الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 8 ماي 1945 قالمة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

لطلبة السنة الثانية ليسانسLMD

(علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم تسيير)

الدكتور: سليم مجلخ

2016/2015

برنامج المقياس

فصل تمهيدي

الفصل الأول: البرمجة الخطية

- **صياغة المسألة (المشكلة)؛**
- **الحل البياني؛**
- **عرض الحل بطريقة السمبلكس؛**
- **المسألة الثنائية؛**
- **تحليل الحساسية؛**

الفصل الثاني: مشكلة النقل.

- **صياغة المسألة (المشكلة)؛**
- **تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة؛**
- **عرض الحل بطريقة الشبكة؛**

الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود.

فصـــل تمهيـــدي

1- مفهوم رياضيات المؤسسة؛

2- أساليبها؛

3- النموذج؛

3-1- مكونات النموذج؛

3-2- أنواع النماذج؛

3-3- خطوات تصميم نموذج.

1- مفهوم رياضيات المؤسسة:

- ✓ هي استخدام الأساليب والأدوات الكمية المختلفة لمعالجة المشكلات التي تتصف بمحدودية الموارد وتعدد البدائل في ظل وظائف المؤسسة؛
- ✓ هي التحضير العلمي لاتخاذ القرارات.

2- أساليبها: تتسم رياضيات المؤسسة بتعدد وتنوع أساليبها، وكل أسلوب له مجال استعماله منها: البرمجة الخطية، برمجة الأهداف، نموذج النقل، نماذج شبكات الأعمال، نماذج صفوف الانتظار، تحليل سلاسل ماركوف، نظرية المباريات، نماذج الرقابة على المخزون، البرمجة الديناميكية، نماذج المحاكاة.

3- النموذج: هو تمثيل أو تجريد مبسط للواقع العلمي في صورة مجموعة من المعادلات، والرموز الرياضية، أي هو تمثيل رياضي للواقع من خلال التجريد والتبسيط، (لأن الواقع أعقد من أن يصب في قالب رياضي دون أن يكون هناك تضحية بحقائق ملموسة، والتجريد والتبسيط يتم من خلال وضع الفرضيات (الفرضية هي تخمين مؤقت نعتقد هو الأصوب لبلوغ ما نصبو إليه).

3-1- مكونات النموذج: يتكون النموذج من الثوابت والمعالم

- ✓ **الثوابت:** هي قيم ثابتة تم اكتشافها ويعمل بها إلا في حالة إثبات عكس ذلك علميا مثل$(\pi = 3.14)$ وهي قيمة معتمدة منذ اكتشافها من طرف الفراعنة غداة تأسيس الأهرامات، و $(e = 2.71)$ وهي قيمة ثابتة منذ اكتشافها من طرف النبير الألماني؛
- ✓ **المعالم:** هي عبارة عن قيم ثابتة يتم اعتمادها وفق الغرض خلال أداء النموذج؛

- ✓ **المتغيرات:** هناك عدة تصنيفات: المتغيرات الداخلية والخارجية فالداخلية تتحدد قيمها من داخل النموذج وهي تؤثر في بعضها البعض مع تأثرها بالمتغيرات الخارجية ولا تؤثر فيها أما المتغيرات الخارجية فهي تتحدد من خارج النموذج وهي تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتأثر بها؛
- ✓ **القيود:** عادة ما يعبر عنها في صورة متباينات و/أو معادلات.

3-2- أنواع النماذج: تنقسم إلى:

- ✓ **تبعا لغرض النموذج:** - النماذج الوصفية: يتم بناؤها لوصف المشكلة منها النماذج الإحصائية (المتوسطات)، - النماذج المعيارية: وهي النماذج التي تعطي الحل الأمثل للمشكلة التي يمثلها النموذج وهي تعتبر بذلك من النماذج المثالية مثل نموذج البرمجة الخطية، - نماذج تنبؤية: تكون لها القدرة على التنبؤ بما يحدث إذا ما اتخذ قرار معين وذلك عن طريق الربط بين المتغيرات التابعة والمستقلة مثل السلاسل الزمنية؛
- ✓ **تبعا لخصائص النموذج:** - نماذج ساكنة: وهي التي لا تأخذ بعين الاعتبار التغير في الزمن، نماذج حركية وهي التي تتغير من فترة زمنية لأخرى؛
- ✓ **تبعا لدرجة التأكد:** - نماذج تحديدية: تفترض حالة التأكد التام والمعرفة الكاملة عند تصميمها، - نماذج احتمالية: معاملات النموذج غير معلومة؛
- ✓ **تبعا لإجراءات الحل:** - نماذج تحليلية: يتم حلها بأساليب رياضية أو تحليلية معروفة مثل طريقة السمبلكس، - نماذج المحاكاة: تصف ما يحدث خلال فترة زمنية مختارة تحت مجموعة من الظروف المتنوعة ويناسب هذا النموذج العلاقات المعقدة.

3-3- خطوات تصميم نموذج: يمر تصميم أي نموذج عبر الخطوات الآتية:

- ✓ الملاحظة؛
- ✓ تعريف المشكلة وصياغتها: والتي تتجلى في وجود خلل يتمثل في اختلاف الحالة القائمة عن الحالة المرغوبة؛
- ✓ تحديد الهدف أو مجموعة الأهداف المرغوب تحقيقها:مثل هدف واحد تعظيم الربح أو التقليل من التكاليف، أو أكثر من هدف تعظيم الربح مع زيادة المبيعات؛
- ✓ صياغة الفروض المناسبة؛
- ✓ تحديد العوامل والعناصر الملائمة للمشكلة موضع الفحص (متغيرات، معالم، قيود)؛
- ✓ تجميع المعلومات والبيانات الخاصة بالنموذج؛
- ✓ تكوين نموذج رياضي؛
- ✓ حل النموذج؛
- ✓ تجربة النموذج وتعميمه؛
- ✓ مراقبة النموذج وتطبيقه بعد التأكد من ملاءمته.

الفصل الأول: البرمجة الخطية

1- مفهوم، فرضيات واستخدامات البرمجة الخطية؛
2- عناصر البرمجة الخطية؛
3- الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي؛
4- صيغ النماذج الخطية؛
5- طرق حل مشكلة البرمجة الخطية؛
5-1- طريقة الحل البياني؛
5-2- طريقة السمبلكس؛
6- المسألة الثنائية (المرافقة)؛
7- تحليل الحساسية.

1- مفهوم، فرضيات واستخدامات البرمجة الخطية:

1-1- مفهوم البرمجة الخطية: عرفت هذه التقنية (الأسلوب الكمي) عدة تعاريف نذكر منها على سبيل المثال ما يلي: عرفتها المنظمة العربية لعلوم البرمجة الخطية على أنها طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحددة من أجل تحقيق هدف معين حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو بيانات خطية. كما أن هناك تعاريف مختصرة للبرمجة الخطية نذكر منها:

- ✓ هي ذلك الأسلوب الذي يهتم بالاستخدام الأمثل للموارد المحدودة لتلائم الأهداف المطلوبة؛
- ✓ البرمجة الخطية نموذج كمي يسعى إلى تعظيم أو تدنية دالة معينة في ظل مجموعة من القيود.

1-2- مجالات استخدامها: تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف عن البحث عن المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا، ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة في حالتين:

1-2-1- في حالة التعظيم: تعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، تعظيم طاقات التخزين، تعظيم استخدام رؤوس الأموال، تعظيم اليد العاملة.

1-2-2- في حالة التدنية: تدنئة التكاليف، تدنئة الخسائر، تدنئة عدد الموظفين، تدنئة الأجور الإجمالية.

1-3- فرضياتها: البرمجة الخطية كنموذج تستدعي التبسيط مما يجعلها تحتوي فقط على جزء من خصائص المشكلة التي يمثلها وهذا التبسيط يتجلى في مجموعة من الفرضيات التي تعتمدها هذه التقنية.

1-3-1- الخطية: ويمكن النظر إليها من ناحيتين اقتصادية ورياضية، فرياضيا: تتطلب الخطية من الناحية الرياضية أن تكون كل المتغيرات الداخلة في تركيبة البرنامج الخطي من الدرجة الأولى، واقتصاديا تعني التناسب بين المدخلات والمخرجات.

1-3-2- الأكادة: يفترض في البرنامج الخطي أن المستقبل معروف بشكل أكيد وهذا يعني أن النموذج نموذج محدد.

1-3-3- الاستمرارية: النموذج الخاص بالبرمجة الخطية هو نموذج مستمر وتعني الاستمرارية أن عوامل الإنتاج الكميات ومستويات الأنشطة جميعها قابلة بشكل تام للتجزئة.

1-3-4- الرياضية: تعني تمثيل الحقيقة بأكثر وفاء ممكن باعتماد الكتابة الرياضية.

1-3-5- التجميعية: يعني أن الأنشطة المختلفة والموجودة بالنموذج تستجيب لمبدأ التجميع والذي يعني بأن الأثر الكلي يتم الحصول عليه بجمع الآثار الخاصة بكل متغير.

1-3-6- عدم سلبية المتغيرات: تعني أن كل المتغيرات أكبر من أو تساوي الصفر.

2- عناصر البرمجة الخطية: هناك 3 عناصر في أي برنامج خطي وهي: دالة الهدف، القيود، شروط عدم السلبية.

2-1- دالة الهدف: إن استخدام أو توزيع الموارد المتاحة لا يجب أن يتم بشكل عشوائي، فمن المؤكد أن هناك تكلفة معينة للحصول على هذه الموارد وبالتالي يجب التصرف فيما هو موجود بصورة عقلانية من خلال الاهتداء بمؤشر اقتصادي يشكل الغاية التي نسعى إليها، هذه الأخيرة يعبر عنها في صورة دالة تتكون من مجموعة من المتغيرات تسمى متغيرات القرار نسعى من خلالها إلى تحقيق الهدف لذا تسمى هذه الدالة بدالة الهدف.

2-1-1- صنف الهدف: يجب تحديد دوما الهدف المنشود من وراء حل المشكلة هذا الهدف قد يكون التعظيم (الأرباح...الخ) أو التصغير التدنية (المخاطر، التكاليف...الخ).

2-2- القيود: هي مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها ولكنه يحاول الوصول إلى أفضل قرار في ظلها.

2-2-1- طبيعة القيود: تعكس القيود في معظم الحالات ندرة الموارد وهي من الحقائق التي يتعامل معها المقرر للوصول إلى أفضل قرار في ظلها.

2-2-2- شكل القيود: تتعامل مسائل البرمجة الخطية بصورة كبيرة مع المتباينات.

3- الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي: يمكننا أولا التعبير عن كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية صياغة عامة ثم التطرق إلى كل حالة (التعظيم والتدنئة) بواسطة مسألة.

3-1- الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:

3-1-1- دالة الهدف: يتم تحديد دالة الهدف من خلال تحديد هدف قابل للقياس كميا أو تحديد نموذج لكفاءة الاختيار ولذلك يتم التعبير عن الهدف المنشود من خلال دالة يطلق عليها دالة الهدف ويرمز لها بالرمز Z في حالة التعظيم والرمز W في حالة التدنئة والتي يمكن أن نعبر عنها جبريا كما يلي:

$$Z=c_1.x_1 + c_2.x_2+.....+c_n.x_n$$

فإذا تعلق الأمر بدالة وجب تعظيمها كتبت هذه الأخيرة كما يلي:

$$\text{Max } Z=c_1.x_1 + c_2.x_2+.....+c_n.x_n$$

وأما إذا تعلق الأمر بدالة وجب تصغيرها كانت هذه الأخيرة كما يلي:

$$\text{Min } W=c_1.x_1 + c_2.x_2+.....+c_n.x_n$$

3-1-2- القيود: هناك بعض القيود التي يتوجب حل المشكلة في حدودها والتي تأخذ الصورة العامة التالية: $a_{i1}.x_1 + a_{i.2}.x_2 +......+ a_{i.n}.x_n$

3-1-3- شروط عدم السلبية: يشترط البرنامج الخطي أن تكون المتغيرات غير سالبة وهذا ما يعبر عنه في النموذج بما يلي: $x_1 \geq 0 \ . \ x_2 \geq 0 \ .x_3 \geq 0......x_n \geq 0$

ولكتابة الصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة الخطية فإننا نعمد للاستفادة من مفاهيم المصفوفات وجبرها، فتكون الصيغة العامة في حالة التعظيم مثلا: $\text{Max } Z=C.X$

$$A.X \leq B$$

$$X \geq 0$$

أما في حالة التصغير فان الصيغة الرياضية للبرنامج وبلغة المصفوفات تكون كما يلي:

$$\text{Min } W= C.X$$

$$A.X \geq b$$

$$X \geq 0$$

3-2- الصياغة الرياضية للمسائل: سنعتمد هنا على إعطاء مثالين الأول يتعلق بحالة التعظيم والثاني بحالة التدنية.

3-2-1- حالة التعظيم: مثال: لنفرض أن شركة إنتاج الأثاث المنزلي قد قررت دخول ميدان الإنتاج المكتبي نتيجة وجود عروض أمامها، وحسب المعدات المتوفرة لديها سابقا يمكنها إما إنتاج المكاتب و/أو المقاعد وقد قامت الشركة بتكوين لجنة تقنية متخصصة في التصميم والمقاسات أدرجت هذه الأخيرة وبعد الدراسة الصورة الإنتاجية أمام الإدارة العليا للشركة وذلك على النحو التالي:

مقعد	مكتب	
9	12	ربح الوحدة (الدينار)
4	5	كمية الخشب اللازمة (قطع)
3	2	ساعات العمل اللازمة للوحدة في الورشة

كما توصلت اللجنة إلى أن الشركة:

– يمكنها الحصول على 240 قطعة أسبوعيا (القطعة 1 متر مربع)؛

– يمكنها فقط أن تعمل 120 ساعة في الأسبوع؛

– يمكنها بيع كل الوحدات المنتجة من المكاتب والمقاعد، لنعمل بهذه المعطيات للوصول إلى صياغة المشكلة رياضيا.

– نرمز لعدد الوحدات الواجب إنتاجها من المكاتب بالرمز X_1

– نرمز لعدد الوحدات الواجب إنتاجها من الكراسي بالرمز X_2

نلاحظ أن المكتب الواحد يحقق ربحا قدره 12 ون، ويحتاج إلى 5 قطع خشب، و 2 ساعات عمل، أما المقعد فيحقق ربحا قدره 9 ون، ويحتاج 4 قطع خشب، و 3 ساعات عمل.

صياغة المشكلة رياضيا:

– **دالة الهدف:** تتكون دالة الهدف من عدة أجزاء كل منها يعبر عن الربح المحقق من الإنتاج وبيع السلع وبذلك فهي تعبر عن الربح الإجمالي وهي كما يلي:

$$Z= 12x_1+ 9x_2$$

ودلك على أساس أن قيم x_1 x_2 غير معروفة وأن 12 و 9 هي ربح كل وحدة من كل من المكتب والمقعد على التوالي.، وبما أن الغاية هي تعظيم الربح فإننا نكتب:

$$\text{Max } Z = 12x_1 + 9x_2$$

– **القيود:** من خلال المسألة نلاحظ أنه لدينا نوعان من القيود – المادة الخام 240 قطعة من الخشب – الطاقة التشغيلية 120 ساعة عمل. وعليه فالقيد الأول يمكن صياغته كما يلي:

$$5x_1+4x_2 \leq 240$$

وهذا يعني أنه وفي حالة إنتاج x_1 من المكاتب فان إجمالي الخشب اللازم هو $5x_1$ وذلك على أساس أن كل وحدة تحتاج إلى خمس قطع. وفي حالة إنتاج x_2 من المقاعد فان إجمالي الخشب اللازم هو $4x_2$ وذلك على أساس أن كل وحدة تحتاج إلى خمس قطع. وبطبيعة الحال مهما كانت التوفيقة بين المنتوجين فان إجمالي الخشب المستخدم لا يمكن أن يكون أكبر مما هو متاح أسبوعيا وعليه جاء القيد بأصغر من أو يساوي. وقد يكون من غير الممكن استخدام كل الخشب المتوفر بسبب عدم وجود ساعات عمل كافية في الشركة إذ أن البرمجة الخطية تأخذ في الحسبان كل القيود مع.

وبنفس الطريقة نصل إلى القيد الثاني الخاص بالطاقة المستخدمة في هذه الشركة وعليه فان القيد الثاني يمكن صياغته على النحو التالي: $2x_1+3x_2 \le 120$

ونشير هنا إلى نقطتين هامتين: - يجب أن تكون الوحدة المستخدمة في القياس ثابتة في القيد الواحد - ليس من الضروري أن تكون وحدة القياس واحدة بالنسبة لكل القيود فالقيد الأول يستخدم القطع الخشبية بينما يستخدم القيد الثاني ساعات العمل التشغيلية.

- **شروط عدم السلبية:** قبل البدء في حل المشكلة لا بد أن لا ننسى التأكيد على ألا تكون أرقام الإنتاج أرقاما سالبة فمن غير المعقول أن يتسم الإنتاج بصورة سالبة، ويعني ذلك أن كلا من عدد المكاتب والمقاعد المنتجة يمكن أن يكون صفرا أو أكثر ويعبر عن ذلك كما يلي:

$x_1 \ge 0 \ / \ x_2 \ge 0$

وعليه الصيغة الرياضية (النظامية) لهذه المشكلة كما يلي:

$\text{Max } Z = 12x_1 + 9x_2$

$5x_1+4x_2 \le 240$

$2x_1+3x_2 \le 120$

$x_1 \ge 0 \ / \ x_2 \ge 0$

3-2-2- حالة التصغير: مثال: تعاقدت إحدى المزارع مع إحدى المؤسسات الإنتاجية المتخصصة في صناعة المواد الغذائية للحيوانات وينص العقد على أن كل تركيبة وجبة غذائية يجب أن تحتوي على 70 وحدة من البروتين و 100 وحدة من الكاربوهيدرات و 20 وحدة من الدهون ولهذه المؤسسة 3 أنواع من الغذاء تحتوي على المطلوب بمقادير مختلفة كما يوضح ذلك الجدول التالي:

الغذاء	بروتين (و/كغ)	كاربوهيدرات (و/كغ)	دهون (وحدة/كغ)	التكلفة
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5

المطلوب: صياغة المشكلة رياضيا صياغة نظامية.

نرمز بـ: x_1 x_2 x_3 للأغذية، لإنتاج كلغ واحد من x_1 يلزمنا 4 وحدات دهون و50 وحدة كاربوهيدرات و20 وحدة بروتين وبتكلفة 2 ون، ولإنتاج كلغ واحد من الغذاء x_2 يلزمنا 9 وحدات من الدهون و30 وحدة من الكاربوهيدرات و 30 وحدة من البروتين وبتكلفة 3 ون، ولإنتاج كلغ واحد من الغذاء x_2 يلزمنا 11 وحدة من الدهون و20 وحدة من الكاربوهيدرات و40 وحدة من البروتين وبتكلفة 5 ون.

- **صياغة المشكلة رياضيا:**

- **دالة الهدف:** $W = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ وبما أ ن الغاية هي التصغير فنكتب:

$$\text{Min } W = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

– **القيود:** من خلال معطيات المسألة نلاحظ أنه لدينا 3 قيود: وعليه القيد الأول يمكن كتابته على الشكل التالي: كمية البروتين الموجودة بالغذاء الأول مضافا إليه كمية البروتين الموجودة في الغذاء الثاني والموجودة في الغذاء الثالث حيث يجب أن لا يقل عن المطلوب وهذا ما يمكن أن نعبر عنه كما يلي:

$$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \geq 70$$

نلاحظ أن القيد جاء أكبر من أو يساوي لأن إجمالي البروتين المقدم لا يمكن أن يقل عما هو ضروري في الوجبة الغذائية. بنفس الطريقة نتحصل على القيد الثاني الخاص بالكربوهيدرات في هذه المؤسسة

$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 100$$

والقيد الثالث الخاص بالدهون : $4x_1 + 9x_2 + 11x_3 \geq 20$

– **شروط عدم السلبية:** قبل البدء في حل المشكلة لا بد من التأكيد على أن لا ننسى على ألا تكون أرقام التركيبة أرقاما سالبة فمن غير المعقول أن يتم إدخال كميات في التركيبة بصورة سالبة أي أن كل من المواد الغذائية الثلاث الداخلة في التركيبة يمكن أن تكون صفرا أو أكثر من الصفر ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_1 \geq 0$$

يمكن عرض إجمالي هذه المشكلة كمل يلي (صيغة نظامية): $\text{Min } W = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

$$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \geq 70$$

$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 100$$

$$4x_1 + 9x_2 + 11x_3 \geq 20$$

$$x_3 \geq 0 \text{ ، } x_2 \geq 0 \text{ ، } x_1 \geq 0$$

4–صيغ النماذج الخطية: يمكننا أن نميز بين 3 صيغ: القانونية أي النظامية والقياسية أي النموذجية والمختلطة.

4–1– الصيغة النظامية أو القانونية: تفيد هذه الطريقة في توضيح نظرية التوافق (الثنائية كما سنرى لاحقا)، ونقول عن مسألة برمجة خطية أنها تأخذ صيغة نظامية إذا كانت:

- ✓ جميع متغيرات القرار غير سالبة؛
- ✓ جميع متباينات القيود هي من إشارة واحدة (أكبر من أو أصغر من أو يساوي)؛
- ✓ إذا كان تابع الهدف من نوع التعظيم الإشارة هي أصغر من أو يساوي؛
- ✓ إذا كان تابع الهدف من نوع التصغير الإشارة هي أكبر من أو يساوي؛
- ✓ b_i غير محددة الإشارة.

