

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique

675



Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master Académique

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Automatique et Informatique industrielle
Spécialité : Commande et diagnostic des systèmes industriels



*Traitement d'image par Association des Informations
Extérieur : Application à la Restauration d'image dégradée*

Présenté par : **Sassia Benmansoura**

Sous la direction de : **Mr. Aidoud Mohamed.**

JUIN 2011

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Automatique et Informatique industrielle
Spécialité : Commande et diagnostic des systèmes industriels

***Traitement d'image par Association des Informations
Extérieur : Application à la Restauration d'image dégradée***

Présenté par : **Sassia Benmansoura**

Sous la direction de : **Mr. Aidoud Mohamed.**

JUIN 2011

Remerciement Remerciement

Avant tout nous remercions dieu qui nous a éclairé notre chemin et qui nous a donné la force pour réaliser ce travail.

Toute gratitude à notre encadreur monsieur Aidoud Mohamed, tous les membres de jury

Nous remercions également à tout les enseignants qui nous ont beaucoup encouragé: Belferagi Moufida ,Boukrouche, ,boulsina,bouchalkha,boulouh,benzeltout, et soutenu depuis le début de nos premiers cycle d'étude jusqu'à la Deuxième année Master universitaire.

En fin, nos sincères gratitudes à tous mes amis de la promotion de Génie électrique « Automatique »2010/2011 et à tous ceux qui nous ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

BENMANSOURA SASSIA

Sommaire

Introduction Générale	01
-----------------------------	----

CHAPITRE. I LA RESTAURATION.

I.1. Formation des Images	06
I.2. Résolution de l'équation intégrale	07
I.3. Problème mal posé.....	08
I.4. Convolution sans bruit.....	08
I.5. Convolution avec bruit	08
I.6. Existence et Unicité de la solution.....	08
I.7 Résolution des problèmes inverses.....	10
I.8. L'estimateur de Wiener.....	11
I.9. Les méthodes Itérative.....	13

CHAPITRE. II La régularisation.

II.1 Méthode des Moindres Carrés.....	20
II.2 Méthode de Tikhonov-Miller	21
II.3. Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller	24
III.4.1. Restauration non itérative.....	25
III.4.2 Restauration itérative	26
III.4.3 Comparaison	29

CHAPITRE. III
Régularisation par l'introduction d'un modèle

III.1 Introduction du modèle de la solution.....	30
III. 2 Justification de l'emploi d'un modèle de la Solution.....	31
III.3 Influence du modèle.....	32
III.4 Expressions du modèle de la solution.....	33
III.4.1 Minimisation de l'erreur de reconstruction	33
III.4.2 Utilisation d'une image restaurée a priori comme modèle.....	35
III.5. 1 Régularisation par recherche du meilleur modèle de la solution.....	37
III.5.1.1 Modèle parfait de la solution.....	37
III.5.1.2 Modèle numérique tiré de l'erreur.....	39
III.5.1.3 Utilisation de l'image restaurée A priori comme modèle.....	41
III.5.1.4 Comparaison.....	42
III. Choix du terme de régularisation.....	42
III. Choix du filtre.....	42
III. Calcul de α	43
Conclusion et perspectives.....	45
Bibliographie	

Liste des figures

Figures	Titres	Page
Figure .1	Réponse Impulsionnelle	03
Figure. 2	Signal Découpé En Impulsions Successives.....	03
Figure. 3	Chaîne D'acquisition.....	04
Figure .4	Procédure de filtrage.....	05
Figure .5	Procédure de restauration.....	05
Figure .6	Méthode de L'estimation Linéaire.....	11
Figure .7	Méthode de Wiener de différents niveaux de bruit (SNR).....	13
Figure .8	Méthode de van Cittert SNR= 35 dB et 200 Itération.....	16
Figure. 9	Méthode de van Cittert SNR=35 dB et 600 Itération.....	16
Figure.10	Méthode de Singh SNR=60 dB et 20 Itération.....	17
Figure. 11	Méthode de Singh SNR=60 dB et 10 Itération.....	17
Figure .12	Méthode de gradient SNR=60 dB et 20 Itération.....	18
Figure .12'	Méthode de Gradient SNR=60db et 25 Itération.....	18
Figure .13	Schéma de Principe de la Procédure de Schafer et al.....	23
Figure .14	La Nouvelle Configuration Pour la Restauration	24
Figure .15	Méthode des Moindres Carrés Sans Bruit	25
Figure .16	Restauration Itérative Par la Méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 18 Itération	26
Figure .17	Restauration itérative par la méthode de Tikhonov Miller avec SNR=60dB et20 Itération.....	26
Figure.18	Restauration itérative par la méthode de Tikhonov Miller avec SNR=60dB et 25 Itération.....	27
Figure.19	Restauration itérative par la méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 200 itérations.....	28
Figure.20	Restauration itérative par la méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 600 itérations.....	28
Figure.21	Régularisation de l'image test sans modèle ($U_{mod} = 0$).....	38

Figure.21	Régularisation de L'image Test avec Modèle Parfait.....	38
Figure.23	Régularisation de L'image test avec Modèle Tiré par L'erreur de Reconstruction.....	40
Figure.24	Régularisation de L'image Test Avec Modèle Restaurée Précédemment	41

Liste des tableaux

Tableaux	Titre	Page
Tableau. 1	Comparaison entre les deux algorithmes restaurée.....	29
Tableau. 2	L'erreur non observable de la restauration, dans les mêmes conditions que Précédemment (image test, SNR=35dB).....	42

LISTE DES ABRÉVIATIONS

- **SNR** : Rapport signal sur bruit.
- **RI** : Réponse impulsionnel .
- **FFT** : Transformée de Fourier.
- **EMQ_r** : Erreur moyenne quadratique .

Introduction Générale

Introduction Générale

Le traitement de l'information est une discipline qui a vu le jour, depuis plusieurs Décennies. Ses objectifs essentiels se résument, plus particulièrement, à l'analyse et l'extraction d'une information pertinente souvent masquée par des perturbations, mais aussi alourdie par une redondance incontournable. Ceci est plus particulièrement visible quand on a affaire à des images ou même des signaux. Notre travail entre dans ce contexte en vue d'estimer une information originelle.

Les signaux ou images appréhendés fournissent des informations, non directement exploitables. La grandeur que l'on désire capter ou mesurer constitue le support physique d'une information d'origine variée. La grandeur mesurée est d'une part déformée par la chaîne d'acquisition et d'autre part dégradée par le bruit. Le but consiste à extraire la grandeur à mesurer à partir de l'information dégradée par le capteur et un bruit inconnu.

Le traitement numérique bas niveau des signaux et des images a pour objectifs :

- ✓ L'atténuation de l'effet des bruits et d'autres perturbations parasites pouvant affecter l'information originelle à divers endroits dans la chaîne de mesure et d'acquisition. Ce traitement a pour but d'améliorer le rapport signal à bruit que l'on note SNR (**Signal to Noise ratio**). Sachant que les signaux aléatoires parasites, sont générés par les systèmes de mesure et d'acquisition du milieu où l'information s'est propagée.
- ✓ Les systèmes de mesure et d'acquisition apportent une dégradation que l'on qualifie habituellement de filtrage indésirable sur les signaux informatifs. Ceci est essentiellement dû à la lenteur des temps de réponse de ces systèmes par rapport au signal informatif originel.

C'est d'autant plus visible et plus gênant que ce temps de réponse est plus lent, ce qui habituellement est qualifié d'effet flou ou (**Spread Function**). Compte tenu de l'élargissement de tous les détails rapides et aigus du signal, il arrive souvent qu'ils se chevauchent. Ainsi, l'effet de dégradation est un effet de lissage ou encore de régularisation de tout ce qui est rapide dans le signal informatif originel.



L'effet de flou peut être assimilé à une sorte de convolution du signal originel par la réponse du système. La tâche est de pouvoir retrouver l'information qui a été perdue par l'effet de filtrage indésirable. Ce qui s'interprète dans le domaine fréquentiel où la dégradation apportée par le système de mesure équivaut à une perte très prononcée des harmoniques hautes fréquences du signal originel. Retrouver ces harmoniques perdues n'est pas tout à fait une réalisation aisée. C'est ce que l'on appelle habituellement un problème "**mal posé**".

La restauration revient donc à rendre ce problème bien posé en apportant des éléments de régularisation.

Restaurer le signal originel, c'est réduire à la fois les distorsions subies lors de sa propagation et de son acquisition par un instrument de mesure et les bruits de mesure. La réduction de la distorsion se fait par une transformation inverse, qui a tendance à amplifier le bruit. Une simple inversion s'avère très risquée à cause du mauvais conditionnement de la transformation inverse.

Dans le but de mener à bien l'opération et d'éviter en même temps le problème de mauvais conditionnement, des techniques dites de régularisation ont été introduites. Bien que ces méthodes offrent des résultats satisfaisants pour de faibles rapports signal / bruit, elles s'avèrent peu efficaces.

Or les grands succès initiaux du traitement du signal en matière de réduction du bruit ont été obtenus par Wiener .

Chapitre

La Restauration

Chapitre.I

La Restauration.

En général, on rencontre très souvent des difficultés lorsque l'on effectue une mesure, dans le but de remonter (estimer) à une grandeur physique que l'on veut évaluer avec précision.

Dans le domaine électronique, on retrouve le même phénomène une impulsion infiniment brève, injectée à l'entrée d'un amplificateur, ne donne jamais en sortie, une impulsion infiniment brève, mais un signal de durée non nulle (d'autant plus vite éteint que la bande passante de l'appareil est plus grande). Le fait que le système traduise un signal infiniment bref par un signal de durée infinie va évidemment déformer un signal quelconque qui est injecté à son entrée.

Connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système supposé linéaire et un signal d'entrée $u(t)$, peut-on déterminer, par le calcul, le signal de sortie $y(t)$? C'est le problème qui a pour solution l'équation de convolution. A un signal d'entrée $\delta(t)$, correspondra un signal de sortie $h(t)$; de même, à un signal d'entrée $\delta(t - t_0)$ obtenu à partir de $\delta(t)$ par translation t_0 , correspondra un signal de sortie $h(t - t_0)$ ayant subi la même translation

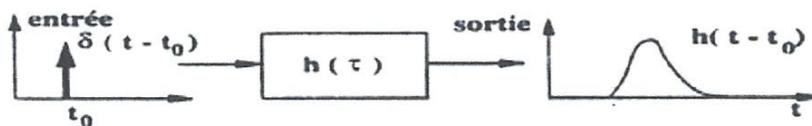


Figure.1 : Réponse Impulsionnelle.

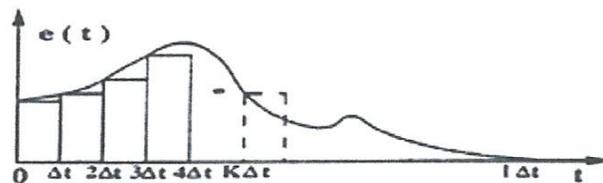


Figure.2: signal Découpé En Impulsions Successives.

Le problème d'estimation peut être considéré comme un problème de reconstruction. En effet, comme le montre la figure3, l'information obtenue est une version déformée de l'information originelle. Le processus de déformation étant la chaîne de mesure.

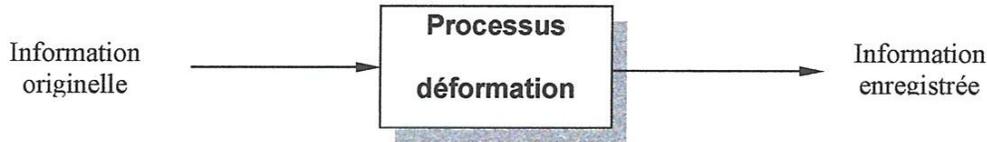


Figure.3: Chaîne D'acquisition.

On peut trouver dans la littérature de nombreuses méthodes permettant de résoudre ce problème. Le but est de restaurer l'entrée inconnue du processus de déformation. Afin que ceci soit possible, il nous faut un modèle qui peut être exprimé par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace :

$$Y_m = H(s).U(s) + B(s) \dots\dots\dots (1.1).$$

Où :

$H(s)$: Représente la fonction de transfert du processus de déformation,

$U(s)$: L'entrée inconnue (l'information originelle).

$B(s)$: Le bruit de mesure.

$Y_m(s)$: La sortie mesurée (l'information enregistrée).

L'inversion directe de la relation précédente permettant d'obtenir u est alors :

$$U(s) = [Y_m(s) - B(s)]/H(s) \dots\dots\dots (1.2).$$

Comme le processus de déformation est un filtre passe-bas, son inverse est un filtre passe-haut. De plus, le bruit de mesure étant un processus haute fréquence, l'inversion directe amplifiera le bruit de mesure. Par conséquent, le résultat obtenu sera très bruité voir même complètement bruité.

