

République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Filière : Génie Mécanique

Option : Productique

Par

Mohammed KHECHANA

ETUDE SEMI EXPERIMENTALE DE LA DYNAMIQUE DES DISQUES MINCES LORS DU TOURNAGE A GRANDE VITESSE

Directeur de thèse : Pr. DJAMAA Mohamed Cherif

Devant le jury composé de :

Pr. OUELAA Nouredine	Président	Université 8 mai 1945 - Guelma
Pr. DJAMAA Med Cherif	Rapporteur	Université 8 mai 1945 - Guelma
Pr. BOULANOUAR Lakhdar	Examineur	Université Badji Mokhtar - Annaba
Dr. MAHFOUDI Chawki	Examineur	Université L.B.M. Oum el Bouaghi

Juin 2016

Dédicaces

*Je dédie ce travail à :
la mémoire de ma mère, mon père,
ma femme, mes enfants,
mes frères et ma sœur.*

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur Mohamed Cherif DJAMAA, Professeur de l'université de Guelma, pour m'avoir encadré et pour les efforts qu'il a fournis et les conseils qu'il m'a fait durant la réalisation de ce travail. Qu'il trouve ici mes remerciements et ma sincère gratitude pour sa disponibilité et le temps qu'il m'a réservé pour la concrétisation de ce travail.

Je remercie Monsieur Nouredine OUELAA, Professeur et directeur du Laboratoire de Mécanique et Structures de l'université de Guelma, d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je remercie également, Monsieur Lakhdar BOULANOUR, Professeur de l'université de Annaba, et Monsieur Chawki MAHFOUDI, Maître de Conférences A à l'université d'Oum El Bouaghi d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et de me faire l'honneur de participer au jury de ma soutenance.

Sommaire

Résumés	i
Nomenclature	iv
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
Chapitre I : Notions générales sur la dynamique des disques minces et sur l'usinage à grande vitesse	3
Chapitre II : Formulation des équations de base de la mécanique des disques minces	12
Chapitre III : Modélisation dynamique des disques minces en tournage à grande vitesse..	28
Chapitre IV : Présentation des essais de tournage et des résultats des efforts de coupe....	50
Chapitre V : Détection des défauts structuraux et du broutement par l'analyse des signaux des efforts de coupe	64
Conclusion générale et perspectives	96

CHAPITRE IV.

PRESENTATION DES ESSAIS DE TOURNAGE ET DES RESULTATS DES EFFORTS DE COUPE

IV.1 Introduction	51
IV.2 Equipements utilisés	51
IV.2.1 Machine outil	52
IV.2.2 Pièce	52
IV.2.3 Outil de coupe	52
IV.2.4 Plate forme Kistler	53
IV.2.5 Planification des essais	53
IV.2.5.1 Méthode multifactorielle.....	53
IV.2.5.2 Méthode unifactorielle	54
IV.2.6 Efforts de coupe	54
IV.2.7 Résultats des essais	55
IV.2.7.1 Premier cas : Disque avec un seul défaut.....	55
IV.2.7.2 Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°	59
IV.2.7.3 Cas du disque sain, avec un et deux défauts.....	60
IV.3. Conclusion	62
IV.4 Références bibliographiques	62

IV.1 Introduction :

L'usinage à grande vitesse (UGV) est souvent présenté comme une merveilleuse découverte dès que l'on augmente les vitesses de coupe au-delà des limites habituelles. Ce type d'usinage est caractérisé par une diminution des énergies et des efforts spécifiques de coupe, des états de surface excellents et des durées de vie des outils largement supérieures aux durées obtenues en usinage conventionnel. La pratique de l'UGV ne se résume pas seulement à franchir une barrière de vitesse de coupe, mais de mettre en œuvre, de façon rationnelle au meilleur niveau de performance économique, tous les éléments entrant dans la définition de l'opération d'usinage concernée (les machines, les outils, les éléments intermédiaires et leurs attachements, ...) [1]. L'élévation de la vitesse de coupe peut créer des phénomènes vibratoires importants surtout dans le cas d'usinage des pièces minces [2, 3].

La question toujours posée est, à partir de quelles vitesses entre-t-on dans le domaine de l'UGV ? Jusqu'à ce jour, aucune définition précise n'est adoptée car les vitesses de coupe considérées comme grandes pour usiner un matériau peuvent rester du domaine conventionnel pour un autre. Ainsi, pour un même matériau usiné, les limites entre grande vitesse et vitesse conventionnelle dépendent encore du procédé concerné (tournage, fraisage, ...). Dans l'état actuel de cette technique, il est difficile de séparer avec précision les domaines de l'UGV du conventionnel car les limites « hautes » des vitesses dépendent essentiellement des possibilités des broches.

IV.2 Equipements utilisés :

Nous présentons ici les équipements mis à notre disposition au niveau du Laboratoire de Mécanique & Structures et du Département de Génie Mécanique. Certes, le tour disponible n'offre pas beaucoup de possibilités en terme de fréquences de rotation élevées et par conséquent des vitesses, mais on se contente du plan d'expérience que nous avons établi pour voir les effets de la dynamique des disques minces sur les efforts de coupe et sur la stabilité d'usinage.

IV.2.1 Machine outil :

Les essais ont été effectués sur un tour à charioter et à fileter modèle SN40C de 6.6 KW de puissance moteur. La gamme de fréquence de rotation varie entre 45 à 2000 tr/min et une gamme étendue des vitesses d'avances allant de 0.08 à 6.4 mm/tr.



Fig. IV.1. Montage expérimental.

IV.2.2 Pièce :

Il s'agit d'un ensemble de disques en acier ordinaire, de dimensions identiques : rayon extérieur $r_e = 150$ mm, rayon intérieur $r_i = 25$ mm, épaisseur $h = 10$ mm. Afin d'assurer son entraînement en rotation, le disque est monté sur une tige lisse avec épaulement et fixé par vis. Un montage mixte de cet ensemble permet de réduire ses vibrations et on ne considère que les vibrations transversales du disque sous l'effet des efforts de coupe.

Sur la surface cylindrique extérieure des disques, on a créé volontairement des défauts sous forme de rainures de 2 mm de profondeur et de 0.5 mm de largeur.

IV.2.3 Outil de coupe :

Il s'agit d'un porte plaquette ayant un angle de direction principale de 75° sur lequel une plaquette amovible, en carbure métallique revêtu GC415, est fixée par son trou central.

IV.2.4 Plate forme Kistler :

L'appareillage utilisé pour la mesure des efforts de coupe en cours d'usinage consiste en une chaîne d'acquisition composée d'un dynamomètre Kistler de type 9257B, d'un amplificateur de charge Kistler 5019B à 3 canaux et d'un ordinateur doté d'un logiciel DynoWare 2825D 1-2, version 2.31 pour l'acquisition, le traitement et la visualisation en temps réel des signaux issus des mesures des composantes F_x , F_y et F_z de l'effort de coupe exercé.

IV.2.5 Planification des essais :

L'utilisation des plans d'expériences, permet de déterminer l'influence des effets simultanés et de l'interaction des paramètres d'entrée (N , a , p) sur les paramètres de sortie (F_x , F_y , F_z). Deux méthodes ont été utilisées :

IV.2.5.1 Méthode multifactorielle

Le principe de la méthode consiste à faire varier simultanément les niveaux d'un ou plusieurs facteurs à chaque essai. Ceci permettra de diminuer le nombre d'expériences à réaliser tout en augmentant le nombre de facteurs étudiés sans pour autant perdre la précision des résultats. Le plan orthogonal standard L8 (2^3) est adopté comme plan expérimental pour réaliser les essais de tournage des disques possédant un seul défaut tout en mesurant les efforts de coupe. Les paramètres à étudier et l'attribution des niveaux respectifs sont indiqués dans le tableau IV.1.

Essai N°	Fréquence de rotation (tr/min)	Avance (mm/tr)	Profondeur de passe (mm)
01	1400	0.08	0.5
02	1400	0.08	1.0
03	1400	0.16	0.5
04	1400	0.16	1.0
05	355	0.08	0.5
06	355	0.08	1.0
07	355	0.16	0.5
08	355	0.16	1.0

Tableau IV.1. Paramètres de coupe pour différents essais du plan L8.

IV.2.5.2 Méthode unifactorielle :

Le principe de cette méthode est de faire varier un seul paramètre et de garder les autres paramètres fixes. Dans notre cas, la fréquence de rotation est le paramètre variable par contre la vitesse d'avance et la profondeur de passe sont maintenues constantes lors du tournage du disque possédant deux défauts répartis à 90° tout en réalisant la mesure des efforts de coupe. Les paramètres d'essais sont illustrés sur le tableau IV.2.

Essai N°	Fréquence de rotation (tr/min)	Avance (mm/tr)	Profondeur de passe (mm)
09	1400	0.08	0.5
10	710	0.08	0.5
11	355	0.08	0.5

Tableau IV.2. Paramètres de coupe dans le cas de deux défauts espacés d'angle 90°.

En se servant de ce même plan expérimental, nous avons repris les essais aux mêmes conditions des essais 9, 10 et 11 pour comparer les signaux obtenus dans le cas d'un disque sain (essai 12), un disque avec un seul défaut (essai 13) et un disque présentant deux défauts (essai 14). Ces essais ont été réservés pour un éventuel traitement par la transformé en ondelettes.

IV.2.6 Efforts de coupe :

La mesure des efforts de coupe peut donner des informations importantes sur la stabilité de l'usinage [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. La détermination de l'effort résultant de coupe est nécessaire pour garantir un maintien en contact entre la pièce et l'outil. Cette force peut être décomposée selon les trois directions en :

1. Composante axiale F_a ;
2. Composante tangentielle F_t ;
3. Composante radiale F_p .

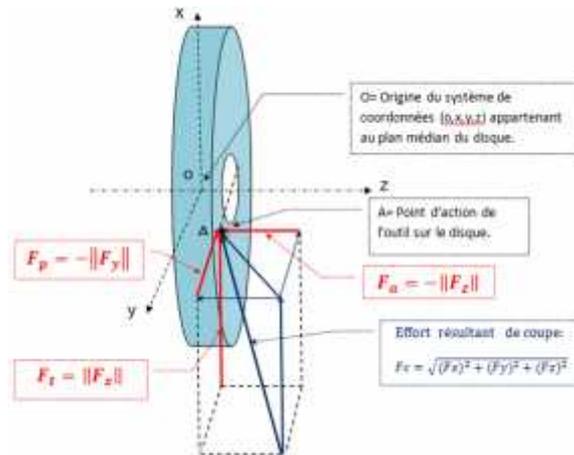


Fig. IV.2. Composantes de l'effort résultant de coupe appliqué sur le disque.

IV.2.7 Résultats des essais :

Après un simple réglage des paramètres de la plate-forme Kistler, en particulier la fréquence d'échantillonnage fixée à 12 kHz et le temps de mesure pour chaque essai, les essais ont été réalisés selon les plans d'expériences déjà mentionnés en mesurant les efforts de coupe dans les trois directions durant chaque essai. Les signaux mesurés ont été exportés en format texte puis converti en fichiers Excel pour faciliter leurs exploitations par Matlab.

IV.2.7.1 Premier cas : Disque avec un seul défaut.

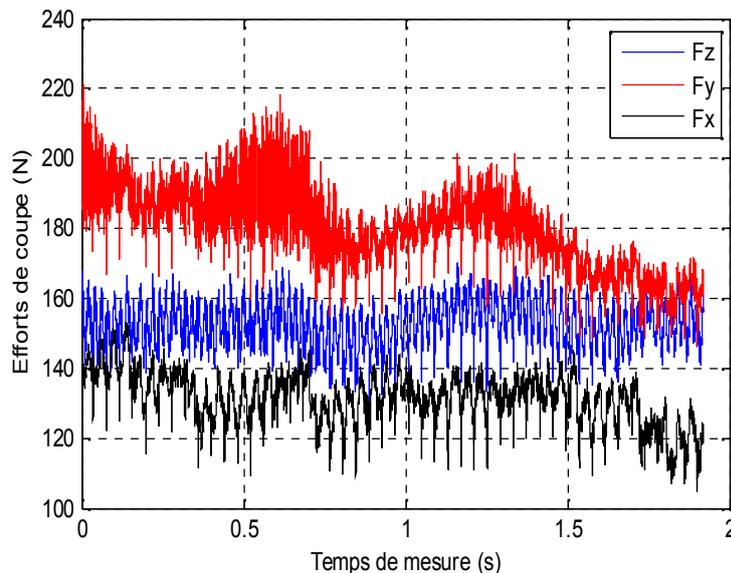


Fig. IV.3. Efforts de coupe de l'essai 1 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

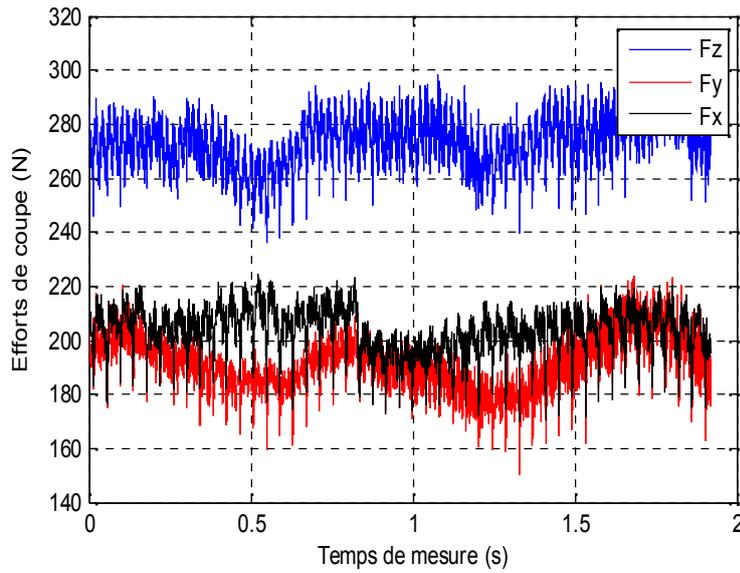


Fig. IV.4. Efforts de coupe de l'essai 2 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=1$ mm)

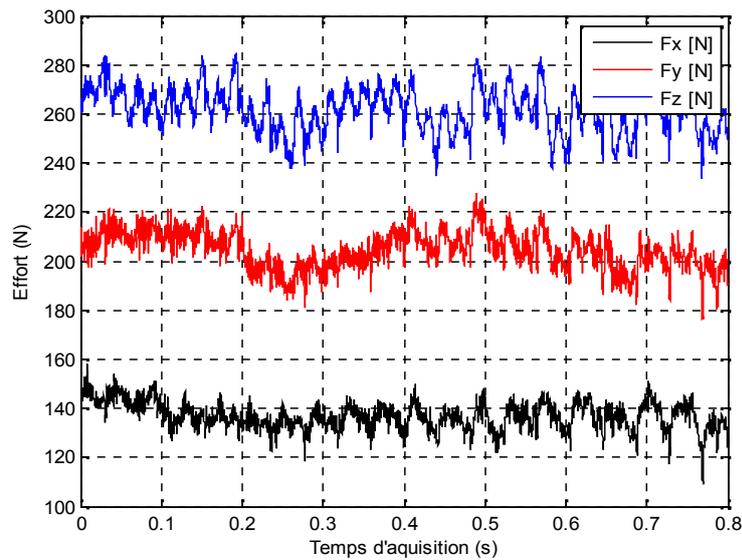


Fig. IV.5. Efforts de coupe de l'essai 3 ($N=1400$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

