

17/531.613
17/531.613

Université du 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin D'études
Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par : Djamai Imad

=====

Etude par éléments finis d'un palier
d'arbre d'hélice marine.

=====

Sous la Direction de :

Pr : Lahmar Mustapha

Année universitaire 2011/2012

Résumé

L'arbre d'hélice est un élément très important dont le rôle de transmettre ou de transformer de la puissance, il est supporté par des paliers fluides qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement statique et surtout dynamique de la ligne d'arbre.

Ce travail s'intéresse essentiellement à l'étude par la méthode des éléments finis du comportement statique d'un palier d'arbre d'hélice de sous-marin lubrifiés par l'eau de mer, dont les coussinet est muni d'une couche compliant en élastomère.

L'étude pour les fluides newtoniens contenant des polymères améliorant l'indice de viscosité (VI) en prenant en considération les déformations statiques de la structure dues aux champs de pression statique et dynamique engendrés dans le film lubrifiant.



Mots clés : Palier marins, hélices marines, Marine shaft bearings, Paliers de Thordon Compac. Machines tournantes, Stabilité dynamique, coefficients de raideur et d'amortissement, Lubrification élasto-hydrodynamique (EHD).

Sommaire

Résumé

Remerciements

Acronymes

Liste des figures

Principales notations

CHAPITRE I

Introduction generale	1
Etude bibliographique sur les paliers marins et les hélices marines	
Etude bibliographique sur les paliers marins et les hélices marines	5
I. Introduction	5
I.1. Différents types de paliers marins	5
I.1.1. Paliers de COMPAC	5
I.1.2. Paliers Thordon COMPAC lubrifiés par l'eau de mer	6
I.1.3. Porteurs de palier	7
I.1.4. Recouvrements approuvés d'axe	8
I.1.5. Facilement usiné et adapté	8
I.1.6. Systèmes de palier d'axe de propulseur de l'eau.....	9

I.2. Paliers de River Tough Pour l'eau abrasive	10
I.3. Paliers de ligne d'arbre hydrolubrifiés.....	11
I.3.1. Principe de fonctionnement.....	11
I.4. Palier ROMOR C -PAB	12
I.4.1. Conception basique du palier	12
I.4.2. Avantages du palier ROMOR (C) [PAB].....	12
I.5. Paliers standards DURAMAX	13
I.5.1. Dimension de palier	14
I.5.2. Caractéristiques	14
I. 5.3. Matériaux	14
I.6. Paliers démontables	15
I.6.1. Avantages.....	15
I.7. Paliers ROMOR I.....	16
I.7.1 Conception.....	16
I.7.2 Avantages.....	16
I.7.3. Applications.....	17
I.8. Paliers DMX.....	17
I.8.1. Avantages.....	18
I.9. Le Joint GS Maprom.....	18
I.9.1. Principe.....	18
1. Système en lubrification ouverte	18

2. Système en lubrification fermée	19
I.9.2. Avantages spécifiques du joint GS	19
I.10. Matériaux antifriction pour régime hydrodynamique	19
I.10.1.Applications fonctionnant dans l'eau	20
I.10.2.Revêtements de surface	20
I.11. Principes de systèmes propulsion	20
I.11.1.Description d'une hélice marine	21
I.11.2.Diamètre.....	22
I.11.3.Spécification hélice	22
I.11.4.Matériau d'hélice	23
I.11.5.Rugosité d'une hélice	23
I.11.6.Dernières précisions	23
I.11.7.Dépression et surpression d'une pale	24
I.12. Cavitation	24
I.12.1.Différents types de cavitation	25

CHAPITRE II

Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire

II .1. Introduction	26
II .2. Différents régimes de lubrification.....	26

II.3. Equations générales de la dynamique des fluides visqueux.....	30
II.4. Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes	32
II.5. Conditions limites de non glissement (no slip)	35
II.6. Champ de vitesse de l'écoulement	36
II.7. Dérivation de l'équation de Reynolds incompressible.....	37
II.8. Conditions limites associées à l'équation de Reynolds incompressible.....	40
II.9. Calcul des performances hydrodynamiques du contact.....	41
II.9.1. Champ de pression dans le film	41
II.9.2. Action du fluide sur les surfaces du contact	42
II.10. Conclusion	43

CHAPITRE III

Perturbation de l'équation de Reynolds

III.1. Introduction	44
III.2. Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes	44
III.3. Linéarisation des équations de mouvement	48
III.3.1. Concept des coefficients dynamiques d'un palier	48
III.3.2 : Méthode de perturbation : Calcul des coefficients dynamiques.....	49
III.4. Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées	58
III.5. Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre.....	60
III.6. Conclusion	62

CHAPITRE IV

Méthode de résolution numérique du problème de lubrification EHD inverse & Etude paramétrique.

IV.1. Introduction	63
IV.2. Solution Statique de problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée	63
IV. 3. Etude paramétrique	65
Tableau IV-1: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.	65
IV.4. Effets des déformations élastiques du revêtement sur les distributions de pressions stationnaire du palier	65
Conclusion.....	69
Conclusion générale	70

REMERCIEMENTS

Cette étude est le résultat de la préparation d'une mémoire de fin cycle master 2 en génie mécanique, option : Mécanique & Maintenance Industrielle.

Je remercie particulièrement mon encadreur Monsieur le Professeur LAHMAR MUSTAPHA pour m'avoir guidé tout au long de ce travail. Je tiens à leur exprimer ma très vive gratitude pour m'avoir permis d'entreprendre cette étude et de m'avoir dirigé moi de mémoire.

Je voudrais remercier spécialement Monsieur le Docteur RIAD KHETTABI, pour avoir accepté de faire partie de mon recherche bibliographique.

Je remercie tous les membres du département de mécanique, et l'étudiants Kherroubi Samir et Abderrahmen ZERTI.

Mes sincères remerciements s'adressent également à tout le corps des enseignants et le personnel du département de génie mécanique.

A mes Parents

Acronymes

HD Lubrification hydrodynamique.

PAB Partial Arc Bearings.

EP Extrême pression.

EHD Lubrification élasto-hydrodynamique.

RH Rotation droite d'hélice.

LH Rotation gauche d'hélice.

EDP_s Equation dérivé partielle

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Fig. I.1 – La formation totale de film en lubrification hydrodynamique.

Fig. I.2 – Illustration principale de d'extraction de COMPAC.

Fig. I.3 – La Conception Principale de Thordon COMPAC.

Fig. I.4 – Porteurs de palier.

Fig. I.5 – Ajustement de gel d'interférence de palier COMPAC et installation dans le porteur en bronze.

Fig. I.6 – Paliers Thordon River Tough.

Fig. I.7 – palier ROMOR C a été testé sur ce modèle de sous-marin d'essai.

Fig. I.8 – Palier standard lubrifiés par l'eau de mer.

Fig. I.9 – Palier démontable.

Fig. I.10 – Paliers ROMOR.

Fig. I.11 – Palier DMX.

Fig. I.12– Système en lubrification ouverte.

Fig. I.13 – Système en lubrification fermée.

Fig. I.14 – Principe générale d'axe de propulsion.

Fig. I.15 – (a) hélice à deux pales ; (b) hélice en bronze à trois pales ; (c) hélice à quatre pales (d) hélice à cinq pales.

Fig. I. 16 – Sens de rotation d'une hélice.

Fig. I.17 – Mouvement des pales dans l'eau génère une dépression et surpression.

Fig. I.18 – Cavitation créée expérimentalement par une hélice dans un tunnel d'eau.

CHAPITRE II

Fig. II.1 – Diagramme de Stribeck : Représentation schématique des différents régimes de lubrification.

Fig. II.2 – Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique (paliers lisse).

Fig. II.3 – Exemple d'un contact hertzien lubrifié.

Fig. II.4 – Détails géométrique et cinématique d'un contact hydrodynamique.

Fig. II.5 – Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières.

Fig. II.6 – Représentation des zones active et inactive dans un palier lisse soumis à un chargement statique : (a) *Film complet*, (b) *Film rompu*.

Fig. II.7 – Action du fluide sur les surfaces d'un palier hydrodynamique développé.

CHAPITRE III

Fig. III.1 – Représentation schématique d'un palier fluide de ligne d'arbre.

Fig. III.2 – Modèle dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique compliant.

Fig. III.3 – Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

CHAPITRE IV

Fig. IV.1 – Représentation 3-D des distributions de pression statique.

Fig. IV.2 – Champ de pression statique \tilde{p}_0

Fig. IV.3 – Epaisseur du film statique \tilde{h}_0

Fig. IV.4 – Réponses dynamiques dues à un balourd résiduel pour des paliers rigide et compliant.

PRINCIPALES NOTATIONS

C	Jeu radial du palier.	[m]
R	Rayon du palier.	[m]
h	Epaisseur du film lubrifiant.	[m]
\tilde{h}	Epaisseur du film adimensionnée, h/C	
\dot{h}	Vitesse d'écrasement, $\partial h / \partial t$.	[ms ⁻¹]
L	Longueur du palier.	[m]
N	Vitesse de rotation de rotation d'axe de propulseur.	[rpm]
O	Centre géométrique du palier.	
O, X, Y	Système de coordonnées lié à la charge statique.	
p	Pression dans le film lubrifiant.	[Pa]
\tilde{p}	Pression adimensionnée, $\frac{p}{\mu\omega(R/C)^2}$	
t	Temps.	[s]
W_0	Poids du rotor affecté au palier.	[N]
X, Y	Coordonnées du centre de l'arbre.	
\tilde{X}, \tilde{Y}	Coordonnées adimensionnées.	
z	Coordonnée axiale du palier.	[m]
\tilde{z}	Coordonnée axiale adimensionnée.	[z/L]
X', Y'	Composantes de la vitesse de déplacement du centre de l'arbre.	
ε	Excentricité relative.	
ω	Vitesse angulaire du rotor.	[rad/s]
ρ	Masse volumique du lubrifiant.	[kgm ⁻³]
λ	Rapport $(R/L)^2$,	
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant.	[Pa.s]

Introduction Générale

Introduction générale

Les machines tournantes modernes telles que les turbomachines se caractérisent par des vitesses de rotation et des charges de plus en plus grandes. Ces machines sont exposées à des problèmes vibratoires aigus essentiellement dus à la réduction des masses et l'élévation des vitesses de fonctionnement des rotors. Ces derniers sont généralement montés dans des paliers fluides fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique (HD) ou élasto-hydrodynamique (EHD). Ces paliers utilisent des huiles minérales ou de l'eau de mer comme lubrifiant (cas des paliers marins).

Sur le plan industriel, la rentabilité des installations nécessite une fiabilité des composants la meilleure possible. A titre d'exemple, une avarie de paliers rendant indisponible un groupe turbo-alternateur d'une centrale électrique de grande puissance entraîne des pertes financières considérables aux entreprises de production d'électricité. Il est donc nécessaire de s'intéresser au rôle et aux performances statiques et dynamiques de ce type de paliers.

Pour remédier à ces problèmes, les paliers à film d'huile ou paliers fluides constituent l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées dans ces dernières décennies, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité de charge et d'amortissement. Il consiste en une couche fluide interposée entre la surface du rotor et les coussinets. Par comparaison aux paliers de roulement, les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du film fluide, généralement une huile suffisamment visqueuse, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor et d'améliorer la stabilité du système rotor-palier.

Historiquement, ce n'est qu'au début du XXème siècle qu'un intérêt fut porté sur l'influence des paliers dans le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre. En 1924, **Newkirk** [1] montre expérimentalement la présence d'une fréquence de vibration qui peut être supprimée par simple réduction de l'alimentation en huile du palier. **Hummel** [2] et **Newkirk** [3] confirmèrent, à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant joué par

les paliers à film d'huile. Ils observent par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement ; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé, l'arbre est animé d'un mouvement de précession appelé fouettement avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation (appelé en anglais, "half frequency whirl") alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes) le système redevient stable. Ces résultats sont en contradiction avec ceux obtenus théoriquement par **Stodola** [4]. Ce dernier utilise en effet un modèle de palier à film complet ; c'est à dire sans prise en considération du phénomène de rupture du film (cavitation), qui est toujours instable quelque soit l'excentricité de fonctionnement. Les premières recherches sur la stabilité des paliers furent expérimentales. Les études avaient pour but de rechercher l'influence des paramètres et de la géométrie sur la stabilité du palier sans pour cela caractériser le comportement dynamique du palier. Au cours de cette période, les études théoriques les plus intéressantes ont essentiellement porté sur la modélisation et la prise compte de la rupture du film lubrifiant lors de la résolution de l'équation de Reynolds. Ce n'est qu'en 1956 qu'**Hori** [5] détermine les huit coefficients dynamiques, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement définis par la schématisation linéaire de **Stodola**, il utilise pour cela le modèle du palier infiniment long avec rupture du film d'huile dans lequel l'écoulement du film lubrifiant s'effectue seulement suivant la direction circonférentielle du palier. Ces huit coefficients, utilisés dans un calcul de stabilité, mettent en évidence des zones de fonctionnement stable. Ainsi, le désaccord entre la théorie et l'expérience était seulement dû aux conditions aux limites, liées à l'écoulement du film lubrifiant dans le palier, retenues dans la résolution du problème. L'étude des paliers courts réalisée par **Holmes** [6] confirme la validité des résultats obtenus par **Hori**. Le calcul des coefficients dynamiques du film dans le cas du palier de longueur finie (écoulement 2-D) n'a pas pu se faire qu'avec le développement des moyens de calcul (**Sternlicht** [7] et **Lund** [8]).

Ces coefficients permettent au spécialiste des rotors de modéliser linéairement le comportement du palier pour la recherche des instabilités, des vitesses critiques et des réponses de ligne d'arbre à des excitations de type balourd, par exemple. Cependant, il est impossible de prévoir le comportement du palier dans la zone instable ou lorsque ce palier est soumis à des efforts dynamiques importants (grands balourds). Les limites de la théorie dynamique linéaire ont alors contraint certains chercheurs à envisager l'approche non linéaire

pour mieux prédire le comportement des paliers fluides malgré les difficultés numériques inhérentes à ce type d'approche.

Le travail théorique mené dans le cadre de ce mémoire s'intéresse à l'étude du comportement statique et dynamique d'un palier d'arbre d'hélice marine lubrifié à l'eau de mer (Cf. figure). Ce palier dont le coussinet est muni d'un revêtement en élastomère (polyéthylène à haute densité) est soumis à deux types de chargement, à savoir une charge statique appliquée au palier correspondant au poids de l'ensemble rotor-hélice à laquelle est superposée un chargement dynamique dû à la présence d'un balourd résiduel caractérisé par une faible excentricité.

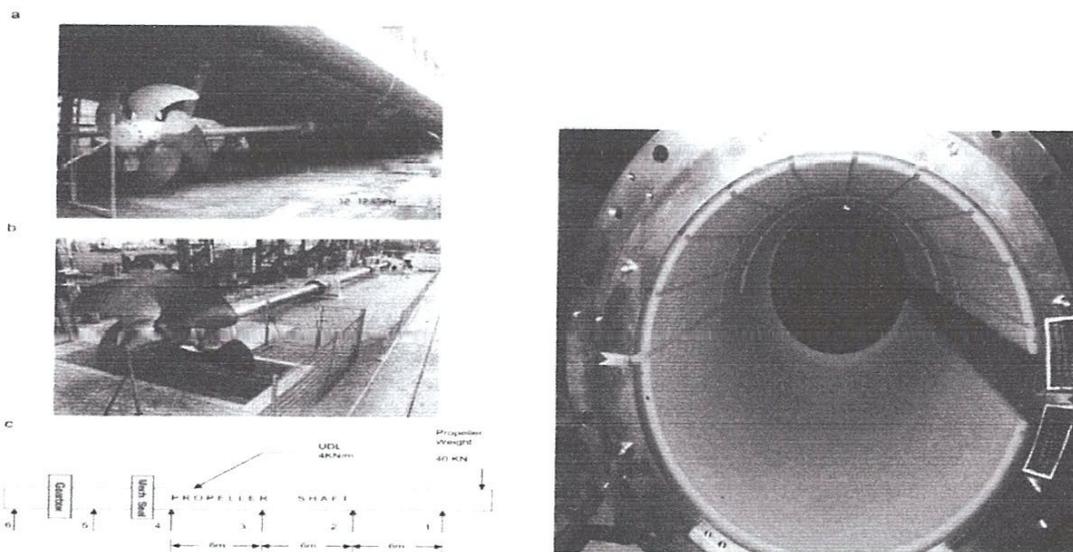


Fig.1. Un bel exemple de palier marin.

Le mémoire présentant ce travail comprend quatre chapitres.

Le premier chapitre est dévolu à l'étude bibliographique sur la technologie des paliers marins ainsi que les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement des hélices marines.

Le deuxième chapitre est réservé à l'écriture des équations générales décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien en régime laminaire ainsi que la dérivation de l'équation de Reynolds en régime dynamique moyennant les hypothèses classiques de la lubrification.

Le troisième chapitre est consacré à la perturbation de l'équation de Reynolds transitoire dans le cas d'un mouvement harmonique de faible amplitude du rotor (arbre d'hélice) au voisinage de la position d'équilibre statique en vue de calculer les huit coefficients dynamiques du palier, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement dans le cas d'une charge statique imposée.

Les coordonnées de la position d'équilibre statique résultant de l'application de la charge statique sont recherchées de façon itérative à l'aide de la méthode de Newton-Raphson amortie.

Ces coefficients servent comme des données pour l'étude de la réponse de l'ensemble palier-arbre d'hélice à une excitation dynamique synchrone au travers la résolution des équations de mouvement forcé linéarisées du rotor (arbre d'hélice).

Le quatrième et dernier chapitre est consacré au traitement numérique des cinq équations différentielles couplées résultant de l'application de la méthode de perturbation ainsi que la présentation de la stratégie de résolution du problème de lubrification EHD inverse (charge imposée) en régimes stationnaire et dynamique. L'étude de l'influence de la compliance du revêtement de surface sur le comportement statique et dynamique d'un palier marin statiquement chargé et soumis à une excitation dynamique synchrone sera envisagée.

