

M/GR.733

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Mémoire de fin d'études  
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

Domaine : **Sciences et Technologie**  
Filière : **Automatique et informatique industrielle**  
Spécialité : **Commande et diagnostic des systèmes industriels**

---

**Commande diffusive**

**D'un moteur à courant continu**

---

Présenté par :

**Ceiod Samir  
Ghellab Samir**

Sous la direction de :

**CHAABI Lilia**



**JUIN 2012**

# Remerciement



# REMERCIEMENTS

On dit : « Quand on veut on peut », et nous nous continuons « Si Dieu le veut ».

Nous remercions notre Dieu le tout puissant l'avoir guidé nous part jusqu'ici et de nous avoir aidé à terminer ce modeste travail.

Nous remercions nos familles qui toujours été là pour nous et qui nous ont soutenu tout au long de notre parcours éducatif avec attention, affection et une grande patience et surtout d'avoir cru en nous.

Que Dieu nous le regarde,

Nous remercions notre encadreur **M<sup>me</sup> CHAABI Lilia**  
Pour ces conseils précieux qui sont apportés dans notre travail.

Enfin nous remercions tout ceux qui ont contribué de loin ou de près à notre réussite que ce soit de nos enseignants ou nos collègues

# *Sommaire*



# Sommaire

---

Introduction.....	3
-------------------	---

## Chapitre 1 modélisation d'un moteur a courant continu

1. INTRODUCTION.....	5
2. MOTEUR A COURANT CONTINU.....	5
2.1 Description général.....	5
2.2 Caractéristiques.....	8
2.3 Les avantage du moteur à courant continu.....	11
2.3.1 <i>Variation de vitesse</i> .....	11
2.3.2 <i>Possibilités de régulation de vitesse</i> .....	12
2.3.3 <i>Asservissement</i> .....	12
2.3.4 <i>Alimentation par le courant continu alternatif redressé</i> .....	13
2.3.5 <i>Inversion du sens de la marche</i> .....	14
2.4 Les inconvénients.....	14
2.5 Utilisation du M. à C.C. d'après le choix du type d'excitation.....	14
3. MODELE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU.....	15
Conclusion.....	19

## Chapitre 2 commande traditionnel d'un moteur à courant continu

1. INTRODUCTION.....	21
2. SYSTEME DE COMMANDE.....	21
2.1 Définition.....	21
2.2 Régulateur "P".....	22
2.2.1 <i>Proportionnalité</i> .....	
2.2.2 <i>Bande proportionnelle</i> .....	22
2.2.3 <i>Erreur statique</i> .....	23
2.2.4 <i>Rôle et domaine d'utilisation "P"</i> .....	23
2.3 Régulateur "PI".....	24
2.3.1 <i>Définition</i> .....	24
2.3.2 <i>Rôle et domaine d'utilisation "PI"</i> .....	24
2.4 Régulateur "PID".....	25
2.4.1 <i>Définition</i> .....	25
2.4.2 <i>Rôle et domaine d'utilisation PID</i> .....	25
3. STRUCTURE DE REGLAGE D'UN CONTROLEUR TRADITIONNEL D'UN.....	26
3.1 Description d'un variateur de vitesse.....	26
3.2 Boucle de courant.....	27
3.3 Boucle de vitesse.....	27

## Chapitre 3 commande diffusive d'un moteur à courant continu

I. MODELE DIFFUSIF DUN INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE.....	32
1. Calcul fractionnaire.....	32

---

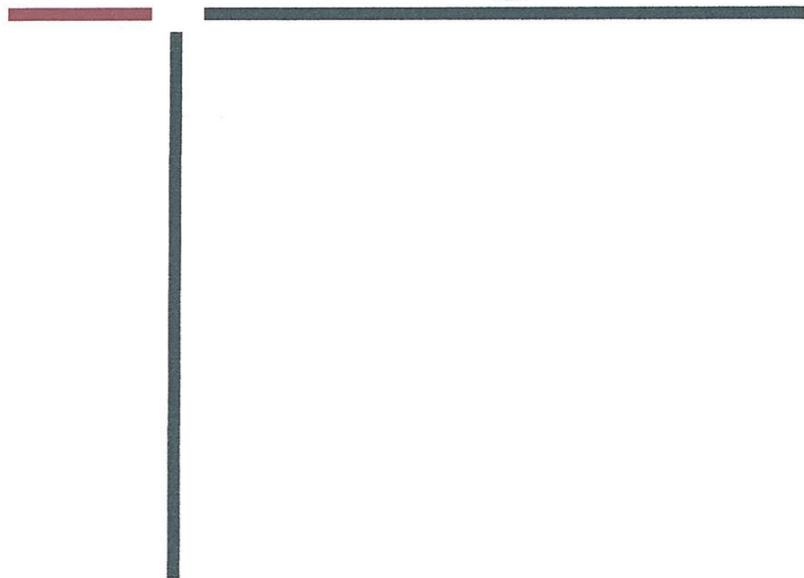
# Sommaire

---

1.1	Introduction.....	32
1.2	Définitions.....	32
1.3	Difficultés liées au calcul fractionnaire .....	33
1.4	Domaine d'application.....	33
2.	Modèle diffusif.....	34
2.1	Introduction .....	34
2.2	Préposition .....	34
2.3	avantages du model diffusif .....	35
2.4	Approximation numérique .....	36
2.4.1	Principe.....	36
2.5	Choix de paramètre de l'intégrateur :.....	38
2.5.1	Choix du réseau (des pôles).....	38
2.5.2	Choix de $\xi_{\max}, \xi_{\min}$ .....	39
2.5.3	Choix des fonctions d'interpolations $\Lambda_k$ .....	39
2.6	Erreur et convergence .....	41
II.	COMMANDE DIFFUSSIVE.....	42
1.	Correcteur fractionnaire.....	42
1.1	Equation différentielle d'ordre fractionnaire.....	42
1.2	Principe .....	43
1.3	Construction d'un correcteur fractionnaire d'un moteur a courant continu.....	44
2.	Correcteur diffusif.....	45
2.1	Synthèse du correcteur .....	45
2.2	Résultats de simulation .....	46
	Conclusion générale.....	51
	Bibliographie.....	52

---

# *Introduction générale*



## Introduction

La technologie moderne a permis le développement des sciences tout en imposant l'exploration de domaines théoriques de plus en plus complexes. Parmi ces sciences en pleine expansion et intégrant rapidement l'apport des technologies modernes, on compte l'automatique. Le substantif « automatique » a été utilisé pour la première fois en 1914 dans un article « Essai sur l'Automatique » publié dans une revue scientifique.

De nos jours, l'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur. Cette discipline traite de la modélisation, de l'analyse, de la commande et de la régulation des systèmes dynamiques. Elle a pour fondements théoriques les mathématiques, la théorie du signal et l'informatique théorique. L'automatique permet l'automatisation de différentes tâches de fonctionnement des machines et des chaînes industrielles. On parle alors de système asservi ou régulé, d'où est le plus répondu dans notre vie quotidienne, en particulier dans le domaine industriel, car il permet de réaliser plusieurs opérations sans l'intervention de l'être humain, pour de divers besoins, par exemple : convoyeurs industriels à navettes indexées, pilotage automatique de l'avion (auto-pilot), asservissement d'angle pour des bras robotiques (ABB, Kuka, ...) ...etc.

Le contrôle des systèmes dynamiques incertains c'est à dire dont les paramètres sont mal connus ou lentement variables nécessite la mise en œuvre des lois de commande capables d'assurer un bon compromis entre performance et robustesse.

✧ Nous proposons dans cette étude la commande d'un variateur de vitesse d'un moteur à courant continu une nouvelle approche. La méthode consiste à partir d'une loi de commande traditionnelle éventuellement élaborée en prenant déjà en compte des impératifs de robustesse, concevoir un correcteur invariant sous changement d'échelle de temps.

L'utilisation du modèle diffusif simplifie l'étude et l'analyse notamment la stabilité. Cette étude est répartie en trois chapitres :

Le 1<sup>er</sup> chapitre présente une description générale du moteur à courant continu ainsi que son modèle mathématique.

Le 2<sup>ème</sup> chapitre est conçu à la commande traditionnelle du moteur, la synthèse et l'analyse vis-à-vis de la variation du moment d'inertie.

Dans le 3<sup>ème</sup> chapitre, nous introduisons les concepts de la commande diffusive du calcul fractionnaire et du modèle diffusif ainsi que son approximation numérique.

Les principaux résultats obtenus sont présentés et interprétés

# *Chapitre I*

---

*Modélisation d'un moteur  
à courant continu.*

## 1. INTRODUCTION

L'histoire du développement des machines électriques en commençant par la découverte de l'induction électromagnétique (1831) par Faraday jusqu' aux années 80 du siècle passé constitue celle de l'évolution de la machine a courant continu. Durant cette période, elle a passé par quatre étapes, a savoir :

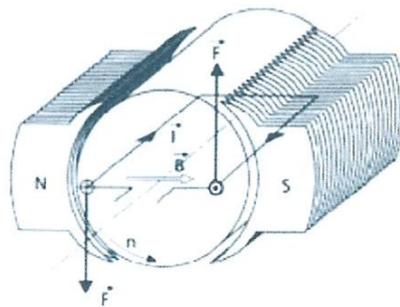
- ❖ Machines magnéto-électriques à aimants permanents.
- ❖ Machines magnéto-électrique à excitation indépendante.
- ❖ Machines magnéto-électriques a autre excitation et a induit élémentaire.
- ❖ Machines multipolaires a induit perfectionné.

## 2. MOTEUR A COURANT CONTINU

### 2.1 Description général

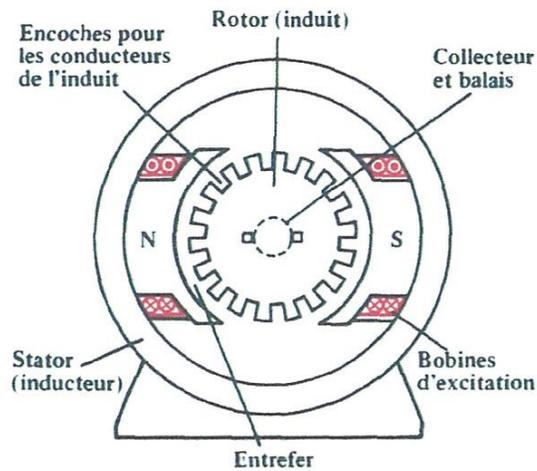
Le moteur à courant continu sous sa forme la plus simple est constitué d'un cadre qui tourne dans un champ magnétique uniforme créé par un inducteur.

Les extrémités de ce cadre sont reliés a un demi-cylindre constituant le collecteur parfaitement isolé sur lequel frottent les balais.



**Figure 1.1 : schéma de fonctionnement d'un moteur a C.C**

Le moteur donc comporte deux parties essentielles : l'inducteur et l'induit.



**Figure 1.2 représentation générale d'un moteur a C.C**

### 2.2.1 L'inducteur

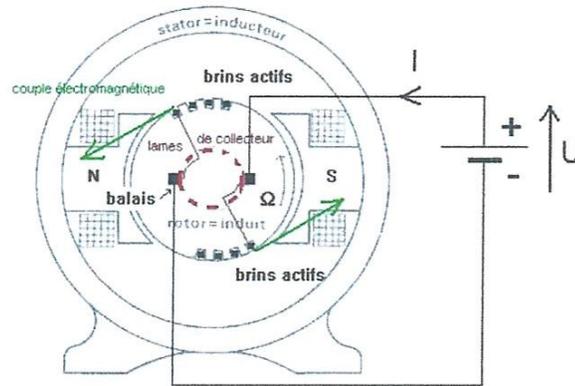
L'inducteur est le système producteur du flux magnétique ,il comprend un circuit magnétiques et des bobines inductrices.

Le circuit magnétique comprend :

- Une culasse en font ou en acier moulé.
- Deux pôles inducteurs en tôle douce en acier moulé .terminés par des épanouissements polaires en tôle feuilletée.
- Le noyau cylindrique de l'induit .constitué par un empilage de tôles douces au silicium est claveté sur l'arbre.

Des encoches ménagées dans ce noyau .constituent le logement des conducteurs actifs de l'induit (figure 1.3).

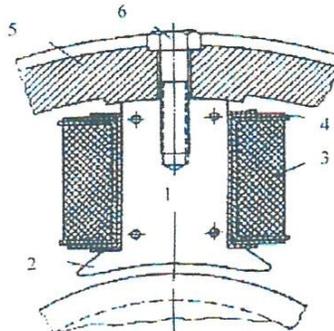
L'entrefer de quelques millimètres d'épaisseur .sépare les pôles inducteurs du noyau de l'induit (figure 1.3)



**Figure 1.3 : circuit magnétique des pôles principaux  
D'un moteur à C.C**

Les bobines inductrices constituent deux enroulements en série. Elles sont calées sur les pôles, qui en constituent les noyaux, et excitées par le courant inducteur (courant d'excitation). (Figure 1.3)

Elles produisent aussi une magnétomotrice qui entretient le flux inducteur dans le circuit magnétique considéré.