Une alternative à ce problème, est l'utilisation de la « méthode de restauration » qui tend à faire un compromis entre l'adéquation aux mesures et la douceur du signal à estimer. Les données obtenues étant sujettes à une dégradation et un bruit de mesure, la plupart des procédures de restauration se font en deux étapes:

- ✓ **Une étape de filtrage** utilisée pour réduire le bruit de mesure sur le signal enregistré. Et ensuite.
- ✓ **Une technique** de restauration pour restaurer le signal originel.

a) Le filtrage

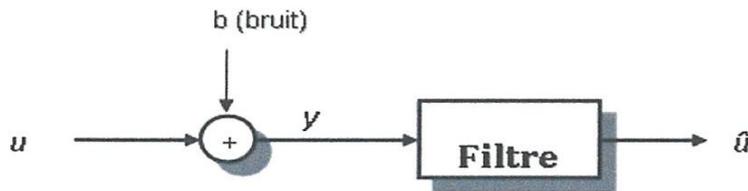


Figure.4 : Procédure de Filtrage.

b) La restauration

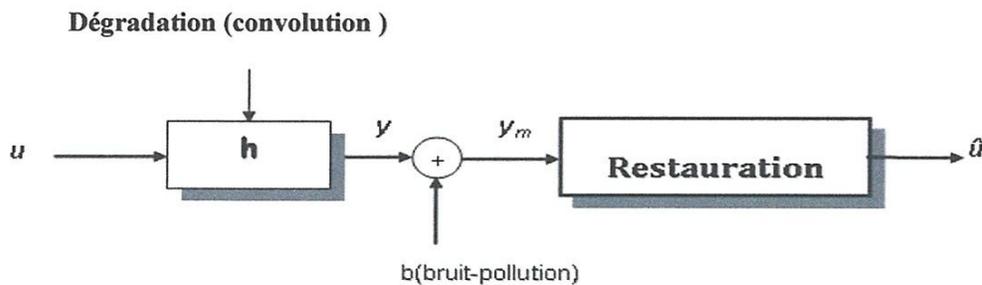


Figure.5 : Procédure de Restauration.

Le présent travail s'inscrit dans le domaine de la restauration d'image. L'observation de données à l'aide d'un capteur conduit à l'obtention d'images dégradées de l'objet étudié. Afin de caractériser les difficultés liées à la reconstruction, il est nécessaire de détailler dans

un premier temps le processus de formation d'images par un instrument optique. Une fois le problème posé, la restauration de l'image se ramène à la résolution d'une équation intégrale. La résolution de cette équation n'est absolument pas triviale. La raison en est qu'il s'agit d'un problème mal posé. De nombreuses méthodes de résolution ont été proposées dans la littérature [1][2][3]. Allant de l'inversion directe à des méthodes plus sophistiquées de minimisation de fonctionnelles. Les différents aspects seront détaillés dans le but de mieux comprendre le domaine de la restauration d'images.

I.1. Formation des images

Un système optique quelconque permet d'observer des objets par formation de leur image dans un plan appelé plan image. Afin de décrire simplement le processus de formation des images, plaçons-nous dans le cas où aucun type de bruit ne dégrade l'image. On note $u(\alpha)$ les caractéristiques de l'objet aux coordonnées spatiales α , $y(r)$ celles de l'image non bruitée observée aux coordonnées spatiales. L'objet $u(\alpha)$ du plan objet est lié à $y(r)$ du plan image par une relation faisant intervenir une fonction h qui dépend des coordonnées spatiales α être des plans objet et image:

$$y(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r, \alpha) u(\alpha) d\alpha \dots \dots \dots (1.3).$$

L'équation (1.3) est une équation intégrale de Fredholm de première espèce, où la fonction $h(r, \alpha)$ est le noyau de l'intégrale appelée, en imagerie, **Réponse Impulsionnelle** (R.I) de l'ensemble instrument optique - atmosphère. Le noyau traduit des phénomènes variés tels que l'ouverture limitée du système optique, un bougé de l'objet pendant le temps d'exposition, un empâtement de l'objet dû aux turbulences atmosphériques ou une combinaison de ces phénomènes. Il peut avoir différentes propriétés dont les principales sont: invariance par translation et séparabilité.

Dans le cas particulier où le système imageur possède une R.I identique en tous points, le noyau de l'intégrale est dit invariant par translation c'est à dire $h(r, \alpha) = h(r - \alpha)$. Ainsi la relation qui lie u à y est une relation de **convolution** et l'équation intégrale de Fredholm s'écrit:

$$y(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r-\alpha)u(\alpha)d\alpha = h(r)*u(r) \quad \dots\dots\dots (1.4).$$

Où :

(*) : Représente le produit de convolution. La R.I d'un système optique parfait est obtenue en observant l'image d'un point source $u(\alpha) = \delta(\alpha)$.

δ : Représente la fonction de Dirac.

II.2. Résolution de l'équation intégrale

Le problème à traiter consiste en la résolution de l'équation intégrale (1.3), Il s'agit d'un problème inverse. Pour les physiciens, un problème direct est un problème défini suivant une séquence de cause à effet, il s'agit donc d'un problème qui consiste à déterminer les conséquences étant données les causes. Le problème inverse correspondant est associé avec la séquence inverse de cause à effet et consiste à déterminer les causes inconnues de conséquences connues. Le problème inverse qui nous intéresse est de retrouver l'objet $u(r)$ connaissant dans un cas idéal l'image non bruitée $y(r)$, la R.I $h(r, \alpha)$ et la relation qui les lie (1.3). Dans les situations expérimentales réelles, les données ne sont connues qu'en un nombre fini de points (m).

Le détecteur du système optique placé dans le plan image effectue une intégration de la fonction continue $y(r)$, sur la surface sensible de chacun de ses pixels. L'action du détecteur peut être vue comme une opération d'échantillonnage de la fonction $y(r)$, en des points r_i ($i=1, \dots, m$) qui correspondent au centre de chaque pixel du détecteur. Les pixels étant carrés, il s'agit d'un échantillonnage régulier (à pas fixe). L'équation (1.3) s'écrit donc:

$$y(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(n, \alpha)u(\alpha)d\alpha \quad \dots\dots\dots (1.5).$$

Ainsi le résultat d'une expérience est un ensemble de nombres (réels) $y_1 = y(r_1), \dots, y_m = y(r_m)$. La quantité $y(r_i)$ mesurée par les détecteurs est reliée à la fonction $u(\alpha)$ par l'équation intégrale (1.5) de noyau ($h(r_i, \alpha)$).

II.3. Problème mal posé

Jacques Hadamard [4]. A introduit le concept de problème bien posé en 1902. Dans sa première formulation, un problème est appelé bien posé quand la solution est unique et existe. Quelques années plus tard, en 1923, il insiste sur la nécessité de dépendance continue de la solution sur les données [5]. C'est à dire sur le fait qu'une solution qui varie considérablement pour de petites variations des mesures n'est pas vraiment une solution au sens physique du terme. Les données physiques ne sont donc jamais connues exactement mais seulement avec un certain degré de précision. Ce n'est qu'en 1962 que Courant et Hilbert [6]. Introduisent la formulation suivante: un problème est dit **mal posé au sens de Hadamard** s'il ne vérifie pas une des trois propriétés:

- ✚ **Existence:** Il existe une solution pour toute image observée.
- ✚ **Unicité:** Cette solution est définie de façon unique.
- ✚ **Stabilité (ou continuité)** de la solution: la solution dépend continûment des données.

II.3.1. Convolution sans bruit

Afin d'illustrer les deux premiers points, considérons la résolution du problème de convolution sous la forme continue, dans le cas idéal où nous disposons d'une version non bruitée des données $y(r)$. Le modèle est décrit par la relation formelle :

$$y(r) = h(r) * u^*(r) \dots\dots\dots (1.6).$$

En prenant la Transformée de Fourier (T.F) de cette équation on obtient:

$$Y(w) = H(w)U^*(w) \dots\dots\dots (1.7).$$

Où :

$Y(w)$, $H(w)$ et $U^*(w)$: Correspondent respectivement aux T.F de l'image non bruitée $y(r)$, de la réponse impulsionnelle $h(r)$ et de l'objet $u^*(r)$ à la fréquence w . D'après (1.7), on peut écrire :

$$U^*(w) = \frac{Y(w)}{H(w)} \dots\dots\dots (1.8).$$

Cette relation ne possède un sens, que si $H(w)$ est une fonction qui ne s'annule pour aucune valeur de w et qui tend vers zéro à l'infini moins vite que toute puissance de $1/w$. Ce sont des conditions sévères qui ne sont jamais réalisées en pratique.

I.3.2. Convolution avec bruit

Si l'on introduit un bruit additif dans l'image $v(r)$, les mêmes difficultés se posent. Le système linéaire et invariant à l'origine de la dégradation de l'image est un filtre passe-bas. De ce fait, en hautes fréquences, l'image de sortie du système (celle qu'on observe ou mesure), n'est en fait que le bruit provenant des capteurs et amplificateurs électroniques.

Un modèle réaliste, dans un contexte linéaire, consiste à appliquer le théorème de superposition : l'image de sortie du système est égale à la somme de l'image non bruitée et d'un bruit, La relation (1.6) s'écrit:

$$y_m(r) = h(r) * x(r) + v(r) \dots\dots\dots (1.9).$$

La T.F de (1.9) conduit à :

$$Y_m(w) = H(w)U(w) + V(w) \dots\dots\dots (1.10).$$

II.3.3. Existence et Unicité de la solution

La simple inversion de l'équation (1.10) est :

$$U(w) = \frac{Y_m(w)}{H(w)} + \frac{V(w)}{H(w)} = U^*(w) + \frac{V(w)}{H(w)} \dots\dots\dots (1.11).$$

Où :

$V(w)$: Correspond à la T.F du bruit à la fréquence w . $U(w)$ est alors la somme de la T.F de l'objet réel plus un terme $V(w)/H(w)$ qui provient de la contribution du bruit. Ce terme peut être responsable de la non existence de la solution c'est-à-dire de la T.F inverse de $U(w)$. Ceci se produit notamment lorsqu'on considère le cas où $H(w) = 0$ pour certaines valeurs



de w , Le terme de bruit n'est généralement pas nul simultanément en raison de l'indépendance du processus imageur et du processus de bruit. Ainsi, la division par zéro qui se produit dans (1.11), conduit à des singularités dans $X(w)$ lorsque $H(w)$ s'annule. Ce fait, implique qu'elle peut ne pas exister et donc conduire à aucune solution pour le problème considéré. De plus, si $H(w) \neq 0$, il peut tendre vers zéro lorsque w tend vers l'infini plus rapidement que $V(w)$, ceci est le cas pour les opérations de convolution puisqu'elles correspondent à un filtre passe-bas et donc $H(w)$ possède des valeurs très faibles pour les hautes fréquences. Ainsi le rapport $V(w)/H(w)$ peut soit tendre vers zéro, soit vers une constante ou bien vers l'infini, et la T.F inverse de ce rapport peut ne pas exister et avec elle la solution du problème inverse.

La non-existence et le manque d'unicité sont donc étroitement liés et proviennent du fait que le système imageur ne transmet pas toute l'information sur la T.F de l'objet, ainsi les méthodes développées pour résoudre les problèmes mal posés sont basées sur une reformulation du problème en introduisant des informations supplémentaires sur l'objet.

Ces difficultés se posent à la fois dans les cas bruité et non bruité, ainsi lors de la considération de problèmes inverses dégradés par un bruit, l'introduction de la seule connaissance sur le processus de bruit n'est pas suffisante pour reconstruire correctement l'objet, et il est nécessaire d'introduire de nouvelles informations additionnelles. Ceci sera exposé dans la suite. En ce qui concerne la stabilité du problème, elle peut être analysée en considérant le problème sous la forme matricielle et en étudiant le conditionnement de la matrice H .

I.4. Résolution des Problèmes Inverses

Dans le domaine de la restauration d'images, le problème à résoudre consiste à reconstruire un objet réel u à partir de la connaissance de données bruitées y , de la R.I de l'instrument de mesure (PSF) définie par la matrice H , et connaissant la relation qui lie l'image non bruitée y , H et u :

$$y = Hu \quad (1.12).$$

Dans ce contexte, on ne peut arriver qu'à une approximation de l'objet u . Déterminer u tel que $y = Hu$ ne peut conduire qu'à des solutions instables.

II.4.1. Estimateur de Wiener

Les techniques d'estimation linéaires exposées peuvent être schématisées par la configuration suivante :

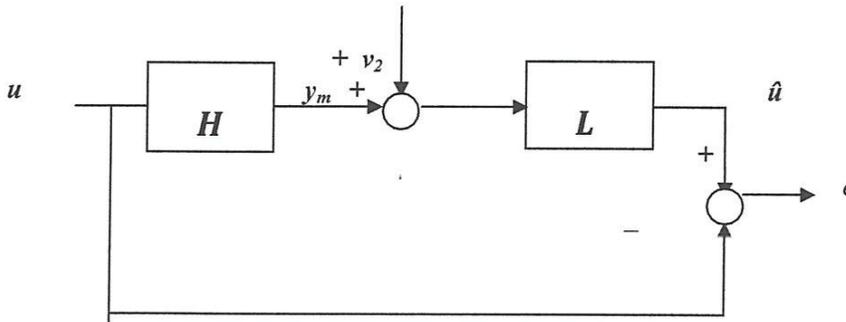


Figure.6 : L'estimation Linéaire.

Wiener, fut l'un des premiers auteurs à proposer une technique d'estimation se ramenant à un problème d'estimation linéaire en supposant que les signaux u, v_2 sont des processus aléatoires non corrélés, centrés, stationnaire du second ordre.

