

17/531.6.18

**Université du 8 mai 1945 Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin D'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master**

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par : HAMOUDA AHMED

=====

***Etude comparative d'algorithmes d'analyse***  
***des signaux non stationnaires par***  
***Transformée de Fourier Fractionnaire***

=====

Sous la Direction de :

**Dr. S. BOUCHERIT**

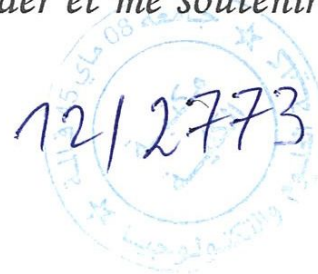
Année universitaire 2011/2012

## REMERCIEMENT

*Avant de commencer la présentation de ce Mémoire, je profite de l'occasion pour remercier toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

*A l'issue de notre Mémoire de fin d'études je tiens à présenter mes remerciements les plus chaleureux et notre gratitude à notre encadrant monsieur BOUCHERIT SEBTI à qui aucun remerciement ne suffira pour ses conseils et son aide afin d'assurer le bon déroulement de notre projet.*

*Enfin je remercie vivement mes parents et mes proches pour tous leurs efforts qu'ils ont déployé pour m'aider et me soutenir moralement et financièrement.*



*Hamouda ahmed*

# *Dédicace*

Je tiens à dédier ce mémoire :

A mes chers parents, ma mère, et mon père qui m'ont soutenu dans tous les domaines de la vie et m'encouragent à préserver dans mes études.

A mes sœurs, et mes frères ;

A tout mes amis;

A tous mes collègues ;

A tous ma famille HAMOUDA ;

*Merci.*

*AHMED.....*

# Sommaire

---

<i>Introduction générale.....</i>	<i>(1)</i>
<i>Chapitre I Traitement des signaux vibratoires.....</i>	<i>(3)</i>
<b>I.1. Introduction sur traitement du signal .....</b>	<b>(3)</b>
<b>I.2. Notation sur les signaux.....</b>	<b>(3)</b>
<b>I.2.1. les signaux déterministes .....</b>	<b>(4)</b>
<b>I.2.2. les signaux aléatoires.....</b>	<b>(4)</b>
<b>I.3. Transformée de Fourier et analyse temps-fréquence.....</b>	<b>(5)</b>
<b>I.3.1. Signaux stationnaires et non-stationnaires.....</b>	<b>(5)</b>
<b>I.3.2 Les signaux non-stationnaires.....</b>	<b>(6)</b>
<b>I.3.3 Les signaux quasi-stationnaires.....</b>	<b>(6)</b>
<b>I.4. Les méthodes de traitement du signal vibratoire.....</b>	<b>(7)</b>
<b>I.4.1. Les méthodes temporelles.....</b>	<b>(7)</b>
<b>I.4.2. Les méthodes fréquentielles.....</b>	<b>(7)</b>
<b>I.4.3. Les méthodes temps-fréquence.....</b>	<b>(8)</b>
<b>I.4.3.1. La transformée de FOURIER à court terme (TFCT).....</b>	<b>(9)</b>
<b>I.4.3.1.1 Inégalité d'Heisenberg-Gabor.....</b>	<b>(11)</b>
<b>I.4.3.1.2. les limites de la TFCT.....</b>	<b>(12)</b>
<b>I.4.3.2. Représentation la transformée de Wigner-Ville.....</b>	<b>(12)</b>
<b>I.4.3.2.1. Propriétés.....</b>	<b>(13)</b>
<b>I.4.3.2.2. Résultats sur des signaux tests.....</b>	<b>(15)</b>
<b>I.4.3.2.3 Autres RTF.....</b>	<b>(17)</b>
<b>I.4.4. Les méthodes temps-échelles.....</b>	<b>(18)</b>
<b>I.4.4.1. La transformée en ONDELETTES (WT).....</b>	<b>(18)</b>
<b>I.4.4.2. L'avantage de la transformée en ONDELETTES.....</b>	<b>(19)</b>
<i>Chapitre II Théorie et les applications de la transformée de Fourier fractionnaire.....</i>	<i>(21)</i>
<b>II.1 Introduction.....</b>	<b>(21)</b>
<b>II.2 La transformée de Fourier classique.....</b>	<b>(21)</b>
<b>II.3 La transformée de Fourier fractionnaire.....</b>	<b>(22)</b>
<b>II.3.1 Fonctions propres.....</b>	<b>(23)</b>
<b>II.3.2 Représentation intégral.....</b>	<b>(24)</b>

II.3.3 Propriétés de la FRFT.....	(26)
II.3.4 FRFT de fonctions usuelles.....	(29)
II.4 .la FRFT dans l'analyse spectrale.....	(30)
II.5. La FRFT dans l'analyse cepstral.....	(31)
II.6.La transformée de Fourier fractionnaire à court terme.....	(33)
II.6.1. Estimation de la largeur du signal à partir des moments FT fractionnelles.....	(35)
<i>Chapitre III Etude comparative d'algorithmes d'analyse de signaux non stationnaires par Transformée de Fourier Fractionnaire.....</i>	<i>(38)</i>
III.1. Introduction .....	(38)
III.2. Plan et les outils de travail .....	(38)
III.2.1 Signal test.....	(38)
III.2.2. Représentation temps-fréquences.....	(39)
III.2.2.1 La distribution de Wigner Ville.....	(39)
III.2.2.2 La transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) et spectrogramme.....	(40)
III.2.2.2.1 Algorithme de la TFCT .....	(40)
III.2.2.2.2 Les fenêtres.....	(41)
III.2.2.3 La transformée de Fourier Fractionnaire à Court Termes (TFRCT) et spectrogramme.....	(43)
III.2.2.3.1 Calcul de la Transformée de Fourier Fractionnaire de la fenêtre .....	(43)
III.2.2.3.2 Influence du type de fenêtre.....	(46)
III.3 Application sur un signal réel.....	(48)
III.3.1 Banc d'essais et matériel de mesure .....	(48)
III.3.2 Représentation temps fréquence par la transformée de Fourier fractionnaire à court terme.....	(51)
<i>Conclusion générale.....</i>	<i>(54)</i>
<i>Les Références.....</i>	<i>(55)</i>

---

## LISTE DES ABREVIATIONS

TF	Transformée de Fourier
FFT	(Fast Fourier Transform) Transformée de Fourier
FRFT	(Fractional Fourier Transform) Transformée de Fourier Fractionnaire
RTF	Représentation Temps - Fréquences
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
TFRCT	La transformée de Fourier Fractionnaire à Court Termes
DWV	Distribution de Wigner-Ville
WT	(Wavelet Transform) Transformée en Ondelettes

# Introduction générale

## **Introduction générale**

Partout autour de nous il y a des signaux qui ne demandent que d'être analysés : tremblements sismiques, voix humaines, images médicales, données financières, music et plus particulièrement les vibrations et les bruits émis par les systèmes mécaniques.

Les mesures vibratoires représentent l'image des défauts générés, s'ils sont stratégiquement bien placés. Le choix du type d'analyse (temporel, fréquentiel, etc.), permettant le traitement des signaux vibratoires acquis, est très important car il dépend du comportement dynamique de la machine (linéaire, non linéaire, transitoire, stationnaire, ...).

La représentation temporelle classique du signal ne donne pas une bonne perception des composantes oscillantes multiples, tandis que la représentation fréquentielle (transformée de Fourier) ne permet pas la localisation temporelle de ces composantes. Ainsi, partant des propriétés de ces signaux et des limitations de la transformée de Fourier (TF), il est naturel de s'orienter vers un schéma d'analyse temps-fréquence. Afin de rendre cette approche automatique, il lui faut rajoutée des méthodes ou techniques de prise de décision

La transformée de Fourier Fractionnaire est un nouvel outil pour le traitement du signal, cet transformée peut être considérée comme une puissance fractionnaire de la transformée de Fourier classiques. La première idée de la puissance fractionnaire de l'opérateur de Fourier apparaît en 1929. Comme les exponentielles complexes sont les fonctions de base dans l'analyse de Fourier, les chirps (signaux de balayage toutes les fréquences dans un intervalle de fréquence) sont la base de l'analyse de Fourier fractionnaire. En plus la FRFT peut fournir une image plus riches dans l'analyse temps-fréquence et il n'ya rien de plus qu'une variante de la transformée de Fourier standard, elle peut améliorer les performances de certaines applications de traitement du signal.

C'est dans cette perspective que ce mémoire est orienté. Il s'intéresse à une etude qualitative et comprative d'algorithmes d'analyse de signaux non stationnaire par Transformée de Fourier Fractionnaire

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres :

**Chapitre I** débute avec la représentation des bases de traitement du signal avec des rappels sur les méthodes temps-fréquence classiques la Transformée de Fourier a court terme



(TFCT), la distribution de Wigner ville (DWV) et la transformée en ondelette (WT), après la mise en évidence des limitations de ces méthodes, nous présentons au **chapitre II** la théorie et e des applications de la transformée de Fourier fractionnaire( FRFT) .

Le **chapitre III** présente une etude qualitative et comprative d'algorithmes d'analyse de signaux non stationnaire par Transformée de Fourier Fractionnaire et enfin une conclusion générale.

# Chapitre I

## Traitement des signaux vibratoires

## Chapitre I

### Traitement des signaux vibratoires

#### I.1. Introduction sur traitement du signal :

Depuis toujours, les mécaniciens ont voulu vérifier la conception des matériels qu'ils réalisent, contrôler et automatiser leur fonctionnement, en garantir la qualité et réduisant les garantissant effets néfastes comme les bruits rayonnés ou les vibrations parasites. L'emploi de machines de plus en plus complexes, des cadences de fonctionnement élevées, le respect des normes de sécurité et de nuisances de plus en plus sévères mettent ces préoccupations au premier plan des soucis des industriels. Divers champs comme la surveillance et le diagnostic, l'analyse modale, le contrôle non destructif ou l'acoustique industrielle ont connu de ce fait un développement important, et ceci dans des domaines aussi divers que l'aéronautique, l'industrie spatiale, l'automobile ou la production d'énergie. Dans chacun de ces cas, le rôle (effectif ou potentiel) joué par le Traitement du Signal peut être déterminant, car ce sont bien les signaux de vibrations, de forces, de couples, . . . qui véhiculent l'information utile quant à l'état mécanique des systèmes. Malheureusement, et peut-être parce que l'analyse spectrale par transformée de Fourier fournit et continuera de fournir un outil naturel pour le traitement des signaux en Mécanique, les méthodes plus récentes sont encore mal connues et insuffisamment utilisées dans ce domaine.

#### I.2. Notation sur les signaux :

Les signaux sont usuellement des fonctions du temps, qui peuvent avoir une ou plusieurs dimensions : un signal issu d'un capteur simple (e.g. accéléromètre) sera unidimensionnel (ou scalaire)  $x(t)$  ; s'il est généré par un ensemble de capteurs observant un même phénomène physique il sera dit vectoriel  $\underline{x}(t) = |x_1(t) \dots x(t)|^t$  (e.g. antenne acoustique n capteurs), ou multidimensionnel  $I(x, y, t)$  dans le cas de la dépendance au temps et à d'autres variables (e.g. image animée). En outre, le paramètre temporel peut être continu, ou discret, selon que le signal est laissé sous forme 'analogique' ou 'échantillonnée'. On notera par la suite  $x(t)$  dans la cas continu et  $x(n)$  dans le cas discret. Enfin, les valeurs du signal peuvent être réelles ou complexes.

On distingue diverses classes de signaux :

**I.2.1. les signaux déterministes** qui, dans l'acception la plus simple de ce terme, comprend les signaux reproductibles, i.e. dont la forme peut-être reproduite avec une approximation suffisamment bonne pour qu'on puisse la considérer comme identique d'une expérience à l'autre. Parmi ceux-ci, on peut encore distinguer 2 sous-classes, les signaux transitoires et les signaux permanents. Les premiers sont des signaux qui ont une durée qui n'excède pas la durée de l'observation ou de l'expérience. C'est e.g. le cas de transitoires exponentiels :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot \cos(2\pi ft + \theta) \text{ pour } t > 0 \quad (\text{I-1})$$

Les seconds sont ceux qu'ont une durée supposée infinie, soit par ignorance de leur durée, soit par choix d'un modèle mathématique. C'est par exemple le cas pour l'incontournable sinusoïde, ou plus généralement pour des signaux modulés en fréquence :

$$x(t) = A \cdot \sin(\phi(t)) \quad (\text{I-2})$$

Pour les caractériser globalement, on utilise des propriétés intégrales, i.e. on définira les signaux à énergie finie chaque fois que :

$$E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{I-3})$$

Pratiquement, cette classe recouvre des signaux transitoires de la physique.

On définit les signaux à puissance moyenne finie lorsque :

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{I-4})$$

Pratiquement, les signaux physiques permanents rentrent dans cette classe.

Pour les signaux à temps discret (i.e. échantillonnés) les intégrales ci-dessus sont à remplacer par des sommes simples.

**I.2.2. les signaux aléatoires** sont ceux qui admettent une représentation probabiliste. On admet que le signal observé est membre d'une 'famille' de signaux, définie par ses propriétés statistiques (densité de probabilité, fonction de répartition, moments, etc... ). Si les caractéristiques probabilistes ne dépendent pas d'une origine de temps, on les dira stationnaires, en précisant de quelle caractéristique s'agit-il: e.g. si les densités de probabilités ont cette propriété

$$p_x(x, t) = p_x(x) \quad \text{ou} \quad p_x(x, y, t_1, t_2) = p_x(x, y, t_1 - t_2) \quad (\text{I-5})$$

On parlera de stationnarité en loi ou 'au sens strict', si seuls les moments ont cette propriété, on parlera de stationnarité 'au sens large', en précisant l'ordre. La classe la plus utilisée est celle des signaux stationnaires de l'ordre 2, i.e. telle que les 2 premiers moments (moyenne et corrélation) soient stationnaires :

$$E[x(t)] = m_x(t) = m_x \quad (\text{I-6})$$

$$E[x(t_1)x(t_2)] = C_x(t_1 - t_2)$$

### I.3. Transformée de Fourier et analyse temps-fréquence

D'un point de vue pratique, la transformée de Fourier permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. L'analyse conjointe temps-fréquence quant à elle vise à estimer et présenter l'évolution de la fréquence instantanée d'un signal dans un "plan temps-fréquence". Il est évident que les signaux périodiques ne bénéficient pas de ces représentations, puisque leur contenu spectral ne varie pas en fonction du temps. Cependant ce type d'analyse est pleinement adapté à la famille des signaux non-stationnaires, c'est à dire les signaux dont le contenu spectral et les propriétés mathématiques évoluent en fonction du temps. La section suivante définit les notions de stationnarité et de non-stationnarité.

- Cette analyse montre ses limites dès lors où elle ne donne pas la localisation temporelle de ses composantes fréquentielles représentées par les pics du spectre. En fait, cette information est cachée dans la phase du spectre.

#### I.3.1. Signaux stationnaires et non-stationnaires

La transformée de Fourier est inadaptée dans le cas de signaux non-stationnaires, car la localisation temporelle est perdue. Ce fait a été souligné en prenant l'exemple de la musique par J. Ville en 1948 [1].

La non-stationnarité peut être vue comme une non-propriété [2], ainsi il est plus aisé de l'appréhender par la notion de stationnarité. Pour préciser la notion de stationnarité, deux cas sont à distinguer : les signaux stationnaires aléatoires et les signaux stationnaires certains.

- **Signal aléatoire stationnaire**

Un signal aléatoire stationnaire est un signal dont les propriétés mathématiques sont invariantes par décalage temporel. La stationnarité de second ordre, appelée aussi stationnarité

au sens large, est la plus importante. Très souvent, le terme "stationnarité" désigne la stationnarité au sens large. Un signal est stationnaire au sens large si sa valeur moyenne est indépendante du temps :

$$E\{x(t)\} = \mu_x \quad (\text{I-7})$$

où  $\mu_x$  est une constante, et si sa fonction de covariance s'identifie à une fonction de corrélation qui ne dépend que de la différence des instants considérés :

$$E\{x(t)x^*(s)\} = \lambda_x(t - s) \quad (\text{I-8})$$

Par extension, les caractéristiques spectrales d'un signal stationnaire ne varient pas au cours du temps. Le module de la transformée de Fourier est constant, ce qui peut être interprété comme un état de régime stationnaire.

- **Signal certain stationnaire**

Pour les signaux certains, la notion de stationnarité signifie en réalité "stabilité d'une ou plusieurs fréquence(s) au cours du temps". Pour définir cette stationnarité, il est nécessaire de passer par la notion de signal analytique. En effet, un signal certain est considéré comme stationnaire s'il est une combinaison linéaire de composantes à amplitude et à fréquence constantes, c'est à dire :

$$a_x(t) = |z_x(t)| = c^{te} \quad (\text{I-9})$$

Et

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg(z_x)}{dt}(t) = c^{te} \quad (\text{I-10})$$

### I.3.2 Les signaux non-stationnaires

A l'inverse des signaux stationnaires décrits dans la section précédente, des signaux certains ou aléatoires peuvent être des processus non-stationnaires. Les propriétés mathématiques des signaux non-stationnaires, ainsi que leurs contenus fréquentiels, varient de manière non négligeable au cours du temps.