- 1: noyau
- 2: épanouissement polaire
- 3: enroulement d'excitation
- 4: fourreau
- 5: carcasse
- 6: boulon

**Figure 1.4 : Bobine inductrice**

### 2.2.2 L'induit

L'induit est un bobinage en circuit fermé comportant :

1. Des conducteurs actifs. Logés dans les encoches du noyau induit.
2. Des connexions ou conducteurs inactifs. repartis sur les deux faces de ce noyau
  - A l'arrière. Les connexions réunissent deux à deux les conducteurs actifs diamétralement apposés.
  - A l'avant elles réunissent ces conducteurs actifs. D'une part entre eux ; deux à deux. Et d'autre part aux lames du collecteur.

3. Le collecteur est un cylindre situé sur la face avant du noyau induit et collé sur même arbre. Il fait partie du rotor. Il est constitué de lames de cuivre,

Secteur juxtaposé, Isolées entre elles par des feuilles de mica et isolées de l'arbre par des couronnes de fibre ou de micanite .



**Figure 1.5 : induit non bobiner d'un moteur à C.C**

Le collecteur constitue un commutateur tournant par l'intermédiaire de deux frotteurs fixes. balais de charbon. diamétralement opposés sur lui. Il assure la liaison électrique entre le bobinage induit et le circuit extérieur qui alimente le bobinage induit.

## 2.2 Caractéristiques

Les caractéristiques du moteur à C.C dépendent de son mode d'excitation de la nature constante ou variable de la tension continue. Pour déterminer la caractéristique mécanique, il est intéressant de représenter au préalable deux caractéristiques :

$$C_m = f(I) \text{ et } \Omega = f(I) \quad (1.1)$$

Avec :

$C_m$  : Couple moteur.

$I$  : Courant d'induit.

$\Omega$  : Vitesse de rotation.

Ces caractéristiques sont appelées électroniques car elles établissent des relations entre des grandeurs mécaniques et d'autres électriques. Pour un moteur à courant continu à excitation séparée, elle est déterminée comme suite :

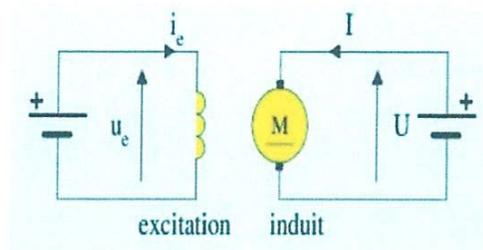
On a :

$$I = I_a + J \text{ avec } J = \frac{u}{R_i} \quad (1.2)$$

Avec  $I$  : courant d'excitation

$J$  : Courant d'inducteur

$I_a$  : Courant d'induit



**Figure 1.6 : Moteur à excitation séparée**

La résistance de l'inducteur étant toujours élevée. Le courant inducteur peut être négligé par rapport au courant induit. Ce qui permet d'écrire  $I \cong I_a$ .

Comme le flux d'excitation est constant dans la mesure où l'on néglige la réaction d'induit. Il vient :

$$C_m = k I_a \phi = K' I \text{ avec } K \phi = K' \quad (1.3)$$

$$\text{Ou } K = \frac{P_n \phi}{2 \Pi a}$$

La caractéristique  $C_m = f(I)$  est sensiblement une droite passant par l'origine.

Par ailleurs. On a :

$$u = R_a I_a = E' = \frac{P_n N \phi}{a} = \lambda N \phi \text{ avec } \lambda = \frac{P_n}{a} \quad (1.4)$$

D'où :

$$N \cong \frac{u - R_a I_a}{\phi} = \lambda' (u - R_a I_a) \text{ avec } \lambda' = \frac{I}{\lambda \phi} \quad (1.5)$$

Dans la pratique, la chute de tension dans l'induit ne dépasse pas un à deux pour cent de la tension appliquée, aussi peut on conclure.

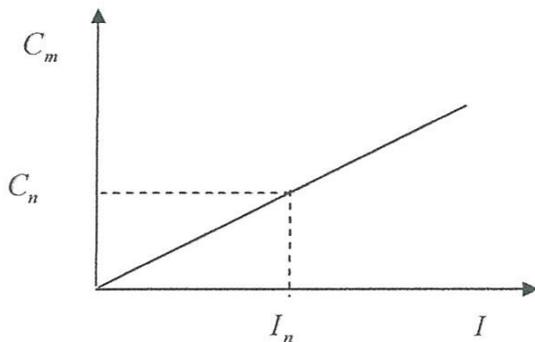
La caractéristique  $N = f(I)$  est un droit descendant de pont très faible.

On détermine facilement la caractéristique mécanique, soit par élimination graphique de l'intensité entre les deux caractéristiques électromécaniques, soit par le calcul. En effet, par le calcul, on a :

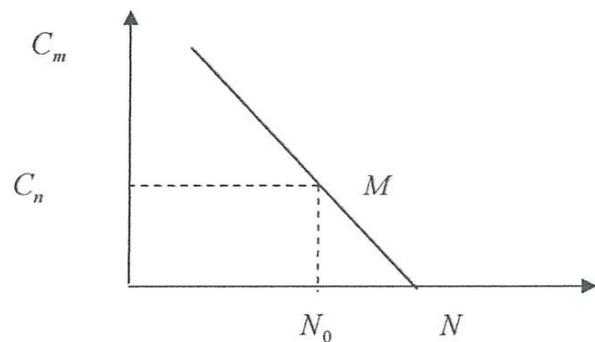
$$I = \frac{u - N \lambda}{R_a} \cdot C_m = K' I \quad (1.6)$$

$$C_m = \alpha u - B u \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{K'}{R_a} \quad B = \frac{K'}{R_a \lambda} \quad (1.7)$$

La caractéristique mécanique est une droite descendante sensiblement parallèle à l'axe des couples.



**Figure 1.7 : Caractéristique électrique**



**Figure 1.8 : Caractéristique mécanique**

### 2.2.1 Equations des tensions associées aux moteurs

a) La relation liant la F.é.m.  $E$  de la machine à la tension  $u$  à ses bornes est :

$$u = E + RI \quad (1.8)$$

En distinguant pour  $R$  la résistance totale du circuit parcouru par le courant  $I$ .

En basses tensions, on ne peut négliger le fait que chute de tension contient un élément fonction non linéaire de  $I$ , la chute de tension  $e_B$  aux contacts balais – collecteur.

On écrit alors en désignant par  $R$  la résistance totale du reste du circuit parcouru par  $I$ .

$$u = E - (RI + e_B) \quad (1.9)$$

b) A cause de la réaction magnétique d'induit, la F.e.m.  $E$  est inférieure à la F.e.m.  $E_0$ , que produirait à vide dans l'induit tournant à la même vitesse, le courant inducteur s'il agissait seul ( $I$  est nul).

on peut alors relier  $u$  à  $E_0$  :

$$E_0 = \frac{P}{a} nN\phi_0 \quad (1.10)$$

$$E = \frac{P}{a} nN\phi \quad (1.11)$$

$$E = \frac{P}{a} nN(\phi_0 - \Delta\phi) \quad (1.12)$$

$$E = E_0 - \frac{P}{a} nN\Delta\phi \quad (1.13)$$

Donc :

$$u = E_0 + \left( RI + e_B - \frac{P}{a} nN\Delta\phi \right) \quad (1.14)$$

Avec :

$\phi_0$  : flux utile du au seul inducteur.

$\phi$  : flux utile en charge.

$\Delta\phi$  : réduction due à la réaction d'induit.

La réaction  $\frac{P}{a} nN\Delta\phi$  est souvent écrite  $E_0 \frac{\Delta\phi}{\phi_0}$ . Elle est très faible lorsque la machine est équipée d'un enroulement de compensation.

### 2.3 Les avantages du moteur à courant continu

On peut dire, en fait que le moteur à courant continu peut être utilisé pratiquement dans tous les cas et partout.

En effet, il offre l'avantage de pouvoir être alimenté soit par réseau, soit par des accumulateurs. D'autre part, il présente des avantages importants, tels que possibilités de variation de vitesse, de régulation et d'asservissement.

Il est également possible de l'alimenter directement par un réseau à tension sinusoïdale par l'intermédiaire de redresseur.

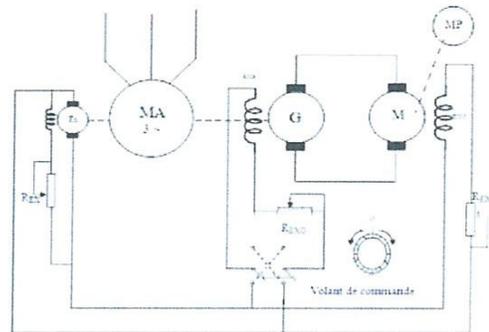
Il faut noter en plus qu'il est toujours possible d'obtenir un rapport quelconque « couple de démarrage/couple nominal ».

#### 2.3.1 Variation de vitesse

1<sup>ère</sup>) Par action sur le champ inducteur en agissant sur la valeur de courant qui traverse les enroulements inducteurs, donc en faisant varier le flux, on peut agir directement sur la valeur de la vitesse, toute fois, ses variations, sont assez restreintes et ne peuvent, en fait s'étendre pour un moteur shunt au-delà  $\pm 25\%$  de la vitesse nominale.

Cette solution offre l'avantage de contrôler la vitesse en ne mettant en jeu que de faibles puissances.

2<sup>ème</sup>) Par action sur la tension d'induit, cette solution est la plus souple et la plus rationnelle, en effet l'excitation est maintenue à une valeur constante correspondant au flux nominal et c'est la tension d'alimentation d'induit qui varie, la vitesse variant avec cette tension (fig.1.10).



**Figure 1.10 : Groupe Ward-Leonard complet**

- $G_1$  : Générateur à commande d'excitation.
- $M_1$  : Moteur d'entraînement asynchrone.
- $M_2$  : Moteur de travail à excitation séparée.
- T : génératrice tachymétrique.
- R : amplificateur-régulateur.
- C : commande de la vitesse et du sens de rotation.

Ce dispositif permet le fonctionnement à couple constant entre la vitesse zéro et la vitesse nominale.

A couple constant le courant ne varie pratiquement pas lorsque la vitesse varie ;il est donc très possible de protéger un tel dispositif contre les surcharges accidentelles. Généralement, la tension d'alimentation de l'induit est fournie par génératrice à tension variable (groupe Ward-Leonard). Cette solution est actuellement très employée pour toutes puissances.

### 2.3.2 Possibilités de régulation de vitesse

La régulation peut s'effectuer en agissant directement sur le champ inducteur. Pour se faire, il suffit de diminuer la valeur de courant d'excitation lorsque la vitesse diminue et inversement ; il existe de nombreux types de régulateurs ayant cette fonction.

En ce qui concerne la régulation des moteurs alimentés par génératrice à tension variable la vitesse est contrôlée par variation de la tension d'induit obtenue par action sur l'excitation de la génératrice; la vitesse du moteur pouvant être contrôlé par génératrice tachymétrique .

### 2.3.3 Asservissement

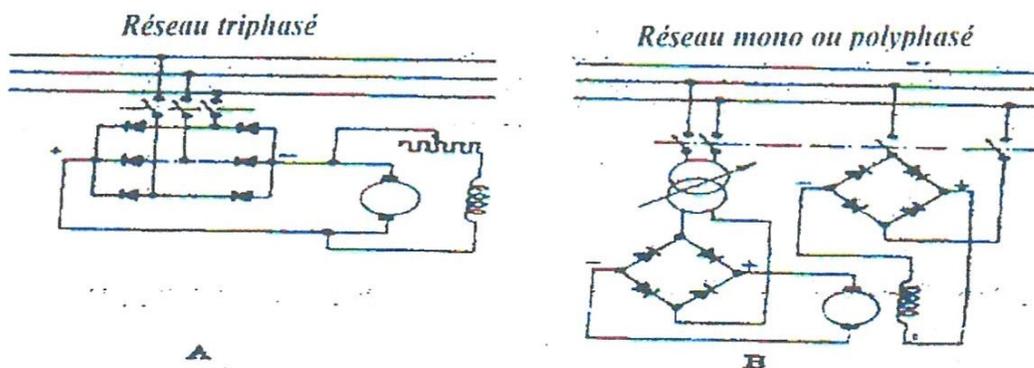
Les moteurs à courant continu. Mis à part le moteur série, offrent une grande souplesse d'asservissement de même qu'il est possible de contrôler, et de réguler leurs vitesses et leurs couples. En effet il est aussi possible de les asservir à différents paramètres ; tels que la vitesse de défilement, vitesse angulaire .....etc.

D'ailleurs, la plus part des industries modernes ont recouru à de puissants ensembles dont l'énergie motrice est confiée à un moteur à courant continu.

### 2.3.4 Alimentation par le courant continu alternatif redressé

Il est possible d'alimenter un moteur à courant continu quel que soit son type d'excitation en courant alternatif par l'intermédiaire de redresseur. Il est, dans ce cas, préférable d'utiliser une source polyphasée avec un redressement en pont, de façon à avoir un courant aussi peu moduler que possible.

Les moteurs dont la vitesse doit être réglable dans de grandes limites, sont très souvent, alimentés par des dispositifs à thyristors (diodes commandées) appelés « variateurs électroniques ».



**Figure 1.11 : Alimentation d'un moteur à courant**

A : alimentation sur le réseau à 50 Hz d'un moteur shunt par redresseurs en pont de Greartz..