Chapitre I

CHAPITRE I

Etude bibliographique sur les paliers marins et les hélices marines

I. Introduction

Dans ce chapitre, on présente une étude bibliographique sur les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement des principaux paliers marins dans les quels un film fluide mince sépare les surfaces en mouvement relatif.

On a jugé utile de présenter au début de ce chapitre une description des différents types de paliers marins.

I.1. Différents types de paliers marins

Les paliers sont des organes de machines utilisés pour guider les arbres en rotation, ils déterminent la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme. Selon la direction de la charge par rapport à l'arbre en rotation ; on distingue les paliers pour lesquels la charge est radiale, généralement appelés paliers.

I.1.1. Paliers de COMPAC

Le palier de COMPAC lubrifié par l'eau de mer avec le bon individu caractéristiques d'onctuosité, excellente résistance à l'usure et une conception qui encourage le rapide génération d'un film hydrodynamique. Thordon COMPAC est un alliage élastomère de polymère produit par Thordon Bearings pour le marché marin. Il a été développé avec un individu élevé l'onctuosité et basé sur les avantages calculés pour un groove le palier contre cannelé soutenir, une configuration avec une moitié supérieure de moitié inférieure et cannelée douce ont été choisis [9].

Le polymère de COMPAC dans une configuration de 2:1 (L/D) a réduit le couple d'évasion et le frottement opérationnel traduisant en opération plus sans heurt, usage diminué et efficacité accrue d'opération.

I.1.2. Paliers Thordon COMPAC lubrifiés par l'eau de mer

La surface d'usage de palier est Thordon COMPAC, un alliage non métallique et élastomère de polymère.

Les paliers élastomères de rendement élevé de Thordon peuvent :

- fournir la longue vie d'usage de palier ,
- éliminer l'huile ;
- résister aux charges élevées de choc et affiler le chargement réduire le frottement de mise en train et l'éliminer bâton-glissant, formulation de COMPAC inclut spécial lubrifiants pour fournir un bas coefficient de frottement. Pour favoriser la formation tôt d'un hydrodynamique ,le film entre l'axe et le palier, (**Fig. I.1**) la partie (chargée) inférieure du palier est lisse, alors que la moitié supérieure du palier incorpore des cannelures pour l'écoulement de l'eau lubricant/coolant.

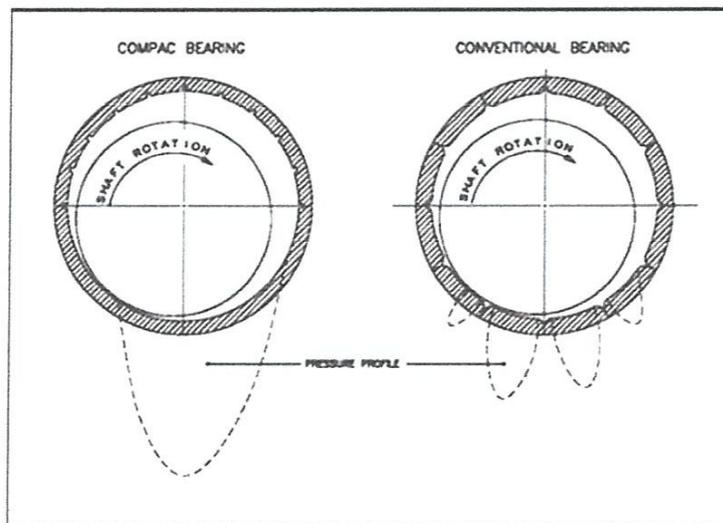


Fig. I.1 – La formation totale de film en lubrification hydrodynamique.

Les paliers de Thordon COMPAC sont disponibles dans de pleins tubes de forme ou dans une conception principale conique fendue. Les paliers fendus sont ajustage avec serrage dans une

conception principale conique par Thordon unique logement d'une seule pièce et alors aligné et calé en l'place (**Fig. I.2 & I.3**). La clef conique par fente de Thordon la conception a beaucoup d'avantages en service les paliers peuvent être enlevés, inspecté et des Réinstallé toujours en juste quelques heures avec l'axe en place.

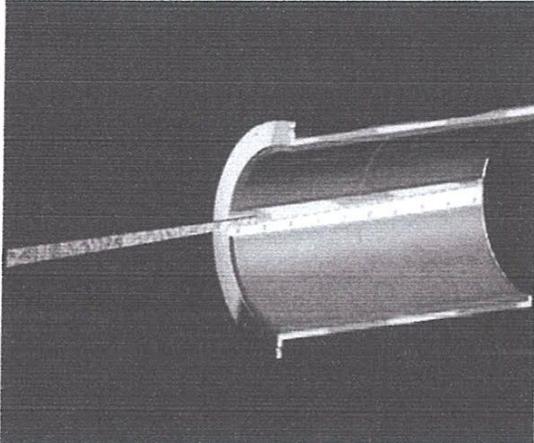


Fig. I.2 – Illustration principale d'extraction de COMPAC.

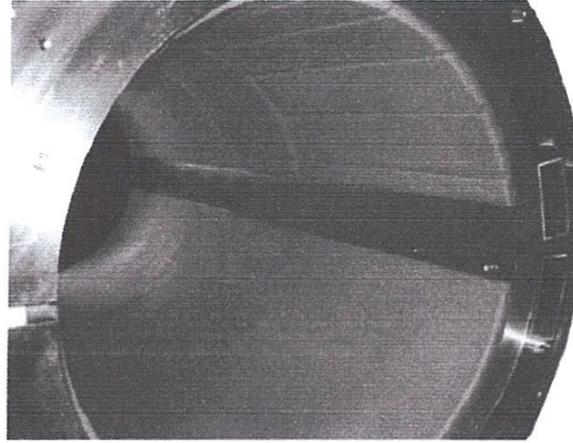


Fig. I.3 – La Conception Principale de Thordon COMPAC.

I.1.3. Porteurs de palier

Thordon peut recommander des porteurs de palier, si approprié (**Fig. I.4**). Il y a plusieurs porteur de palier options pour des paliers de Thordon COMPAC selon l'installation et l'alignement technique qui est employée.

Si les paliers doivent être alignés individuellement, et résine être calés en position, ils doivent être installé dans un porteur en métal. Les pleins paliers de forme peuvent être ajustage avec serrage dans un métal plein porteur ou tube sévère intérieur séparé et alors aligné et calé en l'place.

Sur des projets de conversion de navire, ajustage de précision d'interférence de pleins tubes de forme dans la poupe existante le tube peut également être considéré.

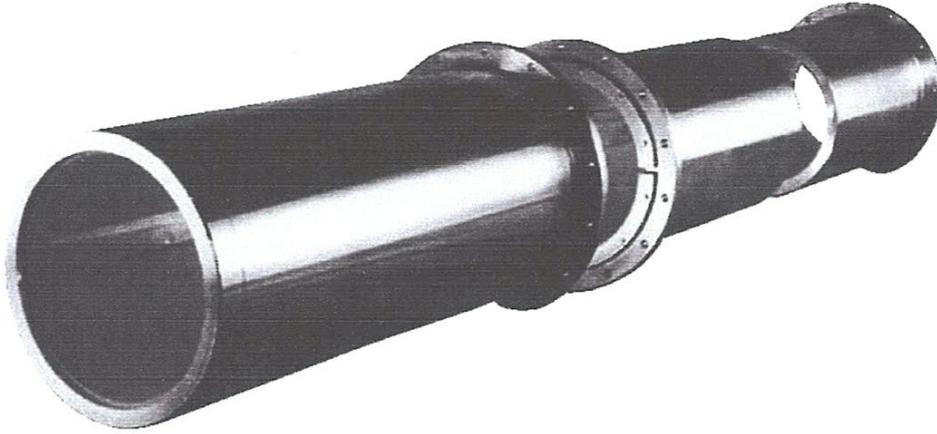


Fig. I.4 – Porteurs de palier.

I.1.4. Recouvrements approuvés d'axe

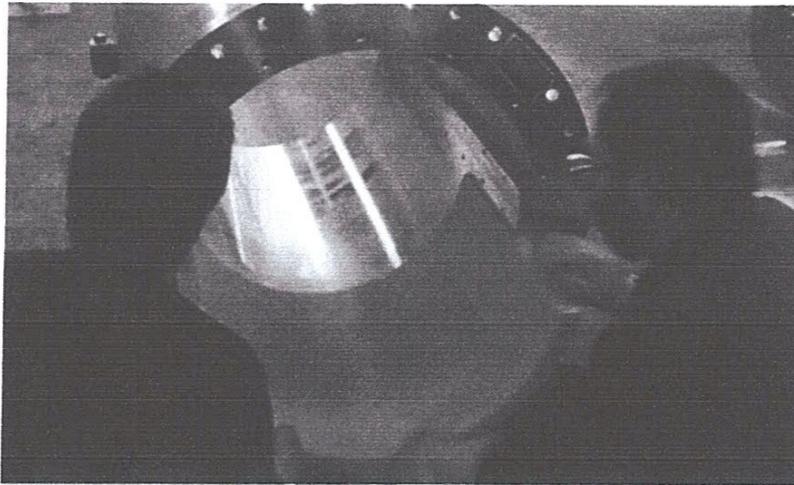
Puisque soutenir "dégagement" est la somme de les deux usage de palier, et usage de le recouvrement d'axe, un recouvrement d'axe de haute qualité est un composant important d'un système de COMPAC.

Les paliers de Thordon recommande les matériaux suivants de douille d'axe afin de fournir exécution d'usage optimum en combinaison avec des paliers de Thordon COMPAC [10].

- Inconel 625.
- 70/30 Nickel de cuivre.
- Unimétal (typiquement CuSn10Zn).

I.1.5. Facilement usiné et adapté

Thordon COMPAC usine proprement et ne produit aucun débris d'usinage aéroporté. COMPAC est beaucoup plus léger que les paliers blancs en métal (**Fig. I.5**) et peut être adapté rapidement et facilement en gelant dans l' azote liquide.



**Fig. I.5 – Ajustement de gel d'interférence de palier COMPAC
installation dans le porteur en bronze.**

I.1.6. Systèmes de palier d'axe de propulseur de l'eau

Le système de palier de COMPAC emploie l'eau de mer comme milieu de lubrification au lieu de l'huile. L'eau de mer est prise de la mer, pompée par les paliers d'axe non métalliques de propulseur de COMPAC et retournée à la mer. Pour s'assurer que des abrasifs sont enlevés de l'offre d'eau de mer, un paquet de qualité de l'eau de Thordon est employé. L'utilisation des paliers lubrifiés par l'eau de mer élimine le joint arrière, aussi bien que le stockage, le prélèvement et la disposition d'huile. Thordon offre actuellement une industrie menant la garantie de la vie d'usage du palier 15-year sur COMPAC. Le système de palier d'axe de COMPAC actuellement est installé dans le monde entier sur 600 navires [11].

Le palier de Thordon COMPAC est un alliage élastomère de polymère conçu dans une configuration de 2 :1 (L/D) dans le palier arrière.

Pour favoriser la formation tôt d'un film hydrodynamique entre l'axe et le palier, la partie (chargée) inférieure du palier est lisse, alors que la moitié supérieure du palier incorpore des cannelures pour l'écoulement de l'eau lubrifiant/coolant. Le système de COMPAC inclut typiquement des paliers de COMPAC, des recouvrements d'axe, l'enduit d'un axe de paquet, de Thor-Manteau de qualité de l'eau et un joint vers l'avant.

Le paquet de qualité de l'eau de Thordon est un dispositif de pompage d'un seul bloc qui enlève solides en suspension avec une densité de 1.2 ou 80 des microns plus élevés et plus grands que (0.003 »). Pendant que l'eau écrit le joint vers l'avant, elle traverse les paliers et des sorties de COMPAC à la poupe. Le débit est surveillé par de basses alarmes d'écoulement.

L'enduit d'axe de propulseur de Thor-Manteau assure la protection de dix ans de corrosion contre l'eau de mer. Ce durcie, enduit époxyde en deux parties est jusqu'à neuf fois plus flexible que les produits enduisants d'axe existant.

Avec des règlements environnementaux de plus en plus rigoureux, l'eau de mer de Thordon les paliers d'axe lubrifiés de propulseur sont remplacement huile-lubrifié, paliers en métal.

Avéré dans les environnements marins les plus durs depuis 1983, les paliers de Thordon offrent :

- Risque zéro de pollution (aucune huile requise)
- garantie de la vie de l'usage 15-Year pour COMPAC dans l'opération de l'eau blue
- Appui clés en main de technologie et d'installation
- Ajustage de précision facile
- Coûts d'entretien réduits de phoque
- Inspections sans retrait d'axe
- Résistance au chargement de choc et de bord
- Notre mode de défaillance non-catastrophique permet au bateau d'obtenir de mettre en communication

I.2. Pour l'eau abrasive

Des paliers d'axe de propulseur de Thordon River Tough (**Fig. I.6**) fonctionnant en combinassions avec les douilles enduites dures de nickel-chrome-bore sont particulièrement formulés pour fournir la vie supérieure d'usage en états très abrasifs de l'eau et pour avoir prouvé leurs capacités au bout au moins deux fois plus longtemps que les paliers en

caoutchouc. La marine des Etats-Unis emploie actuellement Thordon River Tough dans leurs 1600 unités de barge de débarquement de classe (LCU's).

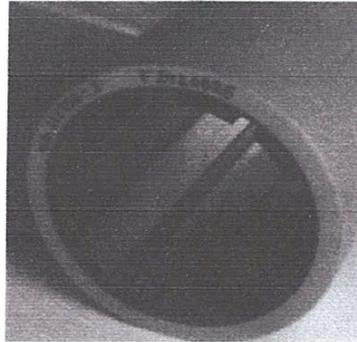


Fig. I.6 – Paliers Thordon River Tough.

I.3. Paliers de ligne d'arbre hydrolubrifiés

Tous les paliers **DURAMAX** sont lubrifiés à l'eau et leur excellence assure [12] :

- Absorption des vibrations ;
- Très haute résistance ;
- Faible coefficient de friction ;
- Durabilité et fiabilité des paliers notamment dans des conditions extrêmes de fonctionnement (navires de guerre, de commerce, bateaux de pêche, bâtiments de servitude, dragues, plates-formes de forage...).

I.3.1. Principe de fonctionnement

Les paliers DURAMAX sont conçus de façon à créer en surface un film d'eau, tout en constituant un support solide pour les arbres. Des rainures spécifiques permettent à l'eau de s'écouler sans contrainte tout au long du palier. Ainsi, le sable ou toutes autres particules sont systématiquement évacués. La lubrification à l'eau indispensable au bon fonctionnement des paliers (responsable du faible coefficient de friction) est non polluante et ne nécessite pas de systèmes d'étanchéité complexes.

I.4. paliers ROMOR C – PAB

I.4.1 Conception basique du palier

Le PAB de Duramax Marine est fabriqué en adhérant un caoutchouc composé breveté avec la surface intérieure d'une coquille composite (**fig. I.7**). La surface du palier est le même caoutchouc qui est utilisé pour les paliers à douelles ROMOR I. Les paliers à douelles ROMOR I ont été opérationnels avec succès pendant plus de 20 ans! La surface en caoutchouc lisse continue procure un palier avec un faible coefficient de friction, particulièrement avec une faible vitesse de rotation de l'arbre et une signature acoustique supérieure. Il permet aussi au palier une longue durée de vie tout en protégeant l'arbre d'une usure excessive. L'absence de rainures pour l'eau sur la surface de contact réduit la possibilité de bruit et de vibration. Le faible niveau de bruit est encore amélioré par la coquille en composite qui favorise l'insonorisation et étouffe la transmission du son [13].

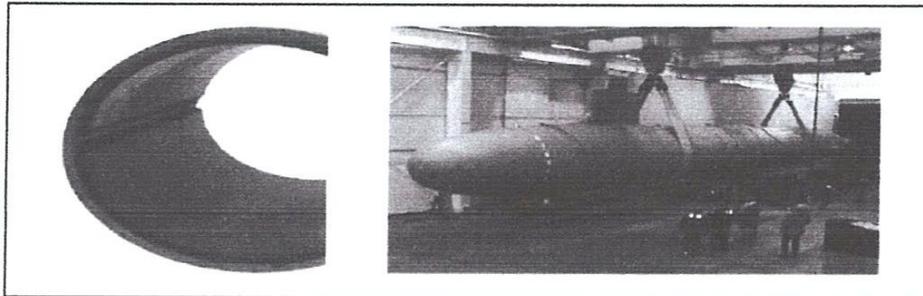


Fig. I.7 – palier ROMOR C PAB a été testé sur ce modèle de sous-marin d'essai.

I.4.2. Avantages du palier ROMOR (C) [PAB] :

- Il n'est pas sujet à l'hystérésis ;
- Il n'est pas sujet à l'hydrolyse ;
- Faible poids ;
- Les matériaux du palier et de la coquille sont thermiquement stable ;
- Grande résistance du matériau de la coquille ;
- Technologie ayant fait ses preuves.

I.5. Paliers standards DURAMAX

Les paliers en caoutchouc lubrifiés par l'eau de mer, DURAMAX sont faits confiance par des professionnels plus marins d'industrie que tout autre". La précision conçue, le caoutchouc particulièrement formulé de nitriles est précision moulée pour adapter l'axe selon des dégagements de BuShip de marine des ETATS-UNIS pour le bas coefficient de frottement. Disponible pour la propulsion marine, le gouvernail de direction et les applications industrielles de pompe, paliers de Duramax posséder les qualités d vibration amortissement inhérentes et être non polluant. Grincer les particules et d'autres abrasifs lavent dans les cannelures et sont rincés loin, protégeant l'axe et prolongeant la vie de palier (**Fig. I.8**).

