

M. / 531.603

**Université du 8 mai 1945 Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin D'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master**

**Option : Maintenance Industrielle**

**Présenté par : BOUANANI Sofiane**

=====

***ETUDE PAR ELEMENT FINIS D'UN PALIER***  
***AERODYNAMIQUE A FEUILLES***  
***STATIQUEMENT CHARGES***

=====

Sous la Direction de :

**Pr.M.Lahmar**

**Année universitaire 2011/2012**



## Résumé

Dans cette étude, on se propose de résoudre par élément finis l'équation de Reynolds non linéaire compressible écrite pour un gaz (air) afin de calculer les performances aérodynamiques (pression, portance aérodynamique, traînée, débit massique,...) d'un palier et d'une butée à gaz génération I de micro-turbine (MEMS). Les calculs seront effectués pour une charge imposée. La méthode de Newton-Raphson doit être appliquée pour la recherche des coordonnées de la position d'équilibre statique du rotore.

**Mots Clés:** Palier à gaz, Butée à gaz, Eléments finis, Algorithme de Newton-Raphson, gaz parfait, Méthode de substitution, Equation de Reynolds compressible.



# Remerciement

Tous d'abord je remercie **ALLAH TAALA** le tous puissant au nom d'**ALLAH** le clément et le miséricordieux qui nous a mené le courage, la force et la patience au cours de toute notre vie et au cours de l'élaboration de ce mémoire et qui nous a toujours dirigé vers le bon chemin en éclairant les nuits les plus obscures.

En tout premier lieu je tiens à remercier les membres de jury d'avoir accepté de juger mon travail.

Pr : **Mustapha Lahmar** d'avoir accepté de m'encadrer et diriger mes travaux, pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je ne manquerai pas d'exprimer mes vifs remerciements à tout le personnel de la **GERMAN** de constantine pour leur accueil, aide, conseils pour les facilités qui m'ont été accordées au stage afin de réaliser ce travail.

Je ne pourrais jamais oublier la faveur de mes maîtres et mes enseignants, sont oublier **tous les responsables de département de génie mécanique à université de Guelma** qui ont sacrifié leurs temps et efforts afin de nous mettre sur la bonne voie et surtout mon encadreur.

Je remercie aussi Mr : **Zertie Abderrahmen, Oussama et chaoiki** pour leur l'aide.

C'est très difficile de citer tous les collaborateurs et je risquerai d'oublier quelqu'un qu'il soit fortement remercie.



### Dédicace

*J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail*

*A ma très chère **Mère** quelle reçoit le témoignage ma profonde affection*

*A mon très cher **Père***

*A mes chers frères et saures : FOUAD , CHAFIA, NAZIHA, RAHIMA, YASMINA, YASSINE, YAHIA et ACHRAF et tout ma familles*

*A mes très chers amis SALIM, SAMIR, HOUSSEM, sans oublier D.IA.FEI , ADEI , ARDEL.RZAK et tous mes amis*

*A tous mes collègues d'université de Guelma et de la résidence.*



*Mr : BOUANANI SOFIANE*

## Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Introduction générale .....  | 01        |
| <b>Chapitre I: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PALIERS ET BUTEES A GAZ</b>         |           |
| <b>I. 1 PALIERS RADIAUX.....</b>   | <b>02</b> |
| <b>I.1.1 Les profils indéformables.....</b>                                      | <b>04</b> |
| <b>I.1.1.1 Les paliers circulaires.....</b>                                      | <b>04</b> |
| <b>I.1.1.2 Les paliers à lobes discontinus.....</b>                              | <b>05</b> |
| <b>I.1.1.3 Les paliers à patins oscillants.....</b>                              | <b>06</b> |
| <b>I.1.2 Les profils déformables.....</b>  | <b>06</b> |
| <b>I.1.2.1 Les paliers à patins rigides montés sur éléments déformables.....</b> | <b>07</b> |
| <b>I.1.2.2 Les paliers à feuilles.....</b>                                       | <b>07</b> |
| <b>I.1.2.2.1 La technologie Garrett .....</b>                                    | <b>08</b> |
| <b>I.1.2.2.2La technologie MITI.....</b>   | <b>09</b> |
| <b>I.1.3 Etude de la technologie la plus prometteuse.....</b>                    | <b>10</b> |
| <b>I.1.3.1. Profils de paliers.....</b>  | <b>11</b> |
| <b>I.1.3.1.1 Architecture et géométrie.....</b>                                  | <b>11</b> |
| <b>I.1.3.1.2 Matériaux et revêtements.....</b>                                   | <b>11</b> |
| <b>I.1.3.2 Performances .....</b>  | <b>12</b> |
| <b>I.1.3.2.1 Caractéristiques statiques.....</b>                                 | <b>12</b> |
| <b>I.1.3.2.2 Caractéristiques dynamiques.....</b>                                | <b>13</b> |
| <b>I.1.3.2.3 Arrêts – démarrages.....</b>  | <b>14</b> |
| <b>I.1.3.3 Quelques problèmes d'application des paliers à air.....</b>           | <b>15</b> |
| <b>I. 2 PALIERS AXIAUX ( BUTEES ).....</b>                                       | <b>16</b> |
| <b>I.2.1 Butées à géométrie fixe .....</b>                                       | <b>16</b> |
| <b>I.2.2 Butées à géométrie variable.....</b>                                    | <b>16</b> |

|   |    |
|---|----|
| I.2.2.1 Butées à pivot .....  | 17 |
| I.2.2.2 Butées à feuilles.....  | 18 |
| I.2.2.3 Durée de vie des butées à feuilles.....   | 19 |
| I. 3 Conclusion .....   | 20 |
| <b>Chapitre II : Théorie de la lubrification aérodynamique en régime laminaire</b>                        |    |
| II. 1 Introduction.....   | 21 |
| II.2 Lois générales de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible.....        | 21 |
| II. 3 Application à un palier aérodynamique.....  | 24 |
| II. 4 Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien et compressible...                    | 25 |
| II. 5 Equation géométrique du film aérodynamique.....   | 28 |
| II. 6 Performances statiques du palier.....   | 30 |
| II. 6. 1 Composantes de la portance aérodynamique.....  | 30 |
| II. 6.2 Angle de calage et charge portante.....   | 31 |
| II. 7 Conclusion.....   | 31 |
| <b>Chapitre III : Résolution de l'équation de Reynolds non linéaire par éléments finis pour un palier</b> |    |
| III. 1 Introduction.....  | 32 |
| III. 2 Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension.....                                 | 32 |
| III. 3 Discrétisation par la méthode des éléments finis.....  | 33 |
| III. 3.1 Principe de la méthode.....  | 33 |
| III. 3.2 Formulation élémentaire et discrétisation par éléments finis.....                                | 34 |
| III. 3.3 Expressions des matrices $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$ sur l'élément de référence.....            | 37 |

|  |    |
|--|----|
| III. 3.4 Choix de l'élément du maillage.....   | 41 |
| III. 3.5 Méthode de résolution du problème EAD en régime stationnaire.....                         | 42 |
| III. 3.5 Résolution du système d'équations algébriques réduit.....                                 | 43 |
| III. 3.6 Calcul des composantes de la portance aérodynamique.....                                  | 44 |
| III .4 Conclusion.....   | 45 |
| <br><b>Chapitre IV : Etude paramétrique</b>  |    |
| IV. 1 Introduction.....  | 46 |
| IV.2 Recherche de la position d'équilibre.....   | 46 |
| IV. 3 Résultats et interprétations.....  | 53 |
| IV. 3.1 Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la géométrie du film.....               | 53 |
| IV.3.2.Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur le profil de pression aérodynamique..... | 53 |
| IV. 4 Conclusion.....  | 60 |
| Conclusion Générale.....   | 61 |
| Référence Bibliographique.....   | 62 |

## Liste des figures

|  |    |
|--|----|
| <b>Fig. I. 1</b> Principales architectures de paliers à air.....   | 03 |
| <b>Fig. I.2</b> Définition de la géométrie d'un palier lisse.....  | 04 |
| <b>Fig. I. 3</b> Schématisation d'un palier à trois lobes asymétriques.....                                      | 05 |
| <b>Fig. I. 4</b> Schématisation d'un palier à quatre patins oscillants.....                                      | 06 |
| <b>Fig. I. 5</b> Schématisation d'un palier à quatre patins oscillants sur ressorts.....                         | 07 |
| <b>Fig. I.6</b> Photographie d'un Paliers à feuilles.....  | 08 |
| <b>Fig. I.7</b> Schématisation d'un palier à feuilles Garrett.....   | 09 |
| <b>Fig. I. 8</b> Schématisation d'un palier à feuilles MITI.....   | 10 |
| <b>Fig. I. 9</b> Schématisation d'un palier à feuilles MITI à trois lobes.....                                   | 11 |
| <b>Fig. I.10</b> Evolution du couple de frottement lors d'une phase d'arrêt – démarrage à basse température..... | 14 |
| <b>Fig. I.11</b> Evolution du couple de frottement lors d'une phase d'arrêt – démarrage à haute température..... | 15 |
| <b>Fig. I.12</b> Butée à géométrie fixe.....   | 16 |
| <b>Fig. I.13</b> Principaux types de butées développés.....  | 17 |
| <b>Fig. I.14</b> Secteur articulé.....   | 18 |
| <b>Fig. I.15</b> Butée type Garrett.....   | 18 |
| <b>Fig. I.16</b> Butée type MTI.....   | 19 |
| <b>Fig. I.17</b> Évolution du couple axial en fonction de la vitesse de rotation.....                            | 20 |
| <br>   |    |
| <b>Fig. II.1</b> Schéma général d'un contact aérodynamique.....  | 23 |
| <b>Fig. II.2</b> Schématisation d'un palier aérodynamique à feuille.....   | 24 |
| <b>Fig. II.3</b> Schéma du contact aérodynamique selon la théorie de Reynolds (palier développé).....            | 26 |
| <br>   |    |
| <b>Fig. II.4</b> Support compliant d'un palier à feuilles (foils).....   | 29 |
| <b>Fig. II.5</b> La géométrie d'un coussinet rigide de gaz.....  | 30 |
| <br>   |    |
| <b>Fig. III. 1</b> Maillage du film par éléments finis (MEF (2D)).....   | 34 |
| <br>   |    |
| <b>Fig. III. 2</b> Transformation géométrique.....   | 38 |
| <br>   |    |
| <b>Fig. III. 3</b> Élément réel $\tilde{A}^{(e)}$ de forme rectangulaire.....                                    | 39 |

**Fig. III. 4** Eléments de référence avec indication des points d'intégration de Gauss..41

**Fig. IV.1** Géométries du film aérodynamique calculées pour un palier rigide ( $\alpha=0.0$ ) et un palier compliant ( $\alpha=0.44$ ) fonctionnement à  $N(40,100 \text{ krpm})$ .....54-56

**Fig. IV.2** Profils de pression aérodynamique calculés pour un palier rigide et un palier compliant fonctionnement à  $N(40,100 \text{ krpm})$ .....57-59

## Liste des tableaux

|  |    |
|--|----|
| <b>Tableau III. 1:</b> Paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension (*)..... | 40 |
| <b>Tableau IV. 1:</b> Caractéristiques géométriques du palier à feuilles.....        | 52 |
| <b>Tableau IV. 2:</b> Caractéristiques physiques du fluide lubrifiant (air).....     | 52 |

A decorative circular frame with a light blue border. At the four corners of the circle, there are ornate floral motifs in shades of green, yellow, and red. The text "Introduction générale" is centered within the circle in a blue, serif font.

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Les paliers à air ont reçu dans ces dernières décennies une attention considérable et trouvent des applications de plus en plus nombreuses dans le cas des vitesses élevées, de faibles charges et une grande précision sont nécessaires.

La lubrification à l'aide d'un gaz permet de limiter la puissance dissipée par frottement fluide. En effet, la viscosité dynamique de l'air est environ 100 fois plus faible qu'une huile peu visqueuse.

La surface déformable d'un palier radial est constituée de deux parties, une feuille supérieure lisse qui fournit la surface du palier et une feuille ondulée flexible (bump) découpée en bandes dans le sens axial qui fournit un support déformable à cette surface.

Le but de la feuille est d'accommoder le champ de pression aérodynamique à l'intérieur du palier avec un jeu radial plus grand que celui que l'on aurait avec un palier lisse (rigide).

Ils offrent un meilleur amortissement que les paliers rigides du fait des frottements de Coulomb feuille supérieure/bumps et bumps/stator. Cet amortissement supérieur leur permet une meilleure stabilité aux vitesses critiques.

De plus la déformabilité des paliers à feuilles les rend plus tolérants vis-à-vis des défauts d'alignement ainsi que des dilatations thermiques.

Le matériau le plus souvent utilisé pour les feuilles est l'Inconel X-750. On trouve également l'Inconel 713LC et le 718 pour le rotor.

L'objectif de ce présent travail est la réalisée sur les paliers aérodynamiques radiaux. Nous nous intéresserons successivement aux profils déformables puis indéformables.

Enfin, nous focaliserons notre étude sur la technologie qui nous semble la plus prometteuse et que nous avons choisie pour le développement des paliers à air spécifiques à la société Micro turbo.

L'étude de l'influence des caractéristiques élastiques tels que le module d'Young du matériau constituant les feuilles sur la répartition du champ de pression dans le fluide a été aussi envisagée.

Nous avons pu conclure que le module d'élasticité a une influence non négligeable sur le champ de pression et la portance aérodynamique du système.

A decorative oval frame with a light blue border. At each of the four corners, there is a stylized floral motif in shades of green, yellow, and red. The text is centered within this frame.

# Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE  
SUR LES PALIERS ET BUTEES A GAZ

---

## Chapitre I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PALIERS ET BUTEES A GAZ

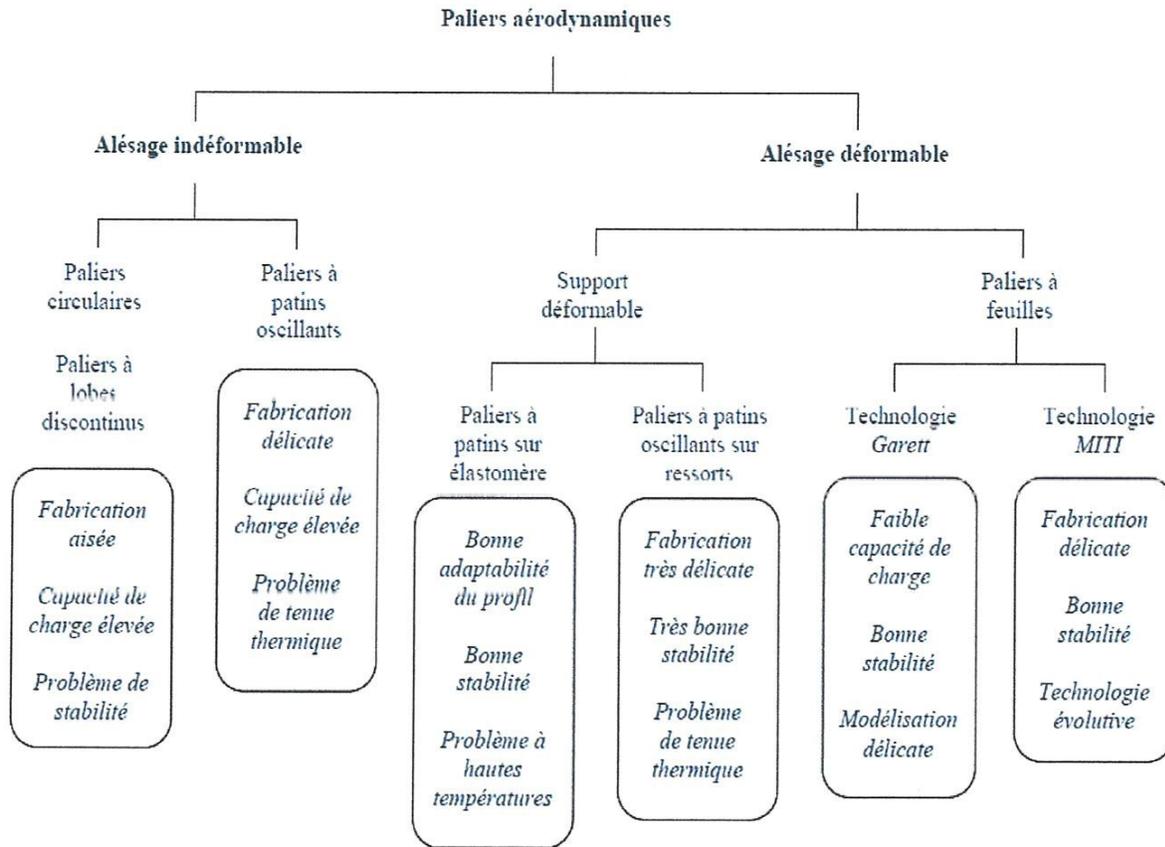
#### I.1 PALIERS RADIAUX

Nous allons présenter une étude des principales avancées scientifiques et technologiques réalisées dans le domaine des paliers aérodynamiques radiaux depuis les années 60. C'est en effet à cette époque que l'utilisation de paliers aérodynamiques pour le guidage des arbres dans les machines tournantes a progressivement été mise en place.

