faiblement prises en considération par H indépendamment de sa norme.

Expliquons maintenant la stratégie à suivre pour démontrer ce résultat. Notre objectif est de montrer que le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,v,t) + v.\nabla_x\psi(x,v,t) = 0 \\ \psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+}) \\ \psi(x,v,0) = \psi_0(x,v) \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\psi_0 \in X_p$ $(1 \leq p < +\infty)$, est gouverné par un C_0 semi-groupe dans X_p. On va utiliser un changement de variables convenable dans l'esprit de celui utilisé dans [42] (voir [27] chapitre XII). Cette nouvelle variable satisfait donc un problème d'évolution équivalent, qui sous la condition (3.8) fait intervenir un opérateur aux bords de contractions.

Introduisons maintenant quelques définitions qui seront utilisées dans la suite. $\forall\ 0 < q < 1$, définissons l'opérateur de multiplication suivant sur L^p_+ $(1 \leq p < +\infty)$:

$$M_q : \quad u \in X_p \longmapsto M_q u(x,v) = q^{\tau_k(x,v)} u(x,v) \in L^P_+,$$

où

$$\tau_k(x,v) = \min \{\tau(x,v); k\},\ (x,v) \in \Gamma_+,$$

k est un nombre réel positif fixé. Soit B_q l'opérateur défini par :

$$B_q : \varphi \in X_p \longmapsto B_q\varphi(x,v) = q^{t_k(x,v)}\varphi(x,v) \in X_p,$$

avec

$$t_k(x,v) = \min\{t(x,v);\ k\},\ (x,v) \in \overline{\Omega} \times V.$$

Comme $M_q \in \mathcal{L}(L^P_+)$, il est possible de définir l'opérateur d'absorption associé à l'opérateur aux bords $HM_q \in \mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)$.

$$\begin{cases} T_{H_q} : \quad D(T_{H_q}) \subset X_p \mapsto X_p \\ \qquad \varphi \longmapsto T_{H_q}\varphi(x,v) = -v.\nabla_x \varphi(x,v) - (\ln\ q)\,\varphi(x,v) \end{cases}$$

où

$$D(T_{H_q}) = \left\{\psi \in \widetilde{W_p};\ \psi_{|\Gamma_-} = HM_q(\psi_{|\Gamma_+})\right\}.$$

Les opérateurs non bornés T_H et T_{H_q} sont liés par les relations :

Lemme 3.4.1 *Pour tout* $0 < q < 1$,

$$B_q^{-1} D(T_H) = D(T_{H_q})$$

et

$$T_H = B_q T_{H_q} B_q^{-1}.$$

Preuve. Soit $0 < q < 1$ fixé. Il est facile de voir que B_q est une bijection continue de X_p dans X_p, son inverse est donné par :

$$B_q^{-1} :\ \varphi \in X_p \longmapsto B_q^{-1}\varphi(x,v) = e^{-t_k(x,v)\ln q}\varphi(x,v) \in X_p.$$

Notons que $B_q^{-1} \in \mathcal{L}(X_p)$ car

$$\sup\{t_k(x,v),\ (x,v) \in \Omega \times V\} \leq k.$$

Maintenant soit $\varphi \in D(T_H)$ et $\psi = B_q^{-1}\ \varphi$. Montrons tout d'abord que $\psi \in W_p$. En effet, pour presque tout $(x, v) \in \Omega \times V$

$$\begin{aligned} v.\nabla_x\psi(x,v) &= \lim_{s\mapsto 0}\frac{\psi(x+sv,v)-\psi(x,v)}{s} \\ &= \lim_{s\mapsto 0}\frac{e^{-t_k(x+sv,v)\ln q}\varphi(x+sv,v)-e^{-t_k(x,v)\ln q}\varphi(x,v)}{s}. \end{aligned}$$

Puisque, pour presque tout $(x, v)\ \in \Omega \times V$,

$$t(x+sv,v) = s + t(x,v) \qquad \forall 0 \le s < t(x,v),$$

on obtient donc

$$t_k(x+sv,v) = s + t_k(x,v) \qquad \forall 0 < s < k - t_k(x,v)$$

et

$$v.\nabla_x\psi(x,v) = e^{-t_k(x,v)\ln q}\lim_{s\mapsto 0}\frac{e^{-s\ln\ q}\varphi(x+sv,v)-\varphi(x,v)}{s}.$$

En utilisant le fait que $\varphi \in W_p$, on aura

$$v.\nabla_x\psi(x,v) = e^{-t_k(x,v)\ln q}(-\ln q\varphi(x,v) + v.\nabla_x\varphi(x,v)). \tag{3.11}$$

Donc $\psi \in W_p$. De plus

$$t_k(x,v) = 0 \quad \forall (x,v) \in \Gamma_-,$$

Il est clair que

$$\varphi_{|\Gamma_-} = \psi_{|\Gamma_-}$$

et

$$\psi_{|\Gamma_+}(x,v) = e^{-\tau_k(x,v)\ln\ q}\varphi_{|\Gamma_+}(x,v), \qquad (x,v) \in \Gamma_+,$$

donc

$$\psi_{|\Gamma_\pm} \in L^P_\pm$$

et

$$\psi_{|\Gamma_-} = HM_q(\psi_{|\Gamma_+}).$$

Ce qui montre que $\psi \in D(T_{H_q})$, c'est à dire

$$B_q^{-1}D(T_H) \subset D(T_{H_q}).$$

De la même manière l'inclusion inverse est établie. Finalement, pour $\varphi \in D(T_H)$ et d'après (3.11) , on a :

$$\begin{aligned} T_{H_q} B_q^{-1} \varphi(x,v) &= -v.\nabla_x (e^{-t_k(x,v)\ln q})(\varphi(x,v)) - \ln q e^{-t_k(x,v)\ln q} \varphi(x,v) \\ &= e^{-t_k(x,v)\ln\ q} (\ln q \varphi(x,v) - v.\nabla_x \varphi(x,v)) \end{aligned}$$

et par suite, on a :

$$\begin{aligned} B_q T_{H_q} B_q^{-1} \varphi(x,v) &= -v.\nabla_x \varphi(x,v) \\ &= T_H \varphi(x,v) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

et comme conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 3.4.1 *Pour tout* $0 < q < 1$, T_{H_q} *engendre un* C_0*semi-groupe* $\left\{V_{H_q}(t);\ t \geq 0\right\}$ *dans* X_p *si et seulement si* T_H *engendre un* C_0 *semi-groupe* $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$ *dans* X_p*. De plus,*

$$U_H(t) = B_q V_{H_q}(t) B_q^{-1} \quad (t \geq 0).$$

En d'autres termes, la proposition (3.4.1) *indique que le problème d'évolution suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,v,t) + v.\nabla_x \varphi(x,v,t) + (\ln\ q)\,\varphi(x,v,t) = 0 \\ \varphi_{|\Gamma_-} = H M_q(\varphi_{|_{\Gamma+}}) \\ \varphi(x,v,0) = e^{-t_k(x,v)\ln q} \psi_0(x,v) \end{cases} \tag{3.12}$$

est équivalent au problème d'évolution (3.10) *en utilisant le changement de variable*

$$\varphi(x,v,t) = .e^{(-t_k(x,v)\ln q} \psi(x,v,t).$$

On est maintenant dans la position de prouver le théorème (3.4.1) .

Preuve du théorème 3.4.1. En utilisant le théorème (3.1.1), il suffit d'établir le résultat pour $\|H\| \geq 1$. On définit l'ensemble

$$Q = \{0 < q < 1;\ \|HM_q\| < 1\}.$$

En combinant la proposition (3.4.1) et le théorème (3.1.1) , on déduit que si $Q \neq \phi$ alors T_H engendre un C_0 semi-groupe $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$ tel que

$$U_H(t) = B_q V_{H_q}(t).B_q^{-1} \quad t \geq 0,\ q \in Q \tag{3.13}$$

où $\left\{V_{H_q}(t);\ t \geq 0\right\}$ est le C_0 semi-groupe engendré par T_{H_q} $(q \in Q)$. En tenant compte de l'hypothèse (3.8) , soit $0 < \varepsilon < k$ fixé tel que

$$\|H\chi_\varepsilon\| < 1.$$

Alors, pour tout $0 < q < 1$,

$$\begin{aligned} \|HM_q\| &\leq \|H\chi_\varepsilon M_q\| + \|H(I-\chi_\varepsilon)M_q\| \\ &\leq \|H\chi_\varepsilon\| + \|H\| \, \|(I-\chi_\varepsilon)M_q\| . \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \|(I-\chi_\varepsilon)M_q\| &= \sup\left\{e^{\tau_k(x,v)\ln q};\ (x,v) \in \Gamma_+ \text{ et } \ \tau_k(x,v) \geq \varepsilon\right\} \\ &\leq e^{\varepsilon \ln\, q}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|HM_q\| \leq \|H\chi_\varepsilon\| + \|H\| \, e^{\varepsilon \ln\, q}$$

et, si

$$e^{\varepsilon \ln\, q} < \frac{1 - \|H\chi_\varepsilon\|}{\|H\|} \qquad (2.14) .$$

Donc $q \in Q$. Ceci montre que $Q \neq \phi$ et T_H engendre un C_0 semi-groupe $\{U_H(t);\ t \geq 0\}$ dans X_p. D'autre part, il est clair que

$$\left\|V_{H_q}(t)\right\| \leq e^{-\ln\, qt} \qquad \forall t \geq 0,\ q \in Q$$

et il est facile de voir que

$$\|B_q\| \leq 1 \qquad et \qquad \left\|B_q^{-1}\right\| \leq e^{-k \ln\, q} \leq e^{-\varepsilon \ln\, q}$$

Donc (3.13) implique

$$\|U_H(t)\| \leq e^{-\varepsilon \ln\, q} e^{-\ln\, qt} \quad \forall t \geq 0,\ q \in Q.$$

On déduit alors de (3.14) l'estimation suivante :

$$\|U_H(t)\| \leq \|H\| \, e^{\ln\ (1-\|H\chi_\varepsilon\|)} e^{\frac{t}{\varepsilon}\ln\|H\|} \qquad t \geq 0.$$

Pour tout $0 < \varepsilon < k$ tel que $\|H\chi_\varepsilon\| < 1$, ce qui termine la preuve. ■

Remarque 3.4.2 Les résultats de la section précédente sont des corollaires simples du théorème (3.4.1) . En effet, supposons que

$$\tau_0 = \inf_{(x,v)\in\Gamma_+} ess\, \tau(x,v) > 0.$$

Donc, pour tout opérateur borné $H \in \mathcal{L}(L^P_+, L^P_-)$, on a

$$\|H\chi_\varepsilon\| = \begin{cases} 0 \quad si \ 0 < \varepsilon < \tau_0 \\ \|H\| \quad si \quad \varepsilon \geq \tau_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Il s'ensuit que, le théorème (3.3.1) découle directement du théorème (3.4.1) et l'hypothèse (3.8) est satisfaite par tout opérateur borné H. On note aussi que l'estimation (3.6) découle de (3.15) et (3.9).

3.5 Exemples de conditions aux bords

On présente dans cette section quelques exemples des conditions aux bords intervenants en applications. Ces exemples proviennent de la théorie cinétique des gaz ou bien de la dynamique des populations. L'intérêt de ces derniers est dû à leur caractère non-local, tandis que les conditions aux bords locales apparaîssant dans le cadre de la cinétique des gaz.