Les douelles en caoutchouc de DURAMAX et les paliers à flasque pour des applications résistantes de métier de film publicitaire et de plaisir, comportent une doublure en caoutchouc moulée par nitriles particulièrement formulée fermement collée sur une coquille de laiton naval. Les coquilles pour des paliers manchon sont laiton naval sans couture ; ceux pour les pallers à flasque sont d'une seule pièce centrifuge-ont moulé avec la bride intégrale. Les paliers manchon sont également disponibles avec une coquille non métallique raboteuse. D'autres types de coquilles, telles que l'acier inoxydable, le monel ou l'aluminium peuvent être fournis pour passer commande. Tous les paliers précision-sont usinés pour clôturer des tolérances et entièrement inspectés [14].

Ce modèle de paliers sont utilisés sur des navires différents tels que les cargos, les bateaux ferry, remorqueurs, bateaux pousseurs, les navires de la marine, des bateaux de pêche.

Les paliers standards DURAMAX disposent d'une garniture en caoutchouc nitrile de haute qualité et sont disponibles :

- en dimensions métriques et impériales ;
- avec une coquille en bronze ou non métallique (phénolique) ;
- manchon ou à collerette ;
- Cas particuliers : dimensions sur mesures, coquille inox, palier en demi-coquilles...

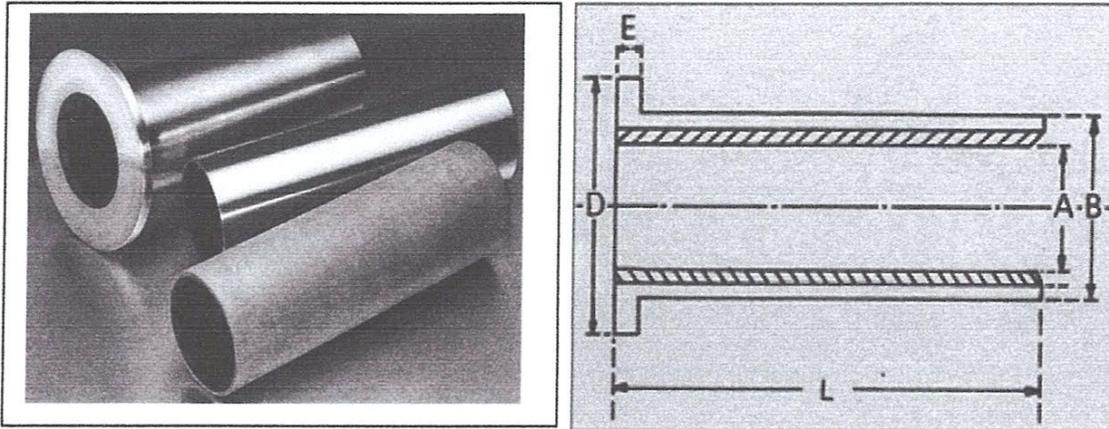


Fig. 1. 8 – palier standard lubrifiés par l'eau de mer.

A Diamètre intérieur de palier en caoutchouc ; B Diamètre extérieur de la surface de la coque ; L Longueur de palier ; D & E Le diamètre extérieur et l'épaisseur de la bride.

I.5.1. Dimension de palier

L=550 mm ; A=145 mm ; B=190 mm ; Épaisseur du revêtement = 6 mm

I.5.2. Caractéristiques

- Faible coefficient de frottement ;
- Résistance à l'abrasion supérieure ;
- Long Life la chemise d'arbre ;
- Moins de puissance requis, moins de choc et le bruit-Preuve ;
- Moins d'entretien requis ;
- Stabilité de la qualité ;
- Pas de possibilité de contamination de la mer [15].

I.5.3. Matériaux

Caoutchouc synthétique spécial composé (Ayant une résistance supérieure à l'abrasion, résistance à l'eau et de résistance à l'huile)

I.6. Paliers démontables

Forts d'une conception intelligente ayant fait ses preuves, les paliers démontables DURAMAX (**fig. I.9**) consistent en une garniture (douelles) immobilisée dans un logement. Lors de la mise en place, les têtes de compression utilisent la déformation du caoutchouc pour solidariser les douelles avec le logement. Ainsi il est possible de contrôler et de remplacer les douelles sans jamais déposer l'arbre, ce qui représente une évidente économie de temps et d'argent en terme de maintenance. Le caoutchouc est déformable mais non compressible (il garde toujours le même volume). Ce que la douelle perd en longueur, elle le gagne en épaisseur : de ce fait, l'insertion des douelles est facilitée et grâce à la compression, le palier se remet au jeu requis.

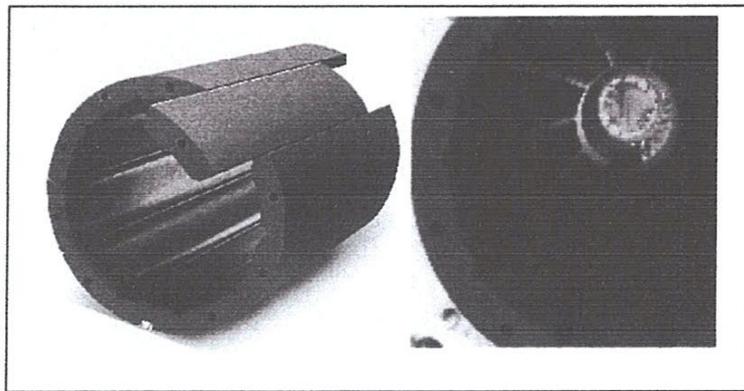


Figure. I.9 – palier démontable.

I.6.1. Avantages:

- Très nombreuses références ;
- Très rapide à l'installation et au remplacement ;
- remplaçables sans démonter l'arbre d'hélice ;
- possibilités de vérification améliorées ;
- logement de palier toujours rectiligne et jamais étagé ;
- plus d'arbre étagé ;
- auto bloquant ;
- réduction des coûts.

I.7. Paliers ROMOR I

I.7.1. Conception

Les douelles ROMOR I DURAMAX (Fig.I.10) sont constituées de deux couches différentes :

- Pour optimiser le contact avec l'arbre, la couche supérieure est faite de caoutchouc moulé et a un fini de surface glacé extrêmement lisse, assurant une très bonne glisse et permettant une friction minimale entre l'arbre et le palier, réduisant ainsi la période de rodage.
- Le dos des douelles quant à lui est composé de polyéthylène à ultra haut poids moléculaire (UHMWP) qui est complètement lié à la couche supérieure.

Cette composition assure une excellente résistance aux chocs et n'est pas corrosive.

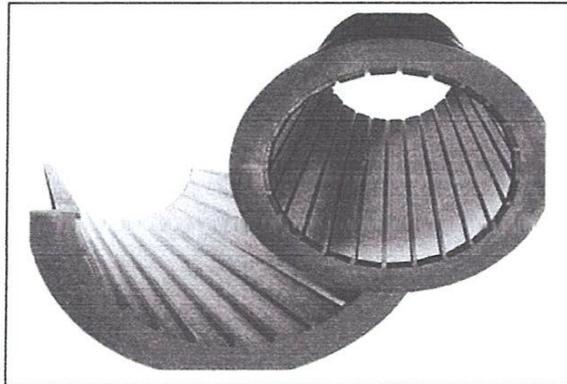


Fig. I.10 – Paliers ROMOR.

I.7.2. Avantages:

- La surface en caoutchouc du palier a été spécialement étudiée pour des opérations silencieuses dans des environnements marins difficiles ;
- Sa surface extra lisse réduit la friction initiale entre la ligne d'arbre et le palier ;
- La surface des douelles ROMOR expulse efficacement les particules abrasives ;
- Le dos des douelles en polyéthylène à ultra haute densité moléculaire possède une grande résistance aux chocs et est anti-corrosif ;
- Pas de rétention de chaleur ni de dilatation du matériau ;

- Les capacités de déformation et de rebond du caoutchouc permettent de minimiser les risques d'usure et de dégâts de la chemise d'arbre ;
- Répond à la norme Mil-B17901B Class III qui est une référence (US Navy).

I.7.3. Applications

Grâce à leur surface extra lisse qui réduit la friction entre l'arbre et le palier et évite ainsi les bruits de "stick-slip", la majorité des sous-marins américains ainsi que les porte-avions sont équipés de ROMOR.

Elles figurent sur la liste "Navy QPL" et sont totalement interchangeables avec les douelles à dos en bronze "Class I"

I.8. Paliers DMX

Les paliers DMX sont la dernière technologie en terme de paliers démontables (**Fig. I.11**). Ses douelles sont fabriquées dans une nouvelle matière ayant des propriétés bien supérieures

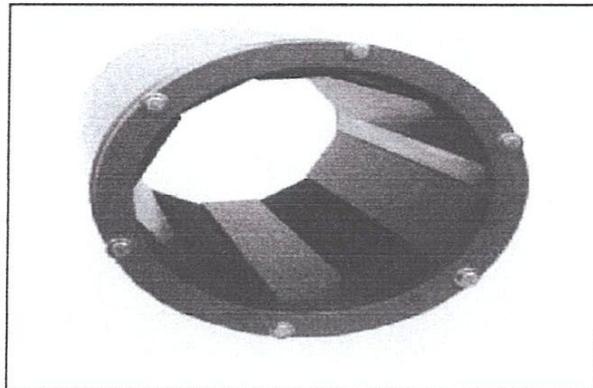


Fig. I.11 – Palier DMX.

au caoutchouc "classique" dans une utilisation en milieu chargé et abrasif. Il a un coefficient de friction extrêmement faible, ce qui permet une usure minimum palier / chemise (arbre), des vitesses de rotation mini très faibles et il supporte très bien les retournements d'arbre. Fonctionnant avec de lourdes charges, on applique un ratio diamètre/longueur de 2:1 au lieu du 4:1 traditionnel, ce qui apporte de nombreux avantages en termes de coût, d'encombrement, de poids, etc.

I.8.1. Avantages :

- Usure très faible même en milieu abrasif ;
- Augmentation de la durée de vie de la chemise ;
- Maintenance sans dépose de l'arbre ;
- Très faible bruit lors des retournements d'arbre.

I.9. Le Joint GS Maprom

I.9.1 Principe

Le joint circulaire à 3 lèvres est maintenu fortement contre l'arbre d'hélice par un ressort à boudin pour tourner avec l'arbre. Pour assurer l'étanchéité, le joint est doté de deux lèvres en contact avec une flasque démontable (ou contre-anneau), et une troisième lèvre empêche toute sur compression [16]. A l'arrière du joint, un anneau gonflable entoure l'arbre immobilisé, afin d'assurer l'étanchéité lors d'une maintenance éventuelle. Ce joint est disponible en 2 configurations :

1. Système en lubrification ouverte

C'est le système classique où l'eau de lubrification du joint (**fig. I.12**) est naturellement évacuée par les paliers de ligne d'arbre.

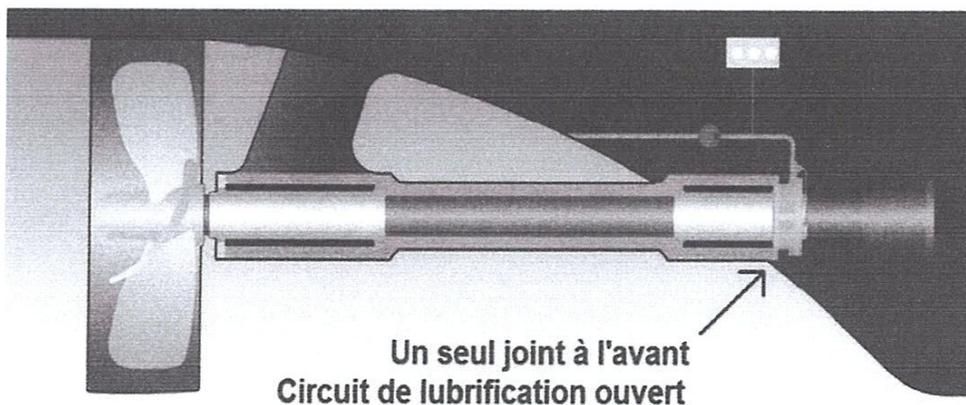


Fig. I.12– Système en lubrification ouverte.

2. Système en lubrification fermée

Grâce à un joint avant et un joint arrière, la lubrification se fait en circuit fermé (Fig. I.13). Certes plus complexe à l'installation, ce système assure une durée de vie accrue de l'ensemble des pièces grâce à une eau de lubrification claire. Cette optimisation de durabilité ne s'applique pas uniquement aux joints, mais aussi aux paliers de lignes d'arbre, chemises et pompes de lubrification

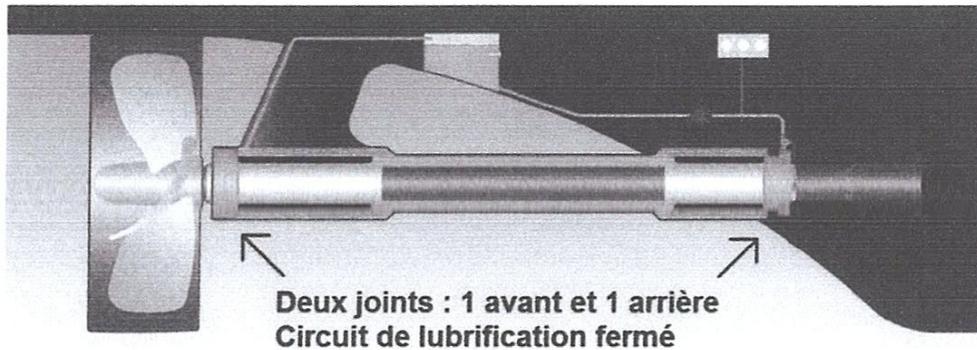


Fig. I.13 – Système en lubrification fermée.

I.9.2. Avantages spécifiques du joint GS :

- Maintenance réduite et simplifiée à flot (joint gonflable) ;
- Pas d'entretien du joint ;
- Ce joint permet un mouvement axial et radial de l'arbre ;
- Boîtier et couvercle en deux parties = remplacement facile d'une installation existante.

I.10. Matériaux antifriction pour régime hydrodynamique

Ce régime de fonctionnement nécessite des propriétés particulières de la bague ou du coussinet qui sont bien souvent contradictoires [17]. Une manière d'éviter cette difficulté est d'utiliser tout d'abord des matériaux multicouches mais aussi des matériaux à structures multiphasiques.

I.10.1. Applications fonctionnant dans l'eau

Du fait des phénomènes de corrosion qui surviennent en milieu aqueux, on cherche à utiliser des matériaux non corrodables à lubrifiants solides, des matériaux de type polyuréthane ou de type résine thermodurcissable, sachant que ces derniers donnent en présence d'eau de très bas coefficients de friction. Parmi les applications les plus courantes, citons les paliers de laminoir en résine phénolique lubrifiés à l'eau et les paliers en bronze massif d'étambot d'arbre d'hélice de bateau (palier hydrodynamique de type infiniment long).

I.10.2. Revêtements de surface

Les revêtements de surface de faibles duretés et fusibles dans leur masse à basses températures améliorent notablement les performances de la sous couche flottante. Cependant, certaines de ces améliorations, comme la résistance à la fatigue, sont fonction de l'épaisseur du dépôt [18]. En effet, un dépôt très mince tend à posséder les caractéristiques mécaniques du substrat alors qu'un dépôt épais, à partir de 15 μ m.

I.11.Principes de systèmes propulsion

Un navire se déplace à travers l'eau à travers des dispositifs de propulsion, tels que roues à aubes ou des hélices. (Fig. I.14) Ces dispositifs impriment une vitesse à une colonne d'eau et déplacent dans la direction opposée dans lequel on souhaite déplacer le navire. Une force, la force de réaction appelée parce qu'il réagit à la force de la colonne d'eau, est mis au point sur le dispositif communicateur de vitesse. Cette force, appelée aussi poussée, est transmis au navire et provoque le navire de se déplacer dans l'eau.

L'hélice vis-type est le dispositif de propulsion utilisé dans presque tous les navires de guerre. La poussée développée sur l'hélice est transmise à la structure du navire par l'arbre principal par l'intermédiaire du palier de butée. L'arbre principal s'étend depuis l'arbre de réducteur principal du réducteur à l'hélice. Il est supporté et maintenu en alignement par les paliers à ressort, les roulements de tube d'étambot, et l'entretoise de palier. La poussée, agissant sur l'arbre de propulsion par suite de l'effet de poussée de l'hélice, est transmise à la structure du navire par le palier de poussée principale. Dans la plupart des navires, le palier de butée principale est située à l'extrémité avant de l'arbre principal à l'intérieur du boîtier réducteur

principal. Dans certains très grands navires, cependant, le palier d'arbre principal de poussée est situé plus loin vers l'arrière dans un local de machines ou d'une allée d'arbre.

Le réducteur principal relie la source motrice (moteur) à l'arbre. La fonction de l'engrenage de réduction principal est de réduire les vitesses de rotation élevées du moteur et de permettre l'hélice pour fonctionner à des vitesses de rotation inférieures. De cette manière, à la fois le moteur et l'arbre d'hélice tourne à leurs vitesses les plus efficaces [19].

