

17/621,754

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

Domaine : **Sciences et Technologie**
Filière : **Electrotechnique**
Spécialité : **Réseaux électriques**

Thème :
**Modélisation de l'hystérésis magnétique en vue d'une
intégration dans un code de
calcul de champ électromagnétique**

Présenté par :
- Tifouti Kamel
- Boutaba Abdallah

Sous la direction de :
Mr. LADJIMI A.Aziz

JUIN 2012



REMERCIEMENT



C'est avec le plus grand honneur que nous réservons cette page en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui nous ont aidé durant cette formation.

Avant tout, nous tenons à remercier le Bon Dieu de nous avoir grâcié pour vivre, apprendre davantage et découvrir ...

En premier lieu, Nous exprimons notre profonde gratitude particulièrement à Mr LADTIMI .AZIZ Pour son amabilité, son assistance, son soutien moral, technique et logistique, son encadrement, sa contribution et ses conseils fructueux qu'il nous a prodigué le long de ce projet, pour son bon déroulement, malgré ses occupations.

Nous adressons également nos profondes considérations à tous ; qui de loin ou de près, ont aidé à la réussite de ce projet.

SOMMAIRE

Introduction général

CHAPITRE1 : phénomène magnétique..... 1

1.1 PHENOMENE D'AIMANTATION DANS LES MATERIAUX MAGNETIQUES..... 1

1.1.1 Comportement magnétique des matériaux magnétiques 1

1.1.1.1 Relation entre l'induction magnétique B et le champ H 1

1.1.1.2 Classification des matériaux d'un point de vue magnétique..... 2

1.1.1.3 Le moment magnétique atomique..... 4

1.1.2 Comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques..... 4

1.1.2.1 Domaines de Weiss..... 5

1.1.2.2 processus d'aimantation..... 7

1.1.2.3 Classification des matériaux ferromagnétiques..... 11

1.2 Les pertes magnétiques..... 11

1.2.1 Les pertes magnétiques dans La matière..... 11

1.2.2 Les pertes en régime statique..... 12

CHAPITRE2 : Modélisation de l'hystérésis magnétique par le modèle de Preisach

Introduction..... 13

2 Présentation du Modèle..... 13

2.1 Modèle de Preisach..... 13

2.1.1 Définition du modèle..... 13

2.2 Interprétation géométrique..... 14

2.2.1 Représentation équivalente..... 15

2.3 Principe du modèle..... 18

2.4 Détermination de la fonction de distribution $\rho(\alpha,\beta)$ 19

2.5 Expression de l'aimantation à partir de la fonction de Lorentz modifiée..... 20

2.6 Simulation numérique de l'hystérésis magnétique par le modèle de Preisach 23

2.6.1 : Evolution des cycles d'hystérésis 23

2.6.2 : Génération des cycles mineurs..... 26

CHAPITRE3 : Intégration de modèles d'hystérésis de Preisach dans un code de calcul par éléments finis

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 27 |
| 3.1 Intégration du modèle d'hystérésis dans la MEF..... | 27 |
| 3.1.1 Equations de Maxwell..... | 27 |
| 3.1.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique..... | 29 |
| 3.1.2.1 Problème magnétostatique non linéaire..... | 30 |
| 3.1.3 : Formulation éléments finis du problème électromagnétique..... | 30 |
| 3.2 Méthode de résolution du problème non linéaire..... | 32 |
| 3.3 Code de calcul éléments finis 2D..... | 33 |
| 3.3.1 Organigramme de traitement du problème magnétique non linéaire | 33 |
| 3.3.2 Algorithme général de résolution du système non linéaire..... | 34 |
| 3.4 : Application à un système électromagnétique..... | 36 |
| 3.4.1 : Système étudié..... | 36 |
| 3.4.2 : EXPLOITATION DES RESULTATS..... | 37 |
| 3.4.2.1 : Résolution de l'équation magnétostatique pour une excitation sinusoïdal $J_{\max}=0.2 \cdot 10^6$ | 37 |
| 3.4.2.2 : Résolution de l'équation magnétostatique pour une excitation sinusoïdal $J_{\max}=0.1 \cdot 10^6$ A/m | 42 |
| CONCLUSION..... | 44 |

CONCLUSION GENERAL

CHAPITRE 1

Phénomènes d'hystérésis magnétiques

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons présenter les notions de magnétisme, Le magnétisme est l'un des phénomènes qui a le plus frappé l'imagination de l'homme, au point que ce mot désigne aujourd'hui des réalités très diverses : il s'agit d'abord d'une science fort ancienne et néanmoins toujours d'actualité dont le champ d'application ne cesse de s'étendre, ensuite par extension, on parlera du magnétisme d'une personne attrayante et capable de dynamiser son entourage, enfin ce mot recouvre diverses pratiques parapsychologiques qui ne sont pas soumises à l'expérimentation scientifique et dont les acteurs sont appelés magnétiseurs.

1.1 PHENOMENE D'AIMANTATION DANS LES MATERIAUX MAGNETIQUES

1.1.1 Comportement magnétique des matériaux magnétiques

1.1.1.1 Relation entre l'induction magnétique **B** et le champ **H**

Dans le vide le vecteur champ d'induction magnétique **B** et le champ d'excitation magnétique **H** sont colinéaires puisque ils sont liés par la relation (1-1).

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.1)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide .

Dans un milieu magnétique quelconque mais isotrope, ces vecteurs restent colinéaires. Cependant, le coefficient de proportionnalité dépend du matériaux.

On définit le vecteur aimantation **M** qui indique l'influence du milieu par la relation (1.2), où le champ d'excitation et l'aimantation se superposent pour exprimer le champ d'induction .

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \quad (\mathbf{J} \text{ est la polarisation magnétique}) \quad (1-2)$$

Or l'aimantation est proportionnel au champ d'excitation si bien que :

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

$$\mathbf{M} = \chi \cdot \mathbf{H} \quad (1-3)$$

Où χ est la susceptibilité magnétique .

Il en résulte une nouvelle expression entre \mathbf{B} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \quad (1-4)$$

Les matériaux peuvent être classés suivant leur comportement magnétique c'est à dire suivant leur susceptibilité magnétique [1].

1.1.1.2 Classification des matériaux d'un point de vue magnétique

a- Matériaux paramagnétiques (Tableau 1-1a)

Dans ce type de matériaux, la susceptibilité χ est faible, positive et pratiquement constante, les vecteurs \mathbf{H} et \mathbf{M} sont de même sens est l'aimantation disparaît avec le champ d'excitation.

Les moments magnétiques portés par les atomes voisins n'interagissent pas entre eux.

b- Matériaux diamagnétiques (Tableau 1-1b)

La susceptibilité χ est faible , négative et pratiquement constante. Les vecteurs \mathbf{H} et \mathbf{M} sont de sens contraires et l'aimantation disparaît avec le champ d'excitation .

Dans ce cas, le champ magnétique provoque un moment orbitale des électrons. Le comportement est alors similaires à une spire créant un courant qui s'oppose au champ; d'où le signe négatif de χ .

| Matériaux paramagnétiques (1-1a) | | | | Matériaux diamagnétiques (1-1b) | | | |
|----------------------------------|---------------------|------------------|----------------------|---------------------------------|-----------------------|---------|----------------------|
| Matière | χ | Matière | χ | Matière | χ | Matière | χ |
| Na | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | Pt | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | Si | $-1.2 \cdot 10^{-6}$ | Se | $-4 \cdot 10^{-6}$ |
| Al | $7.7 \cdot 10^{-6}$ | U | $3.3 \cdot 10^{-5}$ | Cu | $-1.08 \cdot 10^{-6}$ | Ag | $-2.4 \cdot 10^{-6}$ |
| Mn | $1.2 \cdot 10^{-4}$ | C | $0.75 \cdot 10^{-3}$ | Zn | $-1.9 \cdot 10^{-6}$ | Pb | $-1.4 \cdot 10^{-6}$ |
| Ta | $1.1 \cdot 10^{-6}$ | Fec ₃ | $3.7 \cdot 10^{-5}$ | Ge | $-1.5 \cdot 10^{-6}$ | AL2o3 | $-3.5 \cdot 10^{-6}$ |

Tableau 1.1 : Susceptibilité de différents matériaux magnétiques

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

c- Matériaux ferromagnétiques

Dans cette catégorie essentielle pour l'électrotechnique, la susceptibilité χ est élevée, positive et variable avec l'excitation magnétique (Figure 1-1).

Dans ces matériaux les moments magnétiques atomiques interagissent et tendent à s'aligner.

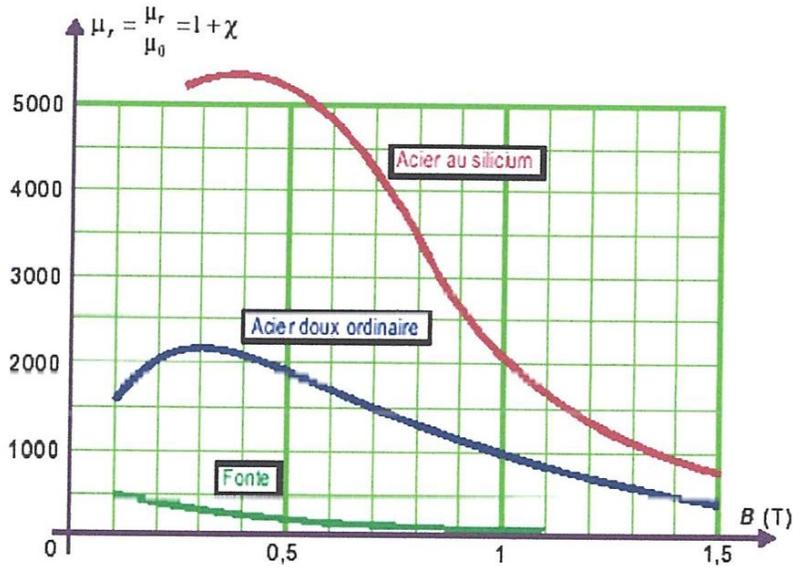


Figure 1.1 : Perméabilité relative μ_r en fonction de B pour trois matériaux courants

Résumé : Les différents comportements magnétiques des trois catégories peuvent être illustrés par le graphe de la figure 1.2.

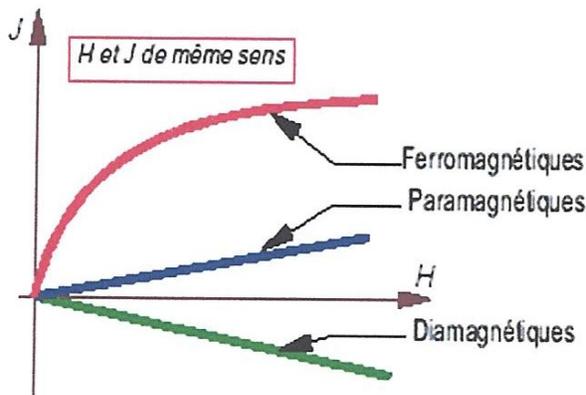


Figure 1.2 : Illustration des comportements magnétiques

1.1.1.3 Le moment magnétique atomique

Les électrons d'un atome ont deux mouvements régis par les lois de la physique quantique. Il s'agit de la rotation des électrons autour du noyau sur un rayon de quelques angströms et de la rotation de ces électrons sur eux-mêmes. Le mouvement orbital induit un moment magnétique orbital, tandis que la rotation de l'électron sur lui-même induit un moment magnétique de spin.

Dans un atome isolé, c'est à dire sans interactions avec les atomes voisins, le moment magnétique résultant est la somme des contributions des électrons qu'il contient. Ces électrons se répartissent autour du noyau sur des niveaux d'énergie, les couches et sous-couches électroniques, selon les règles de la mécanique quantique. En général, ils se regroupent de façon à former des couches complètes et s'apparient deux à deux avec des spins opposés. Par conséquent, le moment magnétique est nul. Cependant, certains atomes sont caractérisés par une couche périphérique incomplète contenant des électrons non appariés et dont il résulte un moment magnétique atomique permanent non nul. C'est en particulier le cas des éléments de transition tel que le fer.

1.1.2 Comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques

Comme nous venons de le rappeler, les atomes des matériaux ferromagnétiques sont porteurs d'un moment magnétique. Contrairement au cas des paramagnétique, les moments des atomes voisins interagissent fortement, ils sont ordonnés. Avec cette simple considération, on pourrait s'attendre à constater obligatoirement une aimantation au sein de ce type de matière. Pourtant il existe un état non aimanté stable des matériaux ferromagnétiques. C'est ce point qui va être discuté par la suite [2].

1.1.2.1 Domaines de Weiss

En 1907. P. Weiss a imaginé un arrangement en domaines dans la matière ferromagnétique pour lever l'incompatibilité entre l'existante de moment atomiques

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

ordonnés et la possibilité d'un état désaimanté. Nous allons énoncer les différentes énergies qui font apparaître ces domaines.

Pour cela on s'intéresse aux différentes énergies, liées au magnétisme, mises en jeu dans le cas d'un échantillon ferromagnétique de volume V .

○ L'énergie d'échange : On a vu que les moments magnétiques n'étaient pas libres, ils interagissent entre eux. Il en résulte un comportement collectif qui se manifeste en dessous d'une température critique.

Dans le cas des ferromagnétiques, Cette énergie tend à aligner dans le même sens les moments voisins.

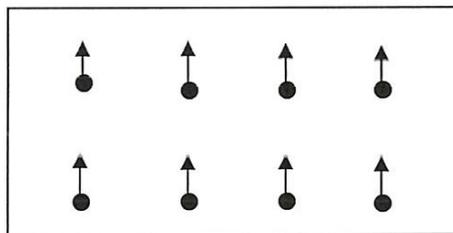


Figure 1.3 : Orientation des moments magnétiques atomiques les uns par rapport aux autres
Sous la seule action de l'énergie d'échange.
Les atomes sont figurés par les ronds pleins, les moments magnétiques par les flèches.