B : alimentation en monophasé d'un moteur à excitation séparée. La vitesse peut être variée de 0 à  $N$  nominal grâce à l'autotransformateur à rapport de transformation variable.

### 2.3.5 Inversion du sens de la marche

Pour inverser le sens de rotation, il faut inverser le courant soit dans l'inducteur, soit dans l'induit, c'est-à-dire modifier les connexions entre l'inducteur et l'induit.

Pour certaines applications (laminoirs . . .), cette inversion du sens de rotation doit être précédée par un freinage rapide du moteur. Dans ce cas, la meilleure solution consiste à utiliser un groupe convertisseur mécanique ou électrique.

## 2.4 Les inconvénients

Le moteur à courant continu a aussi des inconvénients. Tout d'abord, à puissance égale, c'est pratiquement le plus cher des engins moteur. D'autre part, on peut aussi lui reprocher la présence de contacts glissants; toute fois, avec l'évolution technique des constructions actuelles, cet inconvénient n'est pratiquement plus un inconvénient majeur; mais, le collecteur et les balais nécessitent des visites et entretiens périodiques, car ils demeurent le point sensible de toute machine à courant continu.

D'autre part, il faut noter que les contacts distributifs balais – collecteurs donnent naissance à des parasites électriques.

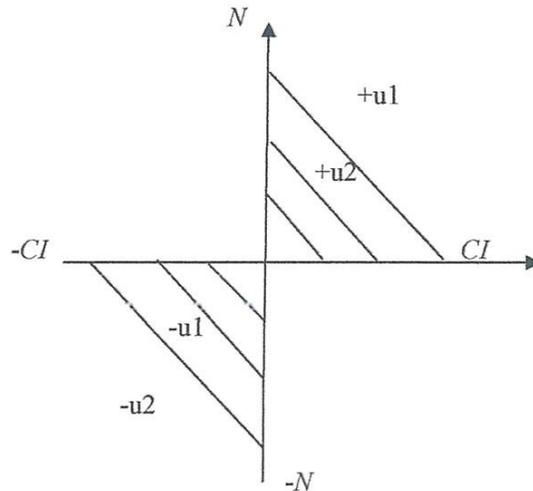
## 2.5 Utilisation du M. à C.C. d'après le choix du type d'excitation

De nombreuses considérations doivent guider le choix du type d'excitation, les trois points les plus importants sont :

- Le rapport couple démarrage/ couple nominal.
- La caractéristique du couple résistant en fonction de la vitesse de l'organe mené.
- La forme de la caractéristique du couple moteur en fonction de la vitesse désirée sur le moteur.

En ce qui concerne les machines à vitesse variable, les moteurs shunts ou à excitation séparée fonctionnent à puissance constante alors que le moteur à tension d'induit variable fonctionne à couple constant et puissance proportionnelle à la vitesse.

Ces moteurs sont pratiquement tous compensés pour éviter les effets de la réaction magnétique d'induit. Les caractéristiques couple – vitesse du moteur compensé à tension d'induit variable sont des courbes homothétiques qui sont pratiquement des droites.



**Figure 1.12 : Caractéristique vitesse/ couple courant pour U variable**

Si le couple résistant est constant, les vitesses sont pratiquement proportionnelles aux tensions d'alimentation d'induit.

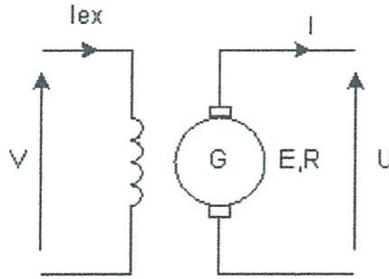
Dans de nombreux cas, le couple résistant est faible, alors qu'il existe un couple d'inertie important. C'est ce qui se présente sur certaines machines telles que la machine à bois et les meubles de grands diamètres.

Il est donc nécessaire d'avoir dans ces cas des moteurs à forts couple de démarrage (compound). D'autre part, en ce qui concerne les moteurs série on ne doit jamais les accoupler par courroie (risque de nature de charge, emballement).

### 3. MODELE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Le circuit d'excitation est composé d'une résistance  $R_e$ , d'inductance  $L_e$ . Le circuit d'induit d'une résistance  $R$  et inductance  $L$ .

La tension d'excitation vaut  $u_e(t)$  et le courant d'excitation est  $i_e(t)$ , le moment d'inertie des machines tournantes vaut «  $j$  » et la vitesse de rotation  $w(t)$ .



**Figure 1.13 : Schéma électrique**

Nous pouvons écrire les équations suivantes (en appliquant la loi de Kirchhoff) :

$$L_e \frac{di_e(t)}{dt} + R_e i_e(t) = u_e(t) \quad (1.15)$$

(1.16)

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + e(t) = u(t)$$

Où  $e(t)$  représente la force contre électromotrice.

L'application de la loi fondamentale de la mécanique donne :

$$j \frac{d\Omega(t)}{dt} + C_r(t) = C_m(t) \quad (1.17)$$

Où  $C_r(t)$  représente le couple résistant et  $C_m(t)$  le couple moteur

En première approximation, le couple moteur  $C_m(t)$  est proportionnel au courant d'excitation  $i_e(t)$  et au courant d'induit  $i(t)$  ; la force contre-électromotrice  $e(t)$  au même courant d'excitation  $i_e(t)$ , et à la vitesse de rotation  $w(t)$ , ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} C_m(t) \cong k_1 i_e(t) i(t) \\ e \cong k_2 i_e(t) \Omega(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

A quelques pertes près, la puissance électrique se transforme en puissance mécanique de sorte que :

$$e(t)i(t) = C_m(t)\Omega(t) \quad (1.19)$$

Nous en déduisons que les facteurs  $k_1$  et  $k_2$  sont égaux, nous le noterons  $k$ , le couple résistant  $C_r(t)$  est généralement composé de deux termes, un couple de coulomb  $C_0(t)$  est un couple de frottement visqueux  $C_v(t)$  tel que :

$$C_r(t) = C_0(t) + C_v(t) \quad (1.20)$$

Le couple de coulomb  $C_0(t)$  est un couple de frottement sec, généralement symétrique par rapport au mouvement :

$$C_0(t) \approx c_1 \text{sign}\Omega(t) \quad (1.21)$$

Le couple de frottement visqueux est, en première approximation, proportionnelle à la vitesse de rotation :

$$C_v(t) = f\Omega(t) \quad (1.22)$$

Éliminons des équations de mouvement les grandeurs secondaires  $e(t), C_0(t), C_v(t)$  et  $C_m(t)$ , il vient :

$$L_e \frac{di_e(t)}{dt} + R_e i_e(t) = u_e(t) \quad (1.23)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + ki_e(t)\Omega(t) = u(t) \quad (1.24)$$

$$j \frac{d\Omega(t)}{dt} + \text{sign}\Omega(t) + f\Omega(t) = ki_e(t)i(t) \quad (1.25)$$

Nous constatons que ces équations sont non linéaires puisque nous avons des produits de grandeurs  $i_e(t)i(t)$  et  $i_e(t)\Omega(t)$ .

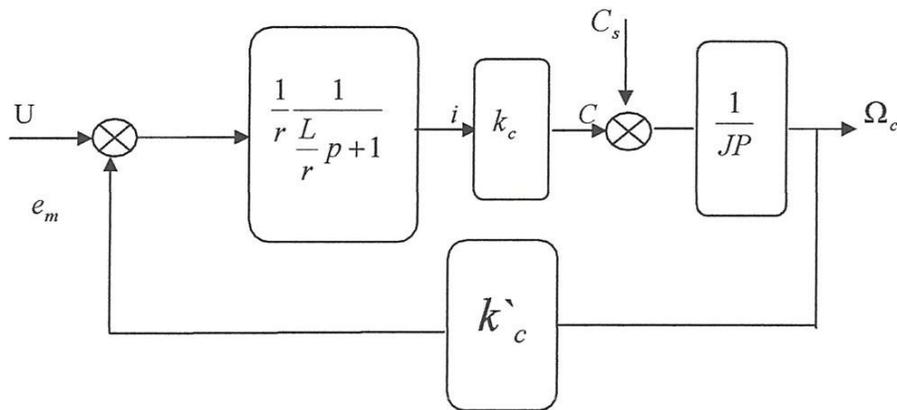
Considérons le travail à tension d'excitation " $u_e$ " constante, il vient

$$R_e i_e = u_e \quad (1.26)$$

De sorte que la force électromotrice  $e(t)$  et le couple moteur  $C_m(t)$  deviennent respectivement proportionnels uniquement à la vitesse de rotation  $\Omega(t)$  et au courant d'induit  $i(t)$  :

$$\begin{cases} C_m(t) \cong \frac{k' i(t)}{k'} = k i_e \\ e(t) \cong k \Omega(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

Pour des raisons théoriques (voir chapitre 03), les deux couples résistants sont considérés comme un seul couple résistant constant.



**Figure 1.14 : Schéma fonctionnel linéaire du M à C.C.**

On remarque que le schéma fonctionnel contient deux parties : une électromagnétique et l'autre mécanique.

La première partie comprend la modélisation du courant, le flux magnétique et le couple électronique. Sa structure dépend largement du type de moteur électrique. D'autre part, la partie mécanique dépend du moteur électrique et de l'inertie des masses tournantes, sa vitesse de rotation agit comme un retour sur la partie électromagnétique.

Pratiquement, la dynamique du courant est trois à quatre fois plus rapide que celle de la vitesse alors la F.c.é.m. doit être considérée comme une perturbation qui agit sur la partie électrique, tandis que le couple résistant  $C_r$  agit sur la partie mécanique

La partie mécanique peut être souvent considérée comme découplée.

## Conclusion

De Notre étude, nous remarquons que :

- ✓ Du point de vue technique, le moteur a courant continu presente des avantages importants tel que possibilité de variation de vitesse, de régulation et d'asservissement ....etc.
- ✓ Du point de vue économique le cout d'un moteur a courant continu est deux fois grand qu'un moteur asynchrone ou synchrone qui possède la même puissance, c'est pour quoi, il a cédé sa place pour ces deux dernier en milieu industriel.
- ✓ De ce fait, et hormis le milieu industriel, l'utilisation du moteur à courant continu est abondante dans tous les autres domaines.

## *Chapitre II*

---

*Commande traditionnelle d'un  
moteur a courant  
continu.*

## 1. INTRODUCTION

La commande directe d'un dispositif ou d'un procédé n'est en général pas possible .car le modèle du système commande est imparfaitement connu. De plus, ce modèle est susceptible de varier de façon importante dans le temps, du fait des perturbations extérieures et des variations de charge que subit le système commandé.

Afin de réduire l'incidence de ces perturbations, on est amené a introduire une contre-réaction, de façon a ajuster la commande en fonction du signal de sortie effectivement atteinte, et non plus en fonction d'un modèle a priori du système.

Il y a asservissement d'une grandeur  $y$  a une grandeur de consigne  $y_c$  lorsque l'on force par un dispositif particulier la grandeur  $y$  a suivre au mieux l'évolution de la grandeur  $y_c$ . Lorsque la consigne est constante on parle de régulation et si la consigne est variable on parle de poursuite.

Parmi les propriétés prises en compte dans la réalisation d'un asservissement, on trouve essentiellement : la précision, la stabilité, le temps de réponse, la robustesse et les couts de construction et de fonctionnement.

Ce chapitre présente la commande classique d' un moteur a courant continu dont le moment d'inertie peut varier.

## 2. SYSTEME DE COMMANDE

### 2.1 Définition

un système de commande est compose d'un régulateur et du processus a commander , l'analyse de ce système consiste a déterminer les performances de ce système en régime permanent et en régime transitoire.

Ces performances concernent essentiellement la stabilité du système, la précision statique , la rapidité, la précision dynamique et la qualité de régulation automatique

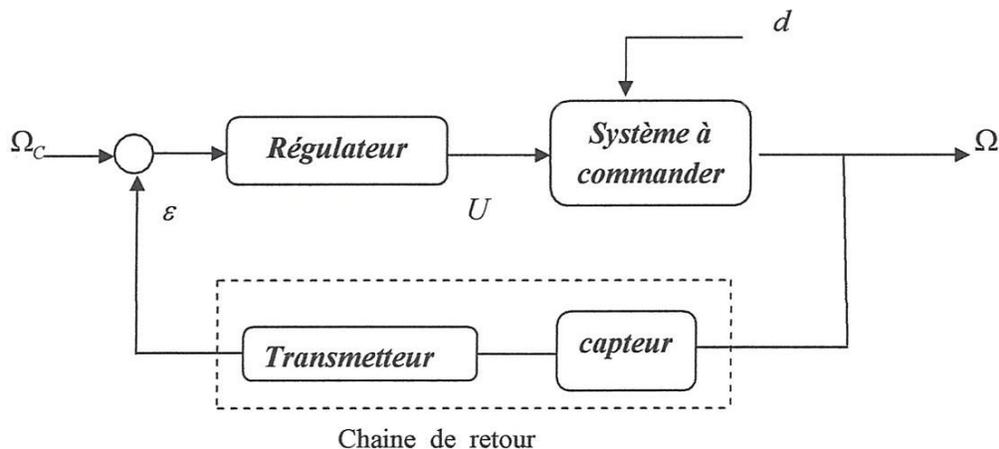


Figure 2.1 : structure d'un système de commande.