L'adaptation de la technique d'estimation linéaire proposée par Wiener au problème de restauration consiste à trouver le signal \hat{u} minimisant la variance de l'erreur d'estimation.

Le principe de cette approche repose sur le fait que l'on veut avoir un filtre linéaire optimal de réponse impulsionnelle $l(t)$ dont la sortie est l'estimée \hat{u} du signal désiré u quand on lui applique le signal y_m

$$J_1 = \varepsilon \{ (u - \hat{u})^2 \} \dots\dots\dots(1.13)$$

Avec :

$$\hat{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t - \tau) y_m(\tau) . d\tau \dots\dots\dots(1.14)$$

L'étant un filtre linéaire à déterminer. ε Symbolisant l'espérance mathématique. Le problème de restauration ainsi formulé se ramène à une approximation dans un espace de Hilbert. Le critère quadratique choisi minimise la distance entre le signal u et le signal estimé \hat{u} . La minimisation de J_1 , en prenant en compte les équations (1.13) et (1.14), conduit à l'expression du gain complexe en fréquence du filtre.

$$L(w) = \frac{H^*(w)}{H(w)H^*(w) + \frac{S_{v_2}(w)}{S_u(w)}} \dots \dots \dots (1.15).$$

H^* est le conjugué de H au sens des nombres complexes. S_{v_2} et S_u sont respectivement les densités spectrales de puissance des signaux v_2 et u .

Nous remarquons que le filtre de Wiener ainsi généré peut avoir une partie anti-causale non nulle.

En absence de bruits de mesure, $S_{v_2} = 0$, le filtre de Wiener (3) se réduit au filtre inverse. En présence de bruits de mesure, le terme S_{v_2} / S_u permet de remédier au comportement passe bas du filtre H . Il assure en particulier au filtre de Wiener d'être défini même si certaines valeurs du gain en fréquence du filtre H deviennent nulles. Le filtre de Wiener obtenu en minimisant la variance de l'erreur d'estimation donne l'estimée optimale du signal utile. Cependant cette optimalité n'est atteinte que si les densités spectrales de puissance du signal à restaurer et du bruit de mesure sont parfaitement connues. Or les densités spectrales de puissance du Signal à restaurer et du bruit de mesure sont très souvent inconnues.

C'est pour cela que les utilisateurs d'un tel procédé sont contraints de formuler des hypothèses sur la nature du bruit et de la densité spectrale de puissance du signal à restaurer. Ce qui introduit par voie de conséquence, des erreurs dans le signal estimé. Plusieurs propositions ont été faites pour compenser la non connaissance a priori de la densité spectrale de puissance du signal u . Turin propose d'approcher le rapport S_{v_2} / S_u par une constante si aucune information n'est disponible sur le signal et le bruit. Lim suggère d'estimer S_u à partir d'un ensemble de signaux prototypes appartenant à la même famille que le signal idéal. On peut aussi estimer S_u à partir d'un algorithme itératif si aucun signal prototype n'est connu. Si des solutions 'douces' sont recherchées, Tikhonov tout comme Commenges, ont développés des solutions sous-optimales consistant à considérer u comme un processus markovien de premier ordre [7].

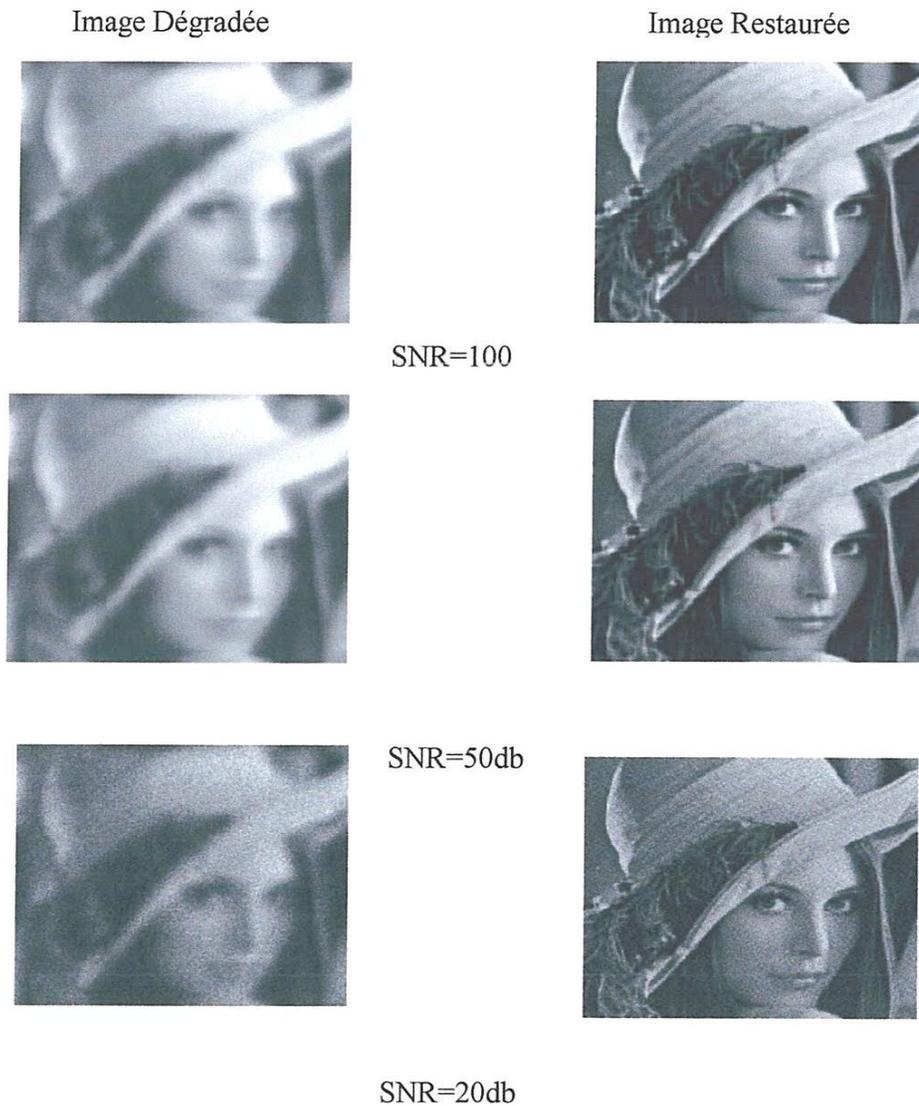


Figure. 7 : Méthode de Wiener de différents niveaux de bruit(SNR)

II.4.2.Les méthodes itératives

A l'inverse des méthodes directes, la solution u n'est pas écrite de façon explicite. L'objet u est en fait reconstruit progressivement. La méthode itérative consiste à construire, à partir d'un estimé initial :

u_0 , une suite de vecteurs u_1, u_2, \dots, u_k qui convergent vers la solution u^* du problème.

La construction d'un algorithme itératif destiné à résoudre une équation du type

$F(u) = 0$ peut s'appuyer sur la méthode des substitutions successives. Pour ce faire, on écrit dans un premier temps le problème sous la forme d'une équation du type $\varphi(u) = u$. Une

telle équation admet une solution et une seule, lorsque l'application φ est contractante. Pour cela il faut que :

$$|\varphi(u_{k+1}) - \varphi(u_k)| \leq |u_{k+1} - u_k| \dots\dots\dots (1.16).$$

On écrit ensuite l'itération:

$$u_{k+1} = \varphi(u_k) \dots\dots\dots (1.17).$$

Soit par exemple:

$$u_{k+1} = u_k + \beta F(u_k) \dots\dots\dots (1.18).$$

Où :

β est un facteur pouvant être scalaire ou matriciel Cet algorithme converge vers le point fixe du problème: u^* pour un choix convenable de β et F . Parmi les méthodes itératives employées pour résoudre en u ,

$$y = Hu$$

On peut citer :

✓ la méthode de Van Cittert où $F(u_k) = y - Hu$ et β est la matrice identité.

la méthode itérative de Singh de la forme (1.18) où $F(u_k) = u$ et $\beta = I - H$.

Lorsque le problème à résoudre est de la forme $H^T y = H^T Hu$, on peut citer :

✓ la méthode itérative de Singh de la forme (1.18) où $F(u_k) = u$ et $\beta = I - H^T H$.

✓ La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative de descente de forme $u_{k+1} = u_k + \alpha_k d_k$ avec le pas α_k que l'on fait dans cette direction à l'itération k, utilisant une forme composite du gradient comme direction de descente:

$$d_{k+1} = -\nabla_x J(u) + \sigma_k d_k \text{ où } \sigma_k \text{ est un scalaire déterminé de sorte que } J(u) \text{ soit réduit}$$

✓ le plus possible dans la direction d_k avec $d_0 = (y - Hu_0)$.

L'utilisation de méthodes itératives permet d'obtenir une estimation de u par approximations successives. Mais le problème des instabilités demeure.

Il nous faut donc définir des critères sur la solution recherchée afin de limiter le nombre de solutions à celles physiquement acceptables, ce qui s'appelle «stabiliser le problème», tout en assurant la cohérence des résultats, c'est-à-dire en garantissant la proximité de la solution choisie avec la solution idéale. Cette modification du cahier des charges du problème de la restauration est très utilisée en traitement du signal et des images, et est désignée sous le nom de régularisation. Etant donné son importance et la nécessité de l'employer dans notre cas, nous allons consacrer le chapitre suivant à la définition de la régularisation d'un problème inverse mal posé.

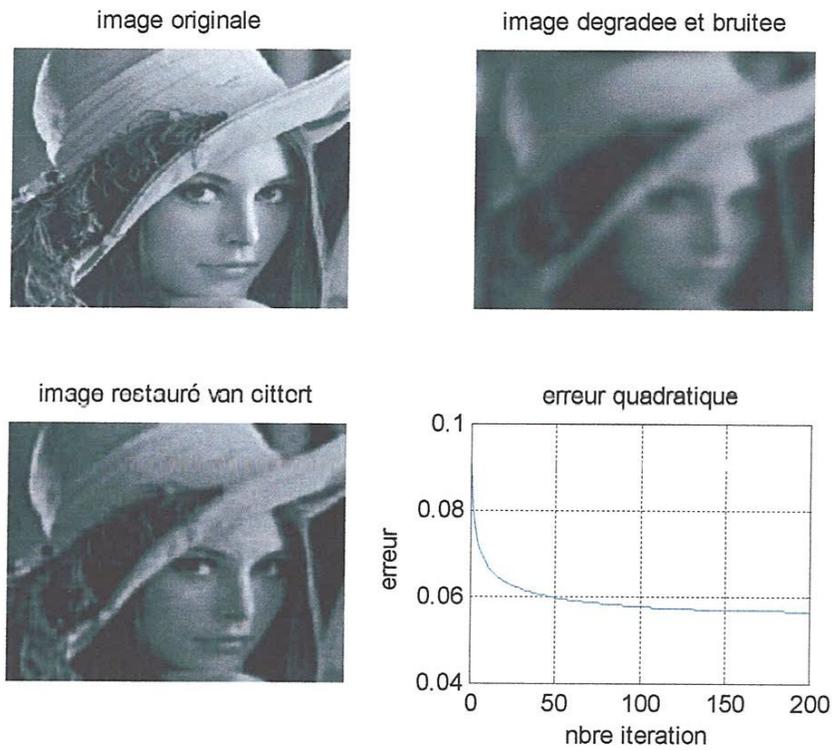


Figure.8 : Méthode de van Cittert SNR= 35db ET 200Itération.

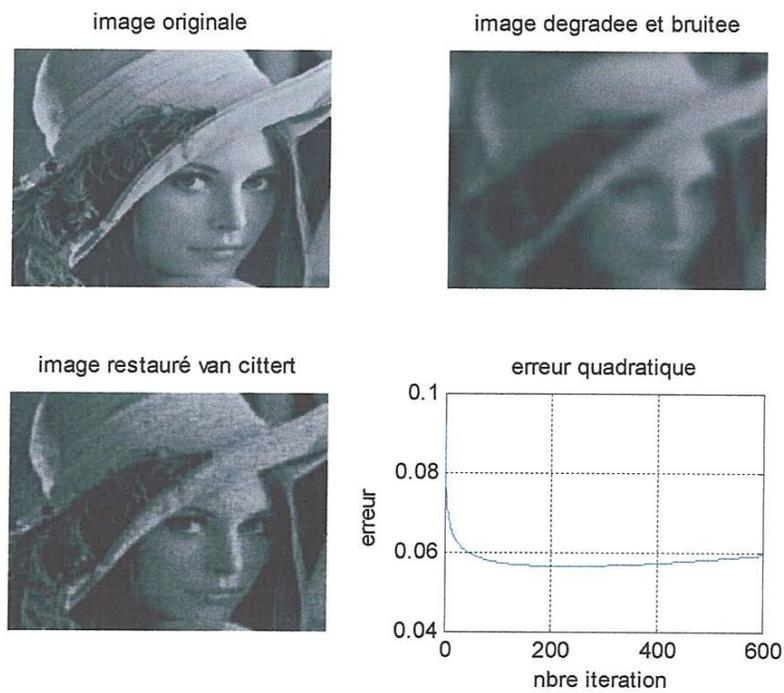


Figure.9: Méthode de van Cittert SNR= 35db ET 600Itération.