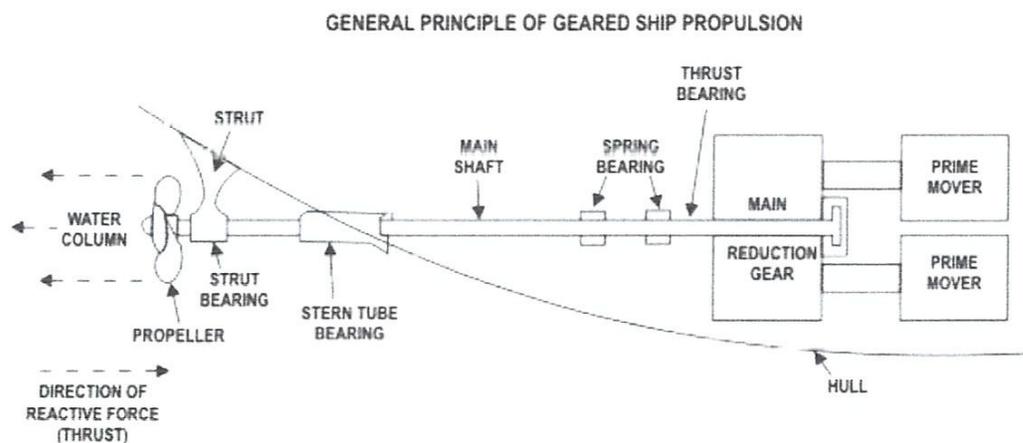
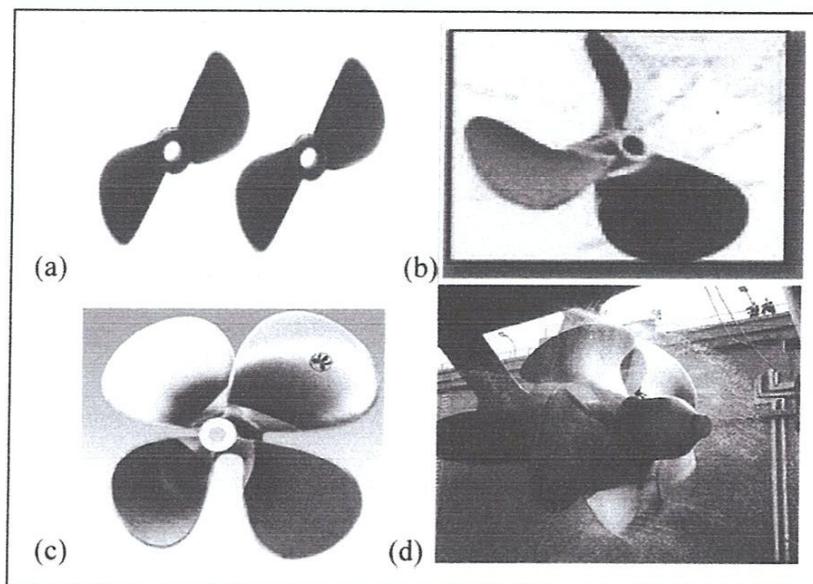


Fig. I.14 – Principe générale d'axe de propulsion.

I.11.1. Description d'une hélice marine

L'hélice est l'élément propulseur de votre navire (bateau, sous-marins) (Fig. I. 15). Et caractérisée par : nombre de pales, diamètre, surface, pas...pour faire simple, sont autant de paramètres qui vont modifier sensiblement votre avancement pour une même consommation énergétique (thermique ou électrique). à un certain nombre de caractéristiques La directement en rapport avec la vitesse de rotation de l'arbre et le fait que l'on veuille privilégier soit la vitesse, soit la poussée...Le reste n'est qu'affaire de compromis .conception et l'adaptation d'une hélice à une coque étant très complexe.



**Fig. I.15 – (a) hélice à deux pales [20] ;
 (b) hélice en bronze à trois pales ;(c) hélice à quatre pales
 (d) hélice à cinq pales.**

I.11.2. Diamètre

Le diamètre est le facteur essentiel pour déterminer l'efficacité de l'hélice. Une hélice travaille en repoussant l'eau à l'arrière du bateau, ce qui a pour effet de propulser celui-ci vers l'avant. En termes d'efficacité, il vaut mieux repousser vers l'arrière une grande quantité d'eau assez lentement que de rejeter une faible quantité d'eau très rapidement, pour obtenir la même poussée vers l'avant. Ainsi le diamètre de l'hélice devrait toujours être aussi grand que possible, compte tenu de l'espace disponible entre les pales et la coque, de sorte que la plus grande quantité possible d'eau passe à travers l'hélice [21].

I.11.3. Spécification hélice

Les principales caractéristiques de fonctionnement exigées par le constructeur sont utilisées comme données initiales pour la conception de l'hélice [22].

Vitesse	10.6m/s
Diamètre D	0.71m
Vitesse de rotation	937 tr/mn
Diamètre moyeu/D	0.18
Puissance	240 kw

I.11.4. Le matériau d'hélice

Les spécialistes indiquent que la matière qui constitue une hélice intervient dans 10 % au maximum dans les performances d'une hélice. Tout au plus certains matériaux (inox) permettent d'obtenir des profils plus fins que d'autre (bronze). Mais on trouve également des hélices en aluminium.

I.11.5. Rugosité d'une hélice

Les hélices en bronze Al-Ni conservent ou améliorent leur rugosité de fabrication pendant les premières années de mise en service. Les hélices en bronze-Mn voient, par contre, leur rugosité augmenter (100 μm au bout de plusieurs années). Cette différence de comportement est expliquée en partie par l'efficacité moins grande de la protection contre la corrosion électrolytique Cu-Fe de la coque, réalisée au moyen de plaques de zinc fixées à la coque. En fait, la rugosité est irrégulière sur la surface des pales, et on ne peut que définir une rugosité moyenne calculée à partir des relevés faits en de nombreux points sur plusieurs pales au moyen de rugosimètres. En général, la rugosité est plus grande au voisinage du moyeu qu'en bout de pale [23].

I.11. 6. Dernières précisions

Les hélices ont aussi un **sens de rotation** (vu de face de l'arrière vers l'avant du bateau) ; (**fig. I. 16**) elles sont repérées par les mentions **RH** (tourne à droite) ou **LH** (tourne à gauche). Il n'est d'ailleurs pas rare de monter des hélices de sens de rotation contraire sur des bateaux bi-hélices.

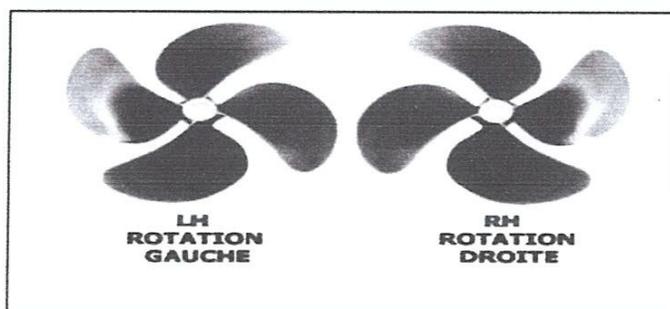


Fig. I.16 – Sens de rotation d'une hélice.

I.11.7. Dépression et surpression d'une pale

Théoriquement, la propulsion est le résultat de la différence de vitesse entre la masse d'eau aspirée et celle repoussée ; le mouvement des pales dans l'eau génère une dépression sur l'extérieur du profil (ou extradados) en même temps qu'une surpression de l'autre côté (fig. I. 17) (ou intrados).

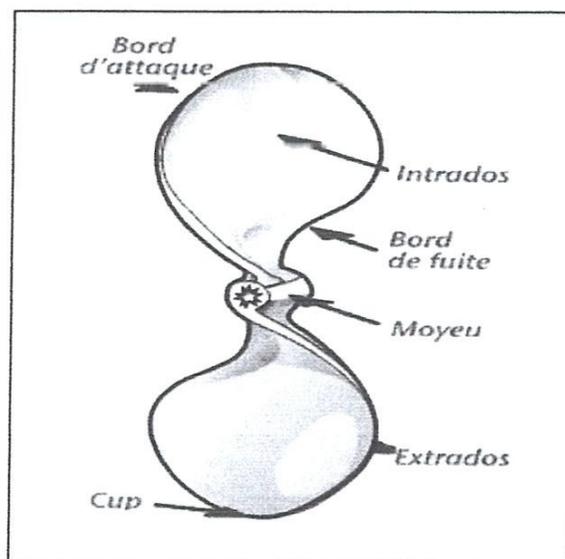


Fig. I. 17 – Mouvement des pales dans l'eau génère une dépression et surpression.

I.12. Cavitation

La cavitation c'est un phénomène, contrariant une bonne poussée, se manifeste lorsque [24] : Les pales ne s'appuient plus sur un flux d'eau dans un état laminaire, mais dans un état turbulent avec une quantité importante d'air ; ce mélange air/ eau étant compressible, il

entraîne une rotation de l'hélice peu régulière et active. Les pales de l'hélice aspirent de l'air par effet vortex ou ventilation (notamment lorsque le régime moteur est trop haut sur le tableau AR pour un HB), ou si la distance entre la surface de l'eau et l'extrémité haute des pales est trop faible (pour une ligne d'arbre)... La plaque anti-ventilation sert à limiter ce phénomène.

Les pales se retrouvent soumises à une pression trop importante par rapport à leur surface, ce qui crée une dépression (côté intrados, en bout de pales). Dans ce cas, la pression côté extrados, ne suffit plus à équilibrer la relation dynamique. L'eau contenue dans cette dépression se dégrade alors chimiquement pour former des microbulles qui s'amoncellent jusqu'au décrochage complet des pales (l'hélice ne visse plus dans l'eau, mais dans de l'air).

1.12.1. Différents types de cavitation

- cavitation à haut nombre de Reynolds : l'inertie du liquide (sa mise en mouvement) (**fig. I.18**) ralentit l'expansion du gaz.
- cavitation à faible nombre de Reynolds : la viscosité du liquide limite la vitesse d'expansion.
- cavitation élastique : la résistance élastique du milieu et la tension de surface limitent la dilatation du gaz.

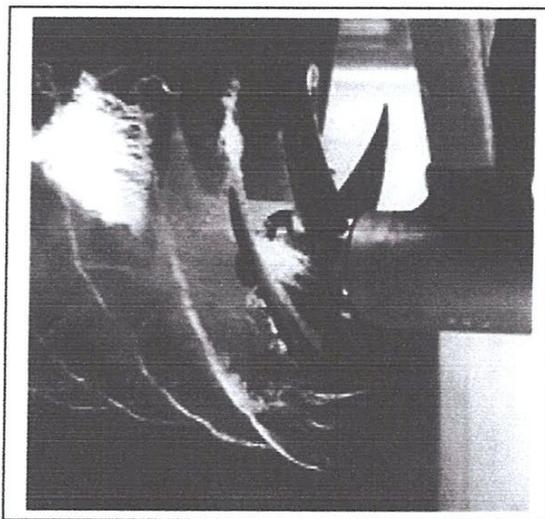


Fig. I.18 – Cavitation créée expérimentalement par une hélice dans un tunnel d'eau.

Chapitre II

CHAPITRE II

Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince, continu dont le comportement est newtonien. Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi-solide. Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir : la lubrification solide et la lubrification fluide. Dans cette dernière, Le fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou isovolume tels que de l'huile, de l'eau ou, même un métal fondu (Sodium liquide à 400 °C) comme il peut être un gaz compressible le plus souvent de l'air : c'est le cas des paliers et butées à gaz.

II.2. Différents régimes de lubrification

Il est commode de présenter les différents régimes de lubrification à partir de la courbe de variation du frottement en fonction de la vitesse. Quelque soit le contact lubrifié à basse pression ou à haute pression (contacts rencontrés dans les engrenages et les roulements), cette courbe dite courbe de Stribeck (1902) a toujours la même allure (Fig. II.1). On distingue trois zones qui correspondent chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact.

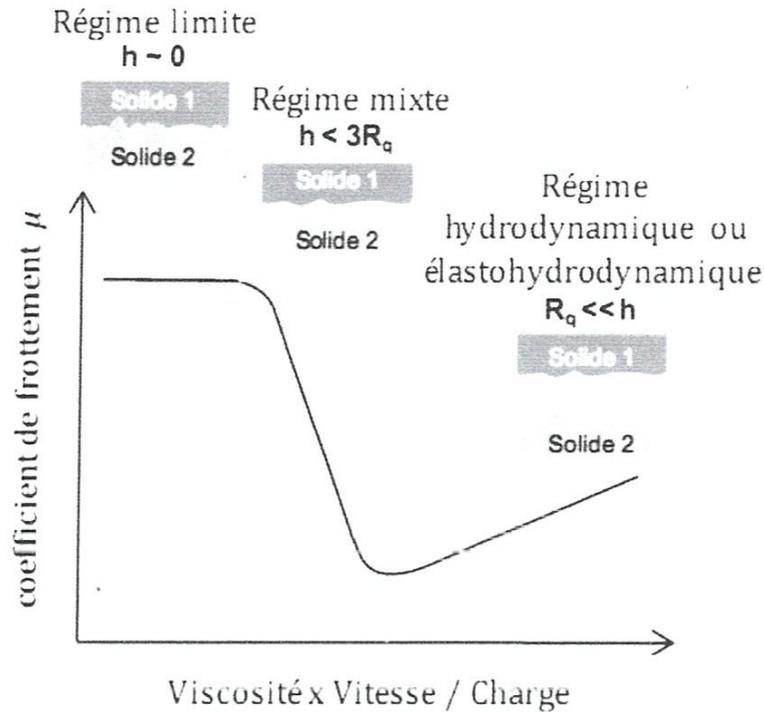


Fig. II.1 – Diagramme de Stribeck :
Représentation schématique des différents régimes de lubrification [25].

- *Contacts à basse pression*

- *Régime de lubrification limite :*

Le graissage limite ou onctueux est le régime où le film lubrifiant est rompu et que seules des molécules de lubrifiant adsorbées aux surfaces métalliques réduisent le frottement, mais sans pouvoir empêcher les aspérités des surfaces de venir en contact, et de créer des microsoudures suivies d'arrachements de métal. L'épaisseur de la couche moléculaire (épilamen) est de l'ordre de 10 à 50 nm et la valeur du coefficient de frottement s'échelonne entre 0.05 et 0.15. Ce type de lubrification est rencontré lors du démarrage et l'arrêt des machines, c'est à ce moment qu'il se produit l'usure la plus importante car les surfaces ne sont pas complètement séparées. Dans ces conditions, l'onctuosité est la propriété prédominante du lubrifiant.

- Régime de lubrification mixte :

Il s'agit d'un régime de transition dans lequel la lubrification hydrodynamique ou fluide prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités.

- Régime de lubrification hydrodynamique ou fluide :

La lubrification hydrodynamique est le régime où un film lubrifiant sépare complètement les surfaces en mouvement et empêche par conséquent tout contact solide (métal-métal) entre elles (Fig. II.2).

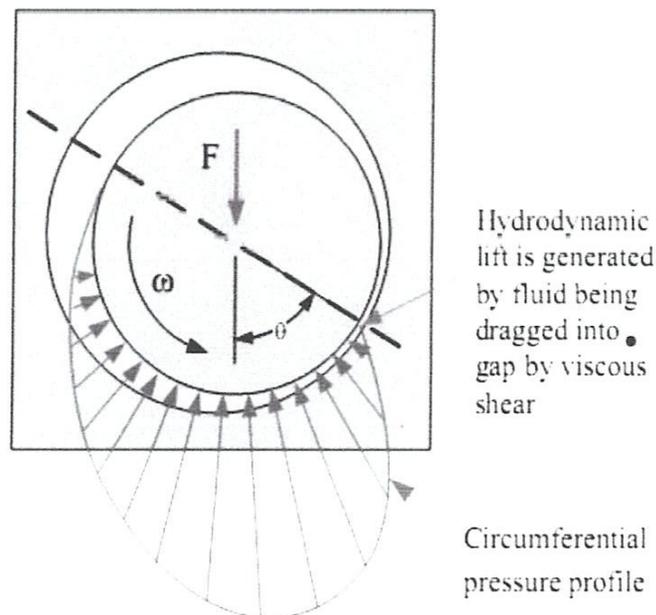


Fig. II.2 – Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique (paliers lisse) [26].

- *Contacts à haute pression (jusqu'à 3GPa)*

Ce sont les contacts hertziens lubrifiés rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages figure II.3.

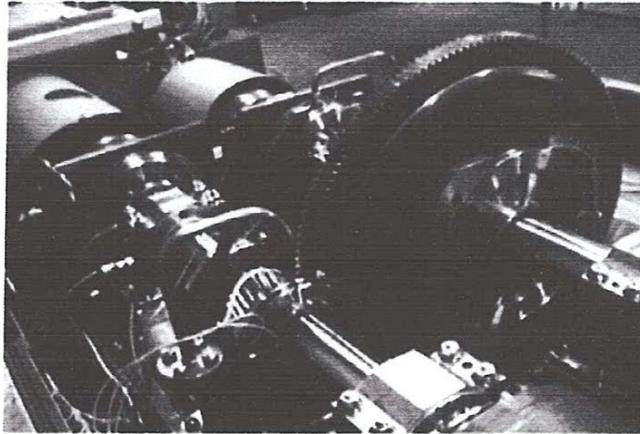


Fig. II.3 – Exemple d'un contact hertzien lubrifié [27].

- Régime de lubrification extrême pression (EP)

Les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus dans l'huile et activés par les pressions, les contraintes de cisaillement et les températures existants dans le contact. Le coefficient de frottement est de 0.02 à 0.2.

- Régime de lubrification mixte

C'est une régime de transition entre la lubrification extrême pression (EP) et la lubrification élasto-hydrodynamique (EHD).

- Régime de lubrification élasto-hydrodynamique (EHD)

La lubrification EHD concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement voire plastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant. Ce type de contact est rencontré dans les paliers de roulement. Dans ce régime de lubrification, on est en présence de deux effets :

- Effet hydrodynamique;
- Effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

Le coefficient de frottement est de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

En régime isotherme, la lubrification élasto-hydrodynamique est gouvernée par les équations suivantes :

↓ le fluide lubrifiant n'est pas isotherme

CHAPITRE II : Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire.