$\Omega_C$  : Consigne.

$\varepsilon$  : Écart de régulation.

$U$  : Action de commande susceptible (élaborer selon les ordres).

$d$  : Variable aléatoire dont on ne peut pas contrôler (perturbation).

$\Omega$  : Sortie à contrôler.

## 2.2 régulateur "P"

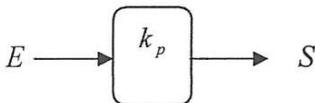
La conception du fonctionnement d'une régulation "p" implique la connaissance des trois notions suivantes :

- Proportionnalité entre l'écart " $\varepsilon$ " et la grandeur de sortie.
- Bande proportionnelle.
- Erreur statique.

### 2.2.1 proportionnalité :

L'équation caractéristique d'un régulateur "p" :

$$\frac{S}{E} = k_p \Rightarrow S = k_p E \quad (2.1)$$



$S$  : représente la grandeur de sortie, c'est une grandeur de commande analogique.

$k_p$  : coefficient de proportionnalité (gain), qui doit être non nul.

$E$  : la grandeur d'entrée.

On constate donc que l'action "p" permet de doser la commande en fonction de l'éloignement du but recherché : plus l'écart est important plus la réaction doit être vive.

Si  $k_p$  est grand, la correction est énergétiquement forte mais n'est pas sans danger.

Si  $k_p$  est faible, la correction est molle mais il n'y a pas de risque.

### 2.2.2 Bande proportionnelle

C'est la variation de la grandeur contrôlée provoquant une variation partielle ou totale de grandeur de sortie (fig.2.2). Si le gain est moyen et constant son effet ne se fait sentir que si l'écart  $\varepsilon$  est important; toutefois un écart trop important risque de saturer l'amplificateur.

La bande passante est donnée par la formule suivante :

$$BP\% = 100 / k_p$$

### 2.2.3 Erreur statique

On raison essentielle de sa limitation d'emploi, l'équation caractéristique  $S = k_p E$  :  
Montre une liaison proportionnelle rigide. Pour avoir une erreur statique, il faut afficher une  
bonde proportionnelle étroite, l'erreur statique n'est pas négligeable.

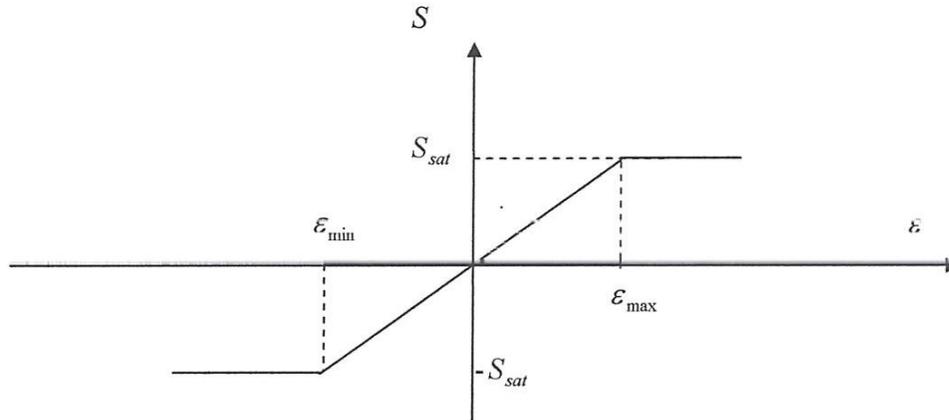


Figure 2.2 Bande proportionnelle

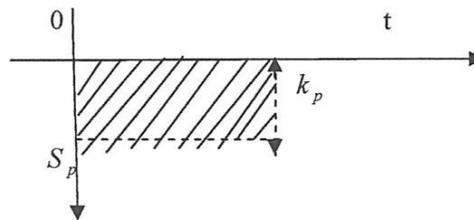


Figure2.3:réponse a échelon d'un régulateur "P"

**Remarque :** la loi de commande proportionnelle a encore un défaut : si l'erreur est nulle alors la sortie du régulateur l'est aussi ,et le processus n'est plus alimenté.

### 2.2.4 Rôle et domaine d'utilisation "P"

Le rôle de l'action P dans un système de régulation automatique est de réduire l'erreur de réglage qui est inversement proportionnel au gain, mais rend la réponse plus aux moins oscillatoire.

On utilise un régulateur P lorsque la précision n'est pas importante.

L'action " P" est souvent suffisante pour régler plusieurs systèmes dans l'industrie, elle est simple à réaliser (simple amplification) d'où son grand avantage.

Dans l'industrie tous les processus (pneumatique en général) sont conduit par des régulateurs "P"

## 2.3 Régulateur "PI"

### 2.3.1 Définition

L'équation temporelle d'un régulateur "PI" est donnée par :

$$u(t) = k_p \varepsilon + k_i \int \varepsilon(t) dt \quad (2.3)$$

Sa fonction de transfert est :

$$G_{pi}(p) = k_p + kI/p = \frac{1 + pT_n}{pT_i} \quad (2.4)$$

$T_n$  : dosage de la correction d'intégrale.

$T_i$  : constant de temps d'intégrale.

On constate que l'action intégrale élimine l'erreur statique est fait diminuer le temps de réponse.

Si l'erreur varie brusquement, la sortie augmente progressivement assurant un doux au processus ,  $T_n$  sert , à gérer la vitesse de correction et doit être accordé à la constante de temps dominante qui mesure l'inertie de processus.

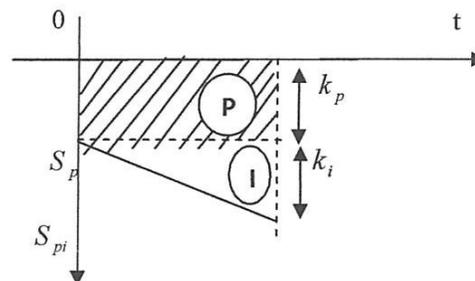


Figure 2.4 réponse a échelon d'un régulateur "PI"

### 2.3.2 Rôle et domaine d'utilisation " PI "

Dans la régulateurs industriels : on affiche  $\frac{1}{T_i}$  Alors  $T_i$  et d'autant plus grand que l'action intégrale est faible.

Le rôle principal de l'action intégrale est d'éliminer l'erreur statique .

Afin de rendre le système plus dynamique (diminuer le temps de réponse) on diminue l'action intégrale mais ceci provoque l'augmentation de déphasage ce qui provoque l'instabilité en boucle fermée.

Si le système possède lui-même un intégrateur, l'action intégrale est quand même nécessaire pour annuler l'écart de perturbation chaque fois que nous avons besoin. Pour de la raison technologique. D'avoir une précision parfaite (régulation de la pression ou température dans un réacteur nucléaire).

## 2.4 Régulateur "PID"

### 2.4.1 Définition :

Son équation temporelle est donnée par :

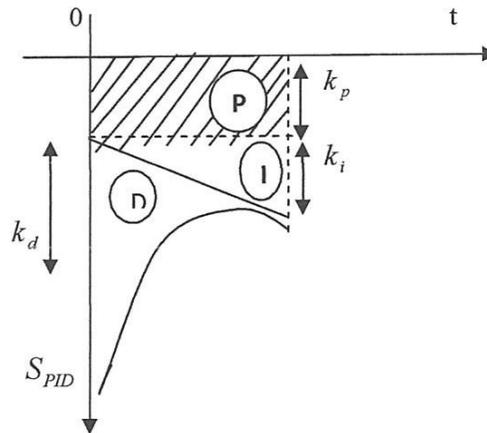
$$u(t) = k_p \varepsilon + k_i \int \varepsilon(t) dt + k_d d\varepsilon(t) / dt \quad (2.05)$$

Sa fonction de transfert est donnée :

$$G_{PID}(p) = k_p + \frac{k_i}{p} + pk_d \quad (2.06)$$

L'action D est proportionnelle à la pente du signal d'erreur.

La loi de commande dérivée est énergétique lorsque le signal d'erreur varie fortement (un front raide conduit à une valeur infinie) elle n'a aucun effet dans le cas contraire.



### 2.4.2 Rôle et domaine d'utilisation PID

L'action dérivée compense les effets du processus elle a un effet stabilisateur.

La présence de l'action dérivée permet, donc, d'augmenter la rapidité du système en augmentant le gain sans être inquiété par la stabilité.

Dans l'industrie, l'action dérivée n'est jamais utilisée seule mais en général avec l'action intégrale, en effet on recommande de l'utiliser pour le réglage des paramètres lents tel que la température, par contre en paramètres bruit, l'action dérivée est déconseillée.

On constate, dans ce cas les meilleurs résultats sont obtenus au moyen de régulateurs PID ou l'erreur statique est nulle, et le temps de réponse  $T_r$  est le plus faible.

Afin d'augmenter les performances d'un système de régulation automatique, on peut agir sur les paramètres du régulateur  $k_i, k_d$  et  $k_p$  correspondants aux trois actions respectives intégrale, dérivée et proportionnelle.

### 3. STRUCTURE DE REGLAGE D'UN CONTROLLEUR TRADITIONNEL D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

#### 3.1 Description d'un variateur de vitesse

La structure de base d'un variateur de vitesse associée à la commande d'un moteur à courant continu est représentée sur la figure ci-dessous...

La tension réglable  $U$  délivrée par l'alimentation (constituée par exemple par un hacheur) permet d'agir sur le courant ( $i$ ) dans l'induit du moteur, et par voie de conséquence sur le couple  $C$  qu'il produit sur son axe, afin d'entraîner une charge variable.

L'objectif principal de la commande est d'assurer que la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'axe du moteur suit une vitesse de consigne  $\Omega_c$ , éventuellement variable.

La figure (2.6) rappelle le modèle utilisé du moteur qui est celui décrit dans le chapitre 1

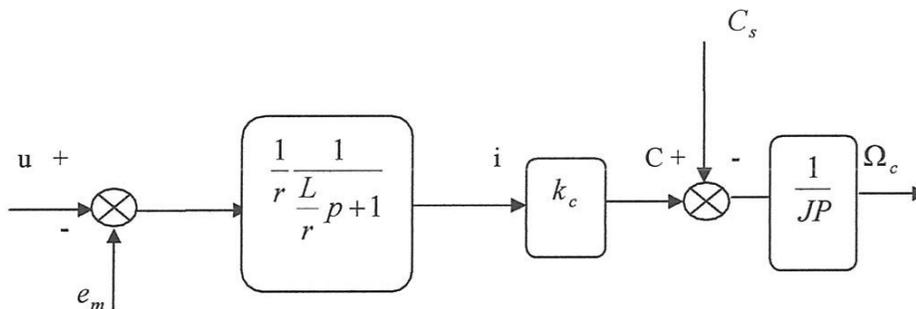


Figure 2.6 : modèle du moteur

La structure très largement employée pour le contrôleur est constituée de deux boucles imbriquées correspondantes à une structure particulière de retour d'état. Ces deux boucles sont : la boucle de courant et la boucle de vitesse (fig.2.7)

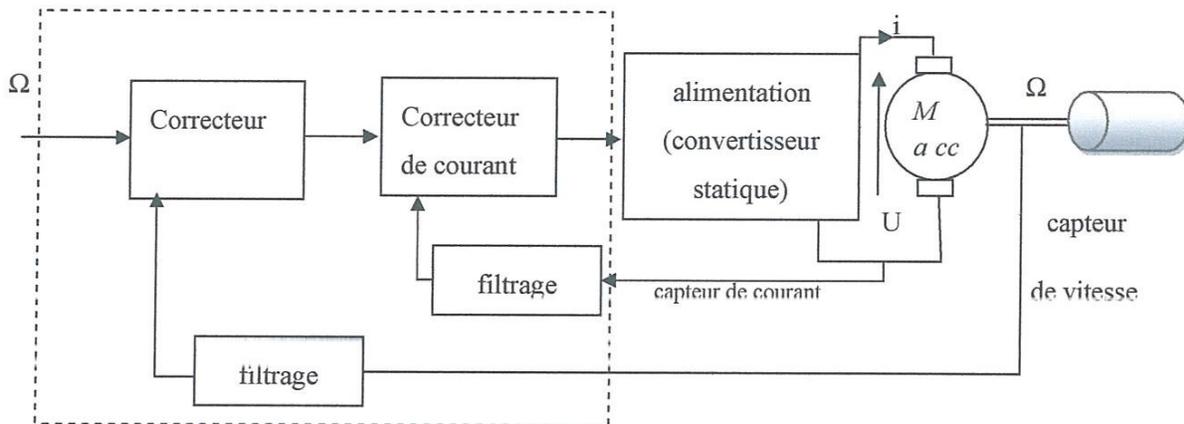


Figure 2.7 :structure d'un variateur de vitesse

### 3.2 Boucle de courant

C'est une boucle interne rapide qui permet de contrôler le couple et de rejeter l'influence de la force électromotrice, en négligeant la présence du filtre employé sur la mesure du courant.

L'induit de la machine a un comportement dominant du premier ordre et le type de correcteur employé est généralement proportionnel intégral "PI". Ce pendant un simple gain proportionnel est retenu pour la suite car il assure dans la plupart des cas un gain de boucle suffisamment élevé garant d'une précision statique satisfaisante.