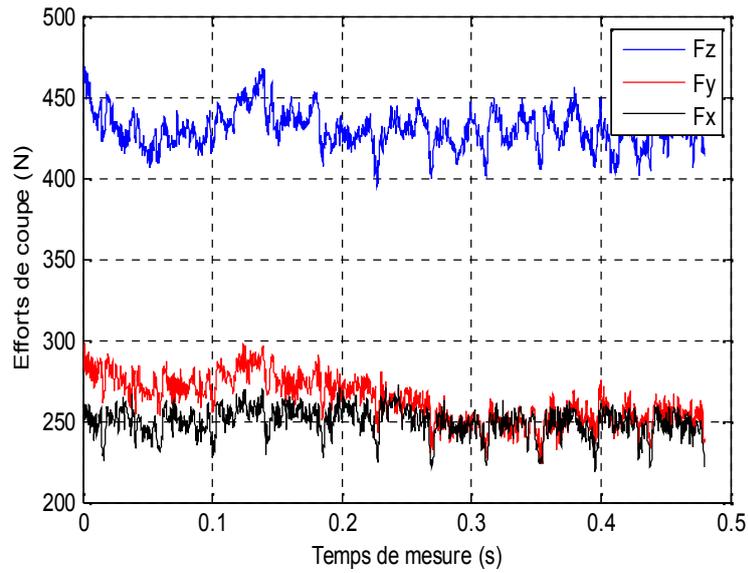


Fig. IV.6. Efforts de coupe de l'essai 4 ($N=1400$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=1$ mm)

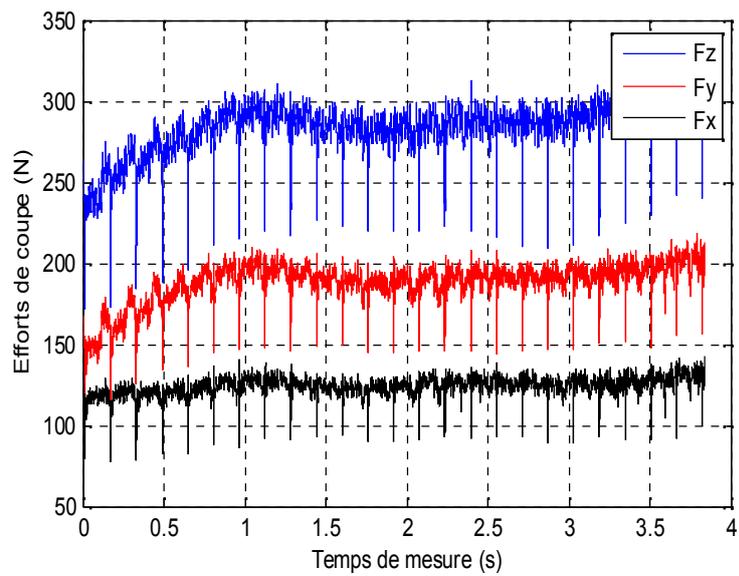


Fig. IV.7. Efforts de coupe de l'essai 5 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

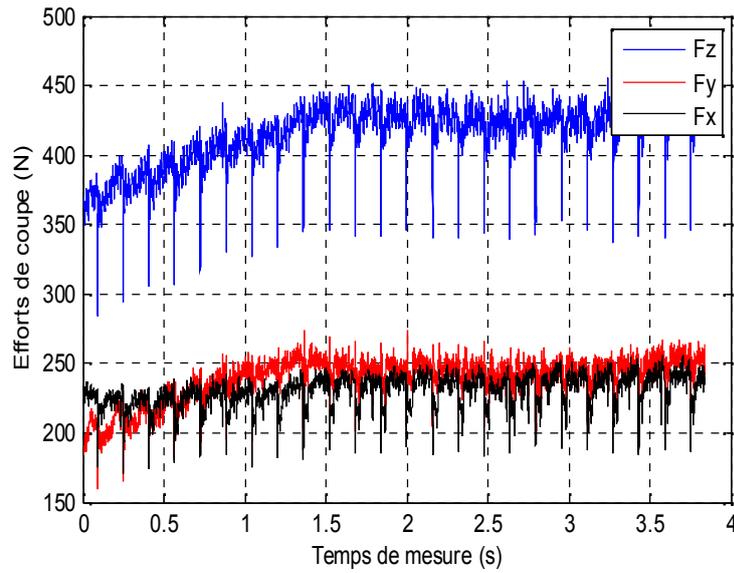


Fig. IV.8. Efforts de coupe de l'essai 6 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=1$ mm)

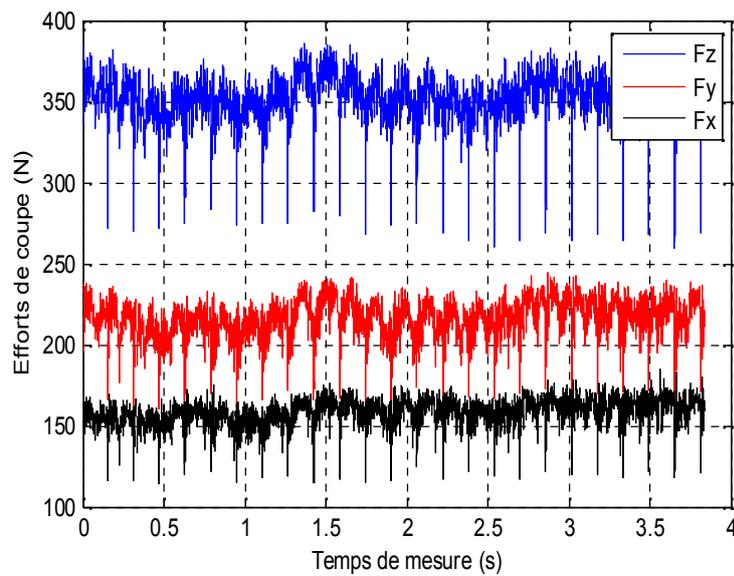


Fig. IV.9. Efforts de coupe de l'essai 7 ($N=355$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

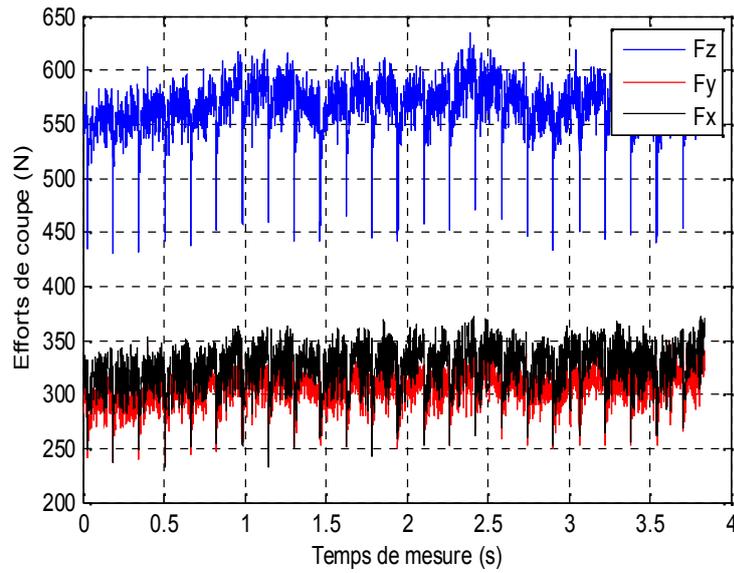


Fig. IV.10. Efforts de coupe de l'essai 8 ($N=355$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=1$ mm)

IV.2.7.2 Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°

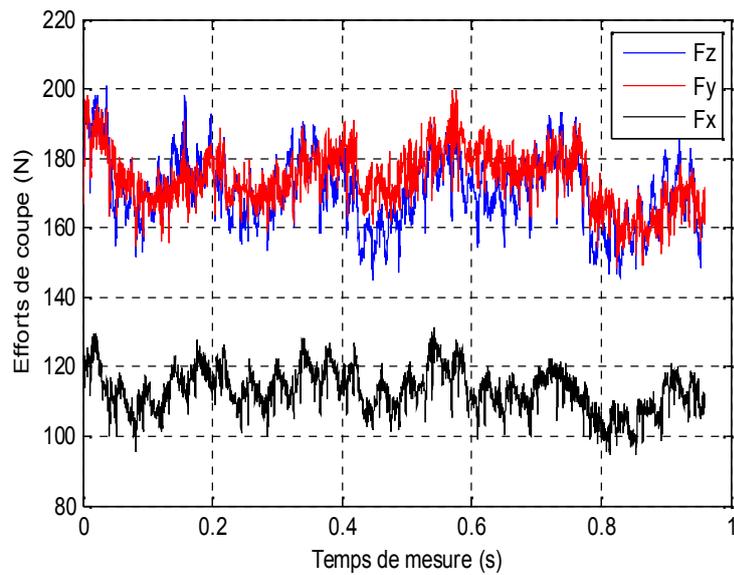


Fig. IV.11. Efforts de coupe de l'essai 9 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

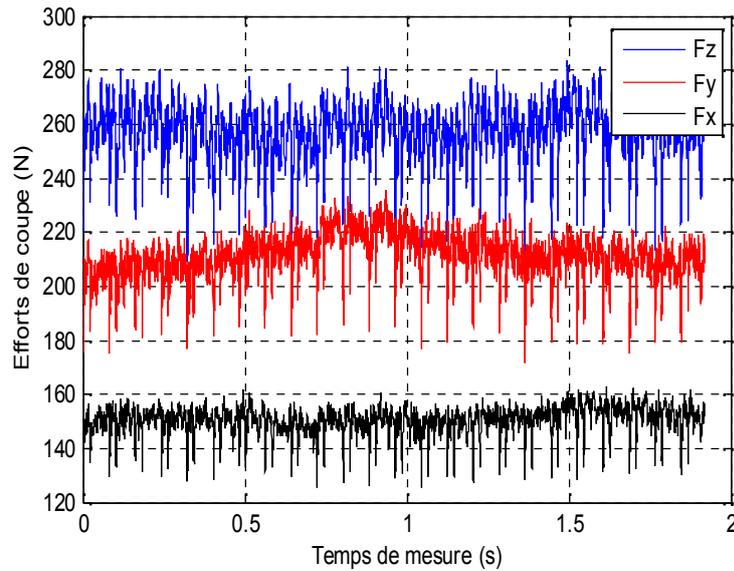


Fig. IV.12. Efforts de coupe de l'essai 10 ($N=710$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

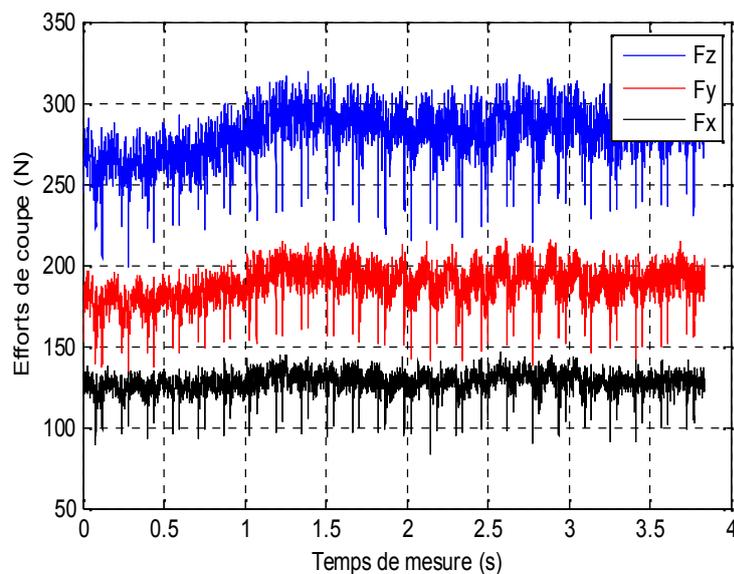


Fig. IV.13. Efforts de coupe de l'essai 11 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

IV.2.7.3 Cas du disque sain, avec un et deux défauts :

Les signaux des efforts de coupe relevés dans les trois directions pour trois configurations différentes des disques ont été présentés. Il s'agit d'un disque sain tournant à 1400 tr/min, un disque avec un seul défaut tournant à 710 tr/min et un disque avec deux défauts tournant à 355 tr/min.

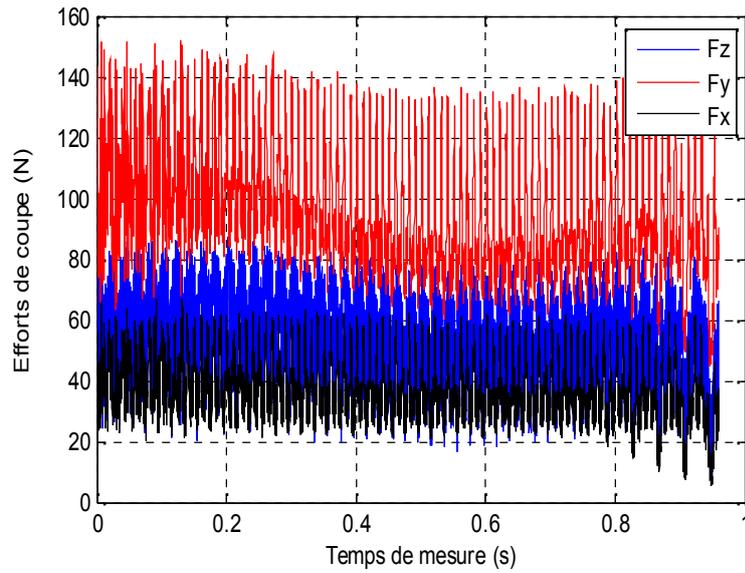


Fig. IV.14. Efforts de coupe de l'essai 12 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

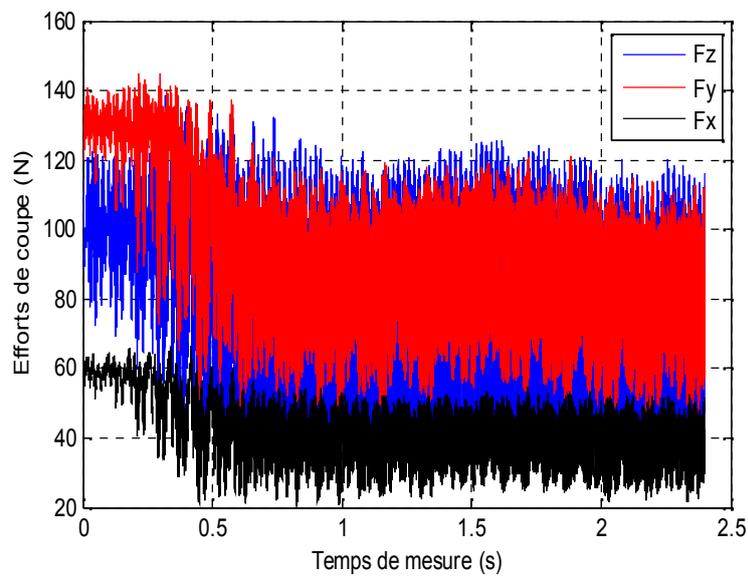


Fig. IV.15. Efforts de coupe de l'essai 13 ($N=710$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

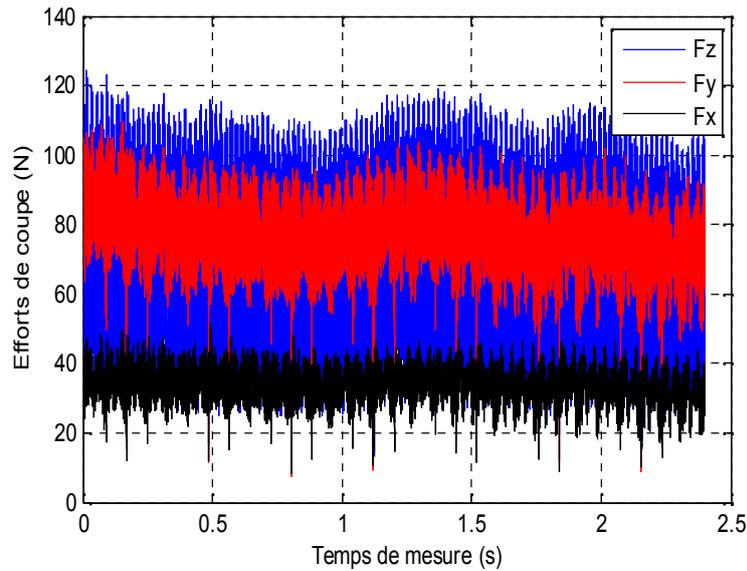


Fig. IV.16. Efforts de coupe de l'essai 14 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)

Malgré que l'interprétation physique de l'ordre des grandeurs des efforts de coupe n'est pas l'objet de notre étude puisqu'on est intéressé aux informations contenues dans les différents signaux des efforts de coupe bruts, les résultats des efforts de coupe présentés pour les différents essais montrent une tendance habituellement observée dans le cas d'usinage des aciers ordinaires où la composante tangentielle est toujours dominante. Or pour l'essai 1 et l'essai 12 réalisés dans les mêmes conditions de coupe ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm), l'effort tangentiel change de position au profit de la composante radiale (phénomène observé généralement dans le cas de l'usinage des aciers durs). Les conditions de coupe des deux essais sont du régime de finition, en particulier la vitesse de coupe qui est de l'ordre de 1320 m/min et qui rentre dans la gamme de l'UGV, ont favorisé une chute de la composante F_z par rapport à F_y . Ceci qui peut être expliqué par une très grande facilité d'usinage dans ces conditions qui caractérisent l'UGV.