- Equation de Reynolds pour déterminer la pression dans le film lubrifiant.
- Equations de l'élasticité linéaire pour calculer les déformations élastiques des surfaces;
- ⌈ ➤ Lois de variation viscosité-pression $\mu = \mu(p)$ pour déterminer la variation de la viscosité du fluide en fonction de la pression.
- ⊕ *loi de variation viscosité-température $\mu = \mu(T)$*

II.3. Equations générales de la dynamique des fluides visqueux

Les équations générales de la dynamique des fluides visqueux dits aussi fluides réels sont établies à partir des lois de conservation de la mécanique des milieux continus et de la loi de comportement rhéologique du fluide considéré [28]. Dans le cas d'un fluide newtonien, isovisqueux et incompressible (isovolume), les lois générales écrites en utilisant la notation indicielle sont :

- Loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (II.1)$$

- Loi de conservation de la quantité de mouvement (forces de volume négligées):

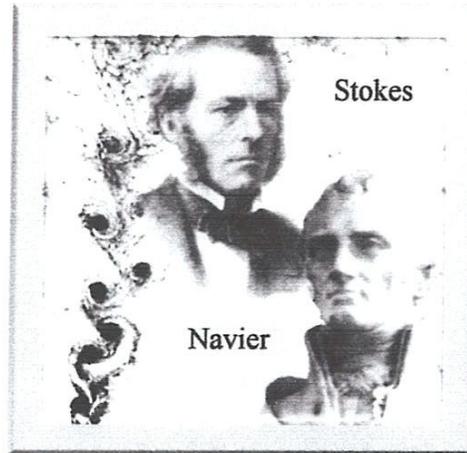
$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (II.2)$$

avec $\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- Loi constitutive du fluide :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (II.3)$$

- Equations de Navier-Stokes:



En reportant l'équation (II.3) dans l'équation (II.2), on obtient les équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide incompressible newtonien :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{II.4})$$

Les différents paramètres intervenant dans les équations (II.1) à (II.4) sont définis comme suit :

x_i, t	Variables d'espace et de temps,
u_i	Composantes de la vitesse d'une particule de fluide,
σ_{ij}	Tenseur des contraintes en un point du fluide,
$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Tenseur des taux de déformation symétrique,
δ_{ij}	Tenseur unité ou symbole de Kronecker,
$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$	
ρ	Masse volumique du fluide,
p	Pression dans le fluide,

μ

Coefficient de viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique du fluide.

II.4. Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

En mécanique des films minces visqueux, les équations de Navier (II.4) se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant ox_3 est très faible par rapport aux deux autres dimensions du contact.

Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode de réécrire les équations relatives au fluide incompressible sous forme adimensionnée. Le changement de variables adopté est le suivant :

Variables d'espace et de temps :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \tilde{t} = t \frac{V}{L}$$

?? (Définir V) : c'est quelle vitesse?
L : c'est quelle dimension???

- Composantes de la vitesse de l'écoulement :

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{V}, \tilde{u}_3 = u_3 \frac{L}{Vh}, \quad (\text{II.6})$$

- Constantes physiques du fluide :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Ce changement nous conduit à poser :

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{\mu_0 V L} \quad (\text{II.7})$$

Où :

- V Est la vitesse d'une des parois du contact. (Oue veut dire ce terme??)
 L Est la dimension caractéristique du contact, (Que veut dire ce terme??)
 μ_0 et ρ_0 Sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique de référence à $T = T_0$. (c'est quoi $T_0 = ??$)

Compte tenu de ces changements de variables, l'équation (II.4) écrites dans le cas d'un fluide iso-volume devient :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = -\xi^3 \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_1}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_1 \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = -\xi^3 \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_2}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_2 \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = -\xi^3 \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_3}{D\tilde{t}} + \xi^4 \tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) + \xi^2 \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (\text{II.10})$$

avec : $\xi = \frac{h}{L}$ paramètre d'échelle qui est de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4} .

$$\frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_h = \xi \mathfrak{R}_L = \frac{\rho_0 V h}{\mu_0} = \frac{V h}{\nu_0}$$

\mathfrak{R}_h et \mathfrak{R}_L étant respectivement les nombres de Reynolds relatifs à l'épaisseur et à la longueur de l'écoulement.

En négligeant les termes multipliés soit par ξ^2 , soit par ξ^3 ou ξ^4 , il reste :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\xi \mathcal{R}_h \tilde{\rho} \frac{D \tilde{u}_i}{D \tilde{t}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_3^2}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.12})$$

L'équation (II.12) montre que la pression est indépendante de la variable d'espace x_3 .

(*) Les termes en $\xi \mathcal{R}_h$, ou termes d'inertie de l'équation (II.11) sont plus souvent négligeables devant les termes de viscosité ; ceci est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification hydrodynamique. Quelques exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité cinématique du fluide $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$ est faible (cas des métaux liquides), quand l'épaisseur du film est importante ou quand les vitesses linéaires sont très élevées.

Si par hypothèse, $\xi \mathcal{R}_h \ll 1$, les équations de Navier se réduisent à :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (\text{II.13a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \quad (\text{II.13b})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.13c})$$

En revenant aux variables dimensionnées, le système (II.13) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \quad (\text{II.14a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \quad (\text{II.14b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \rightarrow p = p(x_1, x_2, t) \quad (\text{II.14c})$$

II.5. Conditions limites de non glissement (no slip)

L'intégration des équations de Navier (II.14) nécessite la connaissance des conditions limites sur la vitesse (conditions de non glissement) figure II.4 :

- Pour $x_3 = h_1(x_1, x_2, t)$: paroi (S_1)

$$u_1(x_1, x_2, h_1) = U_{11} ; u_2(x_1, x_2, h_1) = U_{12} ; u_3(x_1, x_2, h_1) = 0 \quad (\text{II.15})$$

- Pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$: paroi (S_2)

$$u_1(x_1, x_2, h_2) = U_{21} ; u_2(x_1, x_2, h_2) = U_{22} ; u_3(x_1, x_2, h_2) = U_{23} \quad (\text{II.16})$$

h_1 et h_2 étant les équations des surfaces ou des parois (S_1) et (S_2).

Dans les équations (II.15) et (II.16), les vitesses U_{ij} ($i=1,2$ et $j=1,2,3$) représentent les composantes des vitesses des surfaces, le premier indice se réfère aux surfaces (S_1) ou (S_2) tandis que le second aux directions x_1, x_2 ou x_3 comme c'est illustré sur la figure II.4.

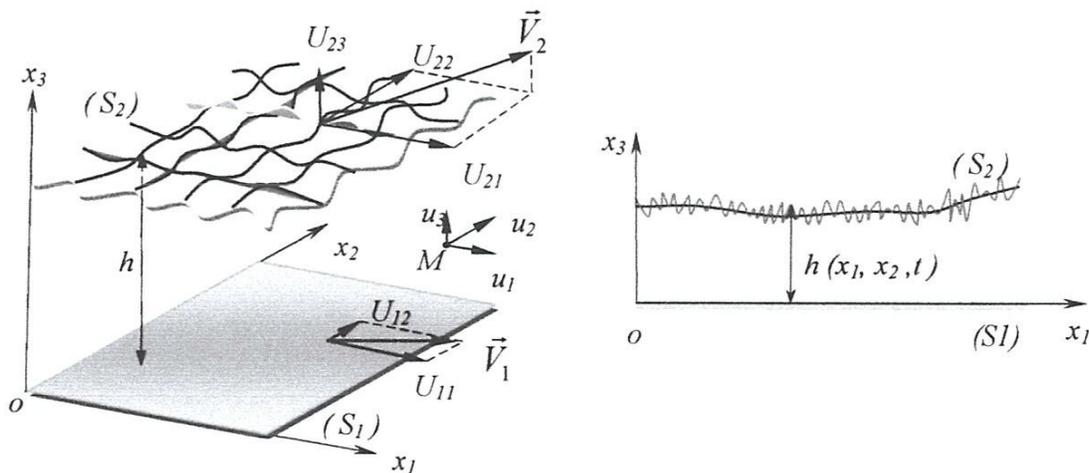


Fig. II.4 – Détails géométrique et cinématique d'un contact hydrodynamique.

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse U_{13} de la paroi (S_1) dans la direction x_3 d'être identiquement nulle.

II.6. Champ de vitesse de l'écoulement

Une première intégration des équations (II.14.a) et (II.14.b) par rapport à la variable x_3 donne :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3 + \frac{C_1}{\mu} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (\text{II.17a})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3 + \frac{C_2}{\mu} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (\text{II.17b})$$

où $C_i = C_i(x_1, x_2, t)$; $i = 1, 2$

Une deuxième intégration par rapport à x_3 et compte tenu des conditions de non glissement (II.15) et (II.16) conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\ u_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} J + U_{12} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Dans ces relations :

$$I = \int_0^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu} ; J = \int_0^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu} ; I_2 = \int_0^h \frac{x_3}{\mu} dx_3 ; J_2 = \int_0^h \frac{dx_3}{\mu}$$

De ces expressions, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} \\ \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

L'hypothèse d'un fluide iso-visqueux conduit à écrire :

$$I = \frac{x_3^2}{2\mu} ; J = \frac{x_3}{\mu} ; I_2 = \frac{h^2}{2\mu} ; J_2 = \frac{h}{\mu}$$

Soit par conséquent :

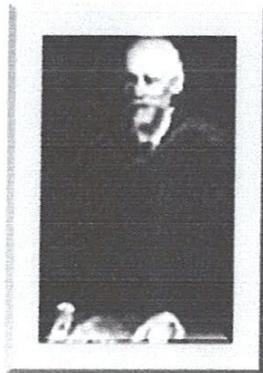
$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{11} + \frac{x_3}{h} U_{21} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{12} + \frac{x_3}{h} U_{22} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

De ces relations, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h) + (U_{21} - U_{11}) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h) + (U_{22} - U_{12}) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

II.7. Dérivation de l'équation de Reynolds incompressible

Dans ce paragraphe, nous présentons toute la procédure permettant la dérivation de l'équation de Reynolds qui est l'équation de base de la lubrification hydrodynamique dont l'inconnue principale est la pression. L'intégration de l'équation de continuité (II.1) à travers l'épaisseur du film donne :



Osborne Reynolds
(1842 -1912)

$$\int_0^h \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] dx_3 = 0 \quad (\text{II.22})$$

Où encore :

$$\int_0^h \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3 + \int_0^h \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_3 + \int_0^h \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = 0$$

Où :

$$\int_0^h \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = [u_3]_0^h = U_{23}$$

Pour calculer les deux autres intégrales, nous devons utiliser la règle de dérivation sous le signe intégrale dite règle de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{h_1}^{h_2} F(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right) - F(x_1, x_2, h_2, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x_1, x_2, h_1, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{II.23})$$

Où F est une fonction continument dérivable et $i = 1, 2, 3$

Il vient alors :

$$\int_0^h \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^h u_1 dx_3 \right) - U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1}$$

$$\int_0^h \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_0^h u_2 dx_3 \right) - U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2}$$

En supposant que les vitesses des parois sont constantes, l'équation (II.22) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\mu(U_{11} - U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\mu(U_{12} - U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 12\mu U_{23} \quad (\text{II.24})$$

$$\text{où } U_{23} = \frac{dh(x_1, x_2, t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (\text{II.25})$$

Autre écriture de l'équation de Reynolds :

En remplaçant U_{23} par son expression (Eq. II.25), l'équation de Reynolds (II.24) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\mu(U_{11} + U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\mu(U_{12} + U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.26})$$

ou encore en utilisant la notation vectorielle :

$$\vec{\nabla} \cdot (h^3 \vec{\nabla} p) = 6\mu \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{avec } \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_{11} + U_{21} \\ U_{12} + U_{22} \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{\nabla} p = \begin{Bmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, l'équation (II.27) peut s'écrire aussi :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} h^3 \partial p / \partial x_1 \\ h^3 \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix} = 6\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} h(U_{11} + U_{21}) \\ h(U_{12} + U_{22}) \end{Bmatrix} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.28})$$

En régime permanent ou stationnaire, l'équation (II.27) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot (h^3 \vec{\nabla} p - 6\mu h \vec{U}) = 0 \quad (\text{II.29})$$

II.8. Conditions limites associées à l'équation de Reynolds incompressible

Le champ de pression p dans le film fluide doit satisfaire à l'équation de Reynolds ainsi qu'aux conditions limites suivantes figure II.5 :

$$\begin{cases} p = p_0 & \text{sur } (\Gamma_1) \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{\bar{U}h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} p \right) = q_n & \text{sur } (\Gamma_2) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Où : \vec{n} est le vecteur normal unitaire, $q_n = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ est le débit volumique normal à travers la frontière (Γ_2) , (Γ_1) et (Γ_2) sont les frontières du domaine d'intégration $(\Omega) \subset R^2$ tel que

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \text{ et } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

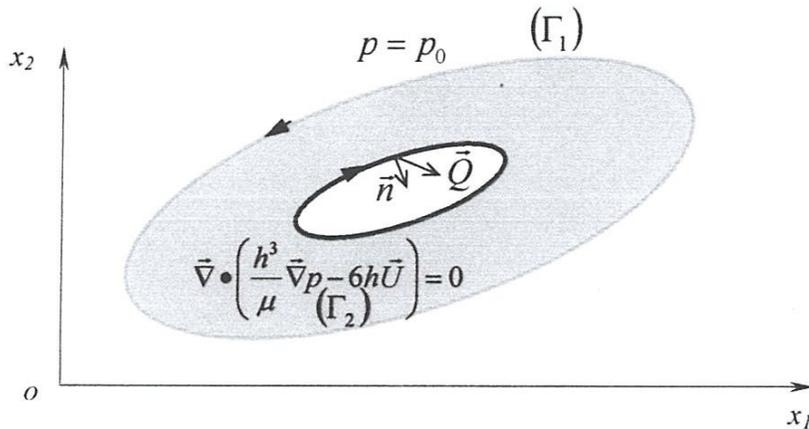


Fig. II.5 – Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières.

Remarque :

Selon la géométrie et la cinématique du contact étudié, la pression calculée à partir de l'équation de Reynolds (II.24) et des conditions limites qui lui sont associées peut être inférieure à la pression atmosphérique (dépression) en certains points du domaine (Ω) .

CHAPITRE II : Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire.

Ces dépressions entraînent une rupture du film lubrifiant. Ainsi, dans le domaine (Ω) , nous distinguons figure II.6 :

- des régions actives où la pression relative est positive, donc génératrice d'une force portante ;
- des régions inactives ou de cavitation où la pression relative qui y règne est négative ou nulle. Dans ces conditions, l'air ambiant peut y être aspiré et le lubrifiant liquide se vaporise à température ambiante.

Les visualisations de l'écoulement dans certains contacts mettent en évidence dans la zone de rupture de film, une juxtaposition de filets d'air (gaz) et de lubrifiant (liquide).

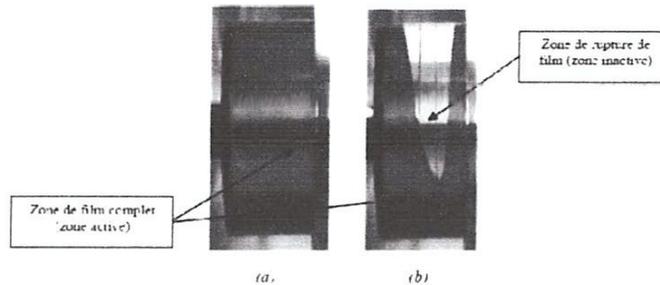


Fig. II.6 – Représentation des zones active et inactive dans un palier lisse soumis à un chargement statique : (a) Film complet, (b) Film rompu.

Les études expérimentales montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant est souvent en contact avec le milieu extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines.

II.9. Calcul des performances hydrodynamiques du contact

II.9.1. Champ de pression dans le film

Le champ de pression hydrodynamique est obtenu à partir de l'intégration de l'équation de Reynolds (II.24) en satisfaisant les différentes conditions aux limites sur la pression liées à l'alimentation, à l'écoulement du fluide dans le contact (phénomène de cavitation) et à l'environnement dans lequel fonctionne le mécanisme. La connaissance du champ de pression

permettra de déduire aisément les différentes caractéristiques du contact tel que la portance, la force de frottement, les débits de fuite et la puissance dissipée.

II.9.2. Action du fluide sur les surfaces de contact

L'action de contact \vec{t} figure II.7, appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \vec{n} , i.e.

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.31})$$

où : $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ est le tenseur des contraintes et n_j représente les composantes du vecteur normal en M_1 ou M_2 orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

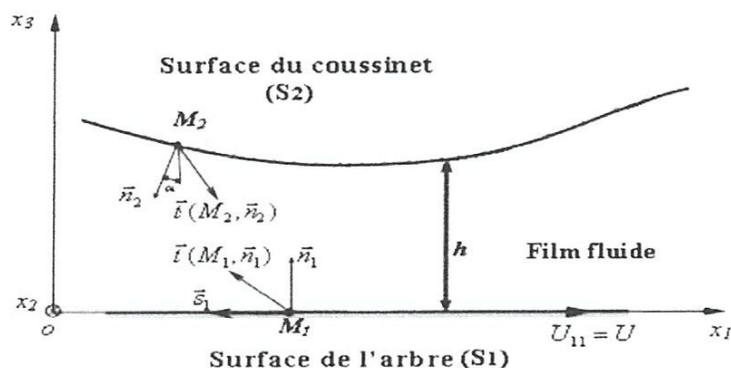


Fig. II.7 – Action du fluide sur les surfaces d'un palier hydrodynamique développé.

En un point M du fluide, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ 0 & -p & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Les éléments de réduction en un point C quelconque du tenseur des actions de contact du fluide sur la surface (Ω) du contact seront donc

$$\begin{aligned}
 & \text{- Résultante : } \quad \vec{R} = \iint_{\Omega} \vec{\tau} d\Omega = \iint_{\Omega} \vec{\sigma} \vec{n} d\Omega \\
 & \text{- Moment en C : } \quad \vec{M}(C) = \iint_{\Omega} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{\tau} d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{II.33}$$

II.10. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes équations de la lubrification hydrodynamique qui vont être utilisées au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces incompressibles entre parois mobiles en régime laminaire. L'intégration de l'équation de Reynolds dérivée dans ce chapitre permet de calculer la répartition de la pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques telles que la portance hydrodynamique et la force de frottement dans le contact s'en déduisent aisément.