3.5.1 Les conditions aux bords locales

Considérons dans cette section le cas des conditions aux bords de Maxwell qui jouent un rôle important en cinétique des gaz et en théorie de transport neutronique ([22] , [59]). Pour la simplicité, on suppose le long de cette section que $d\mu\,(.)$ est une mesure de Lebesgue avec un support $V \subset R^N (N \geq 1)$. La classe naturelle des opérateurs aux bords intervenants en théorie cinétique des gaz est l'une des opérateurs aux bords locaux par rapport à $x \in \partial\Omega$. Typiquement, un tel opérateur s'écrit sous la forme

$$H\left(\psi_{|\Gamma_+}\right)(x,v) = \int_{\{v'\in V;\ v'.\eta(x)>0\}} \psi_{|\Gamma_+} d\Pi_{(x,v)}(v') \qquad (x,v) \in \Gamma_-.$$

Où, pour presque par tout $(x,v) \in \Gamma_-$, $d\Pi_{(x,v)}(.)$ est une mesure de Radon bornée et positive sur l'ensemble $\{v' \in V;\ v'.\eta(x) > 0\}$. Précisément, $d\Pi_{(x,v)}(v')$ est la probabilité qu'une particule (molécule de gaz, neutron, ...) frappant la frontière $\partial\Omega$ au point x avec une vitesse entre $v\prime$ et $v\prime + dv\prime$ réapparaît (pratiquement) au même point avec une vitesse entre v et $v + dv$ (voir pour [21], [22], [59] plus des détails). Un modèle particulier et intéressant est le suivant :

Exemple 3.5.1 On suppose que les fractions α $(0 < \alpha < 1)$ qui subissent une réflexion spéculaire tandis que le reste $1 - \alpha$ est répandue (diffusée) moyennant une distribution de Maxwell de la paroi qu'on note M_ω

$$M_\omega(v) = \frac{1}{(2\pi\theta_0)^{N/2}} e^{-\frac{v^2}{2\theta_0}} \quad v \in V \tag{3.15}$$

θ_0 est la température de la surface $\partial\Omega$ (qui est supposée constante). Donc

$$d\Pi_{(x,v)}(.) = \alpha d\delta(v' - v + 2(v.\eta(x)\eta(x)) + (1-\alpha)\ M_\omega(v) I v'.\eta(x) I dv',\ (x,v) \in \Gamma_-\ .$$

Où $d\delta(.)$ est la masse de Dirac centré en 0. Ceci correspond au modèle classique de Maxwell, adapté en théorie cinétique des gaz [21].

Généralement, introduisons la définition des conditions aux bords réflexives régulières dûe à A. Palezewski [46].

Définition 3.5.1 *Soit $R \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$. On dit que R est un opérateur aux bords de réflexion régulière s'il existe une application de classe C^1 par morceaux $\gamma : \Gamma_- \mapsto R^N$ tel que :*

$1-$ *pour tout* $(x,v) \in \Gamma_-$, $(x, \gamma(x,v)) \in \Gamma_+$

$2-$ $|\gamma(x,v)| = |v\ |$ *pour tout* $(x,v) \in \Gamma_-$

$3-$ $|\eta(x).v\ | = |\eta(x).\gamma| \left| det\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}(x,v)\right|,\ (x,v) \in \Gamma_-$

$4-$ $\gamma(x, \lambda v) = \lambda\gamma(x,v)$ *pour tout* $(x,v) \in \Gamma_-$ *et* $\lambda > 0$

$5-$ $R(\varphi)(x,v) = \varphi(x, \gamma(x,v)) \qquad \forall (x,v) \in \Gamma_-,\ \varphi \in L^p_+.$

Exemple 3.5.2 En situation pratiques, les conditions réflexives régulières sont fréquentes comme par exemple :

$a)-$les conditions aux bords réflexives spéculaires qui correspondent à

$$\gamma(x,v) = v - 2(v.\eta(x)).\eta(x) \qquad (x,v) \in \quad \Gamma_-$$

$b)-$les conditions aux bords réflexives rebondissantes en arrière pour lesquelles

$$\gamma(x,v) = -v, \ (x,v) \in \Gamma_-$$

et V est symétrique par rapport à 0.

L'importance de cette classe est dûe au fait qu'ils sont conservatifs, c'est à dire pour tout opérateur de réflexion régulière R :

$$\|R\varphi\| = \|\varphi\| \qquad \forall \ \varphi \in L^p_+ \tag{3.16}$$

Définition 3.5.2 *On dit qu'un opérateur aux bords $H \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$ est de type de Maxwell si :*

$$H(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) = K(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) + C\ (\psi_{|\Gamma_+})(x,v) \qquad (x,v) \in \quad \Gamma_-$$

avec $C \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$ donné par :

$$C(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) = \alpha(x)R(\psi_{|\Gamma_+})(x,v)$$

où $\alpha(.) \in L^\infty(\partial\Omega)$ est positive, R est un opérateur de réflexion régulière, et

$$K(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) = \int_{\{v' \in V;\ v'.\eta(x)>0\}} h(x,v,v')\psi_{|\Gamma_+}(x,v')\,|v'.\eta(x)\ |\,dv', \ (x,v) \in \quad \Gamma_-$$

tel que $h(.,.,.) \geq 0$ est mesurable.

Remarque 3.5.1 Si $C = 0$, l'opérateur aux bords est dit diffusif. Généralement, l'opérateur K est la partie diffusive de H.

3.5.2 Les conditions aux bords non-locales

Pour les équations de transport intervenants en dynamique des populations, les conditions aux bords ne sont pas locales (pour plus de détails voir [34], [35], [57] et [56]). Comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 3.5.1 Soit le modèle de la dynamique des populations proposé par Lebowitz et Rubinow [35].

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(a,\ell,t) + \frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,\ell,t) + \mu(a,\ell)\varphi(a,\ell,t) = 0 \\ \varphi(0,\ell) = \displaystyle\int_{\ell_1}^{\ell_2} K(\ell,\ell')\varphi(\ell',\ell')d\ell' + c\varphi(\ell,\ell) \\ \varphi(a,\ell,0) = \varphi_0(a,\ell) \in X_p \end{cases} \tag{3.17}$$

où

$$\Omega = \left\{(a,t) \in R^2;\ 0 < a < \ell,\ \ell_1 < t < \ell_2\right\}$$

avec $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Ceci est un modèle de prolifération d'une population cellulaire avec des propriétés héritées. La variable ℓ est la longueur du cycle des cellules, qui est le temps entre la naissance des cellules et leur division. Il est supposé déterminer à la naissance. La variable a représente l'age de la cellule individuelle. Tandis que, à la division $a = \ell$. La constante ℓ_1(respectivement ℓ_2) désigne la longueur minimal du cycle (respectivement maximal). L'inconnue $\varphi(a,\ell,t)$ disigne la densité de la population cellulaire avec un age a et la longueur de cycle ℓ en un temps $t \geq 0$. La fonction $\mu(.,.)$ est le taux de mortalité de la cellule qui est supposé borné et positif. La condition aux bords décrit une loi de naissance (la transition de la longueur du cycle mère à la longueur du cycle fille). Pour ce modèle, l'espace de vitesse est réduit au singleton $V = \{(1,0)\}$ équipé avec la masse de Dirac centré au point $(1,0)$. On a donc

$$X_p = L^p(\Omega, dad\ell) \quad (1 \leq p < +\infty),$$

$$\Gamma_- = \{(0,\ell),\ \ell_1 < \ell < \ell_2\}$$

et

$$\Gamma_+ = \{(\ell,\ell),\ \ell_1 < \ell < \ell_2\}.$$

Considérons le cas biologique $\ell_1 = 0$. L'opérateur libre d'advection T_H est donné par

$$T_H\varphi(a,\ell) = -\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,\ell),$$

de domaine $D(T_H)$ donné. Dans l'équation (3.18) l'opérateur aux bords $H \in \pounds(L^p(]0,\ell_2[\,,d\ell)$ $(1 \leq p < +\infty)$ est non-local par rapport à $x \in \Omega$:

$$H(\psi_{|\Gamma_+})(\ell) = \int_0^{\ell_2} K(\ell,\ell')\psi_{|\Gamma_+}(\ell')d\ell' + C\psi_{|\Gamma_+}(\ell) \qquad 0 < \ell < \ell_2.$$

En tenant compte de l'expression de H, on peut introduire les opérateurs aux bords de Maxwell non-locaux.

Définition 3.5.3 *Soit $H \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$, on dit que H est un opérateur aux bords de Maxwell non-local si H s'écrit sous la forme :*

$$H = K + C$$

où $C \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$ est un opérateur aux bords de contraction et $K \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$ est un opérateur intégral non-local .

3.6 Application aux conditions aux bords de Maxwell

On va brièvement montrer comment les résultats de la section 3.5 s'appliquent aux conditions aux bords décrites dans la section précédente.

Commençons par les conditions aux bords introduites dans la section précédente. Pour $p = 1$, on a :

Proposition 3.6.1 *On suppose que $p = 1$ et soit $H \in \pounds(L^1_+, L^1_-)$ un opérateur aux bords de Maxwell donné dans* (3.5.2) *. Si*

$$\lim_{\epsilon \mapsto 0} \sup_{\tau(x,v') \leq \epsilon} ess \int_{\{v'.\eta(x) > 0\}} h(x,v,v')\,|v'.\eta(x)|\,dv' < 1 - \sup_{x\in\partial\Omega} ess\alpha(x).$$

Alors T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_1.

Preuve. Il est facile de voir que

$$\|H\chi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^1_+,L^1_-)} \leq \sup_{\tau(x,v')\leq\epsilon} ess \int_{\{v'.\eta(x)>0\}} h\left(x,v,v'\right)\left|v'.\eta\left(x\right)\right| dv' + \sup_{x\in\partial\Omega} ess\alpha\left(x\right)$$

$\varepsilon > 0$. Donc, le théorème (3.4.1) donne le résultat. ■

Proposition 3.6.2 *On suppose que* $1 < p < \infty$ *et soit* $H \in \pounds(L^p_+, L^p_-)$ *un opérateur aux bords de Maxwell donné dans* (3.5.2) . *Si*

$$\lim_{\epsilon\mapsto 0} \sup_{\tau(x,v')\leq\epsilon} ess \int_{\{v.\eta(x)>0\}} \left|v.\eta\left(x\right)\right| dv \times \left(\int_{\{v'.\eta(x)>0\}\cap\{\tau(x,v')\leq\epsilon\}} \left|h\left(x,v,v'\right)\right|^q \left|v'.\eta\left(x\right)\right| dv'\right)^{\frac{p}{q}} < 1 - \sup_{x\in\partial\Omega} ess\alpha\left(x\right) .$$

alors T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_p.

Preuve. La preuve est une application directe du théorème (3.4.1) (pour les détails voir [39]). ■

Pour les situations pratiques (voir exemple (3.5.1)), on établit le résultat suivant :

Proposition 3.6.3 *supposons que* $H = K + C$ *avec* C *donné dans la définition* (2.5.2) *et*

$$K(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) = \beta(x)\int_{\{v'.\eta(x)>0\}} h\left(v,v'\right)\psi_{|\Gamma_+}\left(x,v'\right)\left|v'.\eta\left(x\right)\right| dv',$$

pour tout $(x,v) \in \Gamma_-$, *où* $\beta(.) \in L^\infty(\partial\Omega)$ *est positif. De plus, si* $1 < p < +\infty$, *on suppose que*

$$\sup_{x\in\Omega}\int_{\{v.\eta(x)<0\}} \left|v.\eta(x)\right| dv (\int_{\{v'.\eta(x)>0\}} \left|k(x,v)\right|^q \left|v'.\eta(x)\right| dv')^{\frac{p}{q}} < +\infty, \tag{3.18}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors* T_H *engendre un* C_0 *semi-groupe dans* X_p $(1 \leq p < \infty)$ *pour vu que* $\sup_{x\in\partial\Omega} ess\ \alpha(x) < 1$.