Les paliers aérodynamiques se divisent en deux grandes familles :

- Les paliers à géométrie indéformable,
- Les paliers à géométrie déformable.

La **Figure I.1** détaille les principales technologies développées ainsi que leurs caractéristiques. Nous allons présenter successivement les principaux profils de paliers aérodynamiques radiaux à profil rigide et déformable.



**Fig. I. 1 Principales architectures de paliers à air**

### 1.1 Les profils indéformables

Les premiers paliers à gaz utilisés dans des systèmes mécaniques furent des paliers à géométrie indéformable. Pour mémoire, rappelons les principaux avantages par rapport à l'utilisation de paliers à roulement ou lubrifiés à l'aide d'un fluide incompressible :

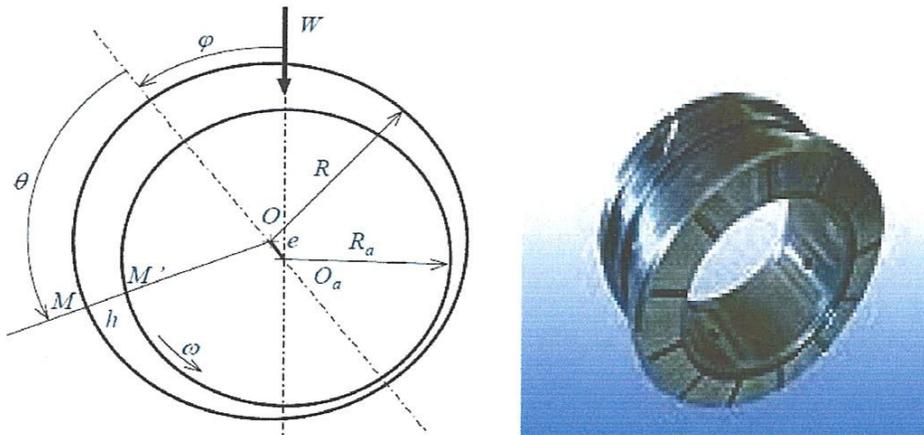
- faible frottement, faible dissipation d'énergie, d'où la possibilité de fonctionner à de grandes vitesses de rotation,
- lubrification sans apport extérieur ; le lubrifiant est directement prélevé dans le milieu (contrairement au mode de lubrification classique des machines aéronautiques,
- fiabilité élevée ; le mécanisme fonctionnant à lubrifiant perdu les propriétés de celui-ci sont invariantes dans le temps, en fonctionnement l'usure est quasi inexistante,
- lubrifiant non limité en température.

Toutefois, les paliers aérodynamiques possèdent un certain nombre de limitations dont la prise en compte est indispensable pour leur conception :

- faible capacité de charge portante,
- problème d'instabilités des dispositifs,
- problème technologique de mise en œuvre : précision d'usinage ; choix des matériaux ; qualité de l'air utilisé.

#### 1.1.1 Les paliers circulaires

Ce type de paliers est également connu sous le nom de paliers « lisses ». La géométrie est très simple puisque le coussinet du palier est constitué d'un alésage cylindrique, **Fig. I.2**.



**Fig. I.2** Définition de la géométrie d'un palier lisse

Les caractéristiques statiques de ces paliers sont intéressantes puisqu'ils sont capables de soutenir des charges élevées. En revanche, ils sont rarement employés car leur stabilité est médiocre comparativement aux exigences de fonctionnement des machines tournantes à grande vitesse, [1].

En effet, pour obtenir de bonnes performances en terme de stabilité, il a été montré qu'il vaut mieux se placer à nombre de compressibilité élevé, [2]. Ceci entraîne des jeux radiaux très faibles et des contraintes de fabrication plus sévères ainsi que de meilleurs états de surfaces.

### I.1.1.2 Les paliers à lobes discontinus

Les paliers non cylindriques à lobes discontinus, à précharge géométrique, ont été développés pour remédier aux problèmes de stabilité des paliers lisses.

L'étude des caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à lobes est analogue à celle des paliers lisses. Cependant, un grand nombre de paramètres intervient dans la définition géométrique du palier. La capacité de charge et la stabilité du palier ne dépendent plus seulement de l'excentricité relative du palier et du nombre de compressibilité mais également du nombre de lobes, de leur amplitude, de la précharge géométrique relative et de l'asymétrie, Fig I. 3, [3].

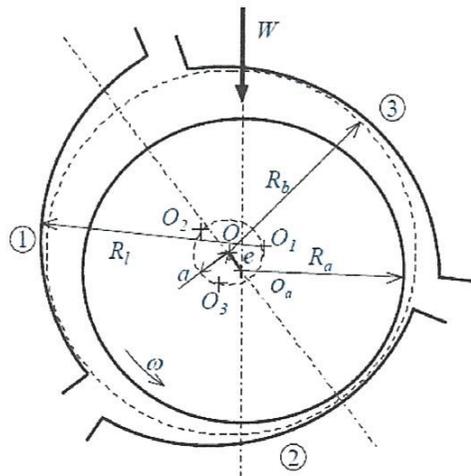
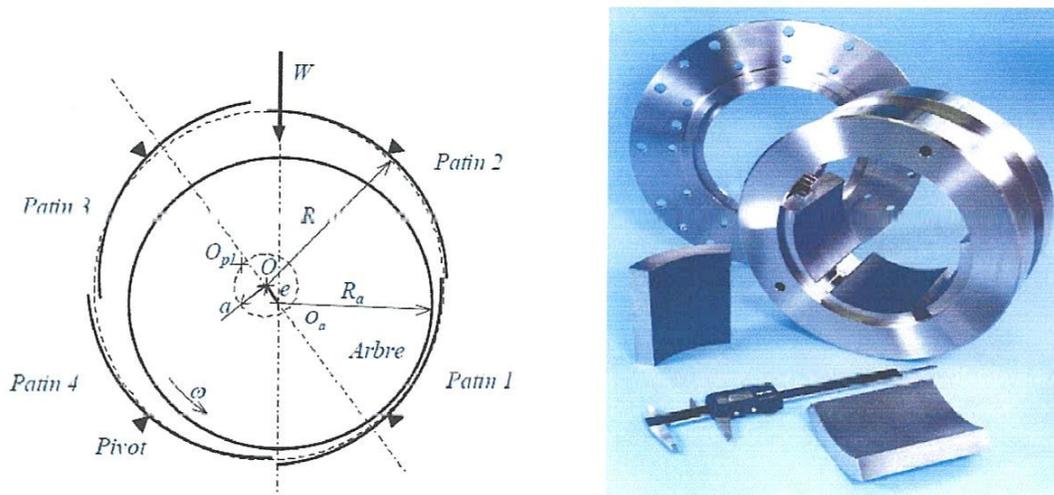


Fig. I. 3 Schématisation d'un palier à trois lobes asymétriques

### I. 1.1 3 Les paliers à patins oscillants

Les paliers à lobes discontinus possèdent des caractéristiques statiques et dynamiques plus intéressantes que celles des paliers lisses. Cependant, les valeurs géométriques qui optimisent ces caractéristiques dépendent des conditions de fonctionnement. Ainsi, comme dans le cas des paliers hydrodynamiques, l'idée d'adapter la géométrie en fonctionnement conduit à l'étude des paliers à patins oscillants pour lesquels la position des patins évolue avec la position de l'arbre, **Fig. I. 4**, [2].



**Fig. I. 4** Schématisation d'un palier à quatre patins oscillants

### I. 1.2 Les profils déformables

Les paliers à alésage déformable sont moins sensibles aux dommages causés par des particules étrangères du fait du jeu plus grand, mais aussi parce que la structure peut se déformer pour faciliter leur passage et leur évacuation du contact.

Deux grandes familles de paliers à profil déformable existent :

- les paliers à patins rigides montés sur des éléments déformables,
- les paliers à feuilles, constitués d'un fourreau et d'un ensemble de feuilles,

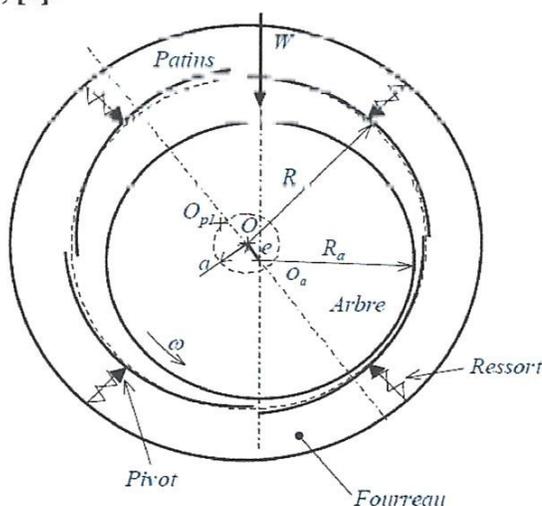
Une des principales qualités que l'on accorde aux paliers à feuilles est de générer un champ de pression aérodynamique dans le film d'air avec un jeu radial plus grand que leurs homologues à profil rigide. Cette augmentation de jeu permet ainsi de réduire les contraintes de cisaillement dans le fluide et donc de limiter les pertes de puissance, [4].

### I.1.2.1 Les paliers à patins rigides montés sur éléments déformables

La structure déformable du palier peut être constituée soit d'une ou plusieurs portées en élastomère, soit de ressorts montés sur des pivots. Dans ce dernier cas, leur géométrie est identique à celle définie au paragraphe précédent, **Fig. I. 5**. Les ressorts permettent aux patins de se déplacer lorsque la charge devient trop importante ou lorsque les variations de température modifient sensiblement les caractéristiques géométriques de l'arbre.

L'étude statique et dynamique des paliers à patins montés sur ressorts est complexe. Les paramètres géométriques évoluent en fonctionnement, en particulier la précharge et l'excentricité. De plus, aux paramètres géométriques des paliers à patins oscillants, il convient d'ajouter la raideur des ressorts montés au droit de chaque pivot, [2].

Le choix de la raideur des ressorts est donc essentiel. Cette raideur doit être suffisamment élevée pour conserver une précharge convenable en fonctionnement. Par contre, sa valeur doit rester faible pour permettre la dilatation de l'arbre ou pour minimiser les défauts géométriques par exemple, [5].



**Fig. I. 5** Schématisation d'un palier à quatre patins oscillants sur ressorts

### I. 2.2 Les paliers à feuilles

Le développement des paliers à feuilles a commencé au début des années 70 pour assurer le guidage en rotation d'arbres de turbines à gaz. L'un des objectifs de l'époque était de valider leur tenue thermomécanique à des températures élevées.

Actuellement, les domaines d'application sont plus étendus mais concernent toujours le guidage des arbres tournant à des vitesses de rotation très élevées, supportant des charges modérées et soumis à des contraintes thermiques parfois sévères.



**Fig. I.6 Photographie d'un Paliers à feuilles**

On distingue deux familles de paliers à feuilles :

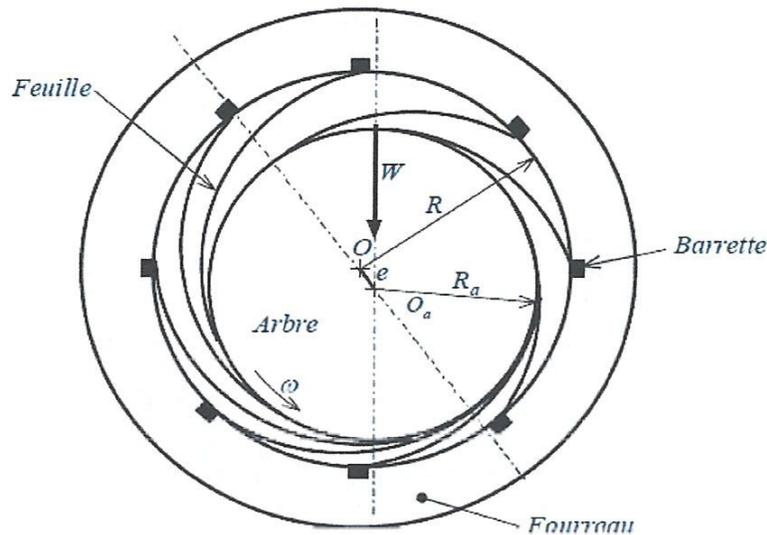
- paliers de type *Garett*, [6],
- paliers de type *MITI*, [7], [4],

#### **I.1.2.2.1. La technologie Garett**

Le palier est constitué d'un fourreau sur lequel sont articulées huit à douze feuilles enroulées les unes sur les autres. L'ensemble constitue un feillard déformable. L'ancrage de ces feuilles est assuré par l'intermédiaire d'une barrette soudée à l'extrémité de chaque feuille et logée dans une encoche sur le fourreau, **Fig. I. 7**.

L'étude structurale permet dans un premier temps de déterminer la configuration de l'arbre au repos sur lequel les feuilles sont plaquées. Le calcul des efforts de serrage qu'exercent les feuilles permet notamment de calculer le couple de démarrage. Cette étape permet d'initialiser le processus itératif conduisant aux calculs des caractéristiques statiques.

Les modélisations proposées ne sont plus simples, [6], car elles doivent tenir compte des frottements de Coulomb feuille – feuille, feuille – arbre et feuille – fourreau qui sont loin d’être négligeables.



**Fig. I.7** Schématisation d'un palier à feuilles Garrett

Bien que cette technologie soit appliquée industriellement dans des turbomachines aéronautiques, elle est maintenant le plus souvent écartée au profit de la technologie *MITI* plus performante et « plus simple » à modéliser.

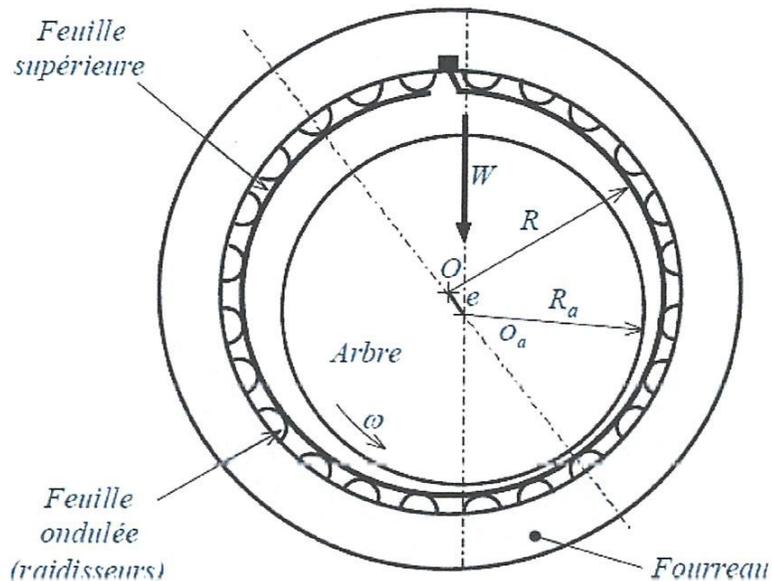
#### I. 1.2.2.2 La technologie MITI

La structure déformable du palier est constituée d'un empilage de feuilles lisses et ondulées (raidisseurs), **Fig. I.8**. L'étude théorique de ce type de paliers à feuilles est beaucoup plus complexe que celle des paliers à ressorts dans la mesure où elle doit prendre en compte une analyse de mécanique des solides nécessaire pour déterminer la déformation du palier en fonctionnement.

Pourtant, les modèles, [4], permettant de résoudre le problème structural sont généralement plus simples que ceux employés pour la technologie *Garrett*.

En effet, les comparaisons des résultats des modèles à des travaux expérimentaux [7], notamment sur la capacité de charge, montrent que l'on peut s'affranchir, en première

approximation, des frottements feuilles – raidisseurs et raidisseurs – fourreau dans la résolution du problème élasto – aérodynamique.



**Fig. I. 8 Schématisation d'un palier à feuilles MITI**

### I. 1.3 Etude de la technologie la plus prometteuse

Parmi les technologies employées avec succès, l'une d'elles se démarque par des résultats particulièrement intéressants et par une modélisation « simple ». Il s'agit de la technologie des paliers à empilage de feuilles de type *MITI*, [7].

De nombreuses études numériques et expérimentales s'intéressent aux caractéristiques statiques et dynamiques de ce type de paliers. Ces travaux portent sur deux domaines séparés :

- la recherche approfondie sur les phénomènes tribologiques liés aux arrêts – démarrages : le frottement sec qui intervient pendant ces phases est la principale cause de détérioration des paliers. L'état des surfaces et les matériaux en contact ont une influence déterminante dans les phénomènes mis en jeu, [8].