IV.3. Conclusion

Ce chapitre a été réservé principalement à la partie expérimentale. Nous avons présenté les équipements que nous avons utilisé pour mener les différents essais de tournage et pour l'acquisition des efforts de coupe. Une importance capitale a été donnée à la mesure des signaux des efforts de coupe puisqu'ils sont porteurs de toutes les informations relatives à la présence des défauts structuraux ainsi qu'à la présence du

broutement d'usinage. Les signaux bruts sont, en général, contaminés par le bruit de mesure quelque soit les performances de la chaîne d'acquisition et nécessitent des techniques de traitement des signaux pour accéder aux informations utiles.

IV.4 Références bibliographiques :

- [1] H. K. Akyildiz and H. Livatyali (2011). Prediction and experimental analysis of cutting forces during machining of precision external threads. *Machining Sciences and Technology*, 15, 485–506.
- [2] B. Denkena, M. Krüger, D. Bachrathy and G. Stepan (2012). Model based reconstruction of milled surface topography from measured cutting forces. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 54–55, 25–33.
- [3] A. L. Defretin, G. Levaillant. Usinage à grande vitesse, *Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique* BM 7 180, 1-27.
- [4] S. Seguy (2008). De l'adaptation à la variation continue de la vitesse de broche afin de contrôler le broutement en fraisage de parois minces : modélisations et études expérimentales. Thèse de Doctorat, INP de Toulouse, 196 p.
- [5] M. Magnevall, M. Lundblad, K. Ahlin, G. Broman (2011). High frequency measurements of cutting forces in milling by inverse filtering. *Machining Sciences and Technology*, 15, 147–166.
- [6] M. Kaymakci, Z. M. Kilic, Y. Altintas (2012). Unified cutting force model for turning, boring, drilling and milling operations. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 54–55, 34–45.
- [7] E. S. Topal, C. Çoğun (2005). A cutting force induced error elimination method for turning operations. *Journal of Materials Processing Technology*, 170, 192–203.
- [8] F. Mata, E. Beamud, I. Hanafi, A. Khamlichi, A. Jabbouri, M. Bezzazi (2010). Multiple regression prediction model for cutting forces in turning carbon-reinforced PEEK CF30. *Advanced in Material Sciences and Engineering*, 2010, 7 pages.
- [9] H. B. Lacerda, V. T. Lima (2003). Evaluation of cutting forces and prediction of chatter vibrations in milling. *Brazilian Manufacturing Congress*, 18-21 May 2003, Uberlândia, MG. Brazil.
- [10] J. G. Li, Y. X. Yao, P. J. Xia, C. Q. Liu, C. G. Wu (2008). Extended octree for cutting force prediction. *International Journal of Advances Manufacturing Technology*, 39, 866–873.

CHAPITRE II :

FORMULATION DES EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES DISQUES MINCES

II.1. Introduction	13
II.2. Mécanique des disques minces	21
II.2.1. Formulation des déformations, déplacements et contraintes	14
II.2.2. Efforts normaux et tranchants, moments et conditions aux limites	20
II.2.3. Equation différentielle du mouvement du disque stationnaire	22
II.2.4. Equation différentielle du mouvement du disque rotatif	24
II.3. Conclusion	26
II.4. Références bibliographiques	26

II.1. Introduction :

Une plaque est un milieu continu délimitée par deux surfaces planes étendues où la distance qui les sépare est très petite par rapport aux autres dimensions. Un disque mince est une plaque de forme circulaire, d'épaisseur très petite par rapport à son diamètre. La mécanique qui régit un disque mince fait partie de la théorie des plaques minces, qui à son tour, inspire ses fondements de la théorie des membranes et des coques. Pour cela, on trouve quelques théories : à savoir la théorie de Von Karman, celle de Mindlin, de Reissner, de Kirchhoff,...

Dans ce chapitre, on exposera de façon succincte cette théorie et on montre son influence sur la formulation des équations de mouvement à travers les énergies cinétiques et de déformation, et par conséquent sur le comportement dynamique des disques. Les vibrations des disques, que ce soient, linéaires ou non linéaires, forcées ou libres, que le disque est stationnaire ou en rotation, son épaisseur est constante ou variable, son matériau est homogène ou non, tous ces cas reposent sur la formulation des expressions du tenseur de déplacement. Ces expressions sont encore, indispensables pour la détermination de l'énergie de déformation et l'établissement de l'équation du mouvement repose sur la détermination des deux énergies.

II.2. Mécanique des disques minces :

II.2.1. Formulation des déformations, déplacements et contraintes :

La dérivation première et seconde par rapport au temps, des expressions des composantes de déplacement permet de déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération, respectivement. [1, 2, 3].

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} ; \frac{\partial u_\theta}{\partial t} ; \frac{\partial u_z}{\partial t} \dots\dots\dots(II.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} ; \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} ; \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \dots\dots\dots(II.2)$$

Les quantités (II.1) et (II.2) représentent respectivement, les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

Soit un système de coordonnées cartésiennes de base $(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ et un autre cylindrique de base $(O, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$, le vecteur unitaire \bar{e}_z coïncide avec l'axe de révolution du disque et l'origine O appartient au plan moyen situé entre les deux surfaces planes du disque. Pour obtenir les tenseurs de déformations et de déplacements, il est nécessaire de chercher l'expression de la distance entre deux points quelconques A et B , d'une configuration initiale avant déformation AB en une configuration finale après déformation $A'B'$.

Après déformation, le point A se déplace à A' et B se déplace à B' . A est distant du centre du disque d'un rayon quelconque r .

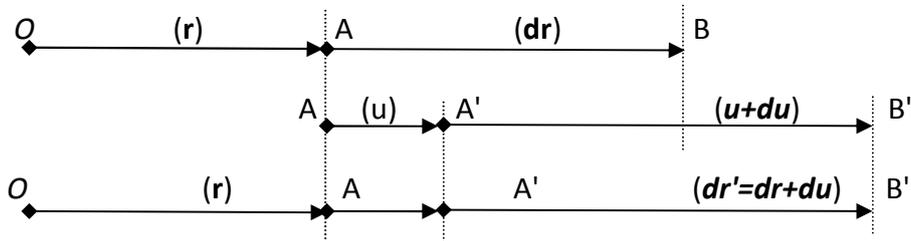


Fig. II.1. Déplacements entre configurations avant et après déformation.

La distance entre les points A et B est dr , celle entre A et A' est u et le déplacement du point B à B' est $u + du$.

D'où, la distance entre les points A' et B' est : $dr' = dr + u + du - u = (dr + du)$

Le vecteur u , décomposé suivant les directions r, θ et z peut s'écrire : [4].

$$u = u_r \bar{e}_r + u_\theta \bar{e}_\theta + u_z \bar{e}_z \dots \dots \dots (II.3)$$

De même pour dr :

$$dr = dr \bar{e}_r + r d\theta \bar{e}_\theta + dz \bar{e}_z \dots \dots \dots (II.4)$$

Alors :

$$dr' = dr + du = dr + \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz \dots \dots \dots (II.5)$$

D'après la relation (II.3), on peut écrire les trois relations suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} e_z \dots\dots\dots(II.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) e_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} e_z \dots\dots\dots(II.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial z} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} e_z \dots\dots\dots(II.8)$$

L'expression de dr' peut être écrite :

$$\begin{aligned} dr' = & e_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} e_z dr \\ & + r e_\theta + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) e_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} e_z d\theta \dots\dots\dots(II.9) \\ & + e_z + \frac{\partial u_r}{\partial z} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} e_z dz \end{aligned}$$

La distance entre les carrés des distances A'B' et AB est donnée par : $dr'.dr'-dr.dr$, où l'opérateur (.) est un produit interne, c'est dire que : $dr.dr = dr^2+r^2d_\theta^2+dz^2$

Posons :

$$\begin{aligned} e_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} e_z &= g_r \\ r e_\theta + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) e_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} e_z &= r.g_\theta \dots\dots\dots(II.10) \\ e_z + \frac{\partial u_r}{\partial z} e_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} e_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} e_z &= g_z \end{aligned}$$

d'où : $dr' = g_r dr + g_\theta r d\theta + g_z dz;$

et $dr'.dr' = g_r.g_r dr^2 + 2g_r.g_\theta r dr d\theta + 2g_r.g_z dr dz +$
 $g_\theta.g_\theta r^2 d\theta^2 + g_\theta.g_z r dz d\theta + g_z.g_z dz^2 \dots\dots\dots(II.11)$

La différence des carrés entre dr' et dr est :

$$\begin{aligned} dr'.dr' - dr.dr = & (g_r.g_r - 1)dr^2 + 2g_r.g_\theta r dr d\theta + 2g_r.g_z dr dz + \\ & (g_\theta.g_\theta - 1)r^2 d\theta^2 + g_\theta.g_z r dz d\theta + (g_z.g_z - 1)dz^2 \dots\dots\dots(II.12) \end{aligned}$$

Les éléments du tenseur de déformation sont donnés en fonction des quantités intermédiaires g_r, g_θ et g_z .

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r - 1) \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\theta \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_z \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_\theta - 1) \dots\dots\dots(II.13) \\
 \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_z \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_z \cdot \mathbf{g}_z - 1)
 \end{aligned}$$

Finalement, les expressions des déformations en fonction des composantes de déplacement u_r , u_θ et u_z sont :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} u_\theta^2 + u_r^2 + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
 \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \dots\dots(II.14)$$

Les six expressions représentées par le système (II.14) sont les éléments du tenseur de déformation d'ordre 2, elles sont complètement non linéaires et le tenseur est symétrique.

Comme notre objectif est l'étude des vibrations transversales, c'est-à-dire selon la direction z , la théorie simplifiée de Von karman relative aux plaques minces néglige les quantités d'ordre supérieur à un, sauf celles qui dépendent de la dérivée de u_z . Les quantités concernées par l'annulation sont : [4]

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad \frac{u_\theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \quad \frac{1}{2r^2} u_\theta^2; \quad \frac{1}{2r^2} u_r^2; \\
 &u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

Ces conditions mènent à réduire le système (II.14) à :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r}^2 \\
 \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}^2 \\
 \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
 \epsilon_{z\theta} &= \frac{1}{r} r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z}^2
 \end{aligned}
 \tag{II.15}$$

Pour les trois composantes $\epsilon_{z\theta}$, ϵ_{rz} et ϵ_{zz} , on ajoute les hypothèses de Kirchhoff relatives aux plaques minces qui se résument en : [5,6]

1. Lors de la déformation de la plaque, tout segment droit perpendiculaire au plan moyen avant déformation, reste droit et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation. Cette hypothèse entraîne que le cisaillement peut être négligé et que les angles de rotation sont petits.
2. Le déplacement transversal w est petit, c'est-à-dire qu'il atteint au maximum, l'épaisseur de la plaque. Les autres déplacements u et v sont plus petits.
3. Les déplacements longitudinaux u et v peuvent être exprimés en fonction du déplacement transversal w .
4. Les contraintes de cisaillement sont négligées et l'hypothèse de contraintes planes est adoptée. Il est à noter que cette hypothèse n'est valide qu'en l'absence de forces ou de moments extérieurs.

Comme le disque est mince, les composantes $\epsilon_{z\theta}$ et ϵ_{rz} sont négligeables.

La troisième hypothèse permet d'écrire que si u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements initiaux du plan médian du disque, alors :

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_0 - z \frac{\partial u_z}{\partial r} = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial r} \\
 u_\theta &= v_0 - \frac{z}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = v_0 - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \\
 u_z &= w_z
 \end{aligned}
 \tag{II.16}$$

La linéarisation complète des déformations réduit encore le système (II.15). [6] :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & | \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} & | \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & | \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & | \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(II.17)$$

L'origine **O** du système de coordonnées est fixée au centre du disque, le plan **xy** appartient au plan moyen et l'axe **z** coïncide avec l'axe de révolution de ce dernier.

L'opération de tournage du disque impose que la valeur de déformation soit très faible comparativement à son épaisseur. Dans ce cas, on peut adopter un problème de contraintes planes et nous appliquons les hypothèses de Kirchhoff.

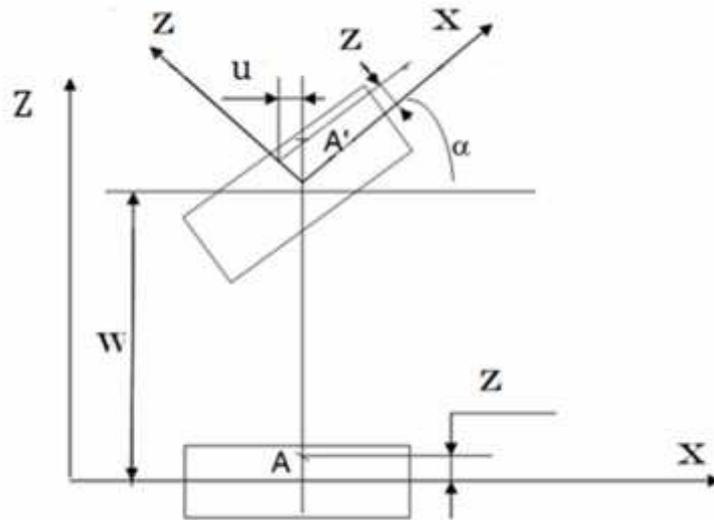


Fig. II.2. Principe de déformation d'une plaque mince.

