

M/621.744

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Domaine : Sciences et Technologie**  
**Filière :** Automatique et Informatique Industrielle  
**Spécialité :** Commande et Diagnostic  
Des Systèmes Industriels

**Mémoire de fin d'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

---

**Modélisation et simulation des systèmes dynamiques hybride par RdPH**  
**Exemple d'application : le convertisseur statique boost**

---

Présenté par : ZALANI Hamid

Sous la direction de : Me: BOUBIDI.A



JUIN 2012

## Remerciement

*Je tient à remercié le bon dieu pour le courage qu'il m'a donné pour surmonter toutes les difficultés durant mes années d'etudes.*

*Ce travail est le fruit de la collaboration de plusieurs personnes qui meritent ma gratitude.*

*Je remercis vivement mon encadreur Me: BOUBIDI.A, vous m'avez fait le grand honneur de diriger ce travail ,votre compréhension,votre collaboration et vos precieuses directives qui m'ont été d'un grand secours afin de mener a bien mon memoire, veuillez accepter l'expression de ma grande admiration et de ma profonde reconnaissance. Je salus chaleureusement votre ardeur a travailler.*

*Je veux exprimer mes plus vifs remerciements à tous mes professeurs de l'Automatique qui ont contribué à me transmettre l'inestimable trésor qui est le savoir.*

*Que tous ceux que je n'ai pas cités, et qui m'ont aidé de près ou de loin reçoivent mes sincères remerciements.*

  
Hamid.

## Sommaire

Introduction générale.....	1
I.1. Introduction.....	2
I.2. Classification des systèmes dynamiques .....	2
I.2.1. Les systèmes dynamiques continus.....	2
I .2.2. Les systèmes dynamiques à événement discrets.....	3
I .2.3. Les systèmes dynamiques hybrides.....	4
I .2.4. Les systèmes dynamiques positifs.....	4
I .3. Les Structures d'un SDH.....	5
I .4. Formalismes pour les systèmes dynamiques hybrides.....	6
a. L'approche continue .....	6
b. L'approche discrète .....	6
c. L'approche mixte .....	6
I.5. Exemples illustratifs.....	6
Exemple I.1 .....	7
Exemple I.2.....	7
I .6.Les difficultés liées aux SDH.....	8
I .7.Un modèle, pour quoi faire ?.....	8
I .8. Modèles hybrides.....	9
I .8.1. Introduction.....	9
I .8.2.Automates hybrides.....	9
I .8.3.Réseaux de Pétri hybrides.....	10
I.8.3.1. Extensions des réseaux de pétri pour modéliser les systèmes hybrides.....	10
a. Les Réseaux de Pétri continus.....	10
b. Extension des réseaux de pétri à la modélisation des systèmes hybrides.....	11

c. Extension de RdP Hybride. les RdP lots.....	11
d. Les RdP différentiels.....	12
I .8.4.Réseaux de Pétri mixtes.....	12
I .9.Simulation des SDH.....	12
I .9.1. Pour quoi simuler ?.....	12
I .9.2.Simulation des SDH.....	13
I .10. Conclusion.....	13
Chapitré II Modélisation des systèmes dynamique hybride par RdPH	
II.1. Introduction .....	15
II.2.Rappels sur les réseaux de pétri .....	15
II.2.1 Notions de base.....	15
II.2.2 Places, Transitions et Arcs.....	15
II.2.3.Marquage .....	16
II.2.4. Franchissement d'une transition.....	16
II.2.5 Séquence de franchissement.....	18
II.3 Règles d'évolution d'un RdP .....	18
II.4. Structures particulières .....	19
II.4.1. Graphe d'état.....	19
II.4.2. Graphe d'événement.....	19
II.4.3. Réseau de pétri sans conflit.....	19
II.4.4. Réseau de pétri à libre choix.....	20
II.4.5. Réseau de pétri simple.....	21
II.4.6. Réseau de pétri pur .....	21
II.4.7 RdP généralisés.....	21
II.4 .8 RdP à capacités.....	22
II.4.9 RdP à priorités.....	23
II.5 Algèbre Linéaire.....	23
II.5.1Notations et définitions.....	23

II.5.2	Equation fondamentale ou équation d'état.....	23
II.6.	Modélisation du temps dans les réseaux de pétri.....	25
II.6.1	RdP temporisés.....	25
II.6. 2	Réseaux de Pétri P-temporisés.....	25
II.6. 3	Réseaux de Pétri T-temporisés.....	26
II.7.	Structure fondamentales pour la modélisation des systèmes par RdP.....	27
a)	Parallélisme.....	27
b)	Synchronisation.....	28
c)	Partage de ressources.....	29
d)	Mémorisation.....	29
e)	Lecture.....	29
f)	Capacité limité.....	30
II.8.	Les RdP du discret aux Continu.....	30
II.8.1	Réseaux de Pétri discret.....	30
II.8.1 .1	Introduction.....	30
II.8.2	Réseaux de Pétri Continues.....	31
II.8.2 .1	Introduction.....	31
II.8.2.2	Les Réseaux de Pétri Continu autonomes.....	32
II.8.2.3.	Les Réseaux de Pétri Continu non autonomes.....	33
II.8.2.4	Les Réseaux de Pétri Continus à Vitesses Constantes [DA92].....	33
II.8.3	Les autres modèles continus.....	36
II.8.3.1	Le RdP Continu à Vitesses Variables.....	36
II.8.3.2	Le RdP Continu Asymptotique.....	36
II.9	Réseaux de Pétri hybrides (RdPH).....	37
II.9.1	Transformation de marques.....	37
II.10.	Les exemples sur système hybride par RdPH.....	38
II.11.	Conclusion.....	48
Chapitre III	Exemple d'application le convertisseur statique boost	

III.1.Introduction .....	51
III. 2. Étude du fonctionnement.....	51
III.2.1 Présentation du circuit .....	51
III.2.1.1. la phase active .....	51
III.2.1.2. la phase de roue libre .....	51
III.2.2. Conduction continue.....	53
III.2.2.1. Séquence 1 : phase active.....	53
III.2.2.2. Séquence 2 : phase de roue libre.....	53
III.2.2.3. Expression de $V_s$ et $I_S$ .....	54
III.2.2.4. Ondulation de courant $\Delta I_L$ .....	54
III.2.2.5. Ondulation de tension $\Delta V_S$ .....	55
III.2.3 Conduction discontinue.....	56
III.2.4 Conduction critique.....	57
III.3 Application .....	57
III .4 Conclusion .....	58
Conclusion générale .....	59

# Introduction Générale

## Introduction générale

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps. Il est important dans de nombreux cas d'utiliser l'une de ces deux catégories de modèles. Cependant la majorité des systèmes complexes réalistes mélangeant le continu et le discret ne peuvent pas être classés ni dans la catégorie "système continu" ni dans la catégorie "système discret". Il est nécessaire alors d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que l'interaction entre elles. Plusieurs modélisations hybrides ont été développées dans la littérature. Elles peuvent être classées en trois catégories principales :

- ❖ Les approches basées sur une extension de techniques de modélisation de systèmes continus comme le formalisme de bond-graph mixte.
- ❖ Les approches basées sur l'extension de modèles de systèmes à événements discrets parmi lesquels nous pouvons citer les réseaux de Petri hybrides.
- ❖ Les approches mixtes, combinant à la fois le continu et le discret dans une structure unique.

A nos jours, il existe dans la littérature principalement deux formalismes permettant la modélisation de l'aspect hybride : les automates hybrides ou bien par les réseaux de Petri hybrides (RdPH).

De nombreux outils graphiques (logiciels) ont été développés pour modéliser les réseaux de Pétri. Nous nous sommes concentrés sur le logiciel SIRPHYCO (Simulateur de Réseau de Pétri Hybrides et Continus), c'est un Logiciel de simulation de réseaux de Pétri hybrides et continus, il est facile à utiliser, sa conception de la simulation est facile, rapide et simple c'est pour ça qu'on l'a choisi pour faire notre simulation.

L'objectif de ce mémoire est de modéliser et simuler des systèmes dynamiques hybrides. La prenant comme exemple d'application le convertisseur statique (BOOST)

Pour atteindre cet objectif, le mémoire est réparti en trois chapitres comme suit :

### Chapitre 1

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la notion des systèmes dynamiques hybrides allant de la classification des systèmes dynamiques à la structure de ces derniers. Par la suite, nous avons présenté deux exemples illustratifs. Enfin nous avons terminé par les outils utilisés pour la modélisation des Systèmes Dynamiques Hybrides.

### Chapitre 2

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'outil de modélisation des Systèmes Dynamiques Hybrides par RdPH. Il y a de nombreux modèles pouvant prendre en compte la modélisation des Systèmes Dynamiques Hybrides. Les deux principaux sont les RdP hybride



et les automates hybrides. Nous avons retenu les RdP hybride à cause de leur puissance de modélisation et de leur capacité à fournir une simulation pilotée par des événements.

nous avons présente un système sur les RdP ,RdPC pour RdPH en fin nous avons présent quater exemple de simulation par RdPH le logiciel de simulation est SIRPHYCO(Simulateur de Réseau de Pétri Hybrides et Continus),

### **Chapitre 3**

Ce chapitre d'application a traite de la conception d'un convertisseur DC/DC de type boost (appelé également hacheur survolteur ou parallèle). Ce type de convertisseur statique permet de convertir une tension continue en une autre tension continue de plus forte valeur. Nous avons essaye de modéliser le convertisseur qui présent un respect hybride par RdPH

Enfin nous avons terminé par une conclusion générale

# Chapitre 1

## Les Systèmes Dynamiques Hybrides

## I.1. Introduction

Les systèmes dynamiques hybrides sont des systèmes comportant un système continu interagissant avec et/ou supervisé par un système à événements discrets. Un système se caractérise par la nature de ses variables d'états, qui peuvent être continues ou discrètes. Le premier type est défini sur l'ensemble des réels  $R$ , alors que le second prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable (entiers, booléens, ...). Pour définir un système hybride, nous allons d'abord introduire les notions de système continu et de système à événement discret.

## I.2. Classification des systèmes dynamiques

Suivant la nature des variables d'état et de la variable d'état indépendante qui est le temps, on peut classer les systèmes dynamiques comme suit :

### I.2.1. Les systèmes dynamiques continus

Dans cette catégorie la variable temps est toujours présente, elle peut être continue ou discrète. Le comportement de ce type de système est décrit par des variables d'état continues, le temps lui peut être continu, le système est dit à temps continu (figure 1.1: a), ou discret, c'est le cas des systèmes discrétisés, dont l'exemple le plus répandu sont les systèmes échantillonnés (figure. 1.1.b). La représentation de l'évolution de ces grandeurs, traduisant le comportement dynamique du procédé, est alors une représentation mathématique à l'aide de modèles continus, tels que les équations différentielles, les équations récurrentes, les équations aux différences, les fonctions de transfert, ou encore les équations d'état.

Un système continu est formellement défini comme suit :

**Définition 1.1 (Système Dynamique Continu) :** Un système dynamique continu est un triplet  $(X, X_0, f)$  tel que :

- ❖  $X \subseteq R^n$  est l'espace d'état continu.
- ❖  $X_0 \subseteq X$  est l'espace d'état initial du système.
- ❖  $f : X \rightarrow R^n$  est le champ de vecteur continu.

Le comportement d'un système continu est le plus souvent décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{x} = f(x)$$

Où  $x \in X$  est l'état du système, le comportement d'un système continu est caractérisé par la solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$  à partir de l'état initial  $x_0 \in X_0$ .

Un système continu est dit linéaire s'il est modélisé par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{x} = A \cdot x$$

Où  $R^{n \times n}$  est une matrice constante.

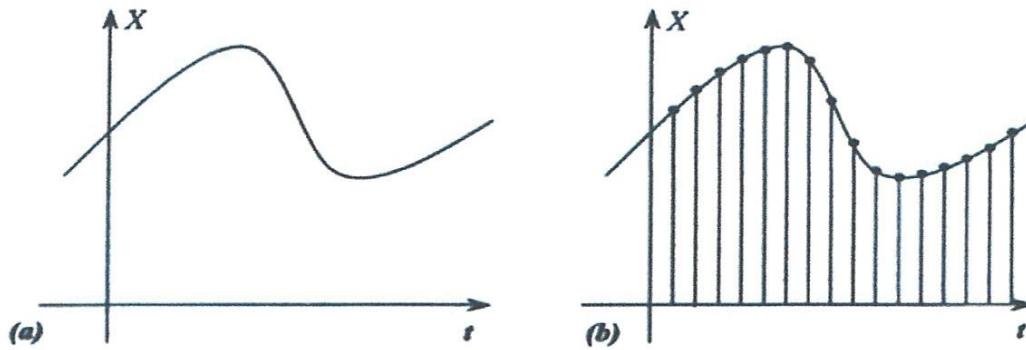


Figure I.1 : Système dynamique continu.

### I.2.2. Les systèmes dynamiques à événement discrets

Un système à événement discrets (SED) est décrit par des variables d'état discrètes, qui prennent leurs valeurs dans un ensemble dénombrable. Ce type de système peut être non temporisé (autonome) ou temporisé. Dans le cas d'un SED autonome, la variable temps est symbolique, c'est-à-dire qu'elle est utilisée pour définir une chronologie entre les événements. Dans le cas des SED temporisés, le temps peut être continu ou discret (figure. 1.2), à chaque événement est rattaché l'instant de son occurrence qui prend ses valeurs dans  $R$ , cas d'un automate temporisé par exemple. Les SED peuvent être modélisés par les automates à état, les réseaux de Pétri, les chaînes de Markov, l'algèbre  $(Max, +)$ ,... etc.

Un système continu est formellement défini comme suit :

**Définition 1.2 (Système Dynamique à Evénements Discrets) :** Un système dynamique événement discret est un triplet  $(Q, Q_0, \delta)$  tel que :

- ❖  $Q$  est un ensemble fini ou infini d'états.
- ❖  $Q_0 \subseteq Q$  est l'ensemble des états initiaux.
- ❖  $\delta : Q \times Q$  est la fonction de transition entre états, elle détermine le comportement du système.

Notons que le comportement d'un même système physique peut être décrit par des variables d'états continues ou discrètes, suivant les phénomènes auxquels on s'intéresse.

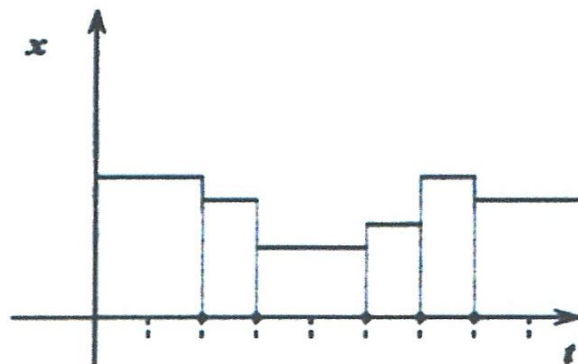


Figure I.2 : Système à événements discrets.

### I.2.3. Les systèmes dynamiques hybrides

Dans certains cas et pour des objectifs spécifiques, il est possible de choisir toutes les variables d'état dans l'une des deux catégories, pour la description d'un système physique donnée, mais ce n'est pas toujours le cas. En effet, la plupart des systèmes physiques ne peuvent pas être classés dans l'une des deux catégories précédentes homogènes des systèmes dynamiques, et les variables d'états auxquelles on s'intéresse contiennent des variables discrètes et d'autres continues. Dans ce cas les systèmes sont dits systèmes dynamiques hybrides, ce sont des systèmes hétérogènes caractérisés par l'interaction d'une dynamique de nature discrète et une autre de nature événementielle. L'essor de ces systèmes est relativement nouveau, il est une combinaison d'un système à événement continu et un système à événements discrets, en insistant sur l'importance des interfaces qui assurent les connections entre les dynamiques continue et discrète, comme la montre la Figure I.3.

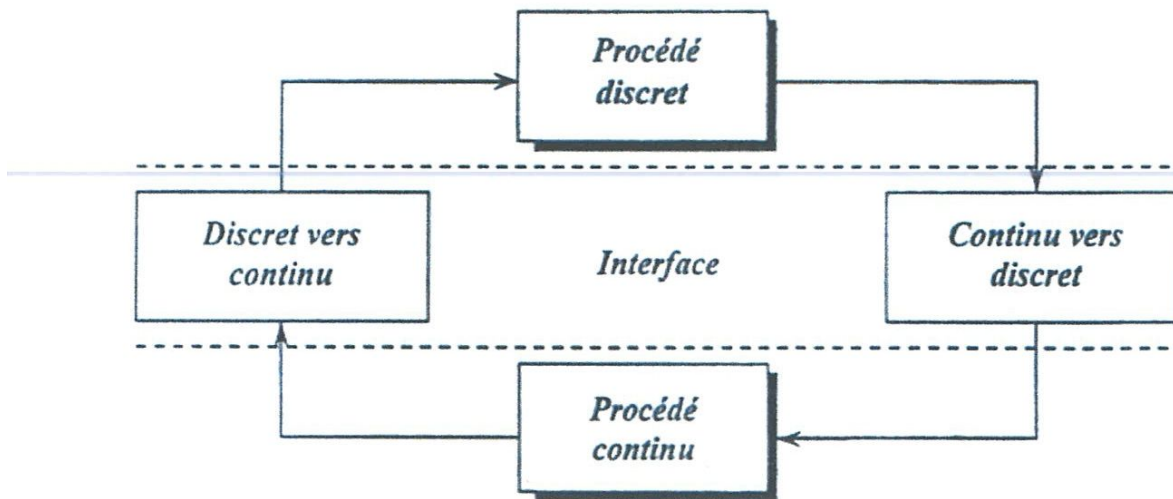


Figure I.3 : Système dynamique hybride.

La recherche sur les systèmes dynamiques hybrides s'articule autour des trois axes complémentaires suivant :

- ❖ La modélisation : Formalisée des modèles précis qui peuvent décrire le comportement riche et complexe des SDH.
- ❖ L'analyse : développer des outils de simulation, de validation et de vérification des SDH.
- ❖ La commande : effectuer la synthèse d'un contrôleur discret (ou hybride) conformément à certains objectifs de performances et de sûreté de fonctionnement du procédé hybride commandé.

### I.2.4. Les systèmes dynamiques positifs

Les systèmes positifs sont une autre classe des systèmes dynamique relative aux variables d'état. Cette terminologie a été présentée pour la première fois par *David Luenberger* dans son livre « *Introduction to dynamic Systems* ». Un système dynamique est

dit positif si toutes ses variables d'état sont toujours positives. Cette positivité est souvent une conséquence de la nature du phénomène. Des exemples de tels phénomène peuvent être issus de disciplines aussi différentes telles que l'économie (les variables descriptives peuvent être des prix de marchandises, des quantités de stocks), les sciences sociales (nombres d'individus, des taux de satisfaction, de consommation), la physique (problèmes de réservoirs d'eau, systèmes d'irrigation), la chimie (réacteurs chimiques, colonnes à distiller), les télécommunications (quantité d'informations à faire transiter par un réseau).