وهذا ما يمكن تمثيله بما يلي: $\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \;/ i = 1.\ 2 \ldots\ldots m$$

$x_j \geq 0$ / j =1. 2 ……n

Min W= $\sum_{j=1}^{n} c_j \ .x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . \ x_j \geq \ b_i$ /i =1. 2 ……m

$x_j \geq 0$ / j =1. 2 ……n

4-2- الصيغة القياسية أو النموذجية: استخدمت هذه الصيغة في تطوير خوارزميات الحل الأولى لمسائل البرمجة الخطية، نقول عن مسألة برمجة خطية أنها تأخذ صيغة قياسية إذا كانت: - جميع متغيرات القرار غير سالبة.

- ✓ جميع القيود هي معادلات (نستثني من ذلك قيود عدم السلبية)؛
- ✓ تابع الهدف يكون تعظيم أو تصغير؛
- ✓ b_i غير سالب.

وهذا ما يمكن تمثيله بما يلي:

Max Z = $\sum_{j=1}^{n} c_j \ .x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . \ x_j = b_i$ /i =1. 2 ……m

$x_j \geq 0$ / j =1. 2 ……n

Min W= $\sum_{j=1}^{n} c_j \ .x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . \ x_j = b_i$ /i =1. 2 ……m

$x_j \geq 0$ / j =1. 2 ……n

4-3- الصيغة المختلطة: يقال عن مسألة برمجة خطية أنها ذات صيغة مختلطة إذا لم تأخذ هذه المسألة عند صياغتها بدلالة المعطيات صيغة نظامية أو صيغة قياسية. ويمكن الانتقال من الصيغة المختلطة إلى الصيغة النظامية أو القياسية باستخدام بعض التحويلات الأولية تماشيا مع الصيغة المراد بلوغها.

التحويلة1: إن تصغير تابع الهدف Z يكافئ رياضيا تعظيم الصيغة السالبة لهذا التابع أي أن:

ومنه: W=-Z

Min Z = Max –w

التحويلة 2: إن أي متباينة بإشارة معينة يمكن أن تستبدل بمتباينة من إشارة معاكسة بضرب طرفيها في (-1).

$$ax \geq b \Leftrightarrow -ax \leq -b$$

التحويلة 3: كل مساوية يمكن أن تستبدل بمتباينتين متعاكستين

$$ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} a\,x \leq b \\ a\,x \geq b \end{cases}$$

التحويلة 4: كل متغير غير محدد الإشارة (قيمة موجبة أو سالبة أو صفرية) يمكن أن يستبدل بتفاضل متغيرين غير سالبين إذا كان مثلا x غير محدد الإشارة و x^- و x^+ أكبر من أو يساوي الصفر فإن هذا المتغير يستبدل بـ $x^+ - x^-$.

التحويلة 5: كل متباينة طرفها الأيسر يشكل قيمة مطلقة يمكن أن تستبدل بمتباينتين نظاميتين إذا كان p و q أكبر من أو يساوي الصفر فإن

$$|a.x| \leq p \rightarrow \begin{cases} a.x \leq p \\ a.x \geq -p \end{cases} \quad و \quad |a.x| \geq q \rightarrow \begin{cases} a.x \geq q \\ a.x \leq -q \end{cases}$$

التحويلة 6: كل متباينة يمكن أن تحول إلى مساواة:

- ✓ بإضافة متغير جديد غير سالب إلى طرفها الأيسر في حالة ≤ ويسمى هذا المتغير بمتغير الفرق؛
- ✓ بطرح متغير جديد غير سالب من طرفها الأيسر في حالة ≥ ويسمى هذا المتغير متغير مساعد.

مثال: لنفرض أنه لدينا البرنامج التالي:

$$Min\, W = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$x_1 + x_2 + 3\, x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 9x_2 - 7\, x_3 \geq 50$$

$$5x_1 + 3x_2 = 20$$

$$|\, 5\, x_2 + 8\, x_3 \,| \leq 100$$

$$x_1 \;،\; x_2 \geq 0$$

x_3 **غير مقيدة**

لنعمل على الاستفادة من التحويلات المناسبة لكتابة هذه الصيغة المختلطة في صورة نظامية

$$Max\, Z = -W = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) \leq 40$$

$$-x_1 - 9x_2 + 7\,(x_3^+ - x_3^-) \leq -50$$

$$5x_1 + 3\, x_2 \leq 20$$

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -20$$

$$5x_2 + 8\,(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

$$-5x_2 - 8\,(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

$$x_1 \;،\; x_2 \;،\; x_3^+ \;،\; x_3^- \geq 0$$

كما يمكننا الاستفادة من التحويلات المناسبة وكتابة الصيغة القياسية المقابلة:

$$Min\, W = 3x_1 - 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) + 0.s_1 - 0.s_2 + 0.s_3 + 0.s_4$$

$$x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) + s_1 = 40$$

$$x_1 + 9x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) - s_2 = 50$$

$$5x_1 + 3x_2 = 20$$

$$5x_2 + 8\,(x_3^+ - x_3^-) + s_3 = 100$$

$$-5x_2 - 8\,(x_3^+ - x_3^-) + s_4 = 100$$

$x_1 ، x_2 ، x_3^+ ، x_3^- ، s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 \geq 0$

5- طرق حل مشكلة البرمجة الخطية: يمكننا حل المشاكل المصاغة في صورة نماذج برمجة خطية بالطرق التالية: – الطريقة البيانية – الطريقة الجبرية – طريقة السمبلكس.

5-1- طريقة الحل البياني: نستخدم هذه الطريقة عندما تحتوي المشكلة على متغيرين فقط لأنه يستحيل رسم أكثر من محورين ومن مزاياها البساطة. وتتكون الطريقة البيانية من الخطوات التالية:

- ✓ صياغة المشكلة في شكل نموذج رياضي، ثم على الشكل القياسي؛
- ✓ رسم المحاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المسألة؛
- ✓ التمثيل البياني لجميع القيود، والتي قد مشكل لنا مضلع متعدد الرؤوس؛
- ✓ تحديد منطقة الحلول المسموح بها، وهي التي تحقق جميع القيود؛
- ✓ تمثيل دالة الهدف في مجال الإحداثيات؛
- ✓ الحصول على الحل الأمثل إن وجد بواسطة انسحابات للخط الممثل لدالة الهدف بالاتجاه الذي يحقق القيمة المثلى (تقيم الدالة عند كل ركنية)، أو عن طريق تقييم النقط الركنية.

ملاحظة: بعض التعاريف المتعلقة بمشكلة البرمجة الخطية:

- ➢ **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يحقق كافة القيود الواردة في مشكلة البرمجة الخطية؛
- ➢ **الحل الأفضل:** وهو الحل الذي يحقق كافة القيود الواردة في مشكلة البرمجة الخطية وهو بالنسبة لمتخذ القرار أحسن من الحل الممكن؛
- ➢ **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يحقق كافة القيود الواردة في مشكلة البرمجة الخطية وهو بالنسبة لمتخذ القرار أحسن من الحل الأفضل والممكن ويسعى عادة إلى تحقيقه؛
- ➢ **الحل الأساسي:** إذا كان هناك: m من المعادلات الخطية تحتوي n من المتغيرات فان الحل الأساسي لهذه المعادلات هو الحل الذي يكون فيه: n−m من المتغيرات يساوي الصفر ويطلق على هذه المتغيرات اسم: متغيرات غير أساسية، وأيضا قيمة n من المتغيرات لا يساوي الصفر ويطلق على هذه المتغيرات اسم المتغيرات الأساسية.

مثال على الطريقة البيانية في حالة التعظيم: ورشة خياطة تقوم بإنتاج منتوجين البدلات والمعاطف ويجب أن يمر كل منتوج على ماكنتين (خياطة ومكواة) ولإنتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول يلزمنا استخدام ساعتين من العمل على الماكنة الأولى وساعة واحدة على الماكنة الثانية، ولإنتاج واحدة من المنتوج الثاني يلزمنا ساعة واحدة على كل من الماكنتين ولأسباب تقنية فالماكنة الأولى لا تعمل أكثر من 10 ساعات في اليوم بينما الماكنة الثانية تبعا لعمرها وطبيعة أدائها لا تعمل أكثر من 6 ساعات في اليوم، والوحدة الواحدة من المنتوج الأول تساهم بربح قدره 1,5 ون أما الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني فتساهم بربح قدره 1 ون. وهذا ما يمكن أن نلخصه بالجدول التالي:

ولأسباب خاصة لا يمكن إنتاج أكثر من 4,5 وحدات من المنتوج الأول وكذا لا يمكن إنتاج أكثر من 4 وحدات من المنتوج الثاني

	الماكنة الأولى خياطة	الماكنة الثانية مكواة	ربح الوحدة
المنتوج الأول البدلات	2	1	1,5
المنتوج الثاني المعاطف	1	1	1
الساعات المتاحة يوميا للماكنة	10	6	

الحل: الخطوة الأولى: صياغة النموذج الرياضي: نرمز بـ x_1 لعدد الوحدات من المنتوج الأول في اليوم، و x_2 عدد الوحدات من المنتوج الثاني في اليوم فتكون دالة الهدف كما يلي:

$$\boldsymbol{Max\ Z = 1.5\ x_1 + 1x_2}$$

القيود وهما نوعان: قيود الطاقة التشغيلية للماكنتين: $\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 \leq 10}$

$\boldsymbol{1x_1 + 1x_2 \leq 6}$

قيود اقتصادية: (طاقة السوق): $\boldsymbol{x_1 \leq 4.5}$ / $\boldsymbol{x_2 \leq 4}$

شروط عدم السلبية: $\boldsymbol{x_1 \geq 0}$ / $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$

وهذا يعني أن الكمية النتجة من كل نوع من السلع موجبة أو صفرا.

ويلاحظ أن مشكلتنا تتكون من جزئين دالة هدف يراد جعلها أكبر ما يمكن والمتباينات الخاصة بالقيود التي تحدد الحيز الممكن وبالتاي تحدد النقط ($x_1\ x_2$) التي تمثل برنامج الإنتاج الذي يحقق كل القيود.

الخطوة الثانية: رسم المحاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المسألة يمثل الشكل الموالي محورين الأفقي يمثل الكميات النتجة من المنتوج الأول x_1 والرأسي يمثل الكميات المنتجة من المنتوج الثاني x_2 .

الخطوة الثالثة: التمثيل البياني لجميع القيود:

أ- **قيود شروط عدم السلبية:** يعني أن عدد الوحدات من المنتوجين أكبر من أو يساوي الصفر أي الشكل يكون في الربع الأول

ب- **القيود الفنية:** القيد الأول: $\boldsymbol{x_1 + 1x_2 \leq 10}$

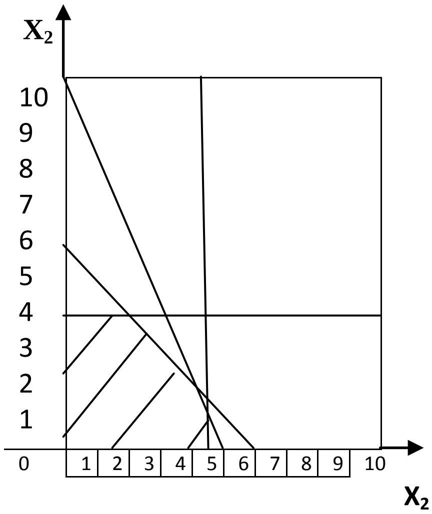
ولرسم القيد الأول يتم تجاهل علاقة أصغر من أو يساوي ونفرض أنها تساوي فقط وأفضل طريقة لرسم هذا المستقيم هي تحديد نقطتي التقاطع مع المحاور وإيصالهما ببعضهما البعض، $\boldsymbol{x_1 + 1x_2 = 10}$

إن الساعات التشغيلية للماكنة الأولى تستخدم مرة لإنتاج السلعة الأولى ومرة لإنتاج السلعة الثانية أي أن $x_1 = 0$ ومن ثم $x_2 = 10$ وبنفس الطريقة $x_2 = 0$ فان $x_1 = 10$. ومن ثم فان نقا المستقيم الأول هي: (0،10) ، (5،0) ونلاحظ أن الخط لم يتم أكثر من هذا لأنه قديقع خارج المجال الموجب أي يصبح لا يحقق شروط عدم السلبية.

– **القيد الثاني:** $1x_1 + 1x_2 \leq 10$ يصبح $1x_1 + 1x_2 = 10$ وبالأسلوب نفسه كما فعلنا مع القيد الأول نجد: النقطتين: (0،6) ، (6،0)

– **القيد الثالث:** $x_1 \leq 4.5$ يصبح: $x_1 = 4.5$

– **القيد الرابع:** $x_2 \leq 4$ يصبح: $x_2 = 4$



الخطوة الرابعة: تحديد منطقة القبول:منطقة القبول هي المنطقة المحددة بالمساحة a b c d e f فأي نقطة من هذه المنطقة تعتبر حلا ممكنا للمشكلة وهذا يعني أن هناك حلولا ممكنة كثيرة للمشكلة، أما الحل الأفضل فهو يتمثل في النقاط الخمس ما عدا النقطة f نقطة الأصل، و الحل الأمثل هو احدى هذه الرؤوس الخمس.

الخطوة الخامسة: تحديد الحل الأمثل: إن تحديد نقطة الحل الأمثل من بين النقاط الخمس يتم بأحد الطرق التالية:

- ✓ طريقة تقييم كافة النقاط الركنية؛
- ✓ طريقة رسم دالة الهدف.

أ– **عن طريقة تقييم كافة النقاط الركنية:** طالما أن القيود هي قيود خطية ودالة الهذف دالة خطية وللمشكلة حلا أمثل فان فان قواعد الرسم تقتضي أن يقع الحل في واحدة على الأقل من النقط الركنية وبالنظر إلى الرسم فان:

التقاطع	الربح	الإحداثيات	النقط الركنية
تقاطع القيدين 5 و 6 والمقابلين لشروط عدم السلبية	0	(0.0)	F
تقاطع القيدين 4 و 5	4	(0.4)	A
تقاطع القيدين 2 و 4	7	(2.4)	B
تقاطع القيدين 1 و 2	8	(4.2)	C
تقاطع القيدين 1 و 3	7 ,75	(4 ,5.1)	D
تقاطع القيدين 3 و 6	6 ,75	(4,5.0)	e

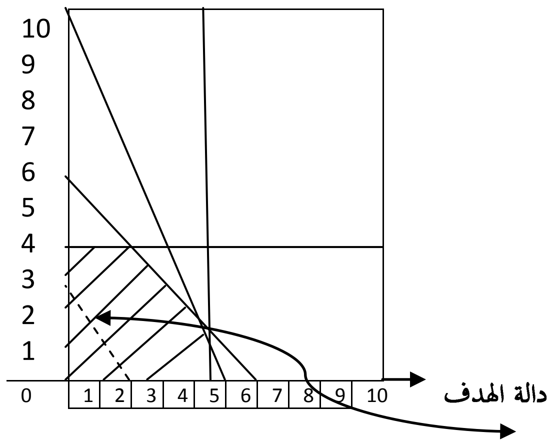
نلاحظ أن c هي نقطة الحل الأمثل لأن عندها يكون أكبر قيمة للربح 8 وهذا من خلال تعويض في دالة الهدف.

ب– عن طريق رسم دالة الهدف: يمكن الوصول إلى نفس الحل بأسلوب أيسر عن طريق رسم دالة الهدف، ولإنشاء دالة الهدف يمكن إعطاء دالة

الهدف أي قيمة بحيث على أن تكون تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف دون باقي ولتكن 3 و.ن (لقد تم اختياره بحيث أنه يقبل القسمة على 1,5 و 1في دالة الهدف دون وجود قيمة غير صحيحة فتكون: $Z = 1.5\ x_1 + 1x_2 = 3$

- ✓ فإذا كان: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$
- ✓ وإذا كان : $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

هو الخط الحامل لدالة الهدف عندما تكون مساوية لـ3 أي أن المستقيم المار على النقطتين (2.0) ,(0.3)



بعد رسم المستقيم الممثل لمعادلة دالة الهدف ضمن إطار الشكل البياني الأخير نقوم برسم مستقيمات موازية له (بإزاحة الخط المستقيم الحامل لدالة الهدف بالاتجاه الذي يحسن دالة الهدف حتى يمر من أخر نقطة من نقاط منطقة الحلول) من خلال تحريكه إلى أعلى وإلى أقصى حد ممكن تسمح به منطقة الحل المقبول (لأن المطلوب هو تعظيم دالة الهدف، من الشكل المقابل يتضح أن النقطة c هي النقطة الخاصة بالحل الأمثل ويتم تحديد إحداثيات هذه النقطة من الشكل من أجل معرفة قيمة دالة الهدف، وبعد ذلك نعوض إحداثيتاها في دالة الهدف.

$$1.5\ x_1 + 1x_2 = 3$$

ملاحظات:

- ✓ هذا هو الحل الأمثل والوحيد ويعني ذلك أن النقطة $x_1 = 4$ و النقطة $x_2 = 2$ هي النقطة الممكنة الوحيدة ذات أعلى قيمة لدالة الهدف وأن أي نقطة أخرى تحقق ربحا أقل؛
- ✓ ان مجرد توزيع الموارد على أساس ربحية الوحدة دون الأخذ في الحسبان القيود لا يعد صحيحا فعلى سبيل المثال على الرغم من أن ربحية البذلة الواحدة أعلى من المعطف إلا أن تعظيم الربح الإجمالي يتطلب إنتاج كل من البذلة والمعطف فإذا تم تخصيص كل الموارد للبدلات فإن أعلى رقم يمكن إنتاجه هو 4 بدلات وهو ما يكافئ ربحا قدره 6 ون وهو أقل من ربح الحل الأمثل؛
- ✓ يجب أن نفهم من هذا المثال أن الحل الأمثل يكون دائما في نقطة تقاطع القيود فأحيانا يقع الحل الأمثل على أحد المحاور (التي هي نقط تقاطع أيضا) ويعني الحل في مثل تلك الحالة إنتاج سلعة واحدة وعدم إنتاج السلعة الأخرى ويتوقف ذلك على ميل دالة الهدف.

مثال على الطريقة البيانية في حالة التعظيم: في إحدى المستشفيات الخاصة طلب من المسؤول عن المطبخ أن يحدد وجبة الإفطار الصباحية تستجيب للمتطلبات الغذائية من ناحية البروتين والفيتامين والحديد من جهة وتكون بأقل تكلفة من جهة أخرى، بعد الاتصال بمتخصصين في مجال التغذية تم الحصول على المعطيات الملخصة بالجدول.

المواد الغذائية	البروتين	الفيتامين	الحديد	الكلفة و . ن
المادة الأولى	2	2	1.333	3
المادة الثانية	2	1	2	4
الحد الأدنى	10	7	8	

لنعمل على تحديد الكميات الازمة من كل من المادتين الغذائيتين في الوجبة على أن يتم ذلك بأقل تكلفة

– سنعمل على تلخيص خطوات الحل لتشابهها مع حالة التعظيم. نرمز بـ x_1 نرمز بـ x_1 عدد الوحدات من المادة الأولى و x_2 عدد الوحدات من المادة الثانية.وبالتالي دالة الهدف (التكلفة) للوجبة هي كما يلي: **Min W = 3 x_1 + 4 x_2**

القيود:

$2x_1 + 2x_2 \geq 10$

$2x_1 + 1x_2 \geq 7$

$1.333x_1 + 2x_2 \geq 8$

– **شروط عدم السلبية:**

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

يلاحظ أن مشكلتنا ذات جزئين: دالة هدف يراد جعلها أصغر ما يمكن و5 قيود المحددة للمشكلة وهي تحدد المنطقة أو الحيز الممكن.

القيد الأول: $2x_1 + 2x_2 \geq 10$ يصبح $2x_1 + 2x_2 = 10$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \Leftrightarrow (0 , 5)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \Leftrightarrow (5 , 0)$

القيد الثاني: $2x_1 + 1x_2 \geq 7$ يصبح $2x_1 + 1x_2 = 7$

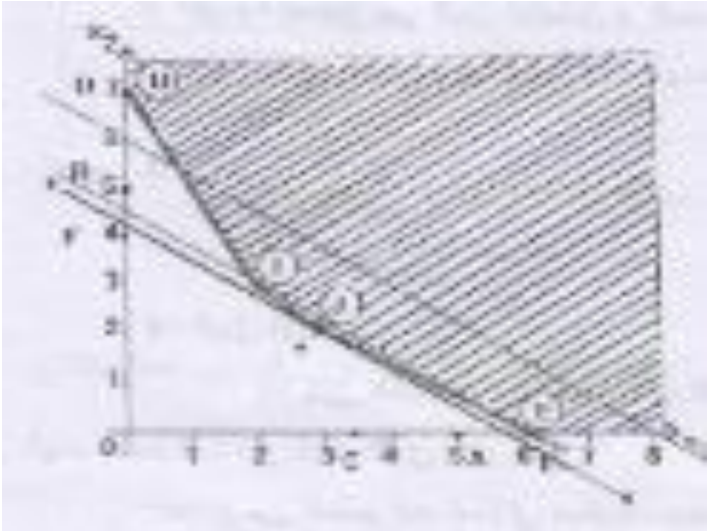
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \Leftrightarrow (0 , 7)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 ,5 \Leftrightarrow (3 ,5, 0)$

القيد الثالث: $1.333x_1 + 2x_2 \geq 8$ يصبح $1.333x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \Leftrightarrow (0, 4)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \Leftrightarrow (6, 0)$



تحديد الحد الأمثل: إن تحديد الحل الأمثل من أحد النقط الأربع يتم بأحد الطريقتين

✓ تقييم النقط الركنية:

التقاطع	التكلفة	الإحداثيات	النقطة الركنية
تقاطع القيدين 2 و 5	28	(7،0)	A
تقاطع القيدين 1 و 2	18	(2،3)	B
تقاطع القيدين 1 و 3	16	(4،1)	C
تقاطع القيدين 1 و 4	18	(6،0)	D

نلاحظ أن أصغر قيمة تقع عند النقطة C وعندها قيمة دالة الهدف تكون:

Min W = 3 *4 + 4 *1 = 16

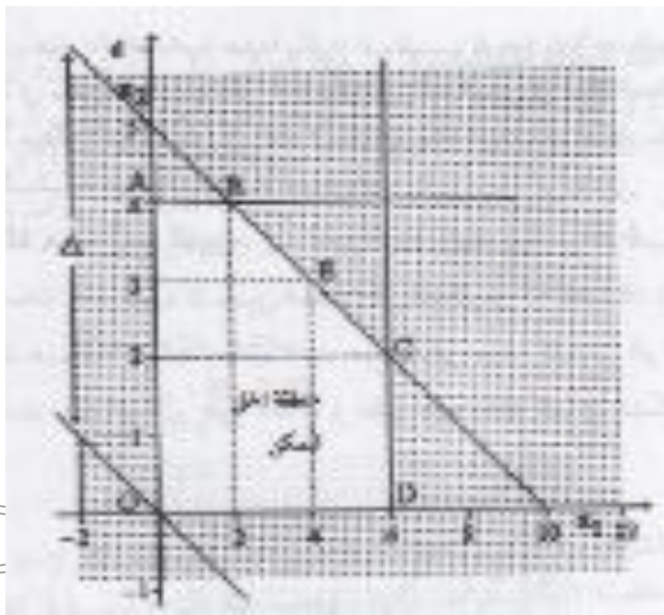
✓ عن طريق رسم دالة الهدف: يمكن الوصول إلى نفس الحل الذي توصلنا إليه بطريقة أيسر عن طريق رسم دالة الهدف.