Preuve. La preuve consiste à montrer que la partie diffusive K satisfait

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K\chi_\varepsilon\| = 0 \tag{3.19}$$

On définit pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\{v.\eta(x)<0\}} \left|v.\eta(x)\right| dv (\int_{\{v'.\eta(x)\geq 0\}\cap\{\tau(x,v')\leq\epsilon\}} \left|k(x,v)\right|^q \left|v'.\eta(x)\right| dv')^{\frac{p}{q}}\ \ (x\in\partial\Omega) .$$

Il est clair que pour tout $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$,

$$0 \leq f_\varepsilon(x) \leq f_{\varepsilon'}(x) \leq f_0(x) \ (x \in \partial\Omega), \tag{3.20}$$

où

$$f_0(x) = \int_{\{v.\eta(x)\leq 0\}} |v.\eta(x)| \, dv (\int_{\{v'.\eta(x)\geq 0\}} |k(x,v)|^q \, |v'.\eta(x)| \, dv')^{\frac{p}{q}}.$$

Notons que $f_0 \in L^\infty(\Omega)$ (en tenant compte de (3.19)). De plus, en utilisant la continuité de $\eta(.)$ et $\tau(.,.)$ (voir [54]), il est possible de montrer [39, $p.$ 194, 195]que $f_\varepsilon(.)$ est continue sur $\partial\Omega$ ($\varepsilon \geq 0$). Maintenant, pour presque tout $(x,v) \in \Gamma_-$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{v'.\eta(x)\geq 0\}\cap\{\tau(x,v')\leq\epsilon\}} |k(x,v)|^q \, |v'.\eta(x)| \, dv' &= \int_{\{v'.\eta(x)\geq 0\}\cap\{\tau(x,v')=0\}} |k(x,v)|^q \, |v'.\eta(x)| \, dv' \\ &= \int_{\{v'.\eta(x)=0\}} |k(x,v)|^q \, |v'.\eta(x)| \, dv' \ . \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (3.19) avec le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = 0 \ \ p.p \ x \in \partial\Omega.$$

En utilisant (3.21) et la continuité de $f_\varepsilon(.)$, le théorème de Dini donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\|H\chi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^1_+,L^1_-)} \leq \|\beta\|_\infty \, \|f_\varepsilon\|_\infty^{\frac{1}{p}} .$$

On obtient (3.20). Finalement, puisque

$$\|C\| \leq \sup_{x\in\partial\Omega} ess\alpha(x) < 1,$$

Le théorème (3.4.1) donne le résultat. ■

Remarque 3.6.1 Le fait principal de la proposition (3.6.2) est que les résultats de génération dans ce cas sont satisfaites pour une fonction pouvant prendre des valeurs larges $\beta(.)$. Ceci provient du fait que $\beta(.)$ dépend de position et ne prend pas compte les vitesses tangentielles.

Exemple 3.6.1 Considérons le modèle de Maxwell décrit précédemment. Précisément, on suppose que, $\forall \psi \in L_+^P$,

$$\begin{aligned} H(\psi_{|\Gamma_+})(x,v) &= \alpha(x)\psi_{|\Gamma_+}(x, v - 2(v.\eta(x))\eta(x)) \\ &\quad +(1-\alpha(x))M_\omega \int_{\{v'.\eta(x)\geq 0\}} \psi_{|\Gamma_+}(x,v')\,|v'.\eta(x)|\,dv' \end{aligned}$$

où $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$ est positif et M_ω est le Maxwellien de la paroi donné par (3.16). On vérifie facilement de la proposition (3.6.2) que, si

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \alpha(x) < 1,$$

alors T_H engendre un C_0 semi groupe dans X_p $(1 < p < +\infty)$. Le cas des condition aux bords non locales décrites dans la définition (3.5.3) est couvert par le résultat suivant quand $p = 1$.

Théorème 3.6.1 *Soit $p = 1$, on suppose que $H = K + C$ où $\|C\| < 1$ et $K \in \mathcal{L}\left(L_+^1, L_-^1\right)$ est donné par :*

$$K(\psi)(x,v) = \int_{\Gamma_+} k(x,v,y,v')\Psi(y,v')\ \ |v'.\eta(y)|\,d\gamma(y)d\mu(v'),\ \ (x,v)\in\Gamma_-.$$

où $k(.,.,.,.) \geq 0$est mesurable et $d\gamma(.)$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Si

$$\lim_{\epsilon\mapsto 0}\ \sup \left(\sup_{\{\tau(y,v')\leq\varepsilon\}} ess \int_\Gamma k(x,v,y,v')\,|v'.\eta(x)|\,d\gamma(x)d\mu(v') \right) < 1 - \|C\|,$$

alors T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_1.

Preuve. La preuve découle du théorème (3.4.1) et du fait que

$$\|K\chi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L_+^1,L_-^1)} = \sup_{\{\tau(y,v')\leq\varepsilon\}} ess \int_{\Gamma_-} k(x,v,y,v')\,|v'.\eta(x)|\,d\gamma(x)d\mu(v')$$

tel que $k(.,.,.,)$ est positif. Pour $1 < p < +\infty$, on a le résultat suivant, basé sur les arguments de compacité. ■

Théorème 3.6.2 *Soit $1 < p < +\infty$, on suppose que*

$$H = K + C$$

tel que $K:\ L_+^P \mapsto L_-^P$ est compact et $\|C\| < 1$ alors T_H engendre un C_0semi groupe dans X_p.

Preuve. Notons que :

$$\begin{aligned} \|H\chi_\varepsilon\| &\leq \|K\chi_\varepsilon\| + \|C\| \\ &= \|\chi_\varepsilon K^*\| + \|C\| \quad \forall\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

avec $K^* \in \mathcal{L}(L_+^P, L_-^P)$ désigne l'opérateur dual de K $(1 < p < +\infty)$. Puisque l'opérateur de troncature χ_ε tend vers 0 quand $\epsilon \mapsto 0$ (par conséquence sur chaque ensemble compact de L_-^q), il s'ensuit de la compacité de K^* que

$$\lim_{\varepsilon \mapsto 0} \|\chi_\varepsilon K^*\|_{\mathcal{L}(L_-^q, L_+^q)} = 0$$

Donc

$$\limsup_{\varepsilon \mapsto 0} \|K\chi_\varepsilon\| \leq \|C\| < 1,$$

ce qui termine la preuve, d'après le théorème (3.4.1). ■

Exemple 3.6.2 Revenons à l'exemple (3.5.3) . Soit H l'opérateur aux bords $H \in \pounds(L^p(]0, \ell_2[\,, d\ell)$ $(1 \leq p < +\infty)$ est donné par :

$$H(\psi_{|\Gamma_+})(\ell) = \int_0^{\ell_2} K(\ell, \ell')\psi_{|\Gamma_+}(\ell')d\ell' + C\psi_{|\Gamma_+}(\ell) \qquad 0 < \ell < \ell_2.$$

Si $p = 1$, on déduit du théorème (2.6.1) que, pour vu que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\sup_{\ell' \in]0,\varepsilon[} ess \int_0^{\ell_2} k(\ell, \ell')d\ell) < 1 - \epsilon.$$

alors T_H engendre un C_0 semi-groupe dans X_1.
Pour $(1 < p < +\infty)$, il est possible de montrer la bien position de (3.18) en utilisant le théorème (3.6.2) .

3.7 Appendice

Dans cette section, on va donner quelques résultats fondamentaux qui ont permi d'établir des résultats de génération dans L^1.

Commençons par le cadre abstrait du théorème de J. K. Batty et D. W. Robinson [7]. Soit X un espace de Banach ordonné ayant un cône positif engendrant et normal c'est à dire,

$$X = X_+ + X_-$$

et

$$X^* = X^*_+ + X^*_-$$

où $X_\pm$ (resp $X^*_\pm$) désigne le cône positif et négatif de X (resp de X^*).
Un opérateur A sur X est dit à résolvante positive, s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$$

(l'ensemble résolvant de A) et $(\lambda - A)^{-1} \geq 0$ pour tout $\lambda > \omega$.

Théorème 3.7.1 (**Batty – Robinson**)*Soit A un opérateur à domaine dense et à résolvante positive dans X. S'il existe $\lambda_0 > s(A)$ et $c > 0$ tels que*

$$\left\|(\lambda_0 - A)^{-1}\varphi\right\| \geq c\,\|\varphi\| \tag{3.21}$$

alors A est le générateur d'un C_0 semi-groupe positif sur X .

Notons que pour les situations pratiques, l'espace de Banach X est l'espace L^1.

L'utilisation du théorème de Batty-Robinson en théorie cinétique des gaz est dûe à G. Borgioli et S. Totaro dans l'ordre de prouver le théorème (3.2.1) dans L^1. Précisément, ce résultat a été utilisé par plusieurs auteurs ([30] , [33]). En particulier, K. Latrach et M. Mokhtar-Kharroubi [33]ont donné une version particulière du théorème (3.4.1) pour $p = 1$.

Théorème 3.7.2 (**Latrach – Mokhtar – Kharroubi**) *Soit H un opérateur aux bords satisfaisant (3.8) et les conditions suivantes :*

$$H \geq 0 \tag{3.22}$$

et

$$\|H\psi\| \geq \|\psi\| \qquad \forall\Psi \in L^1_+ \tag{3.23}$$

alors T_H engendre un C_0 semi groupe dans $L^1(\Omega \times V)$.

En tenant compte de la remarque (3.4.2) , il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$r_\sigma(M_\lambda H) < 1 \qquad \forall\lambda > \lambda_0.$$

Maintenant, il suffit d'appliquer la proposition (2.2.1) avec (3.23) pour assurer que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $(\lambda - T_H)^{-1}$ existe et positif.

Montrons à présent l'estimation (3.22). Suivons la stratégie de [33, théorème (5.2)]. Soit $\lambda > \lambda_0$ et soit $\varphi \in X_1$, $\varphi \geq 0$.
On pose

$$\psi = (\lambda - T_H)^{-1} \varphi$$

la solution non négative de

$$\lambda\psi(x,v) + v.\nabla_x\psi(x,v) = \varphi(x,v) \quad (x,v) \in \Omega \times V.$$

En intégrant par rapport à x et par rapport à v et en utilisant le théorème de Green, on obtient :

$$\lambda \|\psi\| + \int_{\Gamma_+} \psi(x,v) \left|v.\eta(x)\right| d\gamma(x)d\mu(v) - \int_{\Gamma_-} \psi(x,v) \left|v.\eta(x)\right| d\gamma(x)d\mu(v) = \|\varphi\|$$

qui n'est autre que

$$\lambda \|\psi\| + (\left\|\psi_{|\Gamma_+}\right\| - \left\|H\psi_{_{|\Gamma_+}}\right\|) = \|\varphi\|.$$

Donc, en tenant compte de (3.24), on a

$$\left\|(\lambda - T_H)^{-1} \varphi\right\| \geq \frac{1}{\lambda} \|\varphi\|$$

ce qui donne l'estimation (3.22).