Le choix de ce gain prend en compte les limitations propres à l'alimentation.

La boucle de courant est représentée par la figure (2.8).

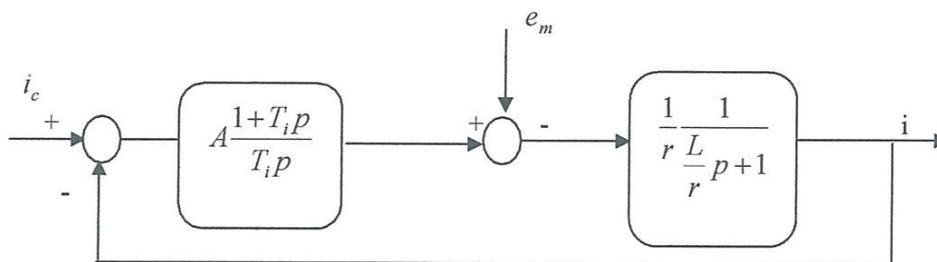


Figure 2.8 : boucle de courant

$$H = A_i \frac{1+T_i p}{T_i p} \quad (2.07)$$

$A$  : le gain de régulation.

$T_i$  : constant de temps.

$i_i$  : courant désiré.

$i$  : courant réglé.

$e_m$  : force électromotrice (perturbation interne).

La fonction de transfert en boucle ouvert de la boucle de courant s'écrit:

$$\left. \frac{i_c(p)}{i(p)} \right|_{e_m} = A \frac{(1+T_i p)}{T_i p} \frac{1}{(\tau_e p + 1)} \frac{1}{r} \quad (2.08)$$

la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle de courant est approchée par le système de 1er ordre, en notant  $T_{bc}$  la constant, suivant:

$$H_c = \frac{1}{1+T_{bc} p} \quad (2.09)$$

Donc la fonction de transfert en boucle ouvert devrait prendre la forme  $\frac{1}{T_{bc} p}$

les paramètres de régulation  $A$ ,  $T_i$  sont donne  $A=r$  et  $T_i=\tau_e$

### 3.3 Boucle de vitesse

C'est une boucle externe plus lente qui utilise un correcteur "PI". L'intégrale placée en amont de la perturbation de couple dans la Chain directe garante en effet une précision statique satisfaisante en régulation (rejet de perturbation de couple).

L'utilisation d'une tape de filtrage n'es pas envisagée dans cette étude et le capteur de vitesse est supposer idéal.

La détermination des paramètres du paramètre des correcteur réalisé par référence a un système du 2<sup>eme</sup> ordre choix de la pulsations a propre " $\omega_n$ " et coefficient d'amortissement " $\eta$ " En négligent l'influence de la boucle interne de courant ( $i = i_c$ ) et sur le capteur de vitesse soit effectuant un déplacement de pôles au mieux en prend en compte l'ensemble des dynamiques. la 1er méthode simplifier et retenue car elle perme d'avoir directement un relation entre " $\eta$ " et le paramètre incertain  $J$ .

Les schéma blocs de la boucle de vitesse et de la commande classique sont représentés respectivement par les figures (2.9) et (2.10)

La fonction de transfert en boucle fermée du système approche est donne par :

$$H(p) = \left. \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} \right|_{C_s=0} = \frac{1+Tp}{1 + \frac{2\eta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad (2.10)$$

Ou  $\omega_n = \sqrt{\frac{AK_c}{TJ}}$  et  $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{AK_c}{J}}$  sont respectivement la pulsation propre et l'amortissement.

La fonction de transfert de régulation est quant a elle :

$$R(p) = \left. \frac{\Omega(p)}{C_s(p)} \right|_{\Omega_c=0} = \frac{-T}{AK_c} \frac{p}{1 + \frac{2\eta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \quad (2.11)$$

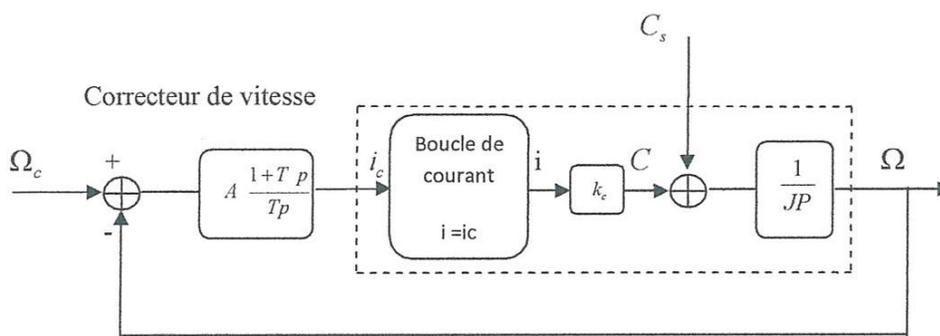


Figure 2.9 boucle de vitesse traditionnelle.

Le coefficient d'amortissement est décroissant par rapport a J. le modèle ou  $J = J_{\max}$  correspond donc a priori au pire cas possible du point de vue de la stabilité, le gain amène a considérer le modèle nominal utilise pour le réglage du correcteur PI.

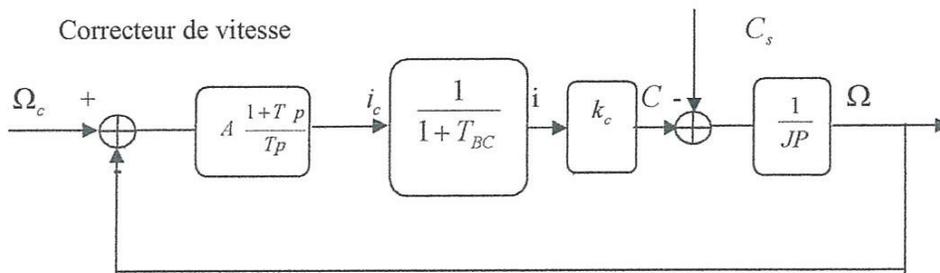
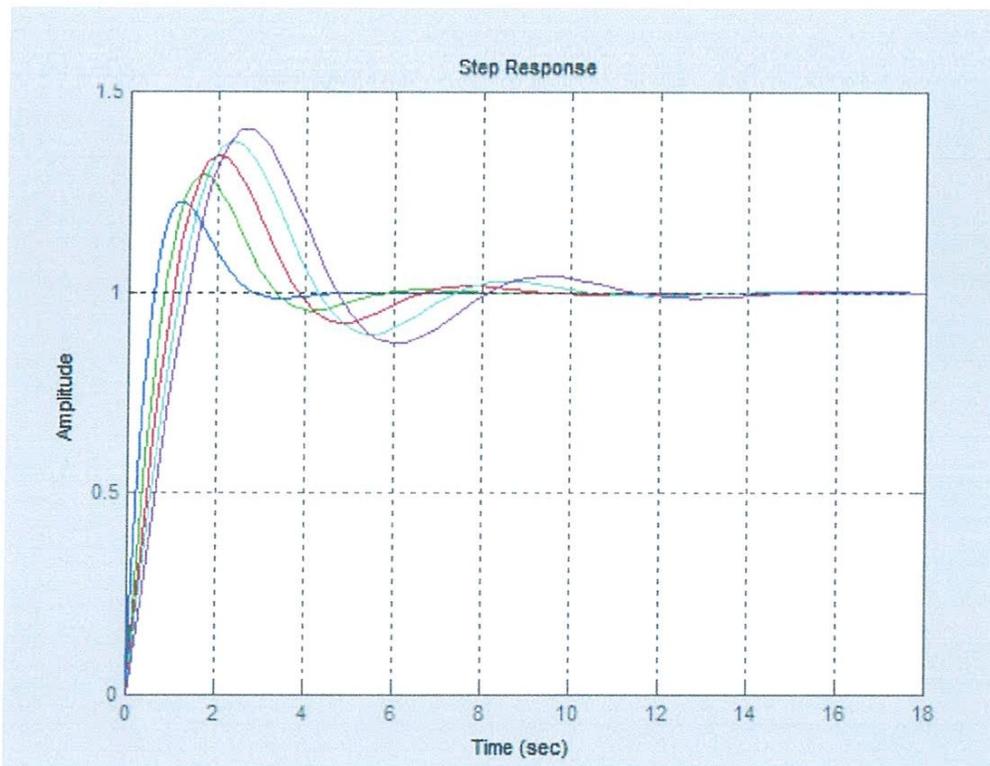


Figure 2.10 commande traditionnelle du moteur.

La figure (2.11) rassemble réponse indicielle du système en boucle fermée résultantes pour différentes valeurs de  $J$ , d'un échelon d'entrée, la réponse est d'autant plus rapide que le moment d'inertie est faible avec une augmentation de dépassement .

Cette constatations met en évidence les limites de l'approche classique (problème de robustesse).

La figure (2.12) présente le diagramme de bode de la fonction de transfert boucle fermée pour différentes valeurs  $J$ . cette figure montre que le système est stable avec une marge de gain et de phase suffisant pour  $J_{\max}$



**Figure 2.11: réponse indicielle en poursuite avec commande traditionnelle**

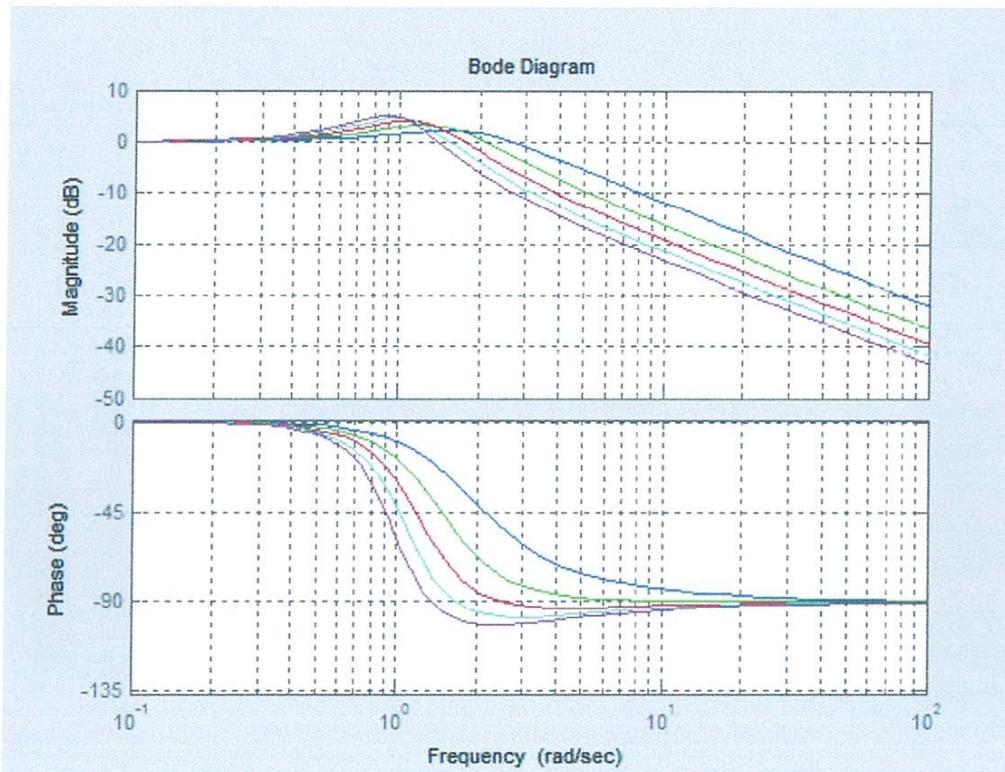


Figure 2.12 : réponse fréquentielle en diagramme de bode pour

$J_{\max}$  et  $J_{\min}$

# *Chapitre III*

---

*Commande diffusive d'un  
moteur a courant  
continu.*

## I. MODELE DIFFUSIF DUN INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE

### 1. Calcul fractionnaire

#### 1.1 Introduction

L'idée du calcul fractionnaire est apparue depuis plus de trois siècles lorsqu' en 1695 le mathématicien Leibniz le mentionna dans une de ces communications adressée a hopital.il a fallu cependant attendre Abel (1823).Liouville(1832) réien (1853) et Heaviside (1892) pour que la théorie du calcul fractionnaire soit formalisée .issue vaste et touche presque tous les domaines.

#### 1.2 Définitions

Soit la fonction  $f$  définie par  $R^+$  a valeur dans  $R$  . L'intégrale d ordre  $\alpha \in [0 + \infty]$  de  $f$  est la formule de Réien-Liouville :

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (3.01)$$

Ou est la fonction gamma définie par l'expression :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^t t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (3.02)$$

A partir de (1) on peut assimiler l'intégral d'ordre  $\alpha$  au produit de convolution de la fonction avec un operateur  $Y_\alpha$  , en d'autre termes :

$$I^\alpha f(t) = (Y_\alpha * f)(t) \quad (3.03)$$

De même , on définit l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$  (inverse de  $I^\alpha$  ) .note  $D_t^\alpha$  ,comme suit:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (3.04)$$

La relation entre les deux operateurs peut être alors définir par :

$$I^\alpha f(t) = y(t) \Leftrightarrow f(t) = D_t^\alpha y(t) \quad (3.05)$$

Pour passer d'une expression à l'autre, il suffit de remarquer que:

$$I^\alpha f(t) = y(t) \Rightarrow I^{[\alpha]+1-\alpha} y(t) = I^{[\alpha]+1-\alpha} I^\alpha f(t) \quad (3.06)$$

$$f(t) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} I^{[\alpha]+1-\alpha} y(t) = D_t^\alpha y(t)$$

Où  $[\alpha]$  désigne la partie entière de  $\alpha$ .