نأخذ 24 ون (تم اختياره على أساس أنه يقبل القسمة على 3 و 4 في دالة الهدف دون وجود قيمة غير صحيحة).

$W = 3x_1 + 4x_2 = 24$ إذا كان: $x_1 = 0 \Rightarrow \ _2 = 6 \Leftrightarrow (0 , 6)$

إذا كان: $x_2 = 0 \Rightarrow \ _1 = 8 \Leftrightarrow (8 , 0)$

– أي أن الخط المستقيم المار بالنقطتين (6 , 0) و (0 , 8) هو الخط الحامل لدالة الهدف عندما تكون مساوية لـ 24، بعد رسم هذا المستقيم نرسم مستقيمات موازية له بحيث نزيح هذا الخط بالاتجاه الذي يحسن دالة الهدف حتى يمر من أخر نقطة من نقاط منطقة الحلول.



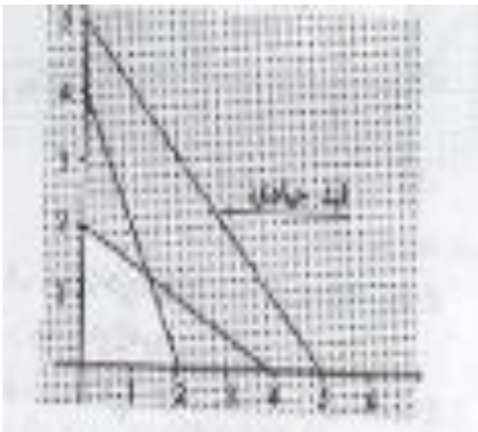
5- 2- حالات خاصة في الحل البياني:

5-2-1- حالة تعدد الحلول: يمكن أحيانا أن نصادف أكثر من حل واحد وهي الحالة المسماة بتعدد الحلول، وفيها نجد على الأقل رأسين من رؤوس المضلع حيز الإمكان يتماسان في أنن واحد مع حامل دالة الهدف

بحيث يكونا أخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنية.

مثل الشكل المقابل والذي هو في حالة تعظيم نلاحظ أن النقط B. E .C الخاصة بالمضلع O. A. B. E. C. D على استقامة واحدة. وهي أخر الرؤوس وهي بذلك تحقق الحل الأمثل لهذه المشكلة، وبالتالي فهي توفر المرونة في اتخاذ القرار لكونها تتيح بدائل عديدة، ونصادف هذه الحالة خاصة عندما يكون حامل دالة الهدف موازي لأحد المستقيمات المولدة في سقف منطقة الحل الممكن في اتجاه اليمين في حالة التعظيم وفي اتجاه اليسار في حالة التصغير.

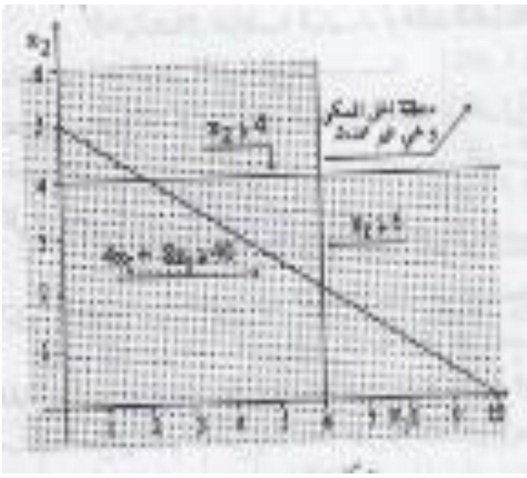
5-2-2- حالة حياد أحد القيود: عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة وحينها يكون هذا القيد حياديا تماما، حيث يمكن حذفه تماما من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام وهذا كما هو موضح في الشكل، حيث نلاحظ أن الحالة في حالة تعظيم وهناك مستقيمان يحصران منطقة الحل الممكن ومستقيم ثالث حيادي، يتم حذفه من البرنامج دون أن يؤثر فيه.



5-2-3- استحالة الحل: وهي الحالة التي تكون فيه القيود متناقضة حيث لا تحقق لنا أي منطقة للحل الأمثل .

5-2-4- لا نهاية الحالة الاقتصادية: في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أو تساوي مقدار ثابت غير أنه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة كلها أكبر أو تساوي في حالة التعظيم، وهذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لا نهائية ولا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي ومحدد للدالة.

وهذا ما يوضحه الشكل المقابل حيث تولدت لدينا منطقة الحل الممكن وهي غير محددة.



5-2- عرض الحل بطريقة السمبلكس

5-2-1- مقدمة: بينا في الفصل السابق كيف نستخدم الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية، إلا أنه هناك قصورا واضحا في هذه الطريقة، نضرا لكونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين، ويرجع ذلك إلى استحالة الرسم البياني لأكثر من متغيرين، وطالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات والقيود فإننا نحتاج إلى أسلوب أخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس. ويقوم هذا الأسلوب على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الحل الأمثل في حالة وجوده وذلك في عدة مراحل متتابعة ومحددة ويتم ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلى الوصول إلى أفضل حل في كل مرحة وذلك إلى الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. إن كثرة استخدام هذا البرنامج أدى إلى اكتشاف حالات خاصة من حالات البرمجة الخطية مثل أسلوب النقل.

5-2-2- الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس: هناك خمس خطوات:

- ✓ وضع مشكلة البرمجة الخطية في شكلها القياسي؛
- ✓ إيجاد الحل الأساسي الأولي (المبدئي) المسموح به (عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة وفي الغالب هي نقطة الصفر)؛
- ✓ اختبار مثلوية الحل (إمكانية تحسين الحل القائم)؛
- ✓ تحسين الحل القائم ويتم ذلك من خلال القيام بالخطوات التالية:

– تحديد المتغير غير الأساسي والذي لا يوجد في الحل الحالي والذي يجب إدخاله في الحل الأساسي الجديد؛

– تحديد المتغير الأساسي الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل؛

_ تحديد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد، وهو يعبر عن نقطة ركنية في منطقة الإمكانات (منطقة الحلول)، وكذا تحديد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود؛

– الرجوع إلى الخطوة الثالثة وتكرار عملية التقييم.

- ✓ إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي توصلت إليه هو الحل الأمثل.

5-2-3- الصيغة القياسية النموذجية للبرنامج الخطي في طريقة السمبلكس:

تتمثل هذه المرحلة في صياغة النموذج الرياضي المقابل للمسألة محل الدراسة إلى شكل قياسي عن طريق تحويله إن لم يكن كذلك، ويرجع السبب في القيام بهذه الخطوة إلى كون طريقة السمبلكس في الحل تفترض أن جميع المتغيرات موجبة أو معدومة (شروط عدم السلبية)، أي يجب تبديل المتغيرات غير المقيدة بإشارة (المتغيرات الحرة) بمتغيرات أخرى مقيدة ومن ثم تحويل القيود من متباينات إلى معادلات، مع الإشارة إلى وجود دالة هدف نسعى إلى تحقيقها. وهذا يعني أن:

- ✓ جميع قيود البرنامج يجب أن تظهر على شكل معادلات؛
- ✓ جميع المتغيرات تحقق شروط عدم السلبية؛
- ✓ دالة الهدف تسعى إلى تحقيق المثلوية (تعظيم أو تصغير)؛
- ✓ الجانب الأيمن للقيود (القيم الثابتة) يجب أن يكون موجبا أو معدوما.

5-2-3-1- تحويل القيود إلى الشكل القياسي: النموذج المقابل للمسألة محل الدراسة يأتي في صورة قيود يمكن أن تأخذ شكل تساوي أو أكبر من أو يساوي أو أصغر من أو يساوي أو مزيج بينها وفي الشكل القاسي يجب أن تكون كل العلاقات في شكل معادلات (=) وهذا يعني أن : - القيود من النوع = يبقى على ما هو عليه.

- **القيود من نوع أصغر أو يساوي** $\leq$: هذا النوع من القيود يعالج على النحو التالي: هذا القيد يعني أن الجهة اليسرى من المتباينة هي أصغر من الجهة اليمنى وتحقيق المساواة بين الطرفين لا يتم إلا بإضافة متغير بإشارة موجبة إلى الجهة اليسرى يساوي الفرق بين الجهتين يطلق عليه المتغيرة الوهمية (متغير الفرق).

مثال: $5x_1 + 2x_2 \leq$ هنا نقوم بإضافة متغير وهمي وليكنS_1 فيصبح القيد بمثابة مساوية كما يلي:

$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 10$ وعليه بصفة عامة إذا كان لدينا قيد من الشكل: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq b_i \ / \ b_i \geq 0$

فان هذا القيد يتم تحويله كما يلي: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j + s_i = b_i \ / \ x_j , s_i \geq 0$

وحتى تكون كل المتغيرات ممثلة في جميع المعادلات فإننا نضيف متغيرات الفروق بمعاملات الصفر للمعادلات التي لا يظهر فيها أحد هذه المتغيرات كون أن أسلوب السمبلكس يعتمد على حل المعادلات الآنية.

- والمعنى الاقتصادي لهذه المتغيرة الوهمية أو الاصطناعية في حالة أصغر من أو يساوي: فهو يمثل الزيادة في الجانب الأيمن عن الجانب الأيسر، وهو يضمن أن الكميات المستخدمة من المورد b_i لن تزيد عن الكمية المتاحة ولكن يمكن أن تقل عنها وبالتالي يمثل المتغير s_i الكمية غير المستخدمة من المورد المتاح b_i ولذا يسمى هذا المتغير بالمتغير الراكد (موارد متوفرة وبقيت دون استخدام)، المتغير العاطل (موارد عاطلة عن الاستخدام)، متغير الفرق (الفرق بين المتاح والمستخدم من المتاح) وسنعتمد هذه التسمية الأخيرة.

القيود من النوع أكبر من أو يساوي $\geq$: هذا النوع من القيود يعالج على النحو التالي:

- بما أن هذا القيد يعني أن الجهة اليسرى أكبر من الجهة اليمنى فان تحقيق المساواة لا تتم سوى بإدخال متغير إلى الجهة اليمنى يساوي الفرق بين الجهتين أو بطرحه مباشرة من الجهة اليسرى.

مثال: $x_1 + 2 \quad _2 \geq 12$ *نقوم* بإضافة متغير إلى الطرف الأيمن وليكن: s_1 فيصبح القيد بمثابة مساوية كما يلي*:* $4x_1 + 2x_2 = 12 + s_1$ وبنقل المتغير الجديد إلى الطرف الأيسر مع تغيير إشارته فيصبح القيد في صورته النهائية كما يلي: $4x_1 + 2x_2 - s_1 = 12$ وهذا يعني أنه إذا كان لدينا *قيد* من الشكل*:* $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \geq b_i \ / \ b_i \geq 0$

فان هذا القيد يتم تحويله إلى معادلة من خلال إضافة المتغير s_i إلى الطرف الأيسر بإشارة سالبة كما يلي:

$\sum_{j=1}^{n} a_{i.j} \cdot x_j - s_i = b_i \ / \ x_j , s_i \geq 0$

والمعنى الاقتصادي للمتغير s_i في حالة أكبر أو يساوي هي الزيادة في الجانب الأيسر عن الجانب الأيمن وهو يعكس الزيادة على المطلوب ولهذا يسمى بالمتغير الفائض (فائض يساوي موارد زائدة عن الحاجة المطلوبة).

5-2-3-2- **تحويل المتغيرات إلى الشكل القياسي:** المتغيرات في أي مسألة قد تكون مقيدة (تخضع لشروط عدم السلبية) وقد تكون غير مقيدة (حرة) والشكل القياسي هو أن تكون هذه المتغيرات مقيدة وبالتالي فإن المتغيرات غير المقيدة يتوجب علينا تحويلها إلى متغيرات مقيدة وذلك وفق القاعدة التالية: إن أي متغير غير مقيد يعبر عنه بالفرق بين متغيرين غير سالبين. فمثلا إذا كان: x_i غير مقيد فيبدل بالعلاقة: $x_i^+ - x_i^-$.

5-2-3-3- **الجانب الأيمن من القيود بالشكل القاسي:** أي الثوابت التي تعكس المتاح من الموارد أو ما يجب تحقيقه من متطلبات كحد أدنى هذه الثوابت يجب أن تكون موجبة أو مساوية للصفر وفي الحالة العكسية (ثوابت سالبة) يجب تحويلها إلى قيم موجبة عن طريق ضرب طرفي المتراجحة في-1 وتقلب إشارة المتراجحة أي إذا كانت $\leq$ تصبح$\geq$ وإذا كانت $\geq$ تصبح $\leq$.

مثال: لنفرض أن القيد التالي ورد بالشكل الخطي $x_1 - 5x_2 \geq -8$ تحويل هذا القيد إلى الشكل القياسي يمر بمرحلتين:

- التخلص من الإشارة السالبة مع تغيير اتجه المتباينة: $-x_1 + 5x_2 \leq 8$

- إضافة متغير الفرق مع تحويل المتراجحة إلى معادلة: $-3x_1 + 5x_2 + s_1 = 8$

مثال آخر: $-6x_1 + 5x_2 = -12$ نتخلص من الإشارة السالبة في الطرف الأيمن فنتحصل على الشكل القياسي: $6x_1 - 5x_2 = 12$

5-2-3-4- **دالة الهدف بالشكل القياسي:** متغيرات الفروق والفائض تدخل في دالة الهدف بمعاملات صفرية

مثال: لنفرض أنه لدينا البرنامج التالي:

$$Max\ Z = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$1x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 12$$
$$1x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq 10$$
$$1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$

x_2 غير مقيدة الإشارة

القيد الأول: يتم تحويل القيد إلى معادلة $1x_1 + 4x_2 + 7x_3 + s_1 = 12$

يتم التعبير عن المتغير الثالث الغير مقيد بالفرق بين متغيرين: $1x_1 + 4x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) + s_1 = 12$

القيد الثاني: يتم تحويل القيد إلى معادلة: $\mathbf{1x_1 - 4x_2 - 5x_3 - s_2 = 10}$

يتم التعبير عن المتغير الثالث الغير مقيد بالفرق بين متغيرين $\mathbf{x_1 - 4x_2 - 5(x_3^+ - x_3^-) - s_2 = 10}$

القيد الثالث: يتم التعبير عن المتغير الثالث غير المقيد بالفرق بين متغيرين

$\mathbf{1x_1 - 2x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) = 8}$

ويصبح النموذج في صورته النهائية كما يلي:

Max Z = $\mathbf{1x_1 + 2x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 0s_1 + 0s_2}$

$\mathbf{1x_1 + 4x_2 + 7(x_3^+ - x_3^=) + s_1 + 0s_2 = 12}$

$\mathbf{1\,x_1 - 4x_2 - 5(x_3^+ - x_3^-) + 0s_1 - s_2 = 10}$

$\mathbf{1x_1 - 2x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) + 0s_1 + 0s_2 = 8}$

$\mathbf{x_1\,, x_2\,, x_3^+\,, x_3^-\,, s_1\,, s_2\ \geq 0}$

5-2-3-5- إيجاد الحل الأساسي الأولي المسموح به: يتم الحصول على هذا الحل عن طريق تشكيل مصفوفة أحادية في جدول السمبلكس باعتماد الشكل القياسي الناتج مباشرة من النموذج المعطى وان لم نتمكن من الحصول على مصفوفة أحادية يتم تعديل النموذج عن طريق إدخال متغيرات a_i اصطناعية بإشارة موجبة.

- إذا كان n عدد المتغيرات في الشكل النهائي الذي يمكن من الحصول على الحل الأساسي المسموح به، فبعد اضافة متغير وهمي أو اصطناعي يصبح عدد المتغيرات n يساوي المتغيرات الأساسية أو الهيكلية + المتغيرات الوهمية و المتغيرات الاصطناعية (عددها بعدد القيود). m عدد القيود إن الحل الأساسي الأولي المسموح به يحتوي على m متغيرا له قيمة مغايرة للصفر وباقي المتغيرات n_ – m متغيرا قيمة مساوية للصفر، عدا المتغيرات الوهمية والاصطناعية التي تأخذ وبصورة مباشرة قيما بالحل الأساسي تساوي القيمة الثابتة في قيده (الجانب الأيمن لقيده)، أما قيمة دالة الهدف فتحدد من خلال إحلال قيم المتغيرات الناتجة عن الحل الأولى المسموح به بقيمها في دالة الهدف وإجراء العمليات الضرورية.

مثال: مؤسسة صغيرة تنتج نوعين من النوافذ ومن أجل ذلك تستخدم معدن الألمنيوم (قضبان) وزجاج عاكس (صفائح) البرنامج المقابل لهذه المسألة كما يلي:

$\boldsymbol{Max\ Z = 6x_1 + 7x_2}$

$\mathbf{2x_1 + 3x_2 \leq 12}$

$\mathbf{2x_1 + x_2 \leq 8}$

$\mathbf{x_1\,, x_2\ \geq 0}$

- الشكل القياسي للبرنامج الخطي: إن البرنامج المعطى له شكل قانوني ويتم تحويله إلى الشكل القياسي من خلال إضافة متغيرين جديدين يمثلان ما يسمى بمتغيرات الفروق.

Max Z = $\mathbf{6x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2}$

$\mathbf{2x_1 + 3x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 12}$

$2x_1 + x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 8$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

نلاحظ على الشكل القياسي ما يلي:

- ✓ إن متغيرات الفروق لا تضيف أي ربح لأن معاملاتها في دالة الهدف تساوي الصفر؛
- ✓ عدد المتغيرات المجهولة هو $(n =)$؛
- ✓ لدينا مصفوفة أحادية وتتجلى هذه المصفوفة في متغيرات الفروق أو المتغيرات الوهمية $\begin{vmatrix} 1s_1 & s_2 \\ s_1 & 1s_2 \end{vmatrix}$
- ✓ n متغير: $n = 4$ المتغيرات الأصلية (الأساسية) = **2** ، متغيرات الفروق (الوهمية) = **2**؛
- ✓ m عدد القود **m = 2**،

– لدينا: $n - m = 4 - 2 \Rightarrow n - m = 2$ وهو عدد المتغيرات الأساسية في النموذج وبالتالي $x_1 = 0, x_2 = 0$

وأما باقي المتغيرات وهي 2 م وهمية فتساوي القيمة الثابتة في القيد حيث يوجد متغير الفرق أي: $s_1 = 12 , s_2 = 8$

ومنه نجد في دالة الهدف: $Z = 6 * 0 + 7 * 0 + 0 * 12 + 0 * 8 = 0$

ولندرج جدول السمبلكس الأول والعاكس للحل الأول المسموح به:

	معاملات دالة الهدف c_j	6	7	0	0	قيم الحل
معاملات المتغيرات الأساسية c_b	متغيرات النموذج x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	s_1	2	3	1	0	12
0	s_2	2	1	0	1	8
Z_J		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		6	7	0	0	

– إن الحل الذي يبرزه الجدول الأول هو حل أولي مسموح به يتكون من متغيرات الفروق s_1 و s_2 وهذا الحل لا يحقق أي ربح لكن يسهل الوصول إليه حيث أن متغيرات الفروق تساوي القيم الثابتة في معادلات القيود والتي تبرز في العمود الأخير، وهذا الحل يعني عدم إنتاج أي وحدة من السلعتين.

– هذا الحل الأولي المبدئي هو نقطة ركنية من منطقة الإمكانات (منطقة الحلول) فهو يحقق كل القيود معا؛

– عدد متغيرات الحل يساوي عدد القيود (باستبعاد قيود عدم السلبية)؛

– متغيرات الحل هي تلك القيود التي تقابل المصفوفة الأحادية أي تلك المتغيرات التي تتضمن خانتها عنصرا واحدا قيمته +1 وباقي العناصر قيمتها صفر وهذا يعني أن خانة s_1 هي $\binom{1}{0}$ وخانة s_2 هي $\binom{0}{1}$.

اختبار مثلوية الحل: بعد تحديد الحل الأساسي الأولي يجب القيام باختبار الحل إن كان يشكل حلا أمثلا أم لا؟ وهذا يتجلى في البحث عن ما إذا كان هناك متغير من متغيرات النموذج يوجد خارج متغيرات القاعدة يمكن أن يحسن من قيمة دالة الهدف (نحو الزيادة في حالة التعظيم ونحو النقصان في حالة التصغير).

حالة التعظيم: في حالة التعظيم فإنه يتوجب علينا من أجل معرفة ما إذا كان بالإمكان تحسين قيمة الدالة الإطلاع، على قيم الثوابت الموجودة بالسطر الأخير من جدول السمبلكس.

- السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس فهو يعبر في حالة التعظيم عن الربح الذي سوف يتم التضحية به مقابل زيادة الوحدة من المتغير الموجود في كل عمود فبالنسبة للمتغير الثاني والخاص بالمتغير x_2 نجد الرقم 3 يعبر عن عدد الوحدات (قطع الألمنيوم) التي سوف ينقص بها s_1 عند إنتاج وحدة واحدة من x_2 (نافذة من النوع الثاني) كذلك فإن الرقم 1 في ذات العمود يعبر عن عدد الوحدات التي سوف ينقص بها المتغير s_2 (صفائح الزجاج) عند إنتاج وحدة واحدة من x_2 أي (0= 0*1+ 0*3) وهي ذات القيمة الموجودة بالخانة الثانية من السطر ما قبل الأخير وبالذات في العمود المقابل للمتغير x_2، والسطر المقابل لـ Z_j، كما أن الربح الذي يتم التضحية به نتيجة إنتاج وحدة واحدة من السلعة الأولى x_1 هو أيضا صفر (0=0*2+0*2). وهكذا دواليك.

- السطر الأخير سطر C_j-Z_j فهي تمثل مثلا بالنسبة للعمود الأول والمقابل للمتغير x_1 تعني الفارق بين الربح الذي سوف يتحقق والربح الذي سوف يتم التضحية به نتيجة إنتاج وحدة واحدة من السلعة الأولى (نافذة من النوع الأول) وهو في هذه الحالة رقما موجبا قدره 6 وحدات نقدية، ونفس الشئ بالنسبة للعمود الثاني، كما يطلق على هذا الفرق بالأثر الصافي والذي يكون إما موجبا أو سالبا أو معدوما.

- ✓ حالة الأثر الصافي موجب: إذا كانت هناك قيم في السطر الأخير موجبة يعني أن إدخال متغير سيؤدي إلى تحسين قيمة الدالة ويتوجب علينا المفاضلة بين القيمة الموجبة والتركيز من حيث الأولوية في الدخول إلى القاعدة الجديدة على القيمة الموجبة الأكبر؛
- ✓ حالة الأثر الصافي المعدوم: إذا كانت هناك قيم في السطر الأخير معدومة فهذا يعني أن إدخال أي متغير في الحل من المتغيرات الموجودة خارج متغيرات القاعدة لن يؤثر على قيمة دالة الهدف لا نحو الزيادة ولا نحو النقصان، والأثر لا يظهر سوى على تغير التوليفة التي تتماشى ومكونات القاعدة (من حيث الإنتاج والفائض)؛
- ✓ حالة الأثر الصافي السالب: إذا كانت هناك قيم في السطر الأخير معدومة فهذا يعني أن إدخال أي متغير لن يؤدي إلى تحسين قيمة الدالة بل بالعكس سيؤدي إلى تراجعها بمقدار قيمة المعامل وبطبيعة الحال هذا غير مرغوب فيه لأنه يتنافى مع المطلوب وهو التعظيم.

حالة التصغير: في حالة التصغير كذلك ومن أجل معرفة إذا ما كان بالإمكان تحسين قيمة الدالة نحو النقصان الإطلاع على قيم الثوابت الموجودة بالسطر الأخير، فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة مع تغيير دور إشارة قيمة الفرق (الأثر الصافي) فهذا يعني أنه إذا كانت كل القيم موجبة أو معدومة هذا يعني أننا

بلغنا الحل الأمثل وأي قيمة بهذا السطر سالبة تعني أن الحل غير أمثل وبالتالي يجب تحسينه. والرجوع إلى مثالنا السابق نلاحظ أننا بصدد التعظيم وأن هناك قيم موجبة في السطر الأخير (6 و 7) بالنسبة للمتغيرين x_1 و x_2 وهذا يعني أننا لم نبلغ الحل الأمثل.

5-2-3- 6- تحسين الحل: بعد أن تأكدنا أن الحل الذي بلغناه ليس بالحل الأمثل نعمل على تحسينه، ويتم ذلك من خلال إدخال المتغير الذي يوجد أصلا خارج القاعدة حسب القيمة الأنسب (أعظم قيمة في حالة التعظيم وأصغر قيمة في حالة التصغير). بعد أن تأكدنا أننا لسنا بالحل الأمثل يجب أن نحسن ما هو موجود حيث نعمل على تحديد المتغير الداخل

- **المتغير الداخل:** أكبر معامل في السطر الأخير وليكن d_j يقابل المتغير الواجب إدخاله وليكن x_j والعمود المقابل لهذا المتغير في دالة الهدف يعكس ما يسمى بعمود الدوران i. وبالعودة لمثالنا ومقارنة القيم الموجودة في السطر الأخير من جدول السمبلكس نجد أن المتغير x_2 الموجود في العمود الثاني يحضى بأكبر القيم 7 وهذا يعني أن إدخال السلعة الثانية سوف يترتب عليه تحقيق ربح أكبر مما لو تم إدخال السلعة الأولى ولذلك فالقرار الآن هو اعتبار x_2 متغيرا أساسيا في الحل له قيمة بعد أن كان متغيرا غير أساسيا قيمته صفرا، فالسلعة الثانية تساهم بـ 7 وحدات نقدية لكل وحدة وهو يمثل أكبر مساهمة من بين المنتوجين الموجودين في مثالنا.

- **المتغير الخارج:** إن تحديد المتغير الواجب إدخاله في القاعدة الجديدة يتطلب تحديد المتغير الواجب إخراجه من القاعدة وذلك من أجل الحفاظ على بعد المصفوفة الأحادية، إن المتغير الخارج هو أحد المتغيرات ذات القيمة الموجبة والناتج عن قسمة ثوابت الطرف الثاني على الثوابت الموجبة والمتواجدة بعمود الدوران على أن يتم اختيار أصغر القيمة الناتجة عن القسمة، فإذا كانت كل القيم سالبة نتوقف كون أن المسألة ليس لها حل أمثل.

وبالعودة إلى مثالنا السابق: نقوم باختيار أكبر قيمة في السطر الأخير وهي 7 الواقعة في عمود المتغير x_2 وهذا يعني أن x_2 هو المتغير الداخل والعمود الثاني هو عمود الدوران، ثم بعد ذلك نبحث عن القيمة الصغرى $\frac{12}{3} = 4 , \frac{8}{1} = 8$ نختار القيمة الصغرى، وهي مقابلة للسطر الأول الذي يحمل المتغير s_1 ويعني هذا أن هذا المتغير هو الذي سيخرج ليحل محله المتغير الجديد x_2 والذي سبق تحديده فأصغر قيمة موجبة من الاثنين تعطينا العدد الأقصى من x_2 وهو 4 وحدات (إن محاولة إدخال قيمة أكبر من 4 وحدات من x_2 ستدفع بـ s_1 لأن يكون سالبا وهو يتنافى مع شروط عدم السلبية، أما عنصر الدوران فهو الذي يقع عند عمود الدوران وسطر الدوران عند التقاطع بينهما كما يسمى عنصر الارتكاز وهو القيمة 3 في مثالنا، وهذا ما يوضحه الجدول أدناه:

سطر الدوران　　المتغير الخارج　　المتغير الداخل　　عمود الدوران

	معاملات دالة الهدف c_j	6	7	0	0	قيم الحل
معاملات المتغيرات الأساسية c_b	متغيرات النموذج x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	s_1	2	3	1	0	12
0	s_2	2	1	0	1	8
Z_J		0	0	0	0	0
C_j-Z_j		6	7	0	0	

أكبر قيمة في السطر الأخير　　12/3=4

عنصر الارتكاز (الدوران)　　4 أصغر من 8 نختار 12 ومنها نحدد المتغير الخارج وسطر الدوران　　8/1=8

جدول السمبلكس الجديد الثاني: إن إدراج جدول سمبلكس جديد يهدف إلى إيجاد حل جديد يحسن من قيمة دالة الهدف، وهو يتوقف على مجموعة من العمليات الحسابية الواجب إجراؤها على الجدول الأخير:

- ✓ يتم تغيير عنصر الدوران الموجود بالجدول 1 بالقيمة 1. وبروز الرقم واحد في عمود وسطر المتغير الداخل هو بمثابة بداية تكوين مصفوفة الوحدة في جدول السمبلكس الجديد؛
- ✓ تقسم باقي عناصر سطر الدوران على عنصر الدوران (الارتكاز)، يقلب العنصر الأخر صفرا في عمود الدوران؛
- ✓ تحسب بقية العناصر بالشكل التالي: $\begin{matrix} b & a \\ d & c \end{matrix}$ حيث a عنصر الارتكاز 3 التي تصبح في الجدول الثاني 1 أما b فهي القيمة الواقعة في سطر الدوران والتي تصبح في الجدول الثاني: b/a و c هي القيمة الموجودة في عمود الدوران وهي تقلب صفرا في الجدول الجديد أما d فتصبح في الجدول الجديد كما يلي: $d-\frac{b*c}{a}$ أي $0-\frac{1*1}{3}=-\frac{1}{3}$ وبنفس الطريقة بقية العناصر؛
- ✓ السطر ما قبل الأخير الخانة الأولى الخاصة بالعمود الأول: $7*{}^{2}/_{3}+0*{}^{4}/_{3}={}^{14}/_{3}$ وهكذا بقية الخانات الخاصة بهذا السطر.
- ✓ السطر الأخير نجري فيه عملية الطرح.

جدول السمبلكس الثاني:

	معاملات دالة الهدف c_j	6	7	0	0	قيم الحل
معاملات المتغيرات الأساسية c_b	متغيرات النموذج x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
7	x_2	$^{2}/_{3}$	1	$^{1}/_{3}$	0	4
0	s_2	$^{4}/_{3}$	0	$-{}^{1}/_{3}$	1	4
Z_J		$^{14}/_{3}$	7	$^{7}/_{3}$	0	28
C_j-Z_j		$^{4}/_{3}$	0	$-{}^{7}/_{3}$	0	

وتعكس النتائج الموجودة في الجدول مجموعة من الحقائق: المتغيرات الأساسية 2 هما: $s_2=4$, $x_2=4$ و المتغيرات غير الأساسية $s_1=0, x_1=0$ قيمة دالة الهدف عند هذا الحل هو Z=28 حيث أصبحت 28 بدلا من الصفر في الحل السابق

$Z=6*0 +7*4+ 0*0 +0*4 =28$

ملاحظة: إذا كانت الإشارة سالبة فهذا يعني أن العلاقة بين المتغير الموجود في السطر والمتغير الموجود في العمود هي علاقة طردية أما إذا كانت الإشارة موجبة فهذا يعني أن العلاقة عكسية.

اختبار مثلوية الحل: من خلال السطر الأخير لجدول السمبلكس نلاحظ أن به رقما موجبا وعليه فالحل الموجود ليس بالحل الأمثل ولذلك نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة

– المتغير الداخل هو x_1، المتغير الخارج هو s_2 ، عنصر الدوران هو القيمة الواقعة في السطر الثاني العمود الأول.

جدول السمبلكس الجديد: الجدول الثالث:

قيم الحل	0	0	7	6	معاملات دالة الهدف c_j	
b	s_2	s_1	x_2	x_1	متغيرات النموذج x_b	معاملات المتغيرات الأساسية c_b
2	$-1/2$	$1/2$	1	0	x_2	7
3	$3/4$	$-1/4$	0	1	x_1	6
32	1	2	7	6	Z_J	
	-1	-2	0	0	C_j-Z_j	

وتعكس النتائج الموجودة بالجدول الثالث: المتغيرات الأساسية: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ المتغيرات غير الأساسية: $s_2 = 0, s_1 = 0$

عند هذا الحل أصبحت دالة الهدف 32 بدلا من 28 في الحل السابق، وبما أن كل القيم في السطر الأخير صفرية أو سالبة فإن ذلك يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل، والذي يقضي إلى أن تقوم المؤسسة قيد الدراسة بإنتاج 3 نوافذ من النوع الأول و2 نافذة من النوع الثاني فقط وبهذا ستضمن أقصى ربح 32 و.ن وذلك في حدود مت هو متوفر لديها من الألمنيوم والزجاج.

5-2-4- طريقة السمبلكس: الحلول الأساسية المصطنعة: في بعض الحالات الخاصة يتطلب اعتماد الحل الأساسي المصطنع ومن ثم إدراج جدول السميلكس الأول، ويتم اللجوء إلى الحل الأساسي المصطنع بهدف تكوين حل أولي مسموح به في حالتين:

- ✓ نموذج في شكل قانوني: حالة تصغير؛
- ✓ نموذج مختلط: حالة تصغير أو تعظيم.

5-2-4-1- نموذج في شكل قانوني: حالة التصغير: لنفرض أنه لدينا النموذج الأتي:

$$Min\, W = 2x_1 + 3x_2$$
$$1x_1 + 5x_2 \ \geq 10$$
$$2x_1 + \ 3x_2 \ \geq 8$$
$$3x_1 + \ 1x_2 \ \geq 6$$
$$x_1, x_2 \ \geq 0$$

5-2-4-1-1- كتابة البرنامج المعطى في شكل قياسي:

$$Min\, W = 2x_1 + \ 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$1x_1 + \ 5x_2 - s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 10$$
$$2x_1 + \ 3x_2 + 0s_1 - s_2 + 0s_3 = 8$$
$$3x_1 + \ 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 - s_3 = 6$$
$$x_1, x_2, s_1 \,, s_2, s_3 \geq 0$$

5-2-4-1-2- الحصول على حل أولي مسموح به: إن هذا البرنامج هو فعلا في شكل نموذجي إلا أنه لا يمكننا من الوصول إلى حل أولي مسموح به إن إعطاء المتغيرات الأصلية قيمة صفرية أي: $0=$, x_2 =0 $= 0$, x_1 فإن s_1 =−10, s_2 =−8 , s_3 =−6, $W = 0$

وهذا الحل لا تتحقق فيه شروط عدم السلبية فمتغيرات الفائض هنا سالبة (لا يمكنها أن تكون جزء من مصفوفة الوحدة التي تحتوي على المتغيرات الأساسية، ومن أجل حل هذا الإشكال نعتمد على أسلوب إيجاد الحلول الأساسية المصطنعة أو كما تعرف باسم طريقة M، تنص طريقة M على إدخال متغيرات مصطنعة وتضمن لنا حذف هذه المتغيرات قبل الوصول إلى الحل الأمثل وتكون من خلال تعيين تكلفة عالية جدا لكل متغير مصطنع في دالة الهدف، فبعد كتابة النموذج على الشكل النموذجي يتم إضافة معاملات معدومة للمتغيرات الوهمية أما المتغيرات المصطنعة فنرفق لها عدد كيفي موجب تماما وكبير جدا M بحيث نضع: M – إذا كانت المسألة مسألة تعظيم و M إذا كانت المسألة مسألة تصغير.

ملاحظة: عندما تكون هناك قيود تحمل إشارة = في البرنامج الخطي، فإننا بحاجة فقط إلى إضافة متغير مصطنع من أجل تشكيل الجدول والحصول على حل أولي ممكن، إن أحد خصائص جدول الحل للبرنامج الخطي هي أن تكون قيم b_i موجبة فإن حدث ووجدنا العكس في أحد القيود يكفي ضرب هذا القيد (المتراجحة) في 1− وبالتالي فإن إشارة القيد ستعكس.وعليه يصبح النموذج بالشكل:

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + \ 3x_2 \ + 0s_1 + 0s_2 + 0s_1 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3}$$
$$\mathbf{1x_1 + \ 5x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 \ + 1a_1 + 0a_2 + 0\ a_3 = 10}$$
$$\mathbf{2x_1 + \ 3x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0s_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0\ a_3 = 8}$$
$$\mathbf{3x_1 + \ 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 - 1s_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1\ a_3 = 6}$$
$$\mathbf{x_1, x_2, s_1 \,, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0}$$

نلاحظ أن النموذج أصبح يحتوي على 8 متغيرات و3 قيود وهذا يعني أن الحل الأساسي يجب أن يحتوي على 5 متغيرات مساوية للصفر

بإعطاء متغيرات القرار قيما مساوية للصفر يكون الحل كما يلي: − متغيرات القرار $x_1 = 0, x_2 = 0$

متغيرات الفروق: $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$ المتغيرات الاصطناعية: $a_1 = 10, a_2 = 8, a_3 = 6$

قيمة دالة الهدف W = 24M من الملاحظ أن الحل أعلاه يحتوي قيمة كبيرة جدا في دالة الهدف وهذا راجع إلى ظهور المتغيرات الاصطناعية بقيم غير معدومة في الحل، ولا بد عند تحسين الحل وبلوغ الحل الأمثل أن تكون قيمة المتغيرات الاصطناعية معدومة، نقوم بتعويض قيم كل متغير اصطناعي في دالة الهدف بقيمته المحسوبة بدلالة المتغيرات الأصلية

$$a_1 = 10 - 1x_1 - 5x_2 + s_1$$
$$a_2 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + s_2$$
$$a_3 = 6 - 3x_1 - 1x_2 + s_3$$

وبتعويض هده القيم في دالة الهدف تصبح كما يلي:

$$\text{Min } W = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_1 + M(10 - 1x_1 - 5x_2 + s_1) + M(8 - 2x_1 - 3x_2 + s_2) + M(6 - 3x_1 - 1x_2 + s_3)$$
$$\Rightarrow \text{Min } W = (2 - 6M)x_1 + (3 - 9M)x_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 24M$$

الشكل القياسي المصطلح (الحل الأساسي الأولي للنموذج).

$$W = (2 - 6M)x_1 + (3 - 9M)x_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 24M$$
$$1x_1 + 5x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0s_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 8$$
$$3x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 - 1s_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 6$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

لندرج جدول السمبلكس الأول

	c_j	2	3	0	0	0	M	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	b
M	a_1	1	5	−1	0	0	1	0	0	10
M	a_2	2	3	0	−1	0	0	1	0	8
M	a_3	3	1	0	0	−1	0	0	1	6
Z_J		6 M	9 M	− M	− M	− M	M	M	M	24 M
$C_j – Z_j$		2−6 M	3−9 M	M	M	M	0	0	0	

تقييم إمكانية تحسين الحل القادم: في مثالنا هناك قيمتين سالبتين ومن ثم فالحل ليس بالأمثل وعليه:

– المتغير الخارج هو : a_1 والمتغير الداخل هو : x_2. ونتبع نفس الخطوات كما رأينا سابقا مع حالة التعظيم.

مثال: أوجد الحل الأمثل للنموذج الموالي

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + x_2}$$
$$\mathbf{x_1 + 3x_2 \geq 30}$$
$$\mathbf{4x_1 + 2x_2 \geq 40}$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$$

الحل: النموذج في الشكل القياسي:

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2}$$
$$\mathbf{x_1 + 3x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 1a_1 + 0a_2 = 30}$$
$$\mathbf{4x_1 + 2x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0a_1 + 1a_2 = 40}$$
$$\mathbf{x_1, x_2, a_1, a_2, s_1, s_2 \geq 0}$$

3-1-4-2-5 – الحصول على حل أولي مسموح به: إن هذا البرنامج هو فعلا في شكل نموذجي إلا أنه لا يمكننا من الوصول إلى حل أولي مسموح به إن إعطاء المتغيرات الأصلية قيمة صفرية أي: $0= x_2 ,\ 0 =$ x_1 فإن $s_1 =-10, s_2 =-8\ , s_3 =-6, W = 0$

وهذا الحل لا تتحقق فيه شروط عدم السلبية فمتغيرات الفائض هنا سالبة (لا يمكنها أن تكون جزء من مصفوفة الوحدة التي تحتوي على المتغيرات الأساسية، ومن أجل حل هذا الإشكال نعتمد على أسلوب إيجاد الحلول الأساسية المصطنعة أو كما تعرف باسم طريقة M، تنص طريقة M على إدخال متغيرات مصطنعة وتضمن لنا حذف هذه المتغيرات قبل الوصول إلى الحل الأمثل وتكون من خلال تعيين تكلفة عالية جدا لكل متغير مصطنع في دالة الهدف، فبعد كتابة النموذج على الشكل النموذجي يتم إضافة معاملات معدومة للمتغيرات الوهمية أما المتغيرات المصطنعة فنرفق لها عدد كيفي موجب تماما وكبير جدا M بحيث نضع: M – إذا كانت المسألة مسألة تعظيم و M إذا كانت المسألة مسألة تصغير.