### I.3. Les Structures d'un SDH

Un SDH est un système dynamique composé de l'interaction d'une partie événementielle et d'une partie continue. Les deux composantes continues et discrètes d'un SDH sont interconnectées avec une loi qui orchestre cette interconnexion (figure I.4).

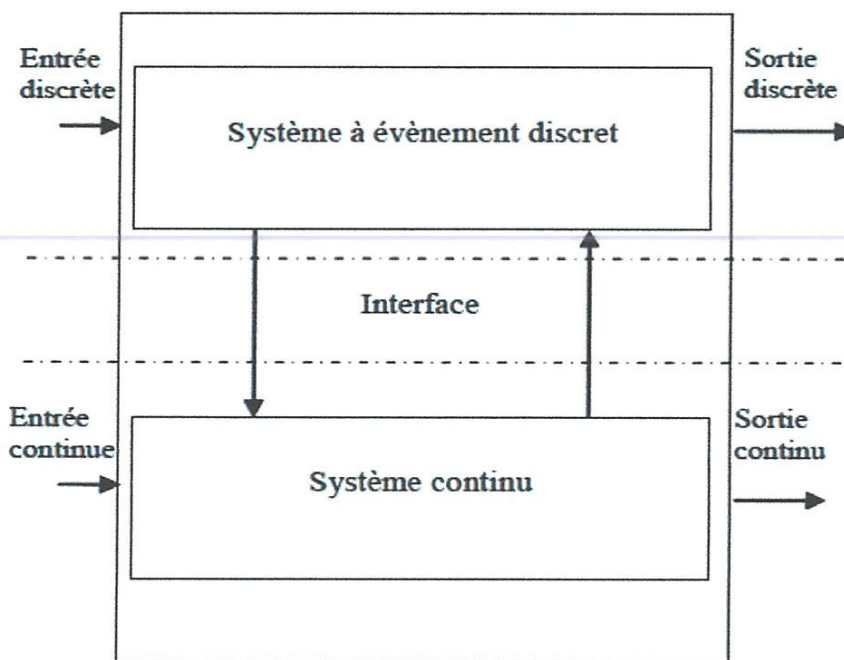


Figure 1.4 : Structure d'un SDH.

- ❖ La partie « Système à Evénements Discrets » (SED) représente l'état discret du SDH. Son évolution est gouvernée par l'occurrence d'événements tels que l'opération d'usinage sur une pièce, l'instruction traitée par un processeur, un interrupteur ouvert ou fermé .... D'habitude, les SED sont classiquement représentés par l'algèbre de Boole combinée à des formalismes états transitions décrits par les modèles usuels tels que les automates à états finis ou bien les réseaux de Petri.
- ❖ La partie continue symbolise l'environnement physique dans lequel évolue le système. Elle est constituée d'une infinité de valeurs décrivant le comportement d'un phénomène physique tel que la température d'une pièce ou d'un objet, la vitesse d'un mobile, le niveau dans un réservoir...etc. L'étude de ces systèmes fait appel à des outils

mathématiques capables de représenter la dynamique continue: équations différentielles, inclusions différentielles, méthodes d'état à forme matricielle...etc.

- ❖ L'interface ou bien l'interaction exprime la relation liant la partie discrète à la partie continue et vice versa. Le rôle de cette partie est de fournir des informations à la partie discrète respectivement à la partie continue sur l'évolution continue ou discrète. Sous l'effet d'un événement interne ou bien d'un événement externe, le système peut changer de configuration ou de mode.

De ce fait, les interactions entre les deux modèles se font par l'intermédiaire des événements. Au niveau de la partie discrète, un événement correspond à un franchissement de transition. Alors qu'au niveau des systèmes continus, il s'agit d'un dépassement de seuil d'une variable continue. Une transition d'un mode vers un autre mode a lieu lorsque certaines conditions logiques sont vérifiées.

#### I.4. Formalismes pour les systèmes dynamiques hybrides

Dans la démarche d'intégration des deux aspects au sein d'un même modèle trois approches ont été présentées. Elles dépendent du modèle dominant, c'est-à-dire du modèle à partir duquel est effectuée l'extension : approche continue, approche discrète et approche mixte sont les distinctions faites dans la littérature. Des états de l'art sur ces formalismes peuvent être trouvés dans [AKZ98],[Ant00],[LBR96],[VS00] et [ZaY01].

##### a. L'approche continue

Cette approche consiste à intégrer l'aspect événementiel au sein d'un formalisme de système continu. L'introduction des éléments de commutation dans le formalisme bond Graph [STS93],[QBC96] en est un exemple.

##### b. L'approche discrète

Cette approche consiste à intégrer l'aspect continu au sein d'un modèle à événement discrets l'intégration de l'aspect continu au sein d'un modèle à événement discrets comment les réseaux de pétri est un exemple de ce type d'approche. le champ d'application des RdP a été étendu aux systèmes continus par l'introduction de nouvelles classes de RdP dans lesquelles la notion de marquage qui prend ses valeurs dans  $\mathbf{R}$  est apparue [DA87]. Cette extension a permis la définition de réseaux de pétri hybride, intégrant un RdP continu et un RdP discret, permettant alors de représenter explicitement l'interaction entre la partie continue et la partie discrète par l'intermédiaire d'arcs. Les RdP différentiels ont introduit par la suite les places et transition différentielles [Dk96].

##### c. L'approche mixte

Cette approche combine explicitement des modèles de partie continue et discrètes dans une même structure, l'aspect hybride étant pris en charge dans l'interface entre les deux parties.

#### I.5. Exemples illustratifs

Comme mentionné précédemment, un système est qualifié d'hybride s'il implique des processus continus et des phénomènes événementiels. Par extension, nous pouvons qualifier d'hybrides des systèmes physiques dont certaines grandeurs varient très rapidement par

rapport aux autres. Une modélisation hybride pour cette catégorie de systèmes physiques est envisageable et donne souvent de meilleurs résultats par rapport à une modélisation événementielle. Nous allons présenter ici deux exemples de systèmes hybrides, le premier est un système de bacs impliquant un flux de liquide (continu) et le second est un système manufacturier traitant un flot de produits (discret approché par une description continue).

### Exemple I.1 :

Soit le système de bacs schématisé en (figure I.5). Ce système comporte deux bacs qui sont vidés en permanence à un débit de 5 et 7 litres/seconde respectivement. Les bacs sont aussi alimentés à tour de rôle, avec une vanne dont le débit est 12 litres/seconde. Cette dernière a deux positions, quand elle est en position A, elle alimente le bac 1 et elle alimente le bac 2 si elle est en position B. Pour commuter entre les positions A et B la vanne a besoin de 0.5 seconde. Pendant lesquelles, la vanne se comporte comme si elle est à son ancienne position.

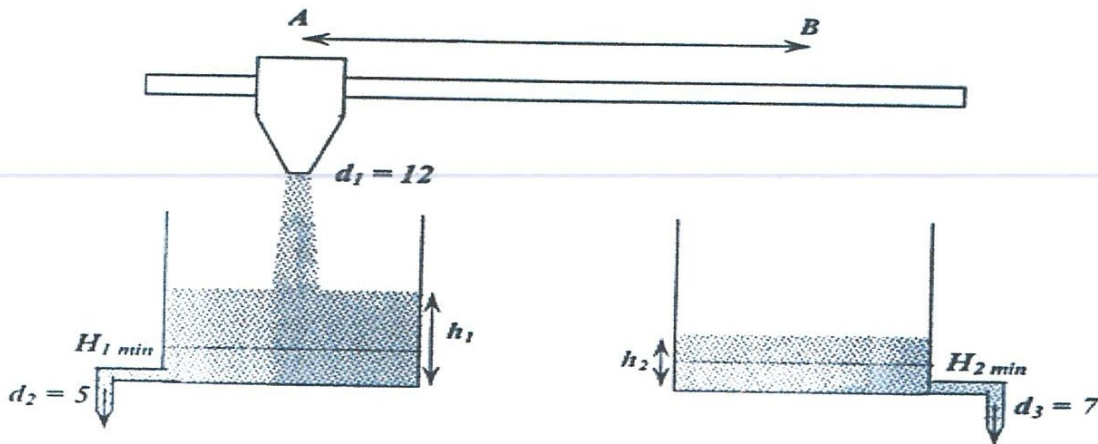


Figure I.5 : Système de bacs.

### Exemple I.2 :

La figure I.6 : Représente un système manufacturier comportant 3 machines et 2 stocks tampons. Ce système est utilisé pour satisfaire une demande périodique, dont la période est de 20 unités de temps. Les machines 1 et 2 restent opératoires en permanence, tandis que la machine 3 peut être arrêtée pour la régulation du taux de fabrication. Les actions de mise en arrêt et en fonctionnement de la machine 3 prennent 5 u.t. les machines ont des taux de fabrication de 10, 7, et 22 pièces/unité de temps, respectivement. Dans ce système le flux des pièces est supposé être un processus continu, tandis que l'état de la machine 3 ainsi que l'état de la demande sont des variables discrètes.



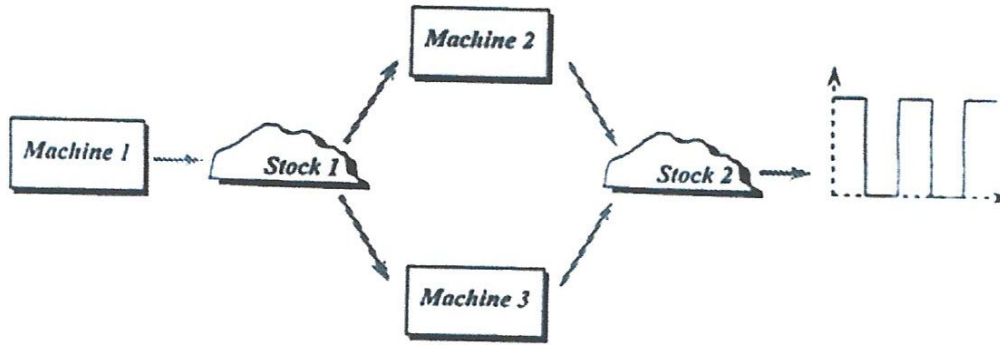


Figure I.6 : Système manufacturier.

### I.6. Les difficultés liées aux SDH

Van der Schaft et Schumacher énumèrent dans «*The complementary formalism for hybrid systems* » les principaux comportements types qu'il est possible de rencontrer en étudiant la trajectoire d'un système dynamique hybride :

- ❖ Le système arrive dans un état où il n'y a plus de trajectoires continues définies et où il n'y a pas de transitions vers un autre état. Le système est dit « *bloqué* » ;
- ❖ Les durées des trajectoires continues (i.e., le temps pendant lequel le système évolue entre deux sauts/commutations) deviennent de plus en plus petites. Le système est dit « *Zeno* » ;
- ❖ L'évolution du système rencontre plusieurs événements simultanés. Nous avons plusieurs changements d'état au même instant.
- ❖ Le système commute indéfiniment entre deux états, il est alors appelé « *livelock* ».
- ❖ L'ensemble des trajectoires est vaste et nous n'avons donc pas une solution unique.
- ❖ Un état du système commute sur lui-même indéfiniment.
- ❖ La partie continue tend vers l'infini dans un temps fini.

### I.7. Un modèle, pour quoi faire ?

L'utilisation de modèles prend une part de plus en plus importante dans les projets technologiques menés par les ingénieurs, que ce soit pour la définition de systèmes, leur conception, leur réalisation et même leur intégration (mise en œuvre), leur maintenance et leur exploitation.

Par définition, un modèle est une représentation d'un système : il peut ainsi permettre de décrire de façon non équivoque un système technologique. De sa définition à son exploitation, un système technologique va être appréhendé par différentes personnes (ingénieurs, etc..) sous des points de vue différents (conception, réalisation, maintenance, exploitation, etc.). Le passage d'une personne à l'autre doit alors se faire sans perte d'information, ce que permet l'utilisation d'un modèle. Ce problème est suffisamment central pour qu'un énorme effort soit consacré au niveau de la définition et de la mise en œuvre de normes et de standards industriels. Par exemple, la modélisation du fonctionnement demandé à un automate industriel est possible par l'utilisation du Grafcet, qui est un outil de modélisation dérivant des Réseaux de Petri.

Lors de la conception d'un nouveau système technologique, le cahier des charges exprime le comportement attendu du système. La question fondamentale est de garantir que le système qui a été conçu (sur le papier) remplit bien le cahier des charges (satisfaisant). L'approche traditionnelle de la conception d'un système consiste à le concevoir sur le papier, à le réaliser et à faire des expériences sur le système correspondant à des scénarios types afin de vérifier si son comportement est satisfaisant et s'il est nécessaire de l'améliorer. Cette approche pose plusieurs problèmes. Dans certains cas, il est impossible de réaliser des expériences sur le système (par exemple, systèmes spatiaux). Parfois, cela peut être dangereux si des informations manquent sur son comportement possible.

De façon plus courante, une telle approche est longue et coûteuse, ce que permettent de moins en moins les contraintes économiques. Une alternative est de définir le système technologique à l'aide d'un modèle. En plus de l'avantage vu précédemment, pour un scénario donné, un modèle permet en général de calculer numériquement les valeurs des variables d'état et de sortie, ce qui est plus court et plus économique que de les mesurer au cours d'une expérience. Cela est désigné par le terme de simulation.

La simulation permet dans une certaine mesure de tester si le comportement du système est satisfaisant et de mettre en évidence certains problèmes. Elle ne remplace pas complètement l'expérimentation qu'il est nécessaire d'effectuer si à l'issue de la simulation le comportement du système semble satisfaisant. Le problème de la simulation est que, même si le modèle est bon, on ne peut tester qu'un nombre limité de scénarios. Si le choix des scénarios types n'est pas pertinent par rapport à l'ensemble des scénarios auxquels sera confronté le système durant son existence, il est difficile de prévoir si le comportement du système sera satisfaisant dans tous les cas. Une alternative est de parfois pouvoir garantir qu'à partir d'une propriété du modèle, le modèle étant supposé bon, le comportement du système sera (ou non) satisfaisant pour une famille de scénarios. On parle d'analyse. L'analyse d'un système repose sur l'étude des propriétés mathématiques de son modèle.

## **I .8. Modèles hybrides**

### **I .8.1. Introduction**

C'est une étape nécessaire à toute étude qui ne se réduit pas à l'expérimentation. Sa qualité, mais aussi sa lisibilité et ses possibilités d'utilisation, sont essentielles. Nous présentons dans la suite trois outils utilisés pour la modélisation des SDH grâce, notamment, à leur aspect graphique. Il s'agit des automates hybrides, des réseaux de Petri hybrides et des réseaux de Petri mixtes.

### **I .8.2. Automates hybrides**

Un automate hybride se présente, fondamentalement, comme un automate à état fini avec des équations différentielles associées à ses états discrets. Ainsi, l'état global d'un automate hybride, à un instant donné, est défini par une paire  $(q, X)$ ,  $q$  représentant la situation (état discret) et  $X$  la valeur du vecteur d'état (au sens du continu). Cet état global se modifie pour deux raisons :

- ❖ Le franchissement d'une transition discrète, qui change brusquement la situation et souvent alors l'évolution de l'état continu, voire directement la valeur de cet état (saut).

Ce franchissement se produit sur occurrence d'un événement approprié et/ou si une condition devient vraie.

- ❖ L'évolution temporelle qui affecte  $X$  suivant l'équation différentielle associée à la situation courante. Cette situation reste inchangée.

L'avantage de cette représentation est sa simplicité. Les évolutions possibles d'un système hybride, elle sera à la base de l'analyse en vue d'établir des propriétés formelles. À chaque instant, un seul état discret est actif, donc il n'y a qu'un seul jeu d'équations (un seul modèle continu). Le caractère hybride se marque par le fait qu'un événement discret peut entraîner le changement d'état, donc la commutation du jeu d'équations, mais l'atteinte d'une valeur seuil sur une variable continue peut aussi entraîner un changement d'état discret.

### I.8.3. Réseaux de Pétri hybrides

Les réseaux de Pétri ont été largement utilisés pour représenter des systèmes à événements discrets. Une des difficultés que soulève l'exploitation des réseaux de Pétri est l'augmentation rapide de la complexité du modèle, induite par la possibilité d'avoir un nombre quelconque de jetons dans les places. Cela a conduit à introduire des réseaux de Pétri continus (RdPC) où le marquage devient un nombre réel positif. Des RdPC, on est passé aux réseaux de Pétri continus temporisés, puis aux réseaux de Pétri hybrides (RdPH), aux réseaux de Pétri lots et à d'autres extensions.

#### I.8.3.1. Extensions des réseaux de pétri pour modéliser les systèmes hybrides

De la même façon que les automates ont été étendus afin de représenter les systèmes dynamiques hybrides, plusieurs modèles construits à partir du formalisme des RdP ont été définis. Le premier pas en cette direction a été pris par Davide et al. en définissant les réseaux de pétri continus [DA87]. Depuis plusieurs travaux ont été consacrés à étendre les réseaux de pétri pour prendre en charge les systèmes hybrides. Une liste de ces travaux sur la page web [1].

##### a. Les Réseaux de Pétri continus

Les RdP continus [DA87] ont été développés pour représenter des flots continus et ainsi approximer un RdP discret afin de réduire les temps de calcul. Les jetons ne sont plus considérés comme des entiers mais comme des réels. Ainsi, lors du franchissement d'une transition, une quantité infinitésimale est prélevée des places en amont et arrive dans la place en aval. Le franchissement des transitions n'est plus instantané mais fonction d'une vitesse que nous pouvons assimiler à un débit. L'équation fondamentale d'un RdP est donc remplacée par :

$$\dot{M} = w \cdot v(t)$$

Où  $W$  est la matrice d'incidence du RdP et  $v(t)$  est le vecteur des vitesses instantanées de franchissement à l'instant  $t$ .

Plusieurs modèles de RdP continu ont été développés : le RdP continu à vitesses constantes [DA87], le RdP continu à vitesses variables [DA87], Ou les vitesses de franchissement des transitions dépendent de l'état du marquage des places en amont, le RdP continu asymptotique [le B9], ou les vitesses de franchissement sont constantes par morceaux et le RdP continu à

vitesse fonction du temps [DAD94], les vitesses sont soit une fonction continue par rapport au temps, soit une fonction continue par morceaux.

### b. Extension des réseaux de Pétri à la modélisation des systèmes hybrides

Le bail, Alla et David [LAD91], [LeB92] ont développé à partir des RdP continus les réseaux hybrides. Ces réseaux contiennent des places et des transitions discrètes (représentées graphiquement avec un contour simple) et continues (représentées avec contour double). Ainsi, la partie continue permet de modéliser les flux continus et la partie discrète les fonctionnements logiques (vanne ouverte/fermée). Au niveau de l'interface continu/discrète et afin de garantir que le marquage des places discrètes reste entier, tout arc connectant une place discrète et une transition continue doit avoir son arc réciproque.