L'opérateur modifié de dérivation d'ordre  $\alpha$  est défini par :

$$\partial_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.07)$$

$f$  : l'entrée de l'intégrateur

$Y$  : sortie de l'intégrateur

$a$  : ordre d'intégration

$\partial_t^\alpha$  : dérivation d'ordre  $\alpha$

### 1.3 Difficultés liées au calcul fractionnaire

Les difficultés rencontrées lors de l'étude des systèmes contenant des opérateurs fractionnaires proviennent essentiellement du fait que ces opérateurs sont héréditaires et ont un noyau singulier qui rend l'approximation numérique très difficile et demande un stockage (une longue mémoire). Les opérateurs de convolution prennent en compte toute l'évolution passée du système d'autant que la singularité du noyau en 0 nécessite un pas d'intégration très petit alors que cette lente décroissance pour  $t$  tendant vers  $\infty$  nécessite un intervalle d'intégration très long.

En outre, le système n'est pas sous la forme abstraite  $\frac{dX}{dt} = AX + Bu$ , ce qui rend l'application des outils classiques d'analyse des systèmes, telle que l'étude de la stabilité à travers une fonction de Lyapunov, très difficile.

### 2.4 Domaines d'application

L'application des méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaire est de plus en plus fréquente dans les différents domaines scientifique .elles sont utilisées essentiellement comme outils de modélisation en mécanique, automatique, Rhéologie... etc.

A titre d'exemple, ces méthodes sont actuellement utilisées pour:

- Modéliser le comportement des matériaux.
- réaliser des composants électriques à impédance fractionnaire.
- Contrôle des structures flexibles par absorption des ondes
- Modéliser asymptotiquement une flamme sphérique

## 2. Modèle diffusif

### 2.1 Introduction

Nous présentons une nouvelle approche basée sur le compartiment des entrées sorties d'une équation de diffusion. l'avantage principale de cette approche est qu'elle permet de réaliser l'opération d'intégration fractionnaire de façon non héréditaire et de remédier à tous les inconvénients précédents liés à l'application des outils classiques de l'analyse , de l'approximation et du contrôle qui deviennent utilisables .

### 2.2 Préposition

Considérons ns le problème de Cauchy monodimensionnel de type diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(x,t) - \partial_x^2 \varphi(x,t) = f(t)\mu(x) \\ \varphi(.,0) = 0 \\ y(t) = \varphi(0,t) \end{cases} \quad (3.08)$$

Où  $f(t)$  est la fonction d'entrée à support dans  $R$ ,  $\mu$  une mesure positive et  $y(t)$  la fonction de sortie .

Par transformation de Fourier par rapport à la variable spatiale  $x$ , le système (3.08) devient :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\varphi}(\xi,t) + \xi^2 \hat{\varphi}(\xi,t) = f(t) \hat{\mu}(\xi) \\ \hat{\varphi}(.,0) = 0 \end{cases} \quad (3.09)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \hat{\varphi}(\xi,t) d\xi$$

La solution (3.09) est :

$$\hat{\varphi}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2(t-s)) f(s) \hat{\mu}(\xi) ds \tag{3.10}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \hat{\varphi}(\xi, t) d\xi$$

La sortie est donc:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\xi} \left[ \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi \right] u(s) ds \tag{3.11}$$

Posons :

$$h(t-s) = \int_{\xi} \exp(-\xi^2(t-s)) \frac{\hat{\mu}(\xi)}{2\pi} d\xi \tag{3.12}$$

Alors pour une valeur convenable u, on a :

$$h(t-s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi = (t-s)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)^{-1} \tag{3.13}$$

Ce qui donne: (3.14)

$$y(t) = I^\alpha f(t)$$

$$\text{avec } \therefore \mu(\xi) = \xi^{-\alpha} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \tag{3.15}$$

### 3.3 avantages du model diffusif

- L'avantage principale c'est la permutation de réalisation d'un opération d'intégration fractionnaire de façon non héréditaire et de remédier a tous les inconvénients lie a l'application des outils classique .
- Il est clair que le système (3.09) peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + Bf \\ y &= CX \end{aligned} \tag{3.16}$$

Où A est un operateur Dissipatif a dimension infini, B est un operateur de contrôle et C est un operateur d'observations.

- Les propriétés de dissipativité et de stabilisé asymptotique des opérateurs de contrôle et C est un operateur intégro-différentiels fractionnaires est préservée par la réalisation diffusive.

### 3.4 Approximation numérique

#### 3.4.1 Principe

D'après le paragraphe précédent, la sortie est :

$$y(t) = \int_0^t \int_{\xi}^{\infty} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi f(s) ds \quad (3.17)$$

Le terme exponentiel assure une décroissance rapide par rapport a  $\xi$  ce qui permet de tronquer les hautes fréquences (pour  $\xi$  grand) tout en garantissant une bonne approximation. On obtient alors un modèle numérique d ordre réduit .

Considérons alors un réseau fini dans le domaine  $[0, k]$  (c.-à-d.  $\xi \in [0, k]$ )

Et notons :

$$N_p = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_q\} \text{ où } 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_q = k$$

Alors la discrétisation spatiale du système différentiel (3.09) nous conduit a la forme :

$$\begin{aligned} \partial \hat{\varphi}_k &= -\xi_k^2 \hat{\varphi}_k + f(t) \\ \hat{\varphi}_k(t) &= \hat{\varphi}(\xi_k, t) \quad k=1, \dots, q \\ \hat{\varphi}_k(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si considéré l interpolation linéaire sur  $(\xi_k, \hat{\varphi}_k(t))_{\xi_k \in N_k}$  définie par:

$$\tilde{\varphi}(\cdot, t) = \sum_{k=1}^q \hat{\mu}(\xi) \hat{\varphi}_k(t) A_k(\xi) \quad (3.19)$$

Ou les  $A$  sont les fonctions déliement finis de support  $[-K, K]$ , la sortie du système devient :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(\xi) \tilde{\varphi}(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\xi}^{\infty} \sum_{k=1}^q \hat{\varphi}_k(t) \mu(\xi) A_k(\xi) \quad (3.20)$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^q \hat{\varphi}_k(t) b_k \tag{3.21}$$

Ou les termes  $b_k$  correspondent aux intégrales sur les segment  $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$  des fonctions d'éléments finis.

$$b_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) A_k d\xi = \int_{-\infty}^{\xi_{\min}} \mu(\xi) A_k d\xi + \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \mu(\xi) A_k d\xi + \int_{\xi_{\max}}^{+\infty} \mu(\xi) A_k d\xi \tag{3.22}$$

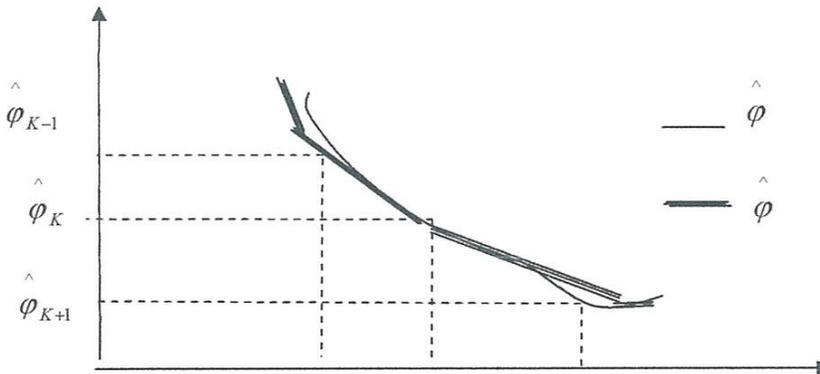
On note :

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\xi_{\min}} \mu(\xi) A_k d\xi = \int_0^{\xi_{\min}} \mu(\xi) A_k d\xi \tag{3.23}$$

$$b_k = \int_{\xi_{\max}}^{+\infty} \mu(\xi) A_k d\xi \tag{3.24}$$

Où  $\xi_{\min} = \xi_1$  et  $\xi_{\max} = \xi_q = k$

Le principe d'approximation peut être schématisé par la figure ci-dessus:



**Figure 3. 1 : approximation linéaire  $\varphi$**

La représentation d'état correspondront est donnée par:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + Bf(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\text{Avec: } X(t) = (\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_k)^T \hat{\varphi}_k(0) = 0 \quad (3.26)$$

$$A = \text{diag}(-\xi_1^2, \dots, -\xi_k^2, \dots, -\xi_q^2) \quad (3.28)$$

$$B = (1, \dots, 1)^T \quad (3.28)$$

$$C = \frac{1}{\pi} (b_1, \dots, b_k, \dots, b_Q) \quad (3.29)$$

La fonction de transfert du système est:

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^q \frac{b_k}{p + \xi_k} \quad (3.30)$$

## 2.5 Choix de paramètre de l'intégrateur :

Pour garantir la convergence de la méthode. L'approximation de l'intégrateur nécessite choix des paramètres influant directement sur les résultats tels que  $\xi_{\min}, \dots, \xi_{\max}, Q$ , ainsi que d'autres paramètres à définir par la suite :

Dans les paragraphes suivants, nous expliquons comment effectuer ces choix.

### 2.5.1 Choix du réseau (des pôles)

Le choix du réseau  $N_Q$  peut s'effectuer d'une façon très simple sans aucune crainte d'instabilité. Nous pouvons remarquer que les  $\xi_k$  peuvent être interprétés comme pôles pour le système (3.09). Il convient, donc, de les distribuer à l'intérieur d'une bande de fréquence utile  $[-\xi_1^2, -\xi_Q^2]$  pouvant être déterminée d'après le continu harmonique de  $f$ . Cette bande de fréquence constitue le domaine des pulsations sur lequel l'approximation de l'intégration fractionnaire sera correcte.

Il n'existe pas une méthodologie systématique déjà développée pour choisir les pôles  $\xi_k$ , mais il y a plusieurs choix de séquences qui peuvent être utilisés nous citons :

- Séquence arithmétique :  $\xi_{k+1} = \xi_k + r$  où  $r$  est la raison de la séquence.
- Séquence polynomiale :  $\xi_{k+1} = K_1^r \xi_k$  où  $K_1$  est une constante.
- Séquence géométrique :  $\xi_{k+1} = r \xi_k$  où  $r$  est la raison de séquence.

La séquence géométrique est largement utilisée dans la littérature, car elle produit une séquence linéaire en domaine fréquentiel, ce qui permet d'utiliser le diagramme de Bode.

En pratique, elle réalise un compromis entre la largeur de bande utile et la complexité de l'approximation résultante.

En outre, elle permet de couvrir la bande de fréquence avec une densité de pôles, dans les coordonnées logarithmiques, qui permet de décrire chaque échelle de temps avec le même nombre de variables d'états.

Au contraire, une séquence arithmétique conduit a une description exclusivement pauvre dans les basses fréquences.

Noter qu' avec une distribution géométrique de  $\xi_k$ , le nombre de décades significatives du système approxime est proportionnel a  $Q$  ( $r$  étant fixe). Du point de vue complexité numérique, ce dernier point est très commode dans le cadre du contrôle des systèmes a paramètres distribués faiblement amortis, où la bande de fréquences couvre souvent plusieurs décades.

Le nombre  $Q$  doit être, donc suffisamment grand pour avoir les meilleurs résultats possibles dans la bande utile.

Ces choix ne sont pas uniques d'autres choix peuvent être envisages.

### 2.5.2 Choix de $\xi_{\max}$ , $\xi_{\min}$

Les deux coefficients  $\xi_{\min}$  et  $\xi_{\max}$  déterminent la longueur du domaine, comme nous avons utilise la séquence géométrique, nous avons la relation suivante :

$$\xi_Q = r^{Q-1} \xi_1 \quad (3.31)$$

Donc, nous pouvons en déduire  $r$  :

$$r = \exp\left(\ln \frac{\xi_Q}{\xi_1}\right) / Q - 1 \quad (3.32)$$

L'équation de diffusion  $\hat{\varphi} = -\xi^2 \hat{Q} + 2f$ , est une équation différentielle de premier ordre de la forme  $\hat{\varphi} = -\omega \hat{Q}$ . Il est, donc évident qu'il y a une relation entre  $\omega$  et  $\xi$  qui est :

$$2\pi f = \xi^2 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{\min}^2 = 2\pi f_{\min} \\ \xi_{\max}^2 = 2\pi f_{\max} \end{cases} \quad (3.33)$$

Donc le choix de  $\xi_{\min}$  et  $\xi_{\max}$  dépend de la bande fréquentielle du système.

Nous pouvons, alors, jouer sur ces deux coefficients pour translater la bande.