ملاحظة: عندما تكون هناك قيود تحمل إشارة = في البرنامج الخطي، فإننا بحاجة فقط إلى إضافة متغير مصطنع من أجل تشكيل الجدول والحصول على حل أولي ممكن، إن أحد خصائص جدول الحل للبرنامج الخطي هي أن تكون قيم b_i موجبة فإن حدث ووجدنا العكس في أحد القيود يكفي ضرب هذا القيد (المتراجحة) في 1– وبالتالي فإن إشارة القيد ستعكس.وعليه يصبح النموذج بالشكل:

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_1 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3}$$
$$\mathbf{1x_1 + 5x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 1a_1 + 0a_2 + 0\,a_3 = 10}$$
$$\mathbf{2x_1 + 3x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0s_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0\,a_3 = 8}$$
$$\mathbf{3x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 - 1s_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1\,a_3 = 6}$$
$$\mathbf{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0}$$

نلاحظ أن النموذج أصبح يحتوي على 8 متغيرات و3 قيود وهذا يعني أن الحل الأساسي يجب أن يحتوي على 5 متغيرات مساوية للصفر

بإعطاء متغيرات القرار قيما مساوية للصفر يكون الحل كما يلي: − متغيرات القرار $x_1 = 0, x_2 = 0$ متغيرات الفروق: $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$ المتغيرات الاصطناعية: $a_1 = 10, a_2 = 8, a_3 = 6$

قيمة دالة الهدف **W = 24M** من الملاحظ أن الحل أعلاه يحتوي قيمة كبيرة جدا في دالة الهدف وهذا راجع إلى ظهور المتغيرات الاصطناعية بقيم غير معدومة في الحل، ولا بد عند تحسين الحل وبلوغ الحل الأمثل أن تكون قيمة المتغيرات الاصطناعية معدومة، نقوم بتعويض قيم كل متغير اصطناعي في دالة الهدف بقيمته المحسوبة بدلالة المتغيرات الأصلية

$$\mathbf{a_1 = 10 - 1x_1 - 5x_2 + s_1}$$
$$\mathbf{a_2 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + s_2}$$
$$\mathbf{a_3 = 6 - 3x_1 - 1x_2 + s_3}$$

وبتعويض هده القيم في دالة الهدف تصبح كما يلي:

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_1 + M(10 - 1x_1 - 5x_2 + s_1) + M(8 - 2x_1 - 3x_2 + s_2) + M(6 - 3x_1 - 1x_2 + s_3)}$$
$$\mathbf{\Rightarrow Min\ W = (2 - 6M)x_1 + (3 - 9M)x_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 24M}$$

الشكل القياسي المصطلح (الحل الأساسي الأولي للنموذج).

$$\mathbf{W = (2 - 6M)x_1 + (3 - 9M)x_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 24M}$$
$$\mathbf{1x_1 + 5x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 1a_1 + 0a_2 + 0\,a_3 = 10}$$
$$\mathbf{2x_1 + 3x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0s_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0\,a_3 = 8}$$
$$\mathbf{3x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 - 1s_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1\,a_3 = 6}$$
$$\mathbf{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0}$$

لندرج جدول السمبلكس الأول

	c_j	2	3	0	0	0	M	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	b
M	a_1	1	5	−1	0	0	1	0	0	10
M	a_2	2	3	0	−1	0	0	1	0	8
M	a_3	3	1	0	0	−1	0	0	1	6
Z_J		6 M	9 M	− M	− M	− M	M	M	M	24 M
$C_j - Z_j$		2−6 M	3−9 M	M	M	M	0	0	0	

تقييم إمكانية تحسين الحل القادم: في مثالنا هناك قيمتين سالبتين ومن ثم فالحل ليس بالأمثل وعليه:

−المتغير الخارج هو: a_1 والمتغير الداخل هو: x_2. ونتبع نفس الخطوات كما رأينا سابقا مع حالة التعظيم.

مثال: أوجد الحل الأمثل للنموذج الموالي

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + x_2}$$
$$\mathbf{x_1 + 3x_2 \geq 30}$$
$$\mathbf{4x_1 + 2x_2 \geq 40}$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$$

الحل: النموذج في الشكل القياسي:

$$\mathbf{Min\ W = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2}$$
$$\mathbf{x_1 + 3x_2 - 1s_1 + 0s_2 + 1a_1 + 0a_2 = 30}$$
$$\mathbf{4x_1 + 2x_2 + 0s_1 - 1s_2 + 0a_1 + 1a_2 = 40}$$
$$\mathbf{x_1, x_2, a_1, a_2, s_1, s_2 \geq 0}$$

جدول السمبلكس الأول:

	c_j	2	1	0	0	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
M	a_1	1	3	−1	0	1	0	30
M	a_2	4	2	0	−1	0	1	40
Z_J		5 M	5 M	− M	− M	M	M	70 M
C_j−Z_j		2−5 M	2−5 M	M	M	0	0	

جدول السمبلكس الثاني: نلاحظ أن هناك نعادل نختار المتغير الذي له أصغر قيمة كمعامل في دالة الهدف

	c_j	2	1	0	0	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
1	x_2	$1/3$	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	10
M	a_2	$10/3$	0	$2/3$	−1	$-2/3$	1	20
Z_J		$1/3 + 10M/3$	1	$-1/3 + 2M/3$	−M	$1/3 - 2M/3$	M	10+20M
C_j−Z_j		$1/3 - 10M/3$	0	$1/3 - 2M/3$	M	$-1/3 + 2M/3$	0	

جدول السنبلكس الثالث:

	c_j	2	1	0	0	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
1	x_2	0	1	$-3/5$	$1/10$	$3/5$	$-1/10$	8
2	x_1	1	0	$1/5$	$-3/10$	$-1/5$	$1/10$	6
Z_J		2	1	$-1/5$	$-1/2$	$1/5$	$1/5$	20
C_j−Z_j		0	0	$1/5$	$1/2$	M−$1/5$	M−$1/5$	

من خلال السطر الأخير نلاحظ أننا بصدد الحل الأمثل.

- **حالات خاصة في البرمجة الخطية: 1- حالة التعادل في السطر الأخير:** قد تتعادل القيم الموجبة في حالة التعظيم أو القيم السالبة في حالة التصغير في السطر الأخير والتي تقابل المتغيرات المرشحة للدخول (متغيرين أو أكثر) إلى القاعدة لتصبح متغيرات أساسية، وفي هذه الحالة يمكن اختيار متغير من بين المتغيرات المرشحة للدخول بشكل تحكمي واختيار أي من هذه المتغيرات سوف يوصلنا إلى الحل الأمثل (في حال وجوده) وذلك حسب القواعد التالية:

قاعدة 1:_إذا كان التعادل بين متغير قرار أي المتغير الأصلي ومتغير إضافي يتم اختيار المتغير الأصلي.لأن يدخل الحل؛

قاعدة 2: إذا كان التعادل بين متغيري قرار أي متغيرين أصليين يتم اختيار المتغير الذي له أكبر أثر في دالة الهدف (أكبر معامل في حالة التعظيم وأصغر معامل في حالة التصغير)؛

قاعدة 3: إذا كان التعادل بين متغيرين إضافيين يتم الاختيار بصورة عشوائية؛

2- حالة التفسخ أو التفكك (عدم الانتظام): - حالة التعادل خارج القسمة عند تحديد المتغير الذي يخرج من الحل فإذا كانت أحد المتغيرات الأساسية مساويا للصفر فهذا لا يمثل مشكلة، في حالة التعادل خارج القسمة فالحل الموافق قد يكون حلا غير منتظما، إذا طهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفرية في أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائي فإن الحل قد يواجه مشكلة تكرار نفس الحلول والعودة إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل، وقد ننتقل من حل متفكك إلى أخر دون تحسين الحل؛

3- حالة تكرار القيد: وهو يعتبر كذلك حل متفسخ (غير منتظم) إذا كان أحد القيود زائد عن الحاجة أو مكرر وبالتالي فهو أصلا غير ضروري للحل. وعليه فنحن لا نغادر النقطة الركنية التي نحن فيها لأننا تتحصل على نفس الحل في كل مرة وفي كل جدول جديد؛

4- حلول متعددة: قد يبرز في بعض الحالات أكثر من حل أمثل واحد وفي هذه الحالة يكون لركنيتين أو أكثر نفس العائد (ربح أمثل أو تكلفة مثلى).وهي تدعى بالحلول البديلة وهي مرغوب فيها بالنسبة لمتخذي القرار؛

5- مشكلة دون حل أمثل: في بغض الحالات نجد مشكلات ليس لهم حل؛

6- حلول غير مقيدة غير محدودة: اذا لم يكن هناك حل أمثل محدد بشكل نهائي.

ملاحظة: سوف يتم التعرض لبعض هذه الحالات من خلال حصص الأعمال الموجهة.

6- المسألة الثنائية (المرافقة)

6-1- خطوات صياغة النموذج الثنائي؛

6-1-1- حالة التعظيم؛

6-1-2- حالة التصغير؛

6-1-3- الحالات الخاصة في النموذج الثنائي.

6-1- خطوات صياغة النموذج الثنائي:

لفظ الثنائية في مجال البرمجة الخطية يعني أن كل مشكلة يمكن صبها في قالب برنامج خطي ويمكن صياغتها رياضيا بطريقتين يطلق على الصياغة الأولى التي تتم في الحالة العادية الصيغة الأصلية أو النموذج الأولي ويقترن بهذا النموذج سواء كان فيه الهدف من دالة الهدف التعظيم أو التصغير نموذج أخر يطلق عليه النموذج الثنائي أو المرافق. فمثلا كل مشكلة تعظيم (ربح أصلي) يمكن النظر إليها كمشكلة تصغير التكاليف نموذج مرافق، وكل مشكلة تقليل التكاليف (أصلي) يمكن النظر إليه كمشكلة تعظيم الأرباح مرافق.

6-1- خطوات صياغة النموذج الثنائي:

6-1-1- حالة التعظيم: تصاغ النماذج الثنائية من الشكل الأصلي للنماذج الأصلية وفق مجموعة من الخطوات ومن أجل استيعابها بصورة أفضل ننطلق من مثال وليكن هذا المثال في حالة التعظيم وفي الشكل القانوني:

$$\mathbf{Max\ Z = 100x_1 + 200x_2}$$
$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 440$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 480$$
$$x_1 \leq 90$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ومن أجل الوصول إلى المرافق يجب إتباع مجموعة من الخطوات نوجزها في ما يلي:

الخطوة الأولى: تحويل غاية دالة الهدف: إن دالة الهدف في المرافق هي دوما عكس دالة الهدف في الأصلي فإذا كانت دالة الهدف في الأصلي هي تعظيم فإن هذه الدالة في المرافق تصبح تصغير، والعكس بالعكس. وبالعودة إلى مثالنا فان الغاية منه هي التعظيم وبالتالي النموذج المرافق يصبح في حالة التصغير.

الخطوة الثانية: عدد المتغيرات في المرافق: المتغيرات في المرافق نرمز لها بالرمز j وعددها يعادل عدد القيود الموجودة في الأصلي، بالعودة إلى مثالنا في الأصلي هناك أربعة قيود أي في المرافق هناك أربع متغيرات والتي تتصف هي بدورها بعدم السلبية.

الخطوة الثالثة: تحديد معاملات دالة الهدف: إن معاملات دالة الهدف في المرافق هي إجمالي الموارد المتاحة i من الطرف الأيسر في القيود الخاصة بالأصلي وبالعودة إلى مثالنا:

$$\mathbf{Min\ W = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4}$$

الخطوة الرابعة: إدراج منقول مصفوفة المعاملات الفنية للمرافق: يتم تحويل المعاملات المتواجدة أمام المتغيرات في القيود المفروضة على المشكلة محل الدراسة بحيث تصبح الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا وهذا يعني أن مصفوفة المعاملات الفنية في المرافق هي بمثابة منقول لمصفوفة المعاملات في الأصلي، بالعودة إلى مثالنا.

الأصلي **المرافق**

$$\mathbf{A_{4,2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A_{2,4}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

الخطوة الخامسة: تحديد اتجاه القيود وشروط عدم السلبية:

يتم تغيير اتجاه القيود تماما – الأصلي تعظيم وفي شكل قانوني القيود $\leq$ في المرافق تصبح من الشكل $\geq$، أما إذا كان الأصلي تصغير وفي شكل قانوني العكس بالعكس، وفي مثالنا القيود من الشكل أصغر من أو يساوي تصبح في المرافق من الشكل أكبر من أو يساوي.

الخطوة السادسة: مكونات الطرف الثاني في المرافق: مكونات الطرف الثاني في المرافق هي معاملات دالة الهدف في الأصلي وبالعودة إلى مثالنا يمكن صياغة الشكل المرافق

$$\mathbf{Max\ Z = 100x_1 + 200x_2}$$
$$\boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 150}$$
$$\boldsymbol{4x_1 + 2x_2 \leq 440}$$
$$\boldsymbol{x_1 + 4x_2 \leq 480}$$
$$\boldsymbol{x_1 \leq 90}$$
$$\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}$$

المرافق

$$\boldsymbol{Min\ W = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4}$$
$$\boldsymbol{1y_1 + 4y_2 + 1y_3 + 1y_4 \geq 10}$$
$$\boldsymbol{1y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 200}$$
$$\boldsymbol{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0, y_4 \geq 0}$$

6-1-2- حالة التصغير: نفرض أنه لدينا برنامج أصلي جاء بهذه الصورة (في حالة التصغير) بنفس الطريقة

$$\boldsymbol{Min\ W = 4x_1 + 2x_2}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 3x_2 \geq 60}$$
$$\boldsymbol{2x_1 + 2x_2 \geq 20}$$

$$\boldsymbol{MaxZ = 60y_1 + 20y_2 + 12y_3}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 2y_2 \leq 4}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 2}$$

$3x_2 \ \geq 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

مثال 2: أكتب البرنامج الثنائي المقابل للبرنامج التالي:

الأصلي

$Min\ W = 5x_1 + 2x_2 + 1x_3$

$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \ \geq 20$

$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \ \geq 30$

$7x_1 + 1x_2 + 3x_3 \ \geq 40$

$1x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ \geq 50$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

المرافق

$Max\ Z = 20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4$

$2y_1 + \ 6y_2 + 7y_3 + 1y_4 \ \leq 5$

$3y_1 + 8y_2 + 1y_3 + 2y_4 \ \leq 2$

$1y_1 + \ 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 \ \leq 1$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$

6-1-3- الحالات الخاصة في النموذج الثنائي:

6-1-3-1- عدم تناسب دالة الهدف مع اتجاه متباينات القيود: تكون هذه الحالة عند احتواء مشكلات التقليل على قيود من الشكل أصغر من أو يساوي، أو احتواء مشكلات التعظيم على قيود من الشكل أكبر من أو يساوي في هذه الحالة فإن القيد الذي لا يتناسب مع المشكلة يضرب في 1- ثم بعد ذلك تجرى العمليات كما أشرنا سابقا.

مثال: أوجد البرنامج الثنائي المرافق للبرنامج التالي:

$Max\ Z = 30x_1 + 20x_2$

$1x_1 + 2x_2 \ \geq 10$

$1x_1 + 3x_2 \ \leq 88$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Min W = $-10y_1 + \ 88y_2$

$-1y_1 + \ 1y_2 \ \geq 30$

$-2y_1 + \ 3y_2 \ \geq 20$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

نضرب القيد الأول في 1- فتغير المتراجحة اتجاهها فيصبح من الشكل

$-1x_1 - 2x_2 \ \leq -10$

وعليه يصبح البرنامج على الشكل الثنائي كما هو مبين أعلاه

مثال 02: أوجد البرنامج الموافق للبرنامج التالي:

Min W = $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$2x_1 + 5x_2 + 1x_4 + 1x_5 \geq 6$

$4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 5$

$1x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

$Max\ Z = 6y_1 + 5y_2 - 7y_3$

$2y_1 - 1y_3 \ \leq 3$

$5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \ \leq 2$

$-2y_2 - 3y_3 \ \leq 1$

$1y_1 + 2y_2 - 7y_3 \ \leq 2$

$1y_1 + 3y_2 - 5y_3 \ \leq 3$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

6-1-3-2- أحد قيود المشكلة عبارة عن مساواة: في هذه الحالة يحول قيد المساواة إلى قيدين أحدهما ≤ والأخر ≥ ، ثم بعد ذلك يصرب أحد القيدين في -1 حسب الحالة التي يستعديها الحل ونجد البرنامج المرافق.

مثال:نحول القيد الأول إلى قيدين ثم نضرب القيد الذي يحتوي على أصغر من أو يساوي في -1 فيصبح لدين 3 قيود

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Min\,W = 5x_1 + 8x_2}\\
&\boldsymbol{3x_1 + 2x_2 = 1}\\
&\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 \geq 9}\\
&\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}
\end{aligned}
$$

تعديل القيد

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Min\,W = 5x_1 + 8x_2}\\
&\boldsymbol{3x_1 + 2x_2 \geq 10}\\
&\boldsymbol{-3x_1 - 2x_2 \geq -10}\\
&\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 \geq 9}\\
&\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}
\end{aligned}
$$

المرافق

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max\,Z = 10y_1 - 10y_2 + 9y_3}\\
&\boldsymbol{3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \leq 5}\\
&\boldsymbol{2y_1 - 2y_2 + 1y_3 \leq 8}\\
&\boldsymbol{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0}
\end{aligned}
$$

ملاحظات: - إذا كان لدينا برنامج أصلي ومرافقه فإن إحدى الحالات التالية محقق

البرنامج المرافق

البرنامج الأصلي	حل ممكن	لا يوجد حل ممكن
حل ممكن	حلول مثلى منتهية للأصلي والمرافق	يملك الأصلي حلولا ممكنة ولكن لا يملك حلا مثاليا منتهيا
لا يوجد حل ممكن	يملك المرافق حلولا ممكنة ولكن لا يملك حلا مثاليا منتهيا	لا يوجد حلول ممكنة لكلا البرنامجين

البرنامج الأصلي

- قراءة قيم متغيرات المرافق من جدول المثلوية الأصلي: عندما نحدد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي باستعمال طريقة السمبلكس يمكننا من خلال جدول المثلوية قراءة قيم متغيرات المرافق التي تشكل بدورها الحل الأمثل لهذا الأخير وهذا من خلال العلاقات التالية (مهما كان نوع المسألة).

- إذا كان القيد من نوع ≤ فان $y_i = z_j$ ، وإذا كان القيد من النوع ≥ فان $y_i = -z_j$ ،أما إذا كان القيد من نوع = فان $y_i = z_j$

7- تحليل الحساسية

7-1- مقدمة

7-2- مفهوم تحليل الحساسية وأسعار الظل.

7-2-1- مفهوم وأهمية تحليل الحساسية.

7-2-2- مفهوم أسعار الظل وكيفية تحديدها.

7-3- مدخل إجراء تحليل الحساسية.

7-3-1- مدخل المحاولة و الخطأ.

7-3-2- المدخل التحليلي في حالة التعظيم (Max) وفي حالة التدنية (Min).

أولاً: التغير في معاملات المتغيرات لدالة الهدف.

- مدى التغير للمتغيرات الداخلة في الحل.
- مدى التغير للمتغيرات غير الداخلة في الحل.

ثانياً: مدى التغير للإمكانيات المتاحة (الموارد أو القيم الثابتة في القيود).

7-1- مقدمة: يعتبر موضوع تحليل الحساسية من المواضيع المهمة جداً لمتخذ القرار بسبب تغير أسعار المواد الأولية باستمرار وكذلك يتغير مستوى الطلب على المنتج والتغيرات السريعة في التكنولوجيا، في مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل سوف يتغير أو يبقى كما هو؟ و إذا كان سوف يتغير هل لا بد من حل كل المشكلة مرة أخرى بالقيم الجديدة للوصول إلى الحل الأمثل الجديد؟ هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخرى؟ الإجابة على ذلك تكمن فيما **سمي بتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية** والذي كما هو واضح في التسمية يقيس درجة حساسية الحل الأمثل الحالي للتغير في القيم الواردة في المشكلة الأصلية، ويمتاز هذا المدخل بأنه يوفر تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخرى حتى في حالة استخدام الكمبيوتر، ومنه إن تحليل الحساسية هو دراسة التغير الحاصل في قيمة الحل الأمثل في حالة تغير معاملات المشكلة، يفيد استخدامها في معرفة تأثير حدوث أي تغير في مكونات النموذج معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية، الثوابت في المعادلات (الموارد المتاحة) والمعاملات الفنية.

7-2- مفهوم وأهمية تحليل الحساسية وأسعار الظل في البرمجة الخطية:

7-2-1- مفهوم وأهمية تحليل الحساسية: تحليل الحساسية هو كيفية قياس تأثر الحل وتغيره نتيجة للتغير في أحد مكونات النموذج (أرباح، أسعار، تكاليف، طاقات إنتاجية...الخ) بسبب ظروف عدم التأكد التي تواجه صناع القرار إضافة إلى التطورات المتعلقة بـ: (تطور تقنيات الإنتاج، تطور المواد الأولية المستخدمة

في العملية الإنتاجية أو تطور أسعارها، سرعة دوران اليد العاملة وتأثيرها على الطاقة الإنتاجية للمنشأة، حالة الاقتصاد العام من حيث الازدهار والركود وانعكاسها على الطلب والعرض والأسعار والتكاليف والأرباح)، ويساهم مدخل تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية في توفير تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخرى، حيث يتم الاعتماد فقط على جدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل.

7-2-2- مفهوم أسعار الظل وكيفية تحديدها: سعر الظل للقيد الخطي يرمز له بالرمز (y_i) هو مقدار التغير في قيمة دالة الهدف إذا زدنا الطرف الأيمن للقيد الخطي b_i بمقدار وحدة واحدة، شريطة أن لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل مع ثبات جميع جميع العوامل الأخرى

- أي أن (y_i) يساوي معدل التغير في قيمة دالة الهدف المثلى عندما تزيد b_i بقيمة ضمن الحدود المسموح بها في تحليل الحساسية (آدا كان التغير في قيمة b_i يقع خارج المنطقة المسموحة بتحليل الحساسية يصبح الحل الأمثل منحل (غير منتظم) ويصبح هذا التعريف غير صحيح).

- وغالبا ما تسمى أسعار الظل بالأسعار الاقتصادية (السعر الاقتصادي لشراء وحدة إضافية من المورد b_i) في حالة كون القيد على شكل متراجحة من النوع أقل من أو يساوي $(\leq)$.

- ويحدد سعر الظل وفقاً للحالات التالية:

✓ سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة $\leq$ (اقل من أو يساوي) بين الطرفين الأيسر والأيمن للقيد الخطي هو معامل المتغير الوهمي لهذا القيد الخطي في دالة الهدف (السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس) ضمن جدول السمبلكس النهائي الأمثل؛

✓ سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة $\geq$ (أكبر من أو يساوي) بين الطرفين الأيسر والأيمن للقيد الخطي هو معامل المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي في دالة الهدف (السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس) ضمن جدول السمبلكس النهائي الأمثل؛

✓ سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة = (يساوي) بين الطرفين الأيسر والأيمن للقيد الخطي هو معامل المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي في دالة الهدف (السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس) ضمن جدول السمبلكس النهائي الأمثل.