○ L'énergie d'anisotropie cristalline : Les atomes des matériaux ferromagnétiques sont organisés en réseau cristallin. L'énergie d'anisotropie cristalline reflète la dépendance de l'énergie des ferromagnétiques vis à vis des axes cristallographiques. Dans les matériaux polycristallins, sans texture particulière, cette énergie ne dépend pas de la direction de l'aimantation. Dans tous les cas, cette énergie tend à orienter les moments atomiques dans des directions privilégiées du réseau cristallin.

Ces deux termes ne sont pas en contradiction. Ils conduisent à un alignement des différents moments entre eux, dans une direction privilégiée du cristal.

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

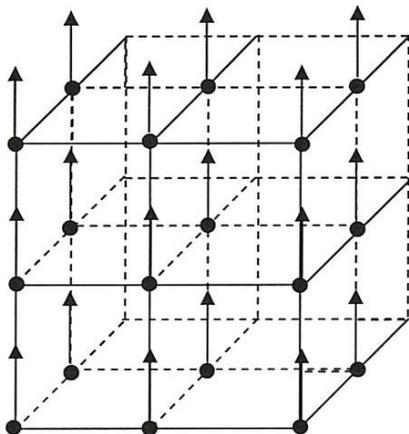


Figure 1.4 orientation des moments magnétiques atomiques vis à vis du réseau cristallin
Cas d'un réseau cubique face centré

o L'énergie dipolaire : Pour éviter la formation de pôles, cette énergie tend à refermer les lignes de flux à l'intérieur de la matière aimantée. Elle tend à orienter les moments en sens inverse et s'oppose ainsi à l'énergie d'échange. Cette énergie décroît comme le cube de l'inverse de la distance entre moments, mais le nombre de voisins augmente comme le cube de la distance. Il en résulte que cette énergie négligeable devant celle d'échange entre moments proches, devient prépondérante à grande distance.

Avec ces trois termes d'énergie, on a justifié la présence de domaines. En effet, l'énergie dipolaire s'oppose à l'énergie d'échange. Il résulte de cette opposition un équilibre. La matière ferromagnétique se décompose en domaines élémentaires au sein desquels l'aimantation est orientée suivant les directions de facile aimantation du réseau cristallin. En l'absence de champ appliqué et de toute autre contrainte, il y a équipartition du volume des domaines entre les diverses directions d'aimantation facile et l'aimantation résultante est nulle.

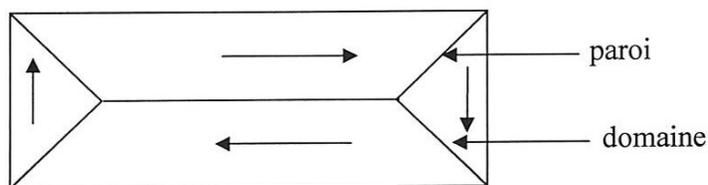


Figure 1.5 : Organisation de l'échantillon en domaines.
Les flèches représentent l'aimantation du domaine.

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

Entre chacun de ces domaines, il existe une zone de transition nommée « paroi » à l'intérieur de laquelle la rotation des moments est progressive.

○ L'énergie Zeeman : C'est une énergie magnétostatique due à l'excitation magnétique extérieure. Cette énergie tend à aligner l'aimantation de l'échantillon parallèlement à l'excitation extérieure appliquée.

Les différentes énergies décrites jusqu'ici conduisent à l'existence de domaines magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques. Cependant, il faut être conscient que, dans le nombre et la répartition de ces domaines au sein d'un échantillon, d'autres contributions interviennent. C'est le cas notamment, des énergies d'interaction magnéto-élastiques et, bien sûr, de l'action des défauts présents dans les matériaux (ex. inclusions non magnétiques).

Nous allons maintenant montrer comment l'existence de ces domaines justifie le caractère hystérétique des courbes donnant l'induction ou l'aimantation en fonction de l'excitation.

1.1.2.2 processus d'aimantation

On suppose un échantillon de matériau ferromagnétique initialement désaimanté. Ce matériau contient des défauts dans son réseau cristallin. Ces défauts sont par exemple, des dislocations, des inclusions non magnétiques, joints de grains... Ils vont être pour une bonne part dans la présence du phénomène qui nous intéresse.

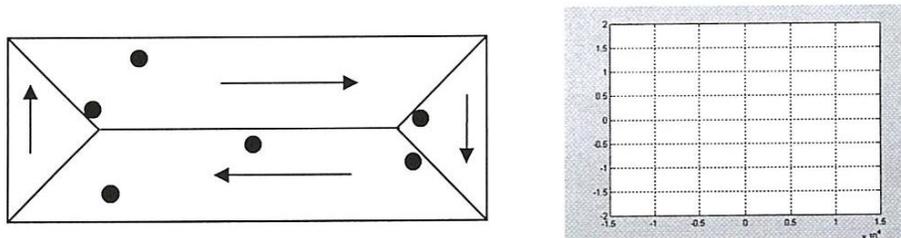


Figure 1.6 Echantillon initialement désaimanté, les points figurent des défauts, correspondance dans le plan (M,H)

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

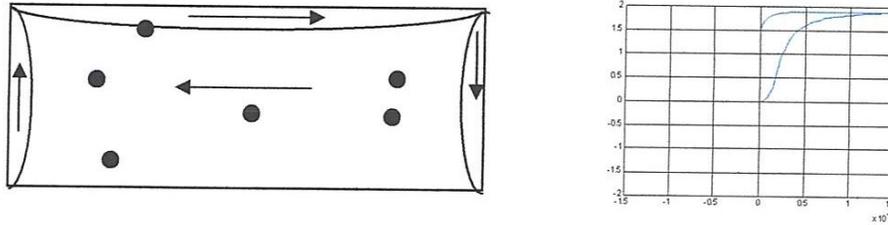


Figure 1.11 Retour au zéro d'excitation

Les étapes suivantes du parcourt du cycle d'hystérésis majeur sont obtenues en imposant une excitation de même direction mais de sens contraire. Ensuite, comme précédemment, les parois vont se déplacer et s'accroche aux défauts, puis se décrocher en avançant de nouveau. La valeur de l'excitation, sur le cycle majeur, pour laquelle l'aimantation passe par zéro est appelée excitation coercitive (notée H_c).

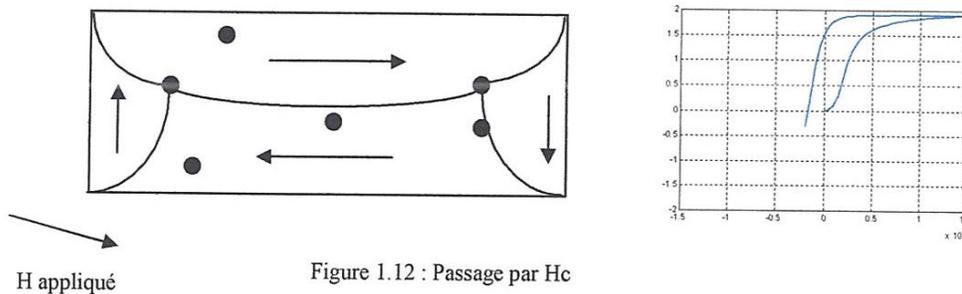


Figure 1.12 : Passage par H_c

Les parois se déplacent jusqu'à disparaître de nouveau au profit du domaine de sens opposé à celui de la saturation haute précédemment évoquée.

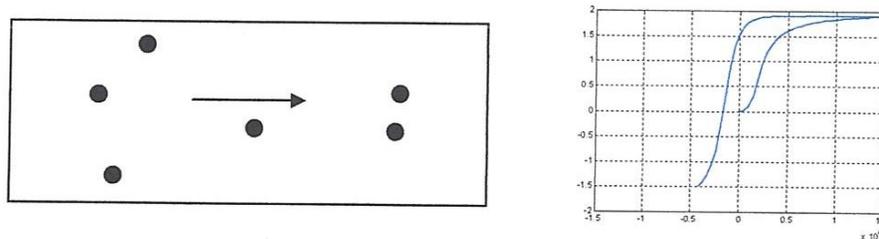


Figure 1.13 : Disparition des parois avant saturation basse

Enfin, la dernière étape est de nouveau la rotation des moments. Cette nouvelle étape place l'échantillon dans son état de saturation basse. La branche montante du cycle

1 : Phénomènes d'hystérésis magnétiques

d'hystérésis se parcourt en partant de cet état de saturation et en augmentant l'excitation. Elle permet de fermer le cycle majeur. Cette branche est parfaitement symétrique par rapport à la branche descendante.

Ce que nous venons de décrire est une représentation simplifiée du rôle joué par les parois dans le processus d'aimantation. Elle permet de se faire une idée assez précise du processus qui génère le comportement hystérétique du matériau.

1.1.2.3 Classification des matériaux ferromagnétiques

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

1. Matériaux ferromagnétiques doux :

B_r plutôt élevée

H_c plutôt faible

Surface du cycle d'hystérésis faible

2. Matériaux ferromagnétiques durs :

B_r plutôt faible

H_c plutôt élevée

Surface du cycle d'hystérésis élevée

1.2 Les pertes magnétiques

1.2.1 Les pertes magnétiques dans La matière

Tout système à base de matériaux magnétiques soumis à un champ d'excitation extérieur variable, subit des pertes énergétiques appelées pertes fer.

On distingue deux phénomènes physiques principaux à l'origine de ces pertes : les pertes par hystérésis (déplacement des parois) et les pertes par courants de Foucault.

$$P_{\text{Fer}} = P_H + P_{\text{CF}}$$

1.2.2 Les pertes en régime statique

On entend par régime statique, l'absence de phénomènes dynamiques dus entre

1 :Phénomènes d'hystérésis magnétiques

autre à l'apparition des courants de Foucault lorsque le matériau est soumis à une excitation fortement variable dans le temps.

Les pertes par hystérésis en régime statique sont donc uniquement liées, de manière intrinsèque, aux propriétés physiques du matériau et à sa géométrie.

Sous l'effet des champs d'induction et d'excitation, les forces de Laplace créent des contraintes internes au matériau qui mettent en mouvement les domaines de Weiss.

Leur frottement les uns contre les autres favorise l'échauffement du matériau.

Ces pertes proviennent de la différence entre l'énergie emmagasinée durant la croissance de H et celle restituée lors de la décroissance. Pour un parcours complet du cycle, l'énergie est proportionnelle à son aire et au volume du matériau.

Les pertes par hystérésis sont exprimées :

$$P_H = \oint H dB$$

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés, dans ce chapitre à rappeler quelques généralités concernant le magnétisme. Nous avons également présenté la classification des matériaux à partir de leur comportement magnétique. Ceci nous a amené à une description du ferromagnétisme et du processus d'aimantation hystérétique associé.

le prochain chapitre sera consacré à mise en œuvre de modèle de Preisach.

CHAPITRE 2

*Modélisation de l'hystérésis
magnétiques par le modèle de
Preisach*

Introduction

Le chapitre précédent a montré que la difficulté de la modélisation de ce phénomène réside dans sa non réversibilité.

Il existe trois approches de modélisation de ce phénomène :

- Les modèles de type analytiques.
- Les modèles de type Langevin.
- Les modèles de type Preisach.

Dans ce chapitre, nous abordons la description du modèle de Preisach décrivant le phénomène d'hystérésis :

- le modèle type Preisach
- le modèle type Langevin (modèle de Jiles-Atherton).

2. Présentation du Modèle

2.1 Modèle de Preisach

L'un des modèles les plus utilisés pour représenter l'hystérésis des matériaux magnétiques est incontestablement le modèle proposé par le physicien allemand Preisach dans les années 30 [3], [4]. Son approche purement intuitive est basée sur l'observation du mécanisme d'aimantation.

2.1.1. Définition du modèle

Dans ce modèle, l'état magnétique du matériau à un instant donné est représenté par un ensemble d'entités magnétiques ayant deux états possibles ($M=+1$ ou $M=-1$) régies par un cycle élémentaire rectangulaire, dissymétrique par rapport à l'origine. Ce cycle est caractérisé par les champs de basculement haut α et bas β , avec $\beta \leq \alpha$, pour lesquels il y a transition irréversible de l'état bas ($M=-1$) vers l'état haut ($M=+1$) ou inversement. Un tel cycle élémentaire est représenté sur la figure 2.1

Le calcul de l'aimantation du matériau repose sur une distribution statistique des cycles élémentaires (ou opérateurs), dont les variables sont α et β . Soit $\rho(\alpha, \beta)$ cette fonction de distribution appelée aussi densité de Preisach. Elle ne dépend pas de l'état magnétique du matériau.

En appelant :

- $\rho(\alpha, \beta)$ la densité de Preisach,
- $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}[\mathbf{H}]$ l'opérateur associé à la particule admettant pour champs de basculement α et β , valant (+1) dans l'état positif et (-1) dans l'état négatif,

l'aimantation $\mathbf{M}(t)$, résultant de l'application du champ $\mathbf{H}(t)$ à l'instant t , s'écrit dans le formalisme donné par Preisach :

$$\mathbf{M}(t) = \iint \rho(\alpha, \beta) \hat{\gamma}[\mathbf{H}(t)] d\alpha d\beta \quad (2.1)$$

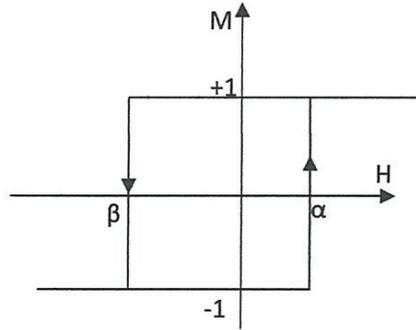


Figure 2.1 cycle élémentaire d'une entité

2.2 Interprétation géométrique

La densité de Preisach $\rho(\alpha, \beta)$ caractérise le matériau. Nous avons vu qu'elle n'est définie que pour $\alpha \geq \beta$. De plus, pour une certaine valeur du champ H_s , le matériau est saturé et tous les opérateurs du modèle ont la même aimantation (+1 ou -1 suivant le signe de H_s). Ainsi, la densité de Preisach présente les propriétés suivantes :

- Elle est définie dans le domaine $S = \{\alpha \geq \beta, \beta \geq -H_s, \alpha \leq H_s\}$
- Le cycle majeur étant symétrique, la densité est symétrique par rapport à la droite $\alpha = \beta$.
- Le cycle majeur étant fermé, la densité est bornée.