Chapitre 4

Compacité du reste d'ordre $\mathrm{R}_2(t)$ (cadre réflexif monodimensionnel)

4.1 Préliminaires

Soit a un réel strictement positif. Désignons par $D = \left]-a, a\right[\times [-1, 1]$, l'espace des phases. Les parties rentrantes et sortantes de la frontière de D sont données par

$$D^i = D_1^i \cup D_2^i = \{-a\} \times [0,1] \cup \{a\} \times [-1,0]$$

$$D^o = D_1^o \cup D_2^o = \{-a\} \times [-1,0] \cup \{a\} \times [0,1]$$

En utilisant ces notations, alors les espaces aux bords s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} X_p^i &= L^p\left(D^i, |\xi|\, d\xi\right) \sim L^p\left(D_1^i, |\xi|\, d\xi\right) \times L^p\left(D_2^i, |\xi|\, d\xi\right) \\ &= X_{1,p}^i \times X_{2,p}^i, \end{aligned}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \left\|\psi^i, X_p^i\right\| &= \left(\left\|\psi_1^i, X_{1,p}^i\right\|^p + \left\|\psi_2^i, X_{2,p}^i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_0^1 |\psi(-a,\xi)|^p\, |\xi|\, d\xi + \int_{-1}^0 |\psi(a,\xi)|^p\, |\xi|\, d\xi\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_p^o &= L^p\left(D^o, |\xi|\, d\xi\right) \sim L^p\left(D_1^o, |\xi|\, d\xi\right) \times L^p\left(D_2^o, |\xi|\, d\xi\right) \\
&= X_{1,p}^o \times X_{2,p}^o,
\end{aligned}
$$

muni de la norme

$$
\begin{aligned}
\left\|\psi^o, X_p^o\right\| &= \left(\left\|\psi_1^o, X_{1,p}^o\right\|^p + \left\|\psi_2^o, X_{2,p}^o\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{-1}^{0} \left|\psi\left(-a,\xi\right)\right|^p |\xi|\, d\xi + \int_{0}^{1} \left|\psi\left(a,\xi\right)\right|^p |\xi|\, d\xi\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Où $\sim$ est le signe d'identification de ces espaces.

En général, les conditions aux limites

$$
\psi_{|_{D^i}} = H\left(\psi_{|_{D^0}}\right)
$$

dans le cadre monodimensionnel $(N = 1)$, sont représentées par une matrice 2×2 d'opérateurs

$$
H = \left(H_{ij}\right) \quad \left(1 \leq i,\ j \leq 2\right)
$$

reliant le flux rentrant

$$
\begin{pmatrix} \psi\left(-a, \xi > 0\right) \\ \psi\left(a, \xi < 0\right) \end{pmatrix}
$$

au flux sortant

$$
\begin{pmatrix} \psi\left(-a, \xi < 0\right) \\ \psi\left(a, \xi > 0\right) \end{pmatrix}.
$$

On note que les conditions aux bords auxquelles nous nous intéressons dans ce chapitre sont données de façon abstraite au moyen de l'opérateur suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} H:\ X_p^o \ \mapsto X_p^i \\ \quad u \mapsto Hu \\ \quad Hu = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11}:\ X_{1,p}^o \mapsto X_{1,p}^i \\ \qquad \psi(-a,\xi) \mapsto \psi(-a,-\xi) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{22}:\ X_{2,p}^o \mapsto X_{2,p}^i \\ \qquad \psi(a,\xi) \mapsto \psi(a,-\xi) \end{array} \right.$$

Remarque 4.1.1 Il est clair que H est un opérateur inversible. D'autre part, si

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in X_p^0$$

alors

$$\begin{aligned} \|Hu\|^p &= \|H_{11}u_1\|^p + \|H_{22}u_2\|^p \\ &= \int_{-1}^{0} |u_1(-a,-\xi)|^p \, |\xi| \, d\xi + \int_{0}^{1} |u_2(a,-\xi)|^p \, |\xi| \, d\xi \\ &= \|u_1\|^p_{X_{1,p}^o} + \|u_2\|^p_{X_{2,p}^o} = \|u\|^p_{X_p^o}. \end{aligned}$$

D'où H est un opérateur frontière conservatif.

L'opérateur d'advection T_H est donné par :

$$\begin{cases} T_H : \ D(T_H) \subseteq X_p \mapsto X_p \\ \qquad \psi \mapsto -\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi) - \sigma(\xi)\,\psi(x,\xi) \end{cases}$$

avec

$$D(T_H) = \left\{ \psi \in X_p,\ \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi) \in X_p,\ \psi_{|_{D^i}} = \psi^i \in X_p^i,\ \psi_{|_{D^o}} = \psi^o \in X_p^o \text{ et } \psi^i = H\psi^o \right\}$$

où $\sigma(.) \in L^\infty[-1,1]$, $\psi^o = (\psi_1^o, \psi_2^o)^\perp$ et $\psi^i = \left(\psi_1^i, \psi_2^i\right)^\perp$ avec ψ_1^o, ψ_2^o, ψ_1^i et ψ_2^i sont données par

$$\begin{cases} \psi_1^o : \ \xi \in [-1,0] \mapsto \psi(-a,\xi)\,; \\ \psi_2^o : \ \xi \in [0,1] \mapsto \psi(a,\xi)\,; \\ \psi_1^i : \ \xi \in [0,1] \mapsto \psi(-a,\xi)\,; \\ \psi_2^i : \ \xi \in [-1,0] \mapsto \psi(a,\xi)\,; \end{cases}$$

Remarque 4.1.2 On signale que la dérivée de ψ dans la définition de T_H est prise au sens des distributions. On note que $D(T_H)$ est dense dans X_p parce ce qu'il contient l'espace $C_0^\infty(]-a,a[\times[-1,1])$ (l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts).

On considère maintenant l'équation de la résolvante de T :

$$(\lambda - T_H)\,\psi = \varphi \tag{4.1}$$

où λ est un nombre complexe, $\varphi \in X_p$.

Soit

$$\lambda^* := \lim_{|\xi| \mapsto 0} \inf \sigma(\xi)\,.$$

Pour $\operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*$, la solution $\psi \in D(T_H)$ de (4.1) est donnée formellement par

$$\psi(x,\xi)=\begin{cases}\psi(-a,\xi)\,e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|]}{|\xi|}\right)}+\\ \qquad\frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{x}e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|x-x'|}{|\xi|}\right)}\varphi(x',\xi)\,dx',\quad \xi\in\left]0,1\right[\\ \psi(a,\xi)\,e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|]}{|\xi|}\right)}+\\ \qquad\frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{x}^{a}e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|x-x'|}{|\xi|}\right)}\varphi(x',\xi)\,dx',\quad \xi\in\left]-1,0\right[\end{cases}\tag{4.2}$$

Soit $x=a$ et $x=-a$, on obtient :

$$\begin{aligned}\psi(a,\xi)=&\quad\psi(-a,\xi)\,e^{\left(\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right)}\\ &+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|a-x|}{|\xi|}\right)}\varphi(x,\xi)\,dx,\ \xi\in\left]0,1\right[\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\psi(-a,\xi)=&\quad\psi(a,\xi)\,e^{\left(\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right)}\\ &+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|a+x|}{|\xi|}\right)}\varphi(x,\xi)\,dx,\ \xi\in\left]-1,0\right[.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Pour formuler de maniére abstraite les équations (4.2), (4.3) et (4.4) on introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{cases}M_\lambda:\ X_p^i\mapsto X_p^o,\ M_\lambda:=\left(M_\lambda^+u_1,M_\lambda^-u_2\right)\\ M_\lambda^+u_1(-a,\xi):=u_1(-a,\xi)\,e^{\left(\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right)},\ \xi\in\left]0,1\right[;\\ M_\lambda^-u_2(a,\xi)=u_2(a,\xi)\,e^{\left(\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right)},\ \xi\in\left]-1,0\right[;\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_\lambda:\ X_p^i\mapsto X_p,\quad B_\lambda:=\chi_{[-1,0]}(\xi)\,B_\lambda^-u_2+\chi_{[0,1]}(\xi)\,B_\lambda^+u_1\quad\text{avec}\\ \left(B_\lambda^+u_1\right)(-a,\xi):=u_1(-a,\xi)\,e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|]}{|\xi|}\right)}\quad(0<\xi<1);\\ \left(B_\lambda^-u_2\right)(a,\xi):=u_2(a,\xi)\,e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|]}{|\xi|}\right)}\quad(-1<\xi<0);\end{cases}$$

$$\begin{cases} G_\lambda : X_p \mapsto X_p^i, \quad G_\lambda\varphi := \left(G_\lambda^+\varphi, G_\lambda^-\varphi\right) \quad \text{avec} \\ \left(G_\lambda^+\varphi\right) := \frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|a-x|}{|\xi|}\right)}\varphi\left(x,\xi\right)dx \quad (0<\xi<1)\,; \\ \left(G_\lambda^-\varphi\right) := \frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]|a+x|}{|\xi|}\right)}\varphi\left(x,\xi\right)dx \quad (-1<\xi<0)\,; \end{cases}$$

et enfin,

$$\begin{cases} C_\lambda : X_p \mapsto X_p, \; C_\lambda\varphi := \chi_{[-1,0]}\left(\xi\right)C_\lambda^-\varphi + \chi_{[0,1]}\left(\xi\right)C_\lambda^+\varphi \quad \text{avec} \\ \left(C_\lambda^+\varphi\right) := \frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{x} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]\left|x-x'\right|}{|\xi|}\right)}\varphi\left(x',\xi\right)dx' \;\; (0<\xi<1)\,; \\ \left(C_\lambda^-\varphi\;\right) := \frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{x}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))]\left|x-x'\right|}{|\xi|}\right)}\varphi\left(x',\xi\right)dx' \;\; (-1<\xi<0)\,. \end{cases}$$

Où $\chi_{[-1,0]}\left(.\right)$ et $\chi_{[0,1]}\left(.\right)$ désignent les fonctions caractéristiques des intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$.

En utilisant ces opérateurs et le fait que ψ doit satisfaire les conditions aux bords, les équations (4.3) et (4.4) s'écrivent en fonction des opérateurs ci-dessus comme suivent :

$$\begin{cases} \psi_1^0 = M_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + G_\lambda^-\varphi, \\ \psi_2^0 = M_\lambda^+ H_{11}\psi_1^0 + G_\lambda^+\varphi. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ceci conduit (par substitution) à

$$\begin{cases} \psi_1^0 = M_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + G_\lambda^-\varphi, \\ \psi_2^0 = H\left(\lambda\right)\psi_2^0 + F\left(\lambda\right)\varphi. \end{cases} \tag{4.6}$$

Où $H\left(\lambda\right) := M_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}$ et $F\left(\lambda\right)\varphi := M_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^-\varphi + G_\lambda^+\varphi$. En vertu de (4.6) et de fait que $\|H\| \leq 1$, on obtient, pour $\operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*$, l'inégalité $\|H\left(\lambda\right)\| < 1$. Par conséquent,

$$\begin{cases} \psi_1^0 = M_\lambda^- H_{22}\left(I - H\left(\lambda\right)\right)^{-1} F\left(\lambda\right)\varphi + G_\lambda^-\varphi \\ \psi_2^0 = H\left(\lambda\right)\psi_2^0 + F\left(\lambda\right)\varphi. \end{cases}$$

D'autre part, (4.2) s'écrit :

$$\psi(x,\xi) = \begin{cases} B_\lambda^+ H_{11}\psi_1^0 + C_\lambda^+\varphi & (0<\xi<1) \\ B_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + C_\lambda^-\varphi & (-1<\xi<0) \end{cases} \tag{4.7}$$

ce qui donne (via (4.7))

$$\begin{aligned} \psi(x,\xi) &= R(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) \\ &= \theta_1 R^+(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) + \theta_2 R^-(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R^+(\lambda,T_H) &= \sum_{n\geq 0}\left(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}\left[H(\lambda)\right]^n\right) F(\lambda) + B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- + C_\lambda^+ \\ R^-(\lambda,T_H) &= \sum_{n\geq 0}\left(B_\lambda^- H_{22}\left[H(\lambda)\right]^n\right) F(\lambda) + C_\lambda^- \end{aligned}$$

avec θ_1 (resp. θ_2) est l'opérateur $(\theta_1\psi)(x,\xi) = \chi_{[0,1]}(\xi)\psi(x,\xi)$ (resp. $(\theta_2\psi)(x,\xi) = \chi_{[-1,0]}(\xi)\psi(x,\xi)$).