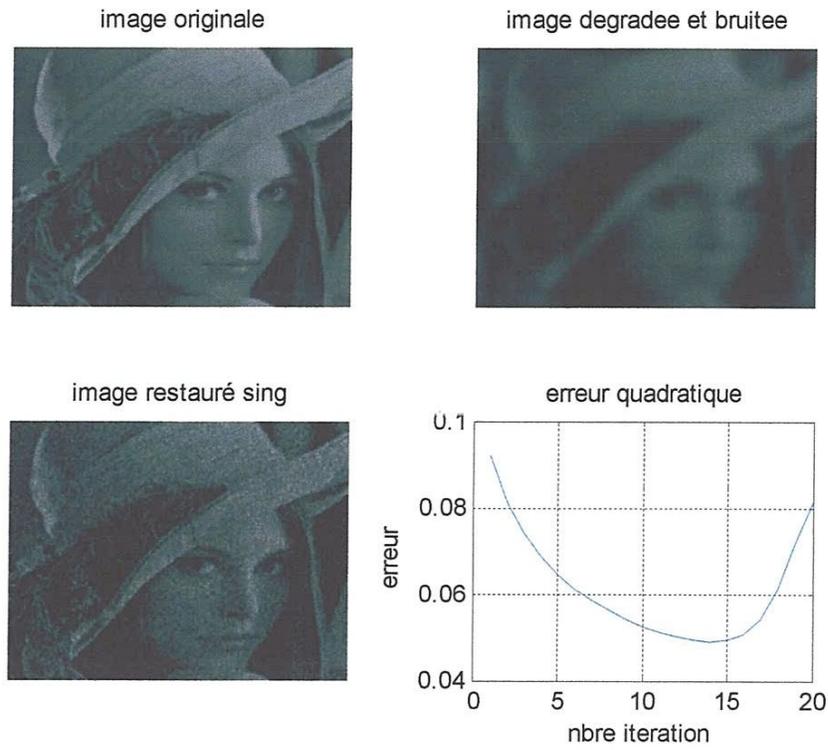


Figure.10 : Méthode de Singh $SNR=60db$ ET 20Itération.

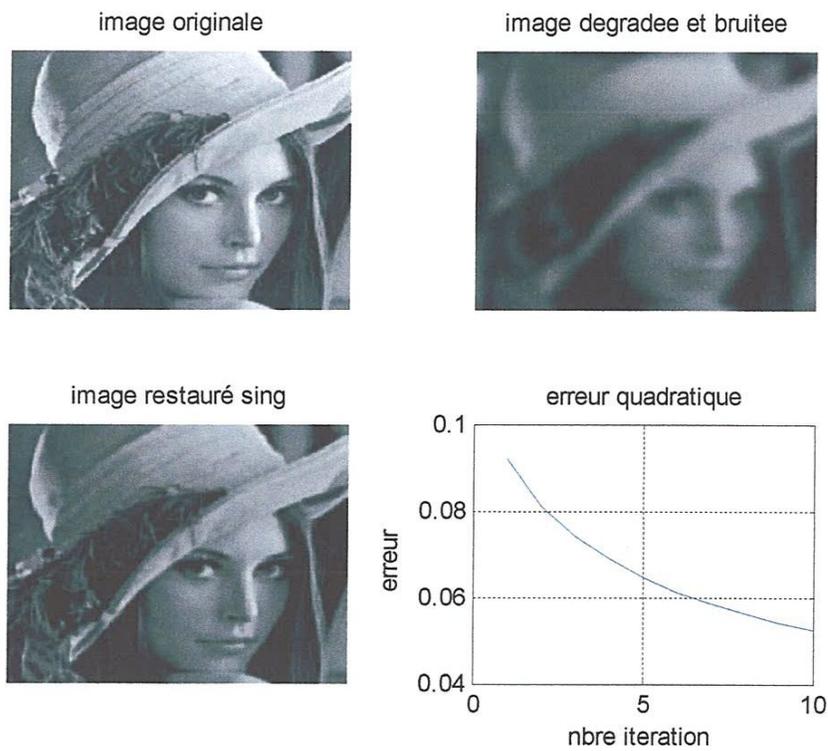


Figure.11 : Méthode de Singh $SNR=60db$ ET 10Itération.

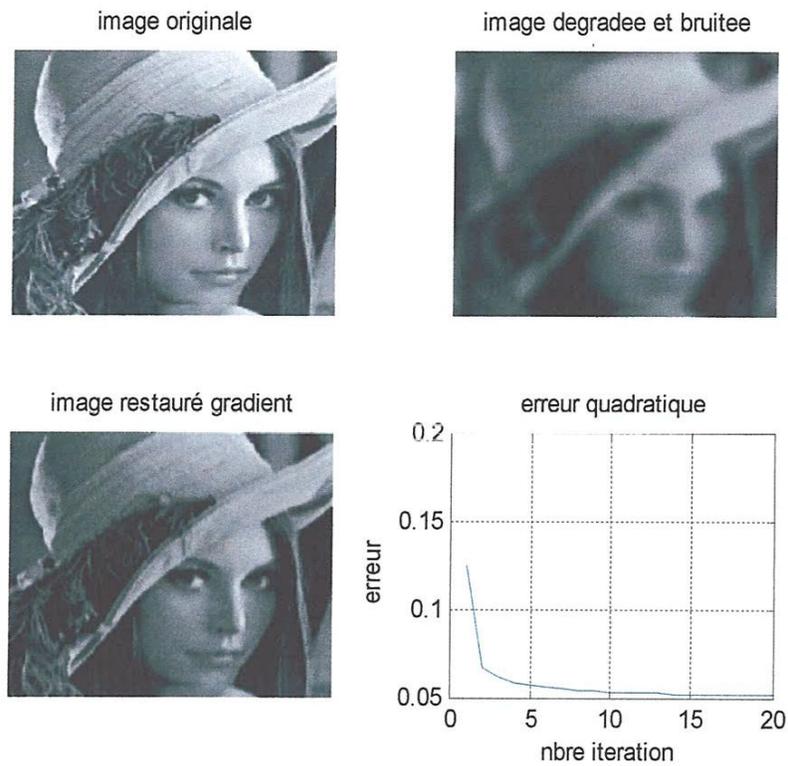


Figure.12 : Méthode de Gradient SNR=60db ET 20Itération.

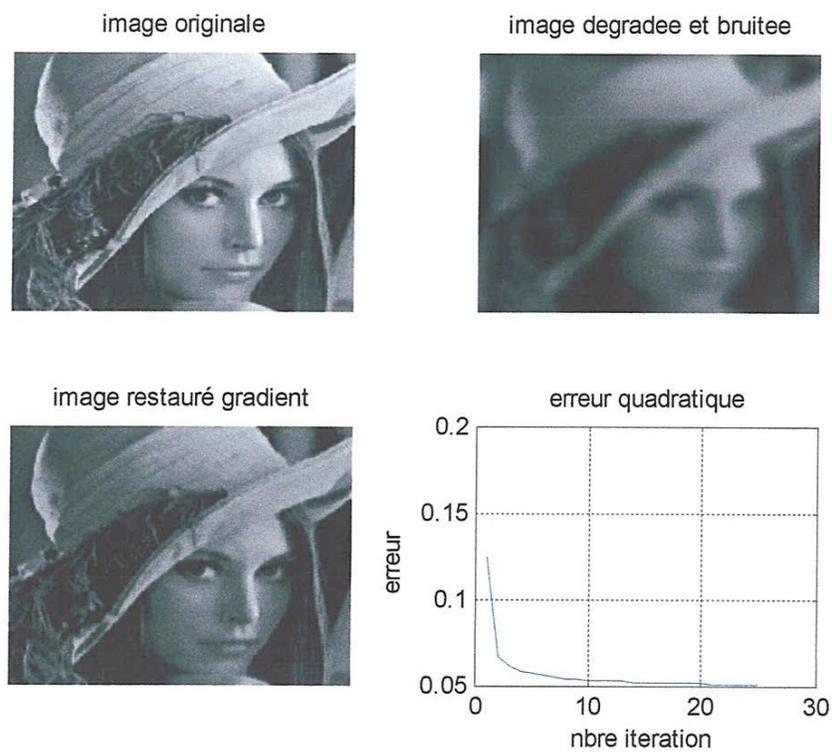


Figure.1 : Méthode de gradient SNR=60db ET 25Itération.

Chapitre

La Régularisation

Chapitre.II

La Régularisation.

II.1. Méthode des Moindres Carrés.....	25
II.2. Méthode de Tikhonov Miller.....	26
II.3. Application	29

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre de la modélisation du signal à restaurer comme étant un signal déterministe. Tout d'abord nous rappelons brièvement la méthode des moindres carrés[8].

L'utilisation d'une telle approche pour restaurer des signaux bruités conduit à des solutions instables. Comme le montre Demoment[9]. Ces insuffisances sont liées à la nature du problème de régularisation qui est un problème mal posé. L'une des techniques pour rendre le problème bien posé consiste à régulariser. Il est alors possible d'avoir des solutions ayant une meilleure stabilité numérique.

Nous présentons la méthode Tikhonov-Miller[10]. Qui est une méthode de régularisation relevant de la technique de régularisation. Sa mise en œuvre pratique se fait assez souvent en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT Fast Fourier Transform).

Ce qui peut générer un 'effet de repliement de spectre'. Il s'ensuit donc une perte d'information lorsque l'on effectue le passage entre les deux représentations temporelles et fréquentielle et donc une impossibilité de reconstruire le signal utile sans erreur. Un autre inconvénient résulte du fait que si le modèle du capteur n'est pas invariant dans le temps, la méthode de Tikhonov-Miller n'est pas fonctionnelle.

Ces constats nous ont conduits à introduire une autre méthode de régularisation relevant de la technique de la commande optimale. Elle a été élaborée par Thomas [11]. Et est basée sur la théorie de la commande. L'approche de Thomas offre l'avantage de s'appliquer au modèle non stationnaire et prend en compte les conditions initiales du signal. Quelques exemples nous permettront d'illustrer le comportement des méthodes évoquées à l'égard des bruits de mesure.

II.1. Méthode des Moindres Carrés

La discrétisation de l'équation de convolution (1.3) sous la forme (1.6) par une méthode de quadrature[9]. Conduit à une équation algébrique de convolution discrète qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{y}_m = \underline{W} \underline{u} + \underline{v}_2 \dots\dots\dots(2.1).$$

u : Est un vecteur de dimension N contenant l'ensemble des inconnues du problème.

y_m : Est un vecteur de dimension M contenant l'ensemble des observations.

v₂ : Est un vecteur de dimension N contenant les termes correspondant au bruit de mesure sur les observations et de matrice de variance $\sigma_{v_2}^2 I$.

W : Est une matrice circulante Toeplitz de dimensions (M×N) connue, ne dépendant que du noyau du système de mesure.

$$(\underline{y}_m - \underline{W} \underline{u})' (\underline{y}_m - \underline{W} \underline{u}) \dots\dots\dots(2.2).$$

On recherche le signal u minimisant :

✓ Si la matrice (**W'****W**) est non singulière, on obtient la solution suivante :

$$\underline{u} = (\underline{W}' \underline{W})^{-1} \underline{W}' \underline{y}_m \dots\dots\dots(2.3).$$

Les étapes permettant d'aboutir à l'équation précédente ainsi qu'une étude détaillée des limites d'une telle approche sont établies par Demoment dans[9]. Notons qu'en général les matrices W et W'W sont mal conditionnées, voire même singulières.

Tout comme la solution inverse généralisée que l'on peut obtenir à partir de l'équation (1.4) et de la transformée inverse de Fourier, la solution au sens des moindres carrés de norme minimale n'assure que la condition d'unicité de la solution quand elle existe mais le problème de la stabilité ou de la sensibilité aux bruits de mesure n'est pas résolu.

Une estimation par moindres carrés peut fournir une solution à variance minimale dans la classe des estimateurs non biaisés sans pour autant que la solution soit acceptable. Mou-Yan et Rolfunbehauen[12]. On montré que la structure d'une matrice circulante induit Une forte corrélation parmi les lignes. Ce qui a pour conséquence d'avoir une matrice W mal

conditionnée. Pour que la matrice W ait un meilleur conditionnement, ils proposent de substituer à la matrice circulante une matrice aperiodique. Une telle modification permet d'avoir des résultats numériquement plus stables.

Etant donné que les résultats obtenus en adoptant un critère des moindres carrés simple ne sont pas satisfaisants même pour des signaux faiblement bruités, l'introduction de contraintes pour améliorer la stabilité des résultats a donné lieu à de nouvelles approches.