Le domaine S représente un triangle dans le plan cartésien $(\alpha\beta)$ appelé plan de Preisach (figure 2.2).

S est subdivisé en deux parties dont la forme dépend du temps :

- $S^+(t)$ contient tous les opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ dans l'état +1,
- $S^-(t)$ contient tous les opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ dans l'état -1 .

La relation (2.1) peut alors s'écrire :

$$M(t) = \iint_{S^+(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.2)$$

Il apparaît clairement que l'aimantation $\mathbf{M}(t)$ dépend uniquement de la répartition des domaines S , et plus précisément de la frontière $L(t)$, séparant les domaines $S^+(t)$ et $S^-(t)$. Cette frontière contient l'histoire du matériau et évolue avec les variations de champ.

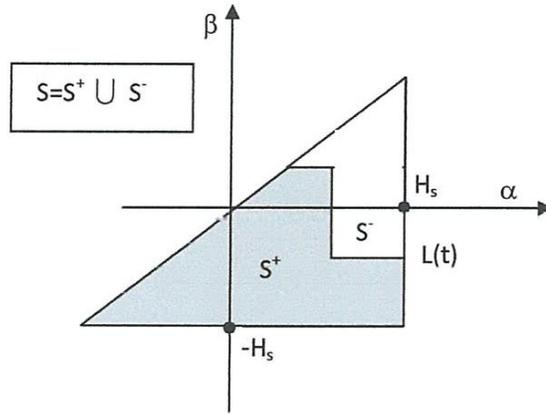


Figure 2.2: Plan de Preisach

2.2.1 Représentation équivalente

La densité de Preisach peut être étudiée de façon équivalente en fonction de α et β ou H_c et H_i . En effet, les entités composant le modèle sont souvent interprétées comme des particules magnétiques monodomaines parfaites, chacune étant caractérisée par un champ coercitif H_c et soumis à un champ d'interaction H_i . Ce champ d'interaction est opposé au champ de dissymétrie du cycle élémentaire rectangulaire associé à chaque particule. Les deux grandeurs H_c et H_i sont définies par le système (2.3) et représentées sur la figure 2.3.

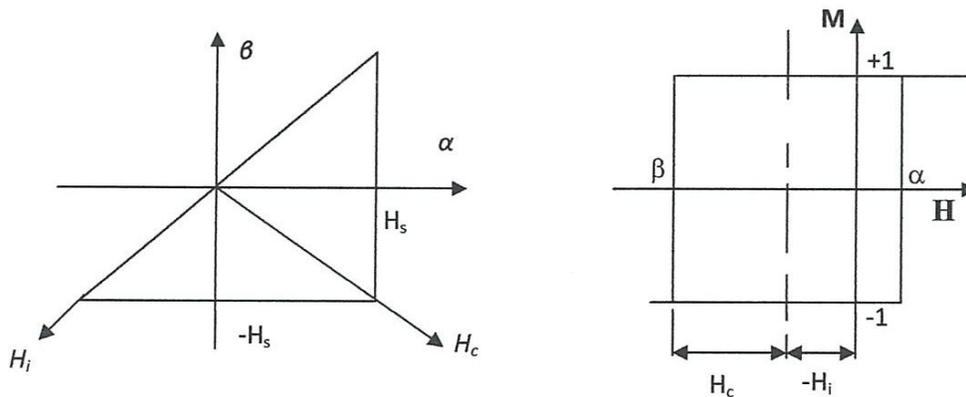


Figure 2.3 : Définition du cycle élémentaire et du plan de Preisach en fonction de H_c et H_i

$$\begin{cases} H_c = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ H_i = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases} \quad (2.3).$$

2.2.3 Principe du modèle

Aidons-nous de la représentation géométrique dans le plans de Preisach pour mieux comprendre le fonctionnement du modèle. Soit un matériau désaimanté ($H=0$, $M=0$) à l'instant $t=0$. Appliquons à l'instant t_1 un champ $H_1 > 0$, puis à l'instant $t_2 > t_1$ un champ $H_2 < H_1$.

D'après la relation (2.2)

$$M(t)=0 \Leftrightarrow \iint_{S^+(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \iint_{S^-(t)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.4)$$

Compte tenu de la symétrie de $\rho(\alpha, \beta)$ par rapport à la droite $\alpha = -\beta$, l'état désaimanté admet comme frontière $L(0)$ dans le plan de Preisach la droite $\alpha = -\beta$ (figure 2.1). Les deux domaines $S^+(0)$ et $S^-(0)$ sont superposables.

Supposons que l'on applique un champ positif H_1 , inférieur à H_s . Toutes les particules associées aux opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ tel que $\alpha \leq H_1$ basculent dans l'état 'haut' et $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ vaut alors (+1) tandis que les autres particules restent dans leurs état initial. Dans le plan de Preisach, la frontière $L(t)$ présente un sommet en H_1 (figure 2.4.2) qui devient un état de l'histoire du matériau.

Appliquons maintenant un champ H_2 inférieur à H_1 . Deux cas se présentent :

- $H_2 < H_1$ et $|H_2| < |H_1|$

toutes les particules associées à un opérateur $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ et tel que $\beta \geq H_2$ basculent dans l'état bas et l'opérateur vaut (-1). La frontière $L(t)$ comporte alors deux sommets distincts correspondant à H_1 et H_2 , l'histoire étant elle aussi constituée de deux états $(H_1, M(H_1))$ et $(H_2, M(H_2))$ (figure 2.3).

- $H_2 < H_1$ et $|H_2| > |H_1|$

Le sommet H_1 disparaît de la frontière $L(t)$ qui ne comporte dès lors que le sommet H_2 . De la même façon, l'état $(H_1, M(H_1))$ est effacé de l'histoire du matériau (figure 2.4).

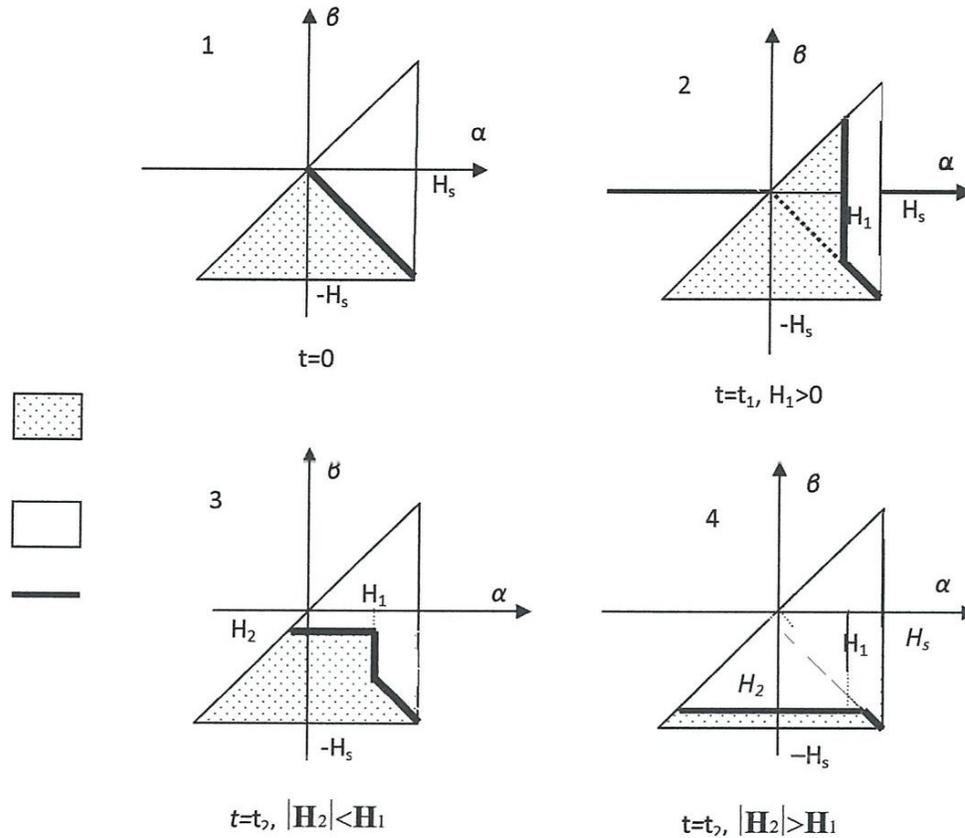


Figure 2.4 : Evolution de la frontière $L(t)$ dans le plan de Preisach

Le même raisonnement peut s'étendre aux champs qui sont ensuite appliqués. En particulier, si à partir de la figure 2.3, le nouveau champ appliqué vaut H_1 , le plan de Preisach résultant se trouve dans la même configuration que celui de la figure 2.4.

La frontière $L(t)$ qui sépare les deux domaines $S^+(t)$ et $S^-(t)$ est une ligne polygonale composée de segments perpendiculaires aux axes, et dont les sommets représentent les coordonnées (α, β) des points de rebroussement constituant l'histoire du matériau. Les segments horizontaux résultent de l'application de champs décroissants tandis que les segments verticaux correspondent à l'application de champs croissants. L'aimantation est donc complètement déterminée par l'histoire et l'état initial (saturé positif, négatif ou désaimanté) du matériau.

Ainsi, l'évolution de la configuration magnétique d'un matériau soumis à différents champs peut être aussi bien étudiée à partir des cycles $M(H)$ qu'à partir du plan de Preisach. La figure 2.5 montre les deux représentations pour une série de champs d'amplitude décroissante, appliquée à partir de l'état saturé négativement.

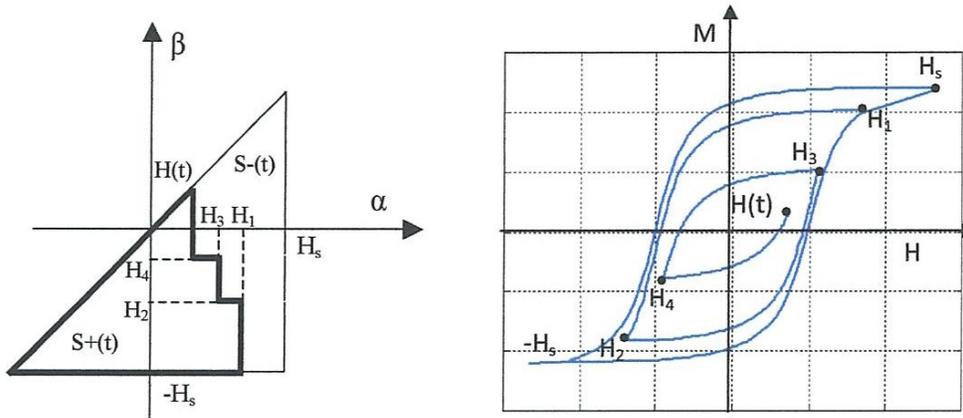


Figure 2.5: Représentation dans le plan de Preisach et dans le plan (HOM)

De l'aimantation $M(0, H_s, -H_s, H_1, H_2, H_3, H_4, H_t, H(t))$

2.3 Propriétés du modèle

L'étude précédente permet de déduire deux propriétés importantes du modèle :

Certains des états magnétiques atteints peuvent disparaître de l'histoire. En effet, l'application d'un champ \mathbf{H} élimine les états antérieurs (α_i, β_i) tels que $\alpha_i \leq \mathbf{H}$ ou $\beta_i \geq \mathbf{H}$. En particulier, l'application d'un champ supérieur ou égal au champ de saturation H_s du matériau efface tous les états de l'histoire. C'est la propriété d'effacement partiel.

Afin d'illustrer cette propriété, reprenons la figure 2.4 en supposant que le champ appliqué \mathbf{H}_4 est supérieur à \mathbf{H}_2 en valeur absolue. Les configurations du plan de Preisach et du plan (HOM) obtenues après application de la même série du champ applique sont représentées sur la figure 2.6.

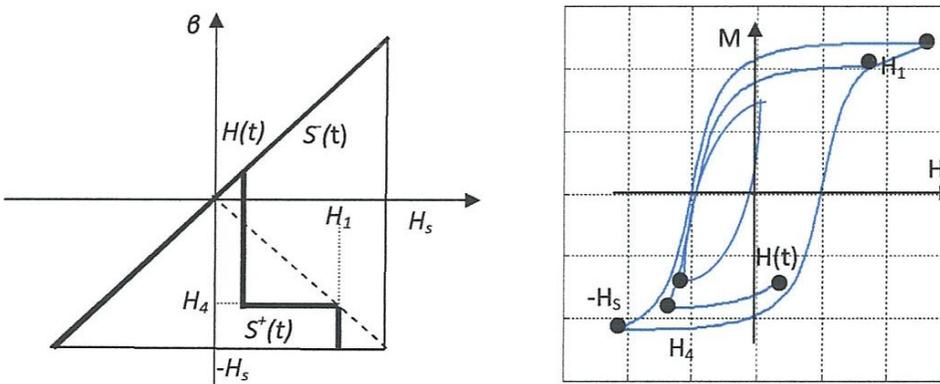


Figure 2.6 : Représentation dans le plan (HOM) et dans le plan de Preisach

2 : Modélisation de l'hystérésis magnétiques par le modèle de Preisach

Cette propriété a pour conséquence la stabilité des cycles mineurs.