### 2.5.3 Choix des fonctions d'interpolations $\Lambda_k$

$$\hat{\varphi}(\xi, t) = \mu_\alpha(\xi) \int f(\tau) d\tau \quad \text{Quand } \xi \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

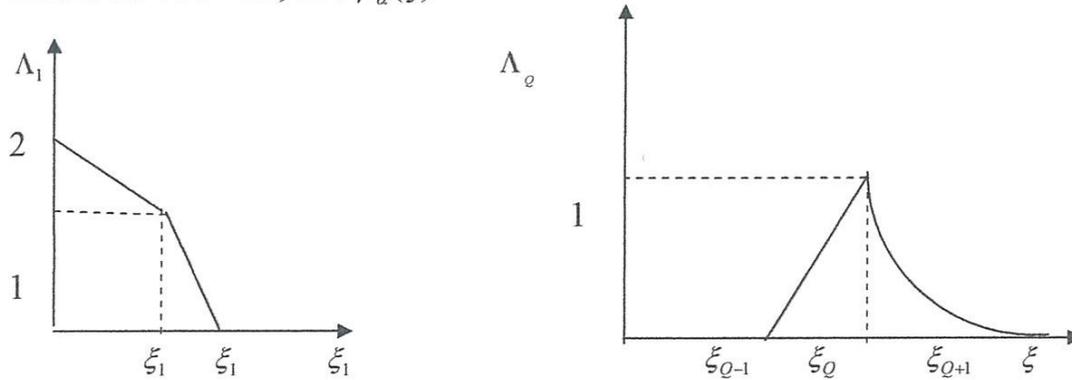
$$\hat{\varphi}(\xi, p) = \frac{\mu_\alpha(\xi)}{\xi} f(t) \quad \text{Quand } \xi \rightarrow 0 \quad (3.37)$$

Les fonctions d'interpolation sur les frontières sont donc :

$$\Lambda_k(\xi) \cong \mu_\alpha(\xi) \quad \text{Quand } \xi \rightarrow 0 \quad (3.38)$$

$$\Lambda_Q(\xi) \cong \frac{\mu_\alpha(\xi)}{(\xi)} \quad \text{Quand } \xi \rightarrow 0 \quad (3.39)$$

Dans le cas où  $\alpha = 1/2$ , on a  $\mu_\alpha(\xi) = 2$ .



**Figure 3.3 choix de la fonction d'interpolation sur les segments**

Ce choix des fonctions d'interpolation au niveau des frontières, conduit aux coefficients  $b_k$  suivants :

$$b_1 = \frac{2\xi_1 + \xi_2}{2} \quad (3.40)$$

$$b_k = \frac{\xi_{k+1} + \xi_{k-1}}{2} \dots\dots\dots 1 < k < Q \quad (3.41)$$

**2.6 Erreur et convergence**

Un choix convenable des fonctions d'interpolations, pour  $f \in L^2$  et  $Q \rightarrow \infty$ ,

Conduit a :

$$\begin{aligned} \left\| \varphi - \tilde{\varphi} \right\|_{L^2} &\rightarrow 0 \\ \left\| y - \tilde{y} \right\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Où  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{y}$  sont les valeurs approchées.

L'erreur est de la forme [ ] :

$$\left| J^{1-\alpha} f(t_n) - y(t_n) \right| \leq \varepsilon(\xi_{\min}, \xi_{\max}, \rho, \Delta t) \quad (3.43)$$

Où  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $\xi_{\min}$  assez petit et  $\xi_{\max}$  grand.

Donc, en choisissant  $\Delta t$ ,  $\rho$  et  $\xi_{\max}$  suffisamment petits et  $\xi_{\min}$  assez grand l'erreur devient pratiquement 0.

Comme nous l'avoir signalé auparavant, une progression géométrique conduit à la meilleure précision.

## II. COMMANDE DIFFUSIVE

### 1 correcteur fractionnaire

#### 1.1 Equation différentielle d'ordre fractionnaire

Soit l'équation différentielle d'ordre  $\beta$  suivante:

$$k \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} + x(t) = u(t) : 1 < \beta < 2, \dots, k > 0 \quad (3.44)$$

La fonction de transfert associée est :

$$H_\beta(p) = \frac{1}{kp^\beta + 1} = \frac{1}{(\tau p)^\beta + 1} \quad \tau = k^{-1/\beta} \quad (3.45)$$

En posant le changement de fréquence  $\tilde{p} = \tau p$ , on remarque la propriété d'invariance de  $H_\beta(p)$ :

*Tout changement de valeur de  $k$  est équivalent à un changement d'échelle de fréquence (ou de temps)*

En conséquences, pour un système défini par le transfert, la réponse fréquentielle (ou a un échelon) est identique pour tout  $k$  a un changement d'unité de fréquence (ou de temps): ceci est un avantage major de et on peut le voir comme un point de départ de l'approche CRONE (commande robuste d'ordre non entier).

Par ailleurs, le transfert est proche (au sens par exemple  $H_2$  ou  $H_\infty$ ) d'un transfert du second ordre amorti, l'amortissement étant en fait directement lie a  $\beta$ .

Donc pour  $\beta$  fixe, le dépassement ne dépend plus de  $k$  (paramètre incertain.)

## 1.2 Principe

L'idée consiste a déterminer un compensateur tels que le transfert en boucle fermée du système considéré soit égal a (3.45), ou  $k$  est le paramètre incertain.

Soit un système définit par le transfert :

$$H(p) = \frac{1}{\lambda p} \quad (3.46)$$

Où  $\lambda$  est un paramètre incertain.

Pour avoir un transfert en boucle fermée de la forme (3.45), le compensateur qui devrait être inséré dans la boucle devrait prendre la forme :

$$K(p) = \frac{k}{p^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad k > 0 \quad (3.47)$$

On obtient en boucle ouverte le transfert  $\frac{k}{\lambda p^{1+\alpha}}$ , qui donne en boucle fermée le transfert :

$$H_1(\tilde{p}) = \frac{1}{1 + \lambda k^{-1} p^{1+\alpha}} \quad (3.48)$$

Avec un changement de fréquence  $\tilde{p} = \left(\frac{\lambda}{k}\right)^{1+\alpha} p$  on obtient le transfert invariant

$$H_1(\tilde{p}) = \frac{1}{1 + \tilde{p}^{1+\alpha}} \quad (3.49)$$

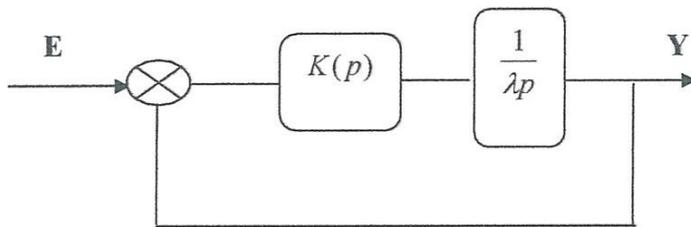


Figure 3.5

On considère le cas décrit dans la figure ci-dessous où  $K_0(p)$  est un correcteur de la forme PI.

$$K_0(p) = \frac{ap + b}{p} \quad (3.50)$$

Déterminer  $K(p)$  pour confier au système en boucle fermée une fonction de transfert de la forme (3.45).

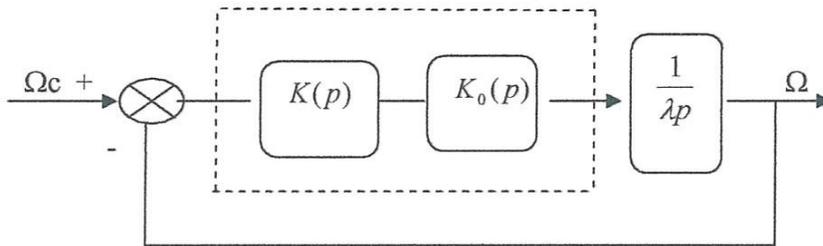


Figure 3.6

Dans ce cas le compensateur cherché prendrait la forme suivante :

$$K(p) = \frac{p}{(ap + b)p^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.51)$$

De la sortie que, la correcteur résultant :

$$\tilde{k}(p) = k(p)k_0(p) = \frac{1}{p^\alpha} \quad (3.52)$$

Confère au système un transfert en boucle fermée de même type, à savoir celui de (3.45) indépendamment de la nature de  $K_0$  (qui intervient en fait que dans la valeur de  $\alpha$  liée au facteur d'amortissement induit par  $K_0$ ).

### 1.3 Construction d'un correcteur fractionnaire d'un moteur a courant continu

La mise en œuvre de correcteurs fractionnaires est devenue classique, suite aux nombreux travaux dans ce domaine au cours des dernières années. Notre but est de mettre simplement en évidence sur le cas concret considéré ici l'intérêt de contrôleur non standard (ici fractionnaires) vis-à-vis des propriétés de robustesse par rapport à J.

L'asservissement conserve la boucle interne du courant, seul le correcteur de la boucle de vitesse est modifié comme proposé sur la figure (3.7)

En prenant  $T_{di} = T_{BI}$  ou  $T_{BI}$  est la constante de temps de la boucle de courant, la fonction de transfert de la chaine direct corrigée en l'absence de perturbations s'écrit:

$$C_s = 0$$

$$G_{uc} = \frac{A_{di}k_c}{Jp^{1+\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.53}$$

Qui donne la fonction de transfert de poursuite en boucle fermée :

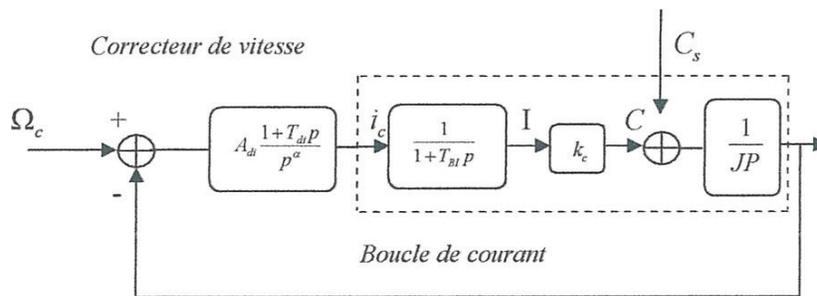
$$H_{di}(p) = \frac{1}{\frac{J}{A_{di}k_c} p^{1+\alpha} + 1} = A_{di} \frac{k_c}{Jp^{1+\alpha} + A_{di}k_c} \tag{3.54}$$

La fonction du transfert de régulation est :

$$R_{di} = \frac{1}{A_{di}k_c} \frac{p^\alpha}{\frac{J}{A_{di}k_c} p^{1+\alpha} + 1} \tag{3.55}$$

A noter que  $R_{di} = 0$ , ce qui garantit bien le rejet d'une perturbation constante en régime statique.

Les choix de l'ordre d'intégration fractionnaire du correcteur et de la valeur nominale du gain  $A_{di}$  sont telle que la réponse indicielle en poursuite est très proche de celle avec correcteur traditionnel pour  $J = J_{max}$



**Figure 3.7 commande fractionnaire du moteur**

## 2. correcteur diffusif

### 2.1 Synthèse du correcteur

Le nouveau correcteur de vitesse trouve dans le paragraphe précédent a une nature fractionnaire, sa radialisation non héréditaire, fait nécessite l'utilisation du modèle diffusif introduit dans la partie (1.2)

La fonction de transfert du correcteur de vitesse est donne par:

$$H_r = \frac{1+T_{BC}P}{P^\alpha} \quad \text{Avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.56)$$

soit un système d'entrée  $\xi$  et de sortie  $i$  dont la fonction de transfert est :

$$\frac{I(P)}{\mathcal{E}(P)} = \frac{1}{P^\alpha} \quad (3.57)$$

Qui s'écrit dans le domaine temporel par:

$$i(t) = I^\alpha \mathcal{E}(t) \quad (3.58)$$

La réalisation diffusif de (3.58) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi(\xi, t) = -\xi^2 \varphi(\xi, t) + \mathcal{E}(i) \\ i(t) = \int_{\xi} \mu(\xi) \varphi(\xi, t) d\xi \end{array} \right. \quad (3.59)$$

De (3.30) .la fonction de transfert de vitesse devient :

$$H_r = (1+T_{BC}P) \sum_{k=1}^Q \frac{b_k}{\xi_k + p} \quad (3.60)$$

$$\text{Ou } b_k = \int_{\xi} \mu(\xi) \Lambda_k d\xi$$

## 2.2 Résultats de simulation

La mise en œuvre numérique a été réalisé a laide du logiciel matlab. Le choix des paramètres est effectue de façon a avoir une bonne approximation autant pour l'intégrateur fractionnaire que pour le contrôle du moteur.

Pour l'approximation numérique de l'intégrateur fractionnaire, les valeurs de  $\xi_0$  sont choisies partir de la relation (3.33), et la valeur de Q est choisie de telle façon d obtenir une bande utile qui couvre toutes les fréquences.

La figure (3.8) présente une comparaison entre la réponse en échelon avec la commande classique et celle avec la commande fractionnaire pour  $J = J_{\max}$  les deux réponses sont très proches pour  $\alpha=1/2$ .

La figure (3.9) présente le diagramme de bode de l'intégrateur fractionnaire d'ordre 1/2. On remarque que le gain et la phase sont très proche du gain et de phase idéaux  $(\frac{1}{\omega}, -\frac{\pi}{4})$  , dans le domaine de pulsation  $[10^{-3}10^{+3}]$ , qui représente une bande utile d approximation avec 10 variables d'état.