Le modèle de la figure I.7 : représente le système décrit en exemple I.2 les places  $p_3$  et  $p_4$  représentent les niveaux de liquides dans les bacs 1 et 2 la transition  $T_3$ , par exemple, est commandée par la place  $p_1$  (position de la vanne). Quand le niveau de liquide dans le bac 2 atteint le niveau  $H_{2min}$  la vanne change de position (marquage de  $p_2$ ). ceci est un exemple de commande discrète d'un processus continu.

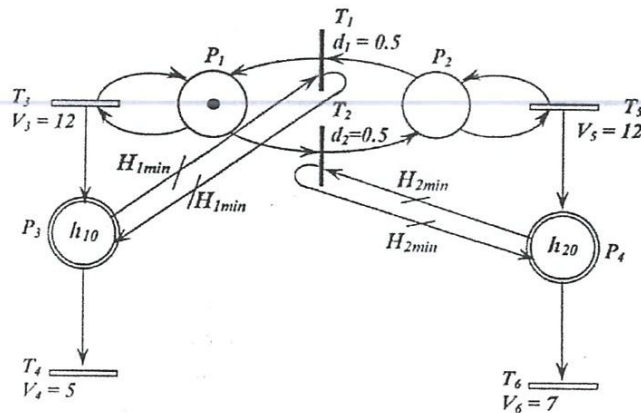


Figure I.7 ; Réseau de Pétri hybride exemple de système de bacs.

Ce formalisme a, par exemple, été utilisé pour modéliser un système d'approvisionnement en eau [AD98], un système de production hydraulique d'électricité [Dav91] et un système de fabrication de transistors [LeB92]. cependant, ces modèles ont principalement servi à évaluer les performances des procédés et n'ont donc pas été utilisés pour définir une politique de contrôle.

### c. Extension de RdP Hybride. les RdP lots

Demongodin, Aubry et prunet [DAP93] ont étendu les RdP hybrides afin d'introduire des retards et des accumulations, ce qui permet de modéliser les caractéristiques des lots et leurs transformations. Ceci s'effectue par l'attribution à des places (appelées place-lots) des paramètres et des lois d'évolution temporelle du système pendant la durée du marquage. D'autre part, les vitesses de transition appelées transition-lots sont fonction des informations liées aux places-lots en amont et en aval. Ce type de modèle est bien adapté à la modélisation de lignes de productions où il y a des convoyeurs.

#### d. Les RdP différentiels

Demongodin et koussoulas ont défini les RdP différentiels [DK98] où deux types de place et de transitions sont définies : discrets et différentiels. Ceci permet d'introduire un marquage réel (positif, négatif ou nul). Des vitesses de franchissement et des temporisations sont d'autre part attribuées aux transitions différentielles, ce qui permet de discrétiser le temps. Il est ainsi possible de représenter un modèle discrétisé ou partie continue est du premier ordre (les variables d'état correspondent aux places différentielles). Nous avons donc des variables continues linéaires par morceaux entre chaque pas de discrétisation.

#### I.8.4. Réseaux de Pétri mixtes

Ce modèle, dont la structure est basée sur les RdP discrets, intègre la dynamique continue de la manière suivante :

- ❖ Une place peut être associée à une équation ou à un jeu d'équations différentielles définissant le comportement continu. Il n'y a alors qu'une seule marque dans cette place, le comportement du modèle devant, dans chaque situation, être défini de manière unique.
- ❖ Une transition peut avoir une condition de franchissement dépendant des variables continues ; elle peut entraîner la création d'un événement, sans répercussion directe sur les conditions de franchissement.
- ❖ Un jeu d'équations continues peut aussi être associé à un marquage où au moins deux places sont actives.
- ❖ Les places peuvent par ailleurs correspondre seulement à des opérations discrètes.

### I.9. Simulation des SDH

#### I.9.1. Pour quoi simuler ?

À l'heure actuelle, les recherches concernant les méthodes et outils formels relatifs à l'analyse du comportement des systèmes hybrides et à la synthèse de leurs lois de commande en sont encore à leur début. La simulation reste donc un passage obligé lorsque l'on envisage :

- ❖ D'aider à la conception ou au dimensionnement d'une installation et de valider cette conception.
- ❖ D'optimiser des procédés existants.
- ❖ D'ajuster la recette de fabrication aux contraintes de production (disponibilité des ressources humaines et du procédé, respect des contraintes temporelles, vérification des objectifs de qualité).
- ❖ De valider le modèle élaboré (dans un but de prévision, par exemple) pour une installation existante.
- ❖ De valider la commande conçue pour une installation.

La simulation a ainsi pour objectif de détecter les erreurs dans les modèles élaborés avant d'implanter la commande correspondante. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'une simulation n'est qu'une représentation de la réalité et non la réalité elle-même... avec toutes les précautions que cela induit lors des premiers essais de fonctionnement !

Peu importe la modélisation choisie pour décrire le comportement dynamique de la partie continue ou celle utilisée pour décrire la partie discrète, les tâches inhérentes à la simulation d'un système hybride seront toujours les mêmes :

- ❖ Simuler le fonctionnement de la partie discrète.
- ❖ En déduire le ou les modèles actifs pour la partie continue.
- ❖ Résoudre les équations différentielles ou aux différences.

### I.9.2.Simulation des SDH

Les difficultés d'analyse et de synthèse des systèmes dynamiques hybrides font de leur simulation un outil d'étude privilégié. Les logiciels de simulation se sont développés depuis une trentaine d'années, initialement pour traiter des processus particuliers : physique nucléaire, convertisseurs statiques. Ces logiciels sont en évolution constante, ils tendent à simuler des systèmes généraux et sont passés aujourd'hui du domaine de la recherche aux applications industrielles. Les programmes de simulation sont très variés, ils dépendent souvent des modèles utilisés pour représenter le système dynamique hybride (Réseaux de Petri hybride, automate hybride,... etc.), de leur objectif (orienté vers une classe d'applications ou au contraire à vocation générale), de la manière dont ils ont été construits (à partir d'un logiciel orienté vers la simulation des systèmes discrets, ou d'un logiciel destiné à simuler des processus continus, ou encore directement pensés pour simuler un SDH).

De nombreux outils graphiques (logiciels) ont été développés pour modéliser les réseaux de Pétri. Nous nous sommes concentrés sur le logiciel *SIRPHYCO* (Simulateur de Réseau de Pétri Hybrides et Continus), c'est un Logiciel de simulation de réseaux de Pétri hybrides et continus, il est facile à utiliser, sa conception de la simulation est facile, rapide et simple c'est pour ça qu'on l'a choisi pour faire notre simulation.

### I.10. Conclusion

Nous avons organisé ce chapitre dans le but de donner une vue sur le principe de la modélisation des systèmes hybrides. En effet, nous avons commencé par la description des SDH en donnant les définitions de base, suivis de la structure des SDH. Nous avons consacré la suite aux différentes approches de modélisation utilisées dans le développement du modèle de ces systèmes. Dans ce volet, nous avons fait un tour d'horizon sur les automates hybrides, réseaux de pétri mixtes et nous nous sommes concentrés sur les réseaux de Pétri hybride. Ce dernier est l'outil exploité dans l'élaboration du modèle des SDH dans notre travail.

Enfin, ce chapitre présente une vue générale sur les systèmes dynamiques hybrides. Bien entendu, cet état de l'art n'est pas complet, mais nous avons essayé d'être plus au moins objectifs dans le contenu. Grâce à cette étude, nous avons retenu les réseaux de Pétri hybride comme outil de modélisation des SDH. L'objectif du prochain chapitre est de présenter les réseaux de pétri discrets et leurs extensions aux Réseaux de Pétri Continus et arrivons aux Réseaux de Pétri Hybrides.

Le chapitre suivant modélisation et simulation les systèmes hybride par réseaux de pétri hybride pour logiciel simulateur *SIRPHYCO*.

# Chapitre 2

## Modélisation des systèmes dynamique hybride par RdPH

## II.1. Introduction

La théorie des *réseaux de Pétri* est apparue en 1962, dans la thèse du chercheur *Carl Adam Pétri*, intitulée: "*Communication avec les automates*", présentée à l'université de Darmstadt en Allemagne. Ensuite un groupe de chercheurs dirigés par *Anatol W. Holt* du *Massachusetts Institute of technology MIT*, fut séduit par ce travail. C'est ce groupe qui jettera les bases, entre 1968 et 1976 de ce qui devint *les réseaux de Pétri*. Ils constituent un puissant outil graphique et mathématique de représentation de phénomènes complexes et de mécanismes séquentiels. Ils sont largement utilisés pour l'analyse et la modélisation des systèmes à événements discrets. Ils permettent la modélisation des processus complexes mettant en jeu des phénomènes de synchronisme et de choix. En effet, le marquage permet de représenter l'état d'un système dynamique discret ou continu. Généralement, on associe les places aux différentes variables d'état du système, tandis que les transitions sont associées aux événements susceptibles de modifier l'état du système.

Parmi les applications des réseaux de pétri, on peut citer : l'évaluation des performances systèmes automatisés, les protocoles de communication, la commande des ateliers de production,... organisation des entreprises et les interfaces homme-machine.

Depuis les années 70, les travaux sur les RdP ont connu un essor considérable. Aujourd'hui, la littérature sur les RdP est fort riche, et comprend en particulier de nombreux résultats analytiques.

## II.2.Rappels sur les réseaux de pétri

### II.2.1 Notions de base

#### II.2.2 Places, Transitions et Arcs

Un RdP est un graphe orienté  $R$  contenant deux types de nœuds : les places représentées par les cercles et les transitions représentées par des traits. Ces nœuds sont connectés par des arcs orientés. Mathématiquement un RdP peut être représenté par le triplet  $R = \langle P; Tr; W \rangle$  où:

- $P$  : ensemble fini non vide des places.
  - $T$  : ensemble fini non vide des transitions.
- Avec  $P$  et  $Tr$  sont des ensembles finis disjoints ( $P \cap Tr = \emptyset$ );
- $W$  matrices d'incidence ;

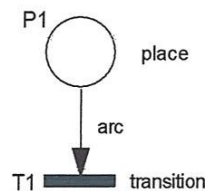


Figure II.1 : Un réseau de Pétri (place \_ transition \_ arc)

On dira qu'une transition est en amont (entrée) ou en aval (sortie) d'une place. une transition sans place d'entrée est une transition source .une transition sans place de sortie est une transition puits.



Une place peut être reliée par plusieurs arcs à une transition. Ces arcs multiples peuvent être représenté par un arc simple affecté d'une pondération égale au nombre d'arcs multiples (Figure II.2). Par défaut les arcs non pondérés sont considérés comme ayant un poids égal à 1.

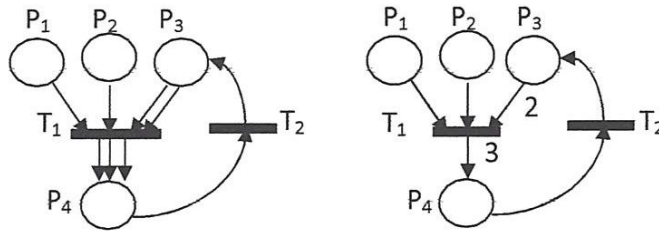


Figure II.2 : Réseau de Pétri à arcs multiples.

### II.2.3. Marquage

Un réseau de Pétri marqué est un couple  $\langle R; M_0 \rangle$  tel que:

- R est un réseau de Pétri,
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{R}$  est un marquage dit marquage initial.

Chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marques ou jetons. Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné. C'est un vecteur colonne de dimension égal au nombre de places dans le réseau. Le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur correspond au nombre de jetons contenus dans la place  $P_i$ .

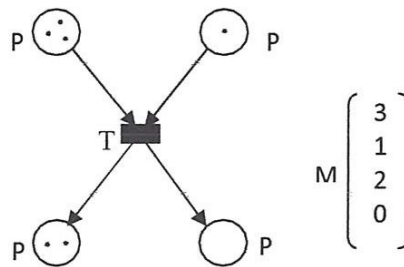


Figure II.3 : de marquages.

### II.2.4. Franchissement d'une transition

Une transition est franchissable (ou validée) lorsque toute place  $p_i$  située en amont de  $T_j$  contient un nombre de jetons au moins égal au poids attaché à l'arc allant de  $p_i$  vers  $T_j$ . Dans le cas d'un RdP ordinaire, il suffit que toutes les places d'entrée d'une transition contiennent au moins un jeton pour qu'elle soit franchissable. Une transition source est donc toujours validée.

➤ Une transition est franchissable ou sensibilisée, lorsque chacune de ses places d'entrée possède un nombre de jetons au moins égal au poids de l'arc qui la relie à cette transition.

➤ Le réseau ne peut évoluer que par franchissement d'une seule transition à la fois, celle-ci étant choisie "au hasard" parmi toutes celles qui sont sensibilisées à cet instant.

➤ Le franchissement d'une transition est un phénomène instantané, qui se traduit par les opérations indivisibles suivantes :

\* On enlève de chaque place d'entrée de la transition, un nombre de jetons égal au poids de l'arc qui la relie à celle-ci.

\* On ajoute à chaque place de sortie de la transition, un nombre de jetons égal au poids de l'arc qui la relie à celle-ci.

Ainsi, dans les cas de la figure II.7, après le tir de  $T_1$  et  $T_2$ , les deux transitions  $T_3$  et  $T_4$  sont franchissables, et il est donc possible de faire évoluer le réseau par franchissement "au hasard" de l'une d'elles. Pour revenir à l'état initial, nous avons tiré deux fois la transition  $T_4$ .

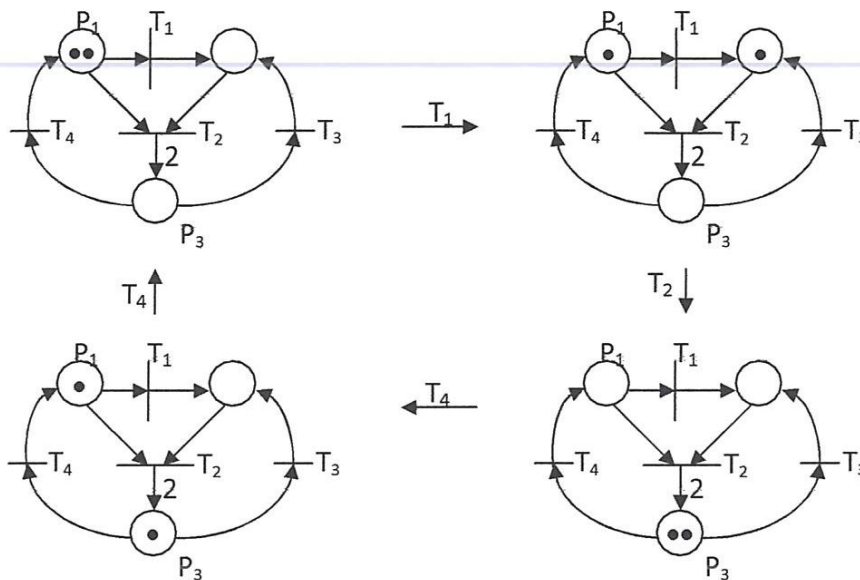


Figure II.7 : Exemple d'évolution d'un Rdph.

D'une manière plus formelle :

- ✓ Une transition  $T_j$  est sensibilisée si :  $\forall P_i \in \{\text{Places d'entrées de } T_j\}, m(P_i) \geq e_{ij}$ .
- ✓ Le tir de la transition  $T_j$  à partir du marquage  $M_k = [m_k(P_1), \dots, m_k(P_N)]$  se traduit par un nouveau marquage  $M_{k+1} = [m_{k+1}(P_1), \dots, m_{k+1}(P_N)]$  tel que :  $m_{k+1}(P_i) = m_k(P_i) - e_{ij} + o_{ij}$ .

## II.4. Structures particulières

### II.4.1. Graphe d'état

Un réseau de pétri non marqué est un graphe d'état si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie (voir figure II.8.a).

Dans le cas d'un graphe d'état ordinaire marqué, le nombre de jetons est constant.

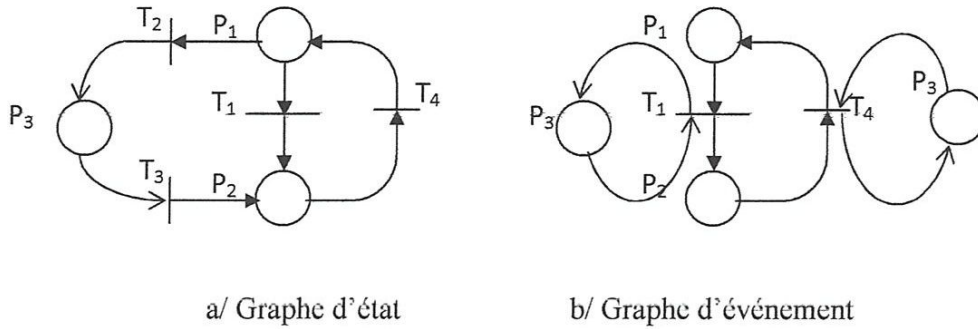


Figure II.8 : Graphe d'état et graphe d'événement.

**II.4.2. Graphe d'événement**

Un réseau de pétri est un graphe d'événement si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie (voir figure II.8.b).

Un graphe d'événement est un dual d'un graphe d'état.

**II.4.3. Réseau de pétri sans conflit**

Un réseau de pétri sans conflit est un réseau de pétri dans lequel toute place a au plus une transition de sortie.

Un conflit (structurel) correspond à l'existence d'une place  $P_i$ , qui a au moins deux transitions de sortie  $T_j$  et  $T_k$ . On notera ce conflit par le doublet formé d'une place et d'un ensemble de transitions :  $\langle P_i, \{T_j, T_k, \dots\} \rangle$ .

Exemple II. 1

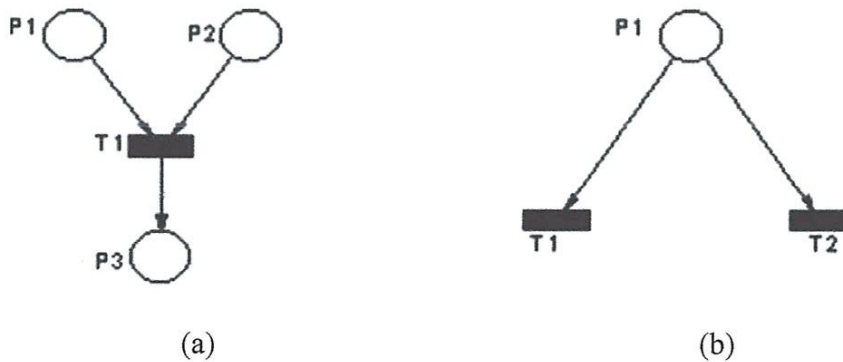


Figure II.9: RdP (a) Sans conflit, (b) Avec conflit.