Un signal quasi-stationnaire [3] est un signal non-stationnaire dont le spectre de fréquence à court terme et les caractéristiques statistiques n'évoluent que relativement lentement dans le temps à l'échelle des phénomènes étudiés. Par conséquent, le signal est en première approximation stationnaire à l'échelle d'une certaine fenêtre d'observation. Les signaux considérés dans les applications traitées dans ce document sont tous des signaux non-

stationnaires, cependant leurs caractéristiques sont très différentes. Dans le cas des signaux de type chocs, il est possible de parler de signaux non-stationnaires car l'évolution fréquentielle est extrêmement rapide. Dans le cas de signaux quasi-sinusoïdaux, c'est à dire des signaux dont la fréquence varie très peu, il est plus pertinent de parler de quasi-stationnarité .

#### **I.4. Les méthodes de traitement du signal vibratoire**

##### **I.4.1. Les méthodes temporelles**

Les méthodes temporelles sont souvent basées sur des techniques de reconnaissance de formes d'onde, qui s'apparentent de manière plus générale à des outils basés sur la corrélation. Les principaux avantages de ces techniques sont leur facilité de mise en œuvre en termes de traitement des signaux et la possibilité d'un réel suivi de l'historique de l'évolution des défauts. Leurs inconvénients résident généralement dans la mise en place et le positionnement des transducteurs utilisés, qui peuvent être complexes, spécialement dans les applications de contrôle non destructif par ultrasons par exemple [3]. L'utilisation de données 'brutes' uniquement ne comprend pas l'extraction de paramètres structuraux classiques, comme dans le cas de l'analyse fréquentielle.

##### **I.4.2. Les méthodes fréquentielles**

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier est l'outil le plus utilisé pour détecter par exemple l'évolution de la fréquence des modes d'analyse sélectionnés, évolution liée comme dit en introduction à des modifications structurelles. L'utilisation de techniques basées sur l'analyse modale et l'évolution des paramètres modaux dans le temps est une démarche intéressante, mais qui implique néanmoins certaines limitations. D'une part, des défauts de très petite taille par rapport à la dimension de la structure étudiée ne provoquent souvent que des variations mineures des valeurs de paramètres couramment utilisés comme indicateurs, comme les fréquences propres ou la raideur [4]. Il apparaît donc difficile d'identifier des changements souvent très localisés de ces paramètres, lorsque des modes globaux de flexion ou de torsion sont généralement utilisés pour analyse. De plus, cette technique a un inconvénient majeur du fait que l'information temporelle est en grande partie perdue. Il est uniquement possible de réaliser un suivi sur des tranches temporelles discontinu. Au final, ces techniques fréquentielles peuvent permettre une détection assez aisée d'un défaut, mais une localisation apparaît plus complexe à mettre en œuvre. Elles offrent la possibilité d'effectuer un diagnostic efficace, mais dans des cas bien particuliers. Un des domaines dans lequel elles

présentent le plus d'intérêt est celui des machines tournantes, qui présentent des signatures fréquentielles précises, fonction de leur vitesse de rotation essentiellement

### I.4.3. Les méthodes temps-fréquence

L'analyse spectrale basée sur la transformée de FOURIER (FFT) et sur le filtrage numérique ( $1/n$  d'octave) fournit une bonne description des signaux stationnaires et pseudo stationnaires. Malheureusement, ces techniques ont de nombreuses limitations quand les signaux à analyser sont très instationnaires. En particulier, la FFT est une analyse par bloc temporel qui suppose le signal échantillonné stationnaire sur toute la durée du bloc. L'image ci dessous montre un tel signal accompagné de son spectre moyen d'amplitude calculé par FFT.

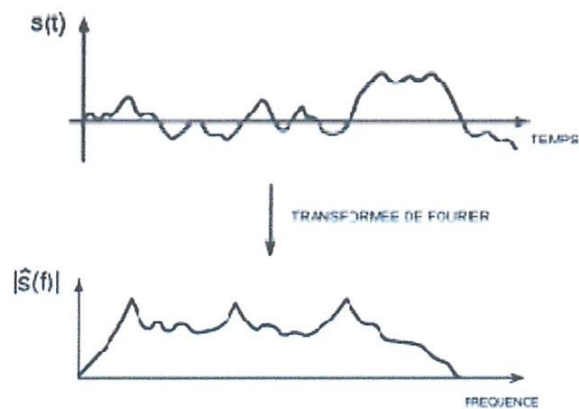


FIGURE I.1 FFT du  $s(t)$  [7]

Cette analyse montre ses limites dès lors où elle ne donne pas la localisation temporelle de ses composantes fréquentielles représentées par les pics du spectre. En fait, cette information est cachée dans la phase du spectre.

Dans ce cas, la solution sera de calculer les spectres instantanés pour chaque pas temporel du signal. Les outils pour atteindre ce but sont appelés techniques d'analyse temps – fréquence. Plusieurs méthodes existent et aucune ne prédomine sur l'autre. Leur utilisation va dépendre de l'application visée avec des avantages et des inconvénients de chacune pour faire apparaître les informations recherchées. Deux méthodes sont détaillées par la suite :

- La transformée de FOURIER à court terme (TFCT)
- La transformée de Wigner – Ville (DWV)



L'augmentation de puissance des ordinateurs a permis de mettre en application les modèles numériques de ces transformées et donc d'obtenir les descriptions temps fréquence des signaux non stationnaires.

#### I.4.3.1. La transformée de FOURIER à court terme (TFCT)

Il n'est plus vraiment nécessaire de présenter le problème de l'analyse de Fourier globale tant les insuffisances de ce type de représentations dans le cas non-stationnaire ont été mises en évidence. Les travaux de Gabor dans les années 40 [5] ont posé les bases de la transformée de Fourier à court terme. Il a été le premier à imaginer une transformée de Fourier locale basée sur un fenêtrage du signal à analyser permettant d'observer des variations de fréquence au cours du temps.

La transformée de FOURIER ne peut seulement s'appliquer à l'analyse de signaux stationnaires ou supposés comme tel. La formulation de cette transformée le montre clairement puisque l'intégration enlève la dépendance temporelle.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{I-11})$$

$$S_{\tau}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot g(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt \quad (\text{I-12})$$

Où  $\tau$  représente le paramètre de localisation de la fenêtre  $g$ .  $S_{\tau}(f)$  correspond au spectre du signal  $s$  autour de  $\tau$ .  $f$  est la fréquence. La série de spectre ainsi constitué représente une forme de transformée temps fréquence du signal appelé spectrogramme. Ce traitement fait l'hypothèse de stationnarité durant la durée de la fenêtre  $g$  quelle que soit la partie du signal considéré. La longueur de la fenêtre est cependant choisie pour respecter cette hypothèse. Ce choix influence directement les propriétés de résolution de la composition ; plus la fenêtre  $g$  est petite, plus la résolution temporelle est meilleure mais plus la résolution fréquentielle est mauvaise. Si une haute résolution fréquentielle est nécessaire alors une longue fenêtre temporelle  $g$  sera utilisée et il sera difficile de respecter les hypothèses de stationnarité.

La forme, la longueur de cette fenêtre ainsi que le pas d'incrémentations sont des paramètres fixés avant l'analyse. Ils présupposent une bonne connaissance a priori du signal à analyser.



FIGURE I.2 la TFCT du  $s(t)$  [7]

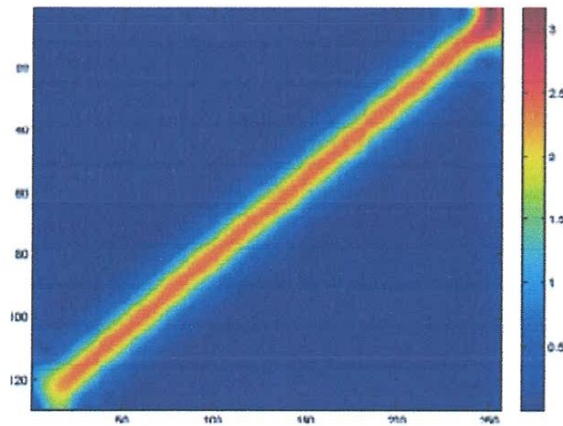
La transformée de Fourier à court terme [6] est une transformée de Fourier fenêtrée. Le signal à analyser est convolué par une fenêtre, gaussienne dans le cas de la transformée de Gabor, ou bien par des fenêtres de type Hanning ou Blackman [10]. Le résultat de cette transformation est une représentation temps-fréquence-amplitude où l'amplitude est complexe.

La transformée de Fourier à court terme peut être exprimée ainsi :

$$TFCT_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h^*(\tau - t)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{I-13})$$

où  $h(t)$  est une fenêtre temporelle [10], et  $x(t)$  le signal à analyser. Comme pour la transformée de Fourier, la transformée de Fourier à court terme possède un module (**Figure I.3**) et une phase (**Figure I.4**) :

$$|TFCT_x(t, f)| = \sqrt{\text{Imag}(TFCT_x(t, f))^2 + \text{Real}(TFCT_x(t, f))^2} \quad (\text{I-14})$$



**FIGURE (I.3)** – Module de la transformée de Fourier à court terme du signal "chirp linéaire". La barre de couleur représente l'amplitude. [7]

$$TFCT_x(t, f) = \text{Atan}\left(\frac{\text{Imag}(TFCT_x(t, f))}{\text{Real}(TFCT_x(t, f))}\right) \quad (\text{I-15})$$

Il est aussi possible de définir une version discrète de la transformée de Fourier à court terme. Schématiquement, la transformée de Fourier à court terme discrète peut être vue comme une succession de tranches de transformées de Fourier arrangées en fonction du temps.

$$DTFCT_x(t, f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h^*(\tau - t)e^{-i2\pi f\tau} \quad (\text{I-16})$$

### I.4.3.1.1 Inégalité d'Heisenberg-Gabor

Cette inégalité, également appelée inégalité temps-fréquence, trouve son fondement dans les relations d'incertitudes fixées par Heisenberg [8]. L'analogie avec les travaux de Heisenberg pour la transformée de Fourier a été faite par Gabor dans les années 40 [6].

L'inégalité d'Heisenberg-Gabor s'écrit :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (\text{I-17})$$

Elle exprime le fait que le produit durée-bande de tout signal est borné inférieurement pour une durée  $\Delta t$  et une bande spectrale  $\Delta f$ . Autrement dit, plus grande est la précision en fréquence, plus faible est la précision en temps et vice versa.

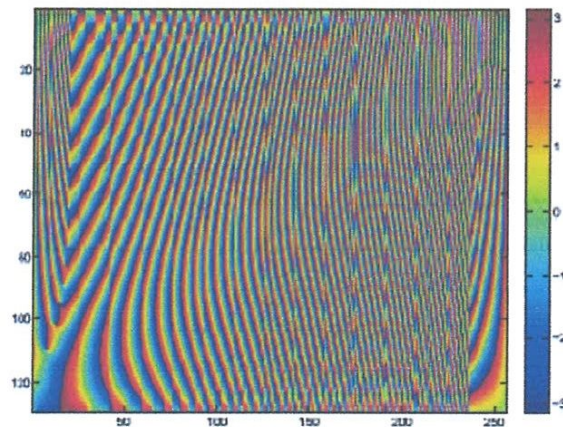


FIGURE (I.4) – Phase de la transformée de Fourier à court terme du signal "chirp linéaire". La barre de couleur représente l'amplitude. [7]

La transformée de Fourier à court terme est sujette à cette incertitude du fait de l'utilisation de la transformée de Fourier. Ce phénomène impose la recherche du bon compromis temps-fréquence [9] adapté au cas considéré en fixant la bonne largeur de fenêtre.

La **figure I.5** présente le cas où la fenêtre est trop étroite ; un phénomène d'étalement en fréquence apparaît. Sur la **figure I.6**, c'est l'inverse, la fenêtre est trop large et un étalement en temps peut être observé.

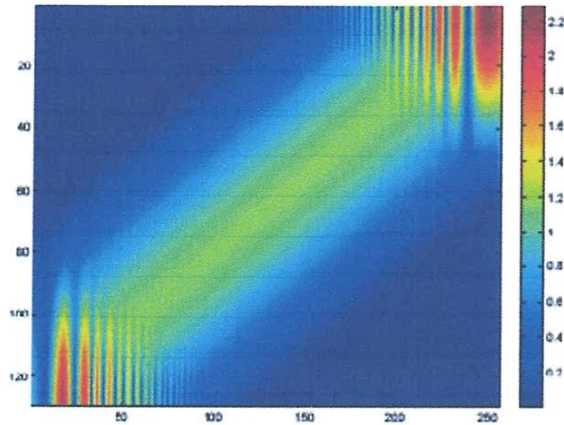


FIGURE (I.5) – Module de la transformée de Fourier à court terme du signal "chirp linéaire", calculé avec une fenêtre "trop étroite".[10]

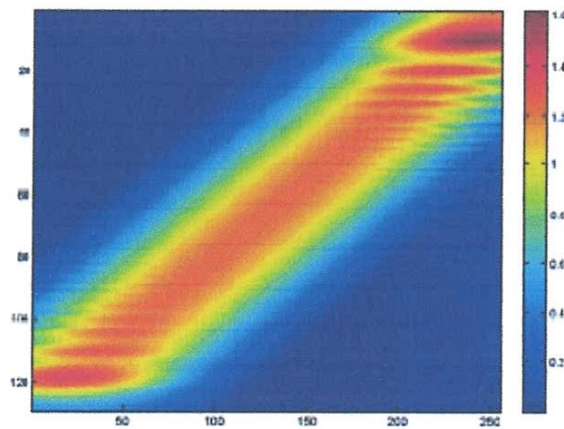


FIGURE (I.6) – Module de la transformée de Fourier à court terme du signal "chirp linéaire", calculé avec une fenêtre "trop large".[10]

#### I.4.3.1.2. les limites de la TFCT

On peut noter un inconvénient majeur de la TFCT. En effet, la fenêtre est de longueur fixe ce qui est un handicap important lorsqu'on veut traiter des signaux dont les variations peuvent avoir des ordres de grandeur très variable comme le cas pour les signaux musicaux.

Par ailleurs, on remarque qu'il pourrait être intéressant de faire varier la taille de la fenêtre non seulement par translation mais également par dilatation et contraction en fonction des caractéristiques du signal et de ce que l'on veut mettre en évidence. C'est précisément ce qui nous amène à la représentation de type ondelettes

#### I.4.3.2. Représentation la transformée de Wigner-Ville

Les RTF sont pas les seules à pouvoir représenter les propriétés Spectrales évolutives. La distribution de Wigner-Ville qui suit est le membre le plus utilisé de la classe de représentations dite classe de Cohen :

L'introduction intuitive que l'on peut en faire est la suivante : On sait que la Densité Spectrale d'énergie est définie par

$$|X(f)|^2 = S_x(f)^{TF^{-1}} \Leftrightarrow C_x(\tau) = \int_{\mathcal{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{\mathcal{R}} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)dt \quad (\text{I-18})$$

On peut définir une 'corrélacion locale ou 'instantanée' en supprimant l'opérateur d'intégration :

$$C_x(t, \tau) \triangleq x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{I-19})$$

Bien qu'apparemment naturelle, cette définition de corrélacion instantanée perd l'essentiel des bonnes propriétés de la fonction de corrélacion. Mais si l'on définit une 'densité spectrale instantanée'

$$E(t, f) \triangleq W_x(t, f) = \int_{\mathcal{R}} C_x(t, \tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{I-20})$$

Qui est en fait la représentation temps fréquence de Wigner-Ville :

$$W_x(t, f) = \int_{\mathcal{R}} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) \cdot x\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{I-21})$$

Si la corrélacion instantanée n'appartient pas en fait à la classe des fonctions de corrélacion, la 'densité spectrale' associée ne méritera pas non plus ce nom ; en particulier, on verra qu'elle peut être négative. Cette représentation a cependant de très bonnes propriétés de description des contenus temps-fréquence des signaux. Elle est le membre le plus connu de la famille des Représentation Temps-Fréquence. Cette famille de représentations est définie par un ensemble de propriétés 'souhaitables'

#### I.4.3.2.1. Propriétés

\*  $W_x(t, f)$  est réelle même si  $x(t)$  est complexe.

$$x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow W_x(t, f) + W_x(t, -f) \quad (\text{I-22})$$

➤ Décalages :

en temps :

$$x(t) \rightarrow x(t-t_0) \Leftrightarrow W_x(t, f) \rightarrow W_x(t-t_0, f) \quad (\text{I-23})$$

en fréquence :

$$x(t) \rightarrow x(t)e^{i2\pi f_0 t} \Leftrightarrow W_x(t, f) \rightarrow W_x(t, f-f_0) \quad (\text{I-24})$$

➤ Marginales :

$$\int_R W_{xy}(t, f) dt = X(f) \cdot Y^*(f) \quad (\text{I-25})$$

$$\int_R W_{xy}(t, f) df = x(t) \cdot y^*(t) \quad (\text{I-26})$$

d'où l'on tire

$$\int_R W(t, f) dt = |W(f)|^2 = DSE \quad (\text{I-27})$$

$$\int_R W(t, f) df = |w(t)|^2 \text{ Energie instantanee}$$

➤ Conservation des supports en temps et en fréquence :

si  $x(t) = 0$  pour  $t \notin [t_0, t_1]$  alors  $W_x(t) = 0$   $t \notin [t_0, t_1]$

avec une propriété identique sur l'axe des fréquences.