La figure (3.10) rassemble les réponses indicielles pour différentes valeur de  $J$  dans les conditions que la commande classique. On remarque que la réponse en poursuite conserve, a un changement d'échelle de temps, la même forme quelque soit le moment d inertie.

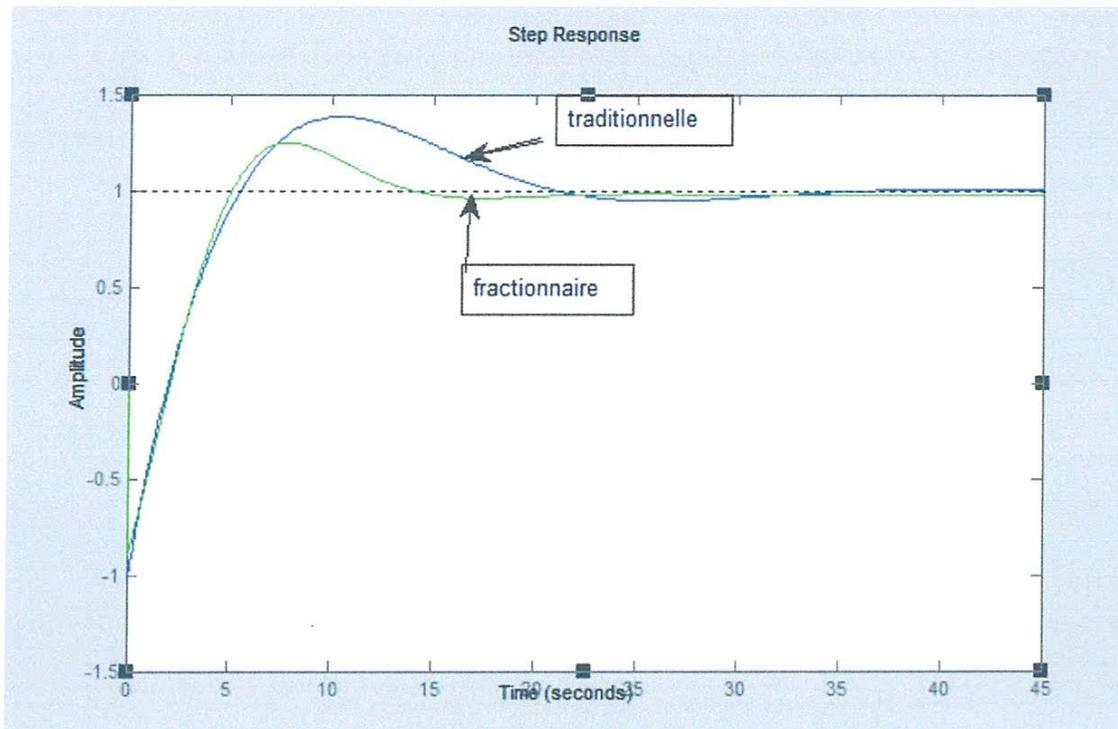
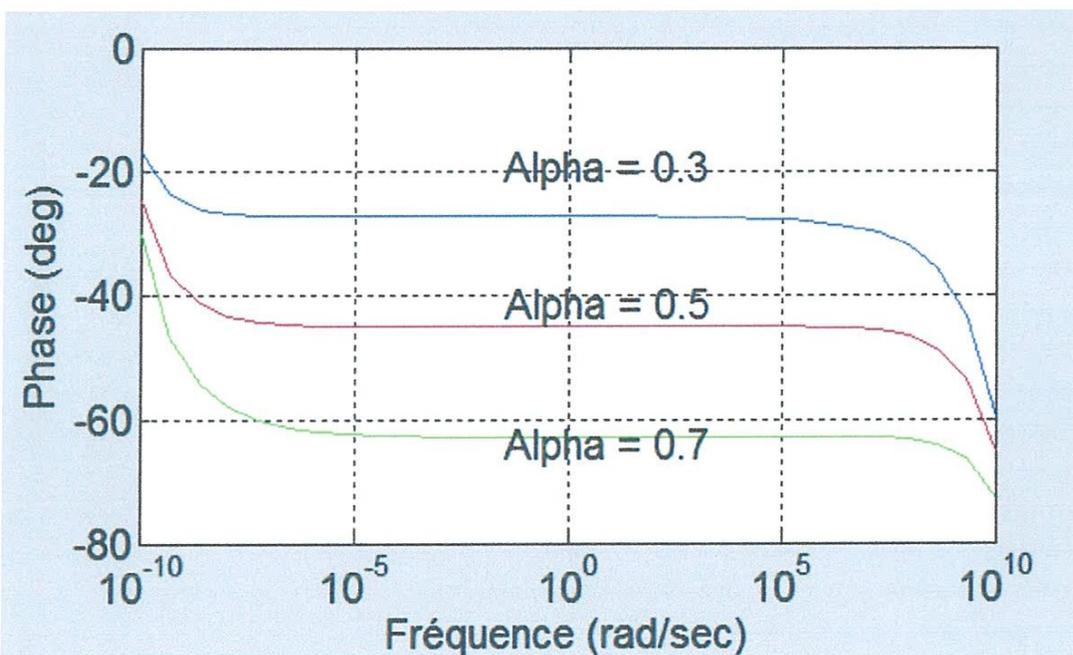
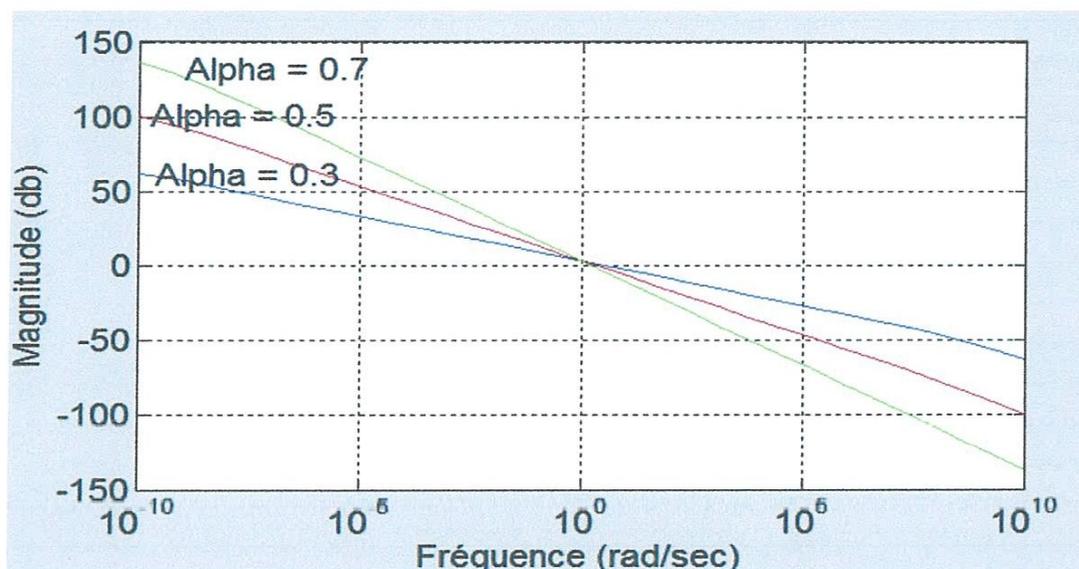


Figure 3.8 :réponse indicielle avec PI et fractionnaire, pour  $J_{\max}$  et  $J_{\min}$



**Figure 3.9 : approximation de correcteur fractionnaire**

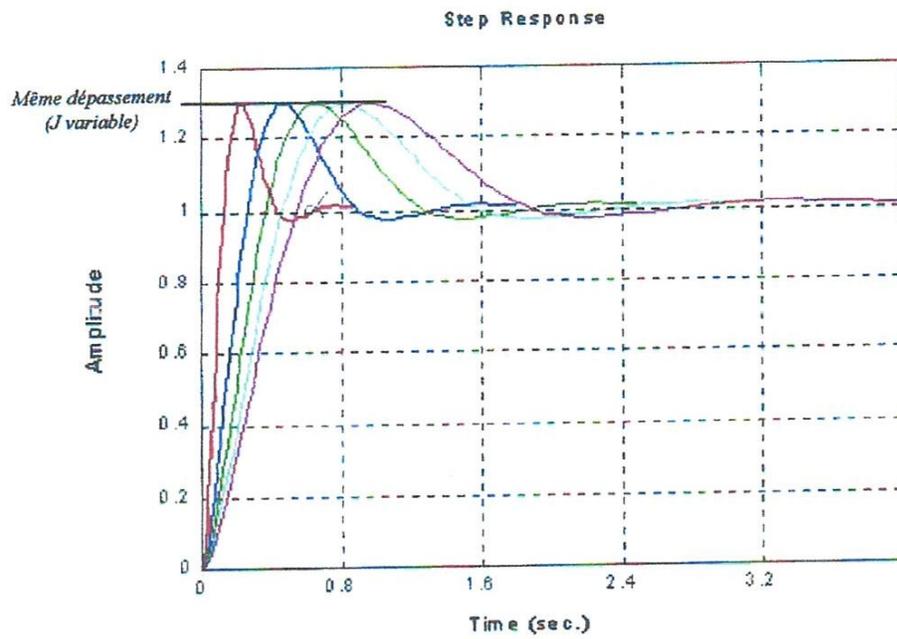
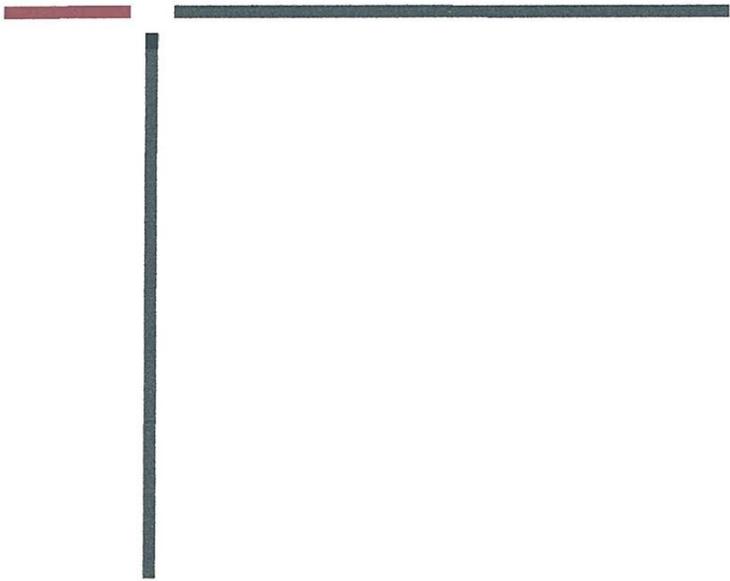


Figure 3.9 : réponse indicielle en poursuite avec diffusive

# *Conclusion générale*



## *Conclusion générale*

Le but de cette étude est la commande d'un moteur a courant continu par une nouvelle approche dite diffusive, dont le moment d'inertie est variable.

Le principe est basé sur la propriété d'invariance de l'équation différentielle fractionnaire.

La fonction de transfert de type fractionnaire est réalisée par un modèle diffusif.

La caractéristique principale de cette loi de commande est qu'elle conserve la forme de la réponse indicielle (fréquentielle) sous changement d'échelle de temps (fréquence).

Le système est stable par analogie de forme avec le système nominal.

Enfin, nous pensons que nos objectifs sont atteints et que ce travail sera un rapport certain pour les futurs étudiants de l'institut qui souhaitent s'investir dans ce domaine

# *Bibliographie*



## Bibliographie

- A. Agoune, A. F. Fertas «étude d un moteur a courant contenu»  
MFE.CUG Guelma, 2000.
- [1] S.bouchelaghem «commande directe d un moteur a C.C»  
MFE.CUG Guelma, 2000
- [3] P.Bidon « commande diffusive d une machine électrique »  
Esaim proc.vol5.France 1998.
- [1] boudjahem «onstrôlc diffusif d un bras flexible »  
Mémoire de magister ,C.U.Guelma.2000
- [5] D.Helescheuwits, D. Matignon «diffusive realisation of fractional integro-differential operators structurals-Analysis approximation»  
IFAC conférence Nantes, France, July 8-10-1998.
- [6] Y.Kafi, Hamad «observation optimal pour la détection des défauts»  
MFE.CUG Guelma, 2000.
- [7] F, Milisant «machines électriques»  
Edition. ELLIPSES France, 1992.
- [8] G. Montseny, J.Audounet «models non hereditaire pour l'analyse et la contrôle de système a mémoire longue de type fractionnaire»  
Journée d'étude les systèmes d'ordre non entier en automatique,  
Bordeaux (France), 1995.
- [9] G. Montseny, «Diffusive representation of pseudo-differential time-operators»  
Journées thématatque ENST, ESAIM proc. Vol. Paris 3-4. Doc 1998.
- [10] G.Seguir, F Notelet Electronique industrielle  
Lavoisier Tec et Doc. Paris 1977.
- [11] V.Teulierre Realisaion diffusive d'opérateur heréditaire de type pseudo-différentiel. Application à l'absorption des ondes bidimensionnelles  
Mémoire DEUA. Lnf ind 1995.