La seconde propriété est la propriété de congruence du cycles mineurs. Tous les cycles mineurs ayant pour champs extrêmes H_1 et H_2 sont congruents au sens géométrique c'est à dire que, quel que soit l'état magnétique antérieur, les cycles mineurs obtenus sont superposables (figure 2.7).

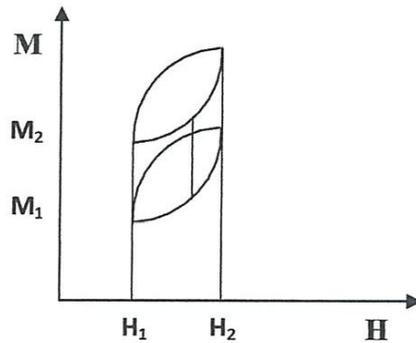


Figure 2.7 : Cycles mineurs congruents

Dans les années 70, le mathématicien russe Kransoselskii [5], convaincu que ce modèle contenait une idée mathématique originale, l'a dissocié de son aspect physique pour en dégager une théorie très générale et purement mathématique, applicable à tout problème physique de nature quelconque comportant des propriétés hystérétiques. Il a ainsi révélé la nature phénoménologique de ce modèle. Mayergoyz a poursuivi cette étude et a clairement défini les conditions d'utilisation du modèle. Il a ainsi démontré que les deux propriétés énoncées ci-dessus constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour représenter un problème hystérétique par le modèle de Preisach [6].

2.4 Détermination de la fonction de distribution $\rho(\alpha,\beta)$

La définition complète du modèle de Preisach nécessite au préalable une connaissance de la fonction de distribution de Preisach. Elle est nécessaire pour calculer l'aimantation finale de l'échantillon ferromagnétique décrite par (2.1). Deux orientations de recherche ont été suivies pour la déterminer, la première à partir d'un seul ou d'un ensemble de cycles expérimentaux, la seconde est d'essayer de l'approcher par une expression analytique.

Dans notre travail on va baser sur la seconde orientation (distribution de Lorentz modifiée)

Les distributions de type Lorentzienne modifiée

La fonction de distribution modifiée s'écrit sous la forme :

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{ka^2}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right) \left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)} \quad (2.5)$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \left[1, \frac{H_s}{H_c}\right]$

2.5 Expression de l'aimantation à partir de la fonction de Lorentz modifiée

L'expression analytique de la fonction de distribution de Lorentz modifiée, permet une formulation mathématique sous forme intégrale et simple à manipuler du phénomène d'hystérésis généré par le modèle de Preisach. Celle-ci est décrite par l'équation (2.6).

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) \pm 2 \iint_s \frac{ka^2}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right] \left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} d\alpha d\beta \quad (2.6)$$

Où M_{i-1} est l'aimantation à l'instant précédente et s représente le domaine d'intégration dans le triangle de Preisach (Figure 2.4).

a. Expression de la courbe de première aimantation

La courbe de première aimantation est déduite à partir d'un état désaimanté de l'échantillon ferromagnétique sous l'effet d'un champ croissant à partir de zéro et qui peut atteindre le champ de saturation. La formulation mathématique, correspondante à cette courbe est déduite de l'équation (2.7) tel que l'on a [7].

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t_i)} \left[\frac{ka^2}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right]} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\beta}{\left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} \right] d\alpha \quad (2.7)$$

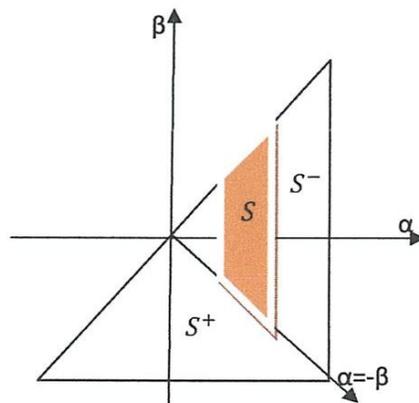


Figure 2.10 : Plan de Preisach correspondant à la courbe de première aimantation

On pose

$$f(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\beta}{\left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1/a}{\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)\right)^2\right]} d\beta \quad (2.8)$$

Et,

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)\right) \Rightarrow dX = \frac{1}{H_c \sqrt{a}} d\beta \quad (2.9)$$

Sachant que,

$$\int \frac{1}{(1+X^2)} dX = \text{Arctg}(X) + \text{Cste} \quad (2.10)$$

Et si,

$$-\alpha \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_c} + b\right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b\right) \quad (2.11)$$

On obtient :

$$f(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_c} + b\right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b\right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1+X^2)} dX \quad (2.12)$$

Finalement l'expression de L'aimantation est :

$$M(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t)} \frac{k a \sqrt{a} H_s}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)} \left[\text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_s} + b \right) \right) - \text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_s} + b \right) \right) \right] d\alpha \quad (2.13)$$

b. Expression de la branche descendante du cycle majeur

Cette branche du cycle majeur est obtenue à partir de l'état saturé de l'échantillon lorsque toute la surface du triangle de Preisach est égale à S^+ est l'histoire du matériau est réduite au champ de saturation $+H_s$ au niveau des maxima et à $-H_s$ à celui des minima. Un champ décroissant appliqué à partir de cet état et allant jusqu'à $-H_s$ induit une diminution progressive de la surface S^+ jusqu'à son annulation s'écrit :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) - 2 \int_{H(t_i)}^{H(t_{i-1})} \left[\frac{k a^2}{\left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} \int_{\beta}^{H_s} \frac{d\alpha}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right]} \right] d\beta \quad (2.14)$$

Supposons que:

$$g(t) = \int_{\beta}^{H_s} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)} = \int_{\beta}^{H_s} \frac{1/a}{\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)\right)^2\right]} d\beta \quad (2.15)$$

et,

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)\right) \Rightarrow d\alpha = \sqrt{a} dX \quad (2.16)$$

Sachant que,

$$\beta \leq \alpha \leq H_s \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} - b \right) \quad (2.17)$$

alors :

$$g(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} - b \right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1+X^2)} dX \quad (2.18)$$

Donc :

$$M(t) = M_{i-1}(t) - 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t)} \frac{k a \sqrt{a} H_c}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right)^2 \right)} \left[\text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{H_s}{H_c} - b \right) \right) - \text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right) \right) \right] d\alpha \quad (2.19)$$

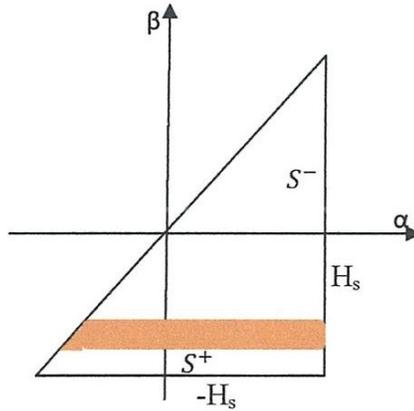


Figure 2.11 : le plan de Preisach correspondant à la courbe de descendante

c. La branche ascendante du cycle majeur

Elle est obtenue à partir de l'état de saturation négative. Initialement, la totalité de la surface du plan de Preisach correspond à la surface S^- . Un champ croissant et monotone est appliqué pour augmenter progressivement la surface S^+ et par conséquent l'aimantation jusqu'à la saturation positive. Sous ces conditions, l'aimantation ne peut suivre que la branche ascendante du cycle majeur qui s'écrit :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t)} \left[\frac{k a^2}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b \right)^2 \right]} \int_{-H_s}^{+\alpha} \frac{d\beta}{\left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right)^2 \right]} \right] d\alpha \quad (2.20)$$

Supposons que :

$$n(t) = \int_{-H_s}^{\alpha} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right)^2 \right)} = \int_{-H_s}^{\alpha} \frac{1/a}{\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right) \right)^2 \right]} d\beta \quad (2.21)$$

Utilisant (2.9) et si

2 : Modélisation de l'hystérésis magnétiques par le modèle de Preisach

$$-H_s \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \quad (2.22)$$

On obtient :

$$n(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1+X^2)} dX \quad (2.23)$$

Utilisant (2.10), on obtient :

$$M(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t)} \frac{ka\sqrt{a}H_c}{(a+(\frac{\alpha}{H_c}-b)^2)} \left[\text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \right) - \text{Arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right) \right) \right] d\alpha \quad (2.24)$$

Le plan de Preisach correspondant est défini dans la figure suivante :

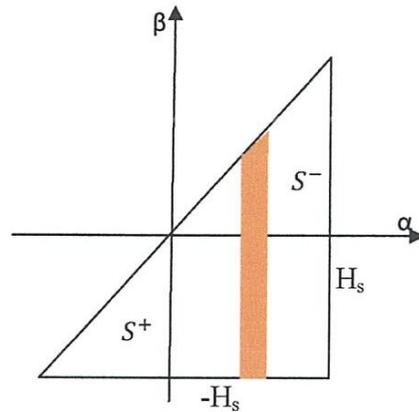
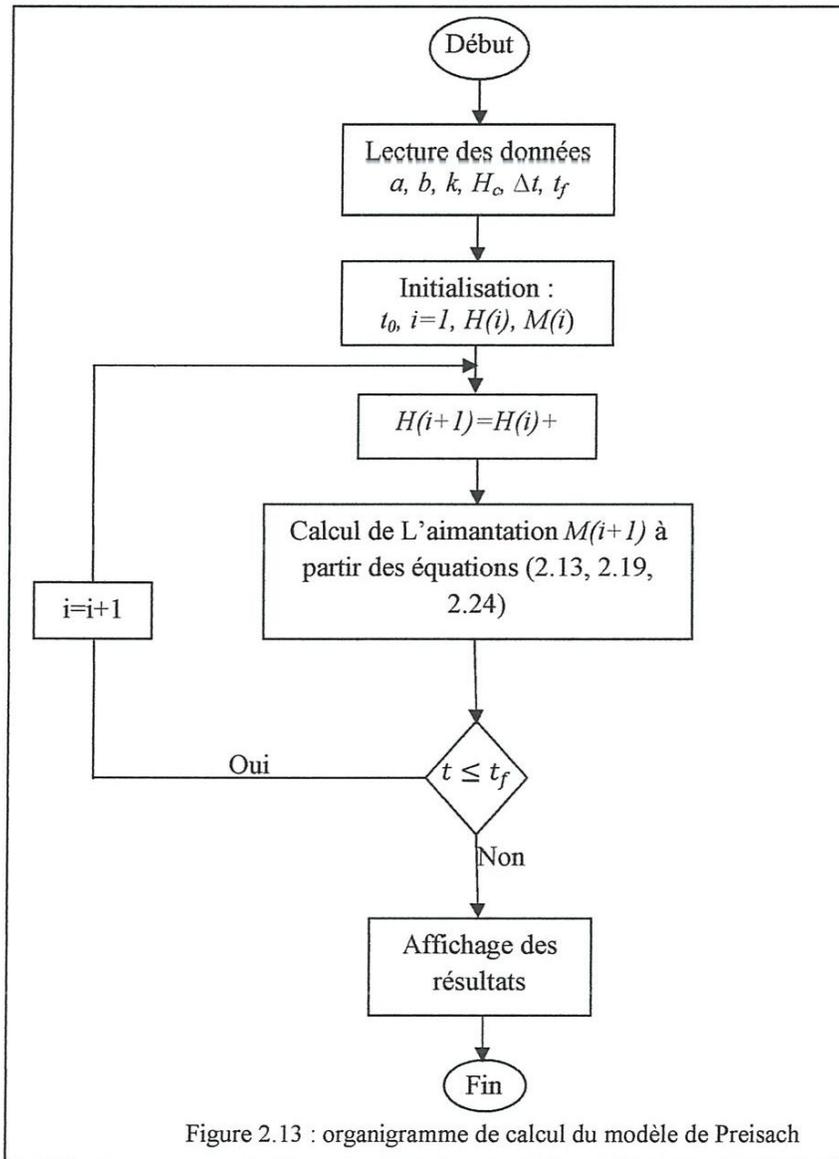


Figure 2.12: le plan de Preisach correspondant à la courbe ascendante

2.6 Simulation numérique de l'hystérésis magnétique par le modèle de Preisach

2.6.1 : Evolution des cycles d'hystérésis

Les différentes étapes pour la construction du cycle d'hystérésis seront représentées par l'organigramme ci-dessous, à partir duquel on peut réaliser un programme permet de générer des cycles d'hystérésis.



Le programme que nous avons développé permet de générer des cycles d'hystérésis. La figure 2.15 représente le cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique pour une excitation sinusoïdale (figure 2.14).