7-3- مدخل إجراء تحليل الحساسية: هناك مدخلين لتحليل الحساسية هما:

7-3-1- مدخل المحاولة والخطأ: وفقاً لهذا المدخل يتم تغيير بيانات الإدخال ومن ثم تكون نموذج جديد، بمعنى إعادة حل النموذج مرة ثانية ومقارنة النتائج مع نتائج النموذج الأصلي، ولهذا المدخل عيوب:

✓ يستغرق هذا المدخل مدة طويلة جداً خاصة إذا كان عدد المتغيرات المحتملة في البيانات كبيراً؛

✓ يتطلب إعادة حل المشكلة مزيد من الوقت، الجهد والنفقات في حالة المشاكل ذات الحجم الكبير.

7-3-2- **المدخل التحليلي:** ليس هناك حاجة لإعادة حل نموذج البرمجة الخطية كلياً في كل مرة يحدث فيها تغير وفقاً لهذا النموذج. وذلك وفقاً لحالتين (التعظيم والتدنية) ووفقاً للتغيرات المتعلقة بـ:

- ✓ التغيرات المتعلقة بمعاملات دالة الهدف؛
- ✓ التغيرات المتعلقة بالطرف الأيمن من القيود (الثوابت أو الإمكانيات المتاحة)؛
- ✓ التغيرات المتعلقة بالمتغيرات غير الأساسية.

7-3-2-1- **التغيرات المتعلقة بمعاملات دالة الهدف:** في هذه الحالة يتم تحديد مجالات تغير لقيم هذه المعاملات بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتاً لا يتغير سواء في حالة التعظيم أو التدنية ونميز هنا حالتين:

- ✓ **في حالة تغير معاملات متغيرات دالة الهدف الداخلة في الحل:** لمعرفة مجال التغير في هذه الحالة يتم الرجوع إلى جدول السمبلكس النهائي وإتباع الخطوات الآتية:
- ✓ قسمة قيم سطر دالة الهدف (السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس Z في حالة التعظيم أو W في حالة التدنية) على القيم المقابلة لها في سطر المتغير المراد تحديد حساسية تأثر الحل وفقا لتغير معاملته في دالة الهدف X_n وفقا للعلاقة الآتية: $\frac{Z}{\mathrm{X_n}}$ أو $\frac{W}{\mathrm{X_n}}$؛
- ✓ تحديد أكبر قيمة سالبة من نواتج القسمة بالقيمة المطلقة، وأصغر قيمة موجبة؛
- ✓ تحديد مجال تغير معامل المتغير المدروس بحيث لا يؤثر على الحل الأمثل حسب الحالة (تعظيم أو تدنية) وفقا للعلاقتين الآتيتين:

$$\boldsymbol{X_n - Min^{+}\left[\frac{Z}{X_n}\right] \leq C_n \leq X_n + Max^{-}\left[\left|\frac{Z}{X_n}\right|\right]}$$

$$\boldsymbol{X_n - Min^{+}\left[\frac{W}{X_n}\right] \leq C_n \leq X_n + Max^{-}\left[\left|\frac{W}{X_n}\right|\right]}$$

- ✓ **في حالة تغير معاملات متغيرات دالة الهدف غير الداخلة في الحل:** هي المتغيرات التي لم تدخل في الحل وقيمها معدومة، وحتى تصبح داخلة في الحل لا بد أن ترتفع معاملاتها في دالة الهدف في حالة التعظيم بمقدار القيمة المقابلة للمتغيرة غير الداخلة في الحل ضمن السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس $\{Z\}$، وأن تنخفض معاملاتها في دالة الهدف في حالة التدنية بمقدار القيمة المقابلة للمتغيرة غير الداخلة في الحل ضمن السطر ما قبل الأخير من جدول السمبلكس $\{W\}$.

مثال₁: لنفرض أنه لدينا النموذج الآتي:

$$\boldsymbol{Max_{\mathrm{Z}} = 2\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 + 3\mathrm{x}_3}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60}$$
$$\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40}$$
$$\boldsymbol{1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 60}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

وكان جدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل كالآتي:

	C_j	2	4	3	0	0	0	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
4	x_2	$1/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	0	$20/3$
3	x_3	$5/6$	0	1	$-1/6$	$2/3$	0	$50/3$
0	S_3	$-5/3$	0	0	$-2/3$	$-1/3$	1	$20/3$
Z_j		$23/6$	4	3	$5/6$	$2/3$	0	$230/3$
$C_j - Z_j$		$-11/6$	0	0	$-5/6$	$-2/3$	0	

والمطلوب: تحديد أسعار الظل؟ دراسة حساسية النموذج بالنسبة لمعاملات دالة الهدف؟

الحل: 1/ **أسعار الظل** هي: 0, $2/3$, $5/6$

2/ دراسة حساسية النموذج بالنسبة لمتغيرات دالة الهدف الداخلة في الحل لدينا كل من x_2، x_3

- **بالنسبة للمتغيرة** x_2

	Zj/x_2	$23/2$	4	/	$5/2$	-2	/
4	x_2	$1/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	0
Z_j		$23/6$	4	3	$5/6$	$2/3$	0

أكبر قيمة سالبة -2 وأصغر قيمة موجبة $5/2$

وبالتعويض في العلاقة:

$$X_n - Min^+ \left[\frac{Z}{X_n}\right] \leq C_n \leq X_n + Max^- \left[\left|\frac{Z}{X_n}\right|\right]$$

نجد: $4 - 5/2 \leq C_2 \leq 4 + 2 \Rightarrow 3/2 \leq C_2 \leq 6$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت معاملة المتغير x_2 ضمن المجال أعلاه

- بالنسبة للمتغيرة x_3

	Zj/x_3	$23/5$	/	3	-5	1	0
3	x_3	$5/6$	0	1	$-1/6$	$2/3$	0
Z_j		$23/6$	4	3	$5/6$	$2/3$	0

أكبر قيمة سالبة -5 و أصغر قيمة موجبة 1

وبالتعويض في العلاقة نجد: $3 - 1 \leq C_3 \leq 3 + 5 \Rightarrow 3 - 1 - 2 \leq C_3 \leq 8$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت معاملة المتغير x_3 ضمن المجال أعلاه.

2- بالنسبة لمتغيرات دالة الهدف غير الداخلة في الحل: لدينا x_1.

قيمة x_1 معدومة لأنها ليست داخلة في الحل ولكي يبقى الحل أمثلا لا بد أن تكون قيمة معاملتها أقل من أو يساوي $23/6$.

مثال$_2$: لنفرض أنه لدينا النموذج الآتي:

$$Min_w = 4x_1 + 5x_2$$
$$3x_1 + 1x_2 \leq 27$$

$$5x_1 + 5x_2 = 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

وكان جدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل كالآتي:

	C_j	4	5	0	0	M	M	قيم الحل
c_b	x_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
4	x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/10$	0	$15/2$
0	s_2	0	0	1	1	$3/5$	-1	3
5	x_2	0	1	$-1/2$	0	$3/10$	0	$9/2$
Z_j		4	5	$-1/2$	0	$11/10$	0	$105/2$
$C_j - Z_j$		0	0	$1/2$	0	$M - 11/10$	M	

والمطلوب: تحديد أسعار الظل؟ دراسة حساسية النموذج بالنسبة لمعاملات دالة الهدف؟

الحل:

1/ أسعار الظل هي: $-1/2$ ، 0، $11/10$

2/ دراسة حساسية النموذج بالنسبة لمتغيرات دالة الهدف الداخلة في الحل

لدينا كل من x_1، x_2

– بالنسبة للمتغيرة x_1

	Zj/x_2	4	/	-1	/	-11	/
4	x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/10$	0
Z_j		4	5	$-1/2$	0	$11/10$	0

أكبر قيمة سالبة – 1 وأصغر قيمة موجبة 4

وبالتعويض في العلاقة:

$$X_n - Min^+\left[\frac{Z}{X_n}\right] \leq$$
$$C_n \leq X_n + Max^-\left[\left|\frac{Z}{X_n}\right|\right]$$

نجد:

$$4 - 4 \leq C_2 \leq 4 + 1 \Rightarrow 0 \leq C_2 \leq 5$$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت معاملة المتغير x_1 ضمن المجال أعلاه

– بالنسبة للمتغيرة x_2

	Zj/x_2	/	3	1	/	$11/3$	/
5	x_2	0	1	$1/2^-$	0	$3/10$	0
Z_j		4	5	$-1/2$	0	$11/10$	0

أصغر قيمة موجبة 1

5–1=4 فالحل الأمثل لا يتغير إذا كانت معاملة المتغير x_2 أكبر من أو يساوي 4.

7-3-2-2- التغيرات المتعلقة بالإمكانيات المتاحة

(الموارد أو القيم الثابتة في القيود): لحساب مدى التغير بالنسبة للإمكانيات المتاحة نتبع الخطوات الآتية:

- بالرجوع إلى جدول السمبلكس للحل الأمثل نقسم قيم الحل B على القيم المقابلة لها في العمود الخاص بالمتغير المدروس (المتغير المكمل أو الاصطناعي الخاص بالقيد محل الدراسة)؛
- تحديد أكبر قيمة سالبة من نواتج القسمة بالقيمة المطلقة، وأصغر قيمة موجبة؛

➢ تحديد مجال تغير معامل المتغير المدروس بحيث لا يؤثر على الحل الأمثل حسب الحالة (تعظيم أو تدنية) وفقا للعلاقة الآتية: $B_n - Min^{+}\left[\frac{B}{Y}\right] \leq B \leq B_n + Max^{-}\left[\frac{B}{Y}\right]$

وبالعودة للمثال$_1$ السابق نقوم بدراسة حساسية تغير الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الأول:

x_b	s_1	قيم الحل b	$^{B}/_{S_1}$
x_2	$^{1}/_{3}$	$^{20}/_{3}$	20
x_3	$-^{1}/_{6}$	$^{50}/_{3}$	−100
s_2	$-^{2}/_{3}$	$^{20}/_{3}$	−10

من خلال الجدول نلاحظ أصغر قيمة موجبة 10 وأكبر قيمة سالبة − 100

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد: $\mathbf{60 - 20 \leq B \leq 60 + 10 \Rightarrow 40 \leq B \leq 70}$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الأول وفقا للمجال أعلاه.

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الثاني:

x_b	s_2	قيم الحل b	$^{B}/_{S_2}$
x_2	$-^{1}/_{3}$	$^{20}/_{3}$	− 20
x_3	$^{2}/_{3}$	$^{50}/_{3}$	25
s_2	$-^{1}/_{3}$	$^{20}/_{3}$	− 20

من خلال الجدول نلاحظ أصغر قيمة موجبة 25 وأكبر قيمة سالبة 20

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد: $\mathbf{40 - 25 \leq B \leq 40 + 20 \Rightarrow 15 \leq B \leq 60}$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الثاني وفقا للمجال أعلاه.

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الثالث:

x_b	s_3	قيم الحل b	$^{B}/_{S_3}$
x_2	0	$^{20}/_{3}$	/
x_3	0	$^{50}/_{3}$	/
s_2	1	$^{20}/_{3}$	$^{20}/_{3}$

من خلال الجدول نلاحظ أن أصغر قيمة موجبة هي: $^{20}/_{3}$

وعليه نجد $60 - {}^{20}/_{3} = {}^{160}/_{3}$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الثالث وفقا للمجال أكبر من أو يساوي $^{160}/_{3}$.

وبالعودة للمثال$_2$ السابق نقوم بدراسة حساسية تغير الطرف الأيمن من القيود على الحل الأمثل

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الأول:

x_b	s_1	قيم الحل b	$^{b}/_{S_1}$
x_1	$^{1}/_{2}$	$^{15}/_{2}$	15
s_3	1	3	3

x_2	$-{}^{1}/_{2}$	${}^{9}/_{2}$	-9

من خلال الجدول نلاحظ أصغر قيمة موجبة 3 وأكبر قيمة سالبة − 9

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد: $27 - 3 \leq B \leq 27 + 9 \Rightarrow 24 \leq B \leq 36$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الأول وفقا للمجال أعلاه.

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الثاني:

x_b	s_1	قيم الحل b	B/S_1
x_1	$-{}^{1}/_{10}$	${}^{15}/_{2}$	-75
s_3	${}^{3}/_{5}$	3	5
x_2	${}^{3}/_{10}$	${}^{9}/_{2}$	15

من خلال الجدول نلاحظ أصغر قيمة موجبة 5 وأكبر قيمة سالبة −75

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد: $60 - 5 \leq B \leq 60 + 75 \Rightarrow 55 \leq B \leq 135$

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الثاني وفقا للمجال أعلاه.

– حساسية تغير الطرف الأيمن من القيد الثالث:

x_b	s_1	قيم الحل b	B/S_1
x_1	0	${}^{15}/_{2}$	/
s_3	-1	3	-3
x_2	0	${}^{9}/_{2}$	/

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة سالبة هي: −3 وعليه نجد 63 = 3 + 60

وعليه فالحل الأمثل لا يتغير إذا تغيرت قيم ثابت طرف الأيمن من القيد الثالث وفقا للمجال أقل من أو يساوي 63.

الفصل الثاني: مشكلة النقل

تمهيد: مسألة النقل تحظى مسائل النقل كحالة خاصة من البرمجة الخطية بأهمية خاصة من ما تقدمه من دعم في عملية اتخاذ القرارات من أجل حل المشاكل الاقتصادية في قطاعات النقل والمواصلات، ويمكن إرجاع الجذور التاريخية لأساليب النقل إلى عام 1941 عندما نشر هيتشوك دراسة بعنوان توزيع السلعة من مصادر متعددة إلى مواقع متعددة وفي 1947 نشر كوبمان دراسة تحت عنوان الاستثمار الأمثل لنظام النقل، وتعتبر هاتان الدراستان نقطة انطلاق في تطوير طرق النقل المعتمدة في عصرنا الحالي.

1- صياغة نموذج نقل: يفترض النموذج المقابل لمسألة نقل ما يلي:

- ✓ عدد من مصادر عرض الموارد (مصانع إنتاج، مخازن مواد أولية، ،،،،) وعددها m حيث m أكبر من أو يساوي 2؛
- ✓ عدد من مراكز طلب الموارد(وحدات إنتاج، محلات تسويق......) وعددها n حيث n أكبر من أو يساوي 2؛
- ✓ عرض السلع مثلا (أو الطلب عليها) من طرف المصدر (المراكز) قد يختلف من عارض إلى (طالب) إلى أخر؛
- ✓ الشكل الأولي للنموذج يفترض تساوي العرض من السلع مجتمعة (من طرف المصادر) مع الطلب عليها مجتمعة (من طرف المراكز).

عند تحقق شرط تساوي العرض مع الطلب نكون بصدد مسألة نقل متوازنة، حيث كلفة النقل بين المراكز والمصادر محددة بدقة، كلفة النقل تزداد طردا مع الكمية المنقولة، هدف النقل يتمثل في تلبية طلبات المراكز انطلاقا مما هو معروض عند المصادر بأقل تكلفة ممكنة، لا يمكن نقل أكثر مما هو موجود، وعليه يمكن صياغة نموذج نقل كما يلي: لنفرض أن:

- ✓ x_{ij} هو كمية أو عدد الوحدات (أطنان ، قارورات،....) الواجب نقلها من المصادر، نحو المراكز (وتسمى هذه المتغيرات بمتغيرات القرار الواجب تحديدها؛
- ✓ c_{ij} هي كلفة نقل الوحدة الواحدة (طن، قارورة،...) من المصدر i نحو المركز j ؛
- ✓ o_i هي كمية أو عدد الوحدات المعروضة من طرف المصدر i؛
- ✓ d_j هي كمية أو عدد الوحدات المطلوبة من طرف المركز j؛
- ✓ يجب أن تكون الوحدات (البضاعة مثلا) محل النقل متجانسة بحيث يمكن نقل أي عدد من أي مصدر نحو أي مركز.

وعليه النموذج العام لمسألة النقل سيكون كما يلي:

❖ التابع الاقتصادي:

$$\boldsymbol{Min\ c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} * x_{ij}}$$

❖ القيود الخطية: - العرض: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \quad / \ 1,2,\ ,,,,,,m$

- الطلب: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad / \ 1,2,\ ,,,,,,n$

- شروط عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2 \ldots\ldots..,m \qquad ,j = 1,2 \ldots\ldots\ldots,n$

يكون لمسألة النقل حلول ممكنة فقط عندما تكون الكمية المعروضة من طرف المصجر مجتمعة مساوية إلى الكمية المطلوبة من طرف المراكز مجتمعة وبالتالي فإنها تساوي الكمية الكلية المنقولة ، أي أن :

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} o_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j}^{n} d_j}$$

يسمى مثل هذا البرنامج والذي يفترض أن مجمل العرض مساوي إلى مجمل الطلب ببرنامج الخطي المغلق لمسائل النقل ، وفي جالة عدم تحقق هذه الشروط نضيف مصادر عارضة أو مراكز طالبة وهمية بحيث يتحقق الشرط وعندها نتمكن من إيجاد حلول ممكنة.

مثال: تدير شركة لإنتاج الألبان 3 وحدات إنتاجية موزعة في الشرق الجزائري وذلك بطاقات إنتاجية محددة (بآلاف اللترات من الحليب)كما يلي: - الوحدة 1: طاقتها الإنتاجية 30 وحدة من الحليب، الوحدة 2 طاقتها الإنتاجية 60 وحدة من الحليب، الوحدة 3 طاقتها الإنتاجية 80 وحدة من الحليب، وتمتلك هذه الشركة أربع مراكز تسويقية في الشرق الجزائري طلباتها كما يلي:

المركز التسويقي 1طلبه قدره 75 وحدة من الحليب والثاني طلبه 35 والثالث طلبه 40 والرابع طلبه 20 .ويفترض أن تكاليف النقل بين كل وحدة إنتاجية ومركز تسويق بالنسبة لألف لتر حليب هي كما يلي بعد إضافة لها عمود يقابل العرض وسطر يقابل الطلب:

من الوحدة	إلى مراكز التسويق				
الإنتاجية	1	2	3	4	العرض
1	9	7	6	5	30
2	2	8	9	12	60
3	4	3	10	8	80
الطلب	75	35	40	20	170

إن مسألة النقل هي حالة خاصة من البرمجة الخطية ومعنى ذلك إن استخدام نموذج النقل يتطلب توافر شروط البرمجة الخطية هي هذا النمط من المسائل، وتتلخص هذه الشروط فيما يلي:

– تحديد التابع الاقتصادي: ويتمثل هذا في إيجاد أدنى كلفة ممكنة

$$\boldsymbol{Min\ C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i.j}.x_{i.j} = 9x_{1.1} + 7x_{1.2} + \ \ldots..+10x_{3.3} + 8x_{3.4}}$$

القيود: العرض: $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n}\ \ _{i,j} = o_i;\ \ i = 1 \Rightarrow x_{1.1} + x_{1.2} + x_{1.3} + x_{1.4} = 30}$

$\boldsymbol{i = 2 \Rightarrow x_{2.1} + x_{2.2} + x_{2.3} + x_{2.4} = 60}$

$\boldsymbol{i = 3 \Rightarrow x_{3.1} + x_{3.2} + x_{3.3} + x_{34} = 80}$

الطلب: $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = d_j;\ \ j = 1 \Rightarrow x_{1.1} + x_{2.1} + x_{3.1} = 75}$

$\boldsymbol{j = 2 \Rightarrow x_{1.2} + x_{2.2} + x_{3.2} = 35}$

$\boldsymbol{j = 3 \Rightarrow x_{1.3} + x_{2.3} + x_{3.3} = 40}$

$\boldsymbol{j = 4 \Rightarrow x_{1.4} + x_{2.4} + x_{3.4} = 20}$

شروط عدم السلبية: $\boldsymbol{x_{i,j}\ \geq\ 0}$ ، **j=1 ,2,3,4 i=1,2,3**

ونلاحظ أن العرض يساوي الطلب ويساوي 170

2- إيجاد الحل الأمثل للمسألة: يمكننا إجراء حسابات مسألة النقل على الجدول السابق للوصول للحل الأمثل، وتعتمد الخطوة الأولى في إيجاده التعرف على مجموعة الحلول الأساسية المقبولة في مسائل النقل. وعدد المتطلبات الهامشية في مسألة النقل بصيغتها العامة هو: m+n وهذا ما يمكن التعبير عنه بمعادلات وعددها: m+n .

وبالعودة إلى مثالنا لدينا 4 معادلات تعكس الطلب و3 معادلات تعكس العرض وعليه فعدد المعادلات هو 7. إن الحل الأساسي المقبول يتطلب أن تكون m+n −1 معادلات مستقلة خطيا أي أن يكون عدد الخلايا الموجودة بالجدول والتي تحتوي على قيم موجبة للمتغير $x_{i,j}$ هو m+n−1 .

ملاحظة: إذا كان عدد الخلايا الموجبة أقل من m+n−1 فإننا نكون بصدد حل أساسي مقبول شكليا، ويمكننا التغلب على هذا بإضافة أصفار ككميات منقولة في خلايا لا تؤدي إلى مساواة مغلقة وعدد الأصفار المضافة يساوي عدد الخلايا الناقصة عند جعل الحل الأساسي حلا شكليا.

3- الطرق المتعددة في إيجاد الحل الأولي: هناك عدة طرق يمكن إتباعها من أجل إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي ومن بين هذه الطرق نجد ما يلي: - طريقة الزاوية الشمالية الغربية - طريقة أقل تكلفة - طريقة الجزاء (فوجل للتقريب).