4.2 Expression analytique de e^{tT_H}

Nous nous proposons dans cette section de montrer que T_H engendre un groupe fortement continu dans les espaces X_p, $1\leq p<\infty$, et de déterminer son expression lorsque $t\geq 0$. Nous commençons tout d'abord par établir un résultat de génération de groupes fortement continus lorsque les conditions aux limites sont conservatives. Pour le faire, nous aurons besoin de l'hypothèse suivant :

$$\|Hu\| = \|u\| \qquad \forall u\in X_p^o. \tag{4.8}$$

Remarque 4.2.1. Nous notons que les conditions aux limites périodiques et réflexives vérifient (4.8).

Nous commençons notre étude par le résultat suivant.

Théorème 4.2.1 *supposons que l'hypothèse* (4.8) *est satisfaite. Si H est inversible, alors T_H engendre un C_0-groupe sur X_p.*

La preuve de ce théorème nécessite deux lemmes préparatoires.
Désignons par T_H^0 l'opérateur d'advection libre

$$\begin{cases} T_H^0 : \quad D\left(T_H^0\right) \subseteq X_p \to X_p \\ \qquad\qquad \psi \mapsto T_H^0 \psi\left(x, \xi\right) = -\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(x, \xi\right) \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que T_H^0 est un opérateur linéaire fermé à domaine dense sur X_p et que $D\left(T_H^0\right) = D\left(T_H\right)$. Puisque $\sigma\left(.\right) \in L^\infty\left[-1, 1\right]$, l'opérateur de multiplication

$$\mathcal{M}_\sigma \psi\left(x, \xi\right) = \sigma\left(\xi\right) \psi\left(x, \xi\right)$$

est borné. Ainsi, $T_H = T_H^0 - \mathcal{M}_\sigma$ peut être vu comme une perturbation bornée de l'opérateur T_H^0.

Lemme 4.2.1 *Si l'opérateur frontière H satisfait* (4.8), *alors les opérateurs T_H^0 et $-T_H^0$ sont dissipatifs.*

Preuve. Pour montrer la dissipativité de $\pm T_H^0$, nous traitons séparément les cas $p = 1$ et $1 < p < \infty$.

i) Soit $1 < p < \infty$ et considérons $\psi \in D\left(T_H\right)$, nous avons

$$\left(\pm T_H^0 \psi, \left|\psi\right|^{p-2} \psi\right) = \pm \int_{-a}^{a} \int_{-1}^{1} \left|\psi\right|^{p-2} \psi \left(-\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(x, \xi\right) dx d\xi.$$

En tenant compte du fait que $\xi \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi\right|^p\right) = p\left|\psi\right|^{p-2} \psi \xi \frac{\partial \psi}{\partial x}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left(\pm T_H^0\psi, |\psi|^{p-2}\psi\right) &= \pm\frac{1}{p}\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(|\psi|^p\right)dxd\xi \\ &= \pm\frac{1}{p}\left[\left\|\psi^i\right\|_{X_p^i}^p - \left\|\psi^o\right\|_{X_p^o}^p\right] = 0,\end{aligned}$$

(parce que $\|H\psi^o\| = \|\psi^o\|$).

ii) Considérons maintenant le cas $p = 1$. Soit $\psi \in D(T_H)$.

$$\begin{aligned}\left(\pm T_H^0\psi, sign\ \psi\right) &= \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi)\, sign\ \psi dxd\xi \\ &= \pm\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(|\psi|\right)dxd\xi \\ &= \pm\left[\left\|\psi^i\right\|_{X_1^i} - \left\|\psi^o\right\|_{X_1^o}\right] = 0\end{aligned}$$

(parce que $\|H\psi^o\| = \|\psi^o\|$).

D'où en vertu du théorème de Lumer-Phillips, les opérateurs T_H^0 et $-T_H^0$ sont dissipatifs sur X_p. ■

Lemme 4.2.2 *supposons que H satisfait* (4.8)*. Si H est inversible, alors l'opérateur $\lambda \pm T_H^0$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve. Soient $\varphi \in X_p$ et $\lambda > 0$. Nous considérons l'équation

$$\left(\lambda + T_H^0\right)\psi = \varphi \tag{4.9}$$

où ψ est la fonction inconnue. Pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$, la solution de (4.9) est donnée formellement par

$$\psi(x,\xi)=\begin{cases}\psi(-a,\xi)\,e^{\frac{-\lambda|a+x|}{|\xi|}}+\\ \qquad\frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{x}e^{\frac{-\lambda|x-x'|}{|\xi|}}\varphi(x',\xi)\,dx',\quad \xi\in\left]0,1\right[\\ \psi(a,\xi)\,e^{\frac{-\lambda|a-x|}{|\xi|}}+\\ \qquad\frac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{x}^{a}e^{\frac{-\lambda|x-x'|}{|\xi|}}\varphi(x',\xi)\,dx',\quad \xi\in\left]-1,0\right[.\end{cases}\tag{4.10}$$

Ceci conduit à

$$\begin{aligned}\psi(a,\xi)=\;&\psi(-a,\xi)\,e^{\frac{2a\lambda}{|\xi|}}\\ &+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}e^{\frac{-\lambda|a-x|}{|\xi|}}\varphi(x,\xi)\,dx,\ \xi\in\left]0,1\right[\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\psi(-a,\xi)=\;&\psi(a,\xi)\,e^{\frac{2a\lambda}{|\xi|}}\\ &+\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a}e^{\frac{-\lambda|a+x|}{|\xi|}}\varphi(x,\xi)\,dx,\ \xi\in\left]-1,0\right[.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Comme précédemment, nous introduisons les opérateurs bornés suivants :

$$\begin{cases}\widetilde{M_\lambda}:\ X_p^o\mapsto X_p^i,\ \widetilde{M_\lambda}:=\left(\widetilde{M_\lambda^+}u_1,\widetilde{M_\lambda^-}u_2\right)\\ \qquad\widetilde{M_\lambda^+}u_1(-a,\xi):=u_1(-a,\xi)\,e^{-2a\frac{\lambda}{|\xi|}},\quad \xi\in\left]0,1\right[;\\ \qquad\widetilde{M_\lambda^-}u_2(a,\xi)=u_2(a,\xi)\,e^{-2a\frac{\lambda}{|\xi|}},\quad \xi\in\left]-1,0\right[;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\widetilde{B_\lambda}:\ X_p^i\mapsto X_p,\quad \widetilde{B_\lambda}:=\chi_{[-1,0]}(\xi)\,\widetilde{B_\lambda^-}u_2+\chi_{[0,1]}(\xi)\,\widetilde{B_\lambda^+}u_1\quad\text{avec}\\ \qquad\left(\widetilde{B_\lambda^+}u_1\right)(-a,\xi):=u_1(-a,\xi)\,e^{\frac{-\lambda}{|\xi|}|a+x|}\quad(0<\xi<1);\\ \qquad\left(\widetilde{B_\lambda^-}u_2\right)(a,\xi):=u_2(a,\xi)\,e^{\frac{-\lambda}{|\xi|}|a-x|}\quad(-1<\xi<0);\end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{G_\lambda} : X_p \mapsto X_p^i, \quad G_\lambda \varphi := \left(\widetilde{G_\lambda^+} \varphi, \widetilde{G_\lambda^-} \varphi \right) \quad \text{avec} \\ \left(\widetilde{G_\lambda^+} \varphi \right) := \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{\frac{-\lambda}{|\xi|} |a+x|} \varphi(x,\xi)\, dx \quad (0 < \xi < 1)\,; \\ \left(\widetilde{G_\lambda^-} \varphi \right) := \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{\frac{-\lambda}{|\xi|} |a-x|} \varphi(x,\xi)\, dx \quad (-1 < \xi < 0)\,; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{C_\lambda} : X_p \mapsto X_p, \ \widetilde{C_\lambda} \varphi := \chi_{[-1,0]}(\xi)\, \widetilde{C_\lambda^-} \varphi + \chi_{[0,1]}(\xi)\, \widetilde{C_\lambda^+} \varphi \quad \text{avec} \\ \left(\widetilde{C_\lambda^+} \varphi \right) := \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{x} e^{\frac{-\lambda}{|\xi|} |x-x'|} \varphi(x',\xi)\, dx' \ \ (0 < \xi < 1)\,; \\ \left(\widetilde{C_\lambda^-} \varphi \right) := \frac{1}{|\xi|} \int_{x}^{a} e^{\frac{-\lambda}{|\xi|} |x-x'|} \varphi(x',\xi)\, dx' \ \ (-1 < \xi < 0)\,. \end{cases}$$

En utilisant ces opérateurs, nous pouvons écrire (4.11) et (4.12) sous la forme

$$\psi^i = \widetilde{M_\lambda} \psi^o + \widetilde{G_\lambda} \varphi. \tag{4.13}$$

D'autre part, comme ψ doit vérifier les conditions aux bords, en utilisant l'inversibilité de H, (4.13) s'écrit

$$\psi^o = H^{-1} \widetilde{M_\lambda} \psi^o + H^{-1} \widetilde{G_\lambda} \varphi.$$

Comme $\left\| \widetilde{M_\lambda} \right\| \leq e^{-2a\lambda}$ (facile à vérifier), nous obtenons $\left\| H^{-1} \widetilde{M_\lambda} \right\| < 1$, et par conséquent que l'opérateur $I - H^{-1} \widetilde{M_\lambda}$ est inversible. Un calcul simple montre que

$$\psi^o = \sum_{n \geq 0} \widetilde{B_\lambda} \left(H^{-1} \widetilde{M_\lambda} \right)^n H^{-1} \widetilde{G_\lambda} \varphi.$$

Ensuite, en combinant cette équation avec (4.10) nous obtenons

$$\psi = \left(\lambda + T_H^0\right)^{-1} \varphi = \sum_{n \geq 0} \widetilde{B_\lambda} \left(H^{-1} \widetilde{M_\lambda}\right)^n H^{-1} \widetilde{G_\lambda} \varphi + \widetilde{C_\lambda} \varphi$$

Ceci achève la preuve. ■

Preuve du théorème 4.2.1. Les lemmes (4.2.1) et (4.2.2) et le théorème de Lumer-Phillips entraînent que l'opérateur T_H engendre un C_0-groupe de contraction sur X_p. Enfin comme $\mathcal{M}_\sigma \in \mathcal{L}(X_p)$, et $T_H = T_H^0 + \mathcal{M}_\sigma$, le résultat découle de [29, théorème 13.2.2]. ■

Théorème 4.2.2 *Soient $p \in [1, \infty[$, $\sigma(.)$ une fonction paire sur $[-1, 1]$ et supposons que H est une réflexion. Alors T_H engendre un C_0-groupe $\left(U^H(t),\ t \in \mathbb{R}\right)$ sur X_p donné par*

$$\begin{aligned} U^H(t) \varphi(x, \xi) = {} & e^{-\sigma(\xi) t} \Bigg[\sum_{n \geq 0} \varphi\left[(sign\ \xi) 4na + x - \xi t, \xi\right] \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x + (4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x + (4n+1)a}{|\xi|}\right]}(t) \\ & + \sum_{n \geq 0} \varphi\left[-(sign\ \xi)(4n+2)a - x + \xi t, -\xi\right] \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x + (4n+1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x + (4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t) \Bigg]. \end{aligned}$$

Où $t \geq 0$ et $\varphi \in X_p$.