Chapitre III

CHAPITRE III

Perturbation de l'équation de Reynolds

III.1. Introduction

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Il est souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages ou des roues de turbines, par exemple. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre ; c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

Un palier est en fonctionnement dynamique ou instationnaire si :

1° La charge appliquée est stationnaire mais l'arbre est écarté de sa position d'équilibre statique par une perturbation, le problème est de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable. C'est le cas des paliers de lignes d'arbre équilibrées de machines tournantes (rotating machinery).

2° La charge appliquée W est une fonction du temps, dans ce cas on cherche la trajectoire, qui en résulte, du centre de l'arbre (rotor) dans le palier afin de déterminer la hauteur minimale du film lubrifiant et pouvoir éviter les avaries éventuelles. Ce cas correspond aux conditions de fonctionnement des paliers de moteurs à combustion (paliers de vilebrequin et de bielle) et des paliers de lignes d'arbre de machines tournantes déséquilibrées (balourds).

III.2. Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes

Dans ce type de mécanisme, la force extérieure est le poids de la ligne d'arbre à laquelle viennent se superposer des forces dynamiques d'amplitudes plus ou moins importantes (balourds, par exemple). On schématise la ligne d'arbre par un rotor rigide de masse $2M$ supporté de façon symétrique par 2 paliers identiques (figure III.1.)

A chaque palier est attribué une masse M du rotor, une charge statique $\vec{W}_0 = W_0 \vec{X}$, une charge dynamique $\vec{W}(t)$ et une excitation synchrone due à un balourd caractérisé par son excentricité e_b dont le module est $Me_b \omega^2$. Lorsque l'équilibrage est parfait, le centre d'inertie G de l'arbre est confondu avec son centre géométrique.

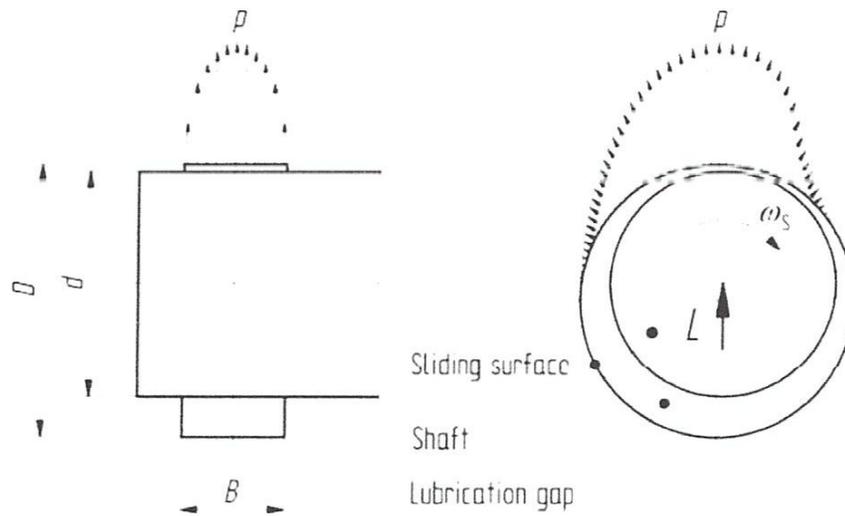


Fig. III.1 – Représentation schématique d'un palier fluide de ligne d'arbre [29].

L'application du principe fondamental de la dynamique au rotor conduit à :

$$\begin{cases} M\ddot{X} = W_0 + W_x(t) + Me_b \omega^2 \cos \omega t + F_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \\ M\ddot{Y} = W_y(t) + Me_b \omega^2 \sin \omega t + F_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

Où $X(t)$ et $Y(t)$ représentent les coordonnées instantanées du centre de l'arbre, i.e.

$$\overrightarrow{OO_a} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \cos \phi \\ e \sin \phi \end{Bmatrix}$$

et $\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} R d\theta dz$ sont les composantes de l'action hydrodynamique calculées à

partir du champ de pression obtenu par intégration de l'équation de Reynolds :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{G}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\dot{h} \quad (\text{III-2})$$

Où $G = h^3$ et $h(\theta, z, t)$ est l'épaisseur du film définie par :

$$h = C + X(t)\cos \theta + Y(t)\sin \theta + U(\theta, z, t) \quad (\text{III-3})$$

et $\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{X} \cos \theta + \dot{Y} \sin \theta + \dot{U}$ est la vitesse d'écrasement du film (squeeze velocity).

U et θ étant respectivement le champ de déplacement radial de la couche élastique et la coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur l'axe X (paramétrage X, Y).

En variables adimensionnelles, l'équation (III.2) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{G}}{12} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{G}}{12} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Où } \tilde{h} = \frac{h}{C}, \tilde{p} = \frac{P}{\mu\omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}, \tilde{z} = \frac{z}{L}, \lambda = \left(\frac{R}{L}\right)^2, \tilde{G} = \tilde{h}^3 \text{ et } \tilde{t} = \omega t$$

La pression hydrodynamique sans dimension $\tilde{p}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t})$ doit satisfaire l'équation différentielle (III.4) et les conditions limites suivantes :

(i) aux extrémités libres du palier :

$$\tilde{p}(\theta, \tilde{z} = -\frac{1}{2}, \tilde{t}) = \tilde{p}(\theta, \tilde{z} = \frac{1}{2}, \tilde{t}) = 0 \quad (\text{III.5})$$

(ii) la pression est continue et périodique suivant la direction circonférentielle, i. e.

$$\tilde{p}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{p}(\theta + 2\pi, \tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{III.6})$$

(iii) la prise en considération de la rupture du film (cavitation) conduit à annuler la pression et ses gradients, i.e.

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{Pour } \theta = \theta_c(\tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{III.7})$$

Où θ_c est l'angle de cavitation ou l'abscisse de rupture du film lubrifiant (leading edge of the cavitation zone) qui est une inconnue supplémentaire du problème. Les conditions (III.7) proposées au début des années trente et connues sous le nom de Reynolds ou de Swift-Stieber [30,31] peuvent être satisfaites de façon directe à l'aide de l'algorithme de Christopherson [32].

CHAPITRE III : Perturbation de l'équation de Reynolds.

Depuis les années quarante, cet algorithme a été utilisé avec succès dans les études de simulation des problèmes de lubrification. Cependant, l'utilisation de l'algorithme de Christopherson conduit à une détermination erronée de la frontière reformation du film (trailing edge of the cavitation zone). La continuité du débit massique n'est pas satisfaite. Il est utile de noter que les conditions de Reynolds sont fréquemment utilisées et donnent des résultats comparables à ceux obtenus expérimentalement ou à l'aide des algorithmes de conservation JFO, Elrod-Adams et Bayada sauf le débit [33].

Dans la Réf. [34], Dowson and Taylor présentèrent une excellente revue bibliographique sur le phénomène de cavitation rencontré dans les paliers hydrodynamiques où différents modèles de cavitation ont été largement discutés.

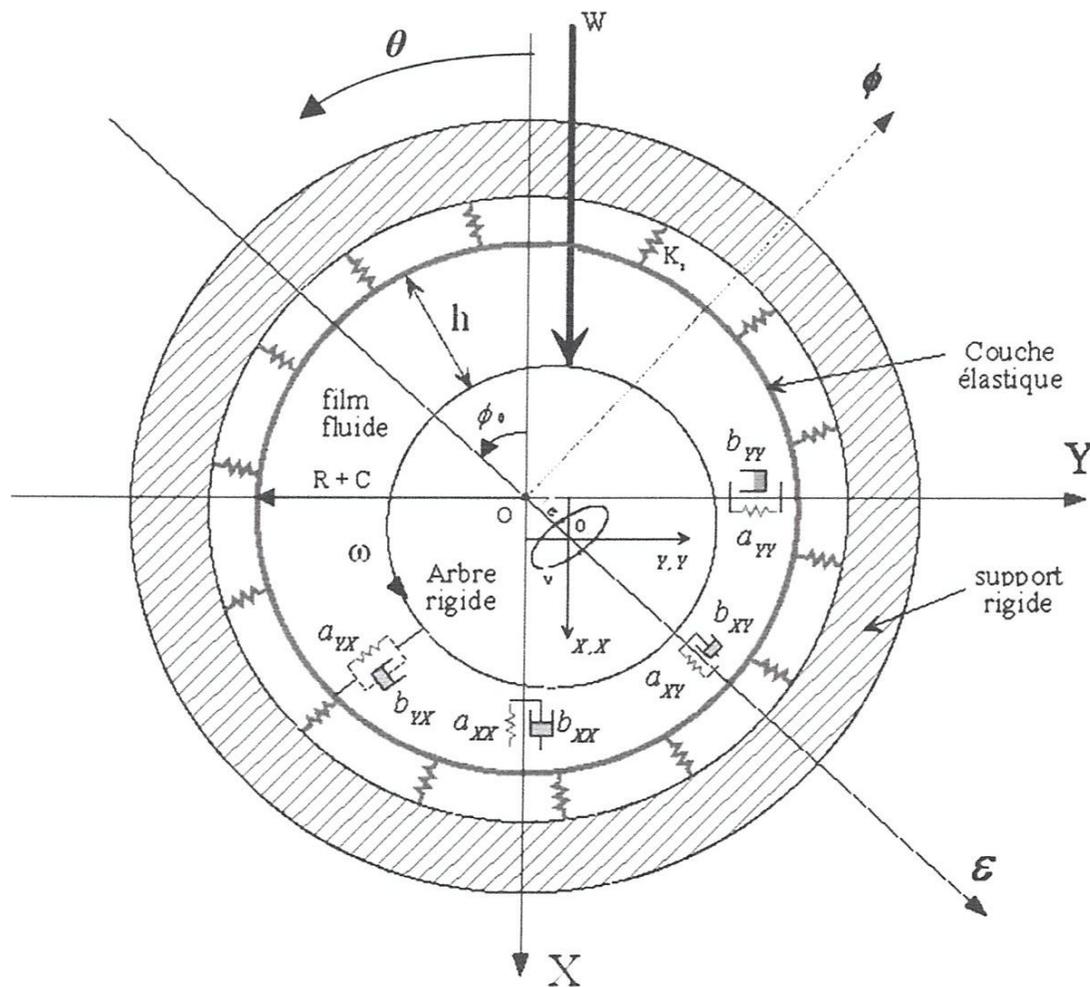


Fig. III.2 – Modèle dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique compliant.

III.3. Linéarisation des équations de mouvement

Le comportement dynamique d'une ligne d'arbre supportée par des paliers fluides est non linéaire. En effet, les forces hydrodynamiques F_x et F_y engendrées par le film lubrifiant sont des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre.

L'analyse exacte d'un système rotor-palier est donc très complexe. Puisqu'elle nécessite la résolution du système d'équations relatives au mouvement du rotor (III.1) et au comportement hydrodynamique des paliers décrit par l'équation de Reynolds (III.2).

Compte tenu des difficultés inhérentes à la résolution des problèmes non linéaires, une étude simplifiée peut être réalisée en linéarisant les équations du mouvement (III.1).

Dans le cas d'une ligne d'arbre soumise à des charges extérieures fixes en direction, cette étude peut comporter deux étapes :

- Une analyse statique permettant de déterminer la position d'équilibre de l'arbre (X_0 , Y_0) à l'intérieur du palier par une méthode itérative.
- Une analyse dynamique linéarisée de la ligne d'arbre autour de la position d'équilibre statique.

Cette étude permet de modéliser le film lubrifiant par huit coefficients dynamique, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement.

Ces coefficients serviront comme des données pour :

- Connaître la stabilité d'un point de fonctionnement ;
- Introduire l'effet du film fluide sur la réponse de la ligne d'arbre à des sollicitations Dynamique de faible amplitude (balourd résiduel, par exemple) ;
- Rechercher les vitesses critiques du rotor.

III.3.1. Concept des coefficients dynamiques d'un palier

Ce concept a été introduit en 1959 par Hori pour décrire le comportement d'un palier long. Si on se limite à des petits déplacements X , Y et vitesses de déplacements \dot{X} , \dot{Y} au voisinage de la position d'équilibre statique X_0, Y_0 , on peut écrire (Développement Limité au 1^{er} ordre) :

CHAPITRE III : Perturbation de l'équation de Reynolds.

$$\begin{cases} F_x(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) = F_x(X_0, Y_0, 0, 0) + X \left(\frac{\partial F_x}{\partial X} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y} \right)_0 + \dot{X} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{X}} \right)_0 + \dot{Y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{Y}} \right)_0 + \dots \\ F_y(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) = F_y(X_0, Y_0, 0, 0) + X \left(\frac{\partial F_y}{\partial X} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y} \right)_0 + \dot{X} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{X}} \right)_0 + \dot{Y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{Y}} \right)_0 + \dots \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Sous forme matricielle, la force additionnelle $\vec{f} = \vec{F} - \vec{F}_0$ est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) - F_x(X_0, Y_0, 0, 0) \\ F_y(X_0 + X, Y_0 + Y, \dot{X}, \dot{Y}) - F_y(X_0, Y_0, 0, 0) \end{Bmatrix} = -[a_{i,j}] \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - [b_{i,j}] \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} correspondant respectivement aux raideurs et aux amortissements dus à l'existence du film lubrifiant. On remarque que $F_x(X_0, Y_0, 0, 0)$ est équivalent à W_0 et que la composante $F_y(X_0, Y_0, 0, 0)$ est nulle. Par identification des équations (III.8) et (III.9), on peut écrire :

$$a_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_0, \quad b_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j} \right)_0 \quad (\text{III.10})$$

Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement ou de la vitesse de déplacement. L'existence de termes croisés traduit le fait que dans un palier, en général, la force hydrodynamique n'est pas colinéaire au déplacement comme dans le cas d'un palier de roulement.

III.3.2 : Méthode de perturbation : Calcul des coefficients dynamiques

Dans le cas d'une charge statique imposée, le calcul des coefficients dynamiques s'effectue directement dans le repère fixe (X, Y) lié à la charge (figure III.1).

En régime stationnaire, le centre de l'arbre d'hélice (rotor) occupe une position d'équilibre caractérisée par ses coordonnées X_0 et Y_0 . L'épaisseur du film correspondant à cette position est [35] :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \theta + \tilde{Y}_0 \sin \theta + \tilde{U}_0 \quad (\text{III.11})$$

Où encore :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \theta + \tilde{Y}_0 \sin \theta + \tilde{L}_0 \tilde{p}_0 \quad (\text{III. 12})$$

avec $L_0 = \sigma_0 \frac{t_h}{E}$ qui est l'opérateur de compliance et $\sigma_0 = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}$

En régime dynamique, le centre du rotor est décrit par les amplitudes X et Y mesurées à partir de la position d'équilibre statique. Dans ces conditions, l'épaisseur du film prend la forme suivante :

$$\tilde{h}(\theta, \tilde{z}, \tilde{r}) = 1 + \tilde{X}(\tilde{r}) \cos \theta + \tilde{Y}(\tilde{r}) \sin \theta + \tilde{U}(\theta, \tilde{z}, \tilde{r}) \quad (\text{III. 13})$$

Avec $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \Delta\tilde{X}$; $\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \Delta\tilde{Y}$ et $\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{U}$

L'expression de $\Delta\tilde{U}$ est déterminée à partir développement en série de Taylor de \tilde{U} limité au premier ordre au voisinage de la position d'équilibre statique, i.e.

$$\tilde{U} \approx \tilde{U}_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}} \right)_0 \Delta\tilde{X} + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{Y}} \right)_0 \Delta\tilde{Y}}_{\Delta\tilde{U}} \quad \text{ou encore } \Delta\tilde{U} = \tilde{U}_x \Delta\tilde{X} + \tilde{U}_y \Delta\tilde{Y} ; \tilde{U}_x = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}}, \text{ etc.}$$

Soit par conséquent :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{h} + \Delta\tilde{U} \quad (\text{III. 14})$$

Avec $\Delta\tilde{h} = \Delta\tilde{X} \cos \theta + \Delta\tilde{Y} \sin \theta$

Si on suppose que le mouvement de l'arbre (rotor) est harmonique, on peut écrire :

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma\tilde{r}} ; \Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma\tilde{r}} ; \Delta\tilde{U} = \Delta\tilde{U}^* e^{i\gamma\tilde{r}}$$

Où $\Delta\tilde{X}; \Delta\tilde{Y}$ et $\Delta\tilde{U} \in C$

Il vient alors :

$$\Delta\tilde{U} = (\tilde{U}_x \Delta\tilde{X}^* + \tilde{U}_y \Delta\tilde{Y}^*) e^{i\tilde{t}} \quad \text{et} \quad \Delta\tilde{h} = (\Delta\tilde{X}^* \cos \theta + \Delta\tilde{Y}^* \sin \theta) e^{i\tilde{t}}$$

L'équation (III.14) devient :

$$h = h_0 + \Delta h^* e^{i\tilde{t}} \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{\Delta h^*}{h_0} \right| \ll 1 \quad (\text{III. 15})$$

$$\text{Avec} \quad \Delta h^* = \Delta\tilde{X}^* (\cos \theta + \tilde{U}_x) + \Delta\tilde{Y}^* (\sin \theta + \tilde{U}_y)$$

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, soit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p} \quad (\text{III. 16})$$

L'expression de $\Delta\tilde{p}$ est déterminée à partir du développement limité de la pression :

$$\tilde{p} \approx \tilde{p}_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}} \right)_0 \Delta\tilde{X} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}} \right)_0 \Delta\tilde{Y} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}'} \right)_0 \Delta\tilde{X}' + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}'} \right)_0 \Delta\tilde{Y}'}_{\Delta\tilde{p}}$$

Le mouvement étant harmonique, on peut écrire :

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\tilde{t}}; \Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\tilde{t}}; \Delta\tilde{X}' = i\gamma \Delta\tilde{X}^* e^{i\tilde{t}}; \Delta\tilde{Y}' = i\gamma \Delta\tilde{Y}^* e^{i\tilde{t}}$$