**II.4.4. Réseau de pétri à libre choix**

Un réseau de pétri à libre choix est un réseau de pétri dans lequel pour tout conflit  $\langle P_i\{T_j, T_k, \dots\} \rangle$  aucune des transitions  $T_j, T_k, \dots$  ne possède une autre place d'entrée que  $P_i$ .

Un réseau de pétri à libre choix étendu est un réseau de pétri dans lequel pour tout conflit  $\langle P_i\{T_j, T_k, \dots\} \rangle$  toutes les transitions  $T_j, T_k, \dots$  ont le même ensemble de places d'entrées.

#### II.4.5. Réseau de pétri simple

Un réseau de pétri simple est un réseau de pétri dans lequel chaque transition ne peut être concernée que par un conflit au plus.

Remarque :

Si on considère les ensembles des structures de réseaux de Pétri précédentes, nous constatons la relation d'ordre suivante :

$\{\text{RdP simple}\} \supset \{\text{RdP à libre choix}\} \supset \{\text{RdP sans conflit}\} \supset \{\{\text{Graphe d'état}\} \cup \{\text{Graphe d'événement}\}\}$ .

#### II.4.6. Réseau de pétri pur

Un réseau de pétri pur est un réseau de pétri dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui est également place de sortie de cette même transition.

Propriété :

Tout réseau de pétri impur peut être transformé en un réseau de pétri pur (figure II.10).

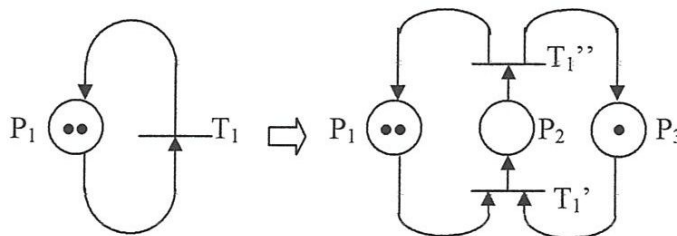


Figure II.10 : Réseau de pétri sans boucle

Un réseau de pétri sans boucle est tel que s'il existe une place  $P_i$  qui est à la fois place d'entrée et place de sortie d'une transition  $T_j$ , alors  $T_j$  a au moins une autre place d'entrée.

Remarque :

Si on considère les ensembles des réseaux de Pétri pur et sans boucle, nous constatons l'inclusion suivante :

$\{\text{RdP sans boucle}\} \supset \{\text{RdP pur}\}$ .

#### II.4.7 RdP généralisés

Un RdP généralisé est un RdP dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs (Figure. II.11).

- ❖ Si un arc  $(P_i, T_j)$  a un poids  $k$  : la transition  $T_j$  n'est franchie que si la place  $P_i$  possède au moins  $k$  jetons. Le franchissement consiste à retirer  $k$  jetons de la place  $P_i$ .
- ❖ Si un arc  $(T_j, P_i)$  a un poids  $k$  : le franchissement de la transition rajoute  $k$  jetons à la place  $P_i$ .
- ❖ Lorsque le poids n'est pas signalé, il est égal à un par défaut.

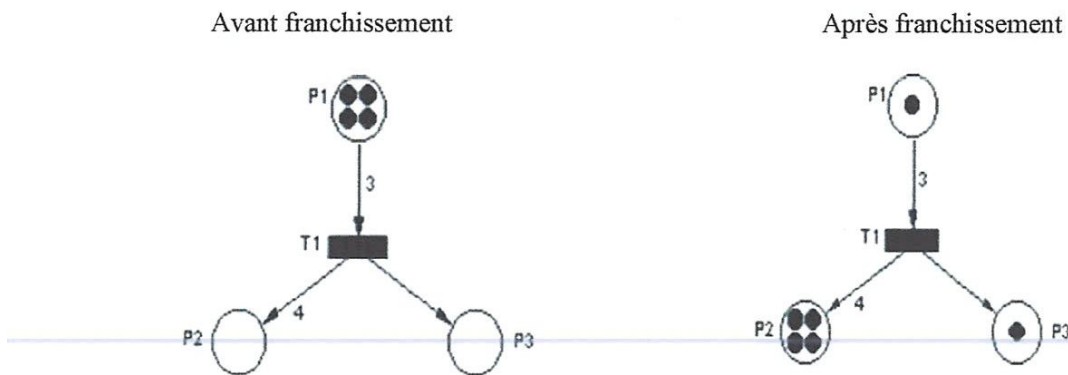


Figure II.11: RdP généralisé.

#### II.4.8 RdP à capacités

Un RdP à capacités est un RdP dans lequel des capacités (nombres entiers strictement positifs) sont associées aux places. Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place  $P_i$  dont la capacité est  $\text{cap}(P_i)$  n'est possible que si le franchissement ne conduit pas à un nombre de jetons dans  $P_i$  qui est plus grand que  $\text{Cap}(P_i)$  (Figure. II.12).

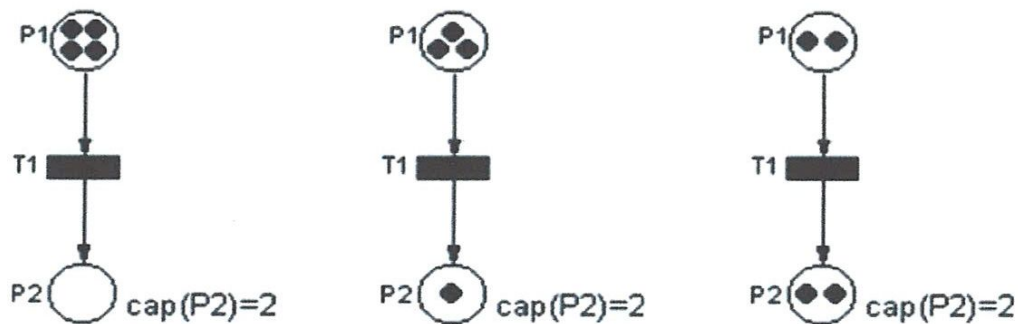


Figure II.12: RdP à capacités.

Le franchissement de  $T_1$  conduit à 3 jetons dans  $P_2$  d'où  $T_1$  ne peut plus être franchie.

### II.4.9 RdP à priorités

Dans un tel réseau si on atteint un marquage tel que plusieurs transitions sont franchissables, on doit franchir la transition qui a la plus grande priorité (Figure. II.13).

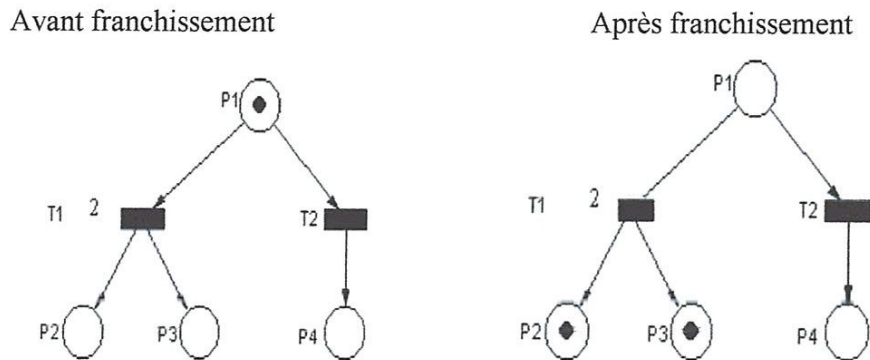


Figure II.13: RdP à priorité.

## II.5 Algèbre Linéaire

### II.5.1 Notations et définitions

✓ " pré (  $P_i, T_j$  )" est le poids "k" de l'arc reliant une place à une transition.

$$\text{pré} (P_i, T_j) = \begin{cases} k & \text{si l'arc } (P_i, T_j) \text{ existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

✓ " post (  $P_i, T_j$  )" est le poids "k" de l'arc reliant une transition à une place .

$$\text{post} (P_i, T_j) = \begin{cases} k & \text{si l'arc } (T_j, P_i) \text{ existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

✓ on appelle "matrice d'incidence avant" :

$$W^- = [\text{pré}(p_i, T_j)]$$

✓ on appelle "matrice d'incidence arrière" :

$$W^+ = [\text{post}(p_i, T_j)]$$

✓ on appelle "matrice d'incidence" :

$$W = W^+ - W^-$$

Dans ces matrices les transitions représentent les colonnes et les places représentent les lignes.

### II.5.2 Equation fondamentale ou équation d'état

- ❖ Soit  $S$  une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage  $M_i : M_i [S > M_k$
- ❖ Soit  $\underline{S}$  le vecteur caractéristique de la séquence  $S$  : c'est un vecteur de dimension  $m$  égale au nombre de transitions dans le réseau. Sa composante numéro  $j$  correspond au nombre de fois où la transition  $T_j$  est franchie dans la séquence  $S$ .

**Exemple II. 2:** si  $S = T_2T_4T_1T_4T_2$  alors  $S = [1, 2, 0, 3]^T$

- ❖ Si la séquence de franchissement  $S$  est tel que  $M_i [S > M_k$  alors l'équation fondamentale correspondante s'écrit.

$$M_k = M_i + W * \underline{S} \tag{II.1}$$

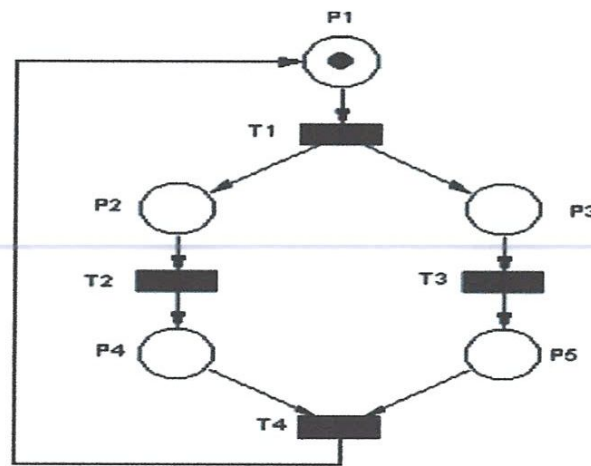


Figure II.14: RdP (équation fondamentale).

Soit la séquence  $S = T_2$  donc  $S = [0, 1, 0, 0]^T$

$$W^- = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

- La matrice d'incidence avant -

$$W^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

- La matrice d'incidence arrière -

$$W = W^+ - W^- = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{matrix}$$

- La matrice d'incidence -

L'équation fondamentale correspondante à cette séquence est :

$$M_k = M_i + W * \underline{S}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M_i$                        $W$                        $\underline{S}$                        $M_k$

## II.6. Modélisation du temps dans les réseaux de pétri

### II.6.1 RdP temporisés

Les RdP temporisés permettent de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Par exemple, il peut s'écouler une certaine durée entre le début d'une opération et la fin de cette opération. Si une marque dans une certaine place indique que cette opération est en cours, un RdP temporisé permettra de rendre compte de cette durée. Les RdP temporisés sont utiles pour l'évaluation de performances des systèmes. Il y a principalement deux façons de modéliser la temporisation : Soit la temporisation est associée à la transition (on dira que l'on a un RdP T-temporisé), soit la temporisation est associée à la place (on dira que l'on a un RdP P-temporisé). Cependant, les deux modèles sont équivalents et on peut passer de l'un à l'autre.

### II.6.2 Réseaux de Pétri P-temporisés

On associe une temporisation (valeur rationnelle positive) à chaque place. On notera  $d_i$  la temporisation de la place  $P_i$ , lorsqu'une marque arrive dans une place temporisée, on dit qu'elle est indisponible pendant un temps  $d_i$ . Quand le temps est écoulé, la marque devient disponible. On parle de fonctionnement à vitesse maximale (Figure II.15:a).



trouvent leur origine dans le modèle RdP T-temporel, que nous allons présenter au paragraphe suivant.

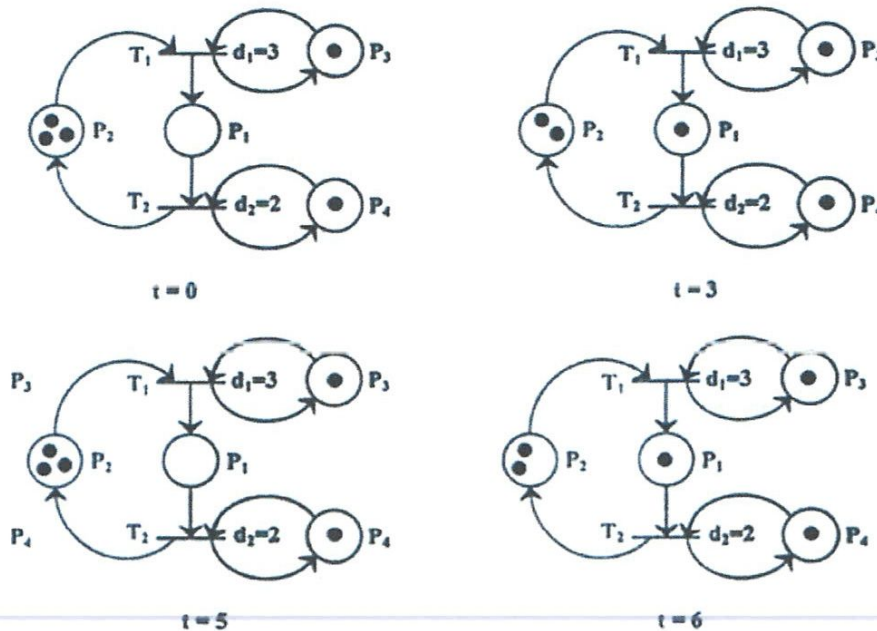


Figure II.15: b. Le fonctionnement à vitesse maximale du RdP T-temporisé.

Dans la suite, nous utilisons le mot RdP temporisé pour désigner un RdP T-temporisé.

## II.7. Structure fondamentales pour la modélisation des systèmes par RdP

Les RdP permettent de modéliser un certain nombre de comportements importants dans les systèmes : le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, la mémorisation et la lecture d'information, la limitation d'une capacité de stockage. Dans cette section, sont présentées les différentes structures apparaissant dans un réseau de Pétri reproduisant ce type de comportements.

### a) Parallélisme

Le parallélisme représente la possibilité que plusieurs processus évoluent simultanément au sein du même système. On peut provoquer le départ simultané de l'évolution de deux processus à l'aide d'une transition ayant plusieurs places de sortie.

En voici quelques exemples :

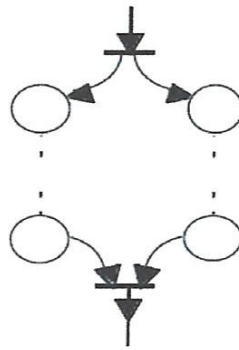


Figure II.17: Parallélisme.

### b) Synchronisation

**Mutuelle** La synchronisation mutuelle ou rendez-vous permet de synchroniser les opérations de deux processus. Un exemple est donné Figure II.18. Le franchissement de la transition  $T_7$  ne peut se faire que si la place  $P_{12}$  du processus 1 et la place  $P_6$  du processus 2 contiennent chacun au moins une marque. Si ce n'est pas le cas, par exemple la place  $P_{12}$  ne contient pas de marque.

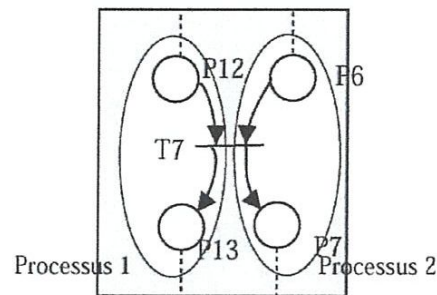


Figure II.18: Synchronisation mutuelle.

Le processus 2 est "bloqué" sur la place  $P_6$  : il attend que l'évolution du processus 1 soit telle qu'au moins une marque apparaisse dans la place  $P_{12}$ .

**Sémaphore** Les opérations du processus 2 ne peuvent se poursuivre que si le processus 1 a atteint un certain niveau dans la suite de ses opérations. Par contre, l'avancement des opérations du processus 1 ne dépend pas de l'avancement des opérations du processus 2.

### c) Partage de ressources

Cette structure va modéliser le fait qu'au sein du même système plusieurs processus partagent une même ressource. Une marque dans la place  $P_i$  représente une ressource mise en commun entre le processus 1 et le processus 2.

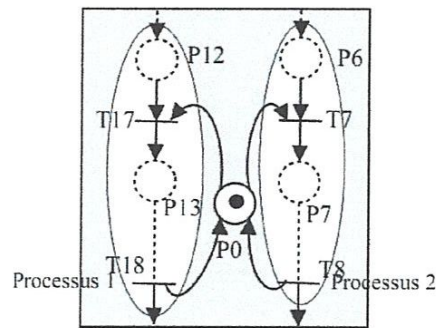


Figure II.19 : Partage de ressource

#### d) Mémorisation

- Du franchissement d'une transition, c'est-à-dire de l'occurrence d'un événement : Figure II.20, le franchissement de la transition  $T_{12}$  n'est possible que s'il y a une marque dans la place  $P_2$ . Seul le franchissement de la transition  $T_1$  peut mettre une marque dans la place  $P_2$
- D'un nombre, par exemple de la quantité d'une ressource donnée dans un stock.

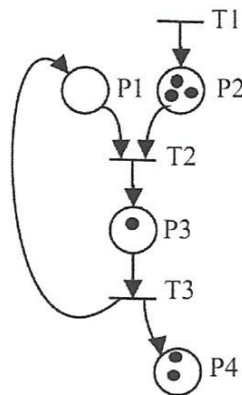


Figure II.20: Mémorisation

#### e) Lecture

Figure II.21, le franchissement de la transition  $T_7$  est lié au marquage de  $P_{23}$ . Lors du franchissement, son marquage n'est pas modifié. On fait alors "une lecture" de ce marquage.

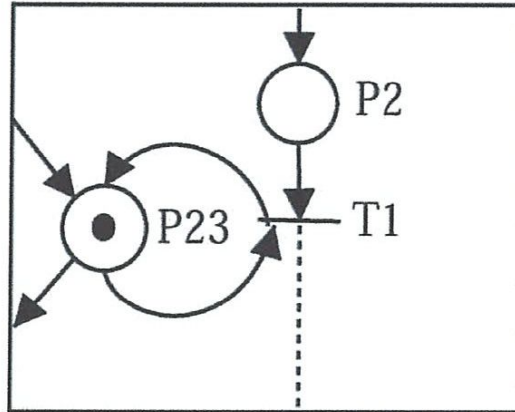


Figure II.21: Lecture

### f) Capacité limité

Dans la figure II.22, le franchissement de  $T_1$  n'est possible que si la place  $P_2$  contient moins de deux marques.

La place  $P_3$  modélise le nombre de places libres dans  $P_2$ .