Preuve. Par hypothèse (voir aussi la remarque 4.1.1),
est un opérateur inversible vérifiant le théorème (4.2.1). Ceci montre que T_H engendre un C_0-groupe $\left(U^H(t),\ t \in \mathbb{R}\right)$ sur X_p. Pour déterminer l'expression analytique de $\left(U^H(t),\ t \geq 0\right)$, nous considérons $\varphi \in X_p$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les expressions des différents opérateurs définis précédemment, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[\left(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}\right) [H(\lambda)]^n \left(H_{11} M_\lambda^+ G_\lambda^- \varphi\right)\right](x, \xi) = \\ & \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda + \sigma(\xi))((4n+6)a + x + x')]}{|\xi|}\right)} \varphi(x', -\xi)\, dx', \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}\right) [H(\lambda)]^n \left(G_\lambda^+ \varphi\right)\right](x, \xi) = \\ & \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda + \sigma(\xi))((4n+4)a + x - x')]}{|\xi|}\right)} \varphi(x', \xi)\, dx', \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\left[\left(B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- \varphi\right)\right](x,\xi) = \tag{4.16}$$
$$\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))(2a+x+x')]}{|\xi|}\right)} \varphi(x',-\xi)\, dx',$$

$$\left[\left(B_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n \left(H_{11} M_\lambda^+ G_\lambda^- \varphi\right)\right](x,\xi) = \tag{4.17}$$
$$\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))((4n+4)a-x+x')]}{|\xi|}\right)} \varphi(x',\xi)\, dx',$$

et finallement

$$\left[\left(B_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n \left(G_\lambda^+ \varphi\right)\right](x,\xi) = \tag{4.18}$$
$$\frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{\left(\frac{-[(\lambda+\sigma(\xi))((4n+2)a-x-x')]}{|\xi|}\right)} \varphi(x',-\xi)\, dx'.$$

En utilisant le changement de variables $x' := \xi t - x - (4n+6)\,a$ nous avons $dx' = |\xi|\, dt$, et par conséquent (4.14) devient

$$\left[\left(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n \left(H_{11} M_\lambda^+ G_\lambda^- \varphi\right)\right](x,\xi) = \tag{4.19}$$
$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t} \varphi(\xi t - x - (4n+6)\,a, -\xi)\, \chi_{\left[\frac{x+(4n+5)a}{|\xi|}, \frac{x+(4n+7)a}{|\xi|}\right]}(t)\, dt.$$

De façon analogue, moyennant les changements de variables adéquats, les équations (4.15), (4.16), (4.17) et (4.18) peuvent s'écrire, respectivement,

$$\left[\left(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n \left(G_\lambda^+ \varphi\right)\right](x,\xi) =$$
$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t} \varphi(\xi t - x - (4n+4)\,a, -\xi)\, \chi_{\left[\frac{x+(4n+1)a}{|\xi|}, \frac{x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\, dt,$$

$$\left[\left(B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- \varphi\right)\right](x,\xi) =$$
$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t} \varphi(\xi t - x - 2a, -\xi)\, \chi_{\left[\frac{x+a}{|\xi|}, \frac{x+3a}{|\xi|}\right]}(t)\, dt,$$

$$\left[\left(B_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n\left(H_{11}M_\lambda^+G_\lambda^-\varphi\right)\right](x,\xi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi\left(-x+(4n+4)a+\xi t,\xi\right)\chi_{\left[\frac{-x+a}{|\xi|},\frac{-x+3a}{|\xi|}\right]}(t)\,dt,$$

et

$$\left[\left(B_\lambda^- H_{22}\right)[H(\lambda)]^n\left(G_\lambda^+\varphi\right)\right](x,\xi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi\left(x+(4n+2)a-\xi t,-\xi\right)\chi_{\left[\frac{-x+a}{|\xi|},\frac{-x+3a}{|\xi|}\right]}(t)\,dt.$$

D'où

$$R^+(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left(x+(4n+4)a-\xi t,\xi\right)\chi_{\left[\frac{x+(4n+3)a}{|\xi|},\frac{x+(4n+5)a}{|\xi|}\right]}(t)\right. \tag{4.20}$$

$$\left.+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-x-(4n+2)a+\xi t,-\xi\right)\chi_{\left[\frac{x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\right]dt + C_\lambda^+$$

et

$$R^-(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left(x-(4n+4)a-\xi t,\xi\right)\chi_{\left[\frac{-x+(4n+3)a}{|\xi|},\frac{-x+(4n+5)a}{|\xi|}\right]}(t)\right. \tag{4.21}$$

$$\left.+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-x+(4n+2)a+\xi t,-\xi\right)\chi_{\left[\frac{-x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{-x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\right]dt + C_\lambda^-.$$

Ainsi, d'après (4.20) et (4.21) la résolvante de l'opérateur T_H s'écrit

$$R(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) =$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\sigma(\xi)t}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left((sign\ \xi)\,4na+x-\xi t,\xi\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(t)\right. \tag{4.22}$$

$$\left.+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-x-(sign\ \xi)(4n+2)a+\xi t,-\xi\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\right]dt$$

Ensuite, en utilisant le fait que T_H engendre un C_0 semi-groupe $\left(U^H(t)\,,\ t \geq 0\right)$ et l'unicité de la transformation de Laplace (voir, par exemple, [26, Lemme 15, p. 626]), il découle de (4.22) que

$$U^H(t)\,\varphi(x,\xi) =$$

$$e^{-\sigma(\xi)t}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left((sign\ \xi)\,4na + x - \xi t, \xi\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(t)\right.$$

$$\left.+\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-x-(sign\ \xi)\,(4n+2)\,a + \xi t, -\xi\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\right]$$

Remarque 4.2.2. Lorsque les conditions aux limites sont périodiques, la même démarche que celle utilisée dans la section précédente conduit à

$$R^+(\lambda, T_H)\,\varphi(x,\xi) = \sum_{n\geq 0} B_\lambda^+ H_{12}\left[M_\lambda^+ H_{21}\right]^n G_\lambda^- + C_\lambda^+$$

$$R^-(\lambda, T_H)\,\varphi(x,\xi) = \sum_{n\geq 0} B_\lambda^- H_{21}\left[M_\lambda^- H_{12}\right]^n G_\lambda^+ + C_\lambda^-.$$

Moyennant l'unicité de la transformée de Laplace, un calcul analogue à celui ci-dessus permet de déduire l'expression du semi groupe pour ce type de conditions aux limites, soit

$$U^H(t)\,\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)t}\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left((sign\ \xi)\,2na + x - \xi t, \xi\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(2n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(2n+1)a}{|\xi|}\right]}(t)\right].$$

4.3 Compacité de $R_2^H(t)$

Nous rappelons que l'opérateur de transport s'écrit sous la forme $A_H := T_H + K$ où K est un opérateur borné sur X_p défini par

$$\begin{cases} K:\ X_p \to X_p \\ \qquad \psi(x,\xi) \to K\psi(x,\xi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} k(\xi,\xi')\,\psi(x,\xi')\,d\xi' \end{cases}$$

où le noyau de collision $k : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ est supposé mesurable.

Comme K est un opérateur borné, le théorème (2.1.4) montre que A_H engendre un C_0 groupe $\left(V^H(t), \ t \in \mathbb{R}\right)$ donné par

$$V^H(t) = \sum_{j=0}^{m-1} U_j^H(t) + R_m^H(t),$$

où $U_0^H(t) = U^H(t)$; $U_j^H(t) = \displaystyle\int_0^t U^H(s) K U_{j-1}^H(t-s)\, ds$, et le reste d'ordre m $R_m^H(t)$ peut être exprimé par

$$R_m^H(t) = \int_{s_1+s_2+\ldots.+s_m \leq t} U^H(s_1) K \ldots . U^H(s_n) K V^H \left(t - \sum_{i=1}^{m} s_i\right) ds_1 \ldots ds_m.$$

Dans la suite, nous sommes concernés par le reste d'ordre deux

$$R_2^H(t) = \int_{s_1+s_2 \leq t} U^H(s_1) K U^H(s_2) K V^H(t - s_1 - s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Définition 4.3.1 [44], [45]. *Un opérateur borné K, défini comme ci-dessus, est dit régulier si sa restriction à $L^p[-1,1]$ est un opérateur compact.*

Notre objectif maintenant est de déterminer l'expression explicite de $R_2^H(t)$ pour un opérateur de collision K de rang un, c'est à dire, pour $\varphi \in X_p$

$$K\varphi(x,\xi) = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, g(\xi')\, \varphi(x,\xi')\, d\xi'$$

où $f \in L^p[-1,1]$ et $g \in L^q[-1,1]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. D'où

$$\begin{aligned} U(s_2)K\varphi(x,\xi) &= e^{-\sigma(\xi)s_2}\int_{-1}^{1} f(\xi)\,g(\xi') \\ &\left[\sum_{n\geq 0}\varphi\left((sign\ \xi)\,4na + x - \xi s_2, \xi'\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_2)\,d\xi' \right.\\ &+\int_{-1}^{1} f(-\xi)\,g(\xi') \\ &\left.\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-(sign\ \xi)(4n+2)a - x + \xi s_2, \xi'\right)\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(s_2)\right] d\xi'. \end{aligned}$$

Nous **supposons** de plus **la fonction** $f(.)$ **est paire**.

Remarque 4.3.1. Notons qu'en raison de la symétrie de l'intervalle $[-1,1]$, cette hypothèse de parité de la fonction $f(.)$ n'est pas nécessaire. Elle vise uniquement à simplifier les calculs (qui sont hélas déjà bien compliqués).

En composant avec K nous obtenons

$$\begin{aligned} KU(s_2)K\varphi(x,\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-\sigma(\xi')s_2}\int_{-1}^{1} f(\xi)\,g(\xi')\,f(\xi')\,g(\xi'') \\ &\left[\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[x + (sign\ \xi')\,4na - \xi' s_2, \xi''\right]\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')x+(4n-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')x+(4n+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_1)\right. \\ &\left.\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[-x - (sign\ \xi')(4n+2)a + \xi' s_2, \xi''\right]\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')x+(4n+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')x+(4n+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\right] d\xi' d\xi'' \end{aligned} \tag{4.23}$$

Posons $h(.) = f(.)\,g(.)$, en composant avec $U(s_1)$, (4.23) devient

$$U(s_1)KU(s_2)K\varphi(x,\xi)=e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)h(\xi')g(\xi'')$$

$$\left[\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[x+(sign\ \xi)4na+(sign\ \xi')4ma-\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]\right.$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[x+(sign\ \xi)(4n+2)a-(sign\ \xi')(4m+2)a+\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2) \tag{4.24}$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[-x-(sign\ \xi)(4n+2)a+(sign\ \xi')4ma+\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[-x-(sign\ \xi)4na-(sign\ \xi')(4m+2)a-\xi's_2+\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\right]d\xi''.$$

Ainsi, il découle de (4.24) que $R_2^H(t)$ peut être écrit sous la forme

$$R_2^H(t)=\sum_{n,m\geq 0}R_2^{n,m,H}(t)$$

où

$$R_2^H(t)\,\varphi(x,\xi)=\int_{s_1+s_2\leq t}e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)\,h(\xi')\,g(\xi'')$$

$$\left[\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[x+(sign\ \xi)\,4na+(sign\ \xi')\,4ma-\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]\right.$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[x+(sign\ \xi)(4n+2)\,a-(sign\ \xi')(4m+2)\,a+\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[-x-(sign\ \xi)(4n+2)\,a+(sign\ \xi')\,4ma+\xi's_2-\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\varphi\left[-x-(sign\ \xi)\,4na-(sign\ \xi')(4m+2)\,a-\xi's_2+\xi s_1,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(s_1)\times$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\right]ds_1ds_2d\xi''.$$

Soient m, $n\in\mathbb{N}$ et $t>0$. Nous désignons par $S_{n,m,i}^t\,(1\leq i\leq 4)$ les ensembles

$$S^t_{n,m,1} = \Big\{(x,\xi) \in \left]-a,a\right[\times [-1,1] \text{ tel que } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]$$

$$\text{et } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \tfrac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]\Big\}$$

$$S^t_{n,m,2} = \Big\{(x,\xi) \in \left]-a,a\right[\times [-1,1] \text{ tel que } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]$$

$$\text{et } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}, \tfrac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]\Big\}$$

$$S^t_{n,m,3} = \Big\{(x,\xi) \in \left]-a,a\right[\times [-1,1] \text{ tel que } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}, \tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]$$

$$\text{et } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \tfrac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]\Big\}$$

$$S^t_{n,m,4} = \Big\{(x,\xi) \in \left]-a,a\right[\times [-1,1] \text{ tel que } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}, \tfrac{(sign\ \xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]$$

$$\text{et } t \in \left[\tfrac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|}, \tfrac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)4na]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]\Big\}$$

Il est clair que les ensembles $S^t_{n,m,i}\,(1 \leq i \leq 4)$ sont disjoints. Nous avons aussi pour $(m,k) \neq (j,l)$, $S^t_{m,k,i} \cap S^t_{j,l,i} = \not\subset$.