II.2 Méthode de Tikhonov-Miller

La transformation du problème initial mal posé en un problème bien posé afin d'obtenir des résultats plus stables peut consister à régulariser le problème initial en introduisant une information a priori sur la solution. Pour estimer «au mieux» le signal original à une partie du signal enregistré, un critère de qualité quadratique est utilisé. Ce critère établit un compromis entre deux composantes antagonistes qui sont la précision du signal estimé et la stabilité numérique.

$$J_S(\underline{u}) = \|\underline{y}_m - W\underline{u}\|_{Q_2}^2 + \alpha \|\underline{u}\|_{Q_1}^2 \dots\dots\dots (2.4).$$

Où :

α a le double rôle d'établir des conditions sur u et d'assurer la stabilité de la solution[13]. La minimisation de la fonctionnelle (3.4). Conduit à la solution proposée par Miller [13]. La solution est obtenue par dérivation et s'écrit :

$$(\alpha R' Q_2 R + W' Q_1 W)\hat{u} = W' Q_1 \underline{y}_m \dots\dots\dots (2.5).$$

Un calcul direct de \hat{u} nécessiterait l'inversion d'une matrice de dimensions élevées. Ce qui entraîne un temps de calcul important (d'autant plus grand que le calcul est répété pour de multiples valeurs de α).

De plus, si l'on recherche une solution devant satisfaire des contraintes, l'inversion directe de l'équation (3.1) ne permettra pas d'introduire ces contraintes dans la recherche de solutions.

Pour toutes ces raisons, la solution \hat{u} est approximée par une méthode itérative similaire à la méthode de Mercereau et al[14]. Décrite ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= y_m \\ \hat{u}_{k+1} &= (I - \beta \cdot \alpha^2 R' Q_2 R) \hat{u}_k + \beta \cdot W' Q_1 (y_m - W \hat{u}_k) \\ \hat{u}_k - O(\hat{u}_{k+1}) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.6).$$

Le coefficient α est le coefficient de régularisation dont la valeur est inconnue à priori. Sa détermination conduit à de nombreux essais.

Hunt a abordé le problème sous un aspect stochastique et a déterminé l'expression du biais et de la variance pour la solution (3.5). Il a constaté que le biais varie proportionnellement à α tandis que la variance varie de façon inversement proportionnelle, ce qui suggère l'existence d'une valeur optimale pour α .

Cette dernière ne peut être calculée dans la mesure où la vraie solution u n'est pas connue. Plus récemment des algorithmes adaptatifs ont été proposés par Katsaggelos[15]. Et Titeringhton[12].

Pour fixer la valeur de α mais cette procédure ne semble pas tellement améliorer la qualité de la restauration par rapport à une détermination empirique.

Le coefficient β est un paramètre qui intervient sur la rapidité de convergence de l'algorithme (3.6). On peut choisir β tel que :

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \dots\dots\dots (2.7).$$

Où :

λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice $(\alpha^2 R' Q_2 R + W' Q_2 W)$, O est un opérateur de projection sur un domaine convexe.

Les matrices Q_1 et Q_2 doivent être choisies sur la base de connaissances à priori sur le signal à estimer de minimiser l'erreur d'estimation. Lorsque l'on ne dispose d'aucune information, on choisit Q_1 et Q_2 tels que $Q_1 = Q_2 = I$. Certains auteurs tels Biemond[16]. Katsaggelos[16]. Ont développés des algorithmes pour un choix optimal des matrices Q_1 et Q_2 .

La matrice R permet d'imposer une contrainte sur la régularité des différences premières ou secondes du signal u .

Nous avons vu que le problème de restauration peut se ramener à la synthèse d'un système approchant le filtre inverse idéal. Une autre démarche souvent utilisée consiste à effectuer la synthèse d'un signal $\hat{u}(t)$ tel que convolué avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ donne une bonne approximation $y(t)$ du signal enregistré $y_m(t)$.

Après avoir rappelé brièvement la méthode des moindres Carrés, nous avons présenté une méthode dite régularisant permettant de résoudre le problème de restauration. La méthode de Tikhonov-Miller reste utilisable pour tout système linéaire stationnaire causal ou non causal.

Pour résoudre le problème de robustesse par rapport au bruit des méthodes décrites ci-dessus, il est assez souvent proposé de filtrer le signal enregistré. Ce pré filtrage consiste à faire rendre le niveau de bruit proche de zéro. Désignons la réponse impulsionnelle du filtre, assurant le filtrage, par g et sa transformée de Laplace par $G(s)$. Pour effectuer le pré filtrage, Schafer et al[17]. Utilisent la procédure suivante :

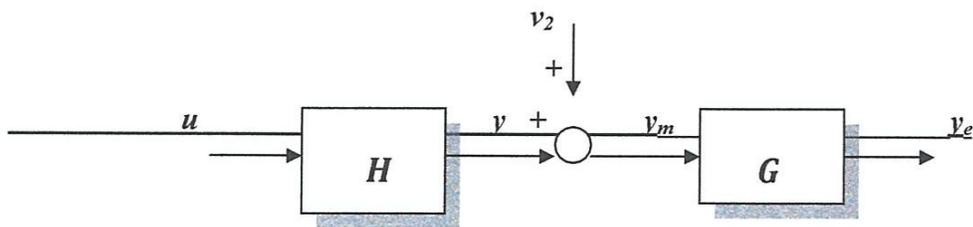


Figure.13 : Schéma de Principe de la Procédure de Schafer et al.

$$y_e = g * y_m \dots\dots\dots(2.8).$$

Et

$$h_e = g * h \dots\dots\dots(2.9).$$

Ce qui conduit à la configuration suivante :

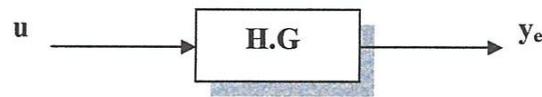


Figure. 14: La Nouvelle Configuration Pour la Restauration.

Les versions filtrées de y_m et h respectivement y_e et h_e sont ensuite substituées dans l'équation (3.5) pour la procédure de restauration. Schafer et al[17]. Suggèrent de prendre pour g un filtre passe bas ayant une bande passante deux fois plus grande que h . Il faudrait souligner que l'utilisation d'un filtre optimal à la place d'un simple filtre passe bas permettrait d'obtenir de meilleurs résultats dans la phase de restauration. En effet, si le filtrage est trop violent certaines informations contenues dans le signal enregistré peuvent être atténuées et s'il est trop faible il risque de ne pas assez filtrer le bruit de mesure.

✚ **Le rapport signal sur bruit.** Le rapport signal sur bruit est donné par la relation suivante :

$$SNR = 10 * \log \frac{\|y\|^2}{\|v\|^2}$$

L'erreur moyenne quadratique non observable (erreur vraie) est donnée par l'expression:

$$EMQN = \|u - \hat{u}\|^2$$

II.3. Régularisation par la méthode de Tikhonov-Miller

Le paramètre de régularisation est théorique, c'est-à-dire qu'il a été calculé à partir du bruit ajouté ainsi que du terme de régularité de l'image $r^2 = \|Du\|^2$

$$\alpha_{Miller} = \frac{\|b\|^2}{r^2}$$

La qualité du résultat ne dépend plus que du bruit, ainsi que du choix de l'opérateur de régularisation D , on prend $D=I$ (identité).

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus.

II.3. Restauration non itérative

Image originale



Image dégradée



Image restaurée



Figure.15 : Méthode des Moindres Carrés Sans Bruit ; Avec Bruit l'image Complètement Dégradée.

Cette méthode n'est pas suffisante pour restaurer l'image, il faut donc nous tourner vers les méthodes itératives. Cependant, l'image peut être Restaurée de manière satisfaisante avec cette méthode, moyennant le réglage du terme de régularisation. De plus elle constitue une bonne approximation.

II.4. Restauration itérative

On intègre l'algorithme de Singh et de Van Cittert dans la méthode de Tikhonov Miller, pour des rapports signal/bruit de 35dB et 60dB, on obtient les résultats suivants :

II.4.1. Restauration par l'algorithme de Singh

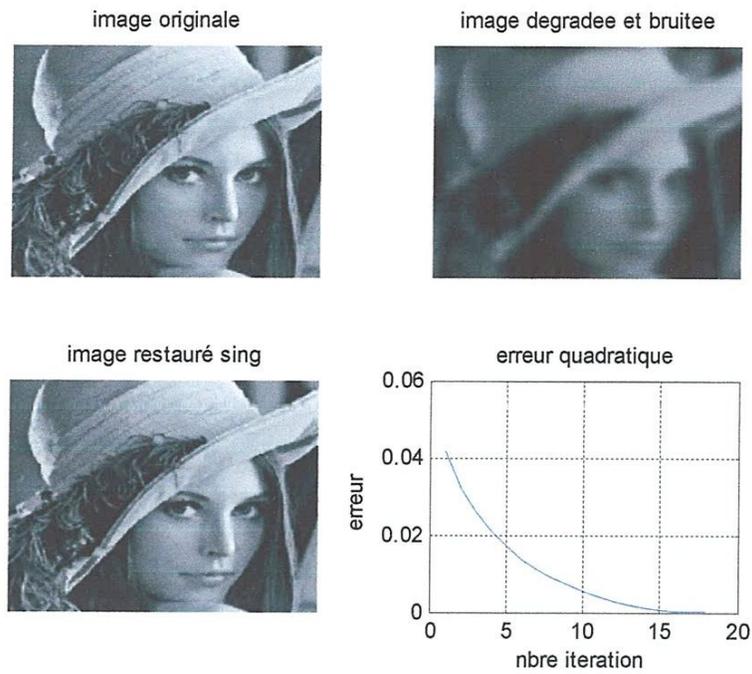


Figure.16 : Restauration Itérative Par la Méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 18 Itération.

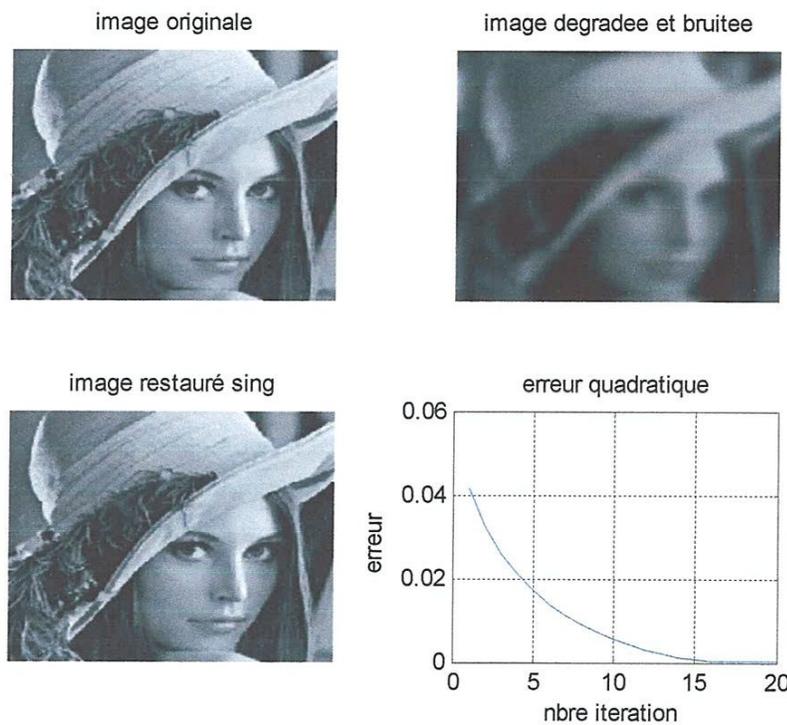


Figure.17 : Restauration Itérative Par la Méthode de Tikhonov Miller avec SNR=60dB et 20 Itération.

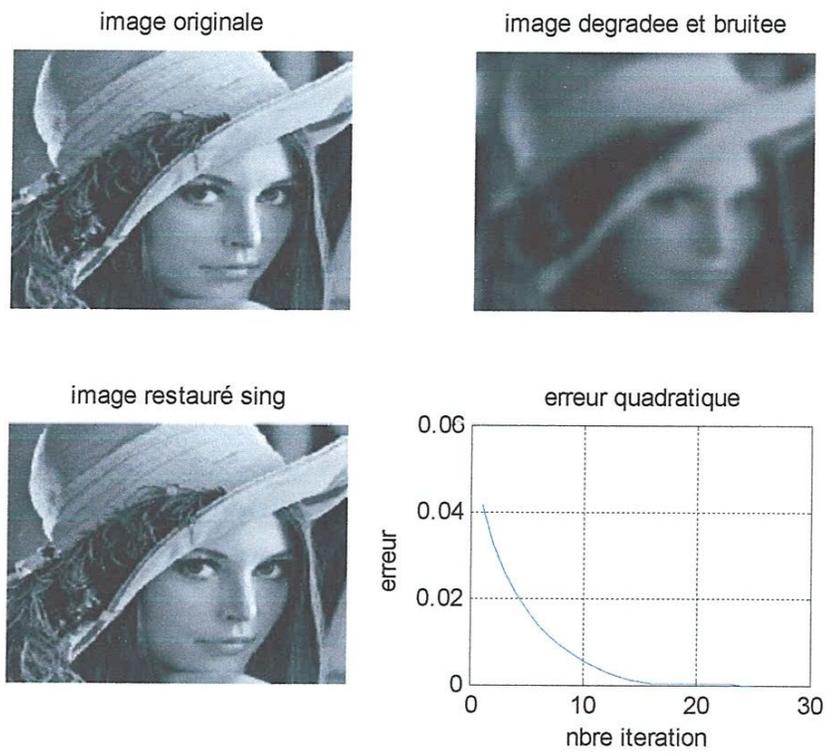


Figure.18 : Restauration Itérative ar la méthode de Tikhonov Miller avec SNR=60dB et 25 Itération