- le développement d'un modèle théorique permettant une simulation précise des performances élasto – aérodynamique du palier, [4].

Cette technologie permet, a priori, une étude structurelle très simple. La feuille supérieure assure la continuité du profil. La géométrie du coussinet et le comportement structural sont régis par les ressorts sur lesquels la feuille supérieure est appuyée.

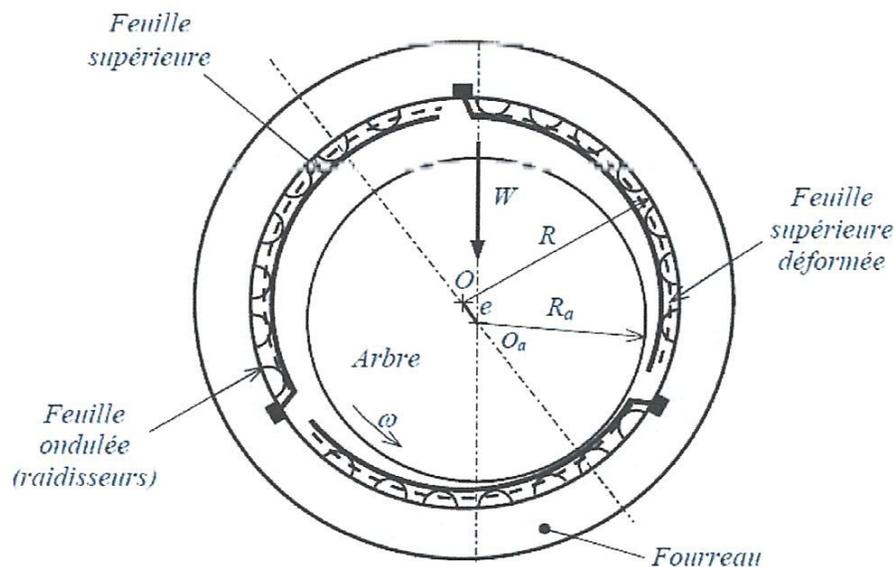
### I. 1.3.1 Profils de paliers

Les paliers utilisant la technologie de type *MITI* ont connu plusieurs variantes. En effet, le nombre de lobes, de feuilles supérieures et de feuilles de raidisseurs peut être adapté en fonction des performances souhaitées.

#### I. 1.3.1.1 Architecture et géométrie

Le premier palier développé selon cette technologie était constitué d'un fourreau rigide sur lequel sont soudées une feuille ondulée (raidisseurs) et une feuille supérieure s'étendant sur toute la circonférence du palier. Cet assemblage de feuilles assure à la fois le profil du palier ainsi que sa déformabilité, **Fig. I. 8**.

Les caractéristiques de ce type de paliers sont très proches de son homologue rigide (palier lisse) c'est à dire qu'il permet de soutenir des charges élevées, [9]. Par la suite, sont apparus les paliers à lobes, généralement trois secteurs, **Fig. I. 9**.



**Fig. I. 9** Schématisation d'un palier à feuilles MITI à trois lobes

#### I. 1.3.1.2 Matériaux et revêtements

La plupart des études expérimentales présentées dans la littérature concernent des paliers contenus dans des mécanismes tournant à haute vitesse avec des températures élevées.

Dès lors, il est fréquent de retrouver les matériaux suivants :

- Inconel 713 LC,
- Inconel 718,
- Inconel X750.

Pour les revêtements, les applications « froides » emploient très souvent le PTFE. Par contre, dès que les températures de fonctionnement augmentent, il faut avoir recours à des revêtements plus élaborés.

Dans les études sur des revêtements dits « haute température », on retrouve principalement des travaux de la NASA. Parmi les solutions les plus performantes nous citerons des revêtements à base de chrome et d'argent (lubrifiant basse température) et de fluorure de barium ou de calcium (lubrifiant haute température), [8].

### **I. 1.3.2 Performances**

La littérature est riche de travaux numériques et expérimentaux présentant les performances statiques et dynamiques des paliers à feuilles. La caractérisation de ces performances est du même type que pour les paliers hydrodynamiques.

#### **I. 1.3.2.1 Caractéristiques statiques**

Les principales caractéristiques statiques étudiées dans la littérature sont :

- la charge portante ou capacité de charge du palier,
- le couple de frottement en phase de frottement sec et en fonctionnement, c'est à dire une fois que le film d'air est créé,
- les débits de fluide dans le palier,
- l'élévation de la température en fonctionnement fluide, (pertinent pour les vitesses de rotation élevées).

Ces différentes caractéristiques dépendent bien entendu de la géométrie du palier et des propriétés mécaniques de la structure déformable :

- dimensions extérieures : longueur, diamètre,
- géométrie interne : nombre et forme des lobes, jeux radiaux,
- raideur de la structure, variation d'une extrémité à l'autre des lobes,
- frottements internes feuille supérieure – raidisseurs, raidisseurs – fourreau rigide.

### **I. 1.3.2.2 Caractéristiques dynamiques**

L'analyse du comportement dynamique d'un palier à feuilles peut être effectuée selon deux approches :

- méthode linéaire : calcul des coefficients dynamiques (matrices de raideur et d'amortissement) du palier. Pour un chargement donné, on perturbe la position d'équilibre statique du centre du rotor et on étudie les petits mouvements, [2],
- méthode non linéaire : calcul de la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du palier grâce à la résolution couplée de l'équation de Reynolds et des équations de la dynamique par une méthode pas à pas, [1].

La plupart des études théoriques s'intéressant aux caractéristiques dynamiques assimile la ligne d'arbre à un rotor rigide supporté de façon symétrique par deux paliers identiques. La modélisation de l'action dynamique des paliers se fait par l'approche linéaire.

#### **Analyse linéaire**

Le type d'étude dynamique le plus répandu est basé sur l'approche linéaire. La détermination des coefficients dynamiques du palier permet de déterminer la stabilité du point de fonctionnement considéré. Cette analyse permet d'établir des cartes de stabilité décrivant la vitesse seuil du palier ou la masse critique du rotor supportée par le palier en fonction des conditions de fonctionnement (géométrie et charge statique appliquée).

#### **L'amortissement dans les paliers à feuilles**

Les phénomènes liés à l'amortissement au sein de la structure du palier font l'objet de nombreuses études numériques et surtout expérimentales. Une des hypothèses utilisées dans le passé pour expliquer l'amortissement supérieur des paliers à feuilles est basée sur la présence des frottements internes à la structure déformable. Dès lors, il était supposé que, pour ajouter de l'amortissement, il suffisait d'augmenter le coefficient de frottement entre les feuilles en utilisant différents types de revêtements [10].

#### **Analyse non linéaire**

L'hypothèse de petits déplacements du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet et donc l'analyse linéaire possède certaines limitations. Elle ne permet pas de prévoir le comportement du palier lors du passage des vitesses critiques ou au-delà du seuil de stabilité. Il est alors nécessaire de résoudre simultanément l'équation de Reynolds écrite dans le cas du régime dynamique et les équations du mouvement de l'arbre.

Une analyse non linéaire peut effectivement prévoir le comportement d'un palier (déplacement de l'arbre, forces transmises...) sous sollicitation dynamique de type balourd et, plus généralement, extérieure quelconque, [11].

### I. 1.3.2.3 Arrêts – démarrages

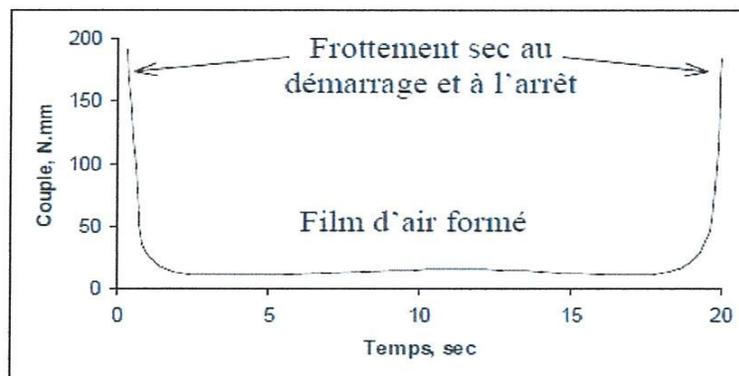
Les causes de détérioration des paliers fluides sont directement reliées au contact direct entre les surfaces. De ce fait, l'étude des phases d'arrêts – démarrages présente un grand intérêt dans la détermination de la durée de vie des paliers. Un palier est jugé inopérant ou détérioré lorsque la mise sous film d'air n'est plus effectuée dans la gamme de vitesse de fonctionnement.

Les travaux effectués dans ce domaine s'intéressent à la caractérisation de ces phases de fonctionnement en mesurant, en particulier :

- le couple de frottement de l'arbre sur le stator en fonction de la charge appliquée et de la température,
- la diminution d'épaisseur des revêtements déposés sur les surfaces.

Lors de la mise en rotation du mobile, celui-ci frotte sur la feuille supérieure ce qui se caractérise par un couple de frottement élevé, [8]. Ensuite, lorsque le rotor s'accélère, la pression aérodynamique générée au sein du film d'air permet alors la séparation des surfaces (décollage du rotor). Ce phénomène se traduit par une variation brutale dans l'évolution du couple de frottement. Lorsque le film d'air est établi, le couple de frottement est très faible,

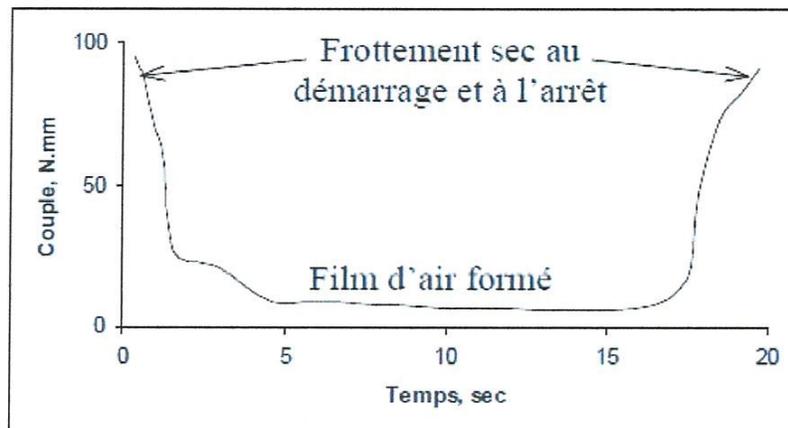
**Fig. I. 10.**



**Fig. I.10 Evolution du couple de frottement lors d'une phase d'arrêt – démarrage à basse température**

Une augmentation de la charge statique appliquée au rotor influence fortement le couple de frottement « sec ». Plus la charge est élevée et plus le couple de frottement est important.

Lorsque la température ambiante augmente, la valeur du couple de frottement a tendance à diminuer, **Fig. I. 11**.



**Fig. I.11 Evolution du couple de frottement lors d'une phase d'arrêt – démarrage à haute température**

Les tests de durée de vie présentés dans la littérature font état d'une capacité de 10,000 à plus de 100,000 cycles d'arrêts – démarrages selon les configurations d'essais. Il est bien évident que le choix des revêtements des surfaces en contact influence fortement les conditions de frottement et d'usure et par la même la durée de vie du palier.

### **I. 1.3.3 Quelques problèmes d'application des paliers à air**

Les performances aérodynamiques des paliers à air peuvent être perturbées par rapport à une configuration idéale par un certain nombre de paramètres liés à l'intégration des paliers radiaux dans une machine et à leur fabrication.

Du point de vue de l'intégration dans la machine, on retiendra :

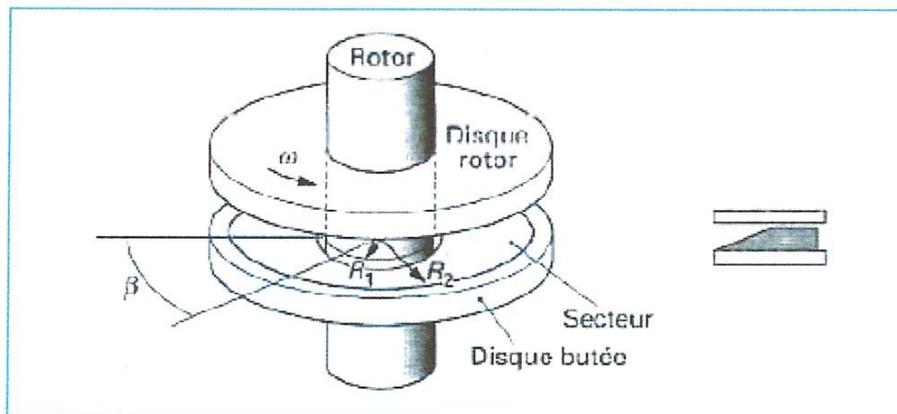
- la variation du jeu radial avec le régime de fonctionnement,
- le désalignement de l'arbre dans le palier,
- la température de fonctionnement,
- les excitations dynamiques extérieures,
- la qualité de l'air d'alimentation.

## I. 2. PALIERS AXIAUX ( BUTEES )

Dans cette partie, nous étudions l'élément technologique qui permet de reprendre la charge axiale appliquée sur un arbre en rotation. Dans un premier temps, nous présentons les principaux résultats pour un patin rectangulaire (cas de la glissière plane). Puis nous traitons le cas de patins circulaires (cas de la butée). Le cas de patins déformables sera enfin présenté.

### I. 2.1 Butées à géométrie fixe

La **fig. I.12** présente une butée à géométrie fixe. Celle-ci est composée de plusieurs secteurs circulaires (entre 4 et 20). Comme pour les patins, les secteurs vont former un convergent avec le disque rotor.



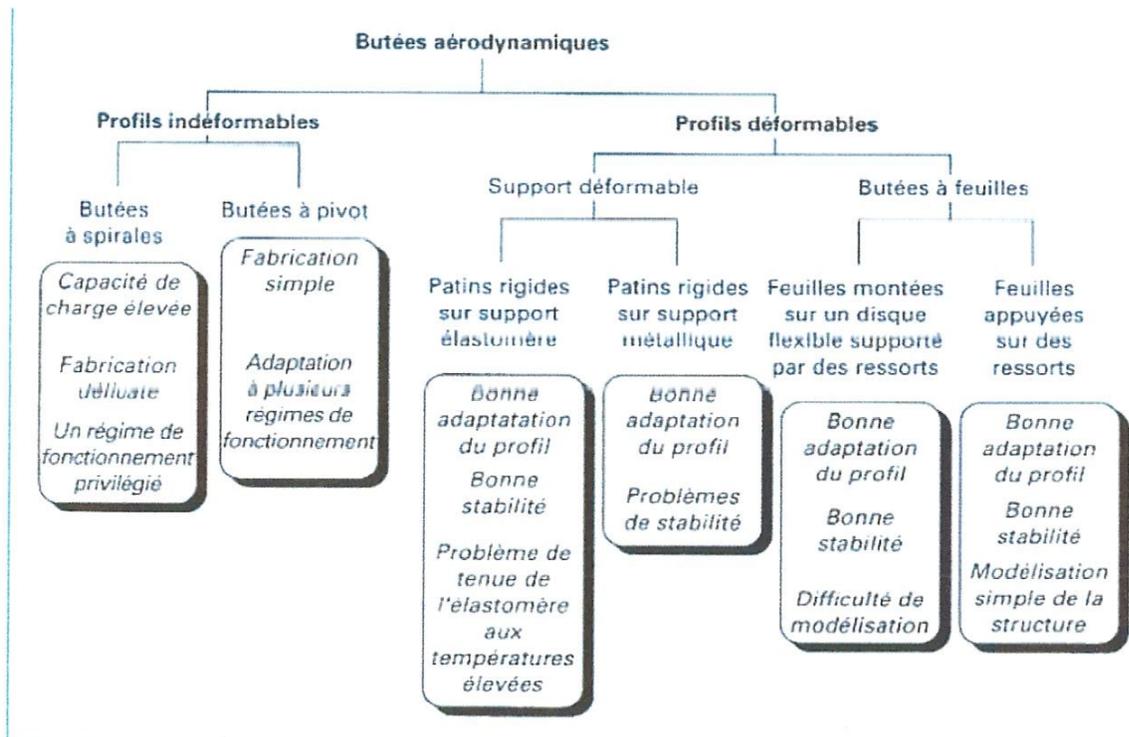
**Fig. I.12** Butée à géométrie fixe

### I. 2.2 Butées à géométrie variable

Les butées à géométrie fixe présentent certains inconvénients qui pénalisent fortement leur utilisation. Les dimensions du convergent (hauteur du film lubrifiant de l'ordre du micromètre) imposent des précisions d'usinage au dixième de micromètre. Le jeu de fonctionnement est très sensible aux différences de dilatation thermique entre les éléments fixés au rotor et ceux fixés au carter de la machine.