\* Inversion ou (reconstruction)

$$x(t) = 1/x^*(0) \int_R W_x\left(\frac{t}{2}, f\right) e^{+i2\pi ft} df \quad (\text{I-28})$$

➤ Convolution et produit :

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \rightarrow W_z(t, f) = \int W_x(\tau, f) \cdot W_y(t - \tau, f) d\tau \quad (\text{I-29})$$

(Convolution en temps).

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \rightarrow W_z(t, f) = \int W_x(t, u) \cdot W_y(t, f - u) du \quad (\text{I-30})$$

(Convolution en fréquence).

➤ Formule de MOYAL :

$$\int_{R^2} W_x(t, f) W_y^*(t, f) dt df = \left| \int_R x(t) y^*(t) dt \right|^2 \quad (\text{I-31})$$

➤ Non linéarité (formule des interférences) :

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) \rightarrow W_x(t, f) = \sum_{k=1}^N W_{x_k}(t, f) = \sum_{km} W_{x_k} x_m(t, f)$$

Cette formule est très importante, car elle met en évidence l'existence d'interférences entre les différentes composantes. Elles gênent la lisibilité directe de la RTF de Wigner-Ville, bien que porteuse d'information.

Par exemple, considérons le signal à 2 composantes

$$x(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$$

on montre que

$$W_x(t, f) = |A_1|^2 \delta(f - f_1) + |A_2|^2 \delta(f - f_2) + 2 \operatorname{Re}\{A_1 A_2 * e^{i2\pi(f_1 - f_2)t}\} \cdot \delta(f - f_1 + f_2/2)$$

Ceci donne l'impression visuelle qu'il existe une 3<sup>ème</sup> composante à la fréquence  $f_1 + f_2/2$

#### I.4.3.2.2. Résultats sur des signaux tests

- **Utilisation du signal analytique**

Il est plus intéressant d'utiliser la version analytique du signal avec la distribution de Wigner - Ville. En effet, le signal analytique permet la réduction des interférences propres à la représentation [10] comme le montrent les **figures I.7 et I.8**. La **figure I.7** représente la distribution de Wigner-Ville du signal réel, et **8** représente la distribution de Wigner-Ville du signal analytique associé au signal réel.

- **Signaux-tests analytiques**

Les versions analytiques des signaux sont prises dans cette section pour les raisons énoncées ci-dessus. Le cas du chirp linéaire a été présenté ci-dessus. La distribution de Wigner-Ville est parfaitement adaptée aux signaux possédant une seule composante linéaire [9]. La **figure I.8** illustre qu'il ne peut exister d'interférence si le signal analytique est pris à la place du signal réel. Cependant, s'il existe plusieurs composantes ou bien si la composante n'est pas linéaire, des interférences apparaissent (**Figures I.9 et I.10**). Sur la **figure I.9**, des interférences inter-composantes apparaissent sous la forme de vaguelettes espacées régulièrement dans une direction intermédiaire entre celles des deux composantes. Des interférences propres à la composante elle-même apparaissent sous la forme de répliques de la composante mais atténuées (**Figure I.10**).

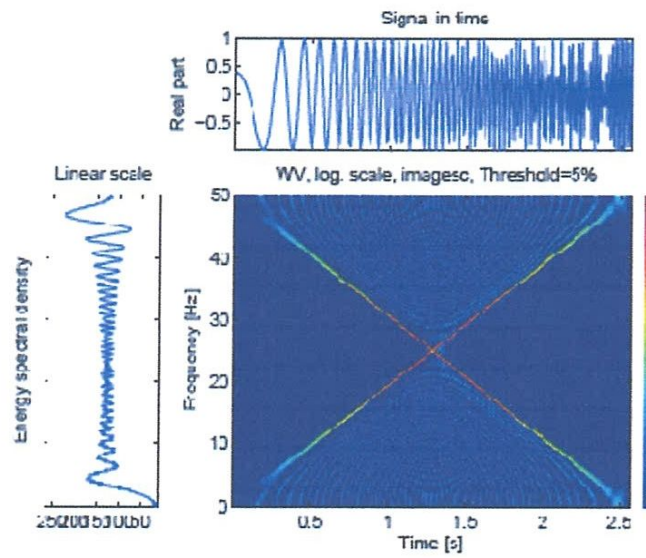


FIGURE 1.7 – Distribution de Wigner-Ville du signal-test chirp linéaire.[10]

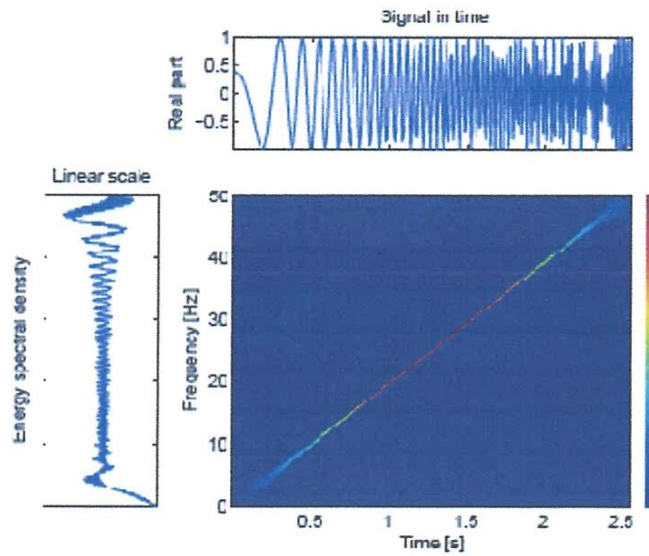


FIGURE 1.8 – Distribution de Wigner-Ville de la version analytique du signal-test chirp linéaire.[10]



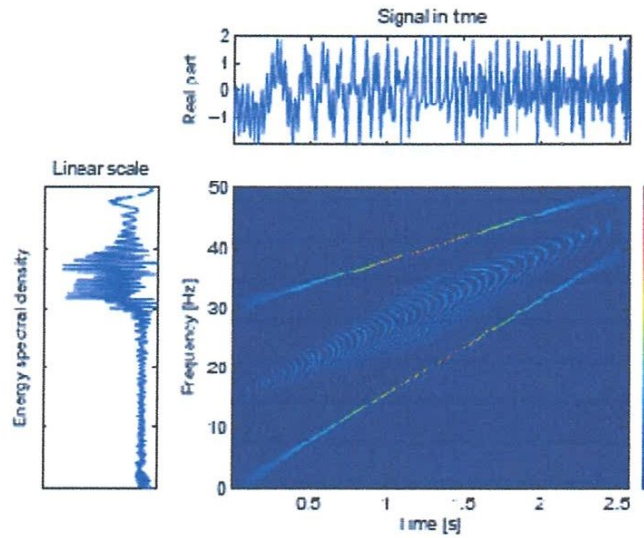


FIGURE I.9 – Distribution de Wigner-Ville de la version analytique du signal-test multi composants.–0.5 [10]

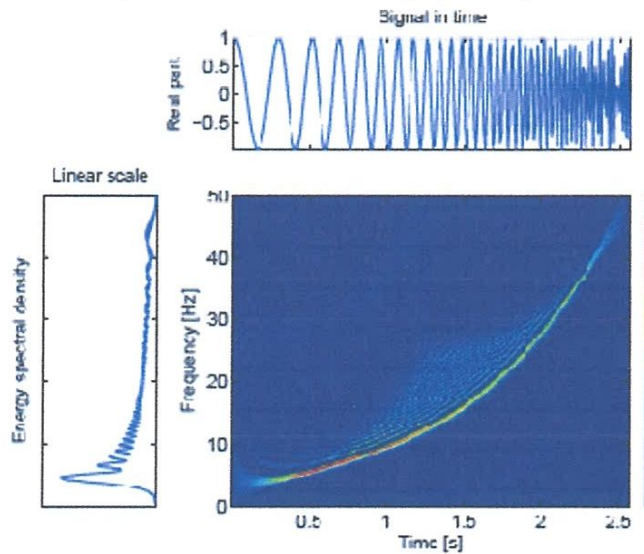


FIGURE I.10 – Distribution de Wigner-Ville de la version analytique du signal-test chirp exponentiel [10]

#### I.4.3.2.3 Autres RTF

De nombreuse RTF ont été imaginées, qui ont un certain nombre de 'bonnes' Propriétés, et quelques mauvaises.

Voici par exemple :

- RIHACZEK-KIRKWOOD

$$R_x(t, f) = x(t). X^*(f). e^{-i2\pi ft} \quad (\text{I-32})$$

- PAGE « Spectre évolutif »

Soit le TF 'évolutive'

$$TF = \int_{-\infty}^t x(u) e^{-i2\pi fu} du \quad (\text{I-33})$$

Puis en considération de son évolution entre 2 instants, on définit la RTF de Page

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t x(u) e^{-i2\pi fu} \right|^2 = P_x(t, f) \quad (\text{I-34})$$

... et bien d'autres !

On montre que toutes ces RTF (y compris celle de Wigner-Ville) découlent d'une seule RTF, définissant la classe de Cohen :

$$C(t, f) = -1/2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\theta t - 2\pi f\tau - \theta u)} \Phi(\theta, \tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dud\theta d\tau \quad (\text{I-35})$$

Toutes les distributions découlent de différents choix du noyau  $\Phi(\theta, \tau)$

- $\Phi(\theta, \tau) = 1$  donne la RTF de Wigner-Ville.
- $\Phi(\theta, \tau) = e^{i\theta\tau/2}$  donne la RTF de Rihaczek
- $\Phi(\theta, \tau) = e^{i\theta|\tau|/2}$  donne la RTF de Page
- $\Phi(\theta, \tau) = e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$  donne la RTF de Choi-Williams, pour laquelle le choix de paramètre  $\sigma$  permet de réduire les termes d'interférences au prix d'une perte de résolution.

La façon dont les propriétés de la RTF sont liées aux propriétés de  $\Phi(\theta, \tau)$  sont maintenant bien comprises [11].

#### I.4.4. Les méthodes temps-échelles

Les méthodes temps-échelles sont basées sur la transformée en ondelettes. Elles consistent à décomposer le signal en une somme d'ondelettes dilatées ou non et localisées temporellement. Notons que les ondelettes sont utilisées soit pour réaliser un débruitage du signal, soit pour réaliser un diagnostic en analyse vibratoire

##### I.4.4.1. La transformée en ONDELETTES (Wavelet Transform : WT)

L'analyse est réalisée au moyen d'une fonction d'analyse spécifique  $\Psi$  appelée ondelette de base. Durant l'analyse, cette ondelette est positionnée dans le domaine temporel pour sélectionner la partie du signal à traiter. Puis, elle est dilatée ou contractée par l'utilisation d'un facteur d'échelle permettant de concentrer l'analyse sur une gamme donnée

d'oscillations. Quand l'ondelette est dilatée, l'analyse regarde les composants du signal qui oscille lentement; quand elle est contractée, l'analyse observe les oscillations rapides comme celle contenues dans une discontinuité de signal. Par ce traitement d'échelle (contraction - dilatation d'une ondelette), la transformée en ondelettes amène à une décomposition temporelle du signal.

La formule utilisée est :

$$S(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) * \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (\text{I.36})$$

avec (b) paramètre de translation et (a) paramètre d'échelle ( $a \neq 0$ )



FIGURE I.11 la WT du  $s(t)$  [7]

La fonction  $S(b, a)$  donne une idée des contributions au signal autour du temps  $b$  et à une échelle  $(a)$ . Il est à noter qu'une telle transformation ne mène pas à une décomposition temps - fréquence mais à une décomposition temps - échelle. Cependant, une ondelette appropriée arrangera ce point et fera de la transformée en ondelettes une transformée temps - fréquence. Les ondelettes sont des fonctions  $\Psi_b, a$  très particulières représentant les oscillations les plus courtes et les plus élémentaires qui puissent être considérées. Le paramètre de localisation temporelle est  $b$  et le paramètre de fréquence est  $1/(a)$ .

$$\Psi_{b,a}(t) = a^{\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{I.37})$$

#### I.4.4.2.L'avantage de la transformée en ONDELETTES.

Cet outil de représentation a clairement l'avantage sur la TFCT de posséder des atomes de différentes tailles dont la révolution en temps et en fréquence varie selon la localisation de l'atome dans le plan temps-fréquence. Cependant, comme nous avons pu le voir précédemment sur la représentation du pavage temps-fréquence, la localisation des différents

atomes selon leur taille est fixée à l'avance. Cet outil malgré les différentes résolutions qu'il autorise, ne permet pas d'adapter cette résolution à un signal donné.

Il va donc s'agir à présent de comprendre les différents problèmes posés par le concept d'adaptativité de la représentation à un signal donné, les différents critères permettant de définir cette adaptativité, ainsi que les outils de représentation permettant de les mettre en œuvre.

# Chapitre II

**Théorie et applications de la transformée de Fourier fractionnaire**

## Chapitre II

### Théorie et applications de la transformée de Fourier fractionnaire

#### II. Introduction

Il est fréquent de voir les espaces temps et fréquences comme deux espaces orthogonaux, le passage de l'un à l'autre s'effectue par la transformée de Fourier. Les distributions temps et fréquences utilisent en effet cette orthogonalité comme principe pour leur représentation dans le plan dit temps fréquences. Pourtant, cette orthogonalité trouve une justification mathématique et il est maintenant possible par l'intermédiaire de la transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) de représenter le signal dans des domaines intermédiaires formant un angle non droit par rapport à l'espace temps.

L'idée de la puissance fractionnaire de l'opérateur de Fourier paraît dans la littérature mathématique dès 1929. Elle a été intégrée par suite en mécanique quantique, en optique et en traitement du signal [12]. Son succès dans les publications a commencé à partir des premières années de 1990. Un état récent de l'art peut être trouvé dans Ozaktas et al. 2001 [13].

#### II.2 La transformée de Fourier classique

Nous en rappelons quelques définitions et propriétés qui sont en rapport avec la transformée de Fourier classique continue (FT) afin que nous puissions justifier notre définition de la transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) plus tard.

Sur une fonction de l'espace  $L^2$  comme par exemple,  $L^2(\mathfrak{R})$  l'opérateur de la transformée de Fourier classique FT  $F : f \rightarrow F$  et son inverse sont donnés par :

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{II.1})$$

Dans les applications du traitement du signal,  $f$  est souvent un signal qui dépend du temps alors  $x$  dénote temps et  $\xi$  fréquence.

Par conséquent  $f(x)$  est une description du domaine temporelle du signal et  $F(\xi)$  une description du domaine fréquentielle.

En outre, il est vérifié immédiatement que  $(F^2 f)(x) = f(-x)$ ,  $(F^3 f)(\xi) = F(-\xi)$  et  $(F^4 f)(x) = f(x)$ . Cela veut dire que pour  $a \in \mathbb{Z}$  nous pouvons identifier l'opérateur  $F^a$  avec une rotation dans le plan  $(x, \xi)$  sur un angle  $\alpha = a \frac{\pi}{2}$ . L'idée de la transformée de Fourier fractionnaire FRFT est de définir l'opérateur  $F^a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Ce sera utile d'introduire quelque notation. Soit  $R_a$  la matrice de la rotation.

$$R_a = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = e^{J\alpha}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

En supposant que  $(x_a, \xi_a)^T = R_a(x, \xi)^T$ , les changeant aux variables complexes  $z = x - i\xi$ , et que  $z_a = e^{i\alpha} z$ . Notant ça avec la notation  $\xi = x_1$ , et en général  $\xi_a = x_{a+1}$ .

La notation  $R_a$  sera aussi utilisée comme un opérateur qui agit sur une fonction de deux variables pour signifier  $R_a f(x, \xi) = f(x_a, \xi_a)$  et pour indiquer que  $R_a(x, \xi) = (x_a, \xi_a)$ .

### II.3 La transformée de Fourier fractionnaire

Ozaktas et al, 2001 [13] donnent six différentes définitions possibles de la FRFT et autres peuvent être trouvées ailleurs. Nous préférons suivre une approche intuitive et le définir comme une extension de  $F^a$  pour  $a \in \mathbb{Z}$  à  $a \in \mathbb{R}$ .

La transformée de Fourier fractionnaire est une généralisation de la transformée de Fourier conventionnelle. Elle dépend d'un paramètre appelé angulaire, et noté  $\theta$ . Lorsque l'on place dans le plan temps-fréquence avec les axes temps-fréquences orthogonaux, la transformée de Fourier d'un signal peut être interprétée comme une rotation d'un angle de  $\pi/2$ . En suivant cette analogie avec les rotations, on va chercher une transformation qui agisse comme une rotation dans le plan temps-fréquence (et qui, par suit, coïnciderait avec la transformée de Fourier fractionnaire, que nous noterons des lors **FRFT** fractionnel Fourier Transforme).