2 : Modélisation de l'hystérésis magnétiques par le modèle de Preisach

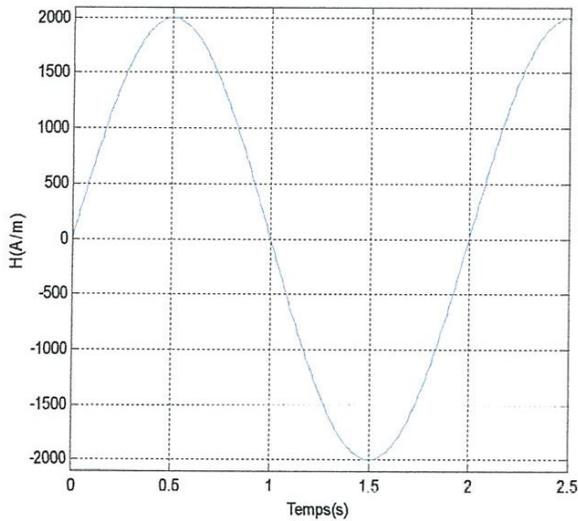


Figure 2.14 : Champ magnétique d'excitation

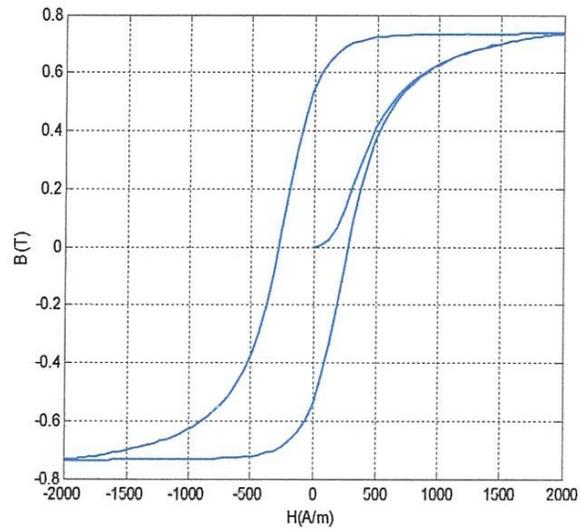


Figure 2.15 : Cycle d'hystérésis théorique

La figure 2.17 représente le cycle d'hystérésis généré par le modèle de Preisach pour une excitation non sinusoïdale (transitoire), (figure 2.16).

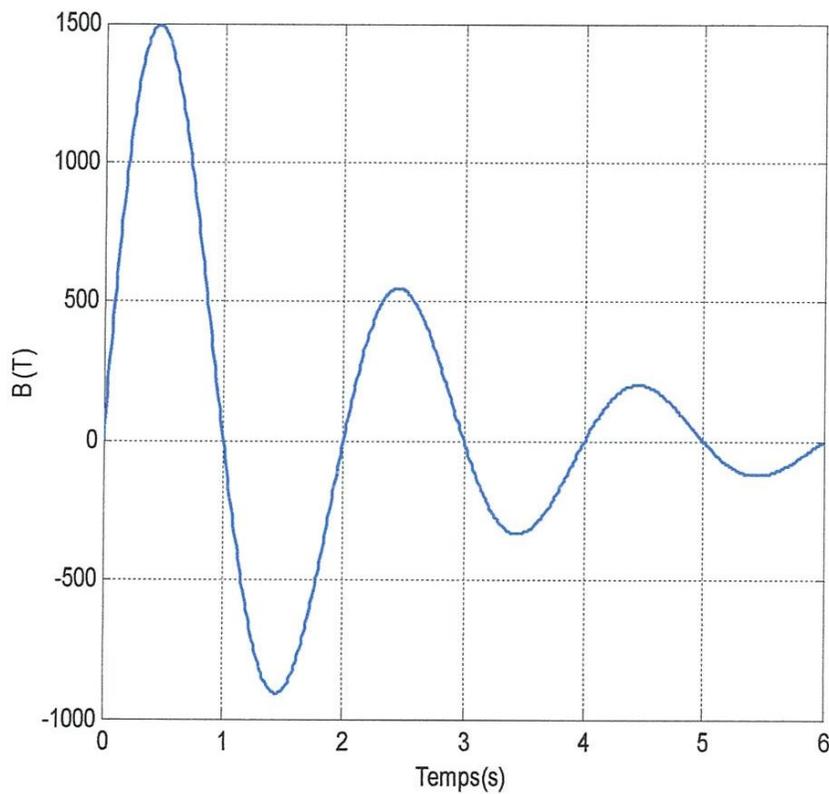


Figure 2.16 : Champ d'excitation non sinusoïdale

2 : Modélisation de l'hystérésis magnétiques par le modèle de Preisach

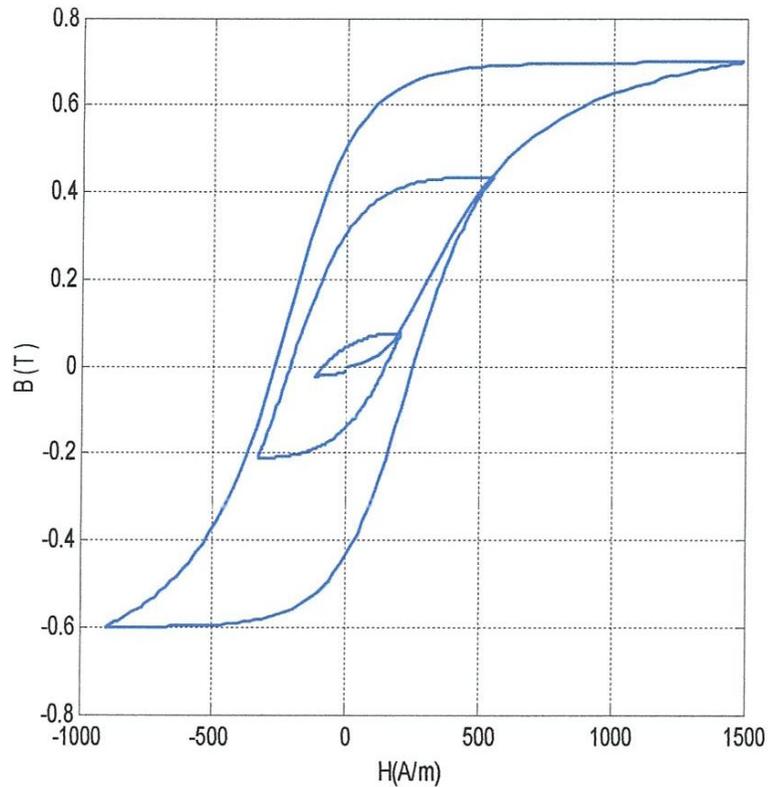


Figure 2.17 : Cycles d'hystérésis sous l'effet du champ d'excitation non sinusoïdale

2.6.2 : Génération des cycles mineurs

La génération des cycles mineurs a été effectuée en exploitant le modèle d'hystérésis de Preisach lorsque le matériau est désaimanté. Les résultats fournis par le modèle de modèle sont donnée par la figure 2.18. Le champ magnétique d'excitation utilisé pour l'obtention des cycles mineurs est représenté à la figure 2.19.

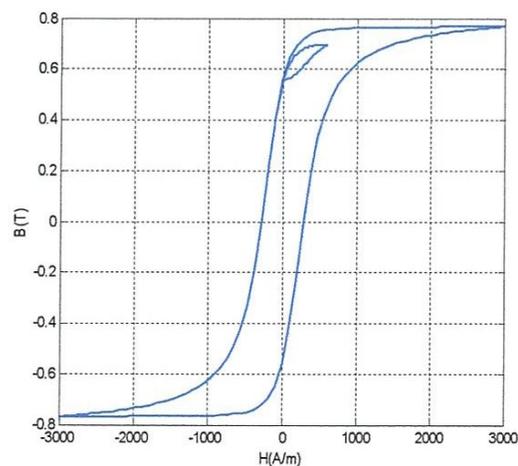


Figure 2.18 : : Génération des cycles d'hystérésis avec des cycles mineurs

2 : Modélisation de l'hystérésis magnétiques par le modèle de Preisach

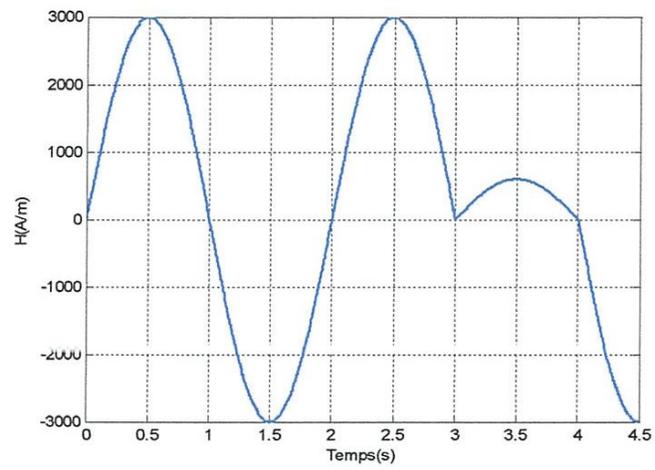


Figure 2.19 : Champ magnétique d'excitation pour la génération des cycles d'hystérésis avec des cycles mineurs

CHAPITRE 3

*Intégration de modèles d'hystérésis
de Preisach dans un code de calcul
par éléments finis*

Introduction

Dans ce chapitre nous allons établir les formulations éléments finis des problèmes électromagnétiques, proposer un algorithme de résolution du problème intégrant les modèles d'hystérésis (statique et dynamique) et présenter le code éléments finis développé pour la résolution numérique des différents problèmes. Nous procédons aussi à une comparaison entre les deux modèles statiques (Jiles Atherton et Preisach).

3.1 Intégration du modèle d'hystérésis dans la MEF

La caractéristique magnétique est représentée par une courbe de première aimantation par réflectivité complexe par un modèle d'hystérésis. Nous ne développons ici que le dernier cas ainsi que la méthode d'intégration dans un calcul d'éléments finis [8], [9], [10], . Mais auparavant nous rappelons les équations de Maxwell et leur développement dans un système de coordonnées cartésiennes et cylindriques pour les deux cas d'étude magnétostatique et magnétodynamique, par la suite nous présentons les formulations éléments finis correspondantes. [11], [12],.

3.1.1 Equations de Maxwell

Tous les phénomènes de l'électromagnétisme sont décrits par les quatre équations de Maxwell locales.

Ces équations aux dérivées partielles peuvent être séparées en équations de couplage électromagnétique (3.1) et (3.2) et de conservation (3.3) et (3.4). Ce sont :

- Maxwell Faraday $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3.1)

- Maxwell d'Ampère $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (3.2)

- Maxwell Gauss électrique $div \vec{D} = \rho$ (3.3)

- Maxwell Gauss magnétique $div \vec{B} = 0$ (3.4)

Les grandeurs intervenant dans ces équations exprimées en SI, sont :

L'induction magnétique \vec{B} [T]

Le déplacement électrique \vec{D} [C.m⁻²]

Le champ électrique \vec{E} [V.m⁻¹]

Le champ magnétique $\vec{H}[A.m^{-1}]$

La densité de courant $\vec{j}[A.m^{-1}]$

La densité de charge volumique $\rho[C.m^{-3}]$

Le temps $t[s]$

Pour décrire complètement le problème, les relations constitutives du matériau sont ajoutées aux équations de Maxwell.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3.6)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B}) + \vec{j}_s \quad (3.7)$$

ϵ représente la permittivité, μ_0 la perméabilité dans l'air, M l'aimantation du matériau, σ la conductivité électrique \vec{v}_d la vitesse de déplacement de charges, J_s la densité de courant des sources, A la limite de séparation de deux milieux correspondant aux indices i et j dans le domaine d'étude, des relations de passage doivent être telles que :

- La relation de continuité de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} :

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_i - \vec{n} \cdot \vec{B}_j \quad (3.8)$$

- La relation de continuité de la composante normale de densité de courant \vec{j} :

$$\vec{n} \cdot \vec{j}_i = \vec{n} \cdot \vec{j}_j \quad (3.9)$$

- La relation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} :

$$\vec{E}_i \times \vec{n} = \vec{E}_j \times \vec{n} \quad (3.10)$$

- La relation de continuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} :

$$\vec{H}_i \times \vec{n} = \vec{H}_j \times \vec{n} \quad (3.11)$$

Les formulations peuvent être modifiées selon la nature de système étudié et parfois certaines grandeurs deviennent négligeables. C'est pour cette raison que, des simplifications peuvent être apportées. Si on

considère que le phénomènes étudiés relèvent du domaine quasi-stationnaire ou magnétodynamique à des fréquences inférieures à 10^{12} Hz, les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. Ceci se traduit par :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{j} \quad (3.12)$$

Et l'équation de Maxwell Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (3.13)$$

Dans le cadre des systèmes étudiés, on peut considérer que les charges volumiques sont négligées. Ainsi, L'équation de Maxwell Gauss électrique s'écrit alors :

$$div \vec{D} = 0 \quad (3.14)$$

On considère aussi que, le terme $\sigma (\vec{V}_d \times \vec{B})$ est négligeable car la vitesse de déplacement est nulle. Donc,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_s \quad (3.15)$$

3.1.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Le système d'équations composé de (3.1), (3.4), (3.13) et (3.14) présente plusieurs inconnues et se prête mal à une résolution numérique. On utilise donc le potentiel vecteur pour réduire le nombre d'inconnues et résoudre le problème électromagnétique. On définit donc à partir de (3.4), le potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (3.16)$$

Le système admet dans ce cas une solutions de la forme $\vec{A} + \overrightarrow{grad} f$, d'où la nécessité d'imposer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de solution. Dans le cadre des systèmes à deux dimensions ceci n'est pas nécessaire. La jauge de Coulomb définie par $div \vec{A} = 0$ est vérifiée. Le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{j} \\ \overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous allons présenter maintenant les formulations des problèmes magnétostatique et magnétodynamique intégrant la non linéarité introduite par le modèle d'hystérésis.

3.1.2.1 Problème magnétostatique non linéaire

Dans le cas magnétostatique, on suppose que le champ magnétique est produit par des sources de courant indépendantes du temps.

En se basant sur (3.6) on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\overrightarrow{rot}\vec{H} + \overrightarrow{rot}\vec{M}) \quad (3.18)$$

La substitution de (3.13) et (3.16) dans (3.18) donne :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \mu_0(\vec{J}_s + \overrightarrow{rot}\vec{M}) \quad (3.19)$$

L'aimantation du matériau \vec{M} est déterminée par le modèle d'hystérésis. Le système d'équations à résoudre dans ce cas est :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \mu_0(\vec{J}_s + \overrightarrow{rot}\vec{M}) \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Le comportement magnétique non linéaire est introduit par le modèle d'hystérésis $\vec{M} = f(\vec{H})$.