L'amortissement dynamique n'est assuré que par le film gazeux et certaines instabilités peuvent se développer.

Les réalisations effectuées et les améliorations ainsi obtenues sont résumées sur la **fig. I.13**. Les butées qui paraissent aujourd'hui les plus performantes sont les butées à feuilles. Les butées montées sur pivot sont ainsi de moins en moins utilisées. Nous décrivons successivement ci-après les méthodes qui permettent de dimensionner ces deux types de butées.



**Fig. I.13** Principaux types de butées développés

### I. 2.2.1 Butées à pivot

De nombreuses études traitent de ces butées [13]. La **fig. I. 14** montre le schéma d'un secteur articulé. Le secteur est en équilibre lorsque le pivot (repéré par l'angle  $\theta$ ) est placé au point d'application des forces. Le moment de celles-ci par rapport au pivot est alors nul. La forme du convergent pour le patin sur pivot est légèrement différente de celle du cas rigide : lorsque le patin pivote autour d'un de ces rayons, la hauteur de film d'air n'est plus constante

radialement. Nous pouvons alors noter que la position optimale du pivot est comprise entre 65 % et 75 % de la longueur d'un secteur de butée.

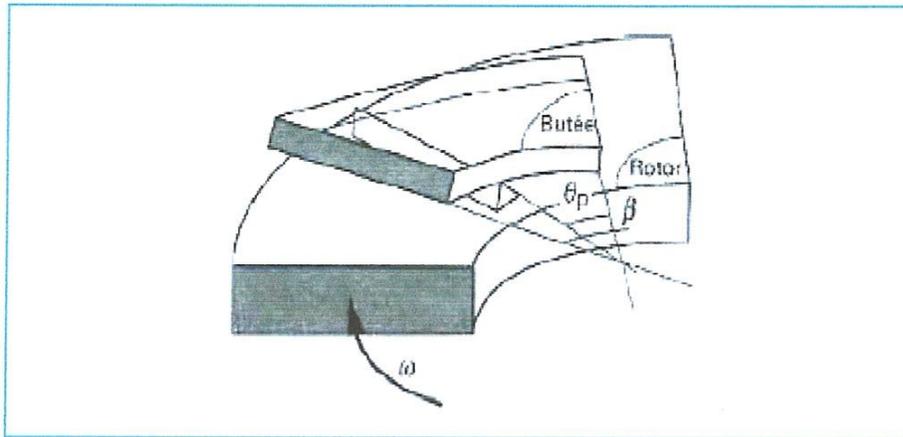


Fig. I.14 Secteur articulé

### I. 2.2.2 Butées à feuilles

Pour ces butées, les secteurs sont formés de feuilles métalliques appuyées sur des éléments raidisseurs. Deux types de butées à feuilles sont actuellement utilisés avec succès. Le premier type a été développé par la société Garrett. Les secteurs sont composés de feuilles métalliques soudées sur des disques flexibles appuyés sur des éléments raidisseurs (fig. I. 15) [14].

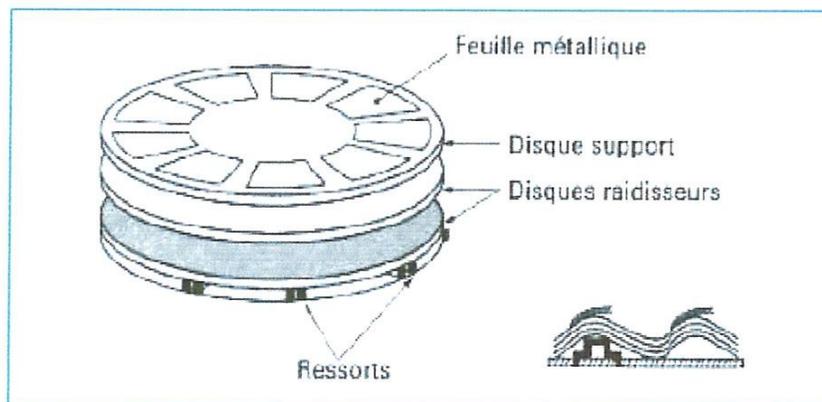
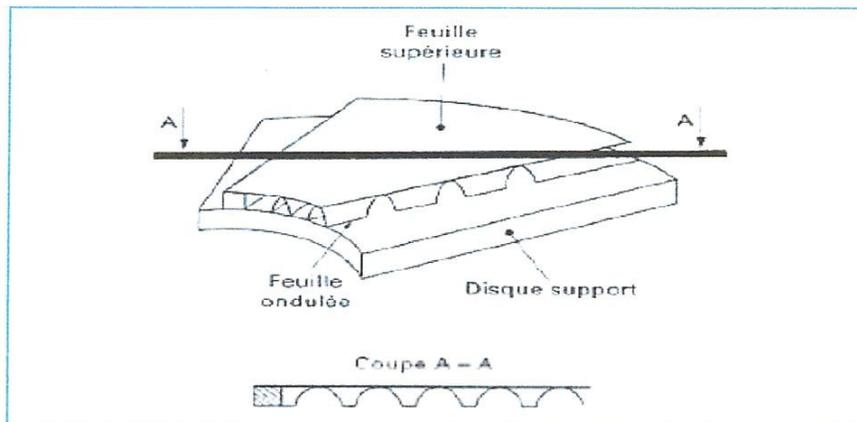


Fig. I.15 Butée type Garrett

Le second type a été développé par la société MTI. Les secteurs sont composés de feuilles métalliques directement appuyées sur des éléments raidisseurs (fig. I. 16) [15].



**Fig. I.16 Butée type MTI**

### I. 2.2.3 Durée de vie des butées à feuilles

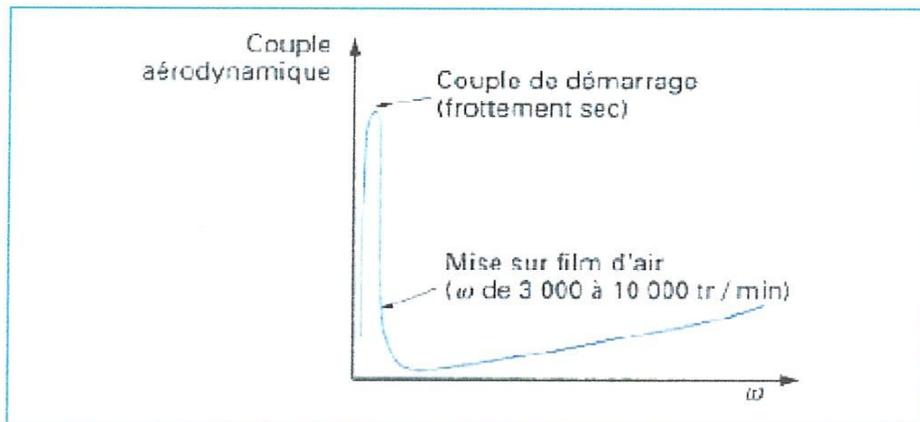
La capacité des secteurs à se déformer permet aux butées à feuilles une meilleure adaptation vis-à-vis des problèmes cités précédemment :

- différence de dilatation thermique.
- non-parallélisme entre les plans du rotor et de la butée.
- ingestion de particules étrangères.

Finalement, la durée de vie de ces systèmes est déterminée par l'usure dans les phases d'arrêt/démarrage. Le frottement sec avant la mise sous film d'air détermine le couple de démarrage (fig. I. 17). Les éléments en contact sont donc recouverts de matériaux qui permettent de diminuer au maximum ce couple :

- les feuilles peuvent être recouvertes d'une couche de téflon de quelques dizaines de micromètres ;
- des revêtements en céramique sont également testés. Lorsque ces revêtements sont usés, le couple de démarrage devient trop élevé, ce qui bloque la machine.

Actuellement, les butées à feuilles ont une durée de vie, comptée en nombre d'arrêts/démarrages, de l'ordre de 100 000 cycles. Des recherches sur les couples de matériaux en présence dans ces phases permettront d'augmenter encore leur durée de vie , [16].



**Fig. I.17 Évolution du couple axial en fonction de la vitesse de rotation**

### I. 3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présentés une étude bibliographique sur les différents types des paliers aérodynamique radiaux et axiaux utilisés dans les guidages en rotation des lignes d'arbre de machines tournantes. parmi les paliers présentés on s'intéresse plus particulièrement a l'étude d'un palier aérodynamique à feuille, comparativement aux autres paliers, les paliers aérodynamiques peuvent être utilisés dans des conditions de fonctionnement sévères, là où les vitesses de rotations sont très élevées avec une portance aérodynamique considérable, leur utilisation est de plus en plus élargie dans les dernières décennies.

A decorative circular frame with a light blue border. At the four corners of the circle, there are ornate floral motifs in shades of green, yellow, and red. The text is centered within the circle.

# Chapitre II

*Théorie de la lubrification aérodynamique*

---

## Chapitre II

### Théorie de la lubrification aérodynamique en régime laminaire

#### II. 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les équations de base de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible. Pour cela, nous rappelons les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir la loi de conservation de la masse, loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi constitutive des gaz parfaits. L'utilisation de l'hypothèse d'un écoulement en film mince permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide.

Pour ce type d'écoulement le comportement du film fluide peut être décrit par une équation aux dérivées partielles de deuxième ordre à caractère non linéaire appelée équation de Reynolds, la résolution de celle-ci dans le cas de la lubrification aérodynamique permettra de déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant, ce dernier servira pour le calcul des performances aérodynamiques du contact lubrifié.

#### II. 2 Lois générales de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible

Les équations générales de la lubrification aérodynamique permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques de déterminer les caractéristiques de l'écoulement de l'air en film mince et particulièrement sa portance aérodynamique.

Elles sont déduites à partir des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à des fluides newtoniens et compressibles.

Quand la température est supposée constante en tout point du milieu fluide; c'est à dire régime d'écoulement isotherme, l'équation de l'énergie n'est plus à prendre en compte.

Dans le cas d'un fluide newtonien et compressible les équations générales sont les suivantes:

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad , i = 1, 2, 3 \quad (\text{II-1})$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II-2})$$

- Loi de comportement rhéologique pour un fluide compressible et newtonien :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda D_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II-3})$$

$i, j, k = 1, 2, 3$  ou  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  est le tenseur des taux de déformation

Dans ces équations :

$x_i, t$  : variables d'espace et de temps ;

$u_i$  : composante de la vitesse d'écoulement ;

$f_i$  : forces massiques extérieures ;

$\rho$  : masse volumique du fluide ;

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes

$p$  : pression dans le fluide ;

$\mu$  : constantes de Navier ou viscosité dynamique du fluide.

$\lambda$  : coefficient de viscosité de dilatation du fluide

$\delta_{ij}$ : Symbole de Kronecker  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ : taux de dilatation cubique ( $D_{kk} = 0$  pour un fluide isovolume ou incompressible).

En reportant l'équation (II-3) dans l'équation (II-2), on obtient les équations de Navier - Stokes:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad (\text{II-4})$$

$i, j = 1, 2, 3$  avec  $\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j}$  (dérivée totale ou particulaire)

Les équations de Navier - Stokes (II-4) et de conservation de la masse ou de continuité (II-1) permettent, après application des conditions limites de déterminer la répartition de pression dans le fluide visqueux étudié.

Pour un écoulement en film mince ( $\frac{h}{L} \ll 1$ ) (Fig. II-1), les équations (II-4) se simplifient sensiblement et deviennent [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad (\text{II-5.a})$$

Ou encore en faisant un changement de variables pour passer de la notation indicielle à la notation classique :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{II-5.b})$$

avec  $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$  et  $(u, v, w) \equiv (u_1, u_2, u_3)$

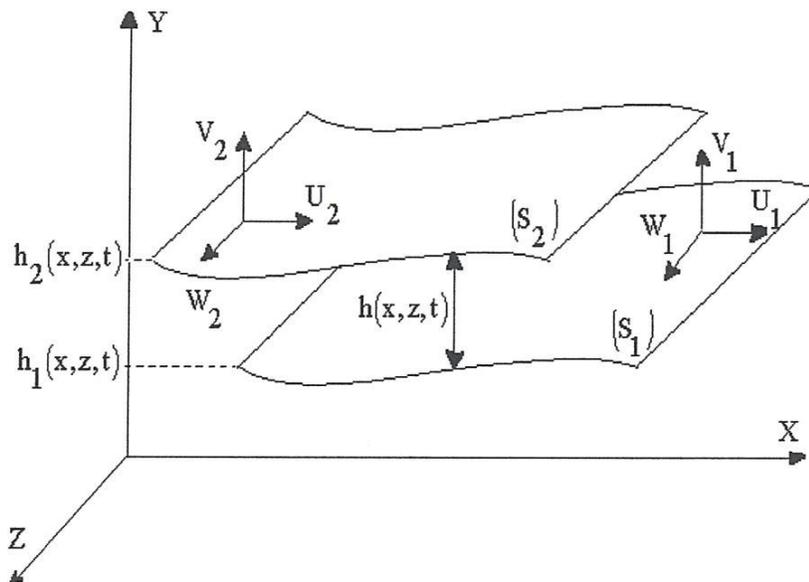


Fig. II.1 Schéma général d'un contact aérodynamique

### II. 3 Application à un palier aérodynamique

Dans le cadre de la lubrification des paliers aérodynamiques, certaines hypothèses simplificatrices sont adoptées.

Ces hypothèses peuvent se répartir en trois groupes :

- Hypothèses liées à la géométrie du palier;
- Hypothèses liées au fluide;
- Hypothèses générales indépendantes du milieu fluide.

#### a) Hypothèses liées à la géométrie du palier

Dans un palier aérodynamique à feuilles, Fig. II.2, l'épaisseur du film lubrifiant  $h$  est très petite par rapport aux autres dimensions du palier (longueur et diamètre), on est en régime de lubrification par film mince visqueux.

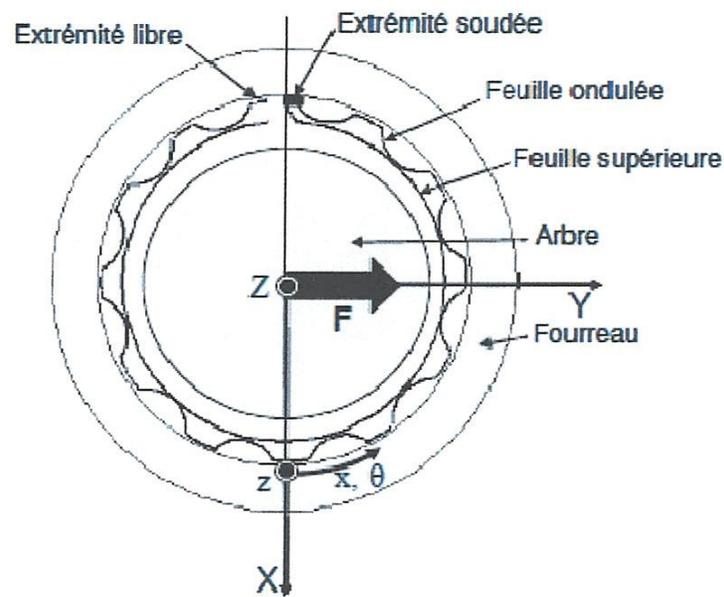


Fig. II.2 Schématisation d'un palier aérodynamique à feuille

**b) Hypothèses liées au fluide lubrifiant**

Le fluide est assimilable à un gaz parfait et l'écoulement est isotherme, c'est-à-dire  $T = \text{cte}$ , la viscosité du fluide ne varie pas suivant l'épaisseur du contact.

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0$$

**c) Hypothèses générales**

- Les forces massiques et les couples de volume sont négligés;
- L'écoulement est laminaire et les forces d'inertie ne sont pas prises en considération;
- Il n'y a pas de glissement au niveau du contact fluide-parois, cette hypothèse permet d'écrire les conditions de non glissement des particules de fluide au niveau des parois qui servent comme conditions aux limites sur les vitesses lors de l'intégration des équations (II-5);
- Les surfaces de l'arbre et du coussinet sont supposées lisses (non rugueuses et non poreuse).