#### II.3.1 Fonctions propres

Comment définir la  $F^a$  pour  $a \in \mathbb{R}$ ? La clef est la décomposition en valeur propre de  $F$ . Il est connu que  $F$  a un ensemble complet de vecteur propre qui couvre  $L^2(\mathbb{R})$ . Puisque  $F^4 = I$ ,

les différentes valeurs propres sont  $\{1, -i, -1, i\}$  chacun avec un espace propre dimensionnel infini. Les vecteurs propres ne sont donc pas uniques, mais un choix possible des fonctions propres orthonormé est donné par l'ensemble des fonctions Hermite-Gauss normalisées:

$$\phi_n(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad \text{ou} \quad H_n(x) = (-i)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}, \quad D = -i \frac{d}{dx}$$

$H_n$  est un polynôme d'Hermite de degré  $n$ . Nous avons  $F\phi_n = \lambda_n \phi_n$  avec  $\lambda_n = e^{-in\pi/2}$ . Donc, à condition que nous définissons correctement  $a$  car  $a \in \mathbb{R}$ , nous pouvons mettre  $F^a \phi_n = \lambda_n^a \phi_n$ , et parce que  $\{\phi_n\}$  est un ensemble complet, cela définit  $F^a$  sur  $L$ .

Si nous définissons l'opérateur d'analyse  $T_\phi$ , l'opérateur de synthèse  $T_\phi^*$  et l'opérateur d'échelle  $S_\lambda$  comme :

$$T_\phi : f \mapsto \{c_n = \langle f, \phi_n \rangle_2\} \quad S_\lambda : \{c_n\} \mapsto \{\lambda_n c_n\}, \quad T_\phi^* : \{d_n\} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} d_n \phi_n$$

$(\langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  Est le produit intérieur dans  $L^2(\mathfrak{R})$  alors c'est clair que nous pouvons écrire :

$$F = T_\phi^* S_\lambda T_\phi \quad \text{et} \quad F^a = T_\phi^* S_\lambda^a T_\phi \tag{II.3}$$

Notons que l'opérateur  $T_\phi$  est unitaire sur  $L^2(\mathfrak{R})$  et que  $T_\phi^*$  est son adjoint.

La formule (II.3) donne une procédure générale pour définir la puissance fractionnaire de tout opérateur qui a un ensemble complet de fonction propre. Cette définition implique que  $F^a$  peut être écrit comme un opérateur exponentiel  $F^a = e^{-iaH} = e^{-ia\pi H/2}$  où l'opérateur Hamiltonien  $H$  est donnée par  $H = \frac{1}{2}(D^2 + U^2 - I)$  avec  $D = -id/dx$ , et  $U$  c'est l'opérateur de translation de  $L^2(\mathfrak{R})$  définie comme :  $(Uf)(x) = xf(x)$  ou  $U = FDF^{-1}$  (voir [13]). La forme de l'opérateur  $H$  peut être calculée aisément par différentiation de la relation

$$e^{-iaH} (e^{-x^2/2} H(x)) = e^{-in\alpha} (e^{-x^2/2} H_n(x)) \tag{II.4}$$

En ce qui concerne  $\alpha$ , mettons  $\alpha = 0$  et utilisons l'équation différentielle A savoir  $(D + 2iU)DH_n = 2nH_n$  qui satisfait aux polynômes d'Hermite.



Notons que cette forme identifie la  $F^a$  comme un opérateur unitaire, et d'où l'égalité de Parseval est contenue dans  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Plusieurs propriétés simples peuvent maintenant être dérivées, l'une la plus formidable est l'existence de  $F^a F^b = F^{a+b}$ , qui reflète la structure de rotation du groupe.

### II.3.2 Représentation intégral

Toute fonction  $f \in L^2(\mathfrak{R})$  peut être étendu comme  $f = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n$ , afin qu'après l'application de  $F^a$  nous ayons  $(F^a f)(\xi) = \left\langle f(x), \sum_n \phi_n(x) \lambda_n^a \phi_n(\xi) \right\rangle_2$ , qui identifie la  $F^a$  comme une transformation intégrale de noyau  $K_a(\xi, x) = \sum_n \phi_n(x) \lambda_n^a \phi_n(\xi) / \sqrt{2\pi}$ . Pour  $a = \pm 1$  il se réduit au noyau de la TF  $K_{\pm 1}(\xi, x) = e^{\mp ix\xi} / \sqrt{2\pi}$ . Pour  $a \neq \pm 1$ , ce n'est pas si simple. Utilisant les valeurs propres et les fonctions propres pour la transformation  $F^a$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K_a(\xi, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ina\pi/2} H_n(\xi) H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-(x^2 + \xi^2)/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-2i\alpha}}} \exp\left\{ \frac{2x\xi e^{-i\alpha} - e^{-2i\alpha}(\xi^2 + x^2)}{1 - e^{-2i\alpha}} \right\} \exp\left\{ -\frac{\xi^2 + x^2}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

Où dans le dernier pas nous avons utilisé la formule de Mehler ([14, p. 244]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ina} H_n(\xi) H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \frac{\exp\left\{ \frac{2x\xi e^{-i\alpha}(\xi^2 + x^2)}{1 - e^{-2i\alpha}} \right\}}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2i\alpha})}}$$

Pour récrire cette expression, nous observons que les identités suivantes détiennent (ils sont vérifiés facilement) :

$$\frac{2x\xi e^{-i\alpha}}{1 - e^{-2i\alpha}} = -ix\xi \csc \alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-2i\alpha}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\hat{\alpha} - \alpha)}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}}$$

$$\frac{e^{-2i\alpha}}{1 - e^{-2i\alpha}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cot \alpha$$

Où  $\hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha)$ . Évidemment, de telles relations ont seulement de sens si  $\sin \alpha \neq 0$ , c'est à dire, si  $\alpha \notin \pi Z$  ou  $a \notin 2Z$ . La branche de  $(\sin \alpha)^{1/2}$  que nous utilisons pour  $\sin \alpha < 0$  est celui avec  $0 < |\alpha| < \pi$ . Avec cette expression, nous obtenons une représentation intégrante plus douce de  $F^a$  pour  $a \notin 2Z$ .

$$f_a(\xi) := (F^a f)(\xi) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha} - \alpha)} e^{\frac{1}{2}\xi^2 \cot \alpha}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i \frac{x\xi}{\sin \alpha} + \frac{i}{2} x^2 \cot \alpha\right\} f(x) dx \quad (\text{II.6})$$

Précédemment nous avons défini  $(F^a f)(x) = f(x)$  Si  $\alpha = 0$ , et  $(F^a f)(\xi) = f(-\xi)$ . Si  $\alpha = \pm\pi$ . C'est logique avec cette représentation intégrale parce que pour ces valeurs spéciales, elle maintient que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{a+\varepsilon} = f_a$ . Donc, avec cette limite propriété, nous pouvons supposer que la représentation intégrale tient sur tout l'intervalle  $\alpha \leq |\pi|$ . Quand  $\alpha > |\pi|$ , la définition est prise modulo  $2\pi$  et sera réduite à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

Définir la FRFT par cette transformation intégrale, nous pouvons dire que la FRFT existe dans  $f \in L^1(\mathfrak{R})$  (et dans  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ ) ou quand c'est une fonction généralisée. En effet, dans ce cas, l'intégrant dans (II.3) est aussi dans  $f \in L^1(\mathfrak{R})$  (et dans  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ ) ou c'est une fonction généralisée. Donc la FRFT existe exactement sous les mêmes conditions comme sous lesquelles la TF existe. Donc nous avons prouvé que :

Supposant  $\alpha = a \frac{\pi}{2}$ , alors la FRFT a une représentation intégrale :

$$f_a(\xi) := (F^a f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\xi, x) f(x) dx \quad (\text{II.7})$$

Le noyau est définie comme suit: pour  $a \notin 2Z$ , et avec  $\hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha)$

$$K_a(\xi, x) = C_a \exp\left\{-i \frac{x\xi}{\sin \alpha} + \frac{i}{2}(x^2 + \xi^2)\cot \alpha\right\} \quad \text{Avec} \quad C_a = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\hat{a}-\alpha\right)}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}} = \sqrt{\frac{1-i \cot \alpha}{2\pi}}$$

Pour  $a \in 4Z$  la FRFT devient l'opérateur identité, d'où  $K_{4n}(\xi, x) = \delta(\xi - x)$ ,  $n \in Z$  et pour  $a \in 2 + 4Z$ , c'est l'opérateur de parité:  $K_{2+4n}(\xi, x) = \delta(\xi + x)$ ,  $n \in Z$ .

Si nous restreignons  $a$  à l'intervalle  $0 < \alpha < 2$ , alors la  $F^a$  est un homomorphisme de  $L^2(\mathfrak{R})$  (avec l'inverse  $F^{-a}$ ). Cela est prouvé par Andrews et al [14].

### II.3.3 Propriétés de la FRFT

Quelques unes des propriétés les plus importantes de la FRFT sont liées aux propriétés de son noyau. Nous allons d'abord étudier quelques propriétés du noyau :

$$K_{\frac{\alpha-\pi}{2}}(\xi, x) = K_{\frac{\alpha-\pi}{2}}(x, \xi) \quad (\text{Symétrie}) \quad (\text{II.8})$$

$$K_{-\alpha}(\xi, x) = [K_{\alpha}(\xi, x)]^* \quad (\text{Self-reciprocity}) \quad (\text{II.9})$$

$$K_{\alpha+2\pi}(\xi, x) = K_{\alpha}(\xi, x) \quad (\text{Périodicité}) \quad (\text{II.10})$$

$$K_{\alpha}(-\xi, x) = K_{\alpha}(\xi, -x) \quad (\text{Renversement des axes}) \quad (\text{II.11})$$

$$\int K_{\alpha_1}(\xi, x_1) K_{\alpha_2}(x_1, x) dx = K_{\alpha_1+\alpha_2}(\xi, x) \quad (\text{Additivité}) \quad (\text{II.12})$$

$$\int K_{\alpha}(\xi, x) [K_{\alpha}(\xi', x)]^* dx = \delta(\xi - \xi') \quad (\text{Complétude}) \quad (\text{II.13})$$

$$\int K_{\alpha}(\xi, x) [K_{\alpha}(\xi, x')]^* d\xi = \delta(x - x') \quad (\text{Orthonormalité}) \quad (\text{II.14})$$

On déduit de ces propriétés sur le noyau  $K$  les propriétés suivantes sur l'opérateur  $F^a$  :

- **Additivité :**

$$F^{\alpha_1} F^{\alpha_2} = F^{\alpha_1+\alpha_2} \quad (\text{II.15})$$

- **Périodicité :**

$$F^{\alpha+2\pi} = F^{\alpha} \quad (\text{II.16})$$

- **La FRFT est une transformation unitaire :**

- **Objectivité :**

$$F^{-\alpha} F^{\alpha} = I \quad (\text{II.17})$$

- **Conservation de l'énergie**

$$\int f_1(x) f_2^*(x) dx = \int F_1^{\alpha}(\xi) [F_2^{\alpha}(\xi)]^* d\xi$$

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |F^{\alpha}(\xi)|^2 d\xi \quad (\text{II.18})$$

En outre, nous allons présenter quelques propriétés de la FRFT liées à certaines opérations sur le signal  $f(x)$ . Là encore, on pourra faire un parallèle avec les propriétés analogues de la transformée de Fourier classique.

- **Propriété de renversement de l'axe :**

$$(F^{\alpha} \{f(-x)\})(\xi) = F^{\alpha}(-\xi) \quad (\text{II.19})$$

- **Propriété du complexe conjugué :**

$$(F^{\alpha} \{f^*(x)\})(\xi) = [F^{-\alpha}(-\xi)]^* \quad (\text{II.20})$$

- **Propriété de translation dans le temps :**

$$(F^{\alpha} \{f(x - \mu)\})(\xi) = F^{\alpha}(\xi - \mu \cos(\alpha)) e^{i\pi\mu^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)} e^{-2i\pi\mu\xi \sin(\alpha)} \quad (\text{II.21})$$

- **Propriété de modulation :**

$$(F^{\alpha} \{f(x) e^{i2\pi\nu x}\})(\xi) = F^{\alpha}(\xi - \nu \sin(\alpha)) e^{2i\pi\nu \cos(\alpha)} e^{-i\pi\nu^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \quad (\text{II.22})$$

- **Propriété de multiplication par  $x$  :**

$$(F^{\alpha} \{xf(x)\})(\xi) = \xi \cos(\alpha) F^{\alpha}(\xi) + \frac{i \sin(\alpha)}{2\pi} \cdot \frac{dF^{\alpha}(\xi)}{d\xi} \quad (\text{II.23})$$

- **Propriété de différenciation :**

$$(F^{\alpha} \{f'(x)\})(\xi) = i2\pi\xi \sin(\alpha) F^{\alpha}(\xi) + \cos(\alpha) \cdot \frac{dF^{\alpha}(\xi)}{d\xi} \quad (\text{II.24})$$

- **Propriété du produit mixte :**

$$(F^\alpha \{xf'(x)\})(\xi) = \sin(\alpha)(i2\pi\xi^2 \cos(\alpha) - \sin(\alpha))F^\alpha(\xi) + \xi \cos(2\alpha) \frac{dF^\alpha(\xi)}{d\xi} + i \frac{\sin(2\alpha)}{4\pi} \frac{d^2 F^\alpha(\xi)}{d\xi^2} \quad (\text{II.25})$$

- **Propriété de division par  $x$  :**

$$\left(F^\alpha \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}\right)(\xi) = -i \frac{2\pi}{\sin(\alpha)} e^{i\pi \cot(\alpha)\xi^2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-i\pi \cot(\alpha)x_0} F^\alpha(x_0) dx_0 \quad (\text{II.26})$$

- **Propriété d'intégration :**

$$\left(F^\alpha \left\{ \int_a^x f(x) dx \right\}\right)(\xi) = \frac{1}{\cos(\alpha)} e^{-i\pi\xi \cot(\alpha)\xi^2} \int_{-\infty}^{\xi} e^{i\pi \tan(\alpha)x^2} F^\alpha(x) dx \quad (\text{II.27})$$

- **FRFT d'un produit :** La FRFT d'un produit de  $f(x)$  par  $g(x)$  est obtenu en multipliant la FRFT par une fonction de pépiement ( chirp), puis en convole avec la TF de  $g$  et enfin on module le tout par une chirp et une constante. On peut se référer par exemple à [15] pour plus de détails.

$$(F^\alpha \{f(x)g(x)\})(\xi) = |\csc(\alpha)| e^{i\pi\xi^2 \cot(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} X^\alpha(v) e^{-i\pi v^2 \cot(\alpha)} \cdot G^\alpha(|(u-v)\csc(\alpha)|) dv \quad (\text{II.28})$$

- **FRFT d'un produit de convolution :** Nous nous référons de nouveau à la référence [15]. Nous prenons de nouveau  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions de  $L^1 \cap W$  et on considère leur convolution :

$$W(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau) d\tau \quad (\text{II.29})$$

Qui est dans  $L^1(\mathfrak{R})$ . Nous en prenons donc la transformée de Fourier classique et nous avons :

$$W(\xi) = F(\xi)G(\xi) \quad (\text{II.30})$$

Avec  $F$  et  $G$  dans  $L^1 \cap W$ . On sait que  $W^\alpha$  est la FRFT de  $W$  d'angle  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . Nous

utilisons donc directement la formule (29) et nous obtenons alors :

$$W^\alpha(\xi) = |\sec(\alpha)| e^{i\pi\xi^2 \tan(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} F^\alpha(v) e^{-i\pi v^2 \tan(\alpha)} \cdot g([(u-v)\sec(\alpha)]) dv \quad (\text{II.31})$$

La FRFT d'un produit de convolution est donc obtenue en prenant la FRFT d'un des signaux, puis on la multiplie par une chirp et on convole par une « dilatation » de l'autre fonction et enfin en modulant le résultat par une chirp et une constante.

### II.3.4 FRFT de fonctions usuelles

Maintenant que nous avons donné la définition et quelques propriétés essentielles de la FRFT, on donne dans ce paragraphe, les transformées de Fourier fractionnaires de certaines fonctions usuelles.