Si l'angle de déflexion du disque α est petit, on peut écrire: $r \approx tg(\alpha)$ et le déplacement u du point **A** vers **A'** dans le plan **xz** selon la direction **x** est donné par : $tg(\alpha) = -u/z$, d'où :

$$u = -z.tg(\alpha) \dots\dots\dots(II.18)$$

Le déplacement étant petit, on peut alors considérer que : $tg r \approx r = \frac{\partial w}{\partial x}$. Dans ce cas, ce déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots\dots (II.19)$$

De même, le déplacement v dans le plan yz selon la direction y sera :

$$\epsilon = -z \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (II.20)$$

Il est à remarquer que la première supposition implique que les déformations angulaires v_{xz} et v_{yz} sont nulles. Les déformations seront donc :

$$\begin{aligned} v_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ v_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots (II.21) \\ v_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Les déformations peuvent être exprimées en fonction des contraintes :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{E} (\tau_x - \epsilon \tau_y - \epsilon \tau_z) \\ v_y &= \frac{1}{E} (\tau_y - \epsilon \tau_x - \epsilon \tau_z) \dots\dots\dots (II.22) \\ v_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Dans notre cas $\tau_z = 0$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{E} (\tau_x - \epsilon \tau_y) \\ v_y &= \frac{1}{E} (\tau_y - \epsilon \tau_x) \dots\dots\dots (II.23) \\ v_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Les contraintes exprimées en fonction des déformations sont alors :

$$\begin{aligned} \tau_x &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_x + \epsilon v_y + \epsilon v_z) \\ \tau_y &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_y + \epsilon v_x + \epsilon v_z) \dots\dots\dots(II.24) \\ \tau_{xy} &= Gv_{xy} = \frac{E}{2(1+\epsilon)} v_{xy} \end{aligned}$$

Si on prend $v_z = 0$, cette écriture se ramène à :

$$\begin{aligned} \tau_x &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_x + \epsilon v_y) \\ \tau_y &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_y + \epsilon v_x) \dots\dots\dots(II.25) \\ \tau_{xy} &= Gv_{xy} = \frac{E}{2(1+\epsilon)} v_{xy} \end{aligned}$$

L'écriture matricielle de (II.25), où le matériau est isotrope devient :

$$\begin{aligned} \tau_x & & & 1 & \epsilon & & 0 & & v_x \\ \tau_y & = \frac{E}{1-\epsilon^2} & \epsilon & 1 & & & 0 & & v_y \dots\dots\dots(II.26) \\ \tau_{xy} & & & 0 & 0 & (1-\epsilon)/2 & & & v_z \end{aligned}$$

II.2.2. Efforts normaux, tranchants, moments et conditions aux limites :

Comme les conditions aux limites sont exprimées en fonction des valeurs des moments et/ou des forces, on les exprime en fonction du déplacement w . Les efforts normaux $N_{rr}, N_{\theta\theta}$, les efforts tranchants transversaux Q_r, Q_θ et les moments M_r, M_θ et Mr_θ appliqués sur un élément de volume du disque peuvent être exprimés en fonction du déplacement w . Pour cela, on revient à la formulation des contraintes en (II.25) et (II.22) pour ajouter :

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_x + \epsilon v_y); \tau_r = \frac{-E}{1-\epsilon^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ \tau_y &= \frac{E}{1-\epsilon^2} (v_y + \epsilon v_x); \tau_\theta = \frac{-E}{1-\epsilon^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(II.27)$$

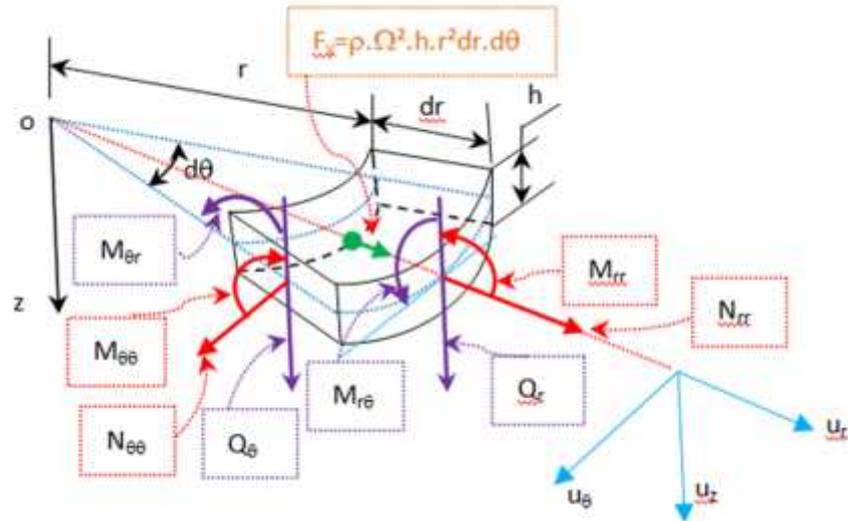


Fig. II.3. Moments, efforts normaux et tranchants appliqués sur un élément de volume du disque mince en rotation.

Les moments sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} M_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} z dz \\ M_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz \\ M_{r\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} z dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II.28)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} M_{rr} &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_{\theta\theta} &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_{r\theta} &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II.29)$$

Les efforts normaux N_{rr} et $N_{\theta\theta}$ et les efforts tranchants transversaux Q_r et Q_θ sont calculés

par :

$$\left. \begin{aligned} N_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz \\ N_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II.30)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II.31)$$

Concernant les conditions aux limites, notre disque est fixé au rayon intérieur $r = r_i$, ceci se traduit par un déplacement et une rotation nuls. Le bord libre à $r = r_e$, permet de déduire que le moment M_{rr} et la réaction du bord sont nuls, ces quatre conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 w &= 0 \text{ pour } r = r_i \\
 \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \text{ pour } r = r_i \\
 M_{rr} &= 0 \text{ pour } r = r_e \quad \dots\dots\dots(II.32) \\
 -Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \text{ pour } r=r_e
 \end{aligned}$$

II.2.3. Equation différentielle du mouvement du disque stationnaire :

Pour déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un point matériel appartenant au disque, on passe par le calcul du Lagrangien. Si on suppose que notre système est conservatif, le Lagrangien est défini par : $L = T - U$ et l'expression de l'énergie de déformation est donnée par : [5, 6].

$$U = \frac{1}{2} \int_V [v]^T [t] dv \dots\dots\dots(II.33)$$

La substitution des équations (II.21) et (II.26) dans l'équation (II.33), donne U sous une forme matricielle:

$$U = \int_V \frac{E}{2(1-\epsilon^2)} \begin{bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\epsilon)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy dz \dots\dots\dots(II.34)$$

L'épaisseur h de la plaque étant constante, U devient :

$$U = \frac{D}{2} \int_s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\epsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\epsilon) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \dots\dots\dots (II.35)$$

Avec : $D = \frac{Eh^3}{12(1-\epsilon^2)} \dots\dots\dots (II.36)$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dots \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \dots \dots \dots (II.37)$$

... étant constant, d'où :

$$T = \frac{\dots h}{2} \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \dots \dots \dots (II.38)$$

L'expression du Lagrangien prend la forme suivante :

$$L = \frac{1}{2} \int_V \left[\dots h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - D \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\epsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\epsilon) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \dots (II.39)$$

L'équation du mouvement peut être obtenue en appliquant le principe variationnel de Hamilton. Ce dernier impose que la variation de l'intégrale du Lagrangien entre deux instants t_1 et t_2 soit nulle. L'écriture succincte de ce principe est : [7].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Pour trouver l'équation différentielle du mouvement, on applique le Lagrangien :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Où q est la coordonnée généralisée du système. Dans notre cas, c'est le déplacement transversal $w(x,y,z,t)$.

Finalement, l'équation différentielle du mouvement transversal libre du disque en coordonnées cartésiennes est :

$$D \left[\frac{d^4 w(x, y, t)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y, t)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y, t)}{dx^2 dy^2} \right] + \dots h \frac{d^2 w(x, y, t)}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots (II.40)$$

En introduisant l'opérateur bi-harmonique :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

L'équation (II.40) devient :

$$D \nabla^4 w(x, y, t) + \dots h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (II.41)$$

L'équation différentielle du mouvement du disque exprimée en coordonnées polaires est :

$$D \nabla_r^4 w(r, \theta, t) + \dots h \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (II.42)$$

L'opérateur bi-harmonique en coordonnées polaires est défini par :

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots (II.43)$$

L'équation II.42 représente le modèle qui caractérise les vibrations libres transversales d'un disque mince stationnaire.

II.2.4. Equation différentielle du mouvement du disque rotatif :

La rotation du disque avec une vitesse angulaire Ω induit les forces centrifuges qui à leurs tours entraînent des contraintes radiales et tangentiels. Pour les calculer, on va supposer que le disque est non chargé, son matériau est isotrope et on travaille avec les expressions linéarisées des déformations.

L'équilibre local d'un élément de volume du disque est décrit par :

$$\text{div } \sigma_{ij} + F_{vi} = 0 \dots \dots \dots (II.44)$$

où F_{vi} représentent les forces de volume dans les directions x, y et z.

La projection de l'équation II.44 sur les axes r, θ et z donne le système des 3 équations d'équilibre local d'un élément de volume du disque en rotation, soit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= -\rho r h^2 \\
 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0
 \end{aligned} \dots\dots\dots(II.45)$$

Compte tenu que le disque est axisymétrique, les contraintes ne dépendent que de r, le système II.45 se ramène à une seule équation : [1, 2, 6, 7].

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho r h^2 = 0 \dots\dots\dots(II.46)$$

De l'équation II.17, on remarque que:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} \quad u_r = r \varepsilon_{\theta\theta} \\
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial(r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r} = \varepsilon_{\theta\theta} + r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}
 \end{aligned} \dots\dots\dots(II.47)$$

En exprimant l'équation II.23 en coordonnées polaires puis en le-substituant dans II.47, on obtient l'équation différentielle du premier ordre :

$$1 + \nu \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = r \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(II.48)$$

L'équation II.48 peut être résolue en exprimant la contrainte σ_{rr} en fonction de $\sigma_{\theta\theta}$ puis en appliquant les conditions aux limites. D'où : [8, 9].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, h) &= \frac{3+\nu}{8} r_i^2 r_e^2 - r^2 - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \rho h^2 \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, h) &= \frac{3+\nu}{8} r_i^2 r_e^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \rho h^2
 \end{aligned} \dots\dots\dots(II.49)$$

En appliquant les relations de l'élasticité précédemment vues, on peut calculer toutes les déformations et les déplacements et en particulier la déflexion $u_z = w(x, y, z, t)$.

Pour l'établissement de l'équation différentielle du mouvement dans le cas du disque en rotation, on exprime le Lagrangien en fonction des ces contraintes et des déformations qui sont à leurs tours fonctions de la vitesse de rotation h .

Il est à noter que si la vitesse de rotation est grande, on ne peut plus négliger les quantités qui en dépendent. Citons par exemple, l'effet gyroscopique. C'est pour cette raison qu'on trouve dans la littérature, diverses formes de modèles. [10, 11, 12, 13].

$$D \nabla^4 w(r, \theta, t) + \dots h \left(\frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t \partial \theta} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right) = \dots h \Omega^2 \left[\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right) \right] \quad \dots \text{(II.50)}$$

Cette équation aux dérivées partielles représente le modèle de vibrations libres transversales du disque mince en rotation. On va revenir à cette équation dans le prochain chapitre.

II.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a exposé les équations qui décrivent les déformations d'un élément du disque en fonction des différentes composantes de déplacement. Elles n'étaient pas linéaires. Cela veut dire qu'il est difficile d'exprimer ces déplacements en fonction des déformations. Cette étape est nécessaire car on doit passer par la loi de Hooke généralisée qui exprime les contraintes en fonction des déformations ou inversement. Pour cela, on a procédé à la linéarisation des déformations en fonction des déplacements en appliquant deux types de simplifications : Le premier n'est valable que si le disque est mince: Ce sont les hypothèses de Kirchhoff. Le deuxième est que le disque est une pièce qui présente une symétrie axiale selon l'axe z , et par conséquent on a exprimé les déplacements en fonction de r seulement, dans le cas du disque stationnaire et en fonction de r et θ dans le cas du disque rotatif.

II.4. Références bibliographiques :

- [1]. S. Forest, M. Amesty, G. Damame, S. Kruch, V. Maurel, M.Mazière (2009). Mécanique des milieux continus. Cours, Ecole des mines de Paris. 484p.
- [2]. L. E. Malvern. (1969). Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice Hall, inc. 723p.

- [3]. N. Moas. (2003). Mécanique des milieux continus. Ecole centrale de Nantes. 102p.
- [4]. N. Baddour.(2001). A modelling and vibration analysis of spinning disks. PhD thesis. University of Toronto. 250p.
- [5]. D. S. Liang, H. J. Wang, L. W. Chen. (2002). Vibration and stability of rotating polar orthotropic annular disks subjected to a stationary concentrated transverse load. Journal of Sound and Vibration. 250. (5) , 795-811.
- [6]. C. Touzé. (2009). Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos. Synthèse des activités scientifiques en vu de l'obtention de la HDR. 200p.
- [7]. J. Chung, N. C. Kang, J. M. Lee. (1996). A Study on Free Vibration of a spinning disk. ASME Journal. 10(2). 13-14.
- [8]. T. B. Bahder. (2006). Stress in rotation disks and cylinders. U.S. Army Research Laboratory. 18p.
- [9]. M. Bizić, D. Petrović, D. Pancić, Z. Dinović, (2012). Mathematical modelling of a disc weakened by an eccentric circular hole. Journal of theoretical and applied mechanics 50, 4, pp. 1097-1108.
- [10]. L. Jaouen. (2002). Vibrations de flexion des plaques. Rapport de l'université de Sherbrooke. 13p.
- [11]. T. H. Young. M. Y. Wu. (2004). Dynamic stability of disks with periodically varying spin rates subjected to stationary in-plane edge loads. Transactions of the ASME. 450. vol.71.
- [12]. E. Ventsel, T. Krauthmmar. (2001). Thin plates and shells, theory, analysis and applications. 2nd edition, Marcel Dekker inc. 651p.
- [13]. V. Adamek , F. Vales (2010). Thin viscoelastic disc subjected to radial non-stationary loading. Applied and Computational Mechanics 4, 5–14.

Résumé :

A l'heure actuelle, l'usinage à grande vitesse permet de fabriquer des pièces auparavant irréalisables. Malheureusement, il est couramment limité par les vibrations régénératives ou phénomène de broutement. Afin de mieux comprendre le comportement dynamique des disques minces stationnaires et rotatifs, une formulation mathématique basée sur la mécanique des milieux continus est présentée pour déduire les équations de mouvement avec et sans rotation. Lors du tournage des disques de faible épaisseur, la flexion statique et les vibrations posent souvent des problèmes d'usinage par une sensibilité prononcée à la moindre sollicitation sous l'effet des efforts de coupe. Le fait de réduire les profondeurs de passes pour limiter ces efforts n'est pas toujours la bonne solution car elle est très coûteuse en temps d'usinage. D'autre part, en dessous d'une certaine valeur de la profondeur, le simple fait d'effleurer le disque avec l'outil peut l'exciter et le phénomène de broutement prend naissance, ce qui peut affecter la qualité de la pièce finie.