**II. 4 Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien et compressible**

Pour un écoulement 3-D figure (II-3), l'équation de continuité et les équations de mouvement du fluide se réduisent à:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II-7})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II-8})$$

Les conditions aux limites sur la vitesse sont:

$$y=0 \text{ (surface du coussinet): } u = U_1, v = V_1 = 0, w = W_1. \quad (\text{II-9})$$

$$y=h \text{ (surface de l'arbre): } u = U_2, v = V_2 = \frac{Dh(x,z,t)}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{dh}{dx} + W_2 \frac{dh}{dz} \text{ et } w = W_2$$

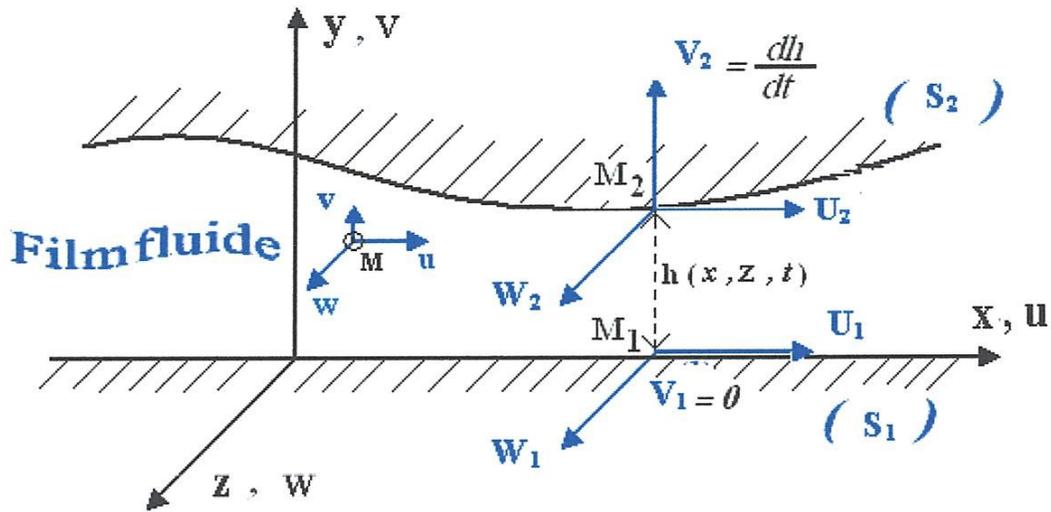


Fig. II.3 Schéma du contact aérodynamique selon la théorie de Reynolds

(palier développé)

Après deux intégrations par rapport à  $y$  des équations (II-7) et (II-8), on obtient l'expression de la composante de la vitesse suivant la direction  $x$ :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y}{\mu} dy + A(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + C(x, z) \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y}{\mu} dy + B(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x, z) \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

Si par hypothèse, la viscosité est indépendante de  $y$ ,  $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0$ , l'expression des composantes de la vitesse devient :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{A}{\mu} y + C \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{B}{\mu} y + D \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

En utilisant les conditions aux limites (II-9) les deux composantes de la vitesse d'écoulement s'expriment :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

Les premiers termes des deux équations (II-12), représentent l'écoulement de Hagen-Poiseuille (dû au gradient de pression) et les seconds termes représentent l'écoulement de Couette (dû au déplacement des parois).

L'équation de Reynolds est obtenue en introduisant l'équation (II-12) dans l'équation de continuité (II-6) et en intégrant à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy = 0$$

L'intégration de cette équation a travers l'épaisseur du film donne :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{II-13})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} I_1 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy \\ I_2 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy = [\rho v]_0^h = \rho V_2 \\ I_3 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy \end{cases}$$

Le calcul des intégrales  $I_1$  et  $I_2$  seffectue à l'aide du théorème de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x, h_2, z, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x, h_1, z, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (\text{II-14})$$

L'équation de Reynolds dans le cas général s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h}{2\mu} (U_1 + U_2) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h}{2\mu} (W_1 + W_2) \right) + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II-15})$$

Dans le cas d'un palier, l'équation de Reynolds (II-15) se simplifie sensiblement et prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U_2 \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II-16})$$

Soit en remplaçant  $x$  par  $R\theta$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6U_2}{R} \frac{\partial(\rho h)}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II-17})$$

En remplaçant  $U_2$  par  $\omega R$ , on obtient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial(\rho h)}{\partial \theta} + 12 \mu \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II-18})$$

En assimilant l'air à un gaz parfait, on peut remplacer  $\rho$  par  $\frac{p}{\mathfrak{R}T}$  où  $T$  est la température supposée constante et  $\mathfrak{R}$  est la constante des gaz parfaits, l'équation (II-18) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( p h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} R^2 \left( p h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega R^2 \frac{\partial(p h)}{\partial \theta} + 12 \mu R^2 \frac{\partial(p h)}{\partial t} \quad (\text{II-19})$$

Les conditions aux limites nécessaires au calcul du champ de pression sont :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = p_a \\ p(\theta = 2\pi, z) = p_a \end{cases}, \quad \begin{cases} p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = p_a \\ p\left(\theta, z = +\frac{L}{2}\right) = p_a \end{cases} \quad (\text{II-20})$$

Sous la forme (II-19), l'équation de REYNOLDS est fortement non linéaire, sa résolution ne peut pas être effectuée analytiquement, pour cela, nous avons recours aux méthodes numériques tels que la méthode des différences finies ou des éléments finis.

## II. 5 Equation géométrique du film aérodynamique

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression de l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas de palier rigide et compliant.

La compliance des feuilles ondulées peut être calculé en utilisant le modèle de Heshmat [4,7] figure (II.4) :

$$K = \frac{2s}{E} \left( \frac{1}{t_b} \right)^3 (1 - \nu^2) \quad (\text{II-23})$$

Où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant les feuilles.

Dans le cas d'un palier aligné, l'épaisseur du film aérodynamique est calculée par la relation suivante:

$$h = C + e \cos\theta + K (p - p_a) \quad (\text{II-24})$$

Où :

$e$  : est l'excentration tel que  $e = |\overrightarrow{O_c O_a}|$

$C$  : est le jeu radial du palier,

$\theta$  : la coordonnée circoufférentielle mesurée à partir de la ligne des centres,

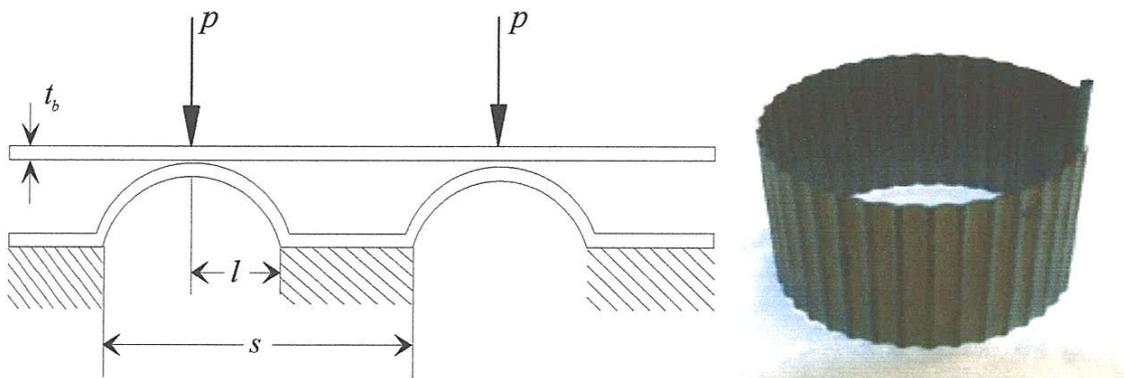
Sous forme adimensionnelle l'équation (II-21) devient,

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos\theta + \alpha (\beta - 1) \quad (\text{II-25})$$

Où  $\varepsilon = \frac{e}{c}$  l'excentricité relative de fonctionnement variant de 0 à 1.

$$\text{et : } \alpha = \frac{2p_a s}{EC} \left( \frac{l}{t_b} \right)^3 (1 - \nu^2) \quad (\text{II-26})$$

$\alpha$  étant le nombre de compliance ou le facteur d'élasticité adimensionné.



**Fig. II.4 Support compliant d'un palier à feuilles (foils)**

La résolution du problème de lubrification hydrodynamique inverse ; c'est-à-dire dans le cas d'une charge statique imposée, nécessite l'emploi du paramétrage  $(X, Y)$  au lieu du paramétrage  $(\varepsilon, \phi)$  figure II.5. Dans ces conditions, l'équation géométrique du film devient :

$$h = C + X \cos\theta + Y \sin\theta + K(p - p_a) \quad (\text{II-27})$$

$\theta$  étant la coordonnée circonférentielle du palier dont l'origine est située sur l'axe X (direction de la charge statique  $W_0$ ).

Soit en utilisant les variables sans dimension :

$$\tilde{h} = 1 + X \cos\theta + Y \sin\theta + \alpha(\tilde{p} - 1) \quad (\text{II-28})$$

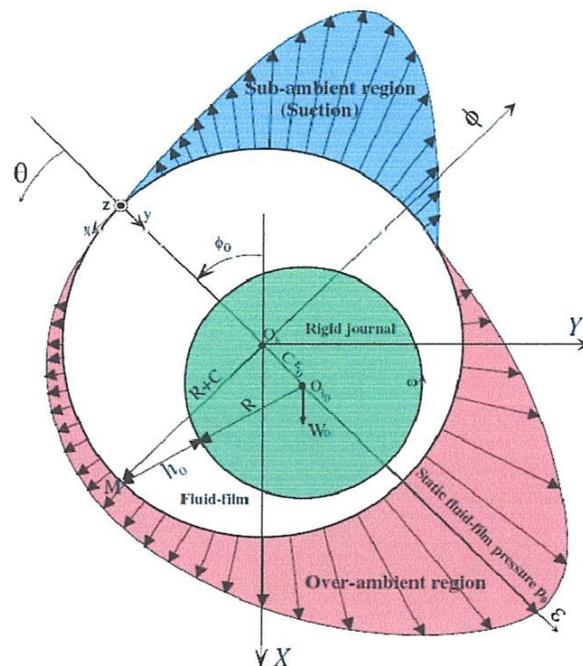


Fig. II.5 La géométrie d'un coussinet rigide de gaz

## II. 6 Performances statiques du palier

### II. 6.1 Composantes de la portance aérodynamique

Les composantes de la portance aérodynamique dans le repère  $(\varepsilon, \phi)$  sont obtenues par l'intégration du champ de pression aérodynamique après résolution de l'équation (II-19) sur la surface de l'arbre:

$$F_{\varepsilon} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta \, d\theta \, dz \quad (\text{II-29})$$

$$F_{\phi} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \, d\theta \, dz$$

## II. 6.2 Angle de calage et charge portante

L'angle de calage du palier est calculé par la relation suivante:

$$\Phi = \arctg \left( -\frac{F_{\phi}}{F_{\varepsilon}} \right) \quad \text{tel que : } 0 < \Phi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{II-30})$$

$$\tilde{W} = (F_{\phi}^2 + F_{\varepsilon}^2)^{1/2} \quad (\text{II-31})$$

## II. 7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les lois fondamentales des milieux continus écrites pour un fluide newtonien et compressible.

L'utilisation des hypothèses liées à la géométrie du palier, hypothèses liées au fluide, hypothèses générales indépendantes des milieux fluides permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide.

La dérivation de l'équation de Reynolds à partir des équations de mouvement et de continuité a nécessité l'emploi de plusieurs hypothèses simplificatrices.

Le modèle élastique des feuilles qui a été choisi est celui développé par Heshmat, la simplicité de ce modèle nous permet de calculer avec une précision suffisante la déformation radiale des feuilles dues à la pression aérodynamique.



# Chapitre III

Résolution de l'équation de Reynolds non  
linéaire par éléments finis pour un palier

## Chapitre III

### Résolution de l'équation de Reynolds non linéaire par éléments finis pour un palier

#### III. 1 Introduction

L'équation de Reynolds compressible (II.19) dérivée dans le chapitre précédent est une équation différentielle partielle (EDP) du second ordre de type elliptique, à caractère non linéaire dont l'inconnue est la pression  $p$ .

En outre, les géométries souvent complexes des paliers ainsi que les conditions aux limites ne permettent toujours pas d'envisager une solution analytique à cette équation.

Pour ce type d'équations, les méthodes actuelles utilisées pour sa résolution sont les différences finies (MDF), les éléments finis (MEF) et les volumes finis (MVF).

La méthode de discrétisation retenue dans notre étude est celle des éléments finis bidimensionnelle.

#### III. 2 Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension

Pour le traitement numérique, il convient d'écrire l'équation de Reynolds en variables adimensionnées. pour cela, on pose :

$$\theta = \frac{x}{R}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{c}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \lambda = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (\text{III-1})$$

L'équation de Reynolds (II -19) après a dimensionnement s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{p} \tilde{h}) \quad (\text{III-2})$$

Les conditions aux limites nécessaires au calcul du champ de pression sont :

$$\begin{cases} \tilde{p} \left( \theta, \tilde{z} = -\frac{1}{2} \right) = 1 \\ \tilde{p} \left( \theta, \tilde{z} = +\frac{1}{2} \right) = 1 \end{cases} \quad (\text{III-3a})$$

$$\begin{cases} \tilde{p} (\theta = 0, \tilde{z}) = 1 \\ \tilde{p} (\theta = 2\pi, \tilde{z}) = 1 \end{cases} \quad (\text{III-3b})$$

$$\tilde{p} (\theta = \theta_2, \tilde{z}) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} (\theta = \theta_2, \tilde{z}) = 0 \quad (\text{III-3c})$$

Il faut tenir compte du nombre de compressibilité adimensionnel  $\Lambda$ , il dépend de la viscosité dynamique du gaz  $\mu$ , de la vitesse angulaire de l'arbre  $\omega$ , du jeu radial  $C$  et de la pression atmosphérique  $p_a$  ce nombre est calculé par la relation suivante :

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left( \frac{R_a}{C} \right)^2 \quad (\text{III-4})$$

### III. 3 Discrétisation par la méthode des éléments finis

#### III. 3.1 Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation nodale par sous domaines. Elle consiste à découper le domaine  $\tilde{A}$  en un ensemble de sous domaines appelés éléments  $\tilde{A}^{(e)}$  tel que  $\tilde{A} = \bigcup_{e \geq 1} \tilde{A}^{(e)}$ .

Sur chaque élément, on effectue une approximation nodale qui ne fait intervenir que les nœuds situés dans  $\tilde{A}^{(e)}$  ou sur la frontière de  $\tilde{A}^{(e)}$ . Ces éléments sont reliés entre eux par un certain nombre de points situés sur leur contour appelés points nodaux.

Les fonctions approchées  $\tilde{p}^{(e)}(\theta, \tilde{z})$  sur chaque élément  $\tilde{A}^{(e)}$  sont construites de manière à être continues sur  $\tilde{A}^{(e)}$  et entre les différents éléments figure (III.1).

Les équations aux éléments finis du domaine tout entier sont obtenues en combinant les équations relatives à chaque élément de telle sorte qu'en un point nodal donné la valeur de la pression soit identique pour tous les éléments qui contiennent ce point.

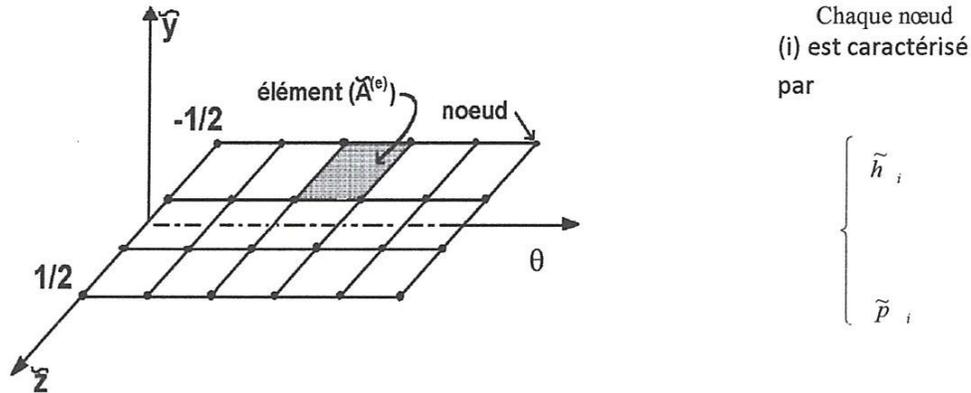


Fig. III. 1 Maillage du film par éléments finis (MEF (2D))

### III. 3.2 Formulation élémentaire et discrétisation par éléments finis

La méthode des résidus pondérés de Galerkin consiste à rechercher des fonctions  $p$  qui annulent la forme intégrale définie sur un domaine de résolution:

$$\tilde{W}(\tilde{p}) = \iint_{\tilde{A}} \delta \tilde{p} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}) - \Lambda \frac{\partial (\tilde{p} \tilde{h})}{\partial \theta} \right) d\tilde{A} = 0 \quad (\text{III-5})$$

Il est nécessaire pour opérer sur un élément de remplacer la forme intégrale globale  $\tilde{W}$  (Eq. III.5) par une somme de formes intégrales élémentaires  $\tilde{W}^{(e)}$ .