3.1.3 : Formulation éléments finis du problème électromagnétique

Les dispositifs étudiés s'adaptent à une modélisation en deux dimensions dans un système de coordonnées cartésiennes ou axisymétriques. La résolution de ces systèmes par la méthode des éléments finis passe par la mise en équation de (3.20) sous forme d'équations aux dérivés partielles dans les deux systèmes de coordonnées. Dans ce paragraphe, on présentera ces équations ainsi que leurs formes matricielles établies pour une résolution numérique.

3.1.3.1 : Problème magnétostatique bidimensionnel

Pour un problème magnétostatique et dans un système de coordonnées cartésiennes le champ magnétique et l'aimantation du matériau évoluent dans le plan (x,y), la relation (3.20) s'écrit :

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu_0 \left(J_s + \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \quad (3.21)$$

3 :Intégration de modèles d'hystérésis de Preisach dans un code de calcul par éléments finis

J_s est la densité de courant de la source, M_x la projection de l'aimantation \vec{M} sur l'axe (ox) et M_y sa projection sur l'axe (oy) . En appliquant la méthode de Galerkin à cette équation on a :

$$\iint_{\Omega} \left[\omega_i \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} \left[\omega_i \mu_0 \left(J_s + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \right] d\Omega ; d\Omega = dx dy \quad (3.22)$$

Où Ω est le domaine de résolution, ω_i les fonctions de projection. Cette expression est la forme forte de la formulation élément finis. Mais, l'intégration par partie des termes en dérivées seconde nous donne la forme faible de cette formulation. Cette dernière permet d'explicitier les conditions aux limites naturelles.

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) d\Omega - \left[\int \omega_i \frac{\partial A}{\partial x} dx + \int \omega_i \frac{\partial A}{\partial y} dy \right] = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega + \iint_{\Omega} \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.23)$$

La discrétisation de A sous la forme $A = \sum_j (\omega_j A_j)$ et l'introduction des conditions de Neumann homogènes nous permet d'écrire cette équation sous la forme :

$$\sum_j \left[\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] A_j = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega + \iint_{\Omega} \mu_0 \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.24)$$

Ceci nous conduit à la forme matricielle suivante :

$$[M]\{A\} = \{F\} + \{G\} \quad (3.25)$$

Tels que,

$$\begin{cases} M_{ij} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ F_i = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 J_s d\Omega \\ G_i = \iint_{\Omega} \mu_0 \omega_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) d\Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

Le maillage utilisé est un maillage triangulaire, et les fonctions d'interpolations sont de premier ordre.

$$\omega_i = (a_i + b_i + c_i) \quad i=1,2,3 \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = ((x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2\Delta_s) \\ b_1 = ((y_2 - y_3) / 2\Delta_s) \\ c_1 = ((x_3 - x_2) / 2\Delta_s) \end{cases} \quad (3.28)$$

Où, Δ_s est l'aire du triangle et les autres coefficients a_i , b_i et c_i sont obtenus par une permutation circulaire.

On obtient alors :

$$\begin{cases} M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \Delta_s \\ F_i = \frac{\Delta \varepsilon}{3} J_s \\ G_i = \mu_0 \Delta_s (b_i M_y - c_i M_x) \end{cases} \quad (3.29)$$

Dans un repère cylindriques ces coefficients prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} M_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \Delta_s / r_m \\ F_i = \frac{\Delta \varepsilon}{3} J_s \\ G_i = \mu_0 \Delta_s (b_i M_z - c_i M_r) \end{cases} \quad (3.30)$$

Où r_m est le rayon moyen dans l'élément triangulaire.

Une fois que les différentes formulations en éléments finis intégrant le modèle d'hystérésis sont établies, une méthode de résolution du problème non linéaire doit être choisie. Dans le paragraphe suivant nous allons proposer un algorithme de résolution [aziz].

3.2 Méthode de résolution du problème non linéaire

Une combinaison entre la MEF et un modèle d'hystérésis aboutit à un système non linéaire, une technique fiable et rapide pour la résolution de ce système et demandée, habituellement pour traiter les problèmes non linéaires la méthode de Newton Raphson est la plus en vue mais, dans le cas ou cette non linéarité est due à l'introduction de l'effet de l'hystérésis cette méthode n'est pas recommandée, son application exige le calcul de la matrice de rigidité pour chaque itération et nécessite l'évaluation de la dérivée de la courbe B(H) pour estimer le Jacobien ce qui la rend source d'alourdissement du processus itératif de résolution, en plus de sa complexité de mise en œuvre dans la MEF.

Donc pour traiter ce genre de problème plusieurs travaux ont été publiés dans ce sens on cite [13][14][dans lesquels une nouvelle alternative a été utilisée et qui consiste en la méthode du point fixe qui présente l'avantage de ne calculer la matrice de rigidité qu'une seule fois en plus de la convergence de la solution pour n'importe quelle valeur initiale imposée[15], d'où sa rapidité et sa simplicité de mise en œuvre.

Pour voire la différence entre les deux méthodes qui viennent d'être cité un travail qui a été effectué par [16] montre que la méthode de point fixe prend le dessus sur la méthode de Newton Raphson en ce qui concerne la facilité d'implémentation et la stabilité de la convergence c'est en se basant sur ces résultats que nous

souhaitons l'adopter pour la résolution du système (3.39), un dernier point reste à dire est que cette approche peut être associée soit avec un modèle d'hystérésis direct soit inverse le dernier consomme un temps plus grand à cause de la nécessité de l'inversion du modèle, pour cette raison on préfère appliquer la technique du point fixe avec un modèle d'hystérésis direct en utilisant un facteur de relaxation pour pondérer le champ magnétique.

3.2.1 Présentation de la méthode du pont fixe

Toute équation du type $f(x) = 0$ peut se ramener à une équation du type $g(x) = x$ si $f(x) = g(x) - x$, c'est sous cette forme que l'on applique la méthode du point fixe.

La variable x est nommée variable de point fixe, elle vaut x à l'instant initial. On lui fait subir l'application g et on obtient x_1 . De manière générale on peut écrire :

$$g(x_i) = x_{i+1} \quad (3.31)$$

Si la méthode converge au bout d'un certain nombre d'itération on aboutit à une valeur x_{n+1} qui est peut différente de x_n c'est-à-dire une valeur $g(x_n)$ très peu différente de x_n donc $f(x_n)$ proche de zéro, et l'équation $f(x) = 0$ est résolue.

3.3 Code de calcul éléments finis 2D

3.3.1 Organigramme de traitement du problème magnétique non linéaire

La méthode des éléments finis, permet de résoudre les équations de Maxwell dans des conditions très générales et en particulier en prenant en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques, Ainsi, on est amené à résoudre un système d'équation non linéaire suivant l'organigramme (3.1).

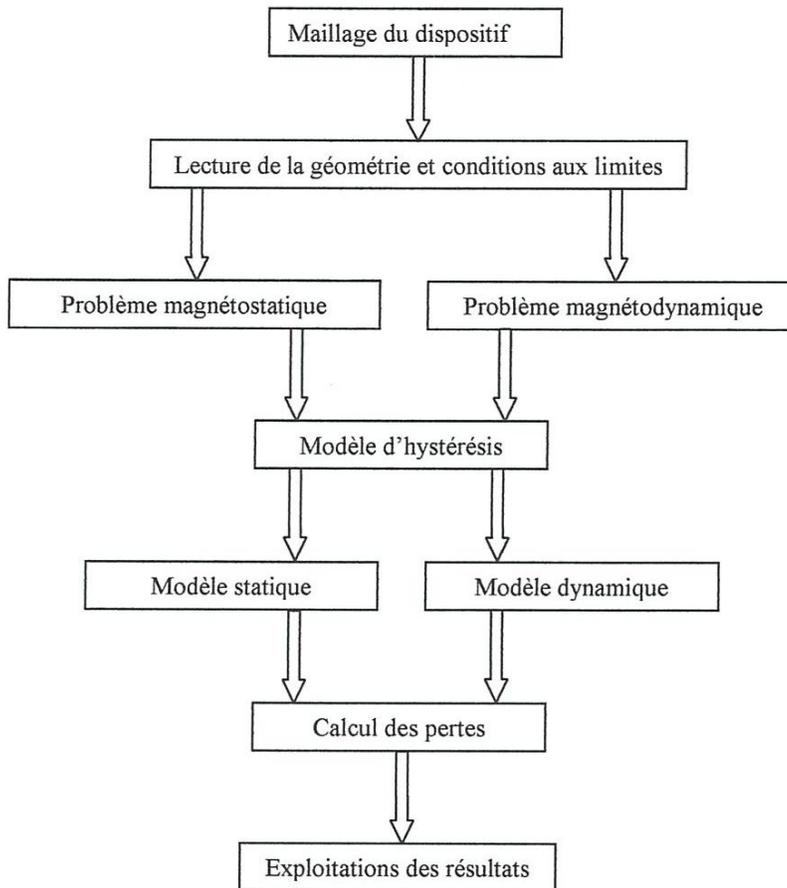


Figure 3.1 : Organigramme du principe de résolution du problème magnétostatique non linéaire

3.3.2 Algorithme général de résolution du système non linéaire

Un programme a été développé sous environnement Matlab, permettant la résolution du problème magnétique non linéaire. En effet, il consiste à résoudre itérativement l'équation considérée jusqu'à la convergence de la solution en intégrant chaque fois le calcul du cycle d'hystérésis.

Néanmoins, la difficulté majeure de ce calcul réside dans le choix du facteur de relaxation. Le processus itératif consiste à rechercher la solution du système à une itération i donné à partir d'une estimation de l'aimantation basée sur les résultats de l'itération précédente $i-1$. Supposons qu'initialement, l'échantillon est dans son état désaimanté, la résolution du système d'équation (3.25) permet le calcul du potentiel vecteur magnétique A . Celui-ci permet à son tour de la détermination de l'induction magnétique B à partir de la loi (3.16). Cette induction fournit le champ magnétique H qui sera relaxé afin d'assurer la rapidité de la convergence.

3 :Intégration de modèles d'hystérésis de Preisach dans un code de calcul par éléments finis

Une fois que B et H d'une itération sont connus on peut calculer la nouvelle aimantation M ou moyen du modèle d'hystérésis (Preisach). La figure (3.2) illustre le schéma de cet algorithme [17].

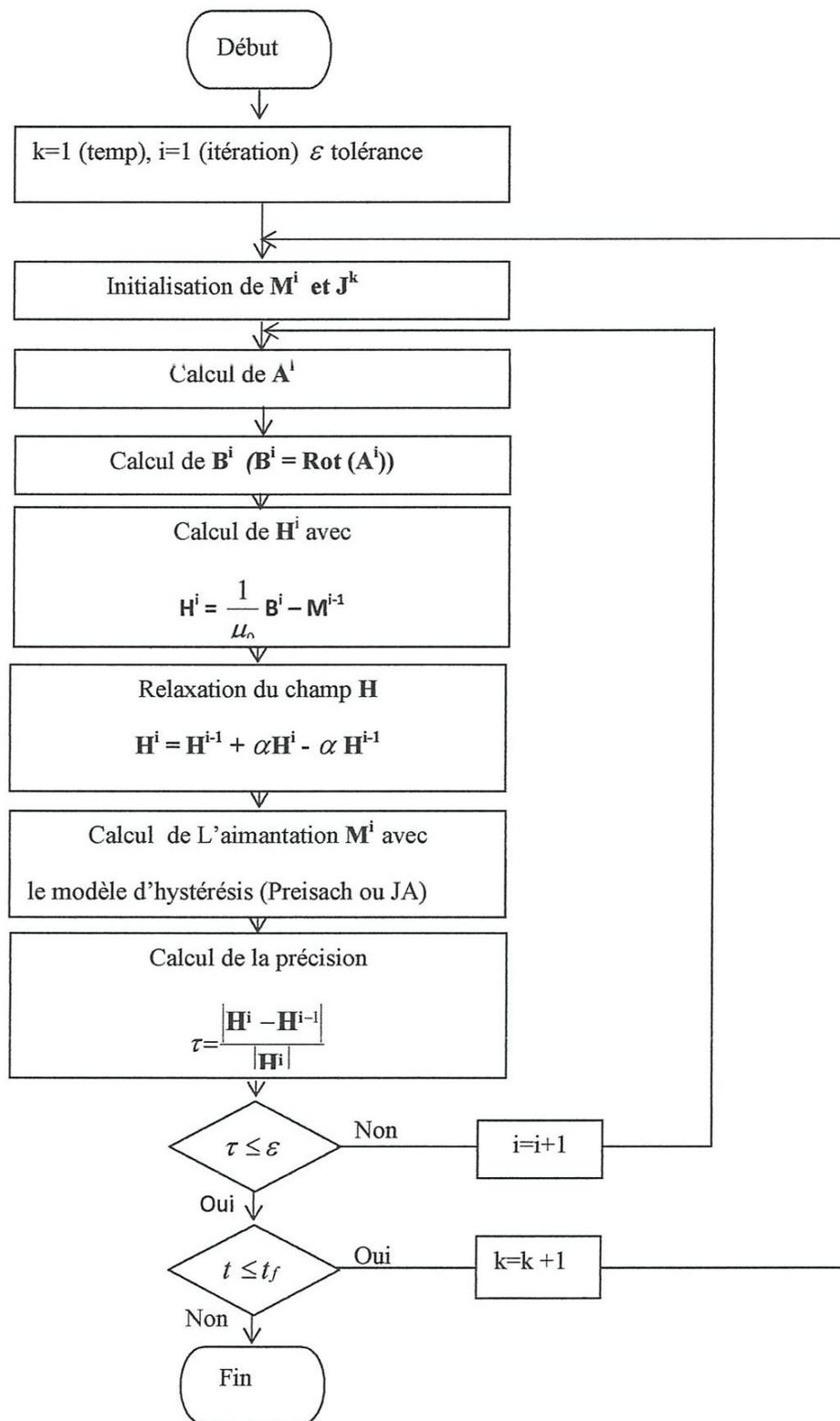


Figure 3.2 : Algorithme de l'intégration de l'hystérésis dans la méthode des éléments finis

3.4 : Application à un système électromagnétique

3.4.1 : Système étudié

Afin de valider la méthode décrite précédemment des, nous nous proposons un exemple test défini par un dispositif à induction magnétique (Figure 3.3).