Notons que pour un réel fixé $t > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t < (4n_0 - 2)\,a$. Ceci montre que pour tout $n > n_0$ nous avons

$$t < (4n_0 - 2)\,a < -a + (4n-1)\,a \leq \frac{(sign\ \xi)\,x + (4n-1)\,a}{|\xi|}$$

Pour tout $(x,\xi) \in \left]-a,a\right[\times [-1,1]$. Il en découle que $\sum\limits_{n,m \geq 0} R_2^{n,m,H}(t)$ est une somme finie, soit

$$\sum_{n,m=0}^{n_0(t)} R_2^{n,m,H}(t)$$

où $R_2^{n,m,H}(t)$ est donné par

$$R_2^{n,m,H}(t) = R_{2,1}^{n,m,H}(t) + R_{2,2}^{n,m,H}(t) + R_{2,3}^{n,m,H}(t) + R_{2,4}^{n,m,H}(t)$$

avec

$$R_{2,1}^{n,m,H}(t)\varphi(x,\xi)=\int_{s_1+s_2\leq t}\left[e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)\,h(\xi')\,g(\xi'')\right.$$

$$[V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[x+(sign\ \xi)\,4na+(sign\ \xi')\,4ma-\xi s_1-\xi' s_2,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\,d\xi"\right]ds_1ds_2,$$

$$R_{2,2}^{n,m,H}(t)\varphi(x,\xi)=\int_{s_1+s_2\leq t}\left[e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)\,h(\xi')\,g(\xi'')\right.$$

$$[V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[x+(sign\ \xi)(4n+2)\,a-(sign\ \xi')(4m+2)\,a-\xi s_1+\xi' s_2,\xi"\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\,d\xi''\right]ds_1ds_2,$$

$$R_{2,3}^{n,m,H}(t)\varphi(x,\xi)=\int_{s_1+s_2\leq t}\left[e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)\,h(\xi')\,g(\xi'')\right.$$

$$[V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[-x-(sign\ \xi)(4n+2)\,a+(sign\ \xi')\,4ma+\xi s_1-\xi' s_2,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[-x+s_1\xi-(sign\ \xi)(4n+2)a]+(4m+3)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\,d\xi''\right]ds_1ds_2,$$

$$R_{2,4}^{n,m,H}(t)\varphi(x,\xi)=\int_{s_1+s_2\leq t}\left[e^{-\sigma(\xi)s_1}\int_{-1}^{1}e^{-\sigma(\xi')s_2}d\xi'\int_{-1}^{1}f(\xi)\,h(\xi')\,g(\xi'')\right.$$

$$[V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[-x-(sign\ \xi)\,4na-(sign\ \xi')(4m+2)\,a+\xi s_1+\xi' s_2,\xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left.\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|},\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\,d\xi"\right]ds_1ds_2,$$

Théorème 4.3.1 *Soient $p \in [1, +\infty[$, $\sigma(.)$ une fonction paire sur $[-1, 1]$ et supposons que H est une réflexion. Si K est un opérateur de collision régulier, alors $R_2^H(t)$ est compact sur X_p pour $1 < p < \infty$, et faiblement compact sur X_1.*
Comme conséquence, nous avons

$$r_e\left(V^H(t)\right) = r_e\left(U^H(t)\right)$$

Preuve. Puisque l'opérateur K est régulier, compte tenu du fait que les espaces $L^p[-1, 1]$, $p \in [1, +\infty[$, possèdent la propriété d'approximation, il existe une suite d'opérateurs de rangs finis qui converge en norme vers l'opérateur K. Il suffit alors d'établir le résultat pour des opérateurs de rangs finis de noyaux,

$$k(\xi, \xi') = \sum_{i=1}^{n} k_i(\xi, \xi'), \ k_i(\xi, \xi') = f_i(\xi) g_i(\xi')$$

où $n \in \mathbb{N}$, $f_i(.) \in L^p[-1, 1]$, $g_i(.) \in L^q[-1, 1]$ avec $q = \frac{p}{p-1}$. Or la compacité est stable par sommation, nous pouvons alors restreindre notre preuve à un opérateur de rang un. pour montrer la compacité de $R_2^H(t)$, il suffit de montrer ceci pour chacun des opérateurs $R_{2,i}^{n,m,H}(t)$ $(0 \leq n, \ m \leq n_0(t))$ $(1 \leq i \leq 4)$ plus haut.

Comme ceux-ci possèdent la même structure, il suffit d'établir la compacité pour l'un deux, par exemple, $R_{2,1}^{n,m,H}(t)$. En effet, remarquons que $R_{2,1}^{n,m,H}(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$R_{2,1}^{n,m,H}(t) = \mathcal{J}_1^{n,m,H}(t) + \mathcal{J}_2^{n,m,H}(t)$$

où

$$\mathcal{J}_1^{n,m,H}(t) = \int_0^1 d\xi' \int_{s_1+s_2 \leq t} \Bigg[e^{-\sigma(\xi)s_1} e^{-\sigma(\xi')s_2} d\xi' \int_{-1}^1 f(\xi) h(\xi') g(\xi'')$$

$$[V(t - s_1 - s_2)\varphi][x + (sign\ \xi) 4na + 4ma - \xi s_1 - \xi' s_2, \xi'']$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\, d\xi'' \Bigg] ds_1 ds_2,$$

et

$$\mathcal{J}_2^{n,m,H} = \int_{-1}^{0} d\xi' \int_{s_1+s_2\leq t} \left[e^{-\sigma(\xi)s_1} e^{-\sigma(\xi')s_2} d\xi' \int_{-1}^{1} f(\xi)\, h(\xi')\, g(\xi'') \right.$$

$$[V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[x + (sign\ \xi)\, 4na - 4ma - \xi s_1 - \xi' s_2, \xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left. \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\, d\xi'' \right] ds_1 ds_2.$$

Par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour l'opérateur $\mathcal{J}_1^{n,m,H}(t)$. Selon [55], il suffit d'établir le résultat pour l'opérateur

$$\mathcal{J}_{1,\epsilon}^{n,m,H}(t)\,\varphi(x,\xi) = \int_{B_\epsilon} \left[e^{-\sigma(\xi)s_1} \int_0^1 e^{-\sigma(\xi')s_2} d\xi' \int_{-1}^{1} f(\xi)\, h(\xi')\, g(\xi'') \right.$$

$$\times [V(t-s_1-s_2)\varphi]\left[x + (sign\ \xi)\, 4na + 4ma - \xi s_1 - \xi' s_2, \xi''\right]$$

$$\chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left. \times\ \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \frac{(sign\ \xi')[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\, d\xi'' \right] ds_1 ds_2$$

où

$$B_\epsilon = \left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ s_1 \geq 0,\ \ s_2 \geq \epsilon > 0,\ \ s_1 + s_2 \leq t\ \right\}.$$

Le changement de variable $x' = x - \xi' s_2 - \xi s_1 + 4ma + (sign\ \xi)\, 4na$ permet d'écrire

$$\mathcal{J}_{1,\epsilon}^{n,m,H}(t)\,\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)s_1} \int_{B_\epsilon} ds_1 ds_2 h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)$$

$$\int_{-a}^{a} dx' \int_{-1}^{1} s_2^{-1} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1) \times$$

$$\chi_{\left[\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{|\xi'|}, \frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{|\xi'|}\right]}(s_2)\, V(t-s_1-s_2)\,\varphi(x', \xi")\, d\xi".$$

Nous notons que $\mathcal{J}_{1,\epsilon}^{n,m,H}(t)$ est un opérateur intégral de noyau

$$k_{n,m,1}(x,\xi,s_1,s_2,x',\xi'') = e^{-\sigma(\xi)s_1} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} s_2^{-1} f(\xi)$$

$$\times h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) g(\xi") \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\times\chi_{\left[\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')},\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')}\right]}(s_2).$$

De plus, $\mathcal{J}_{1,\epsilon}^{n,m,H}(t)$ peut être factorisé sous la forme

$$\mathcal{J}_{1,\epsilon}^{n,m,H}(t) = G_{1,\epsilon}^{n,m,H}.G_2.G_1$$

où

$$\begin{cases} G_1: \ L^p(]-a,a[\times[-1,1]) \to L^p(B_\epsilon\times]-a,a[\times[-1,1]) \\ \\ (G_1\varphi)(s_1,s_2,x,\xi) = V(t-s_1-s_2)\varphi(x,\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_2: \ L^p(B_\epsilon\times]-a,a[\times[-1,1]) \to L^p(B_\epsilon\times]-a,a[) \\ \\ (G_2\varphi)(s_1,s_2,x') = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(\xi'')\varphi(s_1,s_2,x',\xi'')\,d\xi'' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} G_{1,\epsilon}^{n,m,H}: \ L^p(B_\epsilon\times]-a,a[) \to L^p(]-a,a[\times[-1,1]) \\ \left(G_{1,\epsilon}^{n,m,H}\varphi\right)(x,\xi) = \displaystyle\int_{(s_\epsilon\times]-a,a[)} e^{-\sigma(\xi)s_1} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} s_2^{-1} f(\xi) \\ \quad \times h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|},\frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1) \\ \times\chi_{\left[\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')},\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')}\right]}(s_2)\varphi(s_1,s_2,x')\,ds_1ds_2dx'. \end{cases}$$

Comme les opérateurs G_1 et G_2 sont bornés. Nous allons établir la compacité de $G_{1,\epsilon}^{n,m,H}$. En effet, soit $\varphi\in L^p(B_\epsilon\times]-a,a[)$, alors

$$\left\| \left(G_{1,\epsilon}^{n,m,H} \right) \varphi \right\|_{L^p(]-a,a[\times[-1,1])} \leq \int_{S_{n,m,1}} \left| \int_{\{B_\epsilon \times]-a,a[\}} e^{-\sigma(\xi)s_1} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} s_2^{-1} f(\xi) \right.$$

$$\times h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) \chi_{\left[\frac{(sign\ \xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sign\ \xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(s_1)$$

$$\left. \times \chi_{\left[\frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m-1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')}, \frac{[x-s_1\xi+(sign\ \xi)4na]+(4m+1)a}{\xi'(\xi,s_1,s_2,x')}\right]}(s_2)\, \varphi(s_1,s_2,x')\, ds_1 ds_2 dx' \right|^p dx d\xi.$$

En utilisant le fait que $e^{-\sigma(\xi)s_1}$ est une fonction bornée ; il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left\| \left(G_{\epsilon}^{n,m,H} \right) \varphi \right\|_{L^p(]-a,a[\times[-1,1])} \leq M \int_{S_{n,m,1}} \left| \int_{\{B_\epsilon \times]-a,a[\}} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)} s_2^{-1} f(\xi) \right.$$

$$\left. \times h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) \varphi(s_1,s_2,x')\, ds_1 ds_2 dx' \right|^p dx d\xi.$$