Soit  $nelt$  le nombre total d'éléments du domaine  $\tilde{A}$ , on peut écrire:

$$\tilde{W}(\tilde{p}) = \sum_{e=1}^{nelt} \tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}^{(e)}) = 0 \quad (\text{III-6})$$

avec

$$\tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}^{(e)}) = \iint_{\tilde{A}^{(e)}} (\tilde{p}^{(e)}(\tilde{h}^{(e)}))^3 \left( \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{p}^{(e)}}{\partial z} \right) - \Lambda \tilde{p}^{(e)} \tilde{h}^{(e)} \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} d\tilde{A}^{(e)} = 0 \quad (\text{III-7})$$

où:

$$dA^{(e)} = d\theta d\tilde{z}$$

La surface du coussinet développée, suivant la direction circonférentielle  $\theta$ , est découpée en  $npe$  éléments de  $npe$  nœuds (figure (III-1)).

Dans chacun des éléments, les différentes fonctions sont reliées à leurs ( $npe$ ) valeurs nodales par ( $npe$ ) fonctions d'interpolation ou de forme  $N_i$  :

- pour la fonction inconnue:

$$\tilde{p}^{(e)} = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\theta, \tilde{z}) \tilde{p}_i \quad \text{ou} \quad \tilde{p}^{(e)} = \langle N(\theta, \tilde{z}) \rangle \{ \tilde{p}_n \} \quad (\text{III-8})$$

- pour les gradients circonférentiel et axial de pression:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \tilde{p}_i \\ \frac{\partial \tilde{p}^{(e)}}{\partial \tilde{z}} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{z}} \tilde{p}_i \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

De même pour la variation de la fonction inconnue:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{p}^{(e)} &= \sum_{i=1}^{npe} N_i(\theta, \tilde{z}) \delta \tilde{p}_i \quad \text{ou} \quad \delta \tilde{p}^{(e)} = \langle N(\theta, \tilde{z}) \rangle \{ \delta \tilde{p}_n \} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \delta \tilde{p}_i \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \theta} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \theta}(\theta, \tilde{z}) \right\rangle \{ \delta \tilde{p}_n \} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \tilde{z}} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{z}} \delta \tilde{p}_i \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \delta \tilde{p}^{(e)}}{\partial \tilde{z}} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \tilde{z}}(\theta, \tilde{z}) \right\rangle \{ \delta \tilde{p}_n \} \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

Si l'élément fini est supposé iso paramétrique, on peut écrire:

$$\begin{cases} \theta = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\theta, \tilde{z}) \theta_i \\ \tilde{z} = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\theta, \tilde{z}) \tilde{z}_i \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

compte tenu des relations (III-8) à (III.11), la forme intégrale élémentaire discrétisée prend la forme suivante :

$$\tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}^{(e)}) = \langle \delta p_n \rangle ([k_e(\tilde{p}^{(e)})] \{\tilde{p}_n\} - \{f_e(\tilde{p}^{(e)})\}) \quad (\text{III.12})$$

$[k_e]$  est une matrice carrée ( $npe \times npe$ ) symétrique appelée matrice fluidité élémentaire.

$\{f_e\}$  est un vecteur de taille ( $npe \times 1$ ) qui rassemble le terme d'entraînement figurant dans le second membre de l'équation de Reynolds. les termes génériques de ces deux matrices sont :

$$k_{eij} = \iint_{\tilde{\Omega}^{(e)}} \tilde{p}^{(e)} (\tilde{h}^{(e)})^3 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial N_j}{\partial \tilde{z}} \right) d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{et } f_{ei} = \iint_{\tilde{\Omega}^{(e)}} \Lambda \tilde{p}^{(e)} \tilde{h}^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III.14})$$

Les matrices globale  $[K]$  et  $\{F\}$  relatives au palier complet sont obtenues par simple superposition des matrices élémentaires  $[k_e]$  et  $\{f_e\}$ .

La forme intégrale globale  $\tilde{W}(\tilde{p})$  se construit par addition des formes intégrales élémentaires  $\tilde{W}^{(e)}$  :

$$\tilde{W}(\tilde{p}) = \sum_{e=1}^{nel} (\tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}^{(e)})) = \sum_{e=1}^{nel} \langle \delta \tilde{p}_n \rangle ([k^{(e)}(pe)] \{\tilde{p}_n\} - \{f^{(e)}(pe)\}) = 0 \quad (\text{III.15})$$

cette somme est organisée sous la forme matricielle suivante:

$$\tilde{W}(\tilde{p}) = \langle \delta p \rangle ([k_e(\tilde{p})] \{\tilde{p}\} - \{f_e(\tilde{p})\}) \quad \forall \langle \delta p \rangle \quad (\text{III.16})$$

ceci conduit à résoudre le système non linéaire suivant:

$$[k(P)]\{P\}=\{F(P)\} \quad (\text{III.17})$$

avec

$$[K] = \sum_{e=1}^{nelt} [k^{(e)}]$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{nelt} \{f^{(e)}\}$$

A étant l'opérateur d'assemblage.

$[K]$  = matrice fluidité globale du palier: c'est une matrice symétrique de taille  $(n \times n)$  où  $n$  est le nombre total des nœuds du maillage.

$\{F\}$  = vecteur global  $(n \times 1)$  qui contient le terme d'entraînement.

La résolution de l'équation de Reynolds est donc ramenée à la résolution d'un système d'équations non linéaires.

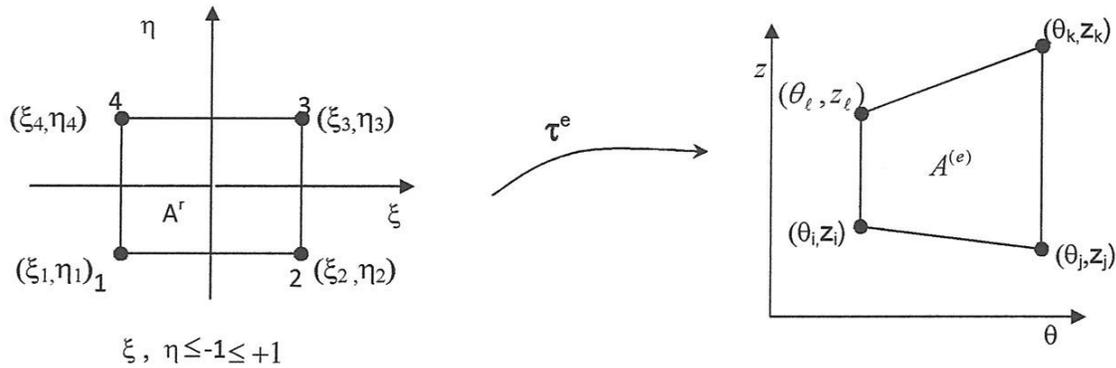
Il est à montrer que la matrice  $[K]$  obtenue par les opérations d'assemblage est singulière

( $\det(K) = 0$ ), pour pouvoir trouver une solution au système (III.17), on doit restructurer les matrices  $[K]$  et  $\{F\}$  par l'introduction des conditions limites essentielles qui sont les valeurs de la pression dans les rainures d'alimentation et sur les extrémités du palier. Le système d'équations réduit à résoudre s'écrit alors:

$$[K_r]\{\tilde{P}_r\} = \{F_r\} \quad (\text{III.18})$$

### III. 3.3 Expressions des matrices $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$ sur l'élément de référence

Un élément de référence ( $A^r$ ) est un élément de forme très simple repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel  $\tilde{A}^{(e)}$  par une transformation géométrique  $\tau^e$  figure III.2 .



a) Élément de référence

b) Élément réel (plan physique)

Fig. III. 2 Transformation géométrique

Sur l'élément de référence, les coefficients  $k_{ij}^{(e)}$  et  $f_i^{(e)}$  s'expriment:

$$k_{e_{ij}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p}^{(e)}(\xi, \eta) \left( \tilde{h}^{(e)}(\xi, \eta) \right)^3 \left( j_{11}^2 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \lambda j_{22}^2 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) j_{11} j_{22} d\xi d\eta \quad (\text{III. 19})$$

$$\text{et } f_{e_i} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Lambda \tilde{p}^{(e)}(\xi, \eta) \tilde{h}^{(e)}(\xi, \eta) j_{11} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} j_{11} j_{22} d\xi d\eta \quad (\text{III. 20})$$

Où:

$$\begin{Bmatrix} \partial / \partial \theta \\ \partial / \partial \tilde{z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial / \partial \xi \\ \partial / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 21})$$

$[J]$  est la matrice jacobéenne de la transformation géométrique. Elle s'exprime comme suit:

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle \partial \bar{N} / \partial \xi \rangle \\ \langle \partial \bar{N} / \partial \eta \rangle \end{bmatrix} \times \left[ \begin{Bmatrix} \theta_n \\ \tilde{z}_n \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{III. 22})$$

Dans le cas où l'élément est iso paramétrique ; c'est à dire les nœuds d'interpolation et les nœuds géométriques sont confondus, les fonctions de transformation géométriques

$\bar{N}(\xi, \eta)$  sont identiques aux fonctions d'interpolation  $N(\xi, \eta)$ .

$\{\theta_n\}$  et  $\{\tilde{z}_n\}$  regroupent les coordonnées des nœuds de l'élément réel  $\tilde{A}^{(e)}$ .

Dans le cas où les côtés de l'élément réel sont parallèles aux axes figure (III.3), l'expression de la matrice jacobéenne se simplifie et devient:

$$[J] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Dans ces conditions, le jacobine est constant ( $\det(J) = a \times b$ ) qui correspond au quart de l'aire de l'élément réel 1234.

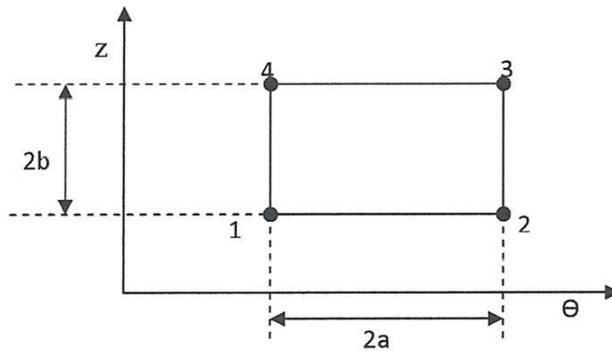


Fig. III. 3 Élément réel  $\tilde{A}^{(e)}$  de forme rectangulaire

L'évaluation des intégrales (III.18) et(III.19) est effectuée par la quadrature de Gauss-Legendre. La méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre à  $n$  points permet d'intégrer un polynôme de degré maximal  $m = (2n - 1)$ .

Selon la taille du problème, Les formules de Gauss s'écrivent:

- Cas d'un problème unidimensionnel

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (\text{III.24})$$

où:  $\xi_i$  sont les coordonnées des points d'intégration;

$w_i$  sont les poids des points d'intégration.

- Cas d'un problème bidimensionnel

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{III.25})$$

A la différence de la méthode de Newton-Cotes qui consiste à déterminer les poids  $w_i$  après avoir fixé les coordonnées des points d'intégration  $\xi_i$ , les paramètres de la méthode de Gauss à  $n$  points (tableau III.1) sont déterminés de telle sorte que l'on puisse intégrer exactement un polynôme simple de degré  $(2n - 1)$ .

**Tableau III. 1:** Paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension (\*)

| Nombre de points d'intégration de Gauss<br>$n$ | Coordonnées des points d'intégration<br>$\xi_i$                                  | Poids<br>$w_i$   | Erreur<br>$E$  | Degré maximum des polynômes intégrés exactement<br>$m = 2n - 1$ |
|--|--|--|--|---|
| 1  | 0  | 2  | $\frac{1}{6} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$                       | 1   |
| 2  | $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$   | 1  | $\approx 0.7 \times 10^{-2} \times \frac{d^4 f}{d\xi^4}$ | 3   |
| 3  | 0<br>$\pm \sqrt{3/5}$  | 8/9<br>5/9   | $\approx 0.6 \times 10^{-4} \times \frac{d^6 f}{d\xi^6}$ | 5   |
| 4  | $\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{6/5}}{7}}$<br>$\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{6/5}}{7}}$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$<br>$\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ | $\approx 0.3 \times 10^{-6} \times \frac{d^8 f}{d\xi^8}$ | 7   |

(\*) Les coordonnées  $\xi_i$  sont symétriques par rapport à  $\xi = 0$  et les poids  $w_i$  correspondant à 2 points symétriques sont égaux.

### III. 3.4 Choix de l'élément du maillage

L'élément choisi pour la résolution du problème aérodynamique est:

- L'élément quadrilatéral linéaire à 4 nœuds (Q4).

Cet élément un élément iso paramétrique pour lequel les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont identiques. La Figure ( III.4 ) indique l'élément de référence correspondant.

les fonctions d'interpolation pour ce type d'élément fini sont :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) ; i=1, 2, 3, 4 \quad (\text{III.26})$$

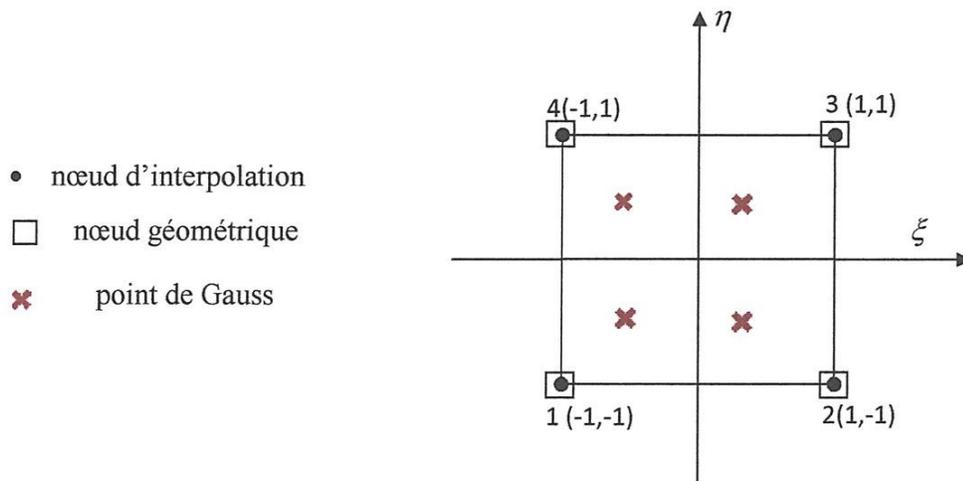


Fig. III. 4 Eléments de référence avec indication des points d'intégration de Gauss

### III. 3.5 Méthode de résolution du problème EAD en régime stationnaire

La solution statique du problème elasto-aérodynamique, qui est considéré comme fortement fluide non-linéaire - structurer le problème d'interaction, est obtenu par la méthode de substitution. Cette méthode se compose la construction vers le haut d'une série de solutions  $\{p^{(0)}\}, \{p^{(1)}\}, \dots, \dots, \{p^{(k-1)}\}, \{p^{(k)}\}$ , étant calculé à partir  $\{p^{(k-1)}\}$ , en résolvant le système linéaire suivant :

$$[k(p^{(k-1)})] \{p^{(k)}\} = [F(p^{(k-1)})] \quad k=1, 2, \dots, k_{\max} \quad (\text{III.27})$$

Nous pouvons écrire ceci en forme par accroissement en présentant le vecteur résiduel  $\{R^{(k)}\}$  :

$$\begin{aligned} \{R^{(k)}\} &= \{R(p^{(k-1)})\} = \{F(p^{(k-1)})\} - [k(p^{(k-1)})] \{p^{(k-1)}\} \\ [k(p^{(k-1)})] \{\Delta p^{(k)}\} &= \{R^{(k)}\} \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$\{p^{(k)}\} = \{p^{(k-1)}\} + \Omega \{\Delta p^{(k)}\}$$

où  $\Omega$  est un facteur de relaxation qui assure et accélère la convergence du processus itératif.

Pour la solution statique du problème elasto-aérodynamique à obtenir, les étapes suivantes de l'informatique le procédé sont alors exécutés :

Choisir pour entrer des paramètres du problème  $\varepsilon_0$ ,  $R, L, C, t_b, s, l, E, \sigma, \omega, P_a, \mu$ , sous-relaxation.

facteur  $\Omega$  dont la valeur s'étend de 0 à 1,  $\varepsilon_p$  de critère de convergence et nombre maximum des itérations,  $k_{\max}$ , pour la solution de pression statique.

Initialiser le nombre  $k$  d'itération à 0, la norme  $\|n\|$  à 1 et contenir global de vecteur nodal pressions statiques sans dimensions  $\{p^{(k)}\} = 1$

Que  $(\|n\| > \varepsilon_p)$  et  $(k < k_{\max})$

Calculer l'épaisseur sans dimensions de la charge statique en utilisant l'équation (III.25) pour chaque nœud de grille d'élément finit (Figure III.1)

Initialiser les matrices globales  $[K]$  et  $\{F\}$  à 0.