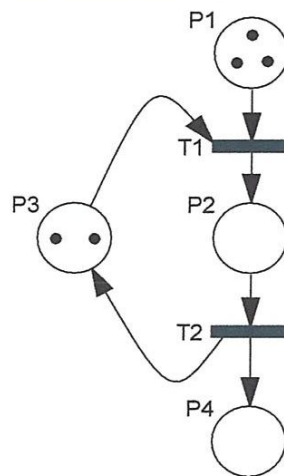


Figure II.22 : RdP à Capacité limitée

## II.8. Les RdP du discret aux Continu

### II.8.1 Réseaux de Pétri discret

#### II.8.1.1 Introduction

Dans un RdP, le marquage d'une place comparable à une variable booléenne peut correspondre à l'état d'un appareil, par exemple une machine est disponible ou n'est pas disponible. Un marquage peut également être associé à un nombre entier, par exemple le nombre de pièces dans le stock d'entrée d'une machine (Figure II.23).

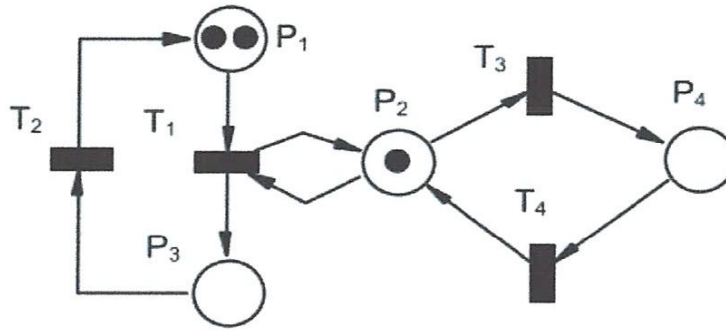


Figure II.23: Exemple d'un Réseau de Pétri discret

De manière plus formelle, un Réseau de Pétri est un  $PN = (P, T, A, W, M_0)$ , où

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  est un ensemble fini de places,  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$  un ensemble fini de transitions,  $A(P, T)$  ou  $(T, P)$  est l'ensemble fini des arcs,  $W : A \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  la fonction poids des arcs et  $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$  est le marquage initial du réseau.

De plus, les Réseaux de Petri temporisés sont bien adaptés pour évaluer quantitativement un système. Cependant un modèle peut contenir un grand nombre de marques ou bien on peut y trouver des durées n'ayant pas le même ordre de grandeur. Par exemple, le temps de production d'une pièce est en général beaucoup plus court que le temps moyen entre deux pannes d'une machine. Dans ce cas le nombre d'états accessibles explose. Ce phénomène constitue une limite pratique à l'utilisation des réseaux discrets. Cela a conduit à introduire la notion de réseaux de Petri continus (RdPC) où le marquage devient un nombre réel positif. Les réseaux de Petri continus étendent le marquage dans l'espace d'état des réels en fonction du taux de franchissement des transitions.

## II.8.2 Réseaux de Pétri Continues

### II.8.2 .1 Introduction

Le Réseau de Pétri continu défini comme un cas limite de réseau discret est un modèle dans lequel les nombres de marques dans les places sont des nombres réels. Ce modèle qui s'apparente aux Réseaux de Petri temporisés sur les transitions a été introduit en considérant que le franchissement d'une transition se fait de façon continue avec une certaine vitesse  $v(t)$ , (Figure II.24.). Cela signifie qu'entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ , une quantité de marque  $vdt$  est retirée aux places en amont de la transition et une quantité de marques  $vdt$  est ajoutée aux places en aval de cette transition (cas des réseaux ordinaires).

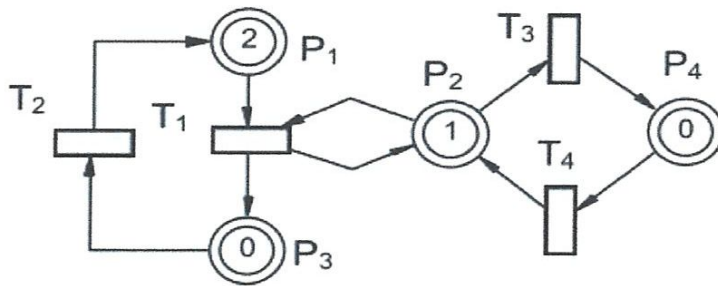


Figure II.24: Exemple d'un Réseau de Pétri continu.

Dans cet état les transitions  $T_1$  et  $T_3$  sont validées, c'est-à-dire franchissables, puisque les marquages de leurs places d'entrée ne sont pas nuls. Par exemple, la transition  $T_1$  peut être franchie mais on définit maintenant une quantité de franchissement qui est un nombre réel compris dans l'intervalle continu  $[0, 1]$  ; la valeur maximale  $1$  dans ce cas correspond à  $m_2$  (qui est le minimum de  $m_1$  et  $m_2$ ). Pour une quantité de franchissement  $0.2$  on atteint le marquage  $(1.8, 1, 0.2, 0)$ .

Dans un Réseau de Petri continu, une séquence de franchissements  $S$  à partir d'un marquage  $M$  implique une trajectoire correspondant à une suite de marquages successifs.

Le vecteur caractéristique  $s$  d'une trajectoire est un vecteur dans lequel chaque composante est un nombre réel correspondant à une quantité de franchissements de la transition correspondante. Donc, la relation fondamentale pour un réseau de Pétri continu est identique à la relation fondamentale pour un réseau discret. Donc, toute propriété des réseaux discrets basée sur cette relation peut être transposée aux réseaux continus.

### II.8.2.2 Les Réseaux de Pétri Continu autonomes

Les RdPC est un outil de modélisation des systèmes dynamique dont toutes les variables d'état sont continues, positives et linéaires par morceaux. Ils constituent aussi une bonne approximation pour la modélisation des systèmes dynamiques à événements discrets ou les marquages sont grands. Pour illustrer l'idée de cette approximation, considérons l'exemple suivant.

#### Exemple II.3:

La figure II.25: a schématise une station de travail comportant une machine  $M$  de capacité unitaire, La machine puise les pièces dans un stock  $S1$  de capacité  $C1$  et alimente un deuxième stock  $S2$  de capacité  $C2$ . Ce système possède  $2(1 + C1)(1 + C2)$  états, ce nombre peut très rapidement exploser en fonction des valeurs numériques de  $C1$  et  $C2$ .

Le RdP de la figure II.25.b, qui modélise le système pour  $C1 = C2 = 6$ , possède 98 marquages accessibles. Il peut atteindre 242 marquages pour  $C1 = C2 = 10$ . Comme mentionné précédemment, il est pratiquement difficile d'analyser un RdP dont le nombre d'états atteignables est important. C'est pour pallier à ce problème que les RdP continus ont été définis.

Le fonctionnement de ce modèle est clairement exprimé à travers l'équation fondamentale du RdPC.

L'équation fondamentale du RdP discret qui est :

$$M_K = M + W \cdot \underline{S}$$

Devient pour un RdPCC :

Le marquage initial  $M_0$  est un vecteur de nombres réels positifs. Sachant que  $M(t)$  représente le marquage du RdP à l'instant  $t$ , le marquage initial peut être noté  $M(0) = M_0$ . Quant à la vitesse  $V(T_j) = V_j$  elle correspond à la vitesse maximale de franchissement de  $T_j$ . Cette évolution est donnée par la relation fondamentale suivante :

$$\dot{M} = W \cdot V(t)$$

OU  $W$  est la matrice d'incidence du égale à (Post-Pré) et  $V(t)$  est le vecteur des vitesses de franchissement instantanées des transitions.

A titre d'illustration considérons les deux exemples suivants :

**Exemple II.4:**

Considérons un système de réservoirs constitué de deux réservoirs et de Troie vanne, comme illustré en figure II.26.a. Les vannes sont caractérisées par leur débit  $V_1, V_2$  et  $V_3$  (litres/seconde), et sont supposées être ouvertes en permanence.

**Exemple II.5:**

un système manufacturier comporte trois machines  $M_1, M_2$ , et  $M_3$  dont les vitesses de traitement des pièces sont respectivement  $V_1, V_2$  et  $V_3$  (pièces/minute). le système comporte aussi deux stocks tampons  $s_1$  et  $s_2$  pour l'attente des disponibilités (figure II.26).

Les deux systèmes décrits en exemple II.4 et II.5 sont modélisés par le RdPCC de la figure II.26.c. pour les valeurs numériques suivantes :  $V_1 = 3$  et  $V_2 = 4$  et  $V_3 = 6$ .

Les marquages des places  $p_1$  et  $p_2$  représentent, les quantités de liquide dans les réservoirs ou le nombre des pièces dans les stocks. Les vitesses associées aux transitions du RdPC modélisent les débits des vannes ou les vitesses des machines.

A l'instant initial, les trois transitions sont fortement validées, une transition est dite fortement validée si toutes ses places d'entrée sont marquées, et elles sont franchies à leurs vitesses maximales. Le marquage des places  $p_1$  et  $p_2$  figure II.27 évolue suivant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m_1(t + dt) &= m_1(t) + (V_1 - V_2) \cdot dt \\ m_2(t + dt) &= m_2(t) + (V_2 - V_3) \cdot dt \end{aligned}$$

Puisque  $M_0 = [20 \ 15]^T$

- $m_1(t) = 20 - t$
- $m_2(t) = 15 - 2t$

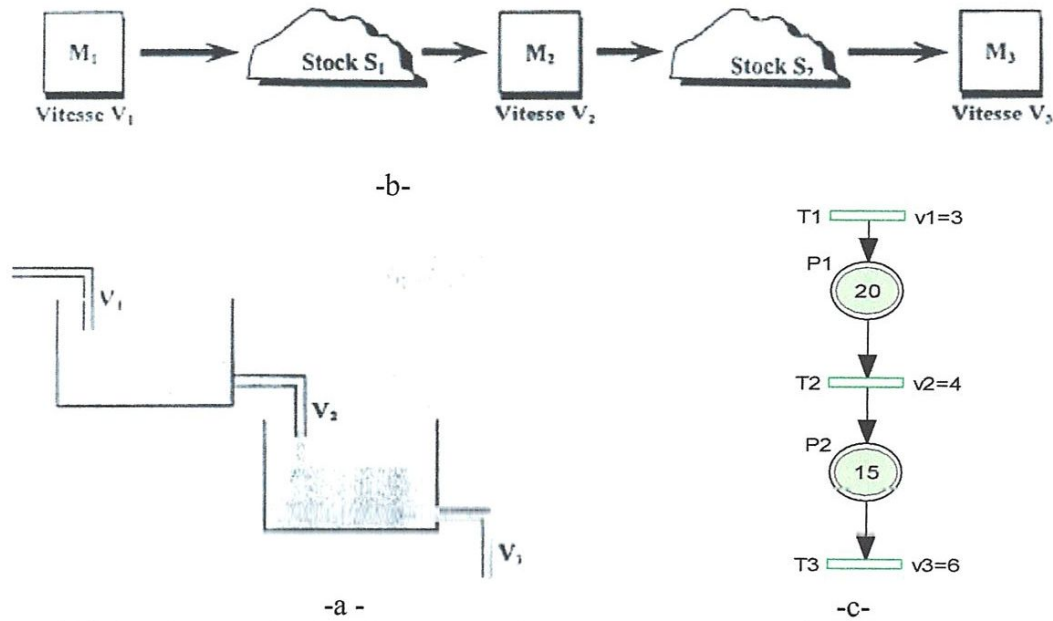


Figure II.26: a. Système hydraulique .b. système manufacturier-c-RdPC modèles des systèmes en figure a et b.

Ces équation restent vraies aussi longtemps que  $m_1 > 0$  et  $m_2 > 0$ . A  $t=7.5s$   $m_2$  s'annule, ce qui empêche  $T_3$  d'être franchie à sa vitesse maximale. Mais puisque la place  $p_2$  est toujours alimentée à une vitesse de litres /s par la transition  $T_2$ ,  $T_3$  est aussi franchie avec cette même vitesse, qui n'est plus sa vitesse maximale.  $T_3$  Est dite faiblement validée (sa seule place d'entre n'est pas marquée mais elle est alimentée). A  $t=20s$   $m_1$  s'annule, ce qui empêche  $T_2$  d'être franchie à sa vitesse maximale, elle sera franchie à la vitesse de  $T_1$ .

Par convention les vitesses maximales de franchissement sont notées par des majuscules alors que les vitesses instantané de franchissement par des minuscules.

Le vecteur des vitesses instantané du RdPCC en figure II.26.c est donné par :

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} [v_1 & v_2 & v_3]^T & \text{Pour } 0 \leq t \leq 7.5 \\ [v_1 & v_2 & v_2]^T & \text{pour } 7.5 \leq t \leq 20 \\ [v_1 & v_2 & v_1]^T & \text{Pour } t \geq 20 \end{cases}$$

L'évolution de marquage en fonction du temps est illustrée en figure. II.27

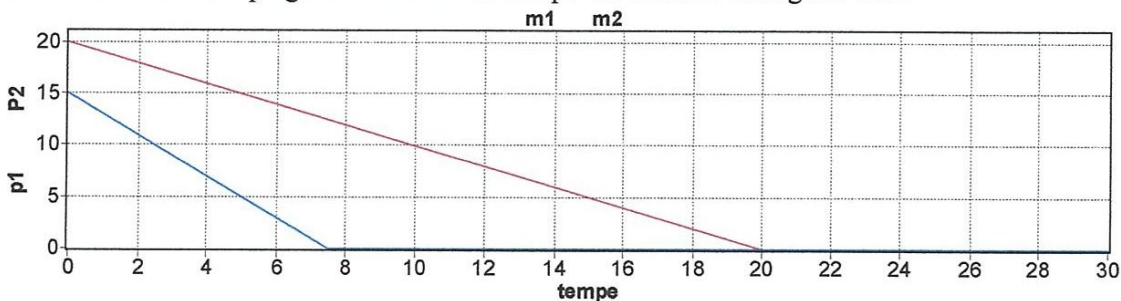


Figure II.27 : illustration du d'évolution du comportement du RdPCC en figure II.26.c

Remarque :

Le diagramme de marquage  $p_1$  (réservoir 1 ou stock 1) rouge.



Le diagramme de marquage p2 (réservoir 2 ou stock 2) bleu.

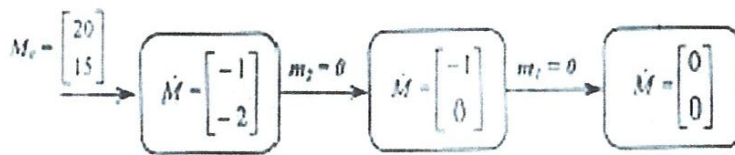


Figure II.28: graphe d'évolution du RdPCC en figure II.26. c

L'état d'un RdPCC est caractérisé soit par le vecteur des franchissements instantanés ou, par dualité, par les dérivés des marquages. Le seul événement susceptible de changer l'état d'un RdPCC est que le marquage d'une place devient nul. Le comportement de ce modèle est généralement représenté par un graphe d'évolution dont les nœuds correspondent aux vecteurs des dérivés des marquages et les arcs sont étiquetés par les places dont l'annulation de marquage a causé le changement d'état. Il est évident que chaque état correspond à un macro-marquage.

Une des propriétés les plus importantes du modèle RdPCC est que son graphe d'évolution a toujours un nombre fini des nœuds même si le RdPCC est non borné. À titre d'illustration le graphe d'évolution d'un RdPCC en figure II.26.c est représenté en figure II.28. Le graphe d'évolution d'un RdPCC est facilement assimilable à un automate hybride, où les variables d'état sont données les marquages des C-places et les gardes des transition sont de la forme  $m_i = 0$ . nous avons ici un modèle de système continu qui a un comportement événementiel.

### II.8.3 Les autres modèles continus

#### II.8.3.1 Le RdP Continu à Vitesses Variables

Dans ce modèle la vitesse maximale de franchissement d'une transition dépend du marquage des places en amont de la transition et d'une valeur constante associée à la transition. Les marquages et les vitesses sont donc des fonctions continues du temps, alors que dans le RdP continu à vitesse constante cette propriété est vraie pour les marquages mais pas pour les vitesses qui sont simplement constantes par morceaux. Ce modèle fournit une meilleure approximation du RdP discret, en particulier lorsque le nombre de marques est petit, mais les simulations sont longues. Ici, le comportement événementiel est perdu, il faut discrétiser le temps pour faire une simulation.

#### II.8.3.2 Le RdP Continu Asymptotique

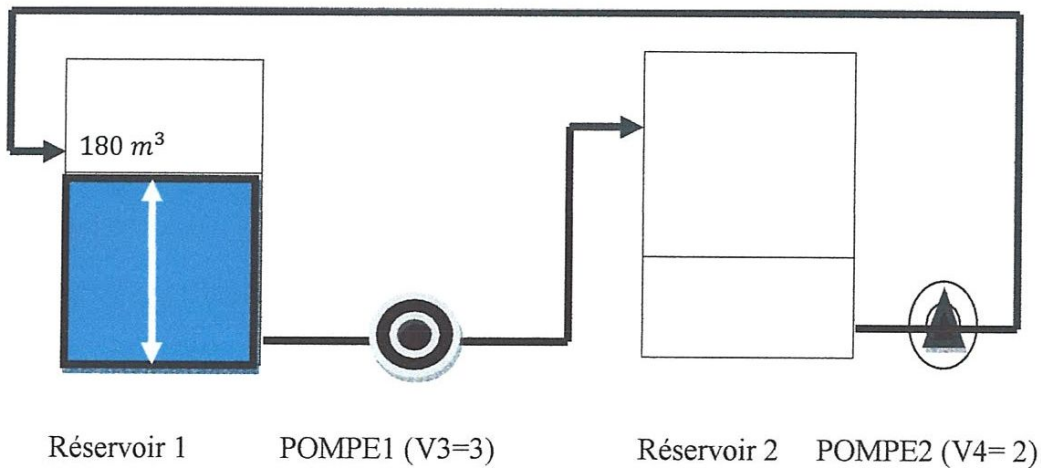
Il est possible de distinguer plusieurs phases d'évolution du marquage. Chaque phase est caractérisée par une période durant laquelle le vecteur des vitesses de franchissement est constant. La vitesse de franchissement d'une transition est alors constante par morceaux, et l'évolution du marquage est donc composée de plusieurs phases de fonctionnement. Il s'agit de l'approximation du RdP Continu à Vitesses Variables, mais la simulation est facilitée.