En prolongeant les fonctions $h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)$ par 0 en dehors de l'intervalle $[-1,1]$ et $\varphi(s_1,s_2,x')$ par 0 en dehors de l'intervalle $]-a,a[$ et en tenant compte du fait que la fonction

$$e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} s_2^{-1} h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) \in L^1(\mathbb{R})$$

nous obtenons

$$\left\| \left(G_{1,\epsilon}^{n,m,H} \right) \varphi \right\|_{L^p(]-a,a[\times[-1,1])} \leq M \int_{S_{n,m,1}} |f(\xi)|^p d\xi \left| \int_{\{B_\epsilon \times]-a,a[\}} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right)s_2} s_2^{-1} \right.$$

$$\left. \times h\left(\frac{x-x'+4ma+(sign\ \xi)4na-s_1\xi}{s_2}\right) \varphi(s_1,s_2,x')\, ds_1 ds_2 dx' \right|^p dx.$$

Par ailleurs l'inégalité de Young appliquée aux fonctions φ et h (voir[18, théorème IV. 30, p. 77]) montre que

$$\left\| \left(G_{1,\epsilon}^{n,m,H} \right) \right\|_{L^p(]-a,a[\times[-1,1])} \leq C_{n,m,1} \|f\|_{L^p[-1,1]} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

où $C_{n,m,1}$ est une constante dépendante de la mesure de l'ensemble $S_{n,m,1}$. Ceci montre que l'opérateur $G_{1,\epsilon}^{n,m,H}$ dépend continûment (pour la topologie de la norme) du couple $(f,g) \in L^p([-1,1] \times L^1(\mathbb{R}))$. Alors, en approchant la fonction f (pour la norme de L^p) par des fonctions bornées à supports compacts, et $h(.)$ (pour la norme de L^1) par des fonctions bornées, nous déduisons que $G_{1,\epsilon}^{n,m,H}$ est une limite (pour la topologie uniforme) des opérateurs intégraux sur $L^p(]-a,a[)$ à noyaux bornés. Donc $G_{1,\epsilon}^{n,m,H}$ est compact sur $L^p(]-a,a[\times[-1,1])$ pour $1 < p < \infty$ ([29, théorème 16.1, p. 294]) et faiblement compact pour $L^1(]-a,a[)$ si $p = 1$ ([26, corollaire 11, p. 294]). Ceci complète la preuve de la compacité (resp. la faible compacité dans X^1).

La preuve de la seconde assertion découle de la première assertion et du théorème $(2.1.5)$.

Remarque 4.3.2. En tenant compte de la remarque (4.2.2) une démarche analogue à celle utilisée ci-dessus permet d'établir la compacité (resp. la faible compacité) de $R_2^H(t)$ dans X^p, $1 < p < \infty$, (resp. X^1) lorsque les conditions aux limites sont périodiques.

Bibliographie

[1] **F. Ammar-Khodja and M. Mokhtar-Kharroubi,** On the exponential stability of advection semigroups with boundary operators. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **8** 95-106 (1996).

[2] **N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu,** Neutron transport with periodic boundary conditions. *Trans. Theor. Stat. Phys.* **5** (1976) , 115-125.

[3] **N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu,** Linear monoenergetic transport with refletion boundary conditions. *Rev. Rou. Phys.* **19** (1974) , 17-26.

[4] **N. Angelescu and V. Protopopescu,** On a problem in linear transport theory. *Rev. Rou. Phys.* **22** (1977) , 1055-1061.

[5] **w. Arendt,** Resolvent positive operators. *Proc. London Math. Soc.* **54** 321-349 (1987) .

[6] **L. Arlotti and B. Lods**, work in progress.

[7] **J. K. Batty and D. W. Robinson,** Positive one parameter semigroups on ordered spaces. *Acta Appl. Math.* **1** 221-296 (1984) .

[8] **R. Beals and V. Protopopescu**, Abstract time-dependent transport equations. *J. Math. Anal. Appl.* **121** 370-405 (1987) .

[9] **A. Belleni-Morante,** The initial value problem for neutron transport in a slab with perfect reflection boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1970) ; **30 :** 353-374.

[10] **A. Belleni-Morante**, A mathematical model for particle transport he with mollified boundary conditions. *Mathematical and Computer Modeling* (1992) ; **16 :** 131-137.

[11] **N. Bellomo and M. Pulvirenti Eds**, Modeling in applied sciences : A Kinetic theory approach, *Birkhäuser, Bostone* (2000) .

[12] **G. Borgioli and S. Totaro,** Semigroup properties of the streaming operator with multiplying boundary conditions. *Transport theory and Statistical Physics* (1994) ; **23** : 1035-1049.

[13] **G. Borgioli and S. Totaro,** 3D-streaming operator with multiplying boundary conditions : semigroup generation properties. *Semigroup Forum* **55** 110-117 (1997) .

[14] **M. Boulanouar**, Le transport neutronique avec des conditions aux limites générales. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.* **I 329** 121-124 (1999) .

[15] **M. Boulanouar**, Opérateur d'advection : Existence d'un semi-groupe (I) *Transp. Theory. Stat. Phys.* **31** 169-176 (2002) .

[16] **M. Boulanouar**, Opérateur d'advection : Existence d'un semi-groupe (II) *Transp. Theory. Stat. Phys.* **32** 185-197 (2003) .

[17] **M. Boulanouar and H. Emamirad**, A transport equation in cell population dynamics. *Differential Integral Equations* **13** 125-144 (2000) .

[18] **H. Brezis,** Analyse fonctionnelle : Théorie et Application, *Masson, Paris* (1983) .

[19] **M. Cessenat**, Théorèmes de traces L_p pour les espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.* **I 299** 831-834 (1984) .

[20] **M. Cessenat**, Théorèmes de traces pour les espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.* **I 300** 89-92 (1985) .

[21] **C. Cercignani,** The Boltzmann equation and its applications, *Springer-Verlag, New York* (1988) .

[22] **C. Cercignani, R.Illner and M.Pulvirenti,** The mathematical theory of dilute gases, *Springer-Verlag, New York* (1994) .

[23] **M. Chabi and K. Latrach,** On singular mono-energetic transport equations in slab geometry. *Math. Methods Appl. Sci.* **25** 1121-1147 (2002) .

[24] **M. Chabi and K. Latrach,** Singular one-dimensional transport equations on L_p- *spaces. J. Math. anal. Appl.* **283** 319-336 (2003) .

[25] **Chen Jun and Yang Ming-Zhu,** Linear transport equation with specular refection boundary conditions. *Transp. Theory Stat. Phys.* **20** 281-306 (1991) .

[26] **N. Dunford and Jt. Schwartz,** Linear operators, Part I : General theory. *Wiley-Interscience : New York,* (1958) .

[27] **W. Greenberg, C Van Der Mee and V. Protopopescu,** Boundary value problems in abstract kinetic theory, Birkhäuser Verlag, Basel (1987) .

[28] **G. Greiner,** Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equation. *Mathematische Zeitschrift* (1984) ; **185 :** 167-177.

[29] **E. Hille and R. Phillips,** Function analysis and semigroups. *American Mathematical Society colloquium Publications 31, Providence R. I,* (1957) .

[30] **K. Jörgens,** An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. *Communications on Pure and Applied Mathematics* (1958) ; **XI :** 219-242.

[31] **K. Jörgens,** Linear integral operators. *Pitman Advanced Publishing Program,* (1982) .

[32] **K. Latrach,** Théorie spectrales d'équations cinétiques. Thèse de doctorat. *Université de Franche-Comté* (1992) .

[33] **K. Latrach and M. Mokhtar-Kharroubi,** Spectral analysis and generation results for streaming operators with multiplying boundary conditions. *Positivity* **3** 273-296 (1999) .

[34] **K. Latrach and A. Zeghal,** Existence results for a boundary value problem arising in growing cell populations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **31** 1-17 (2003) .

[35] **J. L. Lebowitz and S. I. Rubinow,** A theory for the age and generation time distribution of a microbial population. *J. Math. Biol.* **1** 17-36 (1974) .

[36] **J. Lehner and M. Wing,** On the spectrum of an unsymetric operator arising in the transport theory of neutrons. *Comm. Pure and Appl. Math.* **8** (1955) , 217-234.

[37] **J. Lehner and M. Wing,** Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry, *Duke Math.* **J. 23** (1956) , 125-142.

[38] **B. Lods,** A generation theorem for kinetic equations with non-contractive boundary operators. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.* **I** 335 655-660 (2002) .

[39] **B. Lods,** Théorie spectrale d'équations cinétiques. Thèse de doctorat. *Université de Franche-Comté* (2002) .

[40] **B. Lods,** On linear kinetic equations involving unbounded cross-sections. *Math. Methods Appl. Sci.* **27** 1049-1075 (2004) .

[41] **B. Lods,** On the spectrum of transport operator with specular and bounce-back reflections conditions. *Work in progress.*

[42] **B. Lods and M. Mokhtar-Kharroubi,** On the theory of growing cell population with zero minimum cycle length. *Math. Models Methods Appl.* **266** 70 99 (2001) .

[43] **S. Mancini and S. Totaro,** Solutions of the vlasov equation in a slab with source terms on the boundaries. *Riv. Math. Univ. Parma* **2** 33-47 (1999) .

[44] **M. Mokhtar-Kharroubi,** Time asymptotic behaviour and compactness in neutron transport theory. *European Journal of Mechanics B Fluid* (1992) ; **11 :** 39-68.

[45] **M. Mokhtar-Kharroubi,** Mathematical topics in neutron transport theory. *New Aspects. Advances in Mathematics and Applied Sciences, 46, World Scientific : Singapore* (1997) .

[46] **A. Palczewski,** Velocity averaging for boundary value problems, in nonlinear kinetic theory and mathematical aspects of hyperbolic systems, (Edited by V. Boffi. F. Bampi. G. Toscani), *Word Scientific. Series Adv. Math. Sci.* **Vol. 9** (1992) .

[47] **A. Pazy,** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. *Springer : New York,* (1983) .

[48] **A. Pelczynski,** On strictly singular and cosingular operators, **II.** Strictly singular and cosingular operators in $L(v) - spaces$. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* (1965) ; **13 :** 6-23.

[49] **S. Totaro,** Study of free streaming operator in slab geometry in dependence of the boundary conditions. *Math. Meth. Appl. Sci.* **20** 717-736 (1997) .

[50] **C. Van Der Mee,** Time dependent kinetic equations with collision terms relatively bounded with respect to collision frequency. *Transp. Theory Stat. Phys.* **30** 63-90 (2001) .

[51] **I. Vidav,** Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory. *Journal of Mechanical analysis and applications* (1970) ; **30 :** 264-279.

[52] **J. Voigt,** Existence and uniqueness of non negative eigenfunction of the Boltzmann operator, *J. Math. Anal. Appl.* **22** (1968) , 144-155.

[53] **J. Voigt,** A perturbation theorem for essential spectral radius of strongly continuous semigroups. *Monatshefte für Mathematik* (1980) ; **90 :** 153-161.

[54] **J. Voigt,** Functional analytic treatment of initial boundary value problem for collisionless gases, *München, Habilitatiobsschrift* (1981) .

[55] **J. Voigt,** Spectral properties of the neutron transport equation. *Journal of Mechanical analysis and applications* (1985) ; **106 :** 140-153.

[56] **G. F. Webb,** Theory of nonlinear age-dependent population dynamics, *Marcel Dekker, New York* (1985) .

[57] **G. F. Webb,** A model of proliferating cell population with inherited cycle length. *J. Math. Biol.* **23** 269-282 (1986) .

[58] **Lw. Weis,** A generation of the Vidav-Jörgens perturbation theorem for semigroups and its applications to transport theory. *Journal of Mechanical analysis and applications* (1988) ; **129 :** 6-23.

[59] **M. M. R. Williams,** Mechanical Methods in particle transport theory, *Butterworth, London* (1971) .