Pour chaque élément,

Extraire le vecteur élémentaire  $\{p^{(k-1)}\}$  à partir du vecteur global  $\{p^{(k-1)}\}$  aussi bien que le global élémentaire coordonner les choix de chaque nœud au moyen de la rangée de connectivité.

Calculer les matrices élémentaires  $[k_e(p^{(k-1)})]$  et  $\{f_e(p^{(k-1)})\}$  employer la quadrature - de Legendre de gauss.

Réunir  $[k_e]$  de  $[K]$ , et  $\{f_e\}$  de  $\{F\}$ .

Former les matrices réduites  $[K_r]$  et  $\{f_r\}$  en présentant les conditions de frontière essentiels (III-3a) et (III-3b).

Résoudre le système linéaire réduit  $[K_r] \{p_r^{(k)}\} = \{F_r\}$ . pour le vecteur global réduit  $\{p_r^{(k)}\}$  de pression utilisation de la méthode successive de sur-relaxation pour tenir compte de l'état de frontière (III-3c).

Former le vecteur global  $\{p^{(k)}\}$  de pression  $\{p_r^{(k)}\}$  et les valeurs des états de frontière. Calculer  $\{\Delta p^{(k)}\} = \{p^{(k)}\} - \{p^{(k-1)}\}$  et le parent moindre norme du carré  $\{\Delta p^{(k)}\}$  c.-à-d

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta p^{(k)} \rangle \{ \Delta p^{(k)} \}}}{\sqrt{\langle p^{(k)} \rangle \{ p^{(k)} \}}} \quad (\text{III.28})$$

Mettre à jour le vecteur global de pression :  $\{p^{(k)}\} = \{p^{(k-1)}\} + \Omega \{\Delta p^{(k)}\}$

L'extrémité font tandis que.

Calculer la force statique d'ascenseur et l'angle statique d'attitude en utilisant des équations (II-30) et (II-31).

### III. 3.5 Résolution du système d'équations algébriques réduit

La méthode de résolution du système d'équations algébriques réduit est celle de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation

Un estimé initial  $\left\{ p^{(0)} \right\}$  est nécessaire pour démarrer le processus itératif.

L'application de l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation permet d'écrire

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = (1 - \Omega) \tilde{p}_i^{(k)} + \frac{\Omega}{k_{ii}} \left[ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} \tilde{p}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n k_{ij} \tilde{p}_j^{(k)} \right] \quad (\text{III.29})$$

où:

$\Omega$  est le coefficient de sur-relaxation;

$k$  numéro de l'itération;

$n$  taille du système réduit.

Le test d'arrêt du processus itératif est défini par:

$$\text{Max} \left| \frac{\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}}{\tilde{p}_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-5} \quad (\text{III.30})$$

### III. 3.6 Calcul des composantes de la portance aérodynamique

L'intégration numérique de Gauss-Legendre est également utilisée pour le calcul des composantes de la portance hydrodynamique:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_\phi \end{Bmatrix} = \sum_{e=1}^{nel} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{p}_i^{(e)} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{III.31})$$

avec

$$\tilde{p}^{(e)} = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\xi, \eta) \tilde{p}_i \quad \text{et} \quad \theta = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\xi, \eta) \theta_i$$

### III .4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le traitement numérique de l'équation de Reynolds non linéaire pour un fluide compressible qui est l'air ambiant à l'aide de la méthode des éléments finis de Lagrange de classe  $C^0$ . Le système d'équations algébriques non linéaires résultant de la discrétisation est résolu numériquement au moyen de la méthode des substitutions successives et cela en vue de déterminer en tout point du maillage la pression aérodynamique. La connaissance de cette dernière permet de calculer les caractéristiques aérodynamiques du palier.



Chapitre IV

Etude paramétrique

---

## Chapitre IV

### Etude paramétrique

#### IV. 1 Introduction

L'étude du comportement statique du palier aérodynamique a conduit à l'écriture d'un programme de calcul en langage MS-fortran.

Ce programme permet de déterminer le champ de pression aérodynamique dans le palier, la géométrie du film fluide, l'angle de calage et la portance aérodynamique dans le cas rigide et compliant.

Les données des programmes sont :

- Le nombre de compressibilité sans dimension  $\Lambda$ ,
- Le nombre de compliance sans dimension  $\alpha$ ,
- La valeur du facteur de relaxation,
- La charge statique imposée  $W_0$ .

L'étude de l'influence du nombre de compressibilité  $\Lambda$  et du nombre de compliance  $\alpha$  sur le comportement statique du palier aérodynamique sera envisagée dans ce chapitre.

#### IV.2 Recherche de la position d'équilibre

Les coordonnées de la position d'équilibre statique  $(X_0, Y_0)$  résultant de l'application de la charge statique  $\mathbf{W}_0 = (W_{X_0}, W_{Y_0})$  sont déterminées à partir de la résolution des équations d'équilibre du rotor à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Dans le système de coordonnées  $(X, Y)$ , l'équilibre du rotor se traduit par les équations suivantes :

$$\tilde{W}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{IV.1a})$$

$$\tilde{W}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{IV.1b})$$

Ou encore :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{X0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{IV.2a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{Y0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{IV.2b})$$

Où  $\tilde{W}_X$  et  $\tilde{W}_Y$  sont les composantes du vecteur résidu  $r$ .

Le problème est bien entendu de trouver les valeurs adimensionnelles des coordonnées cartésiennes  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  vérifiant simultanément les deux équations (IV.2).

a) *Méthode de Newton-Raphson*

Soit  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$  la solution approchée ou l'estimé initial proche de la solution  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Si les deux fonctions  $\tilde{W}_X$  et  $\tilde{W}_Y$  sont continues et continument différentiables, le développement en séries de Taylor des deux fonctions  $\tilde{W}_X$  et  $\tilde{W}_Y$  au point  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$  donne :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordresupérieur} \quad (\text{IV.3a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordresupérieur} \quad (\text{IV.3b})$$

avec  $\delta \tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{X}_0$  et  $\delta \tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - \tilde{Y}_0$

Puisque  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  est une solution du système d'équations non linéaires (IV.2), il en résulte :

$$0 = \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{IV.4a})$$

$$0 = \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{IV.4b})$$

Soit sous forme matricielle :

$$-\begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{IV.5})$$

En supposant l'existence de la matrice jacobienne inverse:  $\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}^{-1}$ , on a :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{IV.6})$$

ce qui donne pour la solution  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{IV.7a})$$

Ou encore

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7b})$$

Lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur (t.o.s), la solution  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ  $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)$  de la prochaine approximation, soit :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de Newton-Raphson pour deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} - \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9a})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9b})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}$$

L'inversion analytique de la matrice jacobéenne permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} & -\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \\ -\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} & \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} & \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} - \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \end{pmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}} \quad (\text{IV.10})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas.

b) *Méthode de Newton-Raphson amortie*

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti qui converge plus vite que l'algorithme précédent s'écrit :

1. Etant donné  $\varepsilon_1$ , un critère d'arrêt
2. Etant donné  $k_{\max}$ , le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ , une approximation initiale de la solution du système (IV.2)
4. Résoudre le problème EHD non linéaire en régime stationnaire gouverné par les équations couplées (1<sup>er</sup> edp d'ordre zéro) et (équation de l'épaisseur du film) par itérations : Calcul de  $\tilde{h}_0$  et  $\tilde{p}_0$
5. Calculer les composantes de la portance hydrodynamique :

$$\tilde{F}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z}$$

6. Calculer les composantes du vecteur résidu :  $\tilde{W}_X$  et  $\tilde{W}_Y$  (Eqs IV.2)
7. Evaluer les coefficients de la matrice jacobienne (dérivées partielles) par différentiation numérique :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, & \left( \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, \\ \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, & \left( \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta} \end{aligned}$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul des dérivées partielles de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide. Dans cette approximation, la valeur de  $\delta$  est  $10^{-4}$ .

8. Calculer les corrections  $(\delta\tilde{X}_k, \delta\tilde{Y}_k)$  en utilisant l'équation (IV.10)

9. Calculer les nouvelles approximations du système non linéaire :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \varpi^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}$$

où  $\varpi^{(k)}$  est le coefficient de relaxation

$\varpi^{(k)} = 1$  : méthode classique de *Newton*

$\varpi^{(k)} < 1$  : méthode de *Newton* dite amortie

10. Si 
$$\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} & \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} \\ \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ ou } \left| \tilde{W}_X^{(k+1)} \right| + \left| \tilde{W}_Y^{(k+1)} \right| \leq \varepsilon_1$$

ou encore 
$$\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \delta\tilde{X}_k & \delta\tilde{Y}_k \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}} / \sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{X}_{k+1} & \tilde{Y}_{k+1} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ et } k < k_{\max}$$

où  $\varepsilon_1 = 10^{-6}$

- convergence atteinte : Les valeurs de  $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+1})$  correspondent aux coordonnées de la position d'équilibre statique qui en résulte de l'application de la charge statique  $W_0$ .
- calculer l'angle de calage statique du palier par :  $\phi_0 = \tan^{-1}(\tilde{Y}_{k+1}/\tilde{X}_{k+1})$
- arrêt

11. Si le nombre maximal d'itérations  $k_{\max}$  est atteint :

- convergence non atteinte en  $k_{\max}$  itérations
- arrêt

12. Sinon, poser  $k \leftarrow k + 1$

13. Retour à l'étape 4 pour une autre itération.

Les tableaux IV. 1 et IV. 2 rassemblent respectivement les différentes caractéristiques géométriques du palier à feuilles et les caractéristiques physiques du lubrifiant qui est l'air nécessaires au calcul.

**Tableau IV. 1:** Caractéristiques géométriques du palier à feuilles

| Paramètre                           | Symbole | Unité | Valeur                  |
|-------------------------------------|---------|-------|-------------------------|
| Jeu radial                          | $C$     | $m$   | $50 \times 10^{-6}$     |
| Rayon du palier                     | $R$     | $m$   | $25 \times 10^{-3}$     |
| Epaisseur des feuilles              | $t_b$   | $m$   | $0.1016 \times 10^{-3}$ |
| Longueur des bumps                  | $2l$    | $m$   | $3.556 \times 10^{-3}$  |
| Pas des humps                       | $S$     | $m$   | $4.572 \times 10^{-3}$  |
| Module de Young des feuilles        | $E$     | $Pa$  | $207 \times 10^9$       |
| Coefficient de Poisson des feuilles | $\nu$   |       | 0.31                    |
| Charge statique                     | $W$     | $N$   | 50                      |
| Longueur du palier                  | $L$     | $m$   | $50 \times 10^{-3}$     |

**Tableau IV. 2:** Caractéristiques physiques du fluide lubrifiant (air)

| Paramètre                | Symbole | Unité    | Valeur                 |
|--------------------------|---------|----------|------------------------|
| Pression atmosphérique   | $P_a$   | $Pa$     | $1.013 \times 10^5$    |
| Viscosité de l'air       | $\mu$   | $Pa.s$   | $184.6 \times 10^{-7}$ |
| Masse volumique de l'air | $\rho$  | $kg/m^3$ | 1.1614                 |

### IV. 3 Résultats et interprétations

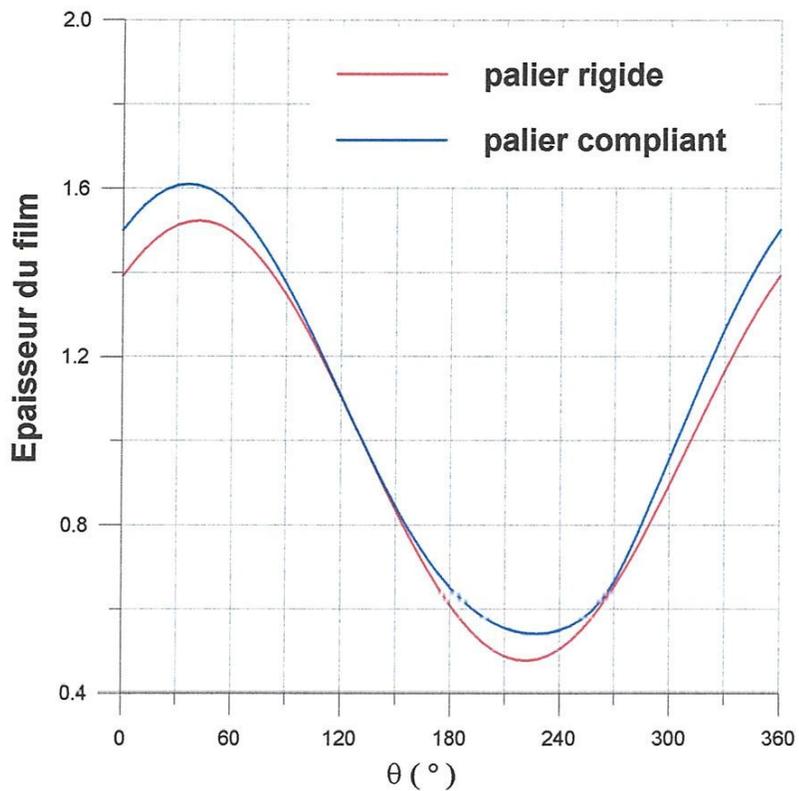
#### IV. 3.1 Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la géométrie du film

Les figures (IV.1a) , (IV.1b) , (IV.1c) et (IV.1d) représentent l'évolution circonférentielle de l'épaisseur du film aérodynamique adimensionnée pour les deux cas compliant ( $\alpha=0.44$ ) et rigide ( $\alpha=0.0$ ) pour une vitesses de rotation  $N$  (40,100 krpm) et cela pour diverses valeurs du nombre de compressibilité  $\Lambda$  (1.12, 2.82).

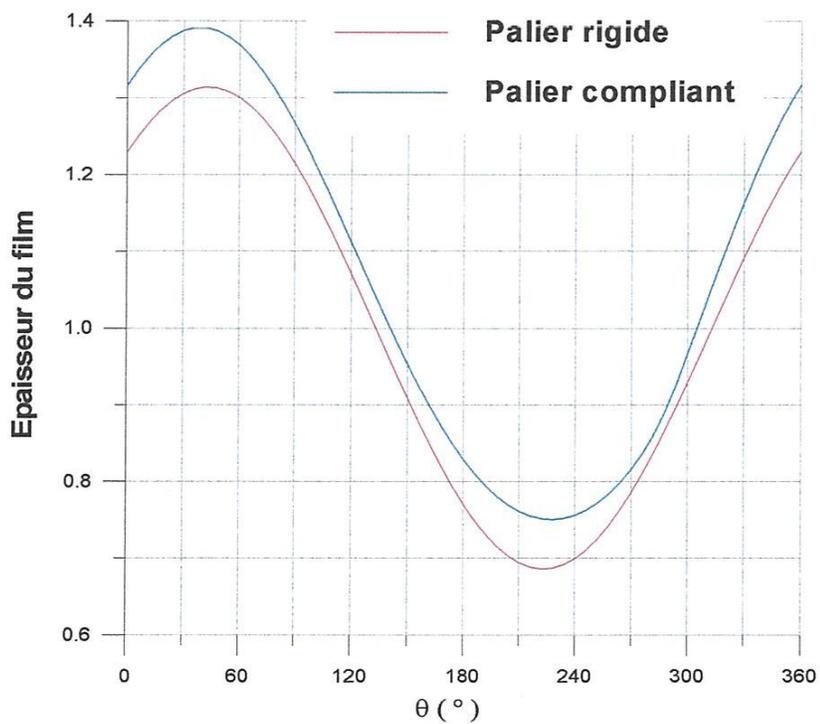
Les résultats obtenus montrent que les valeurs de l'épaisseur du film aérodynamique adimensionnée dans le cas d'un palier rigide sont toujours inférieures à celles d'un palier compliant pour les trois valeurs de la vitesse de rotation.

#### IV.3.2. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur le profil de pression aérodynamique

Les figures (IV.2a), (IV.2b),(IV.2c) et (IV.2d) représentent les variations circonférentielles du champ de pression aérodynamique adimensionnée pour les deux cas compliant ( $\alpha=0.44$ ) et rigide ( $\alpha=0.0$ ) pour les deux vitesses de rotation correspondant respectivement à  $\Lambda=1.12$ , et 2.82 et cela pour un palier de longueur finie, on observe que la pression aérodynamique maximale augmente avec  $\Lambda$  ou la vitesse de rotation.