3-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: وتعتبر من أبسط الطرق في إيجاد الحل الأولي، وكما يتضح من اسمها فإننا وعند البدء في عملية التوزيع (تعبئة الخانات) من المصادر إلى المراكز فإننا نبدأ بالخانة (1.1) ونعطيها أكبر قيمة ممكنة، هذه القيمة الكبيرة تكون مقيدة بأصغر قيمة بين عرض المصدر 1 وطلب المركز 1. أي $x_{1.1} = Min(o_1, d_1) = o_1 -$ مع المحافظة على المتطلبات الهامشية، ثم بعد ذلك عند الانتقال إلى الخانة 2 نكون أمام حالتين:

1- المصدر الأول قد صدر كل ما لديه و المركز الأول لم يتلقى كامل الطلبية وبالتالي فهو بحاجة إلى النقص بين الطلب والعرض 1من مصدر أخر وعندها التنقل سيكون نحو السطر الثاني في تنقل عمودي من الخانة الأولى إلى الثانية الواقعة تحت الخانة الأولى المعبئة أي تنقل إلى الخانة (2.1) ونخصص لها أكبر قيمة ممكنة مع المحافظة على المتطلبات الهامشية

2- $x_{1.1} = Min(o_1, d_1) = d_1 -$ وهذا يعني أن: المركز الأول قد حصل على كل ما يحتاج إليه والمصدر الأول لم يتخلص من كل ما لديه من معروض وبالتالي فهو بحاجة إلى توجيه الفائض إلى مركز أخر وعليه التنقل يكون نحو العمود 2على نفس السطر أي الخانة (1.2) ونخصص لها أكبر قيمة ممكنة مع المحافظة على المتطلبات الهامشية وبالعودة إلى مثالنا ومع تطبيق القاعدة نجد أن القيمة $x_{1.1} = Min(o_1, d_1) = Min\ (30.75) = 30$ وهذا يعني أننا في الحالة 1المصدر الأول قد صدر كل ما لديه والمركز 1 لم يتلق كامل الطلبية وبالتالي فهو بحاجة إلى الفرق أي 45 من المصدر الثاني وبالتالي يكون التنقل إلى الخانة (2.1) ثم الخانة (2.2) وهكذا دواليك حسب الجدول.

المراكز → المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1	9 30	7	6	5	30
2	2 45	8 15	9	12	60
3	4	3 20	10 40	8 20	80
الطلب	75	35	40	20	170

من الجدول نلاحظ أن المراكز قد تم تلبية طلباتها وأن وعدد الخانات المعبئة يساوي 6 أي 6=1-4+3 وهذا يعني أن هذه الطريقة قد أعطتنا حلا مقبولا أساسيا.

وعند هذا الحل يكون مجموع تكاليف النقل كما يلي: $Min\ c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i.j}.x_{i.j} = (9.30) + (7.0) + \cdots + (10.40) + (8.20) = 1100$

إن طريقة الزاوية الشمالية الغربية لا تعتمد على أساس التكاليف في تعبئة الخلايا من المصادر إلى المراكز وإنما على أساس موقع الخلايا في الجدول وعليه فهذه الطريقة لا تؤدي في معظم الأحيان إلى تحقيق أقل تكلفة ممكنة بصورة مباشرة دون اللجوء إلى إجراء تحسينات.

3-2- طريقة أقل كلفة (أدنى كلفة): إن اعتماد هذه الطريقة يتطلب الأخذ بأقل كلفة بالخلية وهذا يعني تعبئة الخلية التي تتضمن أصغر تكلفة قياسا إلى تكاليف الخلايا الأخرى في الجدول، من خلال وضع أصغر قيمة بين العرض والطلب – $Min(o_i, d_j) = o_i$ هنا يتم اللجوء إلى مصدر أو مصادر أخرى لتأمين باقي الطلب أما في حالة – $Min(o_i, d_j) = d_j$ هنا يتم توجيه الفائض إلى مراكز أو مراكز أخرى لتصريف باقي العرض. بعد الخانة الأولى يأتي دور الخانة التي تليها من ناحية الكلفة وهكذا تتم عملية التعبئة بصورة تصاعدية من الأصغر باتجاه الأكبر مع المحافظة على المتطلبات الهامشية.

بالعودة إلى مثالنا: نلاحظ أن أصغر كلفة هي 2 وعليه نقوم بتعبئة الخانة (1.2) مع المحافظة على المتطلبات الهامشية وبعدها الخانة التي تليها في الكلفة وهي 3 أي الخانة (2.3) وعليه الجدول يكون كما يلي:

المراكز → / المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{5}$ 20	30
2	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$	60
3	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{3}$ 35	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{8}$	80
الطلب	75	35	40	20	170

نلاحظ من الجدول أن كل المراكز قدتم تلبية طلباتها وأن عدد الخانات المعبئة هو 6 وهذا يعني أننا بصدد حل أولي أي أن هذه الطريقة قد أعطتنا فعلا حلا مقبول أساسيا، وعند هذا الحل يكون مجموع تكاليف النقل كما يلي:

$$Min\ c = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i.j}.x_{i.j} = (2.60) + (4.15) + \cdots + (10.30) + (5.20) = 745$$

كما نلاحظ أن مجموع تكاليف النقل باستخدام طريقة أقل تكلفة أقل بكثير من استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

3-3- طريقة فوجل التقريبية (طريقة الجزاء): إن اعتماد هذه الطريقة يستلزم احتساب الفارق الحسابي بين أقل تكلفة نقل والتكلفة التي تليها مباشرة بصورة أفقية وعمودية في جدول تكاليف النقل أي: احتساب الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها لكل سطر (المصدر) على حدى، واحتساب الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها لكل عمود (المركز) على حدى ثم تأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل. حيث تمثل هذه الفروق مقدار الجزاء الذي يترتب عند عدم تعبئة الخانات الأقل تكلفة ومه يمكن الحصول على حل أولي الذي هو في معظم الحالات حل أمثل، وبالعودة إلى مثالنا السابق نجد:

	المراكز → / المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1 6 5	1	9	7	6 / 30	5	30
6 8 2	2	2 / 60	8	9	12	60
1 4 3	3	4 / 15	3 / 35	10 / 10	8 / 20	80
	الطلب	75	35	40	20	170
		2 4 2	4 7 3	3 9 6	3 8 5	

نلاحظ من هذا الجدول أن أكبر فرق للتكاليف يوجد بالسطر الثاني ويساوي 6 دنانير للمصدر الثاني وهنا نقوم بتعبئة الخانة التي تمثل أقل تكلفة تقابل أكبر فرق من بين جميع الفروق المحسوبة وأكبر كمية يمكن تخصيصها للخانة (2.1) التي لها أقل تكلفة نقل هي 60 وحدة، وهذه العملية تؤدي إلى نفاذ المخزون عند المصدر 2 وعليه لمواصلة التوزيع نحذف المصدر 2 (السطر 2) حتى نتمكن من إعادة احتساب الفروق بين التكاليف وبصورة عمودية فقط لأن ما تم استبعاده هو سطر وبالتالي الأسطر لم تتأثر.

	المراكز → / المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1 6 5	1	9	7	6	5	30
1 4 3	3	4 / 15	3	10	8	80
	الطلب	75	35	40	20	170
		5 9 4	4 7 3	4 10 6	3 8 5	

نلاحظ أن أكبر فرق في التكلفة النقل يقع في العمود الأول ويساوي 5 دنانير ويقع في الخلية (3.1) ومن ثم أكبر قيمة يمكن تخصيصها لهذه الخانة هي 15 أي نقل ما تبقى من احتياجات المركز الأول من المصدر الثالث، فهذه العملية تلبي احتياجات المركز الأول وعليه نستبعد العمود الأول، ونعيد حساب الفروق بين التكاليف للخلايا المتبقية وتعبئة الخلايا التي تمثل أقل تكلفة إزاء أكبر فرق ومواصلة العملية حتى تلبية جميع الطلبات.

المراكز ← / المصادر ↓	2	3	4	العرض
1	7	6	5	30
3	3 / 35	10	8	80
الطلب	35	40	20	170

1 6 5

5 8 3

4 7 3 4 10 6 3 8 5

المراكز ← / المصادر ↓	3	4	العرض
1	6 / 30	5	30
3	10	8	80
الطلب	40	20	170

1 6 5

2 10 8

4 10 6 3 8 5

المراكز ← / المصادر ↓	3	4	العرض
1	10 / 10	8 / 20	30
الطلب	40	20	170

ومن ثم نلاحظ أن كل المراكز قد تم تلبية طلبها وأن عدد الخانات المعبئة هو 6 وهذا يعني أننا بصدد حل أولي ومن ثم الطريقة أعطت لنا حل أمقبول أساسي، وعند هذا الحل يكون مجموع تكاليف النقل هو:

$$\boldsymbol{Min\ c} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i.j}.x_{i.j} = (6.30) + (2.60) + \cdots + (3.35) + (8.20) = 725$$

ونلاحظ أن مجموع التكاليف باستخدام طريقة فوجل للتقريب هي 725 أقل من مجموع التكاليف بالنسبة للطريقتين السابقتين، ومن ثم فهذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين.

4- خطوات التأكد من تحقق الحل الأمثل: بعد الحصول على حل أساسي مقبول مبدئي فالمرحلة الموالية هي الانتقال إلى الحل الأمثل ويكون ذلك بإتباع مجموعة من الخطوات الشبيهة بطريقة السمبلكس، ويتم الاعتماد على معيار التحسن من خلال طريقتين هما ط الكلفة الحدية و ط التوزيع المعدل.

4-1- طريقة الكلفة الحدية: $\delta_{i,j}$ تسمى هذه الطريقة أيضا بطريقة القفز على الصخور واعتماد هذه الطريقة يتم وفق مجموعة من الخطوات نوجزها فيما يلي:

- ✓ التأكد من عدد الخلايا المعبئة:عند تعبئة الجدول بإحدى الطرق الثلاث نتأكد إذا كان عدد الخلايا المعبئة في جدول الحل الأساسي مساوية إلى **m+n-1** فإذا احتوى الجدول على عدد أكبر أو أقل من الخلايا المعبئة فإن التوزيع لا يمثل حلا أوليا أساسيا وعليه يجب إعادة التوزيع بشكل يلاءم هذا الشرط؛
- ✓ تقويم الخلية غير المعبئة: إن العمل على تقويم الخلية الشاغرة يتم في بداية الأمر بتحديد المسار كإجراء أولي.

4-1-1- تحديد المسار المغلق: إن تخصيص وحدة واحدة لخلية غير مستخدمة في الحل الأساسي المبدئي الناتج عن تطبيق إحدى الطرق الثلاث، يتطلب تعديل الكميات المخصصة في خلايا أخرى وذلك للمحافظة على المتطلبات الهامشية (متطلبات العرض والطلب) وبالتالي مقبولية الحل وهذا يتطلب تحديد مسار مغلق.

4-1-1-1- المسار المغلق (السلسلة المغلقة): هو عبارة عن شكل هندسي على هيئة مربعة أو مستطيل أو أي شكل أخر يبدأ من الخلية غير المعبئة والعودة إلى ذات الخلية في جدول الحل مع تكوين زاوية قائمة عند الخلايا المعبئة فقط. ويتكون المسار من خطوط أفقية أو عمودية، أركان المسار المغلق تكون خلايا معبئة باستثناء الخلية التي يراد تعبئتها، وبالعودة إلى مثالنا: فإن إضافة وحدة إلى الخلية (1.1) في الجدول الذي يمثل الحل المبدئي فان الأمر يتطلب إجراء تعديل في القيم المخصصة للخلايا (1.3)، (3.1)، (3.3) كما هو مبين في الجدول.

	المراكز → / المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1 6 5	1	[9] *+	[7]	[6] *− 30	[5]	30
6 8 2	2	[2] 60	[8]	[9]	[12]	60
1 4 3	3	[4] *− 15	[3] 35	[10] *+ 10	[8] 20	80
	الطلب	75	35	40	20	170
		2 4 2	4 7 3	3 9 6	3 8 5	

نلاحظ من الجدول أن الخلية المراد تقويمها مع الخلايا التي تأثرت بإضافة وحدة لهذه الخلية تشكل مسارا مغلقا انطلاقا من الخلية ورجوع إليها.

4-1-1-2- تأشير رؤوس المسار المغلق: نضع إشارة موجبة في الخلية غير المعبئة والتي نريد تعبئتها ثم نضع إشارات متبادلة − و + لكل زاوية في المسار المغلق حيث تمثل هذه الإشارات السالبة والموجبة إضافة وطرح وحدة واحدة من الخلية المناظرة.

4-1-1-3- حساب مقياس التحسن: يتم حساب مقياس التحسن للخلية المراد تقويمها من خلال جمع تكاليف النقل في الخلايا التي زادت قيمها ونطرح منها تكاليف النقل في الخلايا التي نقصت قيمتها والناتج هو مقياس التحسن للخلية، ونرمز بـ $\delta_{i.j}$ لكلفة النقل فإذا كانت النتيجة موجبة فهذا يعني أن تعبئة الخلية ستؤدي إلى زيادة تكاليف النقل وبالتالي فهذه التعبئة غير محبذة، وإذا كانت النتيجة سالبة فهذا يعني أن تعبئة الخلية ستؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل وبالتالي فهذه التعبئة محبذة، أما إذا كانت معدومة فهذا يعني أن تعبئة الخلية لا يؤثر على تكاليف النقل لا بالزيادة ولا بالنقصان كما يعني هذا أن هناك خطة أخرى ولكن بنفس التكاليف.

وبالعودة إلى مثالنا فإن قيمة الخلية (1.1) هي $\boldsymbol{\delta_{i,j}}$ **=9−6+10−4=9** وبما أن مقياس التحسن عند هذه النقطة موجبة فذلك يشير إلى أن تعبئة هذه الخانة بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة تكاليف النقل بدلا من تخفيضها وبالتالي المتغير الخاص بهذه الخانة يستبعد من دخول الحل، إذا كانت مقاييس التحسن لكل الخلايا موجبة هذا يعني أننا بلغنا الحل الأمثل. ولنجري العمليات الحسابية الضرورية لحساب مختلف مقاييس التحسن

$$\boldsymbol{\delta_{1.1} = 9 - 6 + 10 - 4 = +9}$$
$$\boldsymbol{\delta_{1.2} = 7 - 6 + 10 - 3 = +8}$$
$$\boldsymbol{\delta_{1.4} = 5 - 6 + 10 - 8 = +1}$$

$\delta_{2.2} = 8 - 2 + 4 - 3 = +7$
$\delta_{2.3} = 9 - 2 + 4 - 10 = +1$
$\delta_{2.4} = 12 - 2 + 4 - 8 = +6$

نلاحظ أن مختلف مقاييس التحسن أكبر من الصفر وهذا يعني أن الحل الذي تم التوصل إليه أكبر من الصفر عن طريق طريقة فوجل التقريبية هو الحل الأمثل، وعليه فأدنى كلفة نقل هي 725.

ملاحظة: إذا كانت لدينا أكبر من خانة غير معبئة قيمة مقياس التحسن لها سالب فإننا نختار أولا الخانة ذات أكبر قيمة سالب، ثانيا نختار أكبر قيمة سالبة في المسار المغلق. ثم بعد ذلك نعيد الجدول ونعيد العملية.

4-2 - طريقة التوزيع المعدل: نلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- ✓ إضافة سطر وعمود جديدان في الجدول تم الحصول عليه بعد تطبيق أحد الطرق الثلاث والتي مكنتنا من الحصول على حل أساسي مبدئي؛
- ✓ تعبئة السطر والعمود الجديد بهدف الوقوف على مساهمة كل نقطة من النقطتين (العرض والطلب) في كلفة كل وحدة منقولة وذلك طبقا للعلاقات التالية: تكلفة كل خلية تساوي القيمة الموضوعة في العمود الجديد أمام هذه الخلية مضافا إليها القيمة الموضوعة في السطر الجديد أمام هذه الخلية؛

$\mathbf{c_{ij} = u_i + v_j}$

حيث أن $\mathbf{u_i}$ قيمة الخلية في السطر (نقطة العرض)، و $\mathbf{v_j}$ قيمة الخلية في العمود (نقطة الطلب).

- ✓ حساب حافز التبديل يعمل على حساب الحافز للتبديل خطة النقل الحالية من خلال حساب الوفر الناجم عن نقل كل وحدة تنقل من المصدر إلى المركز عبر مسار بديل والذي يتجلى في الخلايا غير المعبئة وفق العلاقة:

$\boldsymbol{c^*_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}}$

هنا نكون أمام إحدى الحالات التالية c^*_{pq} سالبة لجميع الخلايا غير المعبئة فهذا يعني أن الحل أمثل، أما إذا كانت موجبة تماما عند خلية أو أكثر فهذا يعني أن الحل غير أمثل ويجب تحسينه، أما إذا كانت مساوية للصفر عند خلية هذا يعني وجود حل أمثل بديل بنفس الكلفة الحالية، وبالعودة إلى مثالنا وللسهولة نعيد إدراج الحل الأولي الأساسي الذي تحصلنا عليه بطريقة أدنى كلفة لعلمنا أنه ليس الحل الأمثل

حساب $\mathrm{u_i, v_j}$ من العلاقة:

$\mathbf{c_{ij} = u_i + v_j}$

يفضل عند اختيار قيمة لأي من المتغيرين على أن يكون المتغير الذي له أكبر عدد من الاستخدامات وهو في مثالنا u_3 وهذا بهدف تسريع الحسابات اعتماد $\mathbf{u_1 = 0}$ وعليه يتم حساب المتغيرات الأخرى:

$c_{ij} = u_i + v_j$	استنباط القيم المتبقية بدلالة القيم المعلومة
$u_1 + v_3 = 6$ $u_1 + v_4 = 5$ $u_2 + v_1 = 2$ $u_3 + v_1 = 4$ $u_3 + v_2 = 3$ $u_3 + v_3 = 10$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 6,\ v_4 = 5$ $v_3 = 6 \Rightarrow u_3 = 4$ $u_3 = 4 \Rightarrow v_2 = -1$ $u_3 = 4 \Rightarrow v_1 = 0$ $v_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 2$

		$v_1 = 0$	$v_2 = -1$	$v_3 = 6$	$v_4 = 5$	
	المراكز → / المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
$u_1 = 0$	1	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$ *+10	$\boxed{5}$ *−20	30
$u_2 = 2$	2	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$	60
$u_3 = 4$	3	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{3}$ 35	$\boxed{10}$ *−30	$\boxed{8}$ *+	80
	الطلب	75	35	40	20	170

نعمل على حساب الحافز على تبديل الحل أي $^*_{pq}$ وهذا بالنسبة للخلايا الشاغرة باعتماد العلاقة:

$$c^*_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}$$

$$c^*_{1.1} = 0 + 0 - 9 = -9$$

$$c^*_{1.2} = 0 - 1 - 7 = -8$$

$$c^*_{2.2} = 2 - 1 - 8 = -7$$

$$c^*_{2.3} = 2 + 6 - 9 = -1$$

$$c^*_{2.4} = 2 + 5 - 12 = -5$$

$$c^*_{3.4} = 4 + 5 - 8 = 1$$

نلاحظ أن هناك قيمة موجبة **1** وهذا يعني أن الحل ليس بالأمثل ويجب تحسينه

- ✓ تحسين الحل: يتم في حالة تعدد القيم الموجبة اختيار القيمة الكبرى وفي التمرين هي حالة واحدة ونعمل على تحديد المسار المغلق كما تم في طريقة الكلفة الحدية على أن تكون نقطة انطلاق المسار هي **(3.4)** تساوي **$8-10+6-5=-1$** القيمة سالبة ثم بعد ذلك نختار القيمة الصغرى للترحيل بين **−20** و **−30** ليتم الترحيل **(لأن 5 أقل من 8)** فنحصل على الجدول الموالي.

المراكز ← المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$ 30	$\boxed{5}$	30
2	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$	60
3	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{3}$ 35	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{8}$ 20	80
الطلب	75	35	40	20	170

وبهذا الحل تكون قيمة التابع قد تراجعت بعدد الوحدات المرحلة والمقدرة بـ20 وحدة مضروبة في مقدار التحسن في مثالنا +**1** وعليه قيمة التابع تصبح **725**.

5- حالات خاصة في مسألة النقل: يمكن أن تواجهنا في مسألة النقل إحدى الحالتين: حالة عدم تساوي العرض مع الطلب وحالة عدم الانتظام

5-1- حالة عدم تساوي العرض مع الطلب: هنا نكون بصدد إحدى الحالتين الطلب أكبر من العرض أو العكس

5-1-1- الطلب أكبر من العرض: أي العرض أصغر من الطلب فإننا نتصور وجود طلب وهمي ونستحدث في الجدول مركز وهمي بمقدار من الاحتياجات مساوية للفرق بين الموارد المتاحة العرض والاحتياجات الفعلية الطلب وتكون تكاليف النقل من المصدر إلى المركز الوهمي: - إما مساوية للصفر (الكلفة) حتى لا يتأثر التابع الاقتصادي في الأخير عند حساب الكلفة الإجمالية، أو مساوية إلى قيمة كبيرة بالمقارنة مع الكلف الموجودة في الجدول في حدود ضعف أكبر كلفة في الجدول مثلا وهذا دون أن تدخل في الحسابات النهائية للتكلفة

5-1-2- الطلب أصغر من العرض: إن كانت الاحتياجات أكبر من الموارد في هذه الحالة يتم استحداث مصدر وهمي (عارض وهمي في الجدول) الحل بمقدار الفرق وتكون التكاليف بإحدى الطريقتين السابقتين الذكر في الحالة العكسية.

5-2- حالة التفسخ عدم الانتظام: وتكون في حالة ظهور خانات معبئة أقل من $m+n-1$ مما يجعل عملية تقويم الخلايا الصفرية بالطرق السالفة الذكر (التكلفة الحدية والتوزيع المعدل) أمرا مستحيلا ، ولحل هذه المشكلة فإننا نقوم بتسجيل كمية صغيرة ولتكن ε في إحدى الخلايا الصفرية والخلية ذات القيمة ε يمكنها أن تشحن أو تتسلم وحدات البضاعة ولكن تعطى القيمة 0 لـ ε في نهاية الحل إذا كانت موجودة في الحسابات.