Quand la rigidification de la pièce par un montage d'usinage adapté n'est pas possible, il est nécessaire de limiter la flexion et les vibrations par un choix approprié des conditions de coupe pour garantir une bonne stabilité d'usinage. Dans ce cas, les mesures des efforts de coupe et des vibrations sont indispensables.

En plus des vibrations qui altèrent l'état des surfaces usinées, si la pièce comporte des imperfections cachées dans la matière et qui peuvent apparaître à la surface au cours d'usinage, la détection de ces défauts par l'une des techniques existantes ou développées à travers le traitement des signaux mesurés peut prévenir l'utilisateur de la présence d'un défaut sur la surface de la pièce. L'analyse mutirésolution en ondelettes et la transformé de Fourier fractionnaire à court terme, faisant partie de ces techniques, ont montré des performances incontestables non seulement dans la détection des défauts structuraux réalisés volontairement sur les disques mais aussi par la localisation de certaines fréquences caractéristiques, en particulier celles du broutement. Ceci est fait par le traitement des signaux des efforts de coupe mesurés au cours d'une opération de tournage.

Mots clés : Dynamique des disques rotatifs, procédé de tournage, efforts de coupe, défaut structural, analyse de Fourier, analyse en ondelettes.

Abstract :

At present, high speed machining allows to manufacture parts that are impossible to achieve before the appearance of this technique. Unfortunately, the machining process is usually limited by the regenerative vibrations or chatter phenomenon. For a better understanding of the dynamic behavior of the stationary and spinning thin discs, a mathematical formulation based on the mechanics of the continuous mediums is presented to deduce the equations of motion with and without rotation. During the turning process of thin discs, some problems are often encountered due to the static deflection and vibrations caused by the effect of cutting forces. So, reducing the depth of cut in order to limit the cutting forces is not always the good solution because it is very expensive in machining time. In addition, below a certain cutting depth value, the simple contact between the machining part and the tool can excite the disc and the chatter phenomenon occurs, which can affect the surface quality of the finished part.

When the rigidity of the part is not guaranteed by a well adapted fixture, it is necessary to limit the deflection and vibrations by an appropriate choice of the cutting conditions to guarantee a good stability of machining. In this case, measurements of the cutting forces and vibrations are essential.

In addition of vibrations which deteriorate the finish of the manufactured surface, if the work-piece comprises hidden imperfections which can appear on the surface during machining, the detection of these defects by one of the existing techniques either developed through the processing of measured signals can alert the user to the presence of a defect on the surface. Among these techniques, the wavelets multiresolution analysis and the short term fractional fast Fourier transform proved their performances, not only in the detection of structural defects performed voluntarily on the discs but also the localization of certain characteristic frequencies, in particular the one corresponding to the chatter phenomena, by the signal processing of the measured cutting forces during a turning operation.

Key words: Dynamic of spinning discs, turning process, cutting forces, structural damage, Fourier analysis, wavelet analysis.

ملخص :

في الوقت الحالي، يسمح التصنيع ذو سرعات القطع العالية بانجاز قطع كانت مستحيلة الصنع من قبل. لكن الاهتزازات المتولدة ذاتيا أو ما يسمى بظاهرة الارتجاج تقلل من إمكانياته. من أجل فهم السلوك الديناميكي للأقراص المرنة الساكنة والدوارة اعتمدنا على ميكانيكا الوسائط المستمرة وذلك من أجل استنتاج قوانين الحركة في حالي السكون و الدوران للقرص. أثناء خراطة الأقراص ضعيفة السمك، يطرح انحناء القرص وكذلك الاهتزازات مشاكل في التصنيع من خلال الحساسية المفرطة لأقل قدر من قوى القطع. إن تقليل عمق التمريرة من أجل تخفيض هذه القوى لا يعتبر دائما الحل الأنجع لأنها مكلفة من ناحية زمن القطع. من ناحية أخرى، عندما يقل عمق التمريرة عن قيمة معينة فإن ملامسة قلم القطع للقطعة يدخل القرص في حالة الارتجاج التي تتسبب في إفساد حالة سطح القطعة.

إذا كان إسناد القطعة لجهاز تشغيل مستحيلا من أجل تقويتها ، فإنه يستلزم وضع حد للانحناء والاهتزازات وذلك باختيار جيد لشروط القطع من أجل ضمان تشغيل جيد و مستقر. في هذه الحالة فإنه من الضروري قياس قوى القطع و الاهتزازات.

زيادة على الاهتزازات التي تفسد حالة السطوح المصنعة، فوجود بعض العيوب المخفية والتي قد تظهر على السطح وقت تشغيل القطعة، فإن استعمال بعض التقنيات الموجودة أو المطورة من خلال معالجة الإشارات المقاسة بإمكانه تحذير المستعمل لوجود هذه العيوب على سطح القطعة. إن التحليل متعدد الموجات وتحويلات "فورييه" الكسرية قصيرة المدى تعتبران ضمن التقنيات التي أثبتت نجاعتها ليس في إيجاد العيوب البنيوية فحسب بل في تحديد بعض الذبذبات الخاصة ومن ذلك ذبذبات الارتجاج من خلال معالجة إشارات قوى القطع التي تم قياسها أثناء عملية الخراطة.

الكلمات المفتاحية : ديناميكا الأقراص الدوارة ، عملية الخراطة، قوى القطع، العيوب البنيوية، تحليل "فورييه"، التحليل متعدد الموجات.

Nomenclature

Symbole	Désignation
V_c	Vitesse de coupe en m/mn.
a	Vitesse d'avance en mm/tr.
p	Profondeur de coupe en mm.
F_x ou F_a	Force axiale ou effort d'avance.
F_y ou F_p	Force radial ou effort de pénétration.
F_z ou F_t	Force tangentielle ou effort de coupe tangential.
r_i	Rayon intérieur du disque en m.
r_e	Rayon extérieur du disque en m.
r	Rayon en un point quelconque du disque en m.
θ	Angle de rotation du disque dans le repère (O,x,y,z).
γ	Angle de déflexion du disque.
h	Epaisseur du disque en m.
E	Module d'Young en N/m ² .
$G+$	Module d'élasticité transversale en N/m ² .
ϵ	Coefficient de poisson.
ρ	Masse volumique du disque en kg/m ³ .
D	Rigidité de flexion du disque.
U	Energie de déformation du disque.
T	Energie cinétique du disque.
L	Lagrangien.
u, v, w	Déplacements dans les sens de x, y et z.
n	Nombre de diamètre nodaux.
m	Nombre de cercles nodaux.
∇^2	Opérateur harmonique en coordonnées cartésiennes.
∇_r^2	Opérateur harmonique en coordonnées polaires.
∇^4	Opérateur bi-harmonique.
t	Temps (s).
$\}mn$	Racines de l'équation caractéristique.

$C_1; C_2; C_3; C_4$	Constantes.
R_m	Fonction de forme du mode m .
J_n	Fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce.
Y_n	Fonction de Bessel de 2 ^{ème} espèce.
I_n	Fonction de Bessel modifiée de 1 ^{ère} espèce.
K_n	Fonction de Bessel modifiée de 2 ^{ème} espèce.
ω_{mn}	Pulsation du mode (m,n) en rad/s.
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes.
$[V]$	Tenseur des déformations.
$[U]$	Tenseur des déplacements.
h	Fréquence de rotation en tr/mn.
f_i	Forces de volumes dans le sens i .
FFT	Transformée de Fourier classique.
TFFr	Transformée de Fourier fractionnaire.
TFCT	Transformée de Fourier à court terme.
TFFrCT	Transformée de Fourier fractionnaire à court terme.
$x(t)$	Signal.
$L_2(\mathbb{R})$	Opérateur de la transformée de Fourier classique.
R_α	Matrice de rotation.
K_α, ξ, x	Noyau de la transformée de Fourier fractionnaire.
\bar{p}_α	Moment central du second ordre dans le domaine fractionnaire.
m_α	Moment du premier ordre.
w_α	Moment de deuxième ordre.

Liste des figures

N°	Titre de la figure	Page
I.1.	Exemple de l'UGV d'une voile mince en Aluminium en aéronautique.	7
I.2.	Exemple de fabrication par UGV à Commande numérique des matrices de forge pour bielle en acier traité.	7
I.3.	Plages des vitesses de coupe approximatives pour différents matériaux.	8
II.1.	Déplacements entre configurations avant et après déformation.	14
II.2.	Principe de déformation d'une plaque mince.	18
II.3.	Moments, efforts normaux et tranchants appliqués sur un élément de volume du disque mince en rotation.	21
III.1.	Géométrie du disque.	29
III.2.	Géométrie de l'élément de maillage SHELL 93.	33
III.3.	Maillage du disque de référence obtenu en appliquant l'élément SHELL93.	33
III.4.	Déformée du mode (0, 0), sa fréquence est 240.36 Hz.	34
III.5.	Déformée du mode (0, 1), sa fréquence est 243.96 Hz.	34
III.6.	Maillage du disque réel obtenu en appliquant l'élément SHELL93.	36
III.7.	Déformée du mode (0, 1), sa fréquence est 466.20 Hz.	36
III.8.	Déformée du mode (0, 0), sa fréquence est 524.09 Hz.	37
III.9.	Déformée du mode (0, 2), sa fréquence est 659.66 Hz.	37
III.10.	Déformée du mode (0, 3), sa fréquence est 1364.00 Hz.	37
III.11.	Déformée du mode (0, 4), sa fréquence est 2365.00 Hz.	38
III.12.	Déformée du mode (1, 0), sa fréquence est 3144.00 Hz.	38
III.13.	Symétrie des solutions ψ_i ($i=1 \rightarrow 4$).	43
III.14.a.	Représentation de $\psi = f(N)$ pour la fréquence 476.71 Hz.	44
III.14.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 476.71 Hz.	44
III.15.a.	Représentation de $\psi = f(N)$ pour la fréquence 528.20 Hz.	44
III.15.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 528.20 Hz.	44
III.16.a.	Représentation de $\psi = f(N)$ pour la fréquence 674.09 Hz.	45
III.16.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 674.09 Hz.	45
III.17.a.	Représentation de $\psi = f(N)$ pour la fréquence 1383.03 Hz.	45

III.17.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 1383.03 Hz.	45
III.18.a.	Représentation de $\gamma=f(N)$ pour la fréquence 2410.66 Hz.	46
III.18.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 2410.66 Hz.	46
III.19.a.	Représentation de $\gamma=f(N)$ pour la fréquence 3144.14 Hz.	46
III.19.b.	Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence.3144.14 Hz.	46
IV.1.	Montage expérimental.	52
IV.2.	Composantes de l'effort résultante de coupe appliqué sur le disque.	55
IV.3.	Efforts de coupe de l'essai 1 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	55
IV.4.	Efforts de coupe de l'essai 2 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=1$ mm).	56
IV.5.	Efforts de coupe de l'essai 3 ($N=1400$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	56
IV.6.	Efforts de coupe de l'essai 4 ($N=1400$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=1$ mm).	57
IV.7.	Efforts de coupe de l'essai 5 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	57
IV.8.	Efforts de coupe de l'essai 6 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=1$ mm).	58
IV.9.	Efforts de coupe de l'essai 7 ($N=355$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	58
IV.10.	Efforts de coupe de l'essai 8 ($N=355$ tr/min, $a=0.16$ mm/tr et $p=1$ mm).	59
IV.11.	Efforts de coupe de l'essai 9 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	59
IV.12.	Efforts de coupe de l'essai 10 ($N=710$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	60
IV.13	Efforts de coupe de l'essai 11 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm).	60
IV.14	Efforts de coupe de l'essai 12 ($N=1400$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)	61
IV.15	Efforts de coupe de l'essai 13 ($N=710$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)	61
IV.16	Efforts de coupe de l'essai 14 ($N=355$ tr/min, $a=0.08$ mm/tr et $p=0.5$ mm)	62
V.1	Détail d'une surface usinée.	68
V.2	Phénomène de régénération de la surface.	68
V.3	Illustration des deux plans : principal (t, f) et fractionnaire (u, v).	70
V.4	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 1.	75
V.5	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 2.	75
V.6	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 3.	76
V.7	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 4.	76
V.8	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 5.	77
V.9	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 6.	77
V.10	Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 7.	78

V.11	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour l'essai 8.</i>	78
V.12	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour l'essai 9.</i>	79
V.13	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour l'essai 10.</i>	79
V.14	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour l'essai 11.</i>	79
V.15	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 1.</i>	80
V.16	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 2.</i>	81
V.17	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 3.</i>	81
V.18	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 4.</i>	82
V.19	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 5.</i>	82
V.20	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 6.</i>	83
V.21	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 7.</i>	83
V.22	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 8.</i>	84
V.23	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 9.</i>	84
V.24	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 10.</i>	85
V.25	<i>Spectrogrammes pour différentes largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 11.</i>	85
V.26	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour un essai de confirmation à 2000 tr/min.</i>	86
V.27	<i>Spectre de l'effort de coupe Fz pour un essai comparatif de l'essai 2.</i>	87
V.28	<i>Signal de l'effort Fz mesuré sur un disque sain tournant à 1400 tr/min.</i>	88
V.29	<i>Signal de l'effort Fz mesuré dans le cas de la présence d'un seul défaut sur le disque tournant à 710 tr/min.</i>	88
V.30	<i>Signal de l'effort Fz dans le cas de la présence de deux défauts sur le disque tournant à 355 tr/min.</i>	89
V.31	<i>Spectre du signal de la Fig. V.28.</i>	90
V.32	<i>Spectre du signal de la Fig. V.29.</i>	90
V.33	<i>Spectre du signal de la Fig. V.30.</i>	91
V.34	<i>Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.28.</i>	91
V.35	<i>Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.29.</i>	92
V.36	<i>Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.30.</i>	92

Liste des tableaux

<i>N°</i>	<i>Titre du tableau</i>	<i>Page</i>
<i>III.1.</i>	<i>Valeurs en Hz des fréquences trouvées par notre programme, simulées par ANSYS et celles de la référence [2].</i>	<i>35</i>
<i>III.2.</i>	<i>Valeurs en Hz des fréquences calculées par Matlab, celles simulées par ANSYS et certaines, mesurées expérimentalement.</i>	<i>39</i>
<i>III.3.</i>	<i>Récapitulatif des vitesses de rotation critiques.</i>	<i>47</i>

Introduction :

Aujourd'hui, pour la survie d'une entreprise manufacturière suite à une concurrence rude imposée par le marché, les industriels sont obligés à répondre aux exigences de qualité des pièces fabriquées par usinage et qui sont de plus en plus sévères.

Le phénomène des vibrations de la structure composée par la machine-outil, l'outil coupant et la pièce est un problème courant et qui existe depuis la naissance de l'usinage. Ainsi, un niveau élevé de vibrations de l'une des composantes du système représente un mauvais signe pour l'industriel du fait que la qualité des pièces obtenues est fortement influencée par ce phénomène. Les vibrations d'usinage peuvent être à l'origine d'une déformation ou d'une rupture de la pièce et comme conséquence, une mauvaise rugosité peut s'afficher sur les surfaces résultantes et la pièce sera rebutée.