**Exemple II. 1: des réservoirs d'un système de recyclage**

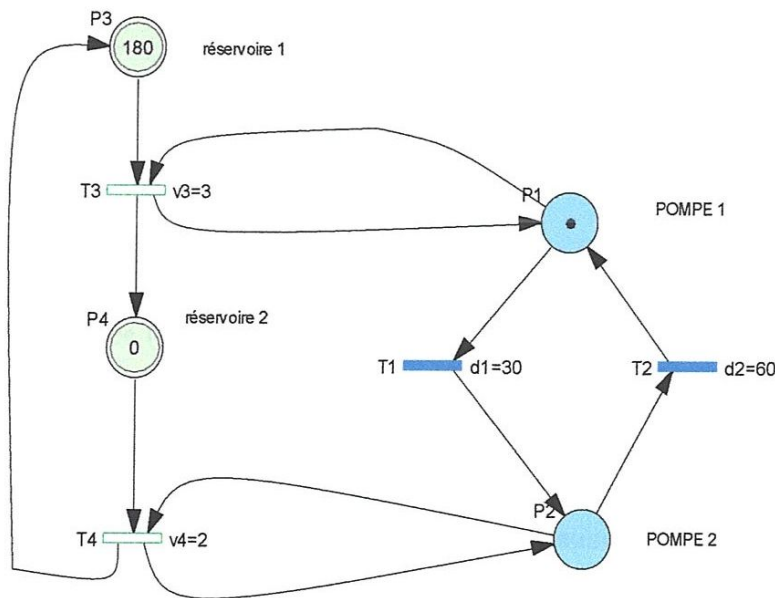
Représenté sure la figure un régulateur de volume d'eau entre de réservoirs d'un système de recyclage d'eau .initialement le réservoir 1 contient  $180 m^3$  d'eau froide, l'écoulement du l'eau du réservoir 1 vers le réservoir 2 s'effectue par la pompe 1 qui fonction de vitesse  $v3= 3$  et qui est disponible durant 30 unités de temps .alors que le transfert d'eau chaude du réservoir 2 vers le réservoir 1 s'effectue à travers la pompe 2 qui fonction de vitesse  $V4=2$  et qui est disponible durant 60 unités de temps.

L'évolution du marquage des places  $m(p1)$ ,  $m(p2),m(p3)$  , $m(p4)$ du RdPH du système pour un marquage initial.

$$M_0 = [M_0^D, M_0^C] \quad \text{Avec } M_0 = [1,0] \text{ et } M_0 = [180,0]$$



(a)Système de recyclage d'eau.

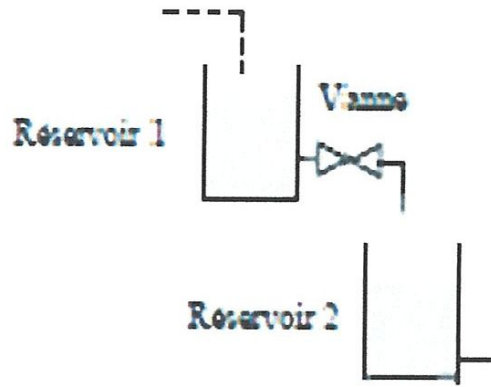


(b)Réseaux de pétri hybride de Système de recyclage d'eau.

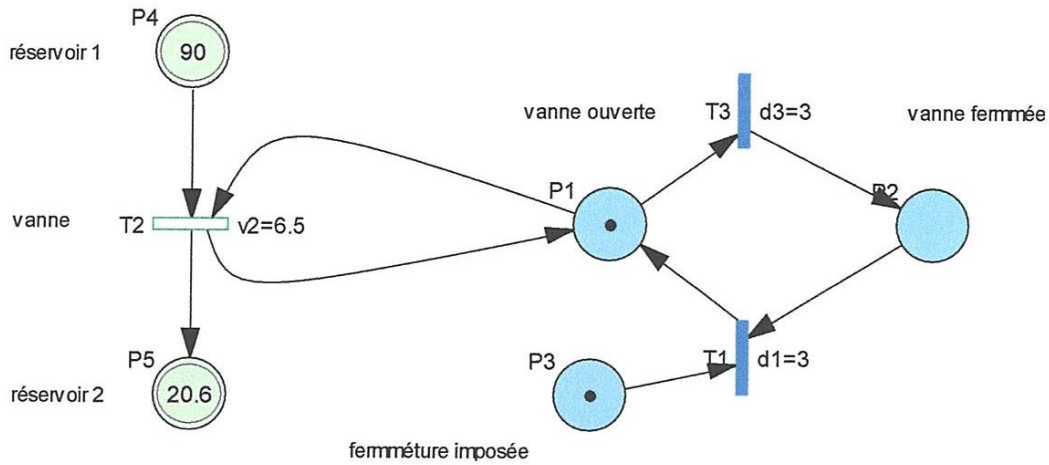
Figure II.31: a et b Explicative à la modélisation du système.

L'évolution du marquage des places  $m(p1), m(p2), m(p3), m(p4), m(p5)$ , du RdPH du système pour un marquage initial.

$$M_0^H = [M_0^D, M_0^C] \quad \text{Avec } M_0^D = [1,0] \text{ et } M_0^C = [90,20.6]$$

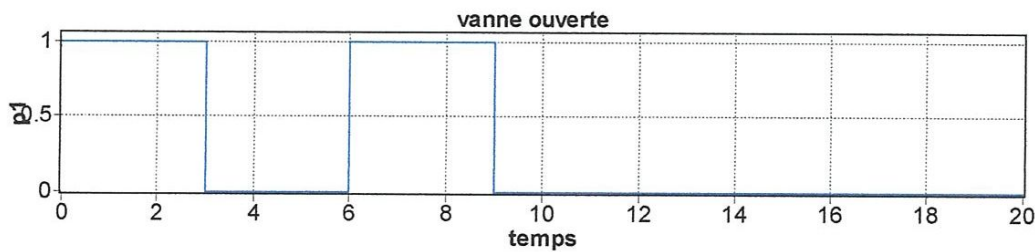


(a) Le schéma de principe.



(b) Le Réseau de Pétri hybride avec une partie continue qui influence la partie discrète.

Figure II.32: a et b Explicative à la modélisation du système.



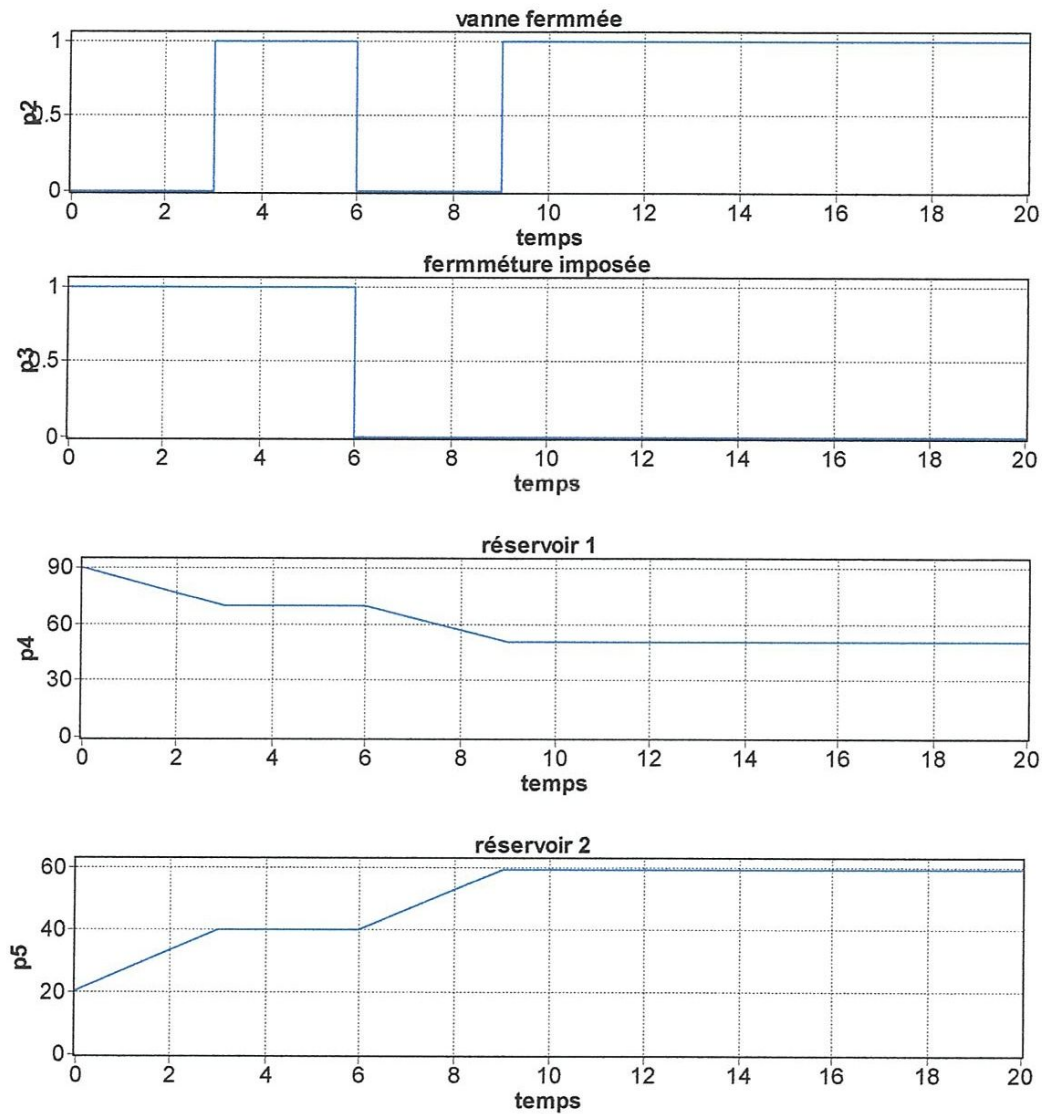


Figure II.32.C: marquage des les places  $m(P1)$  ;  $m(P2)$  ;  $m(P3)$  ;  $m(P4)$  ;  $m(P5)$

On peut avoir aussi le comportement dual (Fig.32). Pour le même système de réservoirs, cette fois, la fermeture de la vanne est pilotée par la partie continue. Le remplissage du réservoir 2 est arrêté lorsque la quantité de liquide dans ce réservoir atteint le volume 40,1. Ceci est réalisé par la boucle  $P5 - T1$ .

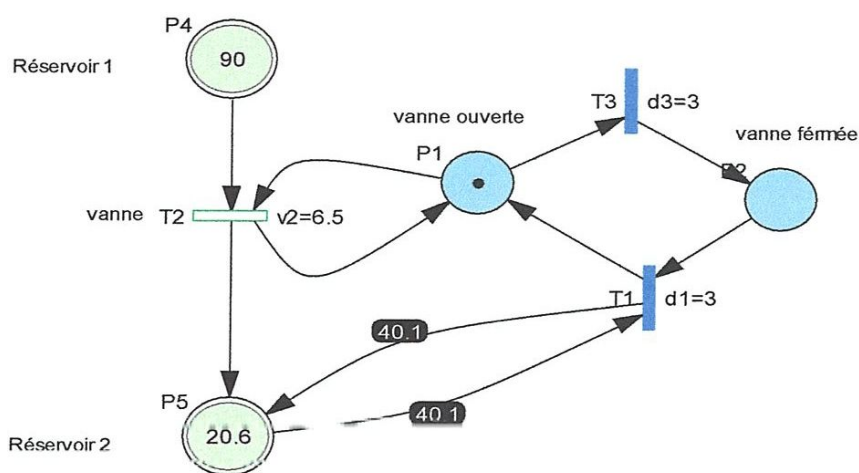


Figure II.32.d : Réseau de Pétri hybride avec une partie continue qui influence la partie discrète.

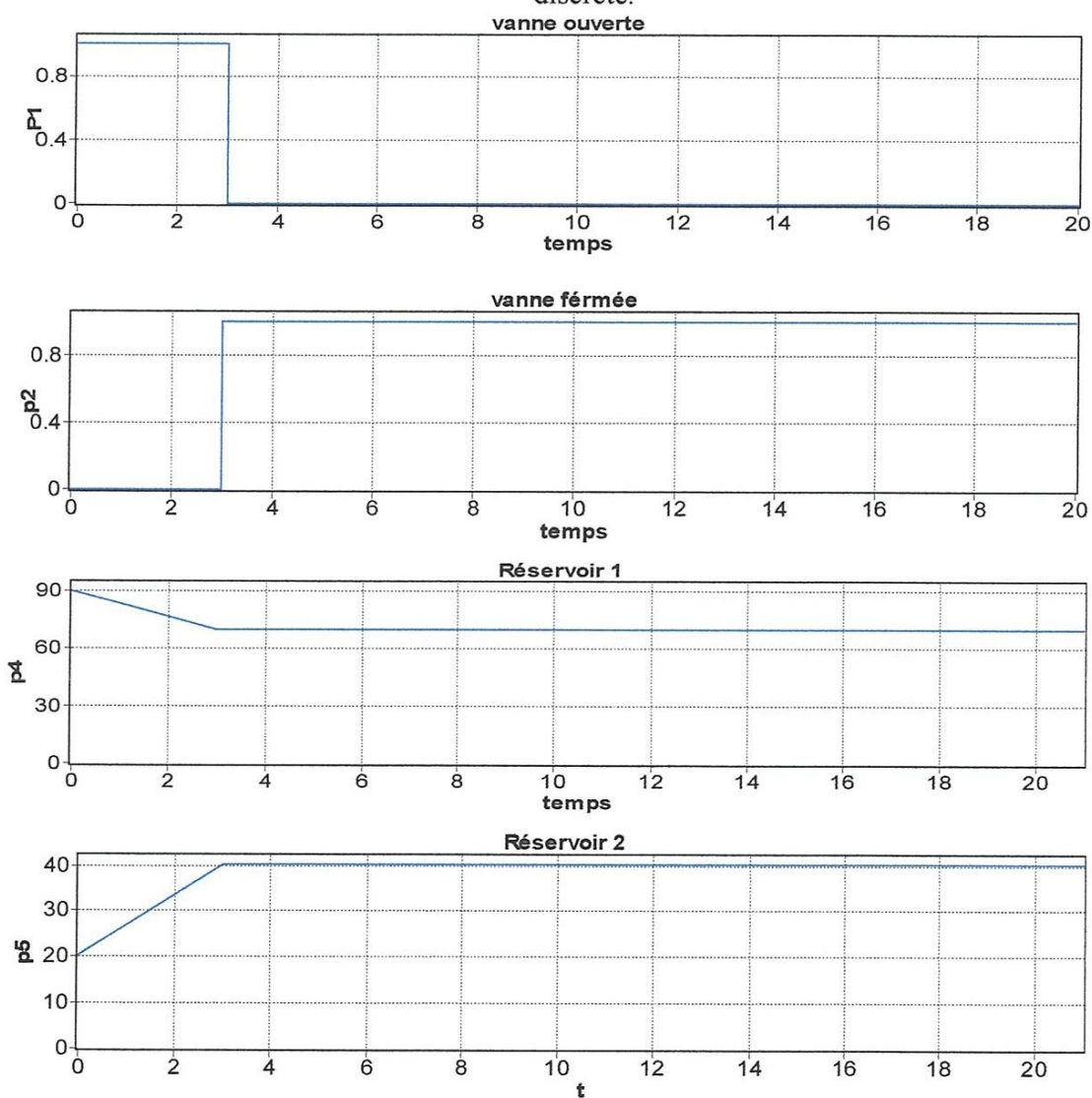


Figure II. 32. e : Diagramme des marquages P1 ; P2 ; P4 ; P5.

**Exemple II.3: Deux stations**

Un système de production est composé de deux stations en série. Chaque station est composé d'un stock et d'une machine, comme l'indique la Figure II.33 les machines peuvent être opérationnelles ou en panne. Les pièces sont portées par 3 palettes recyclées à la fin de la production de chaque pièce la capacité du stock d'entrée de chaque machine est supérieure ou égale à 3. Les temps de service sont  $d_1=1/4$  pour la machine 1, et  $d_2=1/3$  pour la machine 2.

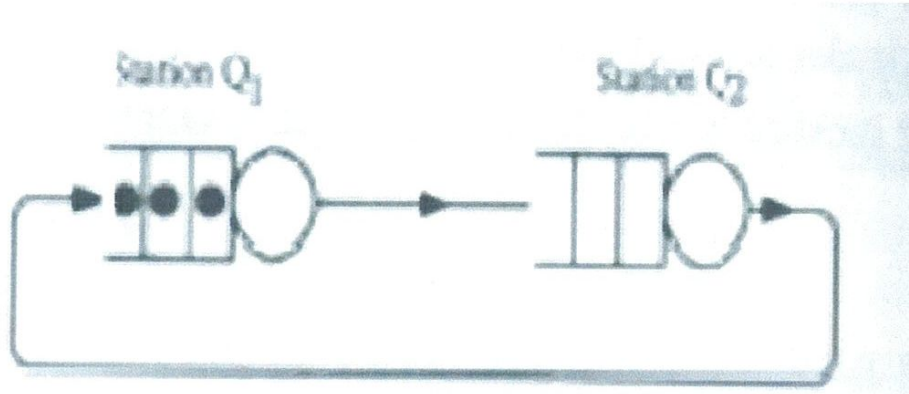
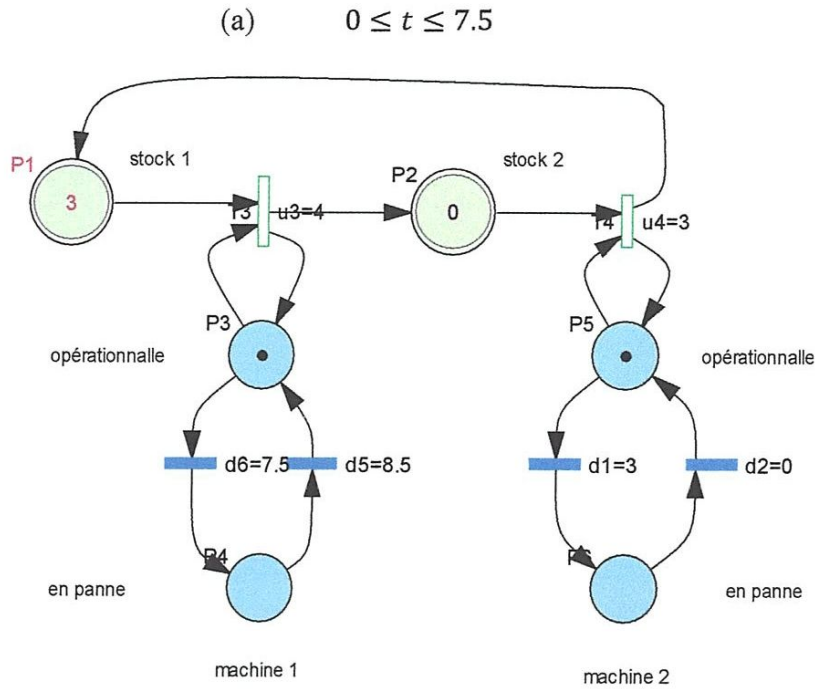


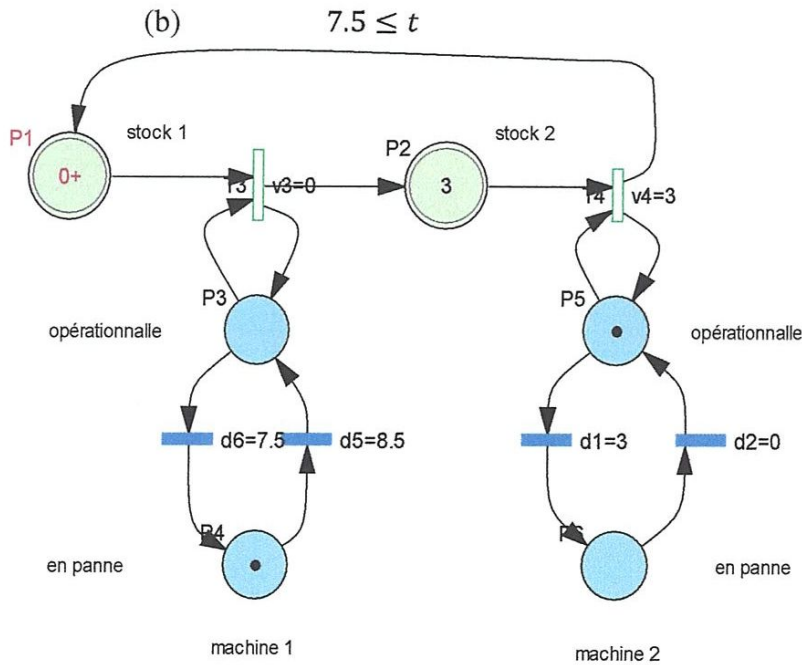
Figure II.33 : Deux stations

1) Sachant que les deux stations sont opérationnelles à l'instant initial, et que la machine 1 tombe en panne à  $t=7,5$ , représenter en fonction du temps le nombre de palettes dans la station 1 entre les instants  $t=0$  et  $t=11$  (la partie continue se comporte comme un RdPCC et la partie discrète se comporte comme un RdPCV).