II.4.2. Restauration par l'algorithme de Van Cittert

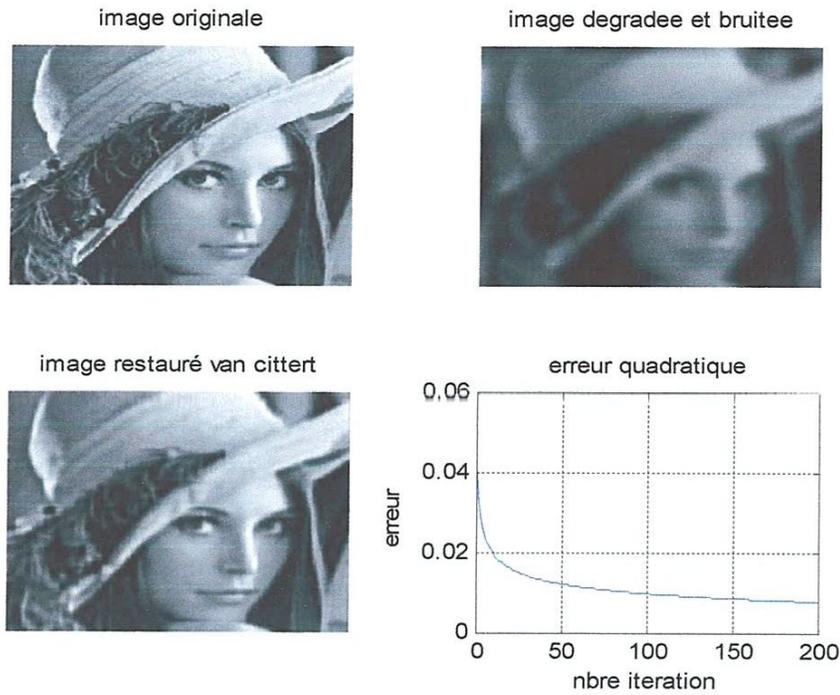


Figure.19 : Restauration Itérative Par la Méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 200 Itérations

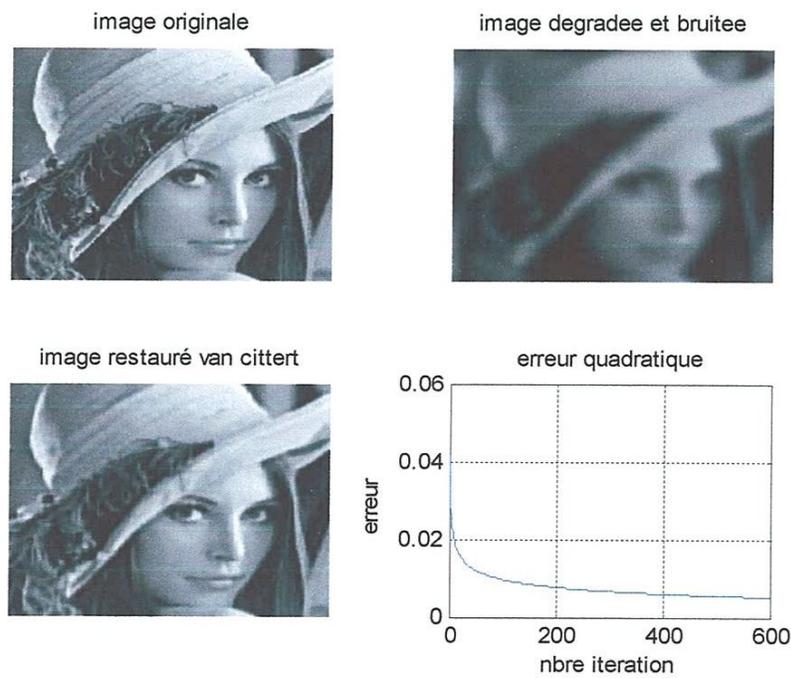


Figure.20: Restauration Itérative Par la Méthode de Tikhonov Miller avec SNR=35dB et 600 Itérations

II.4.3. Comparaison

Le tableau ci-dessous présente l'erreur non observable dans l'état de convergence des régularisations effectuées avec les différents algorithmes utilisés dans la méthode de Tikhonov-Miller:

Tableau.1: Comparaison Entre les Deux Algorithmes Restaurée

L'algorithme	SNR	Nombre d'itérations	Erreur non observable EMQN
Van Cittert	35	200	0.0076
	60	600	0.0050
Singh	35	18	0.0233
	60	20	0.0083

D'après les résultats obtenus, on remarque que les images restaurées par la méthode de Tikhonov-Miller se dégradent après un certain nombre d'itérations. La procédure repose sur un seul paramètre de régularisation.

L'utilisation de l'algorithme de Van Cittert et de Singh modifié pour cette technique, permet de remarquer que l'algorithme de Singh converge plus rapidement que celui de Van Cittert, puisque ce dernier est de convergence linéaire contrairement à l'algorithme de Singh qui est de convergence quadratique, on remarque aussi que les images restaurées par l'algorithme de Singh sont obtenues pour un nombre d'itérations inférieure à celui de l'algorithme de Van Cittert, comme le montre le graphe de la variation de l'erreur moyenne quadratique non observable de chaque algorithme **tableau1**. Cet exemple de régularisation nous amène à faire quelques remarques :

- ✚ **Mathématiquement** l'image régularisée est plus proche de l'image réelle que l'image mesurée, mais il comporte des composantes négatives et de fortes dégradations. Ces deux caractéristiques sont directement liées à la quantité de bruit et donc au terme de régularisation.
- ✚ **La contrainte** de positivité ne peut être appliquée sans conséquences inacceptables pour l'interprétation physique : la solution consiste alors à multiplier par un facteur toute l'image restaurée pour la suppression des composantes négatives.

Chapitre III

Régularisation Par L'introduction D'un modèle de Solution

Chapitre.III

Régularisation Par L'introduction D'un Modèle de Solution.

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de régularisation basée sur l'apport d'informations concernant directement l'image recherchée. Cette nouvelle méthode est inspirée à la fois de l'inversion directe de l'équation de convolution dans l'espace de Fourier, de la régularisation de Tikhonov-Miller, et de l'application de contraintes. Mais elle se distingue notamment par l'introduction d'informations sous la forme d'un modèle de la solution, qui évoluera au fil de l'algorithme.

III.1. Introduction du modèle de la solution

La méthode de restauration par régularisation de Tikhonov-Miller. Si on considère le critère à minimiser, on s'aperçoit que le terme de régularisation fait référence uniquement à la solution recherchée, et ceci de manière globale, c'est à dire que la propriété que l'on souhaite imposer à \hat{u} s'applique sur tout son intervalle de définition, sans distinguer les différentes zones de l'image. Barakat et al[18]. ont proposé une extension de cette régularisation en introduisant un terme \hat{u}_{mod} représentant un modèle a priori :

$$J_2(u, u_{\infty}) = \|D(u - u_{mod})\|^2 \dots\dots\dots (3.1).$$

Ce modèle traduit les propriétés locales de l'image telles que les discontinuités, les zones homogènes, etc[18]. Ainsi, on peut introduire des informations a priori sur la solution de manière locale, tout en manipulant les caractéristiques globales de la solution par l'opérateur D et le paramètre de régularisation α le critère à minimiser est alors :

$$J = \|y - H\hat{u}\|^2 + \alpha \|D(\hat{u} - u_{mod})\|^2 \dots\dots\dots (3.2).$$

Et la solution recherchée devient :

$$\hat{u} = (H^T H + \alpha D^T D)^{-1} (H^T y + \alpha D^T D u_{mod}) \dots\dots\dots (3.3).$$

On note que si on n'a aucune information à apporter sous forme d'un modèle u_{mod} est nul, et on retrouve le cas de régularisation de Tikhonov Miller classique.

III.1.1. Equivalence dans le domaine de Fourier

Toutes les théories que nous venons de voir ont leur équivalent dans le domaine de Fourier lorsque les convolutions sont circulaires. La régularisation classique s'écrit :

$$U_{TM} = \frac{H^* Y}{|H|^2 + \alpha |D|^2} \dots\dots\dots (3.4).$$

Alors que dans le cas de l'introduction du modèle, on a :

$$\hat{U} = \frac{H^* Y + \alpha |D|^2 U_{mod}}{|H|^2 + \alpha |D|^2} \dots\dots\dots (3.5).$$

L'avantage certain d'effectuer le travail dans l'espace de Fourier est la rapidité des calculs, par comparaison avec les calculs matriciels, exigeant le maniement de matrices de grandes dimensions.

Par contre certaines méthodes ne peuvent être transposées dans l'espace de Fourier. Les opérateurs comme la contrainte de positivité ou d'amplitude n'ont pas d'équivalent dans le domaine de Fourier.

III. 2. Justification de l'emploi d'un modèle de la solution

Nous avons vu que le mauvais conditionnement du système à résoudre entraîne l'existence de nombreuses solutions, dont la plupart sont instables. La régularisation réduit l'ensemble des solutions possibles à un ensemble de solutions d'amplitude bornée et de spectre assez lisse, selon l'opérateur de régularisation choisie.

Les contraintes dures, quant à elles, imposent à la solution de faire partie des images positives, et éventuellement définies sur un intervalle donné. Nous avons également conclu

Que les méthodes itératives étaient bien plus performantes que l'inversion simple de l'équation de convolution régularisée, grâce à la manière d'introduire les contraintes.

Nous proposons maintenant de compléter les informations apportées par l'introduction d'image sensée décrire au mieux les variations locales de l'image recherchée. Cet apport d'informations va encore plus restreindre l'ensemble des solutions. La question est maintenant de savoir si le modèle va dans le sens de nous rapprocher de la solution réelle, qui est inaccessible. Il est évident qu'apporter des informations manquant de précision ou erronées dirigera la méthode vers une solution qui ne sera pas en accord avec la réalité, puisque l'équation à résoudre sera fausse.

Par contre, si le choix de l'information apportée est pertinent, les résultats de la restauration peuvent être considérablement améliorés par rapport aux méthodes classiques. La précision de la solution dépendra directement de la précision du modèle apporté.

Comment être sûre que la modification du critère de régularisation J_2 n'entraînera pas une dérégularisation du problème ? Lors de l'introduction du modèle dans J_2 , on impose à la différence obtenue $u - u_{mod}$ d'être régulière.

Or le modèle de solution que l'on apporte u_{mod} doit être forcément de la même nature que l'image que l'on cherche, c'est à dire que u_{mod} doit être bornée, et ayant un spectre de fréquence relativement lisse. Ainsi, si le critère J_2 impose seulement à la différence $u - u_{mod}$ d'être régulière, u ne peut pas être instable. La régularisation du système est donc conservée.

III.3. Influence du modèle

La qualité du modèle va beaucoup influencer le résultat final. Si on doit passer de modèle, on se retrouve dans le cas de Tikhonov-Miller, qui n'est finalement qu'un cas particulier où le modèle est nul. Le cas idéal correspondrait à celui où le modèle est égal à l'image réelle u . \hat{u} s'écrirait alors :

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &= (H^T H + \alpha D^T D)^{-1} (H^T y + \alpha D^T D u) \\
 &= (H^T H + \alpha D^T D)^{-1} (H^T H(u + n) + \alpha D^T D u) \dots\dots\dots (3.6). \\
 &= (H^T H + \alpha D^T D)^{-1} (H^T H + \alpha D^T D) u + (H^T H + \alpha D^T D)^{-1} H^T H n \\
 &= u + A^{-1} H^T H n \\
 &= u + A^{-1} H^T b
 \end{aligned}$$

Où :

n est le bruit ramené à l'entrée.

On voit ici que la solution trouvée est très proche de l'image originale. En effet le terme additionnel $A^{-1} H^T b$ est négligeable devant u : l'inversion de la matrice A ne pose pas de problème puisqu'elle est bien conditionnée, grâce au terme de régularisation $\alpha D^T D$. Il n'y a donc pas d'amplification du bruit, et l'image restaurée est identique à l'image d'entrée u au " bruit de restauration " $A^{-1} H^T b$ près.

Bien sur cet exemple n'est là que pour prouver que la méthode du modèle est efficace, si ce dernier est correctement choisi. L'image réelle n'est pas accessible puisque c'est justement elle que l'on recherche par restauration. Nous devons donc chercher une image qui contiendra effectivement des informations utiles sur x , sans chercher à tout prix à ce que la solution soit adaptée à un modèle arbitraire. Nous allons voir maintenant de quels moyens nous disposons pour utiliser au mieux cette méthode introduisant un modèle de la solution.

III.4 Expressions du modèle de la solution

3.4.1 Minimisation de l'erreur de reconstruction

La principale difficulté consiste à introduire un modèle contenant toutes les propriétés connues a priori sur l'image originale recherchée. Barakat[18]. Propose une paramétrisation du modèle, qui pourrait donner plus de souplesse à son approche. Ainsi l'image à restaurer est considérée comme un ensemble d'objets à caractère lisse. Chaque objet peut être alors modélisé par une gaussienne, et défini par un paramètre (a, b, c...) qui décrit sa position, son amplitude, etc....