Tableau 1 : La transformée de Fourier fractionnaire de quelque fonctions élémentaires.		
	$f(u)$	$F^\alpha(u)$
1	$\delta(u - \gamma)$	$\sqrt{\frac{1+i \cot \alpha}{2\pi}} e^{i\frac{1}{2}(\gamma^2 \cot \alpha - 2u\gamma \csc \alpha + u^2 \csc^2 \alpha)}$ , si $a \notin 2Z$
2	1	$\sqrt{\frac{1+i \cot \alpha}{2\pi}} e^{-i\frac{1}{2} \tan \alpha}$ , si $a \notin 2Z + 1$
3	$e^{\frac{1}{2}(\chi u^2 + 2\gamma u)}$	$\sqrt{\frac{1+i \tan \alpha}{1+\chi \tan \alpha}} e^{i\frac{u^2(\chi - \tan \alpha) + 2u\gamma \csc \alpha - \gamma^2 \tan \alpha}{2(1+\chi \tan \alpha)}}$ , si $a - \frac{2}{\pi} \arctan \chi \notin 2Z + 1$
4	$e^{\frac{1}{2}(\chi u^2 + 2\gamma u)}$	$\sqrt{\frac{1+i \tan \alpha}{1+\chi \tan \alpha}} e^{\frac{1}{2} \cot \alpha \frac{u^2(\chi^2 - 1) + 2u\gamma \csc \alpha - \gamma^2}{\chi^2 + \cot^2 \alpha}} e^{-\frac{1}{2} \csc^2 \alpha \frac{u^2 \chi + 2u\gamma \cos \alpha - \gamma^2 \sin^2 \alpha}{\chi^2 + \cos^2 \alpha}}$ si $\chi > 0$
5	$\phi_1(u)$	$e^{i\alpha} \phi_1(u)$
6	$e^{-\frac{u^2}{2}}$	$e^{-\frac{u^2}{2}}$

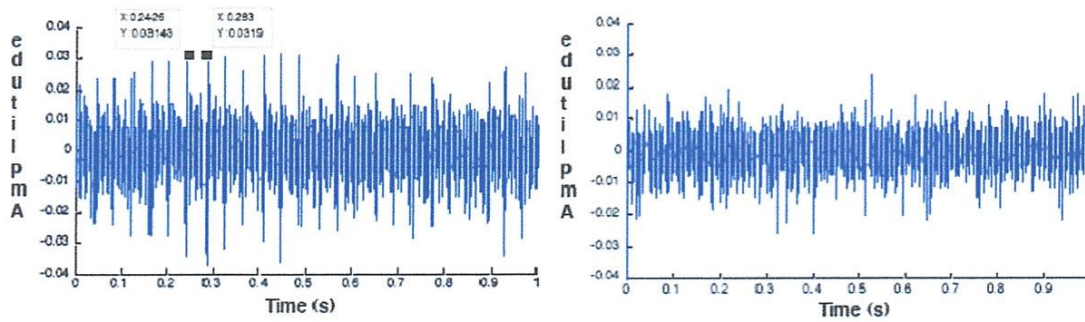
#### **II.4 la FRFT dans l'analyse spectrale**

Les signaux vibratoires sont très sensibles aux défauts et ils sont souvent utilisés pour la détection des défauts dans les machines. Comment extraire efficacement le signal du défaut de l'équipement ou comment améliorer le rapport signal sur bruit (S/N) actuellement c'est le problème principal de la recherche dans le domaine de détection de défauts dans les machines tournantes. Plusieurs méthodes de traitement de signal tel que la transformation en ondelette (WT) [16], l'algorithme génétique (GA) [17] et les réseaux de neurones (artificial neural network ANNE) ont été proposés pour supprimer ou minimiser le bruit.

La suppression du bruit adaptatif (Adaptive noise cancelling ANC) est une méthode efficace pour estimer le signal quand il est corrompu par un bruit additif [18]. L'efficacité de l'amélioration du signal dépend du degré de corrélation entre le signal de référence et le bruit contenu dans le signal fondamental. Pour une meilleure efficacité, plusieurs algorithmes pour la détermination des paramètres des filtres adaptatifs ont été proposés, par exemple l'algorithme de la méthode des moindres carrés, l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS) dans le domaine fréquentielle et ainsi de suite.

La transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) appartient à la classe des représentations temps fréquence qui ont été largement utilisées dans le domaine du traitement de signal pour extraire les composants utiles du signal d'un bruit compliqué et des données d'interférences [16-17]. Un ordre de transformation fractionnaire optimal doit correspondre simultanément à une densité d'énergie et intensité optimale du signal dans le domaine temporel et fréquentiel [17].

Shao et al, 2005 [18] ont proposé un filtre adaptatif basé sur la transformée de Fourier fractionnaire pour supprimer le bruit des signaux vibratoires et de mettre en valeur les composants du signal provenant des défauts dynamiques des machines. L'approche compte sur l'usage des filtres adaptatifs dans le domaine de la transformée de Fourier fractionnaire en optimisant l'ordre de la transformation et les paramètres du filtre. L'ordre de la transformation est choisi quand le signal rassemble la plus haute énergie et les paramètres du filtre sont déterminés par les règles évolutionnaires. Pour confirmer la performance de l'algorithme proposé, les auteurs ont mené une étude expérimentale sur une boîte de transmission qui contient des engrenages avec des défauts. La figure suivante (II.2) montre le résultat de l'algorithme proposé sur le signal recueilli.



a- Signal après l'utilisation de l'algorithme Proposé    b- Signal après l'utilisation de l'algorithme LMS

**Figure II.1.** Signal de sortie après l'application différents algorithmes adaptatifs [18]

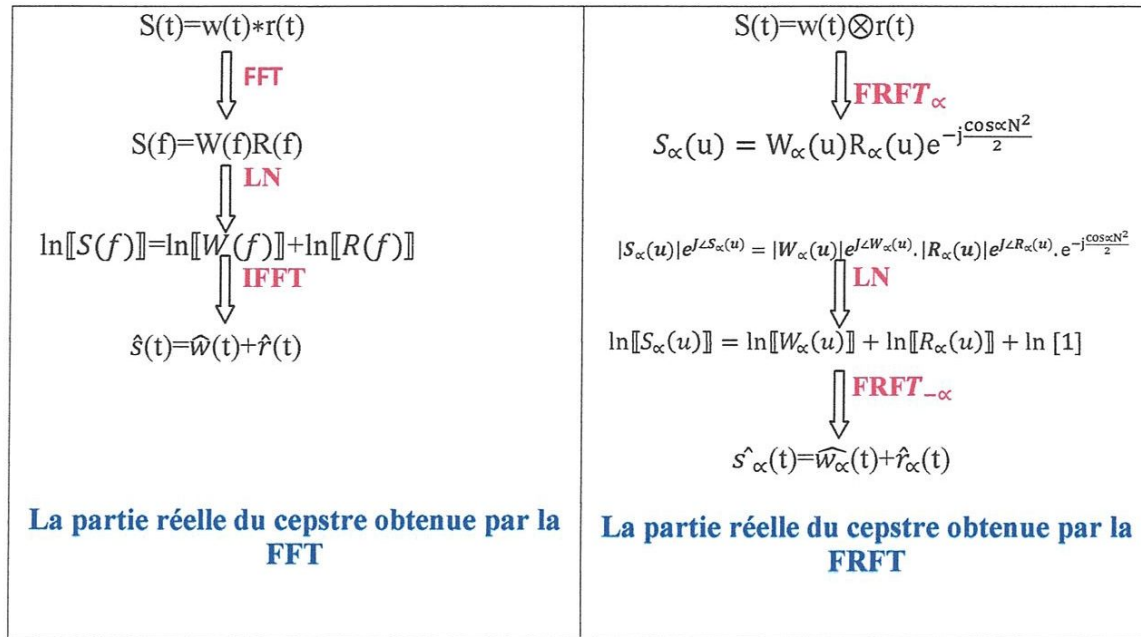
### II-5 La FRFT dans l'analyse cepstral

En général, l'inverse de la transformation de Fourier du logarithme de la transformation de Fourier d'un signal est la représentation de ce signal dans le domaine cepstral.

L'opération de convolution de deux signaux dans le domaine temporelle devient une addition dans le domaine cepstral. La transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) est la généralisation de la transformation de Fourier standard (FT). Dans une transformation de Fourier fractionnaire FRFT, le noyau de la transformation est un ensemble de chirps (pépiements) linéaires alors qu'il est composé de sinusöide complexe dans la transformation de Fourier FT. Selon l'ordre fractionnaire, les signaux peuvent être représentés dans des domaines multiples, ce qui donne un degré de liberté supplémentaire à la FRFT dans le traitement du signal par rapport à la transformée de Fourier standard.

Admettons que  $S(t)$  formé par le produit de convolution de deux fonctions différentes,  $w(t)$  et  $r(t)$ . La représentation de la partie réelle de  $s(t)$  dans le domaine cepstral par la transformée de Fourier standard et la transformée de Fourier fractionnaire est comme suit:





Exemple de cepstre de deux signaux [19]

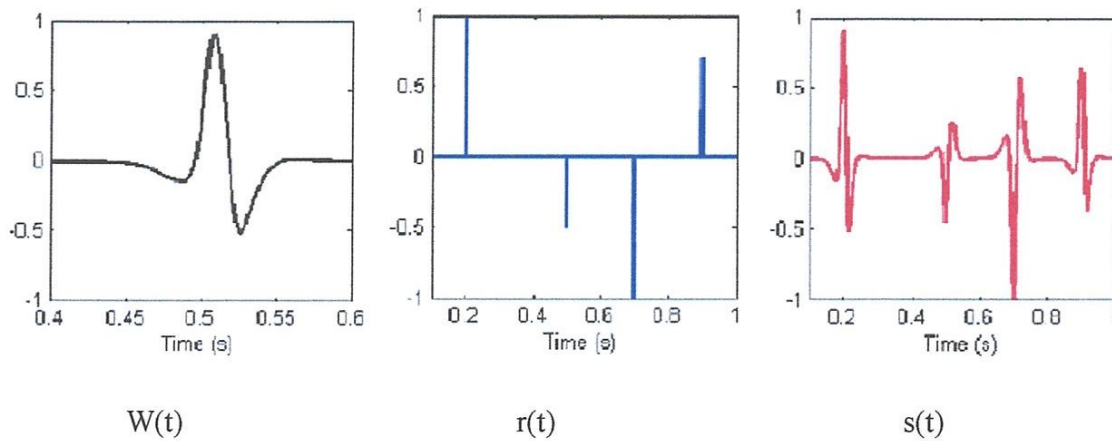
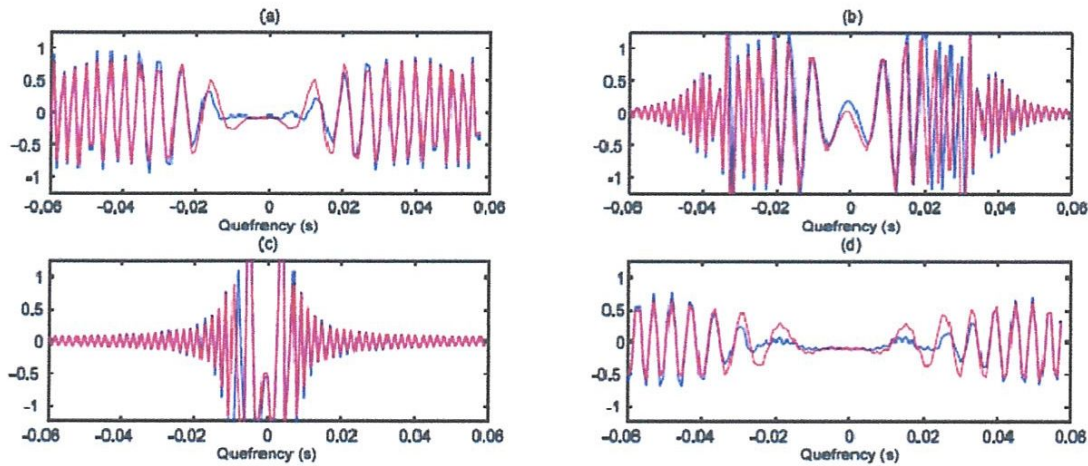


Figure II.2 : Le signal s(t) utilisé pour l'analyse cepstral [19]



**Figure II.3** : La représentation cepstral de  $s(t)$  selon les ordres fractionnaires  
 a) :  $\alpha=0.9$  ; b) :  $\alpha=0.95$  ; c) :  $\alpha=0.99$  ; d) :  $\alpha=1.15$  [19]

### II.6. La transformée de Fourier fractionnaire à court terme

Dans les problèmes réels un signal n'est pas linéairement modulé. Il peut même être multicomposant. Néanmoins, si les fréquences instantanées des composantes du signal changent lentement dans la direction d'une certaine ligne dans le plan temps-fréquence (nous nous référons à cette ligne comme axe principal), nous pouvons trouver les domaines fractionnaires où le signal est mieux concentré ou mieux se propager. Afin de trouver ces domaines fractionnaires avec un minimum de coûts informatiques, conduisant à des améliorations possibles dans les représentations temps-fréquence, nous allons utiliser les moments de la transformée de Fourier fractionnaires du signal.

La TFCT a été introduit pour une meilleure localisation temporelle des fréquences contenu dans un signal  $x(t)$ , par l'utilisation d'une Fenêtre adaptée  $g(t)$ :

$$TFCT[x](t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) g^*(t_0) \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \quad (\text{II.32})$$

Certes, pour filtrer un signal purement sinusoïdal, on a besoin d'une fenêtre large, tandis que pour le filtrage d'une impulsion delta comme signal, une fenêtre étroite doit être appliquée.

Donc, nous pouvons ajuster la fenêtre si la forme du signal est connue. Supposons maintenant que la Largeur minimale du signal ne correspond pas à la direction du temps ou de fréquence, puis nous pouvons voir que d'une transformation affine du plan de phase conduit à une représentation optimale du signal (par exemple, la largeur minimale).

Afin de représenter un signal dans un nouveau système de coordonnées, nous utilisons le fait que la rotation dans le plan temps-fréquence correspond à la transformée de Fourier fractionnaire du signal. La Transformée de Fourier fractionnaire d'une fonction  $x(t)$  peut être défini comme [20].

$$FrFT[x]_a(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, f)x(t)dt \quad (\text{II.33})$$

Où le noyau  $k_\alpha(t, f)$  est donnée par :

$$k_\alpha(t, f) = \frac{\exp(j\alpha/2)}{\sqrt{j\sin\alpha}} \exp\left(j\pi \frac{(t^2+f^2)\cos\alpha - 2tf}{\sin\alpha}\right) \quad (\text{II.34})$$

en outre, avec la relation de rotation de type :

$$\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Nous avons la relation suivante pour le noyau de la transformée de Fourier fractionnaire :

$$K(\alpha, t_0, u - u_0) \exp(j2\pi u_0 v) \exp(-j\pi uv) = [K(-\alpha, u_0, t - t_0) \exp(j2\pi t_0 f) \exp(-j\pi t f)]^* \quad (\text{II.36})$$

Prenons, la transformée de Fourier à court terme de  $x(t)$ , définie par :

$$\begin{aligned} ST_x^\alpha(u, v) &= ST_{X_\alpha}(u, v) \quad (\text{II.37}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_\alpha(u + u_0)g^*(u_0) \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 = \int_{-\infty}^{\infty} R_x^\alpha(u + u_0)[R_g^0(u_0)]^* \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 \end{aligned}$$

De la relation (II.36) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\exp(-j\pi uv) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_x^\alpha(u + u_0)[R_g^0(u_0)]^* \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 \\ &= \exp(-j\pi t f) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_x^\alpha(t + t_0)[R_g^{-\alpha}(t_0)]^* \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \quad (\text{II.38}) \end{aligned}$$

Et de la dernière identité, nous concluons que la transformée de Fourier fractionnaire à court terme de  $x(t)$  dans le domaine fractionnaire  $\alpha$  peut ainsi être calculé directement en tant que TFCT normale du signal  $x(t)$  en utilisant une fenêtre qui est la TF fractionnaire de la première fenêtre  $g(t)$ , suivie par la rotation du système de coordonnées:

$$ST_x^\alpha(u, v) = \exp [j\pi(uv - tf)] * \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) [R_g^{-\alpha}(t_0)]^* \exp (-j2\pi t_0 f) dt_0 \quad (\text{II.39})$$

Où  $u, v$  et  $t, f$  sont liés par la relation (II.35).

### II.6.1. Estimation de la largeur du signal à partir des moments dans le domaine fractionnaire

La largeur d'un signal dans le domaine temporel ou dans le domaine de fréquence peut être estimée à partir de son moment central du second ordre [20].

Le moment central du second ordre dans le domaine fractionnaire  $p_\alpha$  est définie par :

$$P_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 (t - m_\alpha)^2 dt = (w_\alpha - m_\alpha^2) \quad (\text{II.40})$$

Où le moment du premier ordre :

$$m_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 t dt$$

Est liée au centre de gravité du spectre de puissance fractionnaire :

$$w_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 t^2 dt$$

Le moment de premier ordre  $m_\alpha$  dans un domaine fractionnaire défini par un angle arbitraire  $\alpha$  peut être calculé à partir de la relation

$$m_\alpha = m_0 \cos \alpha + m_{\pi/2} \sin \alpha \quad (\text{II.41})$$

Où  $m_0$  et  $m_{\pi/2}$  sont des moments du premier ordre dans le domaines temporelle et le domaine fréquentielle, respectivement. En outre, tout moments du second ordre  $W_\alpha$  peut être obtenu à partir de trois autres moments  $W_\beta, W_\gamma,$  et  $W_\mu$ , par exempte, si les angles  $\beta, \gamma, \mu, t$  ne sont pas les

mêmes, et la différence entre eux n'est pas égal a  $\pi$  [20]. En utilisant les résultats de Jubisa et al (2002) [20] nous avons:

$$w_{\alpha} = w_0 \cos^2 \alpha + w_{\pi/2} \sin^2 \alpha + \left[ w_{\pi/4} - \frac{(w_0 + w_{\pi/2})}{2} \right] \sin 2 \alpha \quad (\text{II.42})$$

Tenant compte des équations. (II.40), (II.41), et (II.42). Nous concluons que les trois spectres de puissance fractionnaire FT permettent de calculer le moment central du second ordre  $p_{\alpha}$ , qui caractérise la largeur du signal dans les domaines fractionnaire correspondants:

$$\begin{aligned} p_{\alpha} &= (w_0 - m_0^2) \cos^2 \alpha + (w_{\pi/2} - m_{\pi/2}^2) \sin^2 \alpha + \left[ w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2} - \frac{(w_0 + w_{\pi/2})}{2} \right] \sin 2 \alpha \\ &= p_0 \cos^2 \alpha + p_{\pi/2} \sin^2 \alpha + \left[ w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2} - \frac{(w_0 + w_{\pi/2})}{2} \right] \sin 2 \alpha \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Afin de trouver le domaine fractionnaire où le signal a une largeur extreme (minimale ou maximale), nous étudions le comportement des dérivés de  $p_{\alpha}$ . Il est facile de voir a partir de l'équation, (II.43) que la première dérivée de  $p_{\alpha}$ ,

$$\frac{dp_{\alpha}}{d\alpha} = (p_{\pi/2} - p_0) \sin 2 \alpha + [2(w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (w_0 + w_{\pi/2})] \cos 2 \alpha$$

Est égal à zéro pour la valeur de  $\alpha$  donnée par :

$$\tan 2 \alpha_e = \frac{2(w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (w_0 + w_{\pi/2})}{p_0 - p_{\pi/2}} \quad (\text{II.44})$$

Puisque la FT fractionnaire est périodique avec une période de  $2\pi$  (sauf pour un facteur possible -1) et répond a la demi-période par la relation  $R_{\alpha+\pi}^x(t) = R_{\alpha}^x(-t)$  la largeur du signal prend un minimum et une valeur maximale une seule fois dans l'intervalle  $\alpha \in [0, \pi]$ .