Ce dispositif est composé d'une charge de forme cylindrique pleine, de diamètre $\varphi = 8 \cdot 10^{-2}$ et de longueur $l = 40 \text{ cm}$.

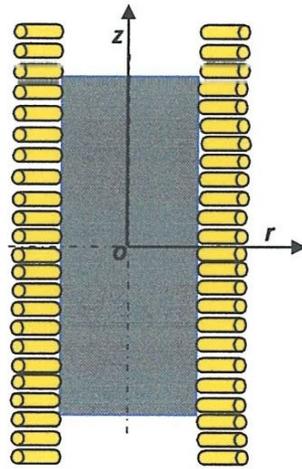


Figure (3.3) : Dispositif test

Compte tenu de la nature axisymétrique du système, seul le quart du domaine d'étude sera considéré (Figure 3.4). Notons que pour des raisons de simplicité, la bobine d'excitation est représentée par un seul conducteur ayant la même forme que la charge.

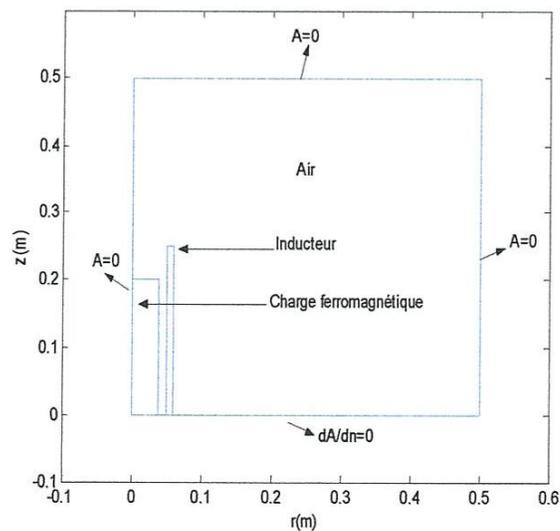


Fig (3.4) : Domaine d'étude et conductions aux limites associé

Le domaine d'étude maillé en éléments finis qui fera le traitement est celui représenté par la figure 3.5.

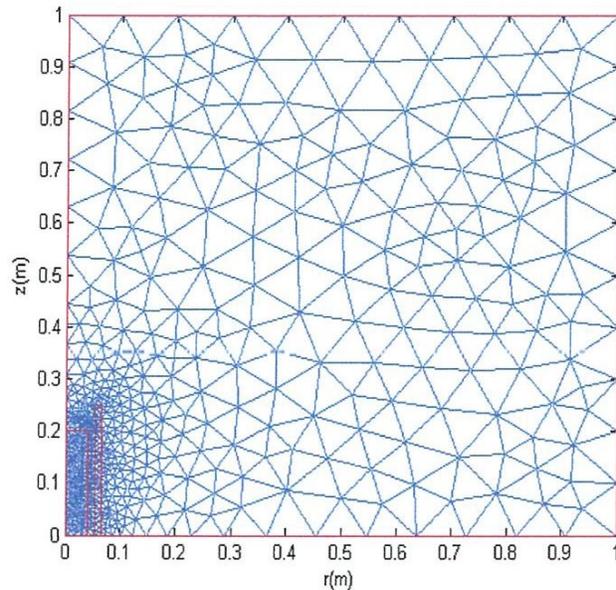


Figure 3.5 : Maillage du domaine d'étude

3.4.2 : EXPLOITATION DES RESULTATS

Nous présentons dans cette partie, les résultats obtenus de la résolution de l'équation magnétostatique avec prise en compte de l'hystérésis magnétique en exploitant le modèle de Preisach,. Pour cette étude, deux valeurs de l'excitation ont été utilisés.

3.4.2.1 : Résolution de l'équation magnétostatique pour une excitation sinusoïdal $J_{\max}=0.2 \cdot 10^6$ A/m

a) premier résultat

Les simulations ont été effectuées en utilisant un programme de calcul par éléments finis mis en œuvre sous environnement Matlab et intégrant le calcul du cycle d'hystérésis exploitant le modèle de Preisach, les résultats obtenus sont fournis dans les figures 3.6 et 3.7.

Les résultats de confrontation obtenus montrent une parfaite concordance entre le cycle d'hystérésis obtenu en intégrant le calcul par éléments finis et le cycle fourni par le modèle de Preisach théorique. Ce premier résultat permet de valider le programme de calcul par éléments finis mis en œuvre sous environnement Matlab intégrant le modèle d'hystérésis de Preisach.

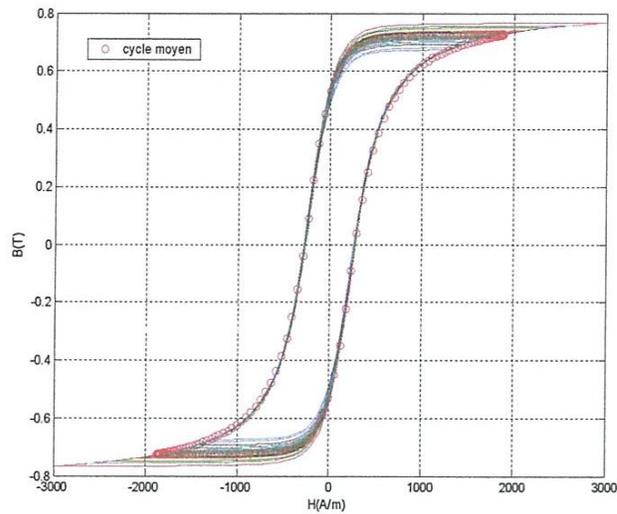


Figure 3.6 : Les cycles d'hystérésis dans tous les éléments de la charge et le cycle moyen

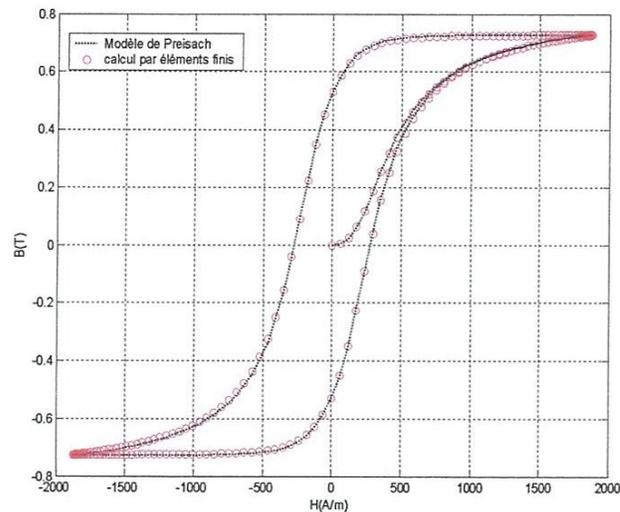


Figure3.7 : Confortation des cycles d'hystérésis obtenus par calcul éléments finis et en exploitant le modèle de Preisach

b : Evolution des cycles d'hystérésis $B(H)$

Nous avons sélectionné quelques éléments du maillage au niveau de la charge (Figure 3.8) afin d'évaluer les lois de comportements $B(H)$ obtenus après intégration du modèle de Preisach dans le code de calcul ELF2D. Ainsi, nous constatant une faible variation voire insignifiante entre les différents cycles.

3 :Intégration de modèles d'hystérésis de Preisach dans un code de calcul par éléments finis

Ceci peut être justifié en fait par la géométrie du dispositif qui permet d'imposer une répartition uniforme du champ et par l'absence de l'effet de peau dû à la faible fréquence utilisée [tese2012].

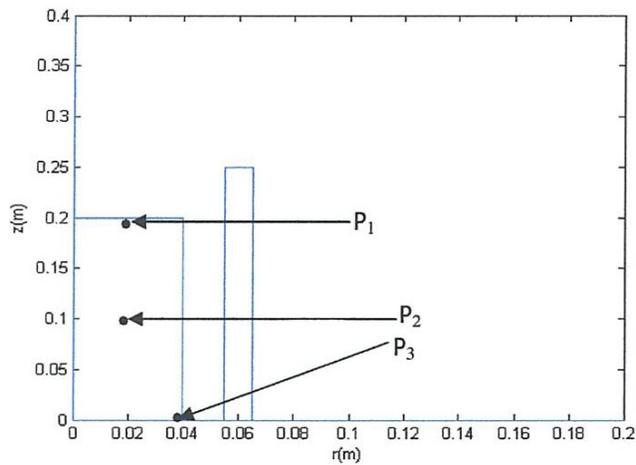


Fig. 3.8 : Les positions des Points

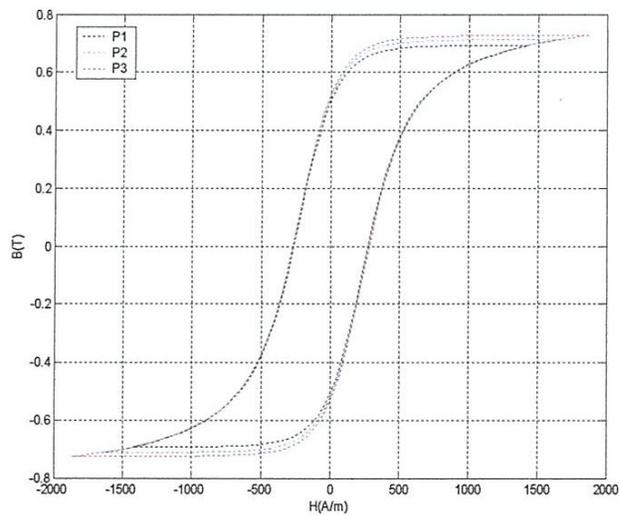


Figure 3.9 : Les cycles d'hystérésis pour les trois points

c. Evolution des formes d'ondes $B(t)$ et $H(t)$

3 :Intégration de modèles d'hystérésis de Preisach dans un code de calcul par éléments finis

La simulation numérique (pas à pas dans le temps) du comportement magnétique du matériau révèle que le champ magnétique $H(T)$ est pratiquement sinusoïdal en tous les points choisis (Fig 3.10). $H(t)$ présente la même forme sinusoïdale que celle du courant imposé (attaque en courant) en tous points de l'échantillon ferromagnétique.

Contrairement à le champ magnétique $H(t)$, l'induction magnétique $B(t)$, prend une forme d'onde non sinusoïdale (Fig. 3.11), ceci traduit l'effet de la saturation magnétique sur la déformation de l'onde.

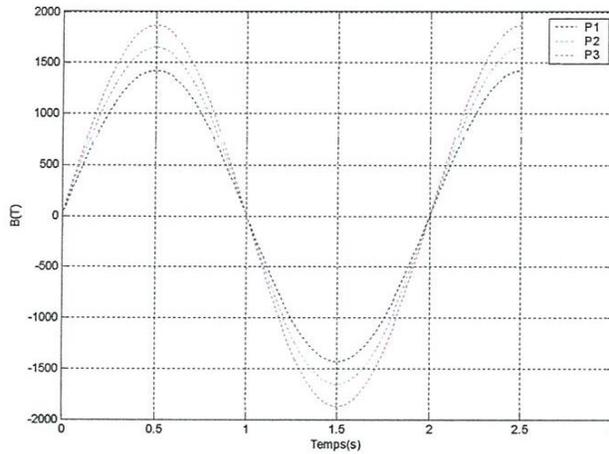


Figure. 3.10: Evolution des champs magnétiques Pour les points P_1 , P_2 et P_3

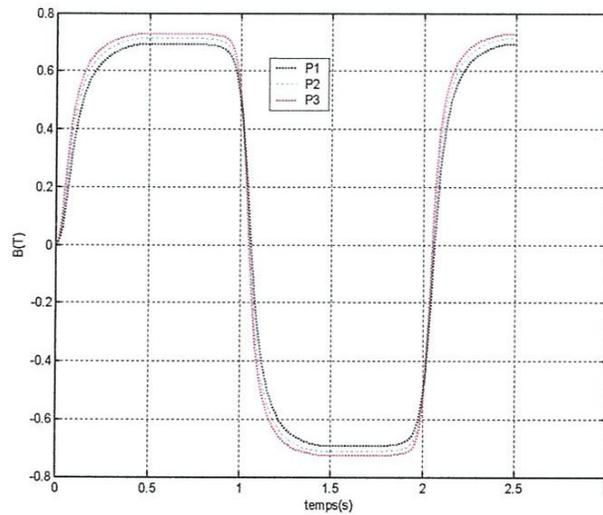


Figure. 3.11: Evolution des inductions magnétiques Pour les points P_1 , P_2 et P_3

d. Variation radiale du potentiel vecteur magnétique A :

La figure 3.12 et illustrent la variation radiale du vecteur potentiel magnétique A. On remarque bien que la valeur de A est maximale au niveau de l'inducteur puis diminue progressivement jusqu'à s'annuler aux limites du domaine d'étude.