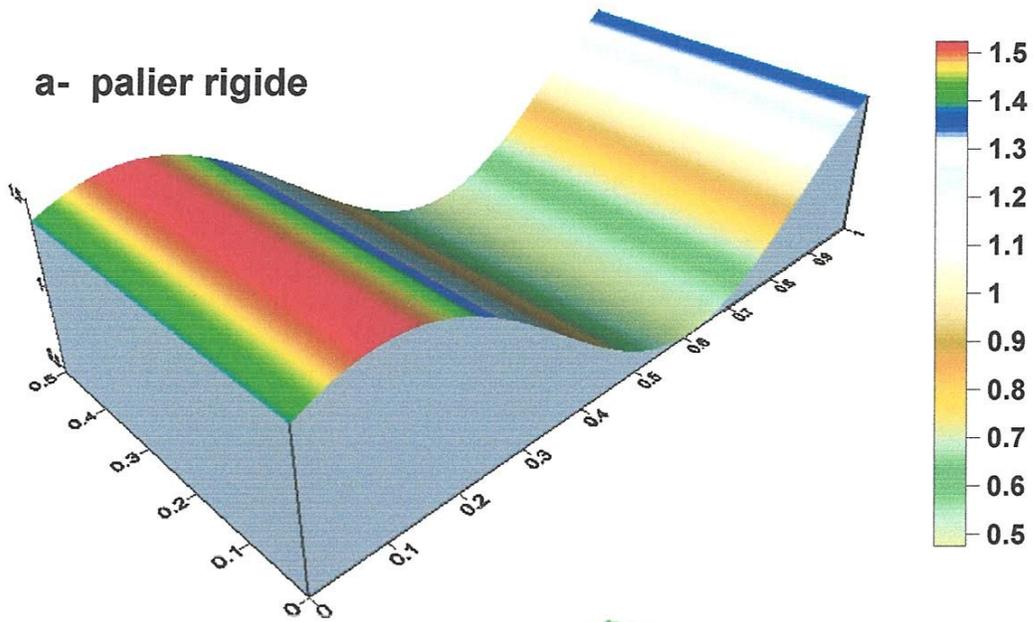


a) Vitesse 40 krpm

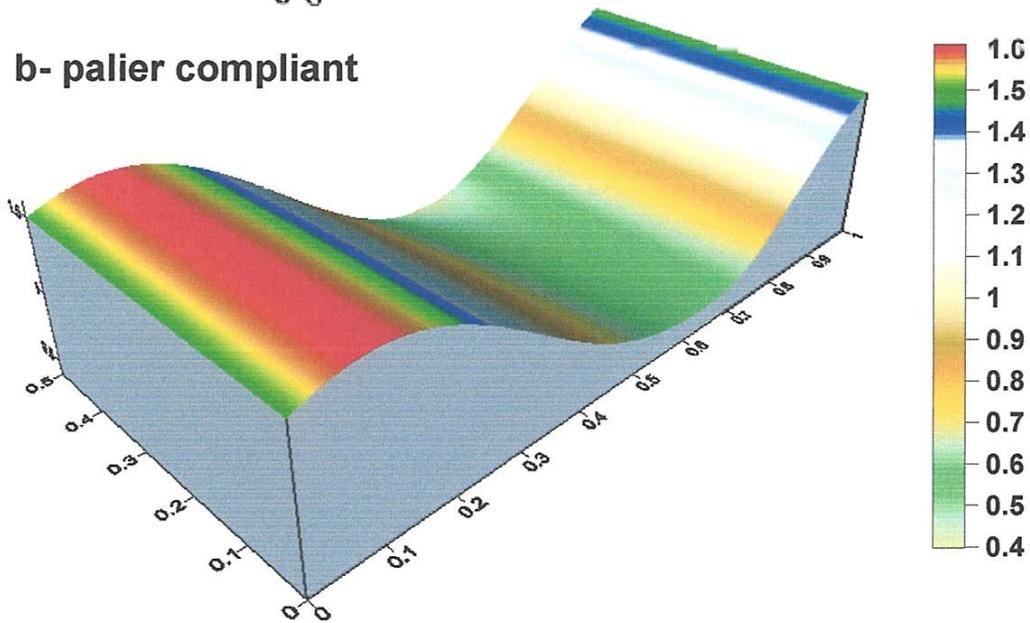


b) Vitesse 100 krpm

**a- palier rigide**

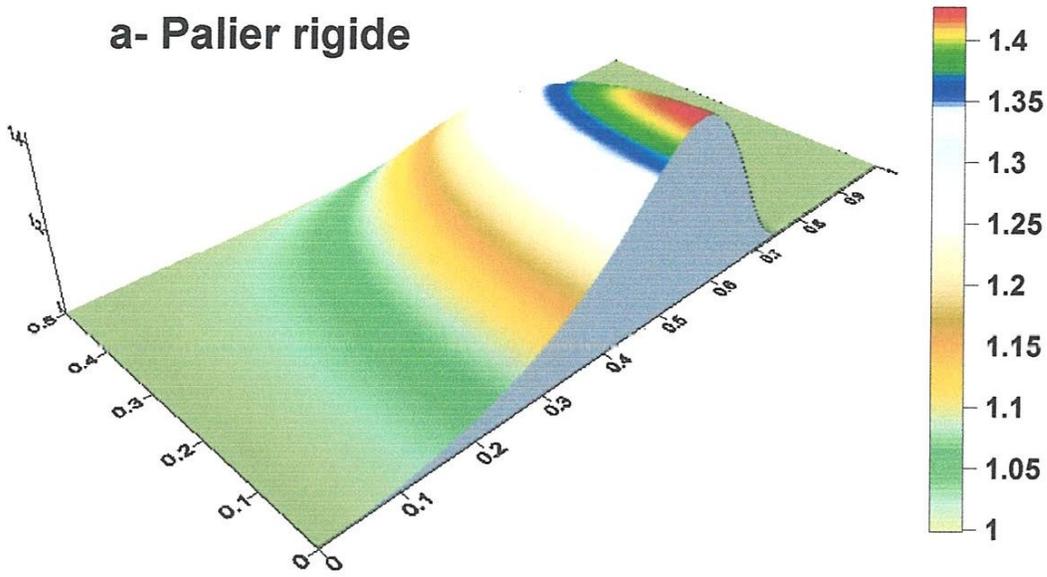


**b- palier compliant**

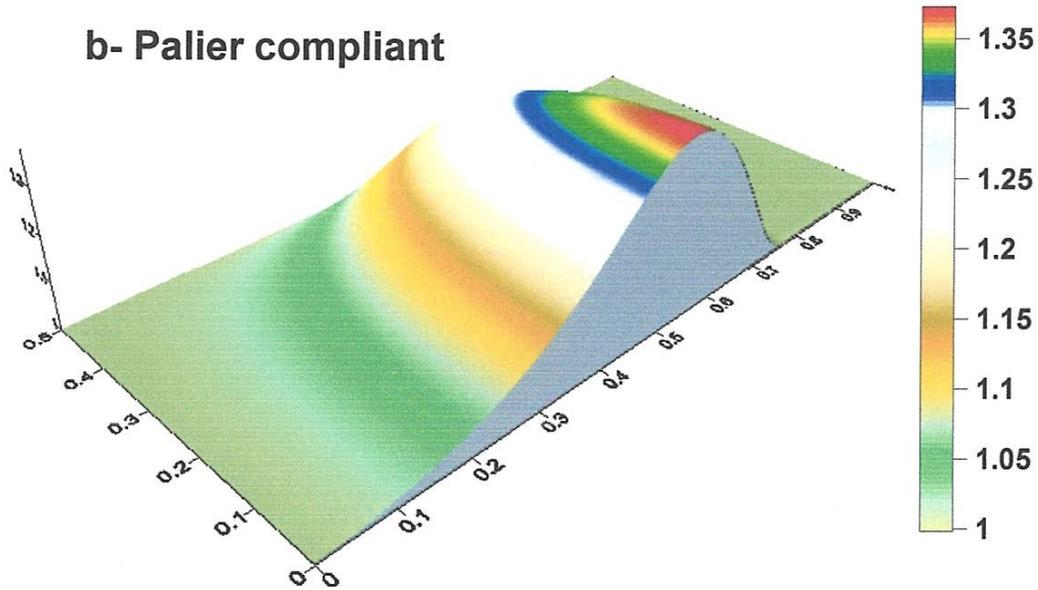


**c) Vitesse 40 krpm**

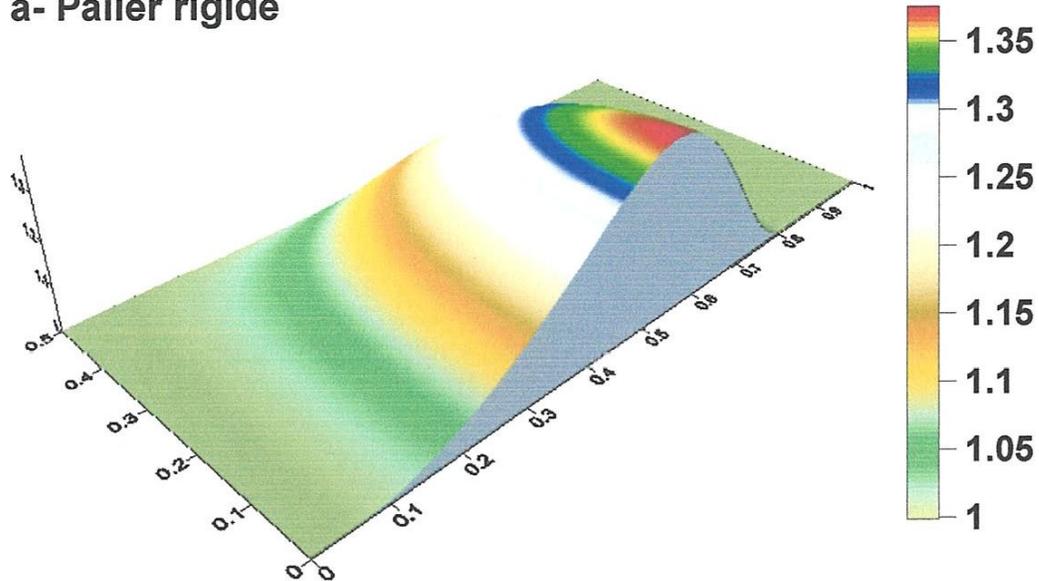
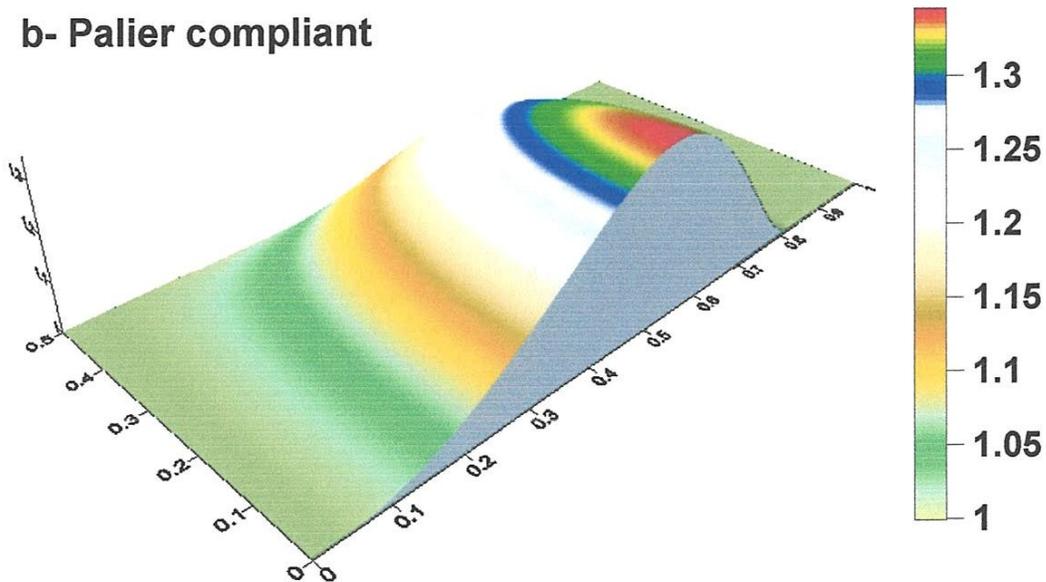
**a- Palier rigide**



**b- Palier compliant**



**c) Vitesse 40 krpm**

**a- Palier rigide****b- Palier compliant****d) Vitesse 100 krpm**

**Fig. IV.2** Profils de pression aérodynamique calculés pour un palier rigide et un palier compliant fonctionnement à  $N$  (40,100 krpm)

#### IV. 4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude paramétrique afin de mettre en évidence les effets des différents paramètres tels que le nombre de compressibilité et le facteur de compliance sur les performances statiques du palier aérodynamique statiquement chargé (problème inverse), à savoir : le champ de pression aérodynamique et la géométrie du film lubrifiant.

Les résultats obtenus ont montré que l'élasticité des feuilles affecte sensiblement les performances statiques des paliers aérodynamiques surtout pour les grandes valeurs du nombre de compressibilité; c'est-à-dire lorsque le palier tourne à de très grandes vitesses.

## Conclusion Générale

Nous nous sommes intéressés à l'étude des paliers aérodynamiques à feuilles à géométrie rigide et déformable (compliant) soumis à un chargement statique dont l'objectif était de développer un programme de simulation pour la prédiction du comportement statique de ce type de paliers.

Le traitement numérique du problème de lubrification aérodynamique inverse (cas d'une charge imposée) comprend deux parties distinctes, à savoir :

- La recherche de la position d'équilibre du centre de l'arbre dans le palier par l'algorithme de Newton-Raphson amorti.
- Résolution de l'équation de Reynolds non linéaire par la méthode des éléments finis. La solution qui est la pression aérodynamique est recherchée de façon itérative à l'aide de la méthode des substitutions successives.

Les résultats obtenus par le programme de calcul développé ont montré que la prise en considération de l'élasticité des feuilles entraîne :

- Une augmentation de l'épaisseur minimale du film.
- Une diminution du pic de pression due à l'augmentation de l'épaisseur du film.

## Référence bibliographique

[1] J. FRENE, D. NICOLAS, D. BERTHE, M. GODET, « Lubrification hydrodynamique, paliers et butées », Paris : Edition Eyrolles, 1990.

[2] P. STEPHAN, « Paliers à gaz à alésage expansible, comportement dynamique », Thèse,  
Spécialité Génie Mécanique, Toulouse, Université Paul Sabatier, Janvier 1991.

[3] P. KLIT, J. W. LUND, « Calculation of the Dynamic Coefficients of a Journal Bearing, Using a Variational Approach », Journal of Tribology, juillet 1986, vol 108, pages 421-425.

[4] H. HESHMAT, J. A. WALOWIT, O. PINKUS, « Analysis of Gas-Lubricated Foil Journal Bearings », Journal of Lubrication Technology, octobre 1983, vol 105, pages 647-655.

[5] P. STEPHAN, I. IORDANOFF, « Butées et paliers aérodynamiques », Techniques de  
l'Ingénieur, traité Génie Mécanique, vol B5335, Paris, 1996.

[6] C. A. HESHMAT, H. HESHMAT, « An Analysis of Gas-Lubricated, Multileaf Foil Journal Bearings With Backing Springs », Journal of Tribology, juillet 1995, vol 117, pages 437-443.

[7] H. HESHMAT, W. SHAPIRO, S. GRAY « Development of Foil Journal Bearings for High Load Capacity and High Speed Whirl Stability », Journal of Tribology, avril 1982, vol 104, pages 149-156.

[8] C. DELLACORTE, « A New Foil Air Bearing Test Rig for Use to 700°C and 70,000 rpm », Tribology Transactions, 1998, vol 41, pages 335-340.

[9] H. HESHMAT, « Advancements in the Performance of Aerodynamic Foil Journal Bearings : High Speed and Load Capability », *Journal of Tribology*, avril 1994, vol 116, pages 287-295.

[10] J.-P. PENG, M. CARPINO, « Coulomb Friction Damping Effects in Elastically Supported Gas Foil Bearings », *Tribology Transactions*, 1994, vol 37, pages 91-98.

[11] D. F. LI, K. C. CHOY, P. E. ALLAIRE, « Stability and Transient Characteristics of Four Multilobe Journal Bearing Configurations », *Journal of Lubrication Technology*, juillet 1980, vol 102, pages 291-299.

[12] FRENE (J.). – *Butées et paliers hydrodynamiques*. Techniques de l'Ingénieur, Génie mécanique, B 5 320, août 1995.

[13] ETSION (I.). – *Analysis of the Gas-Lubricated Flat-Sector-Pad Thrust Bearing*. NASA Technical Note D-8220, juin 1976.

[14] DAYTON (DR.). – *Gas Lubricated Foil Bearing Development For Advanced Turbomachinery*. Technical Report AFAPL-TR-76-114, Garrett

[15] GRAY (S.). – *Applying Resilient Foil Air Bearings to Turbomachinery, Technics and Challenges*. National Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting, Culver City, Los Angeles, 17-20 nov. 1975.

[16] GRAY (S.), HESHMAT (H.) et BHUSHAN (B.). – *Technology Progress on Compliant Foil Air Bearing Systems for Commercial Applications*. 8e gas Bearing Symposium, 8-10 avr. 1981.