Soit :

$$\tilde{p} \approx \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\tilde{t}} \quad ; \quad \left| \frac{\Delta\tilde{p}^*}{\tilde{p}_0} \right| \ll 1 \quad (\text{III. 17})$$

Avec

$$\Delta\tilde{p}^* = \tilde{p}_x \Delta\tilde{X}^* + \tilde{p}_y \Delta\tilde{Y}^* + i\gamma \tilde{p}_{x'} \Delta\tilde{X}^* + i\gamma \tilde{p}_{y'} \Delta\tilde{Y}^* ; \quad \tilde{p}_x = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}}, \text{ etc.}$$

Le report des équations (III.18) et (III.12) dans l'équation de Reynolds transitoire (III.4) conduit à un système de cinq EDPs :

$$\Re(\tilde{p}_0) = 6 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \quad (\text{III. 18})$$

$$\Re(\tilde{p}_x) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} (\cos \theta + \tilde{U}_x) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} (\cos \theta + \tilde{U}_x) \right] = 6 \left[-\sin \theta + \frac{\partial \tilde{U}_x}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III. 19})$$

$$\Re(\tilde{p}_y) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} (\sin \theta + \tilde{U}_y) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} (\sin \theta + \tilde{U}_y) \right] = 6 \left[\cos \theta + \frac{\partial \tilde{U}_y}{\partial \theta} \right] \quad (\text{III. 20})$$

$$\Re(\tilde{p}_{x'}) = 12 [\cos \theta + \tilde{U}_x] \quad (\text{III. 21})$$

$$\Re(\tilde{p}_{y'}) = 12 [\sin \theta + \tilde{U}_y] \quad (\text{III. 22})$$

$$\text{Où } \Re(\bullet) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{G} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{G} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \tilde{z}} \right)$$

Si la déformation dynamique de la couche élastique est ignorée, les EDPs (III.19) à (III.22) se réduisent à :

$$\Re(\tilde{p}_x) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \cos \theta \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \cos \theta \right] = -6 \sin \theta \quad (\text{III. 23})$$

$$\Re(\tilde{p}_Y) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \sin \theta \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right] = 6 \cos \theta \quad (\text{III. 24})$$

$$\Re(\tilde{p}_{X'}) = 12 \cos \theta \quad (\text{III. 25})$$

$$\Re(\tilde{p}_{Y'}) = 12 \sin \theta \quad (\text{III. 26})$$

La résolution des EDPs relatives aux perturbations permet de connaître les champs de pression dynamique $\tilde{p}_X, \tilde{p}_Y, \tilde{p}_{X'}$ et $\tilde{p}_{Y'}$ et d'en déduire les coefficients de raideur et d'amortissement du palier :

$$\begin{cases} A_{XX} \\ A_{YX} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_X \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}; \quad \begin{cases} A_{XY} \\ A_{YY} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_Y \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III. 27})$$

$$\begin{cases} B_{XX} \\ B_{YX} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{X'} \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}; \quad \begin{cases} B_{XY} \\ B_{YY} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{Y'} \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}$$

Les coordonnées de la position d'équilibre statique (X_0, Y_0) résultant de l'application de la charge statique $\mathbf{W}_0 = (W_{X0}, W_{Y0})$ sont déterminées à partir de la résolution des équations d'équilibre du rotor à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Dans le système de coordonnées (X, Y) , l'équilibre du rotor se traduit par les équations suivantes :

$$\tilde{W}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III. 28a})$$

$$\tilde{W}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III. 28b})$$

Ou encore :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{X0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{III. 29a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{Y_0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{III. 29b})$$

Où \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont les composantes du vecteur résidu r .

Le problème est bien entendu de trouver les valeurs adimensionnelles des coordonnées cartésiennes (\tilde{X}, \tilde{Y}) vérifiant simultanément les deux équations (III.29).

a) Méthode de Newton-Raphson \rightarrow La méthode numérique choisie

Soit $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ la solution approchée ou l'estimé initial proche de la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) . Si les deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont continues et continument différentiables, le développement en séries de Taylor des deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y au point $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ donne :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{III.30a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{III.30b})$$

$$\text{avec } \delta \tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{X}_0 \text{ et } \delta \tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - \tilde{Y}_0$$

Puisque (\tilde{X}, \tilde{Y}) est une solution du système d'équations non linéaires (III.29), il en résulte :

$$0 = \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{III.31a})$$

$$0 = \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{III.31b})$$

Soit sous forme matricielle :

$$-\left\{ \begin{array}{c} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \left\{ \begin{array}{c} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} + \text{t.o.s} \quad (\text{III. 32})$$

En supposant l'existence de la matrice jacobienne inverse:

$$\left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]^{-1}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{array} \right\} + \text{t.o.s} \quad (\text{III. 33})$$

Ce qui donne pour la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{array} \right\} + \text{t.o.s} \quad (\text{III. 34a})$$

Où encore

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{array} \right\} \quad (\text{III. 34b})$$

Lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur (t.o.s), la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)$ de la prochaine approximation, soit :

CHAPITRE III : Perturbation de l'équation de Reynolds.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 35})$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de Newton-Raphson pour deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 36 a})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Où encore :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 36 b})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}$$

L'inversion analytique de la matrice jacobéenne permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_k \\ \delta \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} & -\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \\ \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} & \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} & \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} - \frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \end{pmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}} \quad (\text{III. 37})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas.

b) *Méthode de Newton-Raphson amortie*

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti qui converge plus vite que l'algorithme précédent s'écrit :

1. Etant donné ε_f , un critère d'arrêt
2. Etant donné k_{\max} , le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$, une approximation initiale de la solution du système (III.29)
4. Résoudre le problème EHD non linéaire en régime stationnaire gouverné par les équations couplées (III.18) et (III.12) par itérations : Calcul de \tilde{h}_0 et \tilde{p}_0
5. Calculer les composantes de la portance hydrodynamique :

$$\tilde{F}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{x} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{x}$$

6. Calculer les composantes du vecteur résidu : \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y (Eqs III.29)
7. Evaluer les coefficients de la matrice jacobienne (dérivées partielles) par différentiation numérique :

$$\left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right)_k \approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right)_k \approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta},$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right)_k \approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right)_k \approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul des dérivées partielles de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide. Dans cette approximation, la valeur de δ est 10^{-4} .

8. Calculer les corrections $(\delta \tilde{X}_k, \delta \tilde{Y}_k)$ en utilisant l'équation (III.20)

9. Calculer les nouvelles approximations du système non linéaire :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \varpi^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}$$

Où $\varpi^{(k)}$ Est le coefficient de relaxation.

$\varpi^{(k)} = 1$: Méthode classique de *Newton*.

$\varpi^{(k)} < 1$: Méthode de *Newton* dite amortie.

10. Si

$$\sqrt{\langle \tilde{W}_X^{(k+1)} \quad \tilde{W}_Y^{(k+1)} \rangle \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} \\ \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ ou } |\tilde{W}_X^{(k+1)}| + |\tilde{W}_Y^{(k+1)}| \leq \varepsilon_1$$

ou encore

$$\sqrt{\langle \delta\tilde{X}_k \quad \delta\tilde{Y}_k \rangle \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}} / \sqrt{\langle \tilde{X}_{k+1} \quad \tilde{Y}_{k+1} \rangle \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ et } k < k_{\max}$$

Où $\varepsilon_1 = 10^{-6}$

- convergence atteinte : Les valeurs de $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+1})$ correspondent aux coordonnées de la position d'équilibre statique qui en résulte de l'application de la charge statique W_0 .
- calculer l'angle de calage statique du palier par : $\phi_0 = \tan^{-1}(\tilde{Y}_{k+1}/\tilde{X}_{k+1})$
- arrêt

11. Si le nombre maximal d'itérations k_{\max} est atteint :

- convergence non atteinte en k_{\max} itérations
- arrêt

12. Sinon, poser $k \leftarrow k + 1$

13. Retour à l'étape 4 pour une autre itération.

III.4. Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées

La trajectoire du centre de l'arbre (rotor) prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité e_b . Celle-ci est obtenue à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = m e_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 38a})$$

En variable sans dimension, l'équation (III.38a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{M} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 38b})$$

$$\text{Où : } \tilde{t} = \omega t \text{ et } \varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$$

Le vecteur solution du système d'équation (III.38b) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos \tilde{t} + \begin{Bmatrix} \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin \tilde{t} \quad (\text{III. 39})$$

En remplaçant (III.39) dans le système (III.38b) et en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$, on aura :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX} - \tilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX} - \tilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY} - \tilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY} - \tilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 40})$$

La solution du système (III.40) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{M} \varepsilon_b \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{M} \varepsilon_b \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_1 = \tilde{M} \varepsilon_b \frac{EC + FD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_2 = -\tilde{M} \varepsilon_b \frac{FC - ED}{C^2 + D^2} \end{cases} \quad (\text{III. 41})$$

avec

$$A = -\tilde{M} + A_{YY} - B_{XY}$$

$$B = A_{XY} + B_{YY}$$

$$C = \tilde{M}^2 - \tilde{M}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX})$$

$$D = -\tilde{M}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY}$$

$$E = -A_{YX} + B_{XX}$$

$$F = \tilde{M} - A_{XX} - B_{YX}$$

III.5. Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (III.39) du système (III.38b) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure III. 3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$: Demi-grand axe ;

$b = \tilde{b}C$: Demi-petit axe ;

φ : Angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement ;

δ : L'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X .

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse (o_{a0}, X^*, Y^*), l'équation de l'ellipse s'écrit :

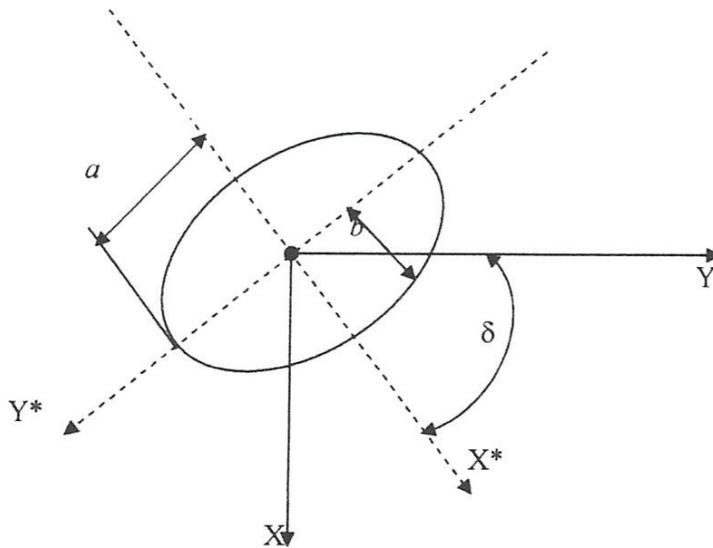


Fig. III.3 – Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ \tilde{Y}^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases} \quad (\text{III. 42})$$

$$\text{Où : } (\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) = \frac{(X^*, Y^*)}{C}$$

Compte tenu de la relation (III.42), la projection sur (o_{a0}, X, Y) donne :

$$\begin{cases} \tilde{X} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III. 43})$$

Les équations (III.42) sont identiques aux équations (III.43), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{X}_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{Y}_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III. 44})$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps \tilde{t} , il vient en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$:

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ \tilde{Y}_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ \tilde{Y}_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{III. 45})$$

La résolution des équations (III.45) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\begin{cases} \tilde{a} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} + \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \tilde{b} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} - \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \\ \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III. 46})$$

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé et présenté de façon détaillée les équations de base et les relations permettant de calculer les caractéristiques de la trajectoire linéaire elliptique décrite par le centre de l'arbre (rotor) dans le cas d'une charge statique imposée et d'une excitation synchrone de type balourd. Le calcul des coefficients dynamiques du film servant comme des données pour l'analyse de la réponse dynamique du système rotor-palier a été effectué en perturbant l'équation de Reynolds transitoire. Le processus de perturbation a conduit à la dérivation de cinq EDPs couplées dont les inconnues sont la pression statique et les quatre pressions dynamiques complexes résultant des perturbations en déplacement et en vitesse du centre de l'arbre.

Chapitre IV

مكتبة كلية العلوم والتكنولوجيا

البريد الوارد رقم:

التاريخ: الساعة:

CHAPITRE IV

Méthode de résolution numérique du problème de lubrification EHD inverse & Etude paramétrique

IV.1. Introduction

Après avoir présenté, dans les chapitres précédents, les équations de base gouvernant le problème de la lubrification EHD en régime isotherme, nous allons développer dans le présent chapitre les méthodes de résolution des problèmes EHD inverse et étudier les effets combinés des déformations élastiques des revêtements de surface.

IV.2. Solution Statique de problème d'interaction fluide-structure inverse dans le cas d'une charge statique imposée

Dans le cas d'une charge imposée, il convient d'utiliser le paramétrage (X, Y) pour l'écriture de l'équation de Reynolds et le calcul des coefficients dynamiques du palier. Il y a lieu de déterminer a priori les coordonnées de la position d'équilibre du centre de l'arbre (rotor) résultant de l'application de la charge statique à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Le processus de calcul est le suivant :

1. Lecture des données : $W_0, R/L, \tilde{\ell}, \tilde{h}_0, \tilde{C}_d, \sigma, N_\theta, N_z$ valeurs initiales des coordonnées du centre de l'arbre (X, Y) , facteurs de relaxation, critères de convergence et le nombre maximal d'itérations

2. Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée dans le cas indéformable (rigide) $\tilde{h}_0 = 1 + X \cos \theta + Y \sin \theta$

3. Initialiser le compteur d'itération n à 0

4. Initialiser le champ de pression statique adimensionné, $\tilde{p}_0^{(n)} = 0$ et l'épaisseur du film adimensionnée, $\tilde{h}^{(n)} = \tilde{h}_0$

5. Calculer le champ de pression hydrodynamique statique adimensionné, $\tilde{p}_0^{(n+1)}$ par résolution de l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro (IV-41)

6. Modifier l'épaisseur du film en tenant compte des déformations élastiques par l'équation suivante: $\tilde{h}^{(n+1)} = \tilde{h}_0 + \tilde{L}_0 \left((1 - \Omega) \tilde{p}_0^{(n)} + \Omega \tilde{p}_0^{(n+1)} \right)$

où Ω est le coefficient de sous-relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

7. vérifier le critère de convergence : $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \left| \frac{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)} - \tilde{p}_{0ij}^{(n)}}{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-6}$, où N est le nombre total

de nœuds pour lesquels la pression est positive, si la convergence n'est pas atteinte, incrémenter le nombre d'itération de 1 et revenir à l'étape 5.

8. Si la convergence est atteinte, calculer les composantes de la portance hydrodynamique :

$$\tilde{F}_{x0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta dz, \quad \tilde{F}_{y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta dz$$

9. Vérifier les équations d'équilibre du rotor. Si ces équations ne sont pas vérifiées, calculer les nouvelles valeurs de X et Y par la méthode de Newton-Raphson et retourner à l'étape 2

10. Coder la région active du palier dans laquelle la pression statique \tilde{p}_0 est positive pour la définition du domaine d'intégration des quatre équations différentielles d'ordre un.

11. Calculer les gradients circonférentiel et axial de et par différentiation numérique

IV. 3. Etude paramétrique

Pour tenir compte des effets des déformations élastiques du revêtement de surface mince d'épaisseur relative $\tilde{t}_h=0.08$, les calculs ont été effectués pour un coefficient de déformation adimensionné ($\tilde{C}_d= 0.2$) correspondant à un module d'Young $E=0,9$ GPa. Ces caractéristiques sont celles du Polyéthylène, haute densité. Les différentes données de cette étude sont reportées dans le tableau IV-1.

Tableau IV-1: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.

Caractéristiques géométriques		
}	- Diamètre du palier, L	550×10^{-3} m
}	- Rayon de l'arbre, R	72.5×10^{-3} m
}	- Jeu radial, C	72.5×10^{-6} m
Conditions de fonctionnement		
(- Vitesse angulaire de l'arbre, ω	$100 \times \pi$ rad/s
Propriétés du lubrifiant, 20°C		
	- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, μ_0	0.1 Pa.s
	- Masse volumique, ρ	850 kg/m ³
Caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement de surface		
	-Module d'Young du matériau, E	0.9GPa
	- Coefficient de Poisson, ν	0.35
	- Epaisseur du revêtement mince, t_h	6×10^{-3} m

IV.4. Effets des déformations élastiques du revêtement sur les distributions de pressions stationnaire du palier

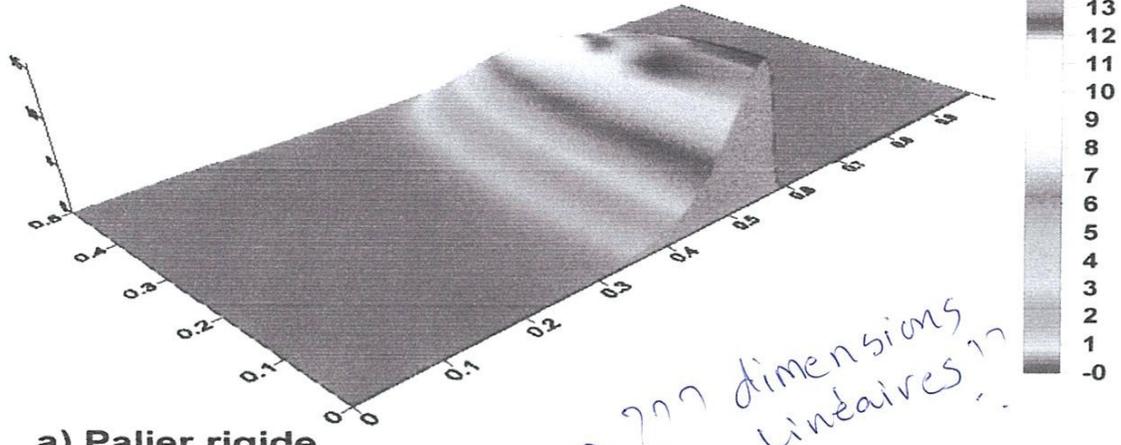
Les figures (IV-1 et IV-2) représentent les distributions (3-D) et (2-D) des pressions statiques adimensionnées calculées dans le cas d'un palier rigide et d'un palier compliant (revêtu) pour une charge imposée adimensionnelle affectée au palier

$\tilde{W}_0 = 6.4$ correspondant à $W_0 = 80 \text{ kN}$ qui est le poids de l'arbre d'hélice (rotor). La prise en considération des déformations élastiques de la structure du palier affecte de façon significative la distribution de la pression statique. En effet, on observe un étalement de la courbe de pression suivant la direction circonférentielle du palier et une réduction importante du pic de pression. Cette réduction s'explique par une augmentation de l'épaisseur minimale du film et un déplacement de son abscisse vers les valeurs croissantes de la coordonnée circonférentielle du palier à cause des déformations du revêtement comme c'est illustré sur la Figure (IV-2 et IV-3).