On peut alors chercher le modèle tel que l'écart quadratique entre l'image observée y et l'image reconstruite $H\hat{u}$ soit minimal [19]. Ce modèle assure ainsi l'obtention d'une solution \hat{u} qui est, une fois convoluée par la réponse impulsionnelle, la plus fidèle aux données mesurées (mais elle n'est pas nécessairement la plus proche de l'image réelle u !).

La recherche de ce modèle passe par la minimisation de l'erreur E_{mod}^2 entre la mesure et la reconstruction :

$$\begin{aligned}
 E_{mod}^2 &= \|y - \hat{y}\|^2 \\
 &= \|y - H\hat{u}\|^2 \\
 &= \left\| y - H \left(H^T H + \alpha D^T D \right)^{-1} \left(H^T y + \alpha D^T D u_{mod} \right) \right\|^2 \dots\dots\dots (3.7). \\
 &= \left\| y - H \left(A^{-1} H^T y \right) + H A^{-1} \left(\alpha D^T D u_{mod} \right) \right\|^2
 \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $A^{-1}H^T y = \hat{u}_{TM}$, et en développant le terme quadratique E_{mod}^2 on aboutit à la relation entre E_{mod}^2 , et l'erreur de reconstruction dans le cas classique de Tikhonov-Miller E_{TM}^2 :

$$E_{mod}^2 = E_{TM}^2 - 2\alpha y^T \left(I - H A^{-1} H^T \right) H B u_{mod} + \alpha^2 \| H B u_{mod} \|^2 \dots\dots\dots (3.8).$$

Si on note :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{D}.$$

On peut démontrer que la minimisation de cette erreur conduit à la détermination du modèle a priori u_{mod} tel que [12] :

$$u_{mod} = \frac{1}{\alpha} (HB)^T (HB)^{-1} (HB)^T \left(I - H^T A^{-1} H \right) y \dots\dots\dots (3.9).$$

III.4.2. Utilisation d'une image régularisée a priori comme modèle de la solution

Le fait d'utiliser comme modèle un vecteur minimisant l'erreur de reconstruction ne garantit pas la proximité du restaurée avec l'image recherchée, surtout en présence de bruit important. Dans ce cas il est préférable d'introduire des informations qui soient plus directement liées aux caractéristiques locales supposées l'image d'entrée.

On peut par exemple établir un modèle paramétrique décrivant les formes contenues dans l'image recherchée. En pratique, nous avons un autre moyen à la fois simple et fiable d'apporter des informations sur l'image réelle, en utilisant une image restaurée précédemment et sans modèle, solution intermédiaire entre la solution idéale, c'est à dire l'image d'entrée, et l'image mesurée. En effet une image restaurée même, si elle n'est pas assez précise, dans la description de l'image réelle, donne une bonne approximation de u .

Les caractéristiques de ce modèle de la solution sont directement liées à u , puisqu'il en est une approximation, mais à condition bien sûr d'avoir effectué cette " pré-restauration " dans de bonnes conditions, c'est à dire avec une régularisation suffisante. Ainsi, les caractéristiques du modèle ne dépendent pas des grandeurs de reconstruction.

De la même façon qu'une image non bornée \hat{u} peut donner une excellente reconstruction $\hat{y} = H\hat{u}$, un modèle de solution u_{mod} tiré de l'erreur de reconstruction peut ne pas être le meilleur choix. Dans le cas où l'on prend une image restaurée U_0 comme modèle, la solution s'écrit, dans l'espace de Fourier :

$$\hat{U} = \frac{H^*Y + \alpha|D|^2 U_0}{|H|^2 + \alpha|D|^2} \dots\dots\dots (3.10).$$

Il peut paraître curieux de réutiliser une image restaurée précédemment dans l'équation de convolution régularisée. Mais ce n'est ni plus ni moins que d'utiliser au maximum les informations sur la solution contenue dans la mesure, à travers l'image restaurée correspondante.

La régularisation impose des caractéristiques globales à la solution recherchée, alors que le modèle les rend plus locales. L'amélioration de la restauration est assez nette comparée à la méthode sans modèle, et légèrement supérieure avec le modèle déduit de la minimisation de l'erreur de reconstruction. Néanmoins, comme pour toutes les méthodes directes, les performances sont pauvres lorsqu'on compare les résultats avec ceux des itératives. De plus, une telle inversion conduit systématiquement à une solution plus ou moins

Oscillante, c'est à dire que certaines parties de l'image restaurée (celles où l'image mesurée est faible) sont négatives.

Le fait de contraindre à posteriori la solution pour qu'elle soit positive ne fait que la rendre " physiquement acceptable ", mais le résultat final est encore nettement insuffisant.

On a donc l'idée de boucler la méthode, en réitérant l'équation (3.5), avec un modèle variant à chaque itération. Le but est de calculer un modèle s'approchant au mieux de la solution réelle u au fil des itérations. La philosophie de l'algorithme est la suivante :

On prend comme 1^{er} modèle de la solution le résultat d'une restauration classique des données mesurées y

- ✚ L'équation (4.5) nous donne une solution estimée \hat{U} qui est, si le paramètre de régularisation a été correctement choisi, plus proche de la solution réelle U que Y .
- ✚ On attribue au \hat{U} le statut de " modèle de la solution ".
- ✚ On recalcule alors \hat{U} à l'aide de ce modèle, et on réitère le procédé.

L'algorithme aura donc l'expression finale suivante :

$$\hat{U}_{k+1} = \frac{H^*Y + \alpha|D|^2 U_{\text{mod}_k}}{|H|^2 + \alpha|D|^2} \quad \dots\dots\dots (3.11).$$

$$U_{\text{mod}_k} = TF[\hat{U}_k]$$

$$\hat{u}_k = TF^{-1}[\hat{U}_k]$$

$$U_{\text{mod}_0} = 0$$

C'est cet algorithme que nous avons utilisé dans ce travail. Il est très sensible à la valeur de α sa mise en œuvre dans l'espace de Fourier en fait un outil de régularisation très rapide. La philosophie de cet algorithme consiste en fait à chercher le meilleur modèle de la solution, et à une simple inversion de l'équation de convolution (régularisée) avec modèle. En prenant du recul, on voit que les itérations ne portent pas sur l'image mesurée elle-même, mais plutôt sur le modèle recherché.

Pour illustrer les performances de la technique proposée, nous appliquons cette approche à la restauration de quelques images.

III.5. Applications

III.5.1. Régularisation par recherche du meilleur modèle numérique de la solution

Dans ce paragraphe, nous allons exposer le principe de l'algorithme permettant la prise en compte d'un modèle numérique de la solution, qu'on appliquera à nos images. Dans un premier temps, nous étudierons l'influence des paramètres de régularisation, notamment les éléments qui constituent les conditions initiales de l'algorithme. Le modèle de le choisir correctement.

D'autre part, le terme de régularisation choisi pour une régularisation non itérative (inversion unique) n'est pas forcément adapté à un algorithme itératif. Son choix sera déterminant dans l'efficacité de la restauration.

III.5.1.1. Modèle parfait de la solution

Afin de valider cette théorie et de prouver qu'elle peut apporter une amélioration dans la restauration des images, nous allons nous placer dans les conditions idéales, c'est à dire dans le cas où le modèle est égal à l'image recherchée (mais toujours en présence de bruit). Avant cela, nous allons comparer les étapes successives qui nous ont amené à choisir notre méthode.

Lorsque qu'on n'apporte pas de modèle ($U_{mod} = 0$), on se trouve dans le cas particulier de l'inversion de l'équation de convolution avec régularisation de Tikhonov Miller. L'introduction du modèle modifie la solution obtenue et la rapproche de l'image originale si le modèle est correctement choisi. Les paramètres de régularisation sont tout aussi importants que dans la restauration sans modèle.

Lorsque ce dernier est égal à l'image originale, le résultat est sans appel, la solution est très proche de l'image recherchée. Ce cas ne sera évidemment jamais rencontré en dehors du test de la méthode, mais il permet de justifier l'emploi d'un modèle numérique de la solution.

Notons que dans cette série de comparaisons, nous avons légèrement augmenté le paramètre de régularisation α , jugeant que l'image restaurée avec un paramètre égal à α_{miller} comparait des dégradations trop marquées.

Les figures 21 et 22 comparent la restauration de l'image test sans modèle, puis avec un modèle parfait, avec un paramètre $\alpha = 0.1$.

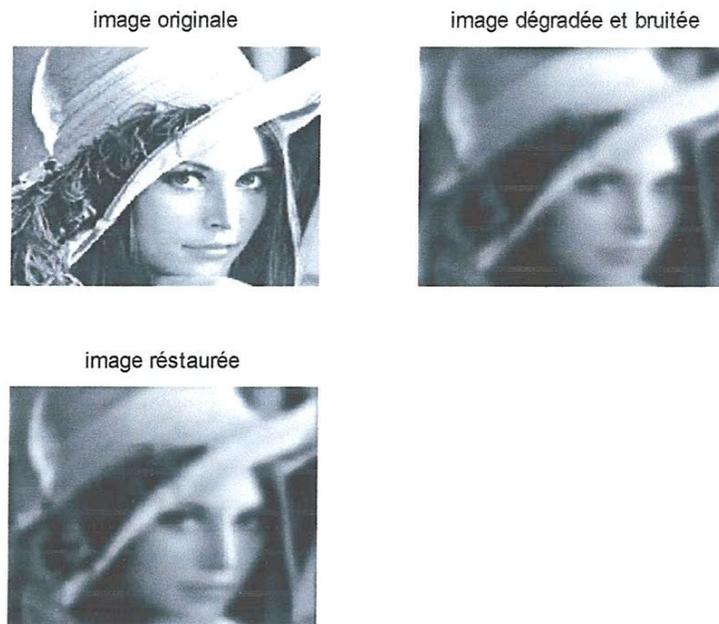
Régularisation de l'image test sans modèle SNR=35db

Figure. 21 : Régularisation de L'image Test Sans Modèle ($U_{mod} = 0$).

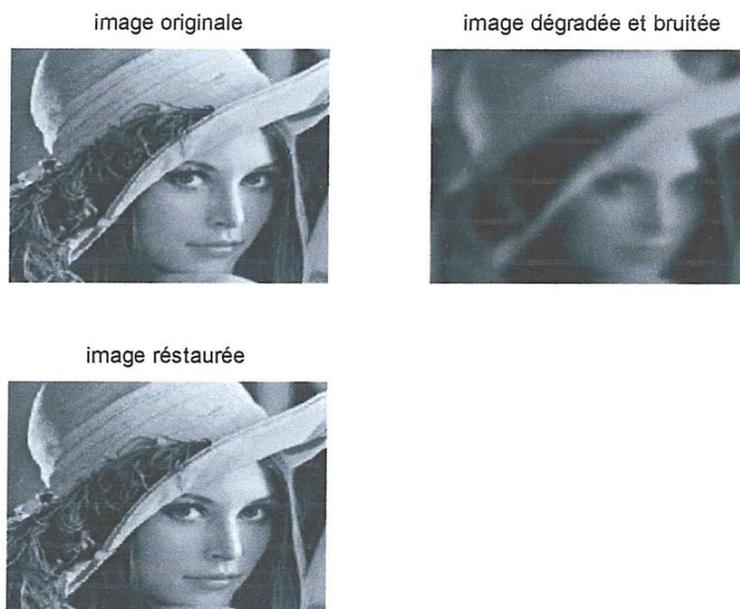
Régularisation de l'image test avec modèle parfait SNR=35db

Figure.22 : Régularisation de L'image Test avec Modèle Parfait.

Même en présence de bruit, la méthode conduit à une image restaurée, pratiquement égale à l'image recherchée (réelle). L'apport d'information par le modèle a donc fortement contribué à nous rapprocher de la solution.

Ce cas est extrême mais il laisse penser qu'un modèle intermédiaire entre le modèle parfait et le modèle nul n'apporterait un gain de performance non négligeable pour la restauration.

Afin de vérifier l'efficacité d'une méthode de restauration, il est nécessaire de calculer l'erreur commise entre l'image réelle et l'image restaurée d'une part, appelée erreur non observable ou erreur vraie.

On rappelle que l'image reconstruite est le résultat de la restauration de l'image restaurée par la réponse impulsionnelle (PSF).

L'erreur vraie n'est bien sûr accessible qu'en simulation, mais elle permet de comparer les performances théoriques des différentes méthodes.

III.5.1.2. Modèle numérique tiré de l'erreur de reconstruction

Dans ce paragraphe, nous avons exposé la possibilité de calculer le modèle numérique à partir de l'image reconstruite.

Le critère de minimisation de l'erreur de reconstruction $\|y - H\hat{u}\|^2$ est couplé avec le critère de minimisation de $\|D(\hat{u} - u_{mod})\|^2$ pour déterminer la meilleure solution \hat{U} il nous faut aussi un critère supplémentaire si l'on souhaite calculer analytiquement un modèle de la solution u_{mod} . Une fois \hat{u} exprimé en fonction de y et de u_{mod} , on peut imposer à u_{mod} de satisfaire la condition suivante : L'erreur de reconstruction E_{mod}^2 doit être minimale (3.9). Cette équation nous donne le modèle analytique minimisant l'erreur de reconstruction, mais il n'est pas dit que l'image restaurée soit la plus proche possible de l'image réelle. L'erreur est présentée dans le tableau 2.