Quand l'épaisseur de la pièce entre en jeu comme paramètre spécifique, les vibrations dans le système d'usinage s'amplifient et la maîtrise du phénomène sera de plus en plus imposée. Lors d'une opération de tournage, un disque mince peut entrer dans des zones de coupe instables. Le choix des paramètres de coupe, garantissant la stabilité de l'usinage, peut être déterminé en faisant l'étude de comportement dynamique du disque. Ceci demande la recherche d'un modèle théorique liée aux vibrations linéaires et non linéaires et un suivi expérimental minutieux pour décider sur sa validité. En outre, le phénomène de broutement peut se manifester d'une façon aléatoire et qui peut être catastrophique lors de l'usinage.

Ce travail est composé de cinq chapitres :

- Le premier est articulé sur trois parties: la première expose les travaux entrepris sur les vibrations des disques minces avec et sans rotation, tandis que la deuxième présente les spécificités de l'usinage des disques minces et les solutions proposées par les industriels. Une troisième partie présentant l'état de l'art de l'usinage à grande vitesse.
- Le second chapitre est réservé à l'étude du comportement dynamique du disque représenté par un système d'équations aux dérivées partielles. Comme les types des modèles de vibration utilisés dépendent de cette formulation, le développement des champs de déformations, de déplacements et des contraintes dans le cas tridimensionnel est présenté.

Les tenseurs ainsi obtenus sont, par la suite, simplifiés par les hypothèses de Kirchhoff pour aboutir à un modèle linéaire des vibrations.

- Le troisième chapitre expose les méthodes d'extraction des fréquences propres pour le cas des vibrations linéaires du disque mince stationnaire ainsi que pour le cas du disque mince rotatif. Les fréquences de résonance avec et sans rotation et les vitesses critiques ont été calculées par un code développé sous Matlab. Les résultats trouvés ont été comparés avec ceux obtenus grâce au code de calcul ANSYS.
- Le quatrième chapitre regroupe l'ensemble des équipements utilisés pour la réalisation des essais de tournage et pour l'acquisition des signaux des efforts de coupe ainsi que les résultats correspondants.
- Dans le cinquième chapitre, on a prolongé l'étude, à la détection des défauts structuraux présents sur le disque à travers le suivi des efforts de coupe. On a présenté une étude bibliographique sur les différentes techniques utilisées pour la détection des défauts des pièces. Les supports théoriques des deux techniques, à savoir l'analyse multi résolution en ondelettes et la transformée de Fourier fractionnaire à court terme, ont été exposés. Ces deux méthodes ont été appliquées pour le traitement des signaux des efforts de coupe.

Une liste de références bibliographiques est présentée à la fin de chaque chapitre.

Le travail est clôturé par une conclusion générale et des perspectives.

CHAPITRE V :

DETECTION DES DEFAUTS STRUCTURAUX ET DU BROUITEMENT
PAR L'ANALYSE DES SIGNAUX DES EFFORTS DE COUPE.

V.1. Introduction.....	66
V.2. Synthèse des travaux de recherche.....	67
V.2.1. Les vibrations d'usinage.....	67
V.2.2. Le phénomène du broutement.....	68
V.2.3. Représentation Temps-fréquence des phénomènes vibratoires.....	69
V.3. Transformée de Fourier classique (FFT).....	69
V.4. Transformée de Fourier fractionnaire (TFFr).....	70
V.5. Transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT).....	71
V.6. Calcul de l'ordre de transformation optimal.....	72
V.7. La transformée en ondelettes	73
V.8. Traitement des signaux.....	74
V.8.1. Traitement des signaux par la FFT.....	74
V.8.1.1. Premier cas : Disque avec un seul défaut.	75
V.8.1.2. Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°	79
V.8.2. Traitement des signaux par la TFFrCT.....	80
V.8.2.1. Premier cas : Disque avec un seul défaut.....	80

V.8.2.2. Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°	84
V.9. Interprétation des résultats.....	85
V.10. Application de la méthode des ondelettes pour la détection des défauts	88
V.11. Traitement des résultats expérimentaux par les ondelettes	89
V.12. Conclusion.....	93
V.13. Références bibliographiques.....	94

V.1 Introduction :

L'apparition des vibrations au cours de l'usinage peut avoir lieu par insuffisance de rigidité, cas des disques minces, dans le cas de l'usinage sous conditions de chocs et en présence des défauts de structure telles que les fissures, les soufflures et les inclusions dures qui sont cachées dans la matière de la pièce et dévoilées par le passage de l'outil. Ces vibrations affectent la qualité de surface de la pièce finie.

L'analyse des signaux des efforts de coupe par des représentations temps-fréquence peut donner des idées sur des phénomènes tels que le broutement et sur l'existence des défauts dans le disque au cours de son usinage.

La conversion des représentations temps-fréquence en transformée de Fourier classique (FFT) n'est qu'un cas particulier de la transformée de Fourier fractionnaire (TFFr). Une TFFr est une FFT qui dépend d'un angle quelconque entre 0 et 90°. Dans un premier temps, la TFFr a été utilisé pour détecter les défauts d'engrenage [1, 2] en envisageant le traitement des signaux pseudopériodiques [3, 4, 5]. Mais, elle n'a pas pu localiser le contenu fréquentiel qui est parfois nécessaire. La transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT) vient pour résoudre ce problème, elle permet de donner une représentation temps-fréquence avec une bonne résolution bidimensionnelle [6, 7].

Les spectrogrammes basés sur la TFFrCT donnent une meilleure résolution temps-fréquence des signaux contenant des composantes non-stationnaires [8, 9].

Pour le diagnostic des phénomènes vibratoires tels que le broutement qui peut se produire au cours d'usinage, la TFFrCT semble être plus adaptée pour traiter les signaux correspondants. Malgré que les défauts structuraux puissent être détectés par les techniques de contrôle non destructif, qui sont coûteux, on peut recourir à l'analyse des signaux vibratoires issus du système ou des efforts de coupe pour confirmer leur existence par la TFFrCT.

Aujourd'hui, une nouvelle technique de débruitage des signaux par ondelettes est parue. Cette dernière est souvent utilisée pour la détection des défauts en faisant une analyse temps-fréquence. L'analyse en ondelettes a été utilisée pour faire la liaison entre les pics d'un

signal et l'existence des défauts [10]. L'apparition du défaut correspond à l'énergie maximale des coefficients d'ondelettes. [11, 12].

La transformée discrète en ondelettes a été largement utilisée dans le domaine de la détection des défauts d'engrenages [13] et de roulements [14].

Dans ce travail, on cherche l'existence du phénomène de broutement dans l'espace temps-fréquence et on va essayer de détecter les défauts structuraux, créés volontairement sur un disque, par la mesure et le traitement des signaux des efforts de coupe en réalisant des opérations de tournage. Puis, on fera une comparaison des différents résultats traités par la transformée en ondelettes avec ceux obtenus par la transformée de Fourier fractionnaire à court terme.

V.2 Synthèse des travaux de recherche :

V.2.1 Les vibrations d'usinage :

Les vibrations d'usinage se divisent en trois types [8] :

1. Les vibrations libres : Ce sont les vibrations du système d'usinage (outil, broche, pièce) en réponse à un choc afin de déterminer les caractéristiques dynamiques de la structure. Ce type de vibrations n'intervient pas pendant l'usinage.
2. Les vibrations forcées, qui apparaissent en réponse à un chargement cyclique. Elles sont très présentes en coupe interrompue. En tournage, elles peuvent être induites par un défaut d'excentricité de la pièce lors de son montage.
3. Les vibrations auto-entretenues qui sont connues sous le nom de broutement. Ce phénomène intervient suite à une perturbation du système, qui peut mener à des amplitudes vibratoires importantes. A la différence des vibrations forcées, la structure vibre à des fréquences distinctes de la fréquence de broche en tournage. Lorsqu'elles surviennent, ces vibrations affectent la rugosité des pièces et induisent des chocs sur les arêtes de coupe tout en générant parfois beaucoup de bruit.

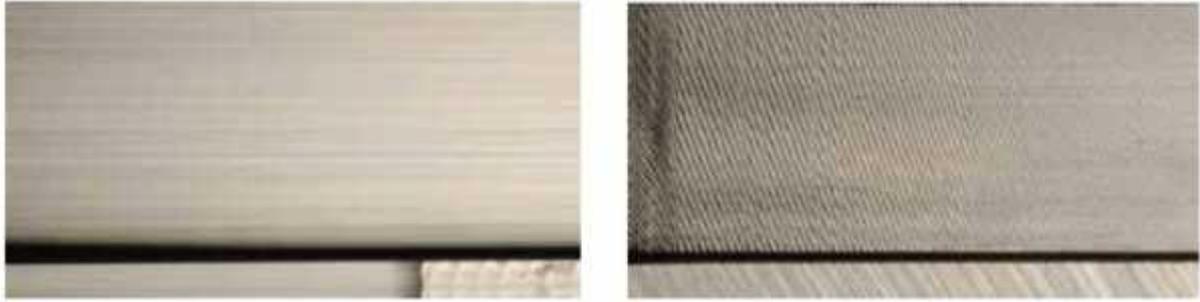


Fig. V.1 : Détail d'une surface usinée

a) Sans vibrations auto-entretenues.

b) Avec vibrations auto-entretenues.

V.2.2 Le phénomène du broutement :

Selon Taylor en 1907 [8], le broutement était un phénomène ambigu car il n'y avait pas un modèle mathématique qui puisse prédire l'apparition de ce phénomène. Ensuite, différentes approches ont été proposées afin d'éclaircir le broutement. Les premières théories des vibrations auto-entretenues furent en 1945, puis en 1948, on découvrit que l'amortissement négatif fut la cause principale provoquant ce phénomène. En 1965, les études théoriques et expérimentales des vibrations forcées des machines outils ont beaucoup contribué à la compréhension du broutement. Parmi les solutions proposées pour l'éviter étaient la minimisation de la profondeur de passe. En 1958, on croyait que lors de son passage sur la surface usinée, l'outil est excité par les défauts macro et/ou microgéométriques pour entrer encore en vibrations (fig. V.2).

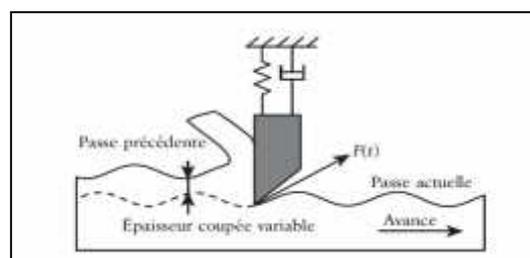


Fig.V.2 : Phénomène de régénération de la surface

La variation de la profondeur de passe provoque la variation des forces de coupe, ceci entraîne un couplage entre deux modes propres orthogonaux et par conséquent l'apparition du broutement. C'est un phénomène qui peut être produit par le frottement non-linéaire entre la face de coupe de l'outil et la pièce.

V.2.3. Représentation Temps-fréquence des phénomènes vibratoires :

Une représentation temps-fréquence (RTF) fournit une idée sur la variation du spectre en fonction du temps. Mathématiquement, une RTF est une application associée à un signal $s(t)$ représentée par une fonction bidimensionnelle $P_s(t, f)$ dans le plan temps-fréquence. En fonction de leurs propriétés mathématiques, les RTFs peuvent être linéaires ou bilinéaires. Les RTFs linéaires, telles que la transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT) ou la transformée en ondelettes (TO), sont particulièrement intéressantes pour des signaux multi-composantes car la RTF globale s'écrit comme la somme des RTFs des composantes du signal.

Une technique procédant à la transformée en ondelettes appliquée sur les fonctions de différence entre les déformées est utilisée pour la détection des défauts structuraux [14] en utilisant la différence entre les déformées. Ainsi les dommages structuraux sont visualisés grâce aux modifications locales sur le spectre fréquentiel spatial.

La technique de transformée en ondelettes a été utilisée pour la détection des fissures dans les arbres [12]. Cette dernière a prouvé une concordance entre les résultats numériques et expérimentaux.

La généralisation de la FFT conventionnelle a donné naissance à la transformée de Fourier fractionnaire dépendant d'un paramètre angulaire α . Ainsi l'analyse des signaux pseudopériodiques [15] par la transformée de Fourier fractionnaire est beaucoup mieux que l'analyse par la FFT. Un défaut attachée l'analyse par la FFT se manifeste par son inaptitude à localiser le contenu fréquentiel. La transformée de Fourier fractionnaire à court terme est proposée pour résoudre ce problème. La TFFr permet de donner une représentation temps-fréquence avec une bonne résolution bidimensionnelle [13].

V.3 Transformée de Fourier classique (FFT) :

La transformée de Fourier classique est un opérateur défini par :

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \dots\dots\dots (V.1)$$

et son inverse est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \dots\dots\dots (V.2)$$

Dans le domaine du traitement du signal, f est un signal dépendant du temps, donc la variable x , ici, peut être remplacée par le temps τ et la variable ξ peut être remplacée par la fréquence ω . Donc, $f(x)$ décrit le domaine temporel du signal alors que $F(\xi)$ décrit le domaine fréquentielle.

V.4 Transformée de Fourier fractionnaire (TFFr) :

La transformée de Fourier fractionnaire est une généralisation de la transformée de Fourier classique. On peut trouver d'autres définitions dans [16]. Elle dépend d'un paramètre angulaire α fig. V.3.

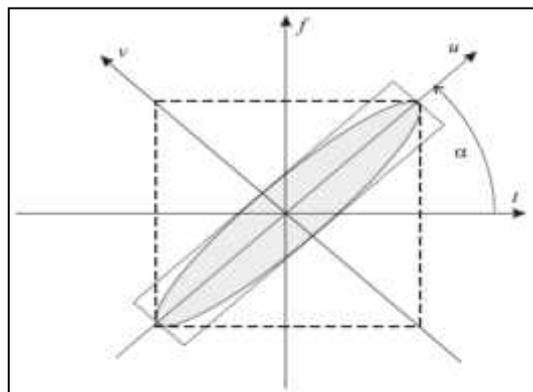


Fig. V.3 : Illustration des deux plans : principal (t, f) et fractionnaire (u, v).[17].

Dans le plan temps-fréquence, les axes sont orthogonaux. La rotation dans le plan temps-fréquence correspond à la transformée de Fourier fractionnaire du signal. La transformée de Fourier d'un signal peut être vue comme une rotation d'un angle α . On va donc, déterminer cette transformation (rotation dans le plan temps-fréquence) [17].

Selon [19], la transformée de Fourier fractionnaire d'une fonction $s(t)$ est donnée par :

$$TFFr[x]_{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, t, u) x(t) dt \dots\dots\dots (V.3)$$

Où le Kernel $K(\alpha, t, f)$ est donnée par :

$$K(\alpha, t, f) = \frac{\exp(j\alpha/2)}{\sqrt{j \sin \alpha}} \exp\left(j\pi \frac{(t^2+u^2)\cos\alpha - 2tu}{\sin\alpha}\right) \dots\dots\dots (V.4)$$

Avec la rotation (Fig. V.3) exprimée par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \dots\dots\dots (V.5)$$

V.5. Transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT) :

Si les fréquences d'un signal changent lentement dans une direction bien déterminée dans le plan temps-fréquence, nous prenons cette direction comme axe principal. Ca nous permet de trouver les domaines fractionnaires où le signal est mieux concentré.

La transformée de Fourier à court terme d'un signal $x(t)$ est vue comme une FFT normal pondérée par une fenêtre $g^*(t_0)$. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$TFCT x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) g^*(t_0) \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \dots\dots\dots (V.6)$$

Pour une meilleure représentation, la fenêtre peut être ajustée selon le type du signal, la direction du temps ou de fréquence. Elle peut être étroite ou large.