Dans le RdP hybride de la figure (a) correspond à l'état de la partie discrète avant que la machine 1 ne tombe en panne. On a la figure (a)  $U_1=1/d_1=4$  et  $U_2=1/d_2=3$ . Le marquage de la partie continue correspond à l'état initial, soit  $t=0$ . Le marquage de  $p_1$ ,  $m_1(t)$ , est indiqué sur la figure C : ce marquage décroît de 3 à 0 entre  $t=0$  et  $t=3$  ( $v_1(t)=4$  et  $v_2(t)=3$  durant cette phase), puis reste constant à la valeur 0. ( $v_1(t)=3$  et  $v_2(t)=3$ ). Quand la machine 1 tombe en panne, à  $t=7,5$ .



Le RdP hybride atteint instantanément l'état de la figure b. le marquage  $m_1(t)$  croit de 0 à 3 entre  $t=7.5$ , et  $t=8.5$  ( $v_1(t)=0$  car la transition  $T_1$  n'est plus validée, et  $v_2(t)=3$  puis reste à la valeur 3 ( $v_3(t)=0$  et  $v_4(t)=0$  car les deux transitions ne sont pas validées). Rien ne peut plus changer jusqu'à ce que la machine 1 soit réparée.



Les figures II.33: (a) et (b) Réseaux de pétri hybride de station.

2) le comportement est illustré dans la figure C (interprétation RdPCV de la partie continue). le marquage  $m_1(t)$  décroît entre  $t=0$  et  $t=7.5$  : linéairement jusqu' à la valeur 1, puis exponentiellement vers la valeur asymptotique  $U_2/U_1$ . A partir de  $t=7.5$ , le marquage  $m_1(t)$  croît : linéairement jusqu'à la valeur 2 (parce que  $m_2 < 1$  quand  $m_1 > 2$ ), puis exponentiellement vers la valeur asymptotique 3.

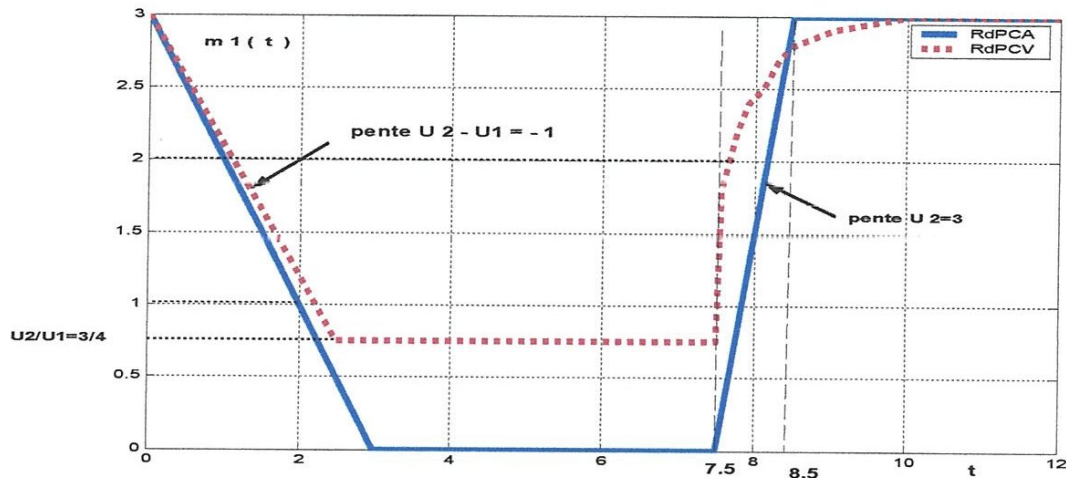


Figure II.33 : -c- diagramme de marquage p1

#### Exemple II .4 : fontaine à deux bassins

L'exemple de la figure II.34 illustre ces notions ; il s'agit de la description d'une fontaine décorative à deux bassins avec :

- ✓ Écoulement direct entre le bassin 1 (supérieur) et le bassin 2 (inférieur), suivant deux modalités dépendant de l'état du système lui-même : fuite le long de la colonne centrale pendant le remplissage du bassin 1, débordement décoratif quand ce bassin est plein ;
- ✓ relevage permanent par pompe, à débit constant, entre le bassin 2 et le bassin 1, avec également un effet décoratif.

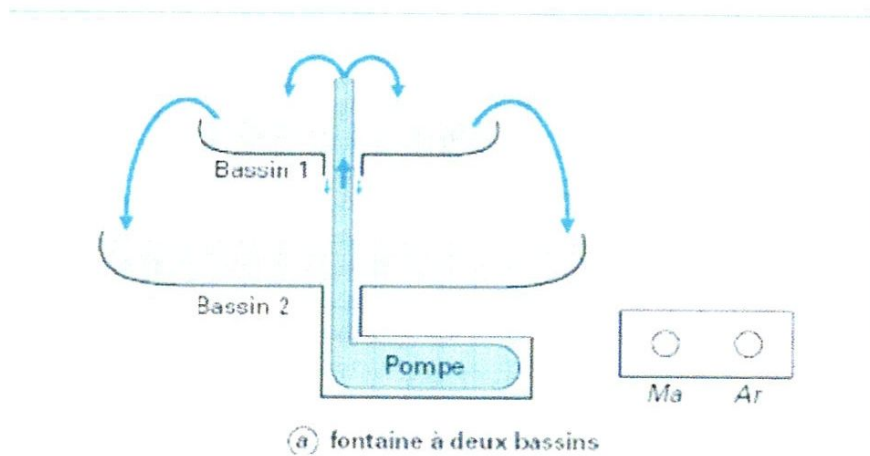


Figure II.34 : fontaine à deux bassins



❖ Diagramme des les marquages P1, P2, P3, P4, P5, P6.

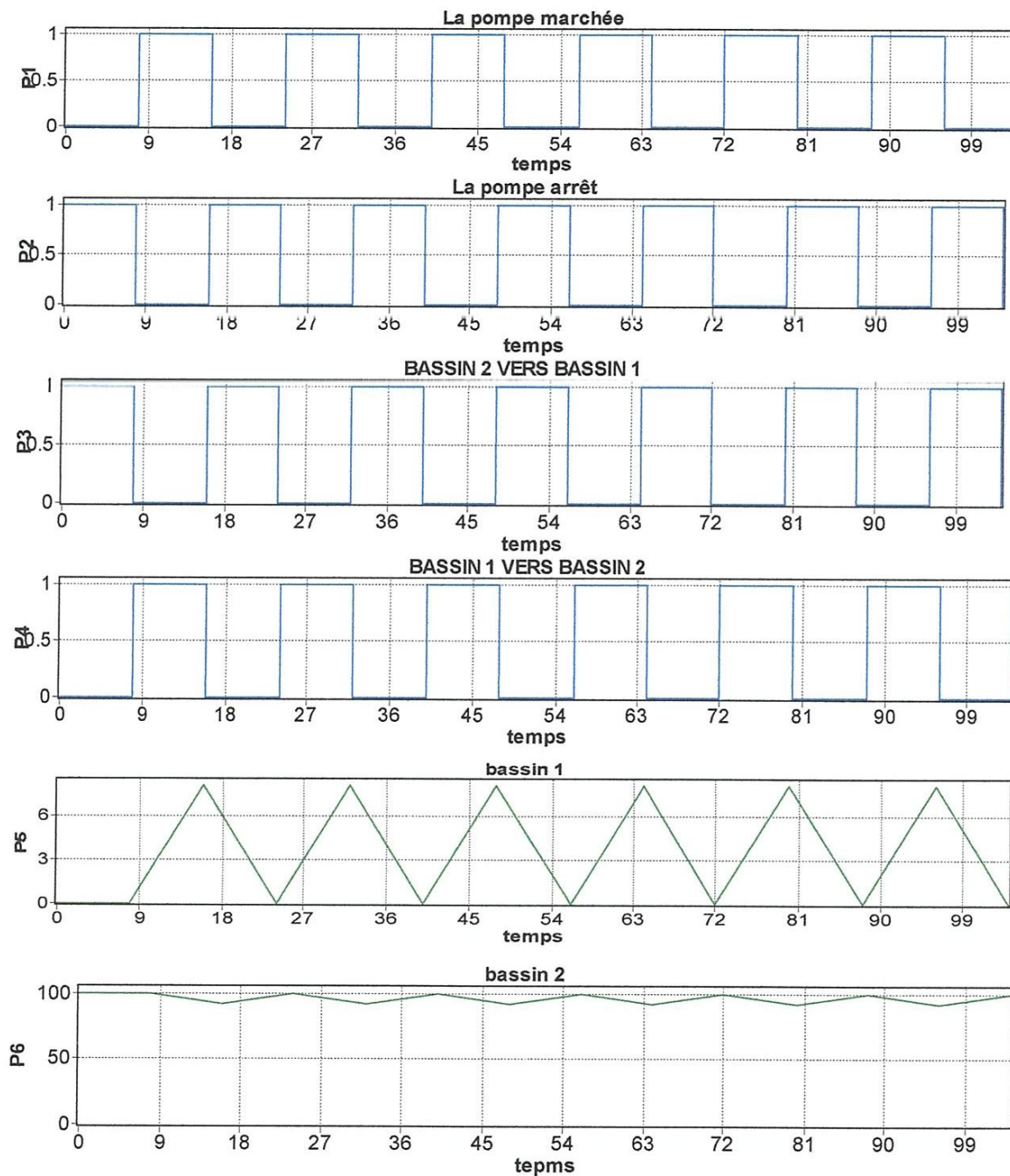


Figure II.34 : -c- diagramme de marquage P1; P2;P3;P4;P5;P6

### II.11. Conclusion

A cours de ce chapitre nous avons abordé un certain nombre de notions concernant les réseaux de Pétri ont différents type, qui sont temporisés, continus et hybrides. Ces notions, qui seront à nouveau mentionnées au cours de ce travail, ensuite on a discuté du passage de

RdP du discret au continu, Nous avons consacré la dernière section du chapitre, pour les RdP hybrides.

Le réseau de Pétri est un outil graphique et mathématique pour modéliser et analyser les systèmes. Il nous aide à comprendre facilement le système modélisé, et en plus il nous permet de simuler les activités dynamiques et concurrentes. Avec le rôle d'outil mathématique, il nous permet d'analyser le système modélisé grâce aux modèles de graphes, aux équations algébriques... etc.

# Chapitre III

## Exemple d'application : le convertisseur statique boost

### III.1.Introduction

Ce chapitre d'application traite de la conception d'un convertisseur DC/DC de type boost (appelé également hacheur survolteur ou parallèle). Ce type de convertisseur statique permet de convertir une tension continue en une autre tension continue de plus forte valeur.

On utilise un convertisseur boost lorsqu'on désire augmenter la tension disponible d'une source continue. Les systèmes alimentés par batterie d'accumulateurs utilisent souvent plusieurs accumulateurs en série afin de disposer d'un niveau de tension suffisamment élevé. La place disponible étant souvent limitée, il n'est pas toujours possible de disposer d'un nombre suffisant d'éléments. Un convertisseur boost permet d'augmenter la tension fournie par les batteries et ainsi diminuer le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre le niveau de tension désiré.

### III. 2. Étude du fonctionnement

#### III.2.1 Présentation du circuit

Le schéma de principe d'un hacheur boost est donné par la figure 1. Cette structure est composée principalement d'une inductance  $L$  et de deux interrupteurs  $T$  et  $D$ . Selon l'état de ces deux interrupteurs, on peut distinguer deux phases de fonctionnement :

**III.2.1.1. la phase active :** lorsque l'interrupteur  $T$  est fermé et l'interrupteur  $D$  est ouvert durant cette séquence, le courant traversant l'inductance  $L$  va augmenter linéairement et une énergie  $WL$  est stockée dans  $L$ . Le condensateur  $C$  fournit de l'énergie à la charge  $R$ .

**III.2.1.2. la phase de roue libre :** lorsque l'interrupteur  $T$  est ouvert et l'interrupteur  $D$  est fermé. Durant cette séquence, l'énergie emmagasinée dans l'inductance  $L$  est restituée au condensateur et à la charge  $R$ . Lors de cette phase, le fait que l'inductance  $L$  soit en série avec la source de tension d'entrée permet d'obtenir un montage survolteur.

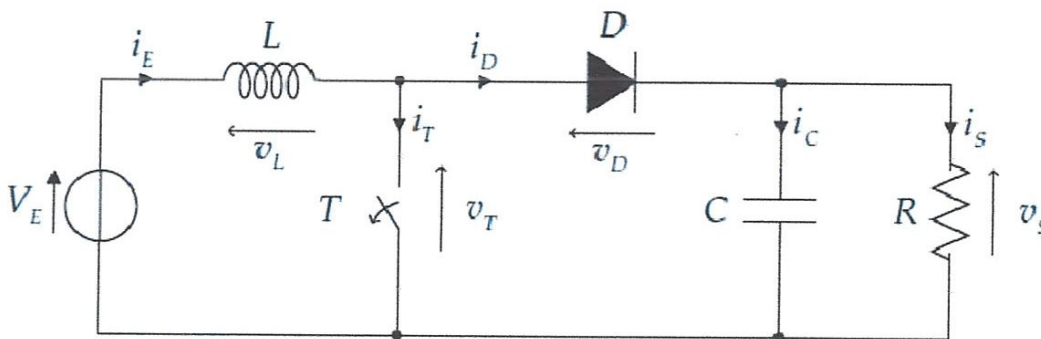


Figure III.1: Schéma de principe d'un hacheur boost

La figure III.2 présente l'allure du signal de commande appliqué à l'interrupteur  $T$ . C'est un signal rectangulaire de fréquence  $f$  dont la largeur de la durée à l'état haut (durée de conduction de l'interrupteur  $T$ , notée  $T_{ON}$ ) est ajustée par le paramètre  $\alpha$ . Ce paramètre, appelé rapport cyclique, est défini comme étant le rapport entre la durée de conduction de l'interrupteur  $T$  et la période de découpage  $T_d$  de celui-ci :

$$\alpha = \frac{T_{ON}}{T_d} \quad (\text{III.1})$$

On a :  $T_d = T_{ON} + T_{OFF}$  où  $T_{OFF}$  correspond à la durée de blocage de l'interrupteur  $T$ .

La durée de conduction  $T_{ON}$  est comprise entre 0 et  $T_d$  donc, le rapport cyclique est compris entre 0 et 1. On peut exprimer la durée de conduction et de blocage de l'interrupteur  $T$  en fonction de  $\alpha$  et  $T_d$  :

- ✓ Durée de conduction :  $T_{ON} = \alpha T_d$
- ✓ Durée de blocage :  $T_{OFF} = (1 - \alpha) T_d$

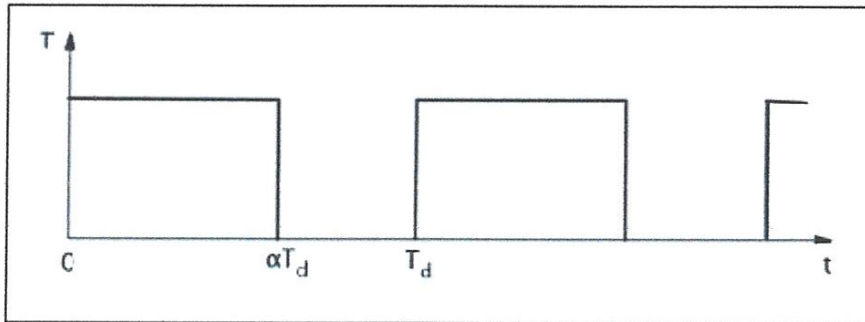


Figure III.2 : Signal de commande de l'interrupteur  $T$

Dans l'étude qui suit, nous ferons les hypothèses suivantes :

- ✓ la tension d'alimentation  $V_E$  est parfaitement continue et constante
- ✓ la valeur du condensateur  $C$  est suffisamment grande afin de pouvoir considérer la Tension de sortie  $V_S$  comme continue
- ✓ les composants sont idéaux

L'étude de la structure se fera en régime permanent. Néanmoins, nous aborderons en Partie 3.3 quelques aspects du régime dynamique.

On peut distinguer 3 régimes de conduction :

- ✓ **la conduction continue** qui correspond au cas où le courant  $I_L$  traversant l'inductance ne s'annule jamais.
- ✓ **la conduction discontinue** qui correspond au cas où le courant  $I_L$  traversant l'inductance s'annule avant la prochaine phase active.
- ✓ **la conduction critique** qui définit la limite entre les deux modes de fonctionnement précédents.

La suite de ce document explique le comportement de la structure en fonction de ces trois régimes de conduction. L'objectif principal est de déterminer les relations reliant les grandeurs électriques d'entrée et de sortie du convertisseur ainsi que les formules permettant de dimensionner les différents composants.