Régularisation de l'image test avec Modèle numérique tiré de l'erreur de reconstruction :
SNR=35db

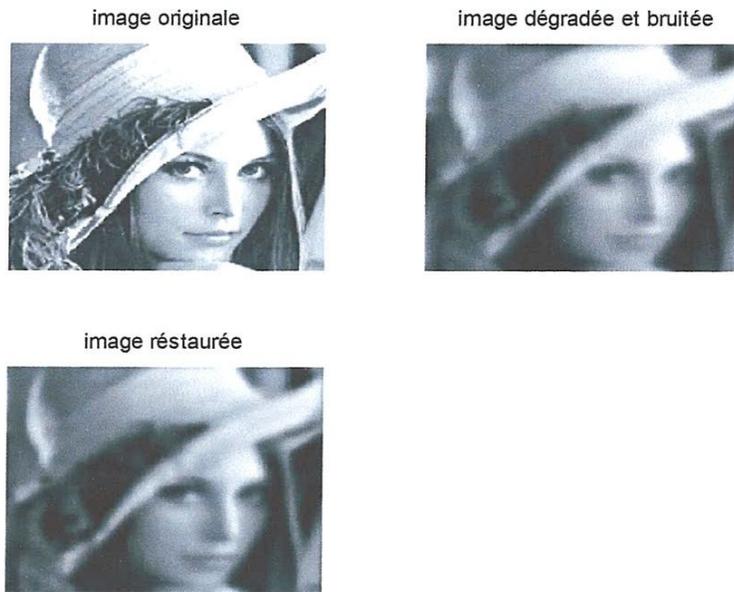


Figure .22 : Régularisation de L'image test avec Modèle Tiré par L'erreur de Reconstruction.

III.5.1.3 Utilisation de l'image restaurée a priori comme modèle numérique

Il est assez difficile de construire un modèle paramétrique de la solution recherchée : le nombre de paramètres augmente considérablement si l'on souhaite avoir un modèle précis. Le résultat d'une restauration classique constitue lui-même un modèle numérique qui est une alternative au modèle paramétrique.

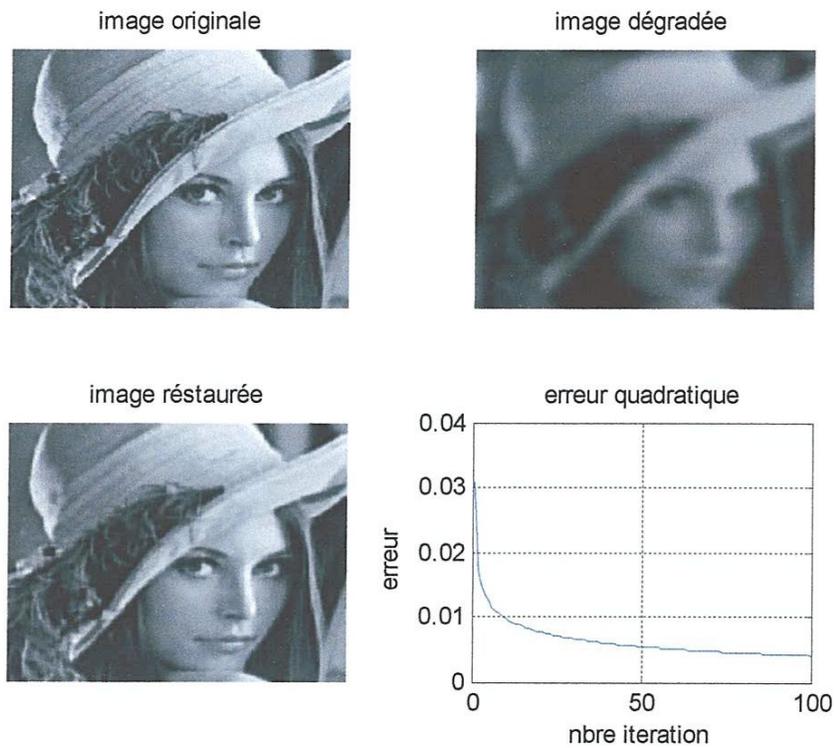
Régularisation de l'image test avec Modèle égal à l'image restaurée précédemmentSNR=35dB

Figure.23 : Régularisation de L'image Test Avec Modèle Restaurée Précédemment.

Le modèle égal à l'image restaurée précédemment offre le meilleur résultat, vient ensuite le modèle basé sur la minimisation de l'erreur de reconstruction, puis la restauration classique sans modèle. Et la figure 3.5 compare la restauration, dans les mêmes conditions que précédemment (image test, SNR=35dB), avec les différents modèles rencontrés.

III.5.1.4. Comparaison

Le **tableau 2** présente l'erreur non observable de la restauration effectuée avec les différents modèles numériques de la solution :

Tableau.2 : L'erreur Non Observable de la Restauration, Dans les Mêmes Conditions que Précédemment (image test, SNR=35dB).

<i>Modèle</i>	<i>Erreur non observable</i>
<i>Sans modèle</i>	<i>0.0173</i>
<i>Tiré de E_{mod}^2</i>	<i>0.0710</i>
<i>Modèle parfait</i>	<i>2.5151e-031</i>
<i>Restaurée précédemment</i>	<i>0.00400.</i>

Ce tableau confirme que la proximité du modèle numérique avec la solution apporte le meilleur résultat. L'image restaurée par la méthode classique, régularisé et contrainte, constitue le meilleur modèle que l'on puisse prendre sans apport d'informations à priori.

Le modèle tiré de l'erreur de reconstruction garantit la plus petite erreur entre l'image mesurée et l'image reconstruite (cette erreur est sensiblement la même que celle obtenue avec modèle parfait), mais l'erreur n'est que légèrement diminuée par rapport à celle obtenue sans modèle si l'on souhaite intégrer le résultat de cette restauration dans l'algorithme itératif avec modèle.

Nous discuterons plus loin de la valeur correcte du paramètre de régularisation à utiliser.

II.5.2. Choix du terme de régularisation

L'algorithme de restauration par recherche du meilleur modèle, tel qu'il a été décrit dans le chapitre précédent, nécessite le réglage plus ou moins minutieux du terme de régularisation $\alpha|D|^2$. Nous allons voir en détail son influence et son réglage optimal.

III.5.2.1 Choix du filtre D

Le but de l'opérateur de la régularisation est à l'origine de limiter la quantité de hautes fréquences contenues dans la solution estimée. Il est donc naturel de choisir un filtre passe-haut pour l'opérateur D.

L'expérience a montré que ce filtre doit être très doux, c'est-à-dire que son spectre ne doit pas comporter de zéros ou de zones à très faible niveau, sous peine d'obtenir une image

restaurée non régularisée. L'équation de restauration classique par régularisation de Tikhonov-Miller s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$U_{TM} = \frac{H^* Y}{|H|^2 + \alpha |D|^2} \dots\dots\dots (3.12).$$

Cette équation montre que le terme $A = |H|^2 + \alpha |D|^2$ ne doit pas comporter de zéros. H est généralement de type passe-bas, D de type passe-haut, et donc α doit être réglé de telle sorte que le dénominateur n'amplifie aucune composante fréquentielle du numérateur de manière excessive.

Dans notre algorithme de recherche du modèle, le terme de régularisation varie à chaque itération, puisqu'il est fonction du modèle :

$$J_2 = \|D(\hat{U} - U_{mod})\|^2 \dots\dots\dots (3.13).$$

Ce critère impose à la solution \hat{U} d'être proche du modèle U_{mod} . Au cours de notre étude, nous avons utilisé Le filtre, qui convient tout à fait à notre problème, qui est tout simplement l'opérateur identité. Le critère de régularisation s'écrira dans ce cas :

$$J_2 = \|(\hat{U} - U_{mod})\|^2 \dots\dots\dots (3.14).$$

Il impose à l'image \hat{U} d'être proche du modèle. L'importance de l'opérateur de régularisation réside dans sa capacité à combler les zéros de l'opérateur H.

III.5.2.2 Calcul de α

Lorsqu'on utilise la restauration non itérative, α est calculée par la méthode de Miller. On obtient aussi un paramètre de régularisation assez fort pour régulariser le signal, mais suffisamment faible pour restituer la quantité nécessaire de hautes fréquences.

Les conditions sont différentes pour la recherche du modèle numérique : les oscillations créées lors d'une itération k de l'algorithme, sont intégrées dans le nouveau modèle U_{mod_k} et amplifiées à l'itération k+1. Il est donc nécessaire de limiter ces oscillations

En imposant un paramètre de régularisation α beaucoup plus élevé que α_{Miller} .

les premières itérations de l'algorithme donneront une image restaurée très lisse, une grande partie des hautes fréquences ayant été filtrée par le terme de régularisation. Parallèlement, le modèle utilisé à chaque itération va s'affiner et se rapprocher de plus en plus de l'image recherchée. La proximité du modèle avec l'image de départ va permettre au fur et à mesure des itérations de restituer correctement la partie des hautes fréquences permise par le critère de régularisation. On a donc à faire à un compromis entre l'aspect lisse de l'image régularisée et sa proximité avec modèle.

Conclusion Générale

Conclusions et Perspectives

Nous avons proposé et mis en œuvre un procédé de restauration simple qui s'avère être une nouvelle méthode de régularisation. Nous avons développé cette nouvelle procédure de restauration pour une modélisation discrète ou continue du processus de mesure. Nous avons pu montrer à travers les différents exemples que la simplicité de ces méthodes n'est pas obtenue au détriment des performances en termes d'Erreur Moyenne Quadratique relative (FMQR).

Cette efficacité et cette simplicité sont dues à l'utilisation d'outils mathématiques de minimisation de distance dont le maniement est assez simple.

- ✚ Dans un premier temps les signaux à restaurer ont été considérés comme des signaux aléatoires.
- ✚ Dans un deuxième temps, les signaux à restaurer sont considérés comme déterministes mais bruités.

Toutes les méthodes que nous avons développées ont été validées sur des images. Ainsi, nous montrons que ces méthodes sont utilisables pour des signaux réels.

Il est bien connu que les erreurs de structure ou de représentation sont inévitables dans un cas réel. Ces erreurs sont liées à des erreurs d'identification, au vieillissement, aux dérives et surtout aux erreurs de modélisation.

Leur présence suffit parfois pour déstabiliser la solution obtenue. Il serait intéressant d'étudier le comportement de ces algorithmes vis à vis de ces erreurs de structure et de développer des méthodes prenant en compte ces incertitudes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: Bertero M. and P. Boccacci, 1998, Introduction to inverse problems in imaging, IOP Publishing Bristol.
- [2] :B.R. FRIDEN. Restoring with maximum likelihood and maximum entropy, J. Opt. Soc. Am, 62:511-518, 1972.
- [3] :Twomey, 1977, Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurement, Elsevier Scientific Publishing Company, New York.
- [4] :Hadamard J., 1902, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, Bull. Univ. Princeton, 13, 49.
- [5]: Hadamard J., 1923, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale Univ. Press, New Haven.
- [6]: Courant R. and Hilbert D., 1962, Methods of Mathematical Physics Vol II, Interscience, New York
- [7] :A. Benzaouia ,Représentation des systems, université de marakeche Maroc
- [8] :H.C. ANDREWS and B.R. HUNT. Digital image restoration. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1977.
- [9] :G. DEMOMENT. Déconvolution des signaux. Polycopié de L'ESE, 1987.
- [10] :Miller K., Least squares method for ill-posed problems with a prescribed bound, SIAM J. Math. Anal., 1970, vol 1, p 52-74
- [11] :G. THOMAS. Deconvolution and linear tracking problem. Signal Processing, pages 131-135, 1980.
- [12] :G.E. ARCHER and TITERINGHTON. On some Bayesian regularization method for image restoration. IEEE Trans. Image processing, 4(7) : 989-995, 1995.
- [13] :K MILLER. Least-squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound. SIAM J.Math Anal, 14 :651-667, 1977
- [14] : R. SCHAFER, R.MERSEREAU, and M. RICHARDS. Constrained iterative restoration algorithms. In Pro IEEE Int. Conf. On ASSP, 69 :432-450, 1981.
- [15] :A.K. KATSAGGELOS, M.G. KANG, and M.R. BONHAM. Adaptive regularized restoration algorithms applied to list images. Space Telescope Science Institute, 1994.

- [16]: R.L. LAGENDIJK, J. BIEMOND, and E. BOEKKEE. Iterative image restoration with ringring reduction. IEEE Trans. Signal processing, 36(12) :1874-1888, 1988.
- [17]:A. K. KATSAGGELOS, J. BIEMOND, R. W. SCHAFFER, and R.M. MERSEREAU. A regularized iterative image restoration algorithm. IEEE Trans. Signal processing, 39:914-929, 1991.
- [18] : Barakat V., Contribution à la restauration d'images dégradées par un système spatialement variant. Apport d'un modèle de l'image. Thèse de Doctorat : INSA de Lyon, 1998. 149 p.
- [19]: Gautier B., Dupuy J.C., Semmache B., Prudon G., SIMS depth profile correction for the study of the first step of the diffusion of boron in silicon, Nuclear Instruments and Methods for Physic Research, 1998, vol B 142, p 361-376.