La transformée de Fourier fractionnaire à court terme d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} TFFrCT x_a(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(u + u_0) g^*(u_0) \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x^a(u + u_0) R_g^0(u_0)^* \exp(-2j\pi u_0 v) du_0 \dots\dots\dots (V.7) \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (V.7) par $\exp(-j\pi uv)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \exp(-j\pi uv) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_x^a(u + u_0) R_g^0(u_0)^* \exp(-2j\pi u_0 v) du_0 \\ = \exp(-j\pi tf) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_x^a(t + t_0) R_g^{-a}(t_0)^* \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \dots\dots\dots (V.8) \end{aligned}$$

Nous concluons ainsi que la transformée de Fourier fractionnaire à court terme du signal $x(t)$ dans le domaine fractionnaire peut être calculée directement en tant que TFFr normale en utilisant une fenêtre qui est la transformée de Fourier fractionnaire de la première fenêtre $g(t)$, suivie par la rotation du système de coordonnées.

$$TFFrCT x_a = \exp(j\pi uv - tf) \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) TFFr[g(t_0)]^* \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \dots\dots (V.9)$$

Où u, v et t, f sont liés par la relation (V.5).

La méthode de calcul de la transformée de Fourier fractionnaire à court terme est similaire à celle de la transformée de Fourier classique. Le signal est fenêtré en intervalles discrets dans le temps et ensuite tous les intervalles seront transformés l'un après l'autre, à un ordre fractionnaire approprié, donnant la réponse maximale, afin d'obtenir le spectre de puissance locale du signal en fonction du temps. La TFFrCT peut être calculée par [4, 20] :

$$TFFrCT s(t, f) = FFT s(t + \tau) \cdot TFFr_{\alpha} \omega \tau \dots\dots\dots(V.11.a)$$

Ou :

$$TFFrCT s(t, f) = FFT TFFr_{\alpha} s(t + \tau) \cdot \omega \tau \dots\dots\dots(V.11.b)$$

V.6. Calcul de l'ordre de transformation optimal :

L'amélioration de la représentation temps-fréquence peut être faite en cherchant le domaine fractionnaire optimal. Celle-ci nous mène à analyser les moments fractionnaires et nous permet de passer de la transformée de Fourier Fractionnaire à une version améliorée dite transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT).

Largeur minimale du signal est synonyme à un domaine fractionnaire optimal, donc à un moment fractionnaire du second ordre p_{α} minimal.

p_{α} peut être trouvé par :

$$p_{\alpha} = p_0(\cos\alpha)^2 + \frac{p_{\pi}}{4}(\sin\alpha)^2 + \frac{w_{\pi} - m_0 m_{\pi/2}}{4} - \frac{w_0 + w_{\pi/2}}{2} \sin 2\alpha \dots\dots\dots(V.11)$$

Où : $w_{\alpha} = w_0(\cos\alpha)^2 + \frac{p_{\pi}}{4}(\sin\alpha)^2 + \frac{w_{\pi} - m_0 m_{\pi/2}}{4} - \frac{w_0 + w_{\pi/2}}{2} \sin 2\alpha$

La dérivée première de p_{α} s'annule quand le signal atteint sa largeur minimale.

$$\frac{dp_{\alpha}}{d\alpha} = p_{\pi/2} - p_0 \sin 2\alpha + 2 \frac{w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}}{4} - \frac{w_0 + w_{\pi/2}}{2} \cos 2\alpha \dots\dots\dots(V.12)$$

Par conséquent, on peut déterminer l'angle de transformation fractionnaire de la fenêtre comme suit :

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2 \frac{w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}}{4} - \frac{w_0 + w_{\pi/2}}{2}}{p_0 - p_{\pi/2}} \dots\dots\dots(V.13)$$

V.7 Transformée en ondelettes.

La transformée en ondelettes remplace les sinusoides de la transformée de Fourier par une famille de translations et de dilatations d'une même fonction appelée ondelette. Mathématiquement, elle se met sous la forme :

$$\mathbb{E}_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E}\left(\frac{t-b}{a}\right) \dots\dots\dots (V.14)$$

Avec **a** paramètre d'échelle ou de dilatation et **b** paramètre de translation.

En notant \mathbb{E}^* la conjuguée de \mathbb{E} , la transformée en ondelettes continue d'une fonction $s(t)$, est définie par :

$$CWT = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \mathbb{E}^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \dots\dots\dots (V.15)$$

L'analyse en ondelettes, contrairement à la transformée de Fourier, fait donc la projection d'une fonction $s(t)$ sur une famille de fonctions (ondelettes) déduites d'une fonction élémentaire (ondelette mère) par des translations et des dilatations. En hautes fréquences, ceci permet d'avoir une précision en temps accrue correspondant à des phénomènes rapides, pour lesquels l'instant d'apparition et la durée sont des caractéristiques importantes. Aux basses fréquences, la précision fréquentielle s'améliore au détriment de l'aspect temporel, puisque les phénomènes sont de durées beaucoup plus longues.

La transformée en ondelettes discrète (DWT) est une discrétisation de la transformée en ondelettes continue (CWT). En remplaçant respectivement **a** et **b** par **2^m** et **n^{2^m}**, avec **m** et **n** des entiers, son expression devient :

$$DWT(m,n) = 2^{\frac{-m}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{-m}{2} + \infty} s(t) \mathbb{E}^*(2^{-m}t - n) dt \dots\dots\dots (V.16)$$

Une version pratique de cette transformée, appelée Analyse Multi-Résolution en Ondelettes (AMRO) consiste à faire passer le signal $s(t)$ dans deux filtres passe-bas et passe-haut. A ce niveau, il en résulte deux vecteurs dont les éléments du premier sont appelés coefficients d'approximation correspondant aux plus basses fréquences du signal, tandis que les éléments

du second sont appelés coefficients de détail correspondant aux plus hautes d'entre elles. Le processus de décomposition peut être répété n fois, avec n le nombre maximal de niveaux.

Lors de la décomposition, le signal $s(t)$ et les vecteurs résultants subissent un sous échantillonnage, c'est la raison pour laquelle les coefficients d'approximation et de détail passent à nouveau à travers deux filtres de reconstruction. Deux vecteurs en résultent : \mathbf{A}_k appelé approximation et \mathbf{D}_k appelé détail, satisfaisant la relation [20] :

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= A_k + D_k \\ s &= A_k + \sum_{i \leq k} D_i \end{aligned} \dots\dots\dots (V.17)$$

Où i et k sont des entiers.

Chaque ondelette possède donc, sa propre banque de filtres qui lui permet de procéder à l'analyse multirésolution.

Désignant par F_{max} la fréquence maximale du signal mesuré, la bande de fréquence de chaque niveau i revient à $\left[0 - \frac{F_{max}}{2^i} \right]$ pour les approximations et $\left[\frac{F_{max}}{2^i} - \frac{F_{max}}{2^{i-1}} \right]$ pour les détails.

V.8 Traitement des signaux

V.8.1 Traitement des signaux par la FFT

Un premier traitement des signaux mesurés a été fait par l'application de la transformée de Fourier classique (FFT) et ceci pour voir les signatures fréquentielles telles que la fréquence de rotation et ses harmoniques, les fréquences propres ou autres. Comme la composante tangentielle F_z est généralement la plus importante, Nous représentons les spectres relatives à cette dernière.

V.8.1.1 Premier cas : Disque avec un seul défaut.