مثال:

المراكز ← المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1	$\boxed{16}$	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{17}$	

					50
2	13	14	10	15	60
3	20	8	11	12	40
الطلب	30	20	70	30	150

ولنبحث عن حل أساسي أولي وليكن بطريقة الزاوية الشمالية الغربية مثل فينتج لدينا الجدول التالي:

المراكز → المصادر ↓	1	2	3	4	العرض
1	16 30	10 20	8	17	50
2	13	14	10 60	15	60
3	20	8	11 10	12 30	40
الطلب	30	20	70	30	150

نلاحظ أن الحل الناتج لا يستوفي الشرط لأن 5 أقل من 6 وبالتالي نضيف ε إلى أحد الخانات ولتكن الخانة (2.2) وبهذا يصبح هذا المتغير قاعدي بعد أن كان غير قاعدي والتكلفة الإجمالية لهذا التابع نجدها 1750 ويمكن إتباع أحد الطريقتين للتحسن طريقة الكلفة الحدية أو طريقة التوزيع المعدل.

الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود وبدون قيود

مقدمة؛

1- أمثلية المتغير المفرد بقيد وبدون قيد؛

2- أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود؛

3- أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود.

مقدمة: البرمجة غير الخطية **Nonlinear Programming** أو البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما غير خطية، ويعتقد أن أكثر الطرق شيوعاً لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية، ويعتبر البرنامج غير الخطي أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق على أمثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية.

1- أمثلية المتغير المفرد بقيد وبدون قيد

البرنامج غير الخطي، غير المقيد، للمتغير المفرد يأخذ الصيغة الآتية: $y = f(x)$ ، حيث أن: $f(x)$ دالة غير خطية في المتغير المفرد x، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المقيدة $(-\infty, \infty)$. أما إذا كانت الفترة مقيدة **[a,b]**، فان المسألة تصبح على الشكل الآتي:

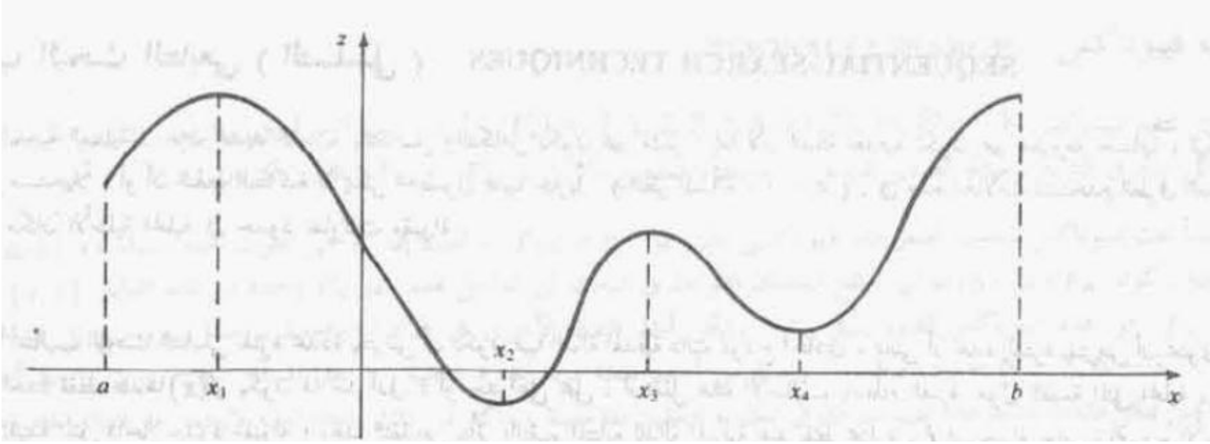
أمثلية: $y = f(x)$

علماً بأن: $a \le x \le b$

فهو يعتبر برنامجاً غير خطياً، مقيداً، لمتغير واحد.

1-1- الأمثلية المحلية والشاملة: للدالة الهدفية $f(x)$ حد أدنى محلي (نسبي) عند x_0 إذا وجدت فترة صغيرة ذات مركز عند x_0 بحيث $f(x) \ge f(x_0)$، لكل قيم **x** التي تحدد فيها الدالة. فيكون الحد الأدنى عند x_0 محلياً (نسبياً) أو شاملاً (مطلقاً) وتعرف الحدود الأعلى المحلية والشاملة بالتماثل.

مثال: الدالة المرسومة في الشكل أدناه مقيدة في المجال **[a,b]**، ولها حد أدنى نسبي عند $a,\ x_2,\ x_4$ وحد أعلى نسبي عند $b,\ x_3,\ x_1$ وحد أدنى شامل عند **a** وحد أعلى شامل عند $x_1,\ b$.

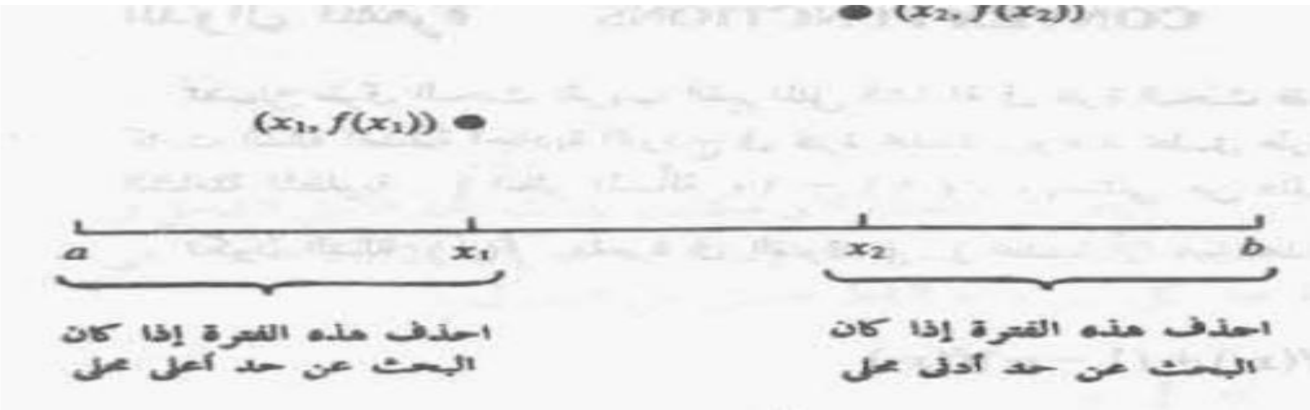


1-2- نظريات حول التكامل والتفاضل:

- ✓ إذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة **[a,b]** فان $f(x)$ يكون لها أمثلية شاملة (كلا من التعظيم والتصغير) على هذه الفترة؛
- ✓ إذا كانت لـ $f(x)$ أمثلية محلية عند x_0، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في جزء الفترة ذات المركز عند x_0 فان $f`(x) = 0$؛
- ✓ إذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين في جزء الفترة ذات المركز عند x_0، فإذا كانت: $f`(x) = 0$، $f``(x) < 0$ فان $f(x)$ يكون لها حدا أعلى نسبي عند $x_0$، أما إذا كان $f`(x) = 0$، $f``(x) > 0$ فان $f(x)$ يكون لها حدا أدنى نسبي عند x_0.

1-3- أساليب البحث التتابعي: قد يكون تحديد الأمثلية عن طريق التكامل والتفاضل غير مجدي نظراً لكون الدالة الهدفية غير معروفة حسابياً فيكون التفاضل مستحيلاً أو النقط الساكنة لا يمكن الحصول عليها جبرياً، في هذه الحالة نستخدم الطرق العددية لتقريب مكان المحلية الأمثلية في حدود تفاوتات مقبولة. تبدأ أساليب البحث التتابعي بفترة محددة يفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية ذات نموذج أحادي، بمعنى هذه الفترة يفترض أن تحتوي على نقطة واحدة فقط عندها $f(x)$ يكون لها حد أدنى، أو حد أعلى ثم تقلل هذه الأساليب بانتظام الفترة حول القيمة المثلى المحلية، حتى تضيق القيمة المثلى ضمن حدود مقبولة، وهذا التقليص يتأثر بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقاط مختارة، ثم استخدام خاصية النموذج الأحادي بحذف أجزاء من الفترة الحالية.

مثال: يفترض الشكل الموالي قيم الدالة الهدفية عند النقط x_2، x_1، إذا عرف حد أدنى محلي ليكون الطرف الوحيد في الفترة **[a,b]** فان هذا الحد الأدنى يجب أن يكون إلى اليسار من x_2، لذلك فان $f(x)$ تبدأ في الزيادة حول هذه النقطة وبخاصية البرنامج الأحادي، يجب أن تستمر في الزيادة لجهة اليمين منها ومن ثم جزء الفترة **[x_2,b]** يمكن حذفه.



أما إذا كان الحد الأعلى المحلي هو الطرف الوحيد في الفترة **[a,b]**، فانه يجب أن يكون على اليمين من x_1، ويمكن حذف جزء الفترة **[a, x_1]**.

– **بحث فترة الثلاث نقط:** تقسم الفترة إلى أرباع، وتقيم الدالة الهدفية عند ثلاث نقط الداخلية على مسافات متساوية، وتحدد النقطة الداخلية التي تؤدي إلى أفضل قيمة للهدف (في حالة الاشتراك اختر احدى النقط)، ويحل جزء الفترة التي مركزها عند هذه النقطة، والمتكونة من ربعين من الفترة المحلية يحل محل الفترة المحلية.

مثال: أنظر الشكل الموالي:

يعتبر بحث فترة الثلاث نقط أكفأ طريقة بحث على مسافات متساوية بالنسبة إلى الوصول إلى تفاوت محدد مسبقاً بأقل عدد من تقييمات الدوال، وهو أحد أسهل البحوث التتابعية لاستخدام الحاسبات.

– **بحث فيبوناكس:** يمثل تتابع فيبوناكس F_n = **(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55....)** أساس أحد أكفأ أساليب البحث التتابعي ويتم الحصول على كل عدد في التتابع بإضافة العددين السابقين باستثناء العددين الأولين، F_0, F_1 الذين يكونان **1**.

ينشأ بحث فيبوناكس بتحديد أصغر عدد فيبوناكسي يحقق a و $b \geq F_N\,\epsilon$ حيث ϵ تفاوت محدد مسبقا، و [a,b] الفترة الأصلية كون $\epsilon' = (b-a)/F_N$، تقع النقطتان الأولتان في البحث إلى الداخل عدد $F_{N-1}\,\epsilon'$ وحدة من نقط النهاية [a,b]، حيث أن F_{N-1} هو عدد فيوناكس الذي يسبق F_N، ويمكن أخذ النقط الأخرى في الحسبان واحدة بواحدة، وتوضع إلى الداخل عدد $F_j\,\epsilon'$ $(j = N-2, N-3, \ldots, 2)$ وحدة من أجدد نقطة نهاية الفترة الحالية، نلاحظ أنه بطريقة فيبوناكس يمكن مقدما تحديد تقييمات الدوال المطلوبة لتحقيق دقة معينة، وأكثر من ذلك هذا العدد لا يعتمد على الدالة الخاصية الأحادية النموذج.

– **بحث المتوسط الذهبي:** يبني بحث فيبوناكس القريب من الكفاءة على ... $\mathbf{0.6180 = 2/(1-\sqrt{5})}$ الذي يعرف بالمتوسط الذهبي وتقع النقطتان الأولتان للبحث على مسافة $(b-a)(0.6180)$ وحدة إلى الداخل، من النقط النهائية للفترة الأولية [a,b] وتؤخذ النقط المثالية التالية في الاعتبار، الواحدة تلو الأخرى، وتوضع إلى الداخل $\mathbf{0.6180}\ L_I$ وحدة، من أجدد نقطة نهائية للفترة الحالية، حيث L_i تدل على طول هذه الفترة.

– **الدوال المقعرة:** تضمن طرق البحث تقريب القيم المثلى الشاملة في فترة البحث فقط، عندما تكون الدالة الهدفية أحادية النموذج، وعملياً لا نعرف ما إذا كانت الدالة الهدفية أحادية النموذج في فترة محددة، وعند تطبيق طريقة البحث في هذه الحالة فانه ليس من المؤكد أنها ستكشف القيمة المثلى الشاملة المطلوبة، ويستثنى من ذلك البرامج التي تحتوي على الدوال الهدفية المحدبة والمقعرة. تكون الدالة $f(x)$ مقعرة في الفترة ϑ (محددة أو غير محددة)، إذا كانت النقطتان x_2، x_1 في ϑ ولكل

$\boldsymbol{f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f x_2}$ فان $\mathbf{0 \leq \propto \leq 1}$

فإذا تحقق معكوس المتباينة فان $f(x)$ تكون محدبة لذلك فالقيمة السالبة للدالة المقعرة تكون محدبة، والعكس صحيح

نظرية:

- ✓ إذا كانت $f(x)$ تفاضل مرتين في ϑ، فان $f(x)$ تكون مقعرة في ϑ إذا كانت فقط $\mathbf{0} \geq f''(x)$ لكل قيم x في ϑ، وتكون محدبة إذا كانت فقط $\mathbf{0} \leq f''(x)$ لكل قيم x في ϑ؛
- ✓ إذا كانت $f(x)$ مقعرة في ϑ، فان أي حد أدنى محلي في ϑ يكون حداً أدنى شاملاً في ϑ، واذا كانت $f(x)$ محدبة في ϑ، فان أي حد أدنى محلي يكون حداً أعلى في ϑ.

تمارين: أوجد الحدود الدنيا أو العليا حسب الحالات الآتية:

1/ $f(x) = x(5\pi - x)$ ضمن المجال [0,20] وفي حالة تعظيم.

الدالة متصلة ضمن المجال أعلاه ودالتها المشتقة $f'(x) = 5\pi - 2x$ وتنعدم عند النقطة $x_1 = 5\pi/2$ التي تمثل حلاً أعلى تكون عنده $f(x) = 61.69$.

2- أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود

البرنامج غير الخطي، غير المقيد، لأكثر من متغير يأخذ الصيغة الآتية: $y = f(x)$ حيث أن $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n]^T$، حيث أن: $f(x)$ دالة غير خطية لأكثر من متغير x، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم) في جميع المراحل وفي الفترة غير المقيدة $(-\infty, \infty)$. وتنطبق جميع النتائج على برامج التصغير إذا استبدلت $f(x)$ بـ $-f(x)$.

2-1- الحدود العظمى المحلية والشاملة: إذا كان $(\epsilon > 0)$ حول $\hat{x}$ هو مجموعة كل الاتجاهات X بحيث إن:

$$(x-\hat{x})^T(x-\hat{x}) = (x_1-\widehat{x_1})^2 + (x_2-\widehat{x_2})^2 + \cdots + (x_n-\widehat{x_n})^2 \le \epsilon^2$$

بالتعبير بالهندسة التحليلية ϵ حول $\hat{}$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها ϵ ومركزها $\hat{}$. والدالة الهدفية $f(x)$ لها حد أعلى نسبي عند $\hat{x}$ إذا وجد جوار ϵ حول $\hat{x}$، بحيث أن: $f(x) \le f(\hat{x})$ لكل قيم x في هذا الجوار ϵ الذي تحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة ϵ (ليس المهم القيمة نفسها) فان $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل عند $\hat{x}$.

2-2- المتجه المتدرج ومصفوفة هيسي: المتجه المندرج ∇f الذي تعرف له $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{a x_n}\right]^T$ الدالة $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ الذي تعرف له المشتقة الجزئية الأولى والتعبير $\nabla f|_{\hat{x}}$ يحقق قيمة التدرج عند $\hat{x}$ لأي إزاحة صغيرة من $\hat{x}$ غي الاتجاهات المختلفة، واتجاه أعلى زيادة في $f(x)$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|_{\hat{x}}$.

مثال: إذا كان لدينا: $f(\quad_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - x_2^2x_3^3$ مع $\hat{x} = [1, 2, 3]^T$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2x_3^3 \\ -3x_2^2x_3^2 \end{bmatrix}$$

حيث إن: x
$$\nabla f|_{\hat{}} = \begin{bmatrix} (1)(\quad) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3^3) \\ -3(2^2)(3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{bmatrix}$$

لذلك عند $[1,2,3]^{Tj}$ تزيد الدالة بسرعة في الاتجاه $[12, -105, -108]^T$، ومصفوفة هسي المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ هي لها مشتقة جزئية ثابتة تكون $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ والتعريف $Hf = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right]$ يحقق قيمة المصفوفة هسي عند $\hat{x}$. $H_f|_{\hat{x}}$

تظرية: $A = [a_{ij}]$ لتكن مصفوفة متماثلة $n * n$

$A_1 = |a_{11}|$ ،$A_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$، $A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$، $A_n = (-1)^{n-1} \det A$ تكون A سالبة مؤكدة إذا كانت فقط $A_1, A_2, \ldots. A_n$ كلها سالبة، وتكون A سالبة نصف مؤكدة إذا كانت فقط $(t < n)$ $A_1, A_2, \ldots. A$ كلها سالبة، وعناصر A الباقية تكون صفراً.

مثال: لدينا: $H_f = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^3 & -6x_2x_3^2 \\ 0 & -6x_2x_3^2 & -6x_2^2x_3 \end{bmatrix}$ حيث: $H_f|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & -54 & -108 \\ 0 & -108 & -72 \end{bmatrix}$

$A_1 = 12 > 0$ إذن $_f$ لا تكون سالبة مؤكدة ولا حتى سالبة نصف مؤكدة عند $\hat{\mathbf{x}}$

2-3- نتائج من التفاضل والتكامل:

- ✓ إذا كانت $f(x)$ متصلة في منطقة محددة مغلقة فان $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل وحد أدنى شامل أيضا في هذه المنطقة؛
- ✓ إذا كانت $f(x)$ لها حد أدنى نسبي أو حد أعلى نسبي عند $\mathbf{X}^*$ وإذا كانت ∇f توجد في بعض الجوار ϵ حول $\mathbf{X}^*$ فان $\nabla f|_{X^*} = 0$،
- ✓ إذا كانت $f(x)$ لها مشتقة جزئية ثانية في الجوار ϵ حول $\mathbf{X}^*$، وإذا كانت $\nabla f|_{X^*} = 0$ و $H_f|_{x^*}$ سالبة مؤكدة فان $f(x)$ يكون لها حد أعلى محلي عند $\mathbf{X}^*$.

في بعض الحالات يصعب استخدام التكامل والتفاضل لذلك نستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا في حدود تفاوت موصف. والتي نذكر منها: طريقة أقصى ميل صعود، طريقة نيوتن – رافسون، طريقة فلتشر – بويل، بحث نمط هوك – جيف، بحث النمط المعدل، اختبار التقريب الأول. الدوال المحدبة.

3- أمثلية متعدد المتغيرات مع قيود

إذا كان $x = [x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n]^T$ تكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متساويات فيود هي:

تعظيم: $z = f(x)$

علماً أن: $g_1(\ \ ) = 0$

$g_2(x) = 0$

....

$g_m(x) = 0$

عند $m < n$ (عدد القيود أقل من عدد المتغيرات).

وتتحول برامج التصغير إلى برامج تعظيم بالضرب في (1-) وتكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متباينات للقيود فقط هي:

تعظيم: $z = f(x)$

علما أن: $g_1(\ \ ) \le 0$

$g_2(x) \le 0$

....

$$g_p(x) \leq 0$$

أو

تعظيم: $z = f(x)$

علما أن: $g_1(\quad) \leq 0$

$$g_2(x) \leq 0$$

....

$$g_m(x) \leq 0$$

عند $x \geq 0$

الصيغتان السابقتان تكونان متكافئتين $m = p$ وتحل البرامج غير الخطية والتي ليست في الصيغة القياسية، إما بوضعها في الصيغة القياسية أو بتطوير طرق الحل المعطاة للبرامج من الصيغة القياسية.

3-1- مضروبات لاغرانج: لحل البرامج نكون دالة لاغرانج:

حيث: $L(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ $\quad i = 1, 2, \dots m \quad$ λ_i ثوابت مجهولة تسمى مضروبات لاغرانج. ثم نحل النموذج ذو **n+m** معادلة

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

إضافة إلى طريقة مضاعف لاغرانج هناك طرق أخرى كطريقة نيوتن – رافسون، طريقة كون توكر والدوال الجزئية، طريقة الاتجاهات الممكنة،

مثال: ليكن لدينا البرنامج الآتي: تعظيم: $z = -x_1 - x_2 - x_3$

علما أن: $x_1^2 + x_2 - 3 = 0$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

لدينا: $f(x, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$، $n = 3$ متغيرات، وقيدان $m = 2$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 3 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

دالة لاغرانج:

$$L = (-x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7)$$

ويصبح النموذج بتطبيق مضاعف لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\left(x_1^2 + x_2 - 3\right) - 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0$$

وبعد التعويضات وإجراء الحسابات نجد الحل الواحد:

$$\lambda_2 = -0.5, \lambda_1 = 0.5, x_1 = -0.5, x_2 = 2.75, x_3 = -0.375, z = -1.875$$

وحيث أن المشتقات الجزئية الأولى لـ: $f(x_1, x_2, x_3)$ $g_2(x_1, x_2, x_3)$ $g_1(x_1, x_2, x_3)$ متصلة وحيث أن:

$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ من الرتبة الثانية، وبالتالي الحل أمثل وهو حد أعلى شامل

وبالتالي الحد الأدنى الشامل عند $z^* = 1.875$.

قائمة المراجع المعتمدة

❖ ريتشارد برنسون، ترجمة حسن حسني الغباري، مراجعة محمد ابراهيم يونس، سلسلة ملخصات شوم، نظريات ومسائل في بحوث العمليات، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، الطبعة العربية الثانية، 2004.

❖ السعدي رجال، بحوث العمليات (البرمجة الخطية)، دار رجزو قسنطينة، الجزائر، الطبعة الأولى، 2004.

❖ السعدي رجال، بحوث العمليات في الإدارة – المالية – التجارة، منشورات جامعة منتوري قسنطينة، الجزائر، 2005/2004.

❖ سليمان محمد مرجان، بحوث العملياتت، الجامعة المفتوحة بطرابلس، ليبيا، الطبعة الأولى، 2002.

❖ صالح مهدي محسن العامري وعواطف ابراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، مكتبة الجامعة الشارقة واثراء للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2009.

❖ فتحي خليل حمدان، بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2010.

❖ محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون الجزائر، الطبعة الثالثة، 2008.