A partir du comportement de la dérivée deuxième de  $p_{\alpha}$  pour :

$$\alpha = \alpha_e, \left. \frac{d^2 p_{\alpha}}{d\alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_e} = 2(p_{\pi/2} - p_0) / \cos 2 \alpha_e$$

Nous concluons que le signal atteint sa largeur minimale pour la valeur  $\alpha_e$ , pour laquelle

$\cos 2\alpha_e$  a le même signe que  $p_{\pi/2} - p_0$ ; l'autre valeur de  $\alpha_e$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$  correspond alors à la largeur maximale. Ainsi, le domaine fractionnaire approprié où le signal est mieux concentré, peut être trouvée à partir de la connaissance de seulement trois spectres de puissances fractionnaires.

# Chapitre III

Étude comparative d'algorithmes d'analyse des signaux non stationnaires par  
Transformée de Fourier fractionnaire

### Chapitre III

#### Etude comparative d'algorithmes d'analyse des signaux non stationnaires par Transformée de Fourier Fractionnaire

##### III.1. Introduction

Malgré son immense succès, la technique de *la transformée de Fourier* a plusieurs limites, en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effets, l'analyse de *Fourier* permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises.

Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité est un inconvénient pour l'étude de signaux non-stationnaires.

De plus l'analyse de *Fourier* ne permet pas l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps. De tels signaux nécessitent la mise en place d'une analyse *temps-fréquence* [7] qui permettra une localisation de périodicités dans le temps et indiquera donc si la période varie d'une façon continue ou si elle disparaît puis réapparaît par la suite.

##### III.2. Plan et les outils de travail :

###### III.2.1 Signal test

Le signal utilisé pour les tests est d'écrits ci-dessous. Nous avons volontairement choisi un signal non-stationnaire modulé en fréquence de manière relativement rapide afin de simuler un signal mécanique.

$$x(t) = \exp[-(3t)^8] \left\{ \exp \left[ j \left( 192\pi t^2 - \frac{8 \cos(4t)}{\pi} \right) \right] + \exp \left[ j \left( 64\pi t^2 - \frac{8 \cos(4t)}{\pi} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.1})$$

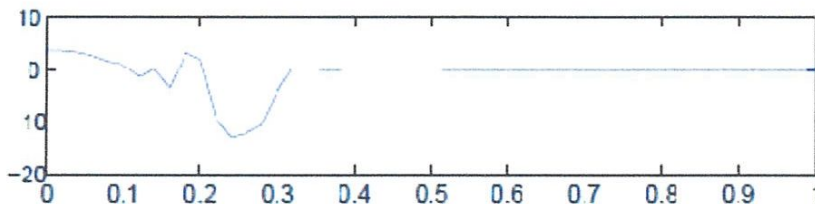


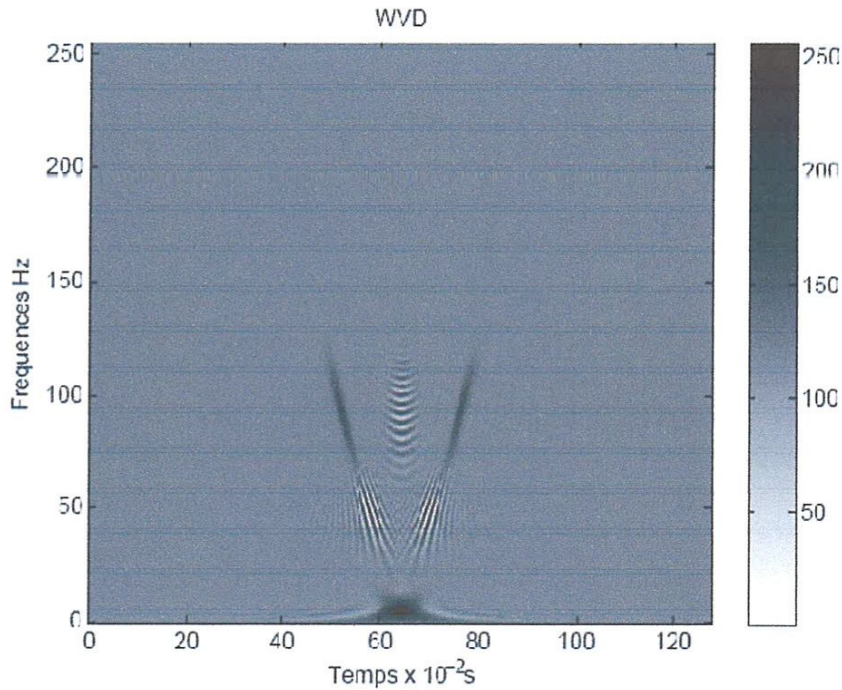
Figure (III,1) présentation le signal test



### III.2.2. Représentation temps-fréquences

#### III.2.2.1 La distribution de Wigner Ville

Nous avons choisis en premier de représenter le signal  $s(t)$  par la distribution de Wigner ville qui sert comme référence, sachant que l'intérêt pour la DWV est plutôt théorique car cette transformation est le point de départ de la plupart des approches destinées à réduire les termes d'interférences et qui font partie de la classe de Cohen.



**Figure (III.2) :** représentations DWV du signal  $x(t)$

Le signal test est composé de deux modulations d'amplitude (MA) avec une enveloppe exponentielle et de même fréquences porteuses. La DWV de ce signal contient, mis à part les termes utiles, des termes d'interférences avec une structure oscillante et une amplitude déférentes de l'amplitude des termes propres, située au milieu du segment formé par les deux atomes et dont la fréquence est proportionnelle à la distance les séparant. Ces interférences se sommeront de manière cohérente pour un chirp linéaire produisant ainsi une représentation idéale, si l'intégration est infinie. Si le signal diffère d'un chirp linéaire, qui est le cas de notre signal test, les résidus de la somme formeront les interférences. L'existence de ces termes peut affecter le processus de décision.

### III.2.2.2 La transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) et spectrogramme

Afin d'analyser ses propriétés locales, nous pouvons cependant concentrer notre étude sur une portion particulière du signal en le pondérant par une fenêtre  $\omega$ . On définit ainsi la TFCT :

$$TFCT[s](t, f) = FFT(s(t + \tau)\omega(\tau)) \quad (III.2)$$

Sous ces conditions, nous calculons le spectre du signal autour de l'instant  $t$  et sur le support où  $\omega$  est le plus énergétique. On souhaiterait naturellement réduire la taille de la fenêtre au maximum pour obtenir une bonne localisation temporelle. Cependant, un compromis est nécessaire car la réduction de la taille de la fenêtre implique l'élargissement de son spectre et donc une perte de localisation fréquentielle. Ce phénomène est décrit par le principe d'incertitude d'Heisenberg.

$$\Delta t. \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (III.3)$$

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que le besoin en lisibilité de la représentation implique une taille maximale pour la fenêtre afin que le signal soit approximativement stationnaire sur cette dernière.

Le spectrogramme, défini comme le module au carré de la TFCT, fournit une représentation de la densité spectrale de puissance à un instant donné :

$$SG[s](t, f) = |TFCT[s](t, f)|^2 \quad (III.4)$$

#### III.2.2.2.1 Algorithme de la TFCT

Les étapes de l'algorithme de la Transformée de Fourier à Court termes sont comme suit :

**Etape 1 :** Lecture des paramètres : - Type de la fenêtre d'analyse.

- Largeur de la fenêtre.

**Etape 2 :** Initialisation  $m=0$

**Etape 3 :** Convoluer le signal avec la fenêtre d'analyse.

Calculer la transformée de Fourier du résultat.

Répéter jusqu'à  $m=N$  ( $N$  : nombre d'échantillons).

**Etape 4 :** Tracer le résultat.

### III.2.2.2.2 Les fenêtres

Hanning:

$$w(n) = 0.5(1 - \cos(2\pi \frac{n}{N})) \quad (\text{III.5})$$

$$0 \leq n \leq N$$

$$L = N + 1$$

Hamming:

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi \frac{n}{N}) \quad (\text{III.6})$$

$$0 \leq n \leq N$$

$$L = N + 1$$

Blackman:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(2\pi \frac{2n}{N}\right) \quad (\text{III.7})$$

$$0 \leq n \leq N$$

$$L = N + 1$$

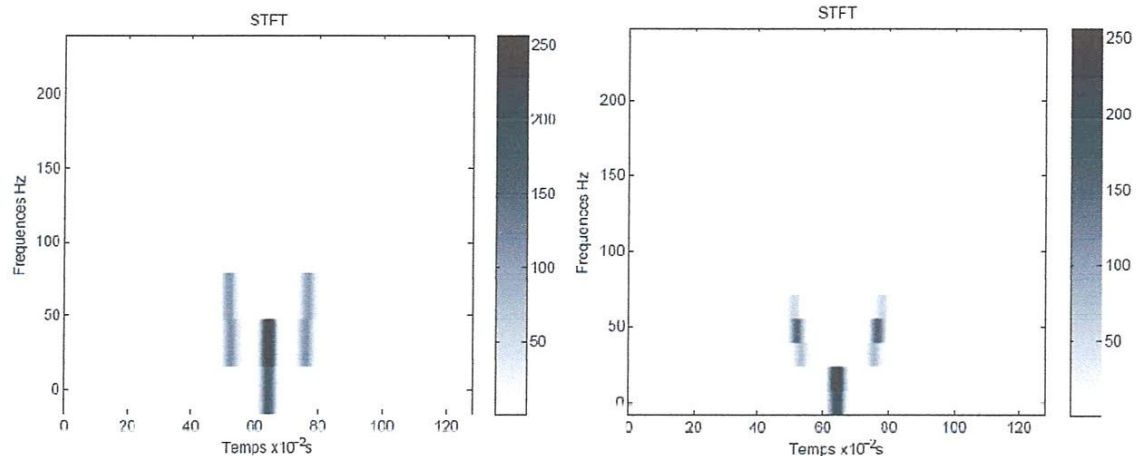
Gauss :

$$w(k+1) = e^{-1/2(\alpha \frac{k-N/2}{N/2})^2} \quad (\text{III.8})$$

$$0 \leq k \leq N$$

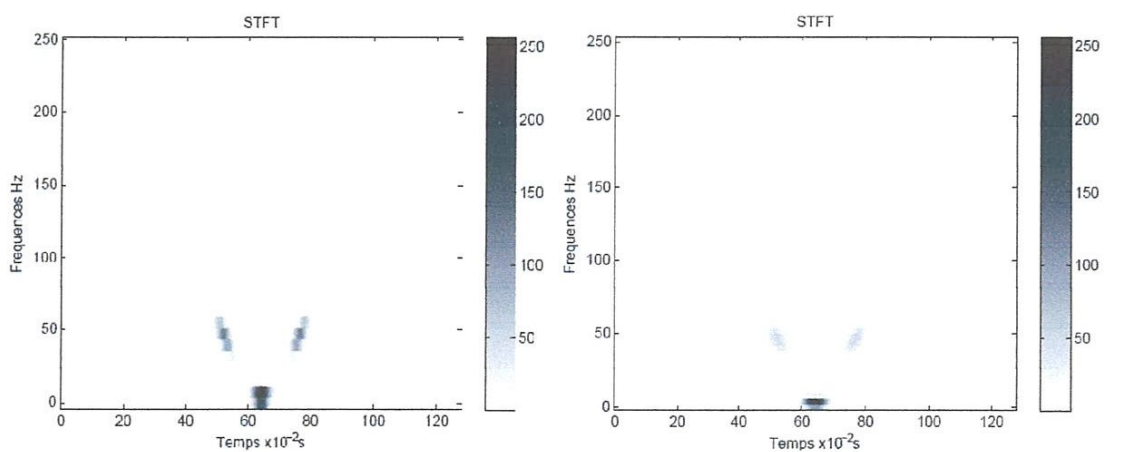
$$\alpha \geq 2$$

La figure III.3 illustre l'influence de la longueur de la fenêtre sur la représentation temps-fréquence de notre signal test: selon Hanning entre L=8 et L=128



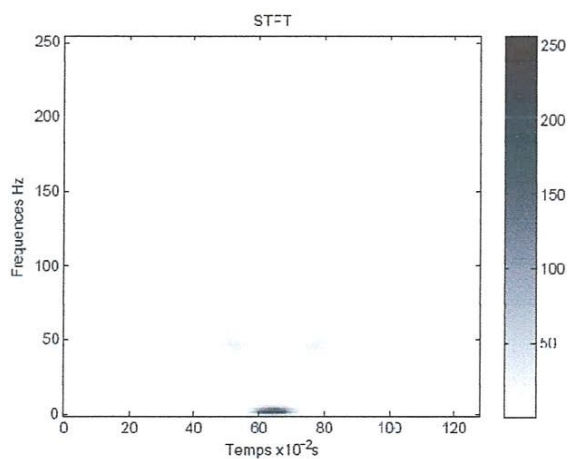
a- Fenêtre de Hanning L=8

b- Fenêtre de Hanning L=16



c- Fenêtre de Hanning L=32

d- Fenêtre de Hanning L=64



e- Fenêtre de Hanning L=128

Figure III.3 Influence de la largeur de la fenêtre sur les représentations Temps-fréquence

Dans cette représentation,  $\omega$  est une fenêtre de Hanning. Sur la figure III.3.a et b, la fenêtre est un peu courte provoquant ainsi une mauvaise résolution fréquentielle. Sur la figure III.3.c la taille de fenêtre est relativement bien choisie car la représentation illustre bien la nature exponentielle du signal choisi. Sur les figures III.3.d et e, la fenêtre est trop large et sur celle-ci, l'hypothèse de stationnarité n'est plus vraiment valide.

### III.2.2.3 La transformée de Fourier Fractionnaire à Court Termes (TFRCT) et spectrogramme

Dans cette partie, nous appliquons la transformée de Fourier Fractionnaire à court terme a notre signal test afin de comparer les résultats obtenus avec la transformée de Fourier à court terme ordinaire et la distribution de Wigner Ville.

La transformée de Fourier Fractionnaire à court terme  $TFRCT[s](t, f)$  dans le domaine fractionnaire  $\alpha$  peut ainsi être calculé directement en tant que TFCT ordinaire du signal  $S(t)$  convoluer par une fenêtre  $W_\alpha(\tau)$  qui est la Transformée de Fourier Fractionnaire de la première fenêtre  $\omega(\tau)$ , d'après l'équation ci-dessus :

$$TFRCT[s](t, f) = FFT(s(t + \tau).TFR_\alpha[\omega(\tau)]) \quad \text{(III.8)}$$

Ou

$$TFRCT[s](t, f) = FFT(TFR_\alpha[s(t + \tau)].\omega(\tau)) \quad \text{(III.9)}$$

#### III.2.2.3.1 Calcul de la Transformée de Fourier Fractionnaire de la fenêtre

Afin de trouver le domaine Fractionnaire optimal, conduisant à des améliorations possibles dans la représentation temps-fréquence et de trouver la TFRCT correspondante, l'analyse des moments fractionnaire est appliqué. En particulier, un domaine fractionnaire optimal correspond à une largeur minimale du signal, c'est à dire, à une valeur minimale du moment fractionnaire du second ordre.

Le Calcul de ce moment peut être fait analytiquement, selon la formule suivante :

$$p_\alpha = \left( p_0 + \cos^2\alpha + p_{\frac{\pi}{4}} \sin^2\alpha \right) + \left[ q_{\frac{\pi}{4}} - m_0 m_{\frac{\pi}{2}} - \left( q_0 + q_{\frac{\pi}{2}} \right) / 2 \right] \cos^2 2\alpha \quad \text{(III.10)}$$

La première dérivée de cette dernière équations s'annule quand le signal atteint sa largeur minimale.

$$\frac{dp_\alpha}{d\alpha} = (p_{\pi/2} - p_0) \sin 2\alpha + [2(q_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (q_0 + q_{\pi/2})] \cos 2\alpha = 0 \quad \text{(III.11)}$$

Ce qui permet de calculer l'angle de transformation fractionnaire de la fenêtre.