La figure IV-4 montre les réponses d'un palier d'arbre d'hélice marine à une excitation dynamique synchrone de type balourd pour une charge statique correspondant au poids du rotor $W_0 = 80 \text{ kN}$. Les orbites elliptiques présentées pour le cas du palier rigide et du palier compliant sont obtenues par une intégration analytique du système d'équations différentielles associé au mouvement vibratoire forcé du rotor pour une excentricité relative du balourd $\varepsilon_b = 0,1$ ($e_b = 5$ microns). Dans ces conditions, le module de la force dynamique due au balourd appliquée sur chaque palier est $F_b = MC\varepsilon_b\omega^2 = 6 \text{ kN}$, soit : $\frac{F_b}{W_0} = 0.0725$. Les coefficients

dynamiques synchrones utilisés pour le calcul des trajectoires du centre de l'arbre sont déterminés pour une fréquence d'excitation relative $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0} = 1$. Ces trajectoires qui sont de forme elliptique se caractérisent par leur taille (demi-grand axe et demi-petit axe) et leur inclinaison dans le palier. La position du centre de l'orbite, déterminée par la méthode itérative de Newton-Raphson amortie, est repérée par les deux coordonnées statiques X_0, Y_0 . Par comparaison au cas du palier rigide, on observe une augmentation de l'excentricité de fonctionnement et une diminution de l'angle de calage lorsque la compliance de la structure du palier est prise en considération. Il convient de noter que l'augmentation de l'excentricité de fonctionnement risque de provoquer un contact métal-métal conduisant à la destruction du palier. En revanche, la compliance du revêtement de surface permet d'éviter ce risque. D'autre part, les déformations élastiques du revêtement affectent la taille de l'orbite elliptique et n'influent pas de façon significative sur son inclinaison.

Pression stationnaire



a) Palier rigide



b) Palier compliant

mauvaise qualité de figures

Figure IV.1 – Représentation 3-D des distributions de pression statique.

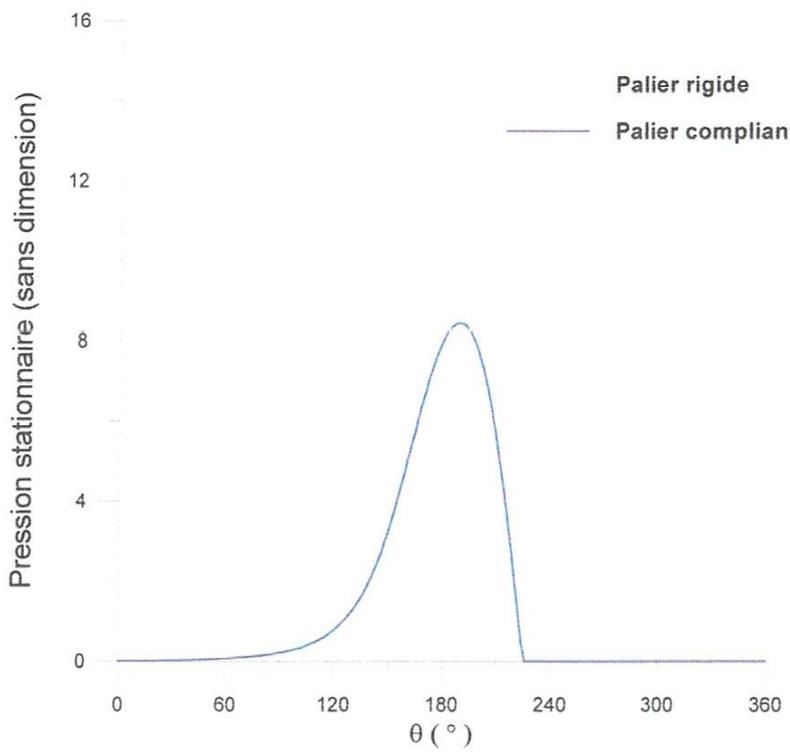


Fig. IV.2 – Champ de pression statique \tilde{p}_0

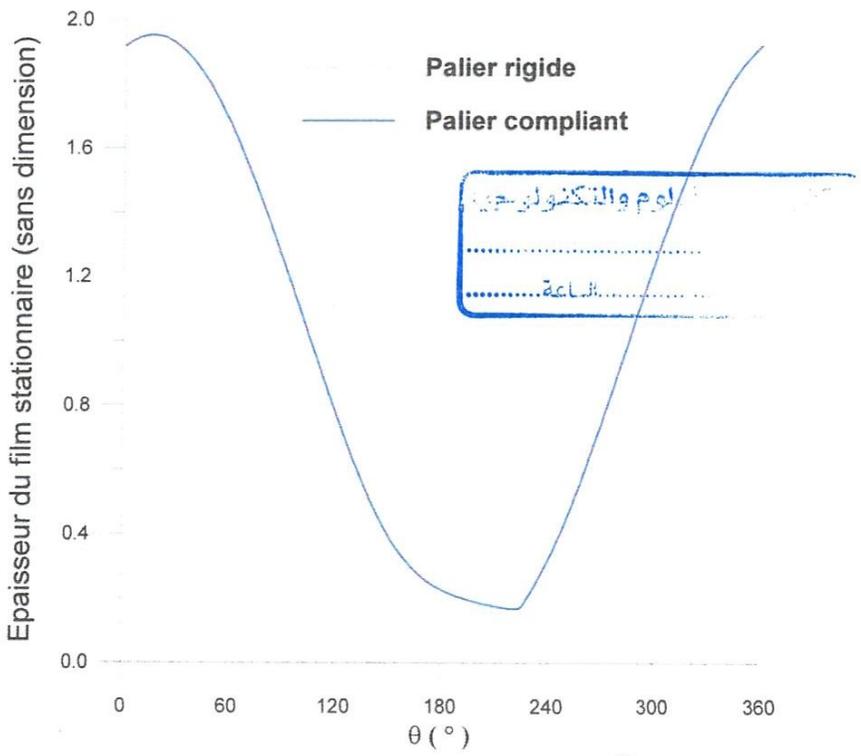


Fig.IV.3 – Epaisseur du film statique \tilde{h}_0

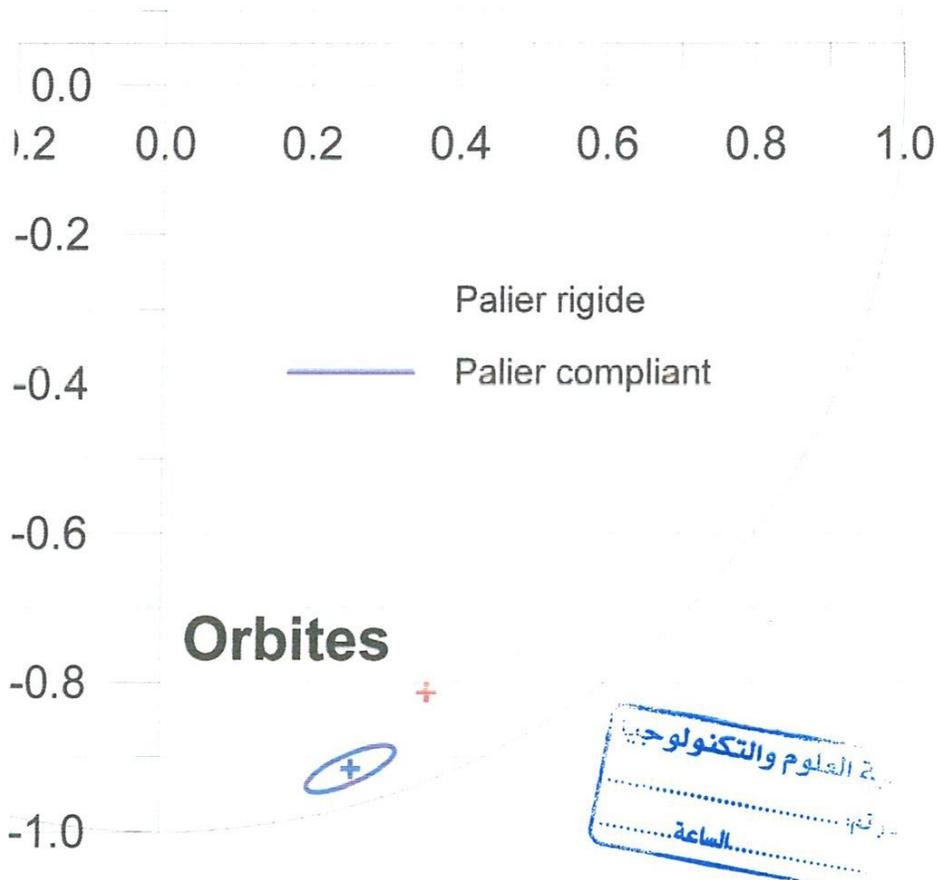


Fig .IV.4 – Réponses dynamiques dues à un balourd résiduel pour des paliers rigide et compliant.

Conclusion

Les calculs ont été effectués à charge imposée (problème EHD inverse) pour l'étude de la réponse du palier. Selon les résultats obtenus, des conclusions peuvent être tirées comme suit :

- Les déformations élastiques du revêtement de surface dues aux pressions hydrodynamiques doivent être considérées dans le calcul des performances statiques.
- Les déformations élastiques du revêtement affectent la taille de l'orbite elliptique et n'influent pas de façon significative sur son inclinaison.

Conclusion Générale



Trop long

Conclusion Générale

Notre travail est essentiellement consacré au développement d'une approche EHD permettant de prendre en considération les effets combinés des déformations élastiques de la structure du palier.

Dans cette approche, la couche élastique a été assimilée à des ressorts disposés radialement indépendants les uns des autres caractérisés par une même raideur. D'autre part, le modèle de Vijay Kumar Stokes a été utilisé en vue de prendre en considération les effets newtoniens.

L'utilisation de la théorie linéaire a permis de schématiser chaque palier par quatre ressorts et quatre amortisseurs. Les coefficients de raideur et d'amortissement sont calculés par une méthode de perturbation pour un mouvement vibratoire harmonique de faible amplitude du rotor.

La détermination de la solution du problème d'interaction fluide-structure dans les paliers compliants fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique impose la résolution simultanée de deux équations :

- Une équation hydrodynamique qui définit le comportement du fluide appelée équation de *Reynolds* dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide lubrifiant.
- Une équation géométrique qui définit l'épaisseur du film dépendant de la pression. Si le champ de pression hydrodynamique reste suffisamment faible pour que les déformations élastiques des surfaces de l'arbre et principalement de l'alésage soient négligeables devant l'épaisseur du film, l'équation géométrique est uniquement fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

Il nous semble que les objectifs fixés ont été atteints. En particulier, pour la résolution du problème EHD inverse (charge imposée) reflétant le fonctionnement réel des paliers. Dans ces conditions, la position d'équilibre statique du rotor est déterminée de façon itérative à l'aide de la méthode de Newton-Raphson amortie.

L'étude paramétrique a permis de mettre en évidence les effets non négligeables des déformations élastiques, Les calculs ont été effectués à charge imposée (problème EHD inverse) pour l'étude de la réponse du palier et à excentricité imposée (problème EHD direct) pour l'étude de stabilité du système arbre d'hélice-palier. Il a été conclu ce qui suit :

- Les déformations élastiques du revêtement de surface dues aux pressions hydrodynamiques doivent être considérées dans le calcul des performances statiques et dynamique des paliers fluides.

Références bibliographiques

- [1] NEWKIRK B. L., Shaft whipping, General Electr. Rev., Vol. 27, 1924, pp. 169-178.
- [2] HUMMEL B. L., Kritische Drehzahlen als folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im lager, VDI-Forschift, 1926, p. 287.
- [3] NEWKIRK B. L., Whirling balance shafts, 3rd ICAM, Stockholm, 1930, Proc. 3, 1931, pp. 105-110
- [4] STODOLA A., Kritische Wellenstörung Infolge der Nachgiebigkeit des oelpolsters im lager, Schweizerische Bauzeitung, 1925, pp. 85-265.
- [5] HORI Y., A theory of oil whip, 5th Japan Nat. Cong. A. M., 1955, Proc. 395, 8(a) JAM 26, T 81, 1959, pp. 189-198.
- [6] HOLMES R., The vibration of rigid shaft in short sleeve bearings, J. Mech. Eng. Sci., Vol. 2, 1960, pp. 337-341.
- [7] STERNLICHT B., Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings, J. Basic Eng., Vol. 81, 1959, p. 101.
- [8] LUND J. W., The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible damped supports, ASME, J. of Applied Mechanics, Dec. 1965, p. 911.
- [9] Paliers marins et hélices marines: COMPAC-Product-Manual-pdf-foxitReder-[COMPAC-Product-Manual.pdf]
- [10] Paliers marins et hélices marines: Thordon-propShaftBrochure-int.pdf-Foxt reader-[Thordon-propShaftBrochure-int.pdf]
- [11] Marine shaft bearings: file:///G:/marine%20shaft%20bearings/propeller-shaft-bearing-systems.htm
- [12] paliers marins : file:/// paliers-hydrolubes-arbres.html
- [13] paliers marins PDF : Alphaver marine et industrie
- [14] Marine shaft bearings: file:///J:/----PDF----/marine%20shaft%20bearings/duramax.html
- [15] Paliers marins et hélices marines :
file:///J:/----PDF----/paliers%20marins%20et%20h%C3%A9lices%20marines/translate%203.htm
- [16] Paliers marins : file:/// joints-etancheite.html

[17] FRENE (J.), NICOLAS (D.), DEGUERCE (B.), BERTHE (D.) et GODET (M.). – Lubrification hydrodynamique. Paliers et butées. Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF, no 72, Eyrolles (1990). Technique de l'ingénieur B 5330.

[18] CAZAUD (R.). – Le frottement et l'usure des métaux, les antifrictions. Dunod (1959). Technique de l'ingénieur B 5330.

[19] Paliers marins et hélices marines :

file:///J:/----PDF----/paliers%20marins%20et%20h%C3%A9lices%20marines/translate%201.htm

[20] Hélice marine image: file:/// hélice marine.html

[21] Hélice marine : <http://www.fao.org/DOCREP/005/X0487F/x0487f04.htm#TopOfPage>

[22] Article Bjørn Johan Vartdal, Tormod Gjestland, Terje Ingvar Arvidsen; Année 2009:

Lateral Propeller Forces and their Effects on Shaft Bearings.

WA3-3-Vartadal-lateral propeller forces and their effects on shaft Be. Pdf-foxit Reader-[WA3-3-Vartadal-lateral propeller forces and their effects on sha]

[23] ABBOTT (I.H.) et VON DOENHOFF (A.E.). –Theory of wing sections. Mc Graw-Hill (1949).Pour ce qui concerne l'application aux hélices, on trouve les données relatives aux profils et cambrures des sections de pales dans : Hydrodynamique navale (tome III propulsion), l'École Nationale Supérieure des Techniques Avancées par S. BINDEL (1975); Technique de l'ingénieur B 4360

[24] cavitations d'hélice marine : Cavitation.htm.

[25] Thèse: Films Lubrifiants Supramoléculaires Organisés : de la Microstructure aux Propriétés Tribologiques. Par Hélène, FAY; Année 2011 N° ordre : 4353 L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1. FAY_HELENE_2011.pdf-foxit Reader-[FAY_HELENE_2011.pdf]

[26] Cours fundamentals of design Topic 10; Bearings: Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing considering misalignment caused by shaft deformation:

Fundamentals Topic 10.PDF-Foxit Reader-[Fundamentals Topic 10.PDF]

[27] Rugosité de surface paliers marins : 09_chap3.pdf (SECURED)-foxit Reader-[09_chap3.pdf (SECURED)]

[28] Mémoire de magister GAAGAIA Djamel Edinne, Année 2011 université de Guelma. Thème ; Homogénéisation des Equations de Reynolds laminaire et turbulente : Application à l'Etude des paliers hydrodynamiques rugueux.

[29] Thèse: OIL FILM PRESSURE IN HYDRODYNAMIC JOURNAL BEARINGS TKK
Dissertations 196. Année 2009 University Finland.

URL: <http://lib.tkk.fi/Diss/2009/isbn9789522481627/>

[30] Swift, H. W. (1931), "The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings." *J. Inst. Engrs.*, **233**(1), 267-322.

[31] Stieber, W. (1933), "Das Schwimmlager, Hydrodynamische Theori des Glutlagers," VDI:
Berlin.

[32] Christopherson, D. G. (1941), "A New Mathematical Method for the Solution of Oil Film
Lubrication Problems." *Proc. IMechE*, **141**, 126-135.

[33]] Bayada, G. and Chambat, M. (1986), "Sur Quelques Modélisations de la Zone de
Cavitation en Lubrification Hydrodynamique." *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*,
5(5), 703-729.

[34] Dowson, D. and Taylor, C. M. (1979), "Cavitation in Bearings." *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**,
35-66.

[35] Mémoire de magister Abderrahmen ZERTI université de Guelma ; Année 2012. Thème ;
Comportement dynamique d'un rotor monté dans des paliers élastiques lubrifiés par un fluide à
couple de contrainte.