### III.2.2. Conduction continue

#### III.2.2.1. Séquence 1 : phase active

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $T$  pendant une durée  $\alpha T_d$ . La tension aux bornes de la diode  $D$  est égale à  $V_D = V_T - V_S$ . Comme l'interrupteur  $T$  est fermé, on a  $V_T = 0$ , ce qui implique  $V_D = -V_S$ . La diode est donc bloquée puisque  $V_S > 0$ . Dans ces conditions, on obtient alors le schéma équivalent de la figure 3. La tension aux bornes de l'inductance est alors :

$$V_L = V_E = L \frac{di_L}{dt} > 0 \quad (\text{III.2})$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient la formule suivante qui exprime l'évolution du courant traversant l'inductance :

$$i_L = \frac{V_E}{L} t + I_{L \text{ MIN}} \quad (\text{III.3})$$

#### III.2.2.2. Séquence 2 : phase de roue libre

À l'instant  $t = \alpha T_d$ , on ouvre l'interrupteur  $T$  pendant une durée  $T_d(1 - \alpha)$ . Pour assurer la continuité du courant, la diode  $D$  entre en conduction. On obtient alors le schéma équivalent se la figure 3. La tension aux bornes de l'inductance est alors :

$$V_L = V_E - V_S = L \frac{di_L}{dt} < 0 \quad (\text{III.4})$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient la formule suivante qui exprime l'évolution du courant traversant l'inductance :

$$i_L = \frac{V_E - V_S}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ MAX}} \quad (\text{III.5})$$

Le courant dans l'inductance est fonction de la puissance débitée par la source. On peut exprimer sa valeur moyenne en fonction du courant moyen dans la charge et rapport cyclique :

$$I_L = \frac{I_S}{1 - \alpha} \quad (\text{III.6})$$

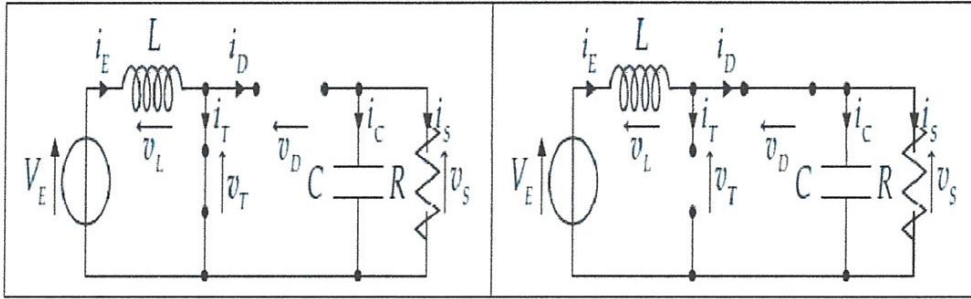


Figure III.3: Schémas équivalents lors des séquences 1 (à gauche) et 2 (à droite)

**III.2.2.3. Expression de VS et IS**

Par définition :

$$\langle V_L \rangle = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} V_L \cdot dt = \frac{1}{T_d} \left( \int_0^{\alpha T_d} V_E \cdot dt + \int_{\alpha T_d}^{T_d} (V_E - V_S) \cdot dt \right) \quad (III.7)$$

Comme la tension moyenne aux bornes d'une inductance est nulle, on peut écrire :

$$\langle V_L \rangle = \alpha V_E = (V_E - V_S)(1 - \alpha) = 0 \quad (III.8)$$

Finalement, on obtient la relation suivante :

$$V_S \langle V_S(t) \rangle = \frac{V_E}{1 - \alpha} \quad (III.9)$$

Le rapport cyclique  $\alpha$  est compris entre 0 et 1 donc la tension de sortie  $V_S$  est nécessairement supérieure à la tension d'entrée  $V_E$  (montage survolteur).

Si on suppose que le courant d'entrée est parfaitement continu, on peut écrire :

$$i_s \langle i_s \rangle = \frac{1}{T_d} \int_{\alpha T_d}^{T_d} I_E dt \quad (III.10)$$

Ce qui conduit à :

$$I_S = I_E(1 - \alpha) \quad (III.11)$$

Cette expression montre que le hacheur boost est abaisseur en courant.

Au regard de ces différentes expressions, on peut remarquer que le rapport cyclique  $\alpha$  Permet de régler la tension moyenne de sortie (respectivement le courant moyen de sortie) pour une tension moyenne d'entrée donnée (respectivement un courant moyen d'entrée). Il est donc possible de régler le transfert moyen de puissance entre l'entrée et la sortie de la structure à partir du rapport cyclique  $\alpha$ . Le transfert moyen de puissance est.

$$P = \langle P \rangle = (1 - \alpha) V_S \times I_E \quad (III.12)$$

**III.2.2.4. Ondulation de courant  $\Delta I_L$**

L'ondulation absolue du courant  $I_L$  est défini par  $\Delta I_L = I_{LMAX} - I_{LMIN}$ . A partir des relations 3 et 5, à  $t = \alpha T$ , on peut écrire :

$$\frac{V_E}{L} \alpha T + I_{LMIN} = I_{LMAX} \quad (III.13)$$

On en déduit l'expression de  $\Delta I_L$  suivante :

$$\Delta I_L = \frac{\alpha V_E}{Lf} \quad (III.14)$$

Cette expression nous montre que l'ondulation en courant diminue lorsque la fréquence de commutation  $f$  ou la valeur de l'inductance  $L$  augmente.

Comme  $V_E = V_S(1 - \alpha)$ , on peut écrire :

$$\Delta I_L = \frac{\alpha V_S(1-\alpha)}{Lf} \quad (III.15)$$

En résolvant  $\frac{d\Delta I_L}{d\alpha} = 0$ , on trouve que l'ondulation en courant  $\Delta I_L$  est maximale

Pour  $\alpha = 0,5$ . Le dimensionnement de l'inductance  $L$ , à partir d'une ondulation en courant donnée, s'effectue à l'aide l'équation suivante :

$$L \geq \frac{V_S}{4\Delta I_L f} \quad (III.16)$$

### III.2.2.5. Ondulation de tension $\Delta V_S$ .

Pour déterminer l'expression de l'ondulation en tension  $\Delta V_S$ , on fait l'hypothèse que le courant  $I_S$  est parfaitement constant. On a la relation suivante

$I_C = c dV_S / dt$  On a, pour  $0 \leq t \leq \alpha T_d$  on a  $I_C = -I_S$ . La résolution de cette équation différentielle donne :

$$v_S = -\frac{I_S}{C} t + V_{SMAX} \quad (III.17)$$

A  $t = \alpha T_d$ , on a :

$$v_S(\alpha T) = V_{SMIN} = -\frac{I_S}{C} \alpha T_d + V_{SMAX} \quad (III.18)$$

Par suite, on a :

$$\Delta V_S = V_{SMAX} - V_{SMIN} = \frac{I_S}{C} \alpha T_d \quad (III.19)$$

Finalement :

$$\Delta V_S = \frac{\alpha V_S}{cRf} \quad (III.20)$$

Cette expression nous montre que l'ondulation en tension diminue lorsque la fréquence de commutation  $f$  ou la valeur du condensateur  $C$  augmente.

Le dimensionnement du condensateur  $C$ , à partir d'une ondulation en tension donnée, s'effectue à l'aide l'équation suivante :



Dans ce régime de fonctionnement, la tension de sortie est donc dépendante de la charge pour un rapport cyclique fixe. Ceci implique qu'en conduction discontinue, il est nécessaire de mettre en œuvre une boucle de régulation.

### III.2.4 Conduction critique

Ce mode définit la limite entre les régimes continu et discontinu.

La relation (mode continu) :

$$V_S = \frac{V_E}{1-\alpha} \quad (\text{III.28})$$

Et (mode discontinu) :

$$I_S = \frac{V_E^2}{2Lf} \times \frac{\alpha^2}{V_S - V_E} \quad (\text{III.29})$$

Sont valables simultanément, on peut alors écrire :

$$I_S = \frac{V_E^2}{2Lf} \times \frac{V_S - V_E}{V_S^2} \quad (\text{III.30})$$

### III.3 Application : Conduction continue

Le hacheur boost est mis en marche encore dans le prochain cycle après le temps  $T=1/f$ . avec  $V_E$  la tension de entrée et  $L$  l'inductance et  $I_L$  max,  $I_L$  min sont respectivement la courant l'inductance maximum et courant l'inductance mini mou et ondulation du courant et l'interrupteur de commandé  $T$  et la diode  $D$  et  $C$  la condensateur et  $R$  la résistant ion,  $\alpha$  et le rapport cyclique du convertisseur,  $T_d$  est la période du hachage, et  $f$  la fréquence et  $V_S$  la tension de sorti et  $V_S$  min et  $V_S$  max respectivement le tension de sorti mini mou et la tension de sorti maximum et  $VE/L$  la vitesse de courant  $I_L$  et  $IS/C$  la vitesse de tension  $V_S$ .

Avec :  $V_E = 12V$ ,  $L=0.6$  mhz,  $\alpha = 0.5$ , nous obtenons  $I_{LMIN} = 9.5A$ ,

$I_{Lmoy} = 10A$ ,  $I_{LMAX} = 10.5A$ ,  $T=0.1$ ,  $f = 10KHz$ ,  $C = 0.125\mu F$ ,  $I_S = 5A$ ,  $R = 4.8\Omega$ ,  $V_S$  min = 23,  $V_{Smoy} = 24V$ ,  $V_S$  max = 25V,  $\Delta I_L = 1$ ,  $\Delta V_S = 2$

#### III.3.1 Conduction continue

Le temps de fermeture l'interrupteur  $d_3 = 0.05$  second et Le temps de fermeture la diode  $d_4 = 0.05$  second

La figure III.4 représente une modèle hybride d'élevateur boost Conduction continue.

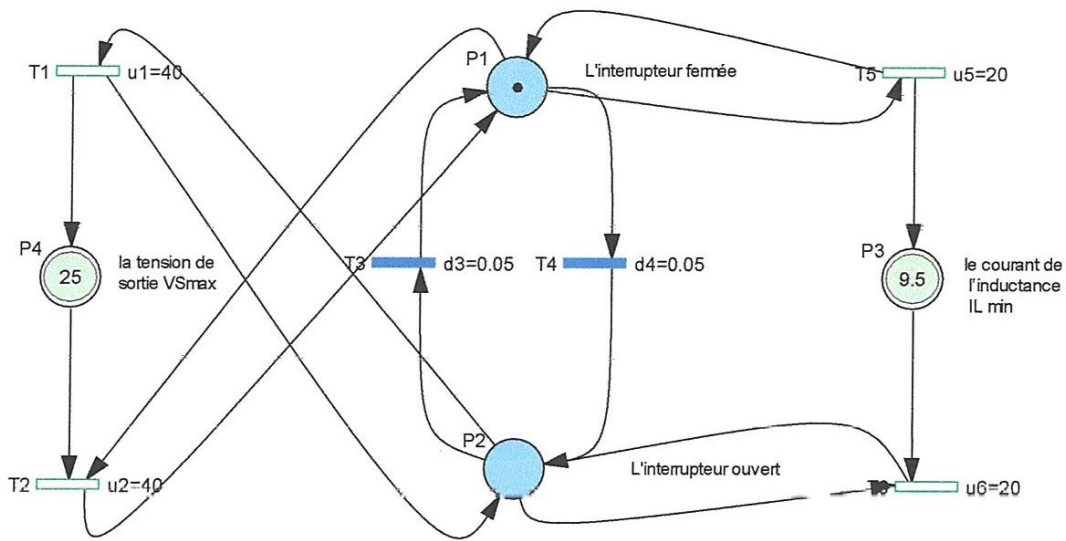
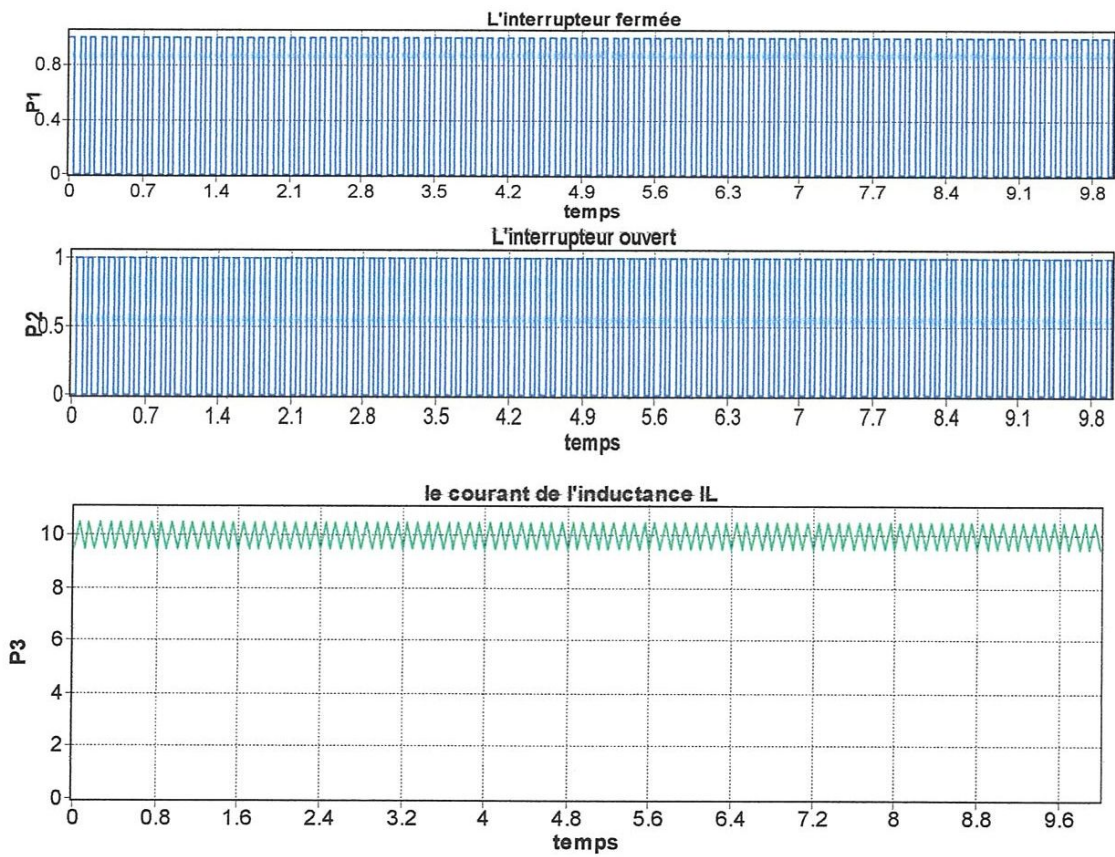


Figure III.4.a : représente un réseau de pétri hybride d'élevateur (boost) Conduction continue.



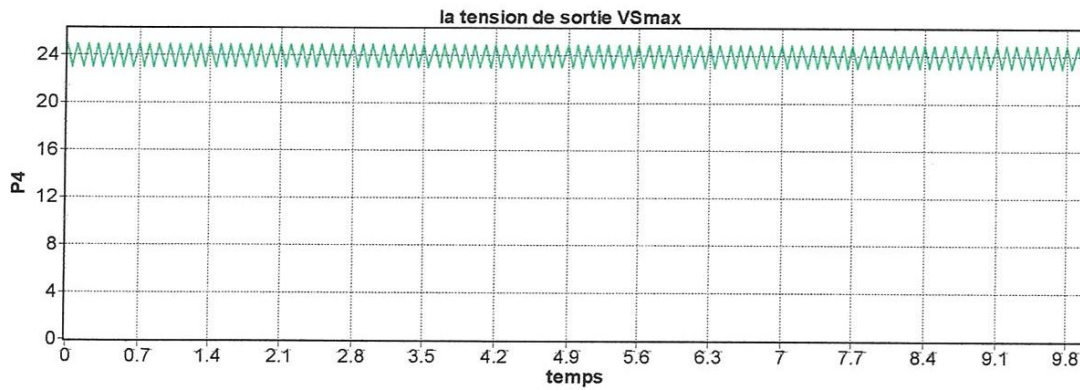


Figure III.4: b. Diagramme des marquages P1 et P2 et P3 et P4.

### III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle hybride des convertisseurs statique de l'électronique de puissance. Comme exemples d'application nous avons cité le convertisseur DC/DC Boost (élevateur) la tension 12V/24V. Pour Conduction continue.

# Conclusion générale

Les systèmes dynamiques hybrides sont des systèmes définis structurellement par la coopération de deux systèmes, l'un de type continu et le second est de type événementiel.

L'objectif de notre travail est de modéliser et simuler les systèmes dynamique hybride et vérifier les modèles obtenus par la simulation .Dans ce contexte nous avons proposé un outil de modélisation puissant qui à une présentation graphique et formelle, il décrit les aspects continu et discret du système donc une présentation homogène du système .L'outil de modélisation est le Réseau de pétri hybride(RdP),une extension des réseaux de pétri classique ,il intègre deux types de RdP :le réseaux de pétri continu modélisant la partie continu du SDH et le RdP Temporisé modélisant la partie discrète du SDH.

Enfin, les modèles(RdPH) peuvent être utilisés en commande c'est ainsi que l'on pourra associer aux jetons de chaque place, d'une part des actions de commande du procédé, d'autre part, des événements comptes rendus de ces actions. Il est ainsi possible de les utiliser en diagnostique.

Le formalisme de RdPH est très bien adapté pour l'analyse de systèmes d'une taille assez petite. Pour des systèmes complexes, la topologie du réseau, bien que sa dynamique, posent réels problèmes dues soit à la structure du système, soit à l'explosion d'états atteignables. Une approche qui soulève parfois cet inconvénient a comme sujet les réseaux de Pétri objets, constitués par des réseaux primaires, avec une structure et une dynamique interne, qui permet leur liaison directe ou bien par des éléments auxiliaires, externes, qui assurent le bon fonctionnement du modèle.

## *Bibliographies*

[1] Du grafcet aux réseaux de pétri 2<sup>é</sup>dition revue et augmentée par René David et hassane Alla, Dépôt légal : AVRIL 1997.

[2] ZAYTOON (J) (éd). – Les Systèmes Dynamiques Hybrides. Rapport de TIPE - 2005/2006

[3] Mémoire de magister « *Automatique – productique – informatique* »

Intitulée : Modélisation structurelle utilisant les automates hybrides en vue de synthé de contrôleur des systèmes dynamiques hybrides ; présentée le dimanche 10 mai 2005 par latéfa Ghomri.

[4] SUR L'ANALYSE DES SYSTEMES HYBRIDES A L'AIDE DE RESEAUX DE PETRI Mircea Adrian DRIGHICIU, Universitaire DIN Craiova, Facilite de Electromecanic\_ Bd.Decebal Nr. 107, e-mail: [adrighiciu@em.ucv.ro](mailto:adrighiciu@em.ucv.ro)

[5] Note d'application Conception d'un convertisseur DC/DC de type boost Critères de choix et dimensionnement des composants  
Benoît Issartel - Projet P10AB04  
*Gestion intelligente des transferts d'énergie d'un pylône d'éclairage public éolien*

[6] [http://www.tn.refer.org/hebergement/cours/sys\\_disc/algebre.html](http://www.tn.refer.org/hebergement/cours/sys_disc/algebre.html) 20/04/2007

[7]«[http://fr.wikipedia.org/w/index.php.title=Convertisseur\\_Boost&oldid=69222294](http://fr.wikipedia.org/w/index.php.title=Convertisseur_Boost&oldid=69222294)»

[8] Mme Fatima EL GUEZAR « Modélisation et Simulation des Systèmes Dynamiques Hybrides» THÈSE Présentée en vue de l'obtention du titre DOCTEUR Soutenue le 17 Décembre 2009