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2(q_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (q_0 + w q_{\pi/2})}{p_0 - p_{\pi/2}} \quad \text{(III.12)}$$

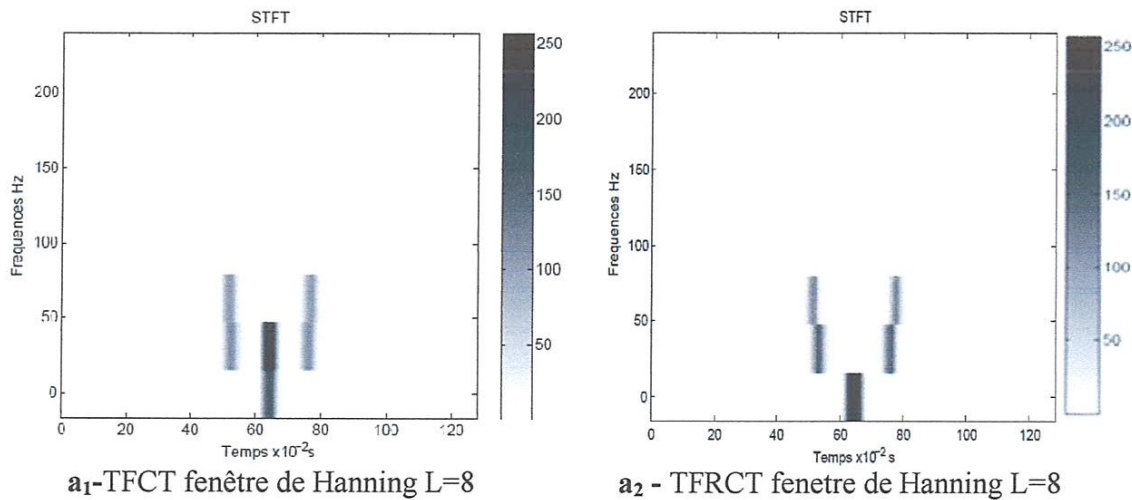
Les valeurs des moments centraux de second ordre [normalisées par rapport au moment d'ordre zéro]  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ , sont  $p_0 = 1$ ,  $p_{\pi/2} = 1.38$ ,  $p_{\pi/4} = 0.07$ , selon l'équation (III.12) l'angle de transformation est  $\alpha_e = 41^\circ$ . Le calcul du moment du second ordre dans cette direction donne  $p_{41^\circ} = 0.057$  Il est plus petite que dans tout autre direction, tandis que le moment du second ordre dans la direction orthogonal est le plus grand  $p_{-49^\circ} = 2.01$ .

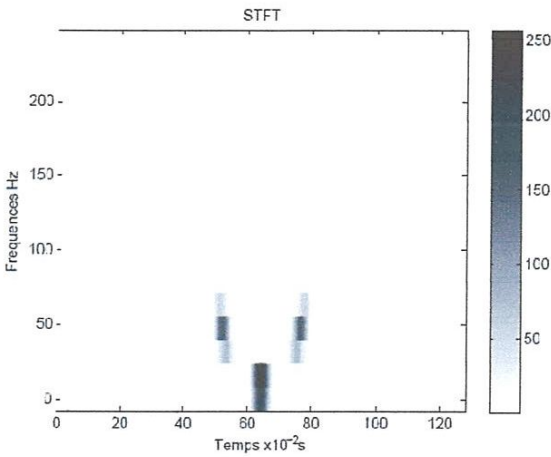
Maintenant, calculons la Transformée de Fourier Fractionnaire de la fenêtre de Henning a un angle  $\alpha = \alpha_e - \frac{\pi}{2} = -49^\circ$ .et ensuite introduisant la fenêtre dans l'algorithme de la TFRCT ordinaire.

Le spectrogramme d'ordre fractionnaire sous sa forme discrète, est donné par :

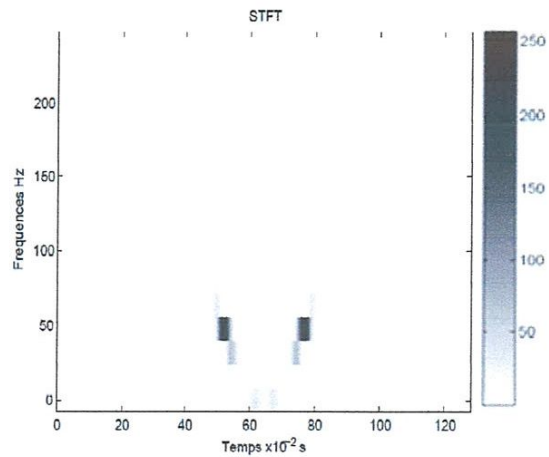
$$SG_\alpha[s](t, f) = |TFRCT[s](t, f)|^2 + 2\text{Real} \left\{ \sum_{m=1}^{Nz} TFRCT[s](n, k + m) TFRCT[s]^*(n, k - m) \right\} \quad \text{(III-13)}$$

La figure III.4 illustre l'influence de la longueur de la fenêtre sur la représentation temps-fréquence de notre signal test:

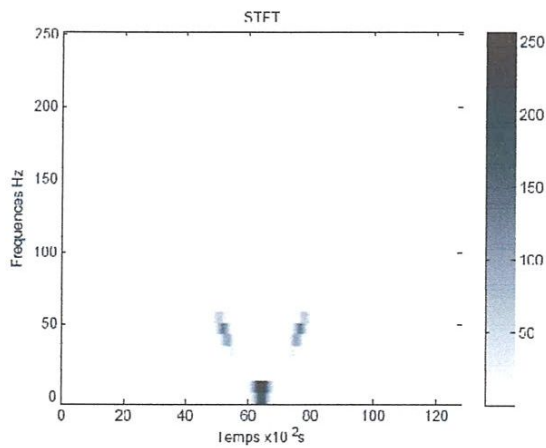




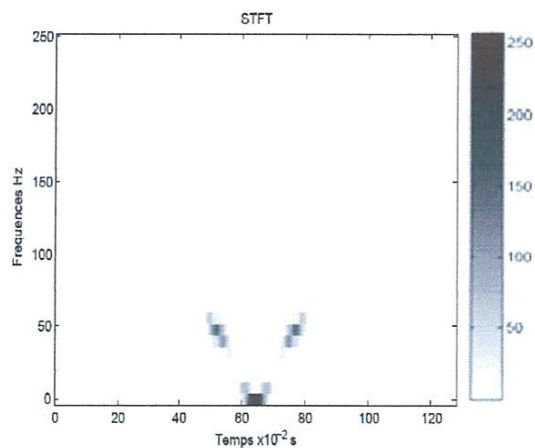
**b<sub>1</sub>**- TFCT fenêtre de Hanning L=16



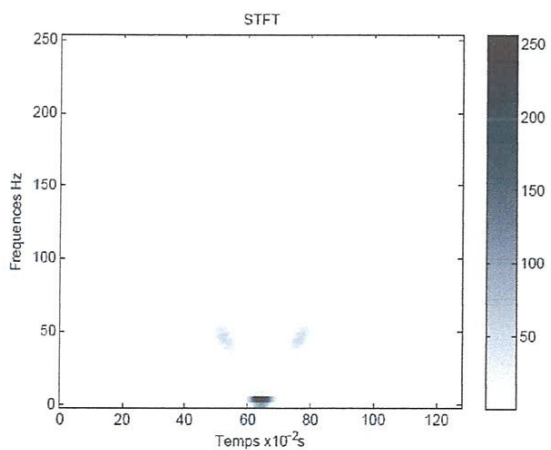
**b<sub>2</sub>**- TFRCT fenêtre de Hanning L=16



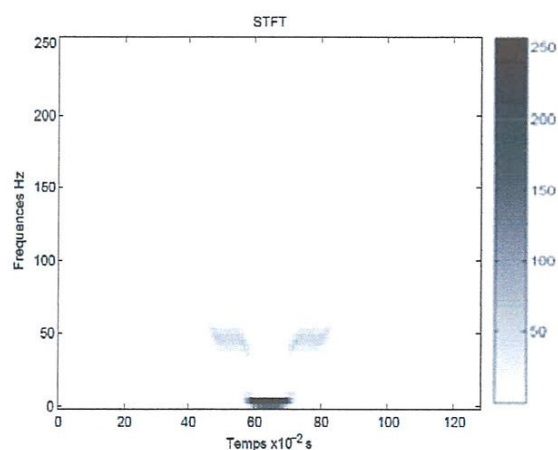
**c<sub>1</sub>**- TFCT fenetre de Hanning L=32



**c<sub>2</sub>**- TFRCT fenêtre de Hanning L=32



**d<sub>1</sub>**- TFCT fenetre de Hanning L=64



**d<sub>2</sub>**- TFRCT fenêtre de Hanning L=64

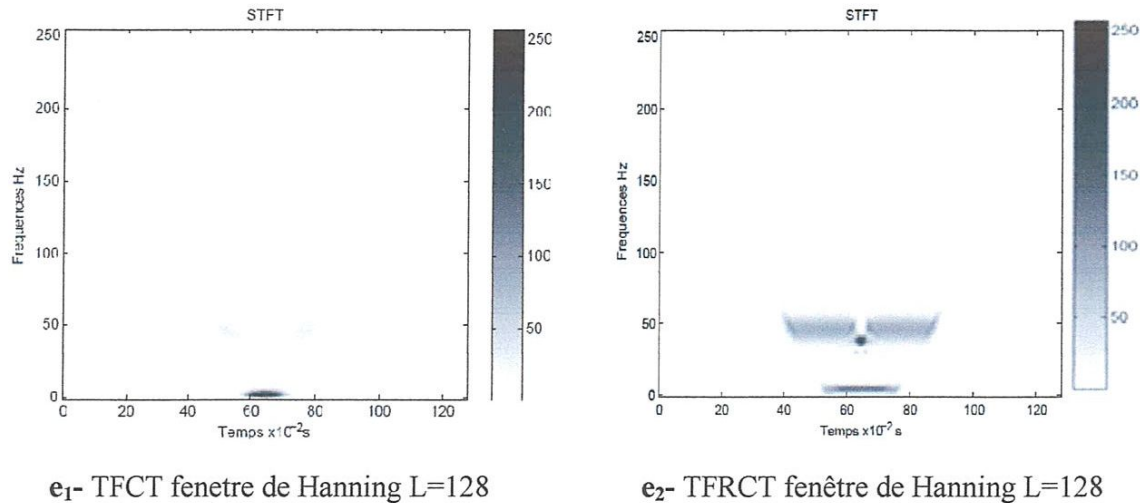


Figure III.4 Comparaison entre la TFCT et la TFRCT

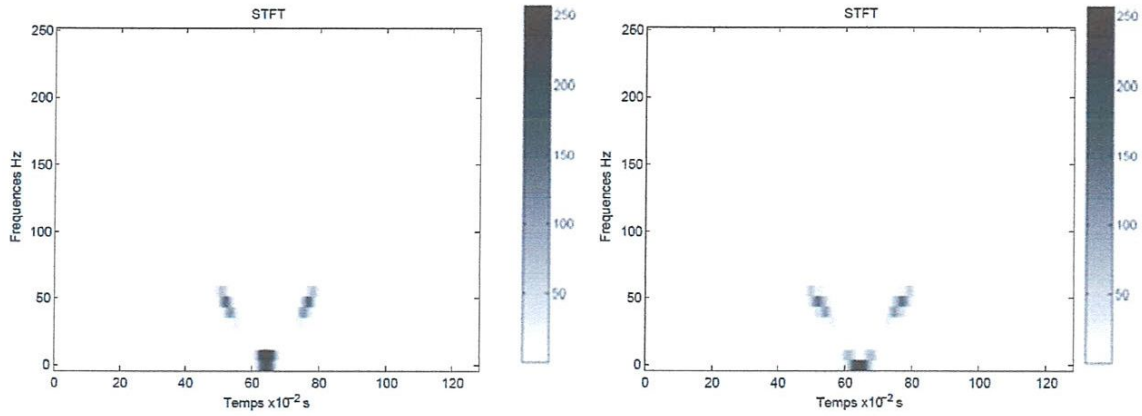
### Interprétation

Dans cette représentation,  $\omega$  est une fenêtre de Hanning. Sur la figure III.4.a<sub>1</sub> et a<sub>2</sub>, la fenêtre est un peu courte provoquant ainsi une mauvaise résolution fréquentielle, par contre l'utilisation de la TFRCT permet l'élimination du terme d'interférence (voir figure III.4 a<sub>2</sub>). Sur la figure III.4.b<sub>1</sub> et b<sub>2</sub> même remarque que précédemment, en plus, une bonne résolution temporelle est atteinte avec la TFRCT (séparation des termes du milieu au centre de la figure III.4 b<sub>2</sub>). Sur la figure III.4 c<sub>1</sub> et c<sub>2</sub>, la taille de fenêtre est relativement bien choisie car la représentation illustre bien la nature exponentielle du signal choisi. Sur les figures III.3.e<sub>1</sub> et e<sub>2</sub>, la fenêtre est trop large et sur celles-ci, l'hypothèse de stationnarité n'est plus vraiment valide.

### III.2.2.3.2 Influence du type de fenêtre

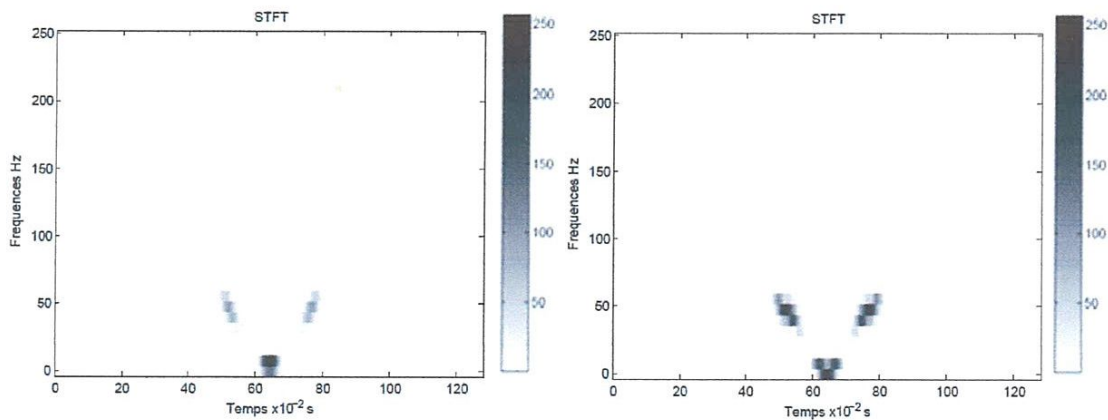
Pour connaître l'influence du type de fenêtre sur la représentation temps fréquence par la transformée de Fourier Fractionnaire à court terme, nous avons présenté les résultats sur la figure III.5. On choisissant L= 32 comme largeur optimal pour la représentation du signal.





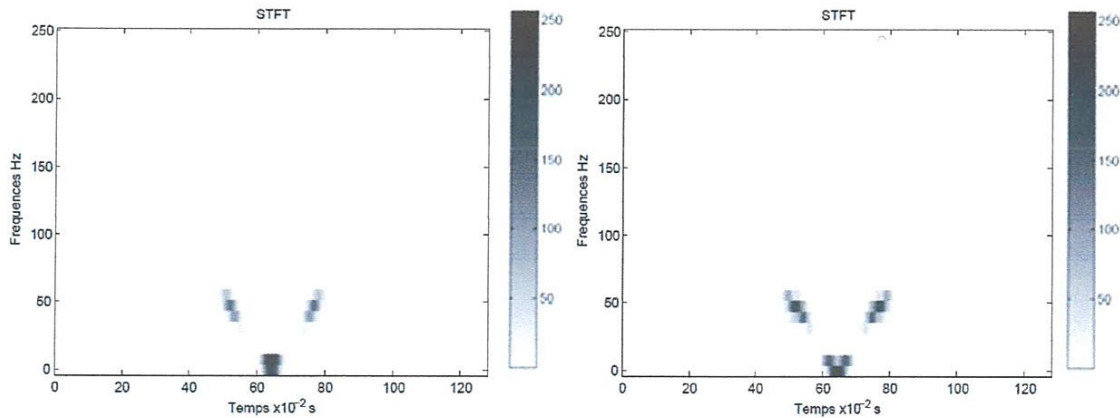
**a<sub>1</sub>**- TFCT Fenêtre de Hamming L=32

**a<sub>2</sub>**- TFRCT Fenêtre de Hamming L=32



**b<sub>1</sub>**-TFCT Fenêtre de Blackman L=32

**b<sub>2</sub>**- TFRCT Fenêtre de Blackman L=32



**c<sub>1</sub>**-TFCT Fenêtre de Gauss L=32

**c<sub>2</sub>**- TFRCT Fenêtre de Gauss L=32

**Figure (III.5) : Influence du type de fenêtre**

## **Interprétation**

D'après les figures ci-dessus, la fenêtre de gauss semble capable de fournir un compromis entre la résolution temporelle et la résolution fréquentielle.