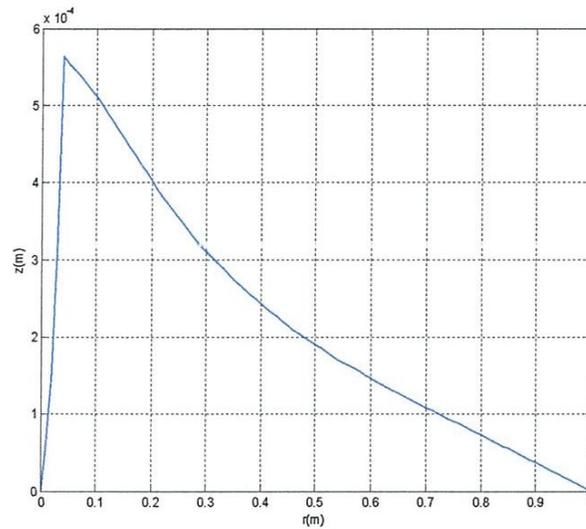


Figure 3.12 : Variation du potentiel vecteur A suivant l'axe oz pour y=0m

e. Lignes équipotentiels A

La figure représente les lignes équipotentiels A qui sont fortement concentrées au niveau de la charge. Ceci permet de caractériser le matériau choisi d'une forte perméabilité

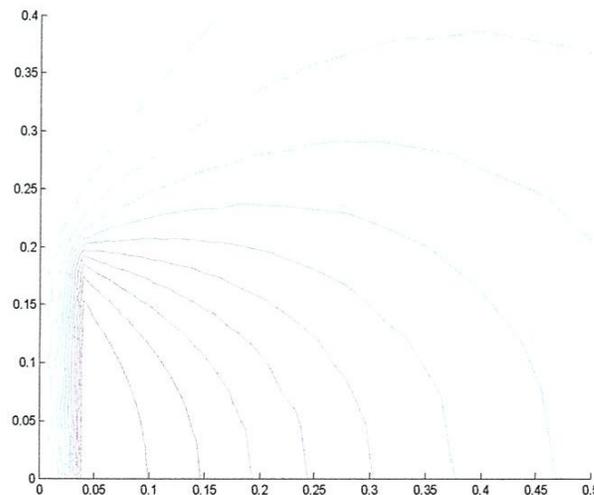


Figure 3.13 : Les lignes équipotentiels de A pour $J_{\max}=0.2 \cdot 10^6$ A/m

Le tableau (3.1) détaille les inductions et les champs maximaux dans les trois points choisis.

| Points | $B_{max}(T)$ | $H_{ma}(A/m)$ |
|----------------|--------------|---------------|
| P ₁ | 0.6938 | 1.4273e+003 |
| P ₂ | 0.7136 | 1.6527e+003 |
| P ₃ | 0.7280 | 1.8702e+003 |

Tableau (3.1) : Inductions et champs maximaux

f. Pertes par hystérésis

Le code de calcul EF que nous avons développée permet de calculer les pertes par hystérésis dans tous les éléments du maillage. Ces pertes sont reportées sur le tableau 3.2.

| Les points | Pertes (J/m ³) |
|-------------|----------------------------|
| P1 | 864.7492 |
| P2 | 932.0966 |
| P3 | 987.1755 |
| Cycle moyen | 995.1862 |

Tableau 3.2 : Comparaison des pertes par hystérésis pour les deux modèles

3.4.2.2 : Résolution de l'équation magnéto-statique pour une excitation sinusoïdal $J_{max}=0.1 \cdot 10^6$ A/m

Le choix d'une excitation faible, permet de visualiser des cycles mineurs reliés entre eux (Fig 3.14), dont les sommets forment la partie initiale de la courbe de première aimantation. D'autre part la forme d'onde $H(t)$ (Fig 3.15) garde la même forme sinusoïdale que dans le cas d'une forte excitation, tandis que $B(t)$, est quasi-sinusoïdal (Fig 3.16) . Car le point caractéristique de l'état magnétique local parcourt dans ce cas un cycle d'hystérésis de faibles amplitudes mettant ainsi, le matériau à l'abri de la saturation.

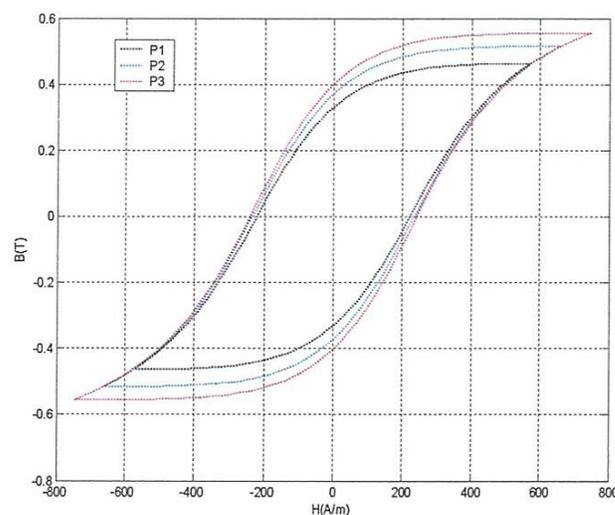


Figure 3.14 : Les cycles d'hystérésis pour les trois points

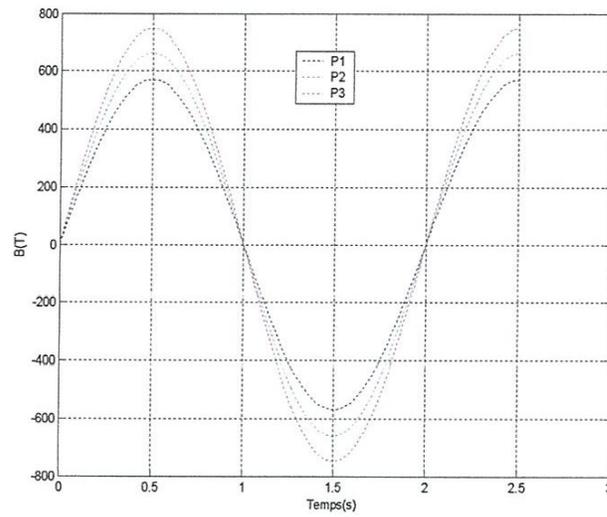


Figure. 3.15: Evolution des champs magnétiques Pour les points P_1 , P_2 et P_3

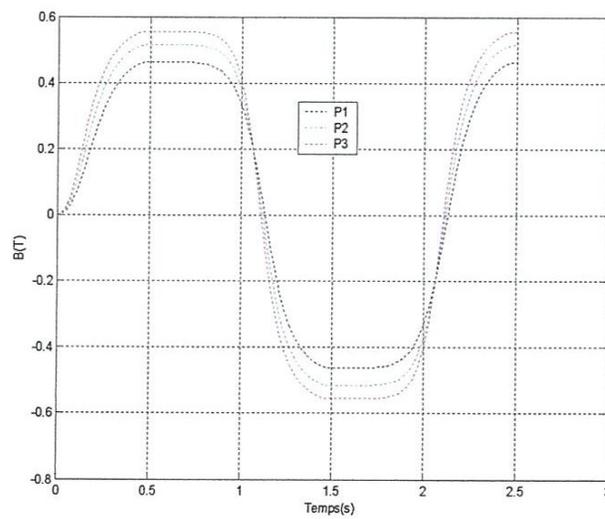


Figure. 3.16: Evolution des inductions magnétiques Pour les points P_1 , P_2 et P_3

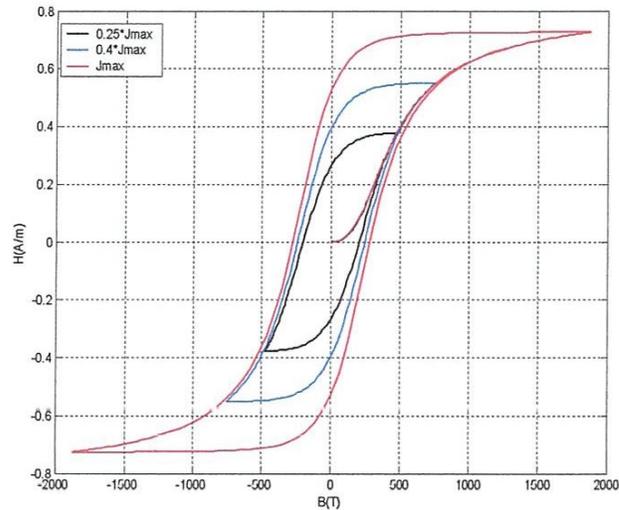


Fig. 3.17: Evolution des cycles d'hystérésis en fonction de J_{max}

Les résultats donnés dans la figure (Fig. 3.17) montrent une bonne intégration du modèle de Preisach dans le code éléments finis.

de calcul pour

CONCLUSION :

Le calcul numérique du champ magnétique dans les matériaux hystérétiques, présente deux difficultés majeures: la modélisation du phénomène d'hystérésis et le traitement itératif de ce type particulier de non linéarité. Par ailleurs, il a été montré que l'intégration du modèle de Preisach dans un code de calcul pour la résolution de l'équation magnétostatique convient bien pour résoudre ce problème de non linéarité car il représente avec une précision suffisante le comportement magnétique du matériau. Une méthode de relaxation a été associée au processus itératif afin d'assurer la convergence des calculs. Les résultats obtenus sont satisfaisants, toutefois il est intéressant de vérifier leur fiabilité par comparaison avec d'autres modèles ou d'autres méthodes de résolution.

Conclusion générale

Ces travaux, sur la modélisation du cycle d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques, ont permis de mettre en évidence la difficulté qui existe quant au choix d'un modèle, à la fois précis et rapide, pour une implantation dans un code de calcul de champ basé sur la méthode des éléments finis.

Dans une première étape, nous avons rappelé quelques généralités de base concernant le magnétisme. Ainsi, une étude plus ou moins détaillée du comportement de la matière a permis de distinguer les différents types de magnétisme (paramagnétisme, diamagnétisme et ferromagnétisme). Par ailleurs, une description du ferromagnétisme et des mécanismes d'aimantation à différentes échelles a permis d'illustrer la complexité du phénomène d'hystérésis.

La seconde partie de notre travail, nous avons effectué une recherche bibliographique sur les principaux modèles scalaires, en se limitant au choix d'un modèle très utilisé pour la modélisation de l'hystérésis : le modèle de Preisach et celui de Jiles-Atherton en se limitant au choix d'un modèle de Preisach.

C'est un modèle phénoménologique permettant de caractériser l'état magnétique d'un matériau en fonction de l'histoire du champ appliqué, par un vecteur d'état. Néanmoins, la difficulté majeure d'utilisation de ce modèle réside dans la détermination de la fonction de distribution qui le caractérise.

Enfin, pour les perspectives de ce travail a été consacrée à la modélisation du champ électromagnétique qui nécessite au préalable une formulation mathématique des équations de Maxwell adaptées aux problèmes étudiés. Les hypothèses de notre étude ont été restreintes seulement au cas du problème magnétostatique vectoriel. Par ailleurs, la formulation par éléments finis du problème a conduit à l'obtention d'un système non linéaire traduit par un terme source supplémentaire au second membre de l'équation et dont la résolution par les méthodes itératives classiques (Newton-Raphson), pose souvent des problèmes de

Bibliographie

- [1] F. Robert, « Matériaux d'électrotechniques », Traité d'électricité, Volume II, Presses polytechniques Romandes. Troisième édition 1989.
- [2] P. Brissonneau, « Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique », Paris, Hemès, 1997.
- [3] S. Boumous, « Application de la méthode des volumes finis pour l'étude tridimensionnelle du champ électromagnétique cas du chauffage par induction », Thèse de Magister, C. U. Jijel, 2001.
- [4] K. Chatri, « Etude des Phénomènes magnétothermiques dans les dispositifs de chauffage par induction par la méthode des éléments finis », Thèse de magister, Univ. Batna, 2003.
- [5] Y. J. Favennec, « Modélisation numérique en chauffage par induction. Analyse inverse et optimisation », Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, 2002.
- [6] B. Nait-Kaci, « Modélisation de l'hystérésis magnétique tenant compte des contraintes thermique », Thèse de Magister, Univ. Tizi-Ouzou, 2000.
- [7] F. C. Trutt, E. A. Erdelyi, R. E. Hopkins, « Representation of the magnetization characteristics of DC machines for computer use », IEEE Transactions on Power Application and Systems, Vol. 87, pp 665-669, 1968.
- [8] Mayergoyz, Abedl-kader, Emad, « On penetration of electromagnetic fields into non linear conducting ferromagnetic media », Journal of Applied Physics. Vol. 53, pp 618-629, 1984.
- [9] S. A. Nasar, F. U. Xiong, « Eddy-current losses in a tubular linear induction motor », IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, N° 4, pp 1437-1445, 1994.
- [10] Dionne, Weiss, Allen, « Hysteresis loops modelled from coercivity, anisotropy and microstructure parameters », Journal of Applied Physics. Vol. 61, pp 3862-3864, 1987.
- [11] Y. Bernard, « Contribution à la modélisation de système électromagnétique en tenant compte du phénomène d'hystérésis », Thèse de doctorat, Univ-Paris X I Orsay. 2000.

[12] N. Amir, « Modélisation de l'hystérésis dans les matériaux magnétiques et introduction de modèle dans le logiciel de simulation aux éléments finis flux 3D », Thèse de doctorat Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002.

[13] y. Ouled Amour, F. Alves M. Féliachi, « modeling of magnetics hysteresis with modified lorentzian function », CEF'C2000 Juin 4-7 2000.

[14] G. Bertotti, « Dynamic generalisation of scalair Preisach model of hysteresis », IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, N^o. 5, pp 2599-2601, Septembre 1992.

[15] y. Ouled Amour, « Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction », Thèse de doctorat Univ. Nantes, 2000.

[16] Afef.kedous lebouc «Matériaux magnétique en génie électrique1 »2006