### **III.3 Application sur un signal réel**

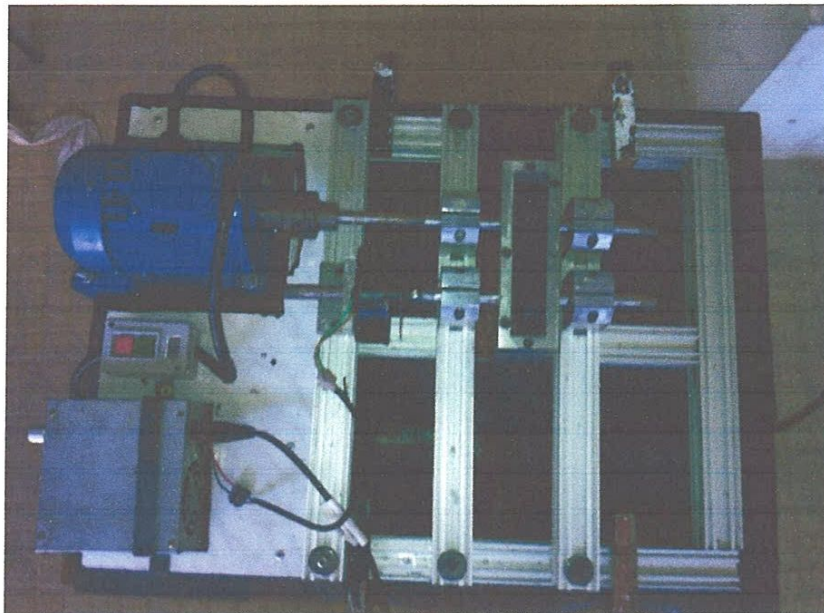
Le signal réel est un signal d'accélération mesuré sur un banc d'essai de roulement tournant à une vitesse de 900 tr/min soit 15 Hz. La fréquence d'échantillonnage est égale à 800 Hz.

On essayera de collecter le signal et de procéder à une représentation temps fréquence en utilisant la fenêtre de Gauss avec une largeur ( $L= 32$ )

#### **III.3.1 Banc d'essais et matériel de mesure**

Le système est un banc d'étude permettant de simuler plusieurs défaillances et d'effectuer des mesures vibratoire. Ce banc d'essais en question est d'une conception très simple permettant le montage et le démontage rapide des rotors testes, les mesures ont été collectées sur le palier par un accéléromètre en position verticale. Il est essentiellement composé de (voir Figure III.6):

1. Moteur asynchrone à cage
2. Frein électromagnétique
3. Accouplement
4. Boite de transmissions
5. Un accéléromètre piézo-électrique de type «EDNEVCO Model 2215 E» (Figure III.7), dont la fixation se fait par un goujon vissé sur les paliers à roulements.
6. Analyseur de Fourier Bicanale de type B&K 2035, Figure III.8, qui a les caractéristiques suivantes :
  - La possibilité de mémoriser 801 point en fréquence et 2048 points en temps.
  - La fréquence d'échantillonnage maximale peut être atteinte pour chaque channel est de 65.5 KHz.



**Figure III.6.** Le banc d'essais

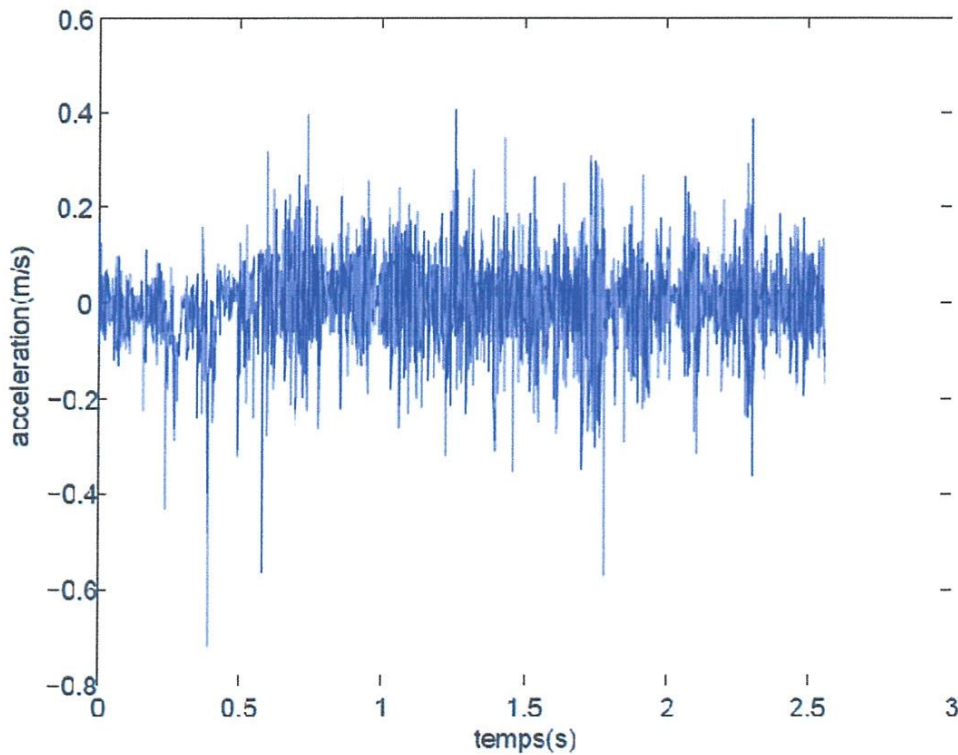


**Figure III.7:** Accéléromètre d'acquisition des signaux de type piézo-électrique  
«EDNEVCO Model 2215 E»



**Figure. III.8 :** Analyseur de Fourier Bicanale de type B&K 2035

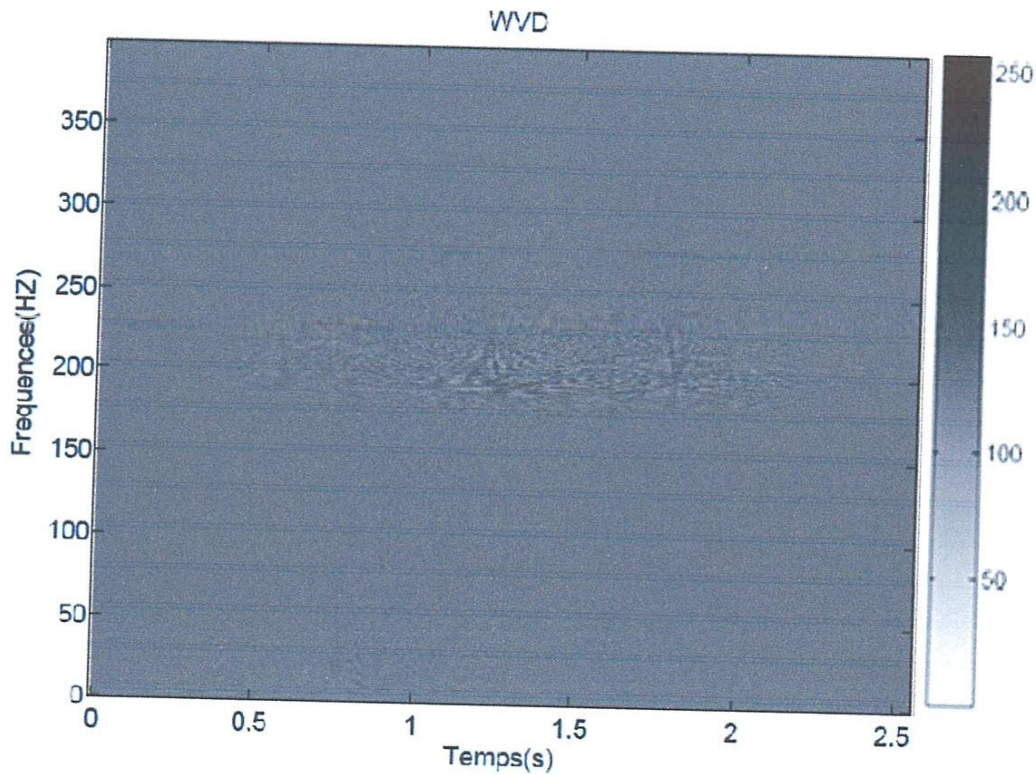
La figure III.9 représente le signal collecté sur notre banc d'essai.



**Figure.III.9 .le signal réel**

Sur la figure III.10, on a représenté la distribution de wigner ville du signal collecté, on remarque très clairement que cette transformation n'est pas bien sollicité pour la représentation temps fréquence de ce genre de signaux car les termes principaux sont

mélanger avec les termes d'interférences entre composantes dans le plan temps fréquence, terme qu'il est possible de réduire en utilisant la version lissée.

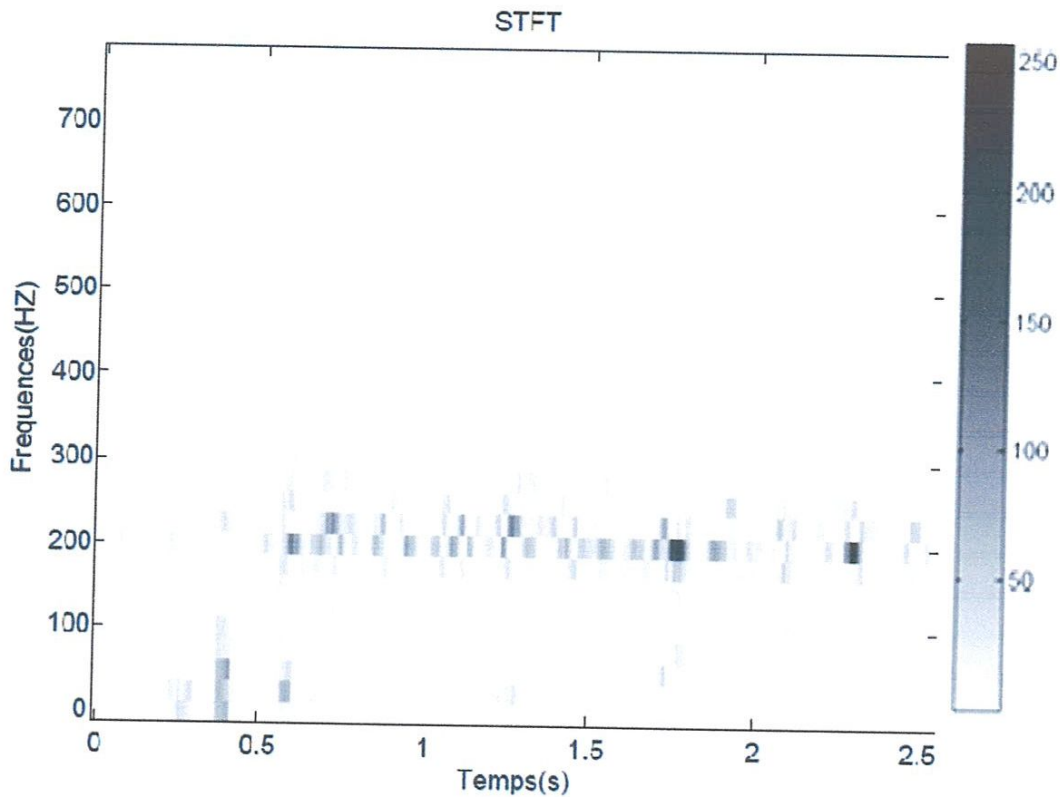


**Figure.III.10.**La représentations Wigner ville de signal réel

### III.3.2 Représentation temps fréquence par la transformée de Fourier fractionnaire à court terme

Pour choisir l'ordre optimal de la transformée de Fourier fractionnaire, nous avons calculé les moments centraux de deuxième ordre de trois spectres de puissance fractionnaire du signal. Les valeurs des moments centraux de second ordre [normalisées par rapport au moment d'ordre zéro]  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ , sont  $p_0 = 0,0048$ ,  $p_{\pi/2} = 0,0053$ ,  $p_{\pi/4} = 0.0025$ , selon l'équation (III.12) l'angle de transformation est  $\alpha_e = -42,53^\circ$ . Le calcul du moment du second ordre dans cette direction donne  $p_{-42,53^\circ} = 0.0025$  Il est plus petit que dans toutes autre direction, tandis que le moment du second ordre dans la direction orthogonal est le plus grand  $p_{+47,47^\circ} = 0.026$ .

L'ordre de transformation est déterminé à partir de l'angle  $\alpha = \frac{2 \cdot \alpha_e}{\pi} = 0.5274$



**Figure.III.13.**La TFRCT de signal réel

### **Interprétation**

Contrairement à la distribution de wigner ville, la transformée de Fourier fractionnaire à court terme donne une bonne représentation temps fréquence de ce genre de signaux.

Une telle représentation permet d'accéder simultanément à trois types d'information significative :

- L'amplitude de la représentation fournit une information de puissance.
- Les fréquences qui apparaissent permettent d'identifier et d'étudier les différents éléments mécaniques en jeu par leurs modes et les contraintes auxquelles ils sont soumis.
- Les deux informations précédentes, et donc les différents événements que l'on peut distinguer dans la représentation, peuvent être localisés dans le temps, donnant ainsi une information sur le déroulement et l'enchaînement des divers processus.

Cette représentation n'est qu'une première étape dans la mise en place d'un algorithme de diagnostic complet. En effet, pour établir une décision sur l'état de la machine, il faudrait extraire des paramètres à partir de ces représentations pour obtenir une mesure de la sévérité

du défaut. Cette étape peut faire appel à des techniques d'intelligences artificielles telles que les réseaux de neurones ou les Séparateurs à Vastes Marges (SVM) [21].

# Conclusion générale



## **Conclusion générale**

Comme cela a été mis en évidence au chapitre III, les propriétés importantes pour l'analyse des signaux sont essentiellement la résolution temps fréquence et l'interprétabilité. C'est donc sur celles-ci que nous avons focalisé notre attention.

Les résultats fournis par la distribution de Wigner-Ville sont très satisfaisants dès lors qu'on considère un signal monocomposant de géométrie temps fréquence simple (chirp linéaire). En revanche, dès qu'il s'agit de signaux multicomposants ou de géométrie temps fréquence plus compliquée, la distribution de Wigner-Ville fait apparaître des termes d'interférence. Ces termes sont localisés dans le plan temps fréquence à des endroits où les signaux qui les engendrent n'ont pas d'énergie. De ce fait, ils compliquent notablement l'analyse jusqu'à la rendre pratiquement impossible.

La transformée de Fourier à court terme fournit aussi une représentation temps fréquence interprétable mais sa résolution est limitée par le principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg.

La transformée de Fourier Fractionnaire à court terme présente l'avantage d'avoir un degré de liberté de plus, présenté par sa puissance fractionnaire. En plus les représentations temps fréquence fournies par cet outil semblent avoir une bonne résolution temporelle et fréquentielle.

# Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Ville, J. (1948). Théorie et applications de la notion de signal analytique. Câbles et transmissions, 1 :61–74. [11](#), [13](#)
- [2] Flandrin, P. (1989a). Représentations temps-fréquence des signaux non stationnaires. Traitement du Signal, 6(2) :89–101. [14](#)
- [3] Pastor, D. (1997). Diagnostic sur signaux quasi-stationnaires par décomposition en ondelettes, Université de Rennes 1. [15](#)
- [4] Martin, W. and Flandrin, P. (1985). Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 33(6) :1461–1470. [15](#).
- [5] Yger, A. (1999). Théorie et analyse du signal - Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB. Ellipses, 32, rue Bague 75740 Paris cedex 15, ellipses edition. [17](#).
- [6] Gabor, D. et al. (1946). Theory of communication. J. IEEE, 93 :429–457. [15](#), [27](#), [28](#).
- [7] Flandrin, P. (1993). *Temps-fréquence*. Hermès. [11](#), [27](#), [29](#), [31](#).
- [8] Heisenberg, W. (1927). Unbestimmtheit. *Zeits f Physik*, 43 :172. [28](#).
- [9] Qian, S. and Chen, D. (1999). Joint time-frequency analysis. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 16(2) :52–67. [36](#).
- [10] Représentation tridimensionnelle de la phase d'un signal dans un plan temps\_frequence contribution a l'analyse des signaux quasi\_stasionnaires (2009).
- [11] FLANDRIN P. (1993) '*Temps-Fréquence*' Hermès, Paris.
- [12] L.B. Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representation. *IEEE Trans. Sig.Proc.*, 42, 1994.
- [13] H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M.A. Kutay. The fractional Fourier transform. Wiley, Chichester,2001.
- [14] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. Special functions, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [15] Luis Almeida Product and convolution theorems for tha fractional Fourier transform *IEEE Signal Processing Letters*, Vol 4, NO 1, Janvier 1997
- [16] Jafarizadeha M A, Hassannejadb R, Ettefaghb M M and Chitsaz S 2008 Asynchronous input gear damage diagnosis using time averaging and wavelet filtering *Mech. Syst. Signal Process.*[22172-201](#).

- [17] Zhang Y X, Randall RB 2009 Rolling element bearing fault diagnosis based on the combination of genetic algorithms and fast kurtogram *Mech. Syst. Signal Process.* **23** 1509-17.
- [18] Shao Y M and Nezu K 2005 Design of mixture denoising for detecting faulty bearing signals *J.Sound Vib.* **282** 899-917.
- [19] K. H. Miah, R. H. Herrera, M. van der Baan, and M. D. Sacchi (Application of Fractional Fourier Transform in Cepstrum Analysis) University of Alberta, Edmonton, Canada. 2011.
- [20] Ljubiša Stanković, Tatiana Alieva, and Martin J. Bastiaans (Time-Frequency Signal Analysis Based on the Windowed Fractional Fourier Transform) Volkswagen Stiftung, Federal Republic of Germany 2002.
- [21] S. Theodoridis and K. Koutroumbas, *Pattern Recognition*. Elsevier Academic Press, 2003.