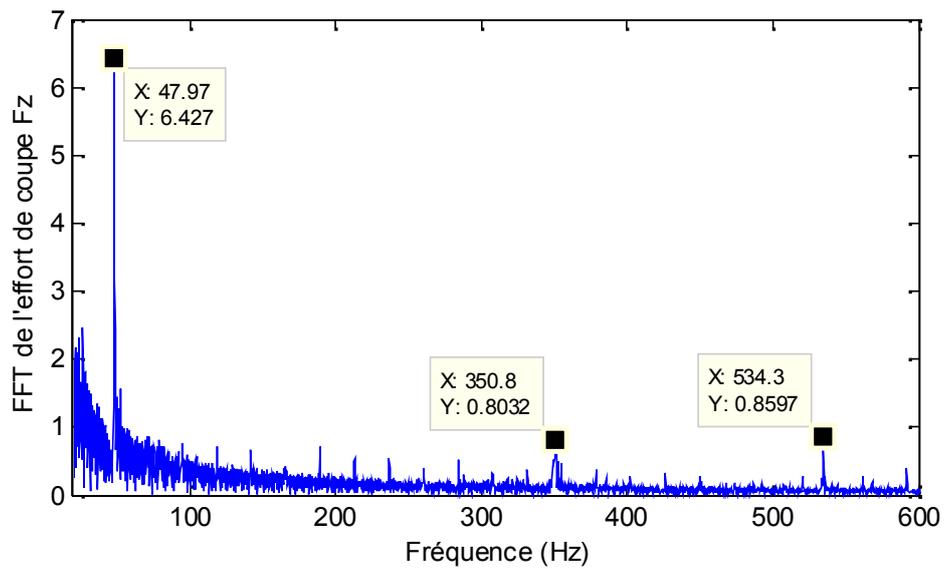


Fig. V.4 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 1

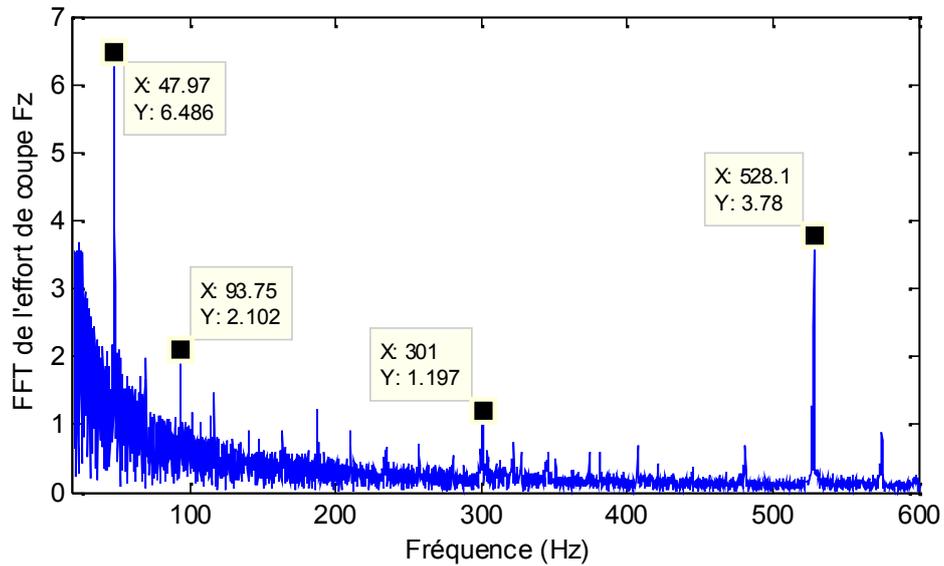


Fig. V.5 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 2

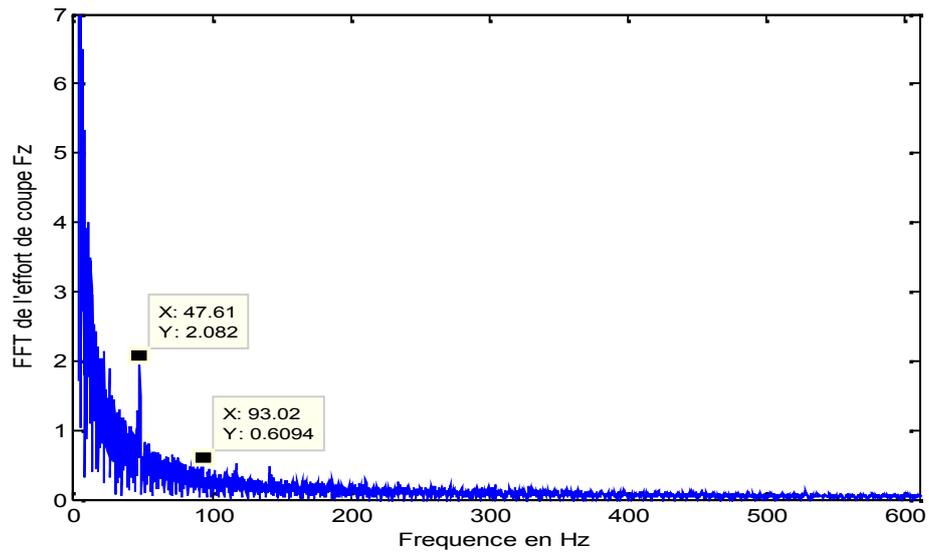


Fig. V.6 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 3

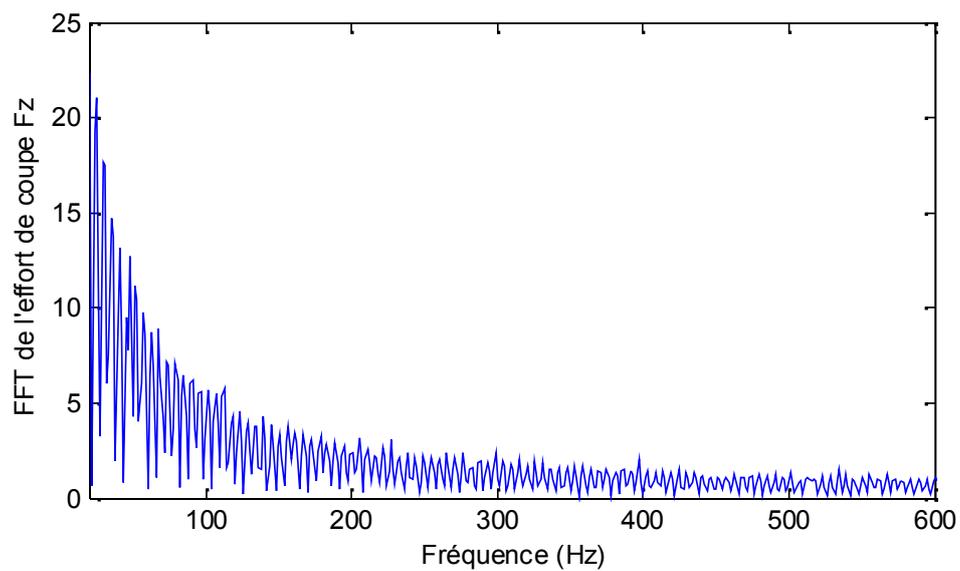


Fig. V.7 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 4

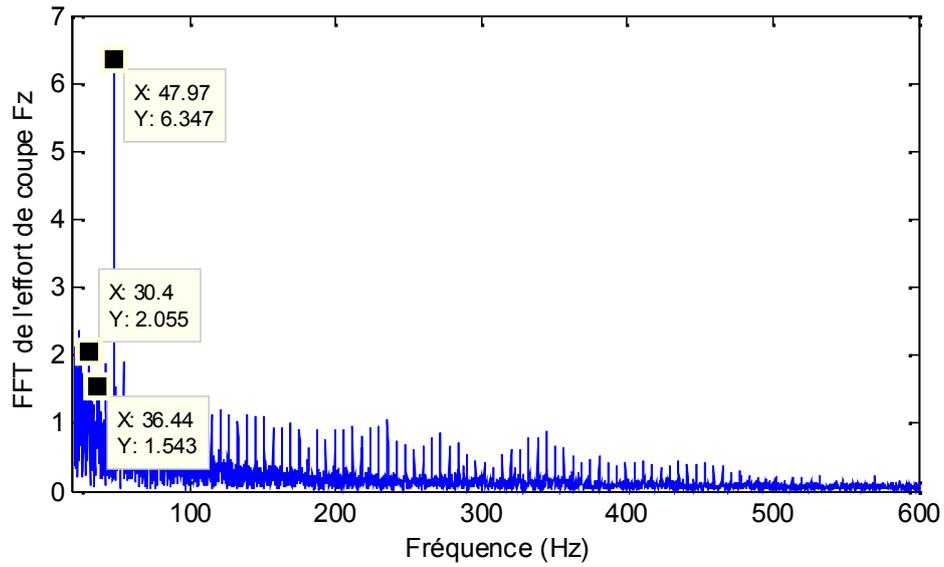


Fig. V.8 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 5

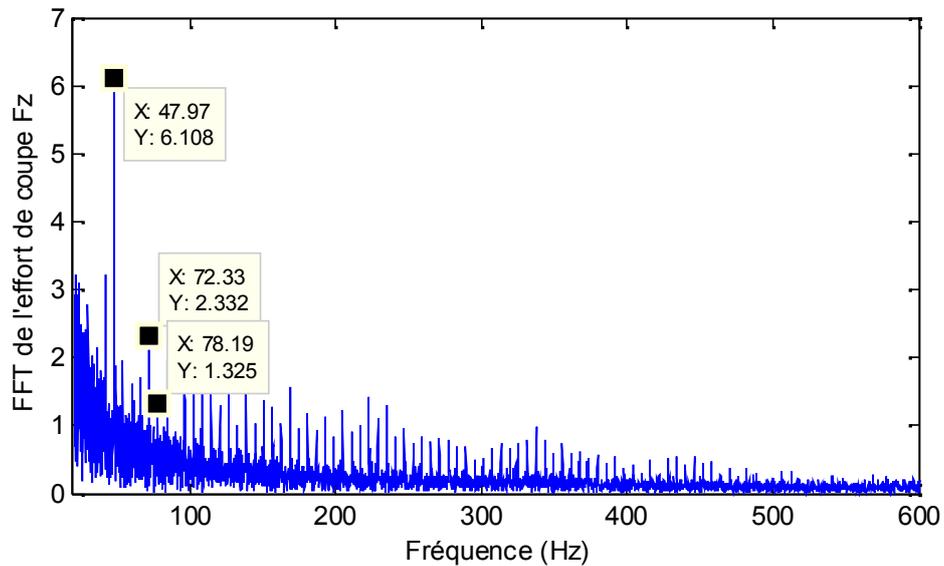


Fig. V.9 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 6

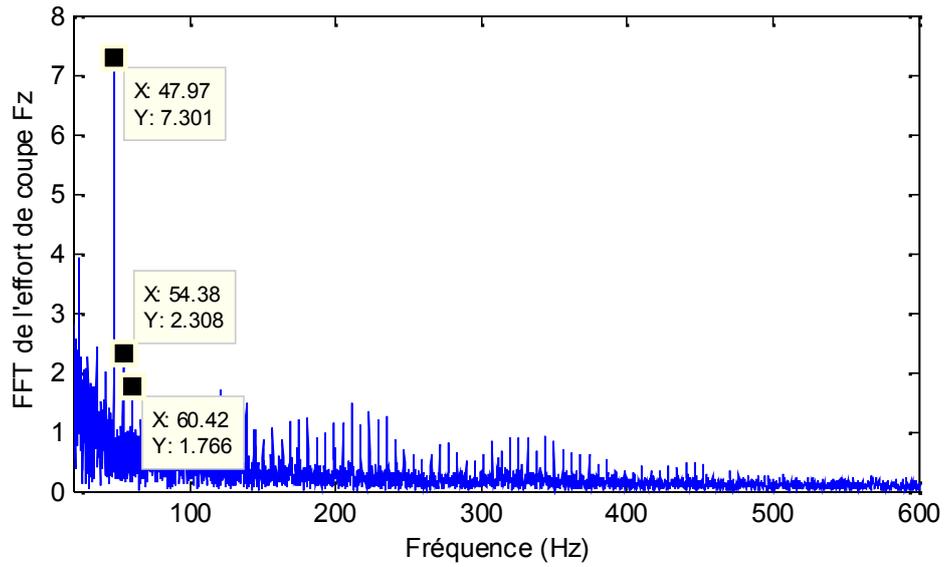


Fig. V.10 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 7

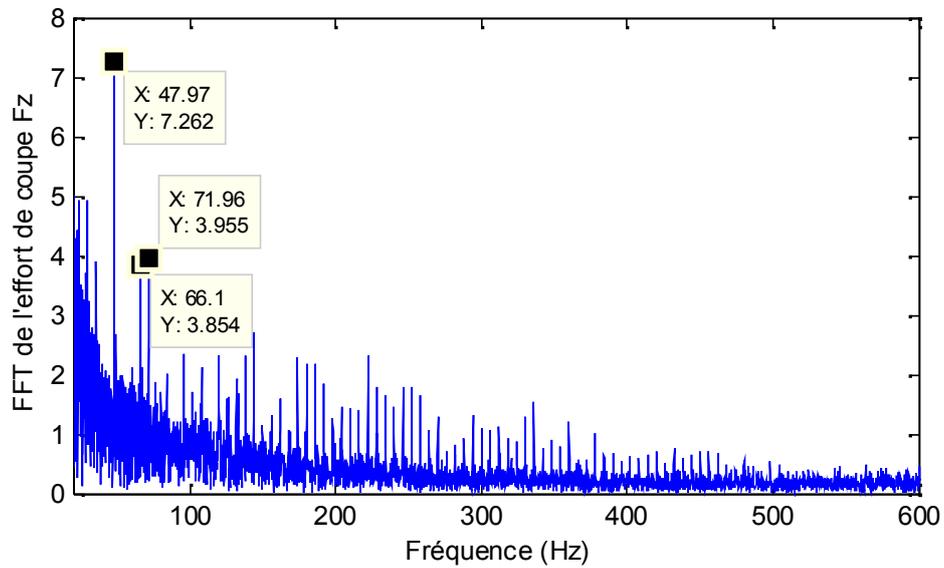


Fig. V.11 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 8

V.8.1.2 Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°

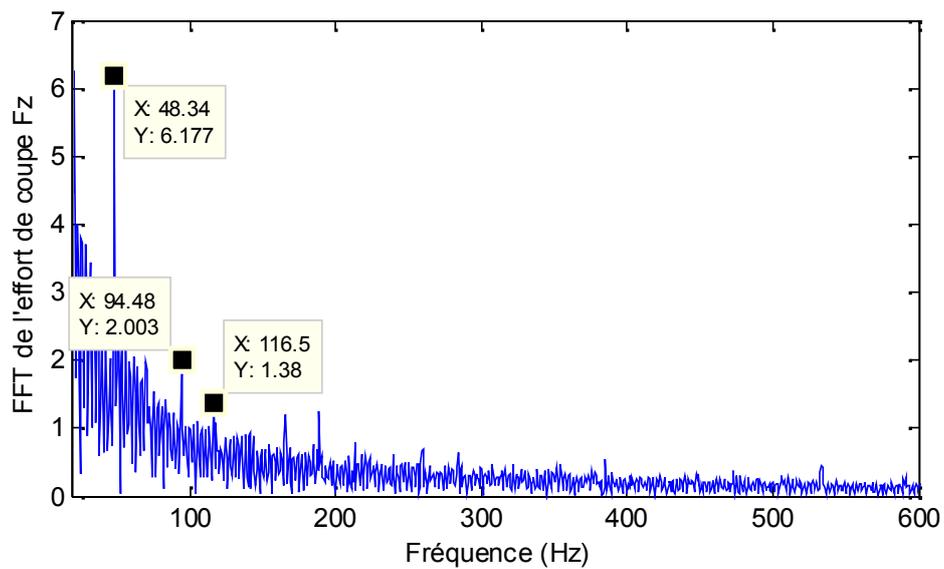


Fig. V.12 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 9

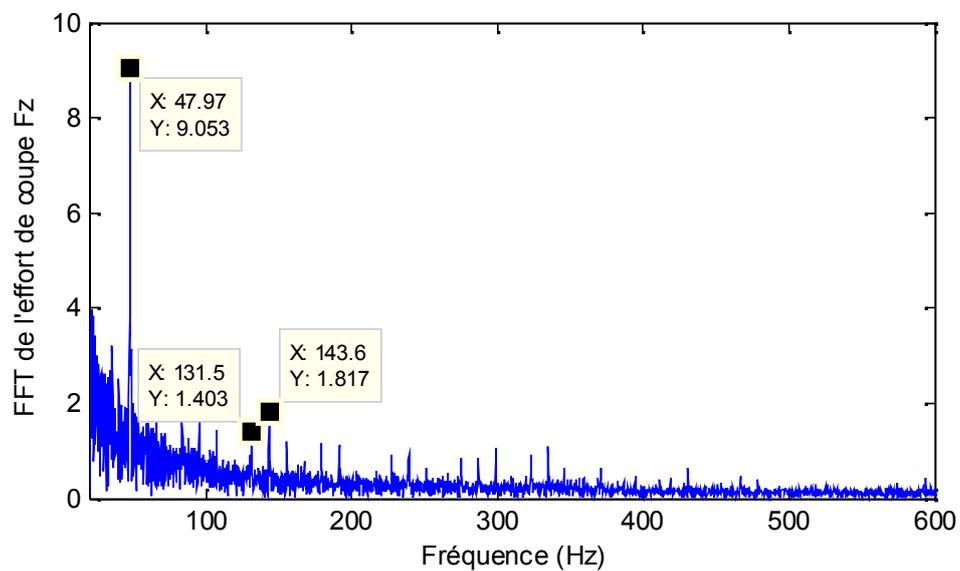


Fig. V.13 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour l'essai 10

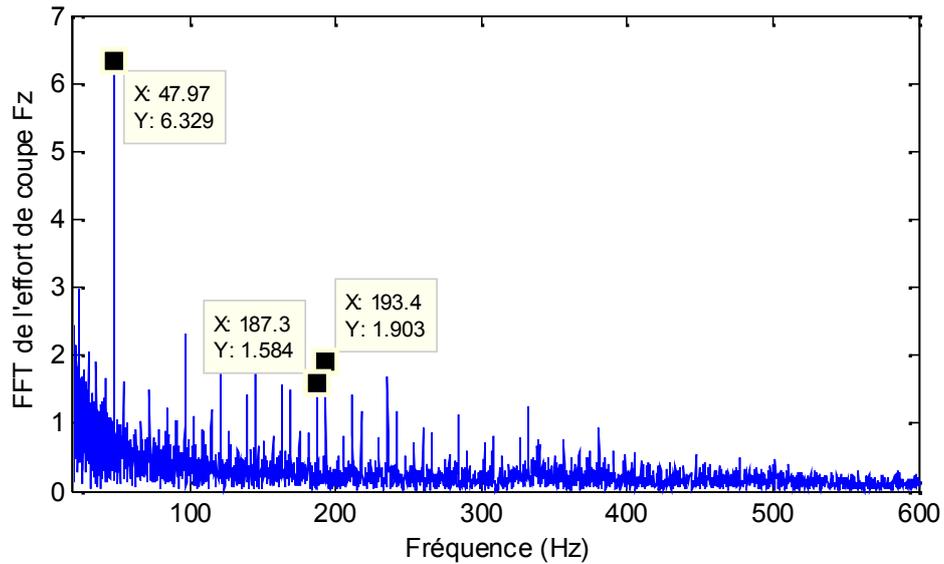


Fig. V.14 : Spectre de l'effort de coupe Fz pour l'essai 11

V.8.2 Traitement des signaux par la TFFrCT

Les spectrogrammes sont obtenus par l'application de la transformée de Fourier fractionnaire à court terme (TFFrCT) aux signaux issus des essais lorsque le disque comporte des défauts.

V.8.2.1 Premier cas : Disque avec un seul défaut

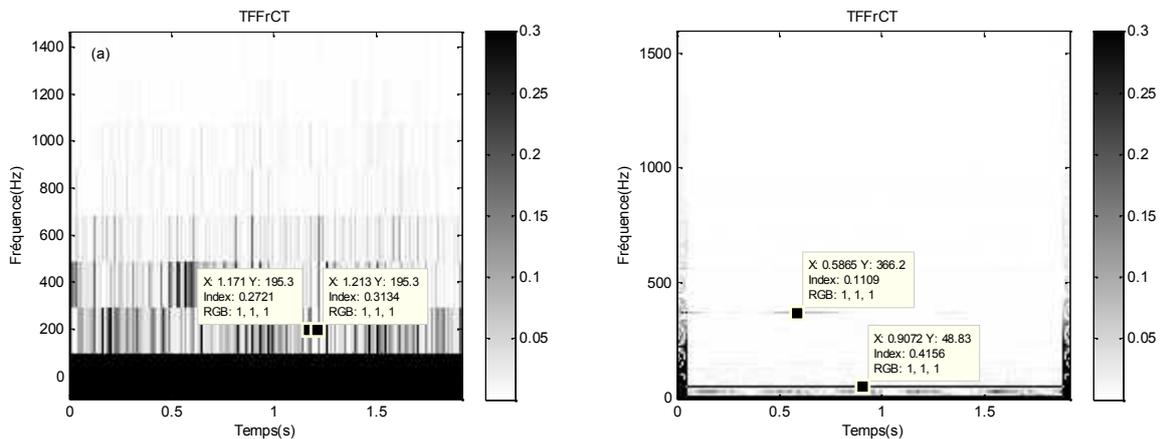


Fig. V.15 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 1.

a) $M=64$ ($t=0.002$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.04$ s)

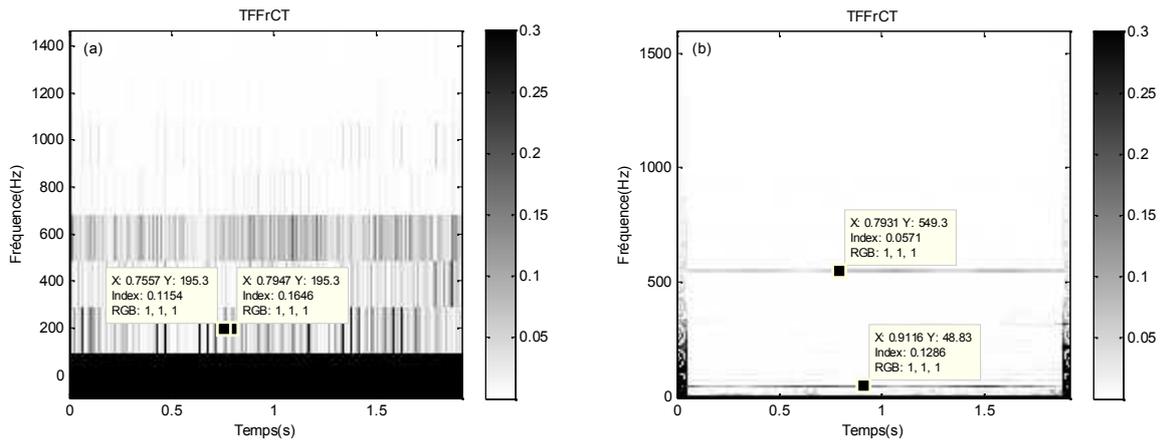


Fig. V.16 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 2.

a) $M=64$ ($t=0.002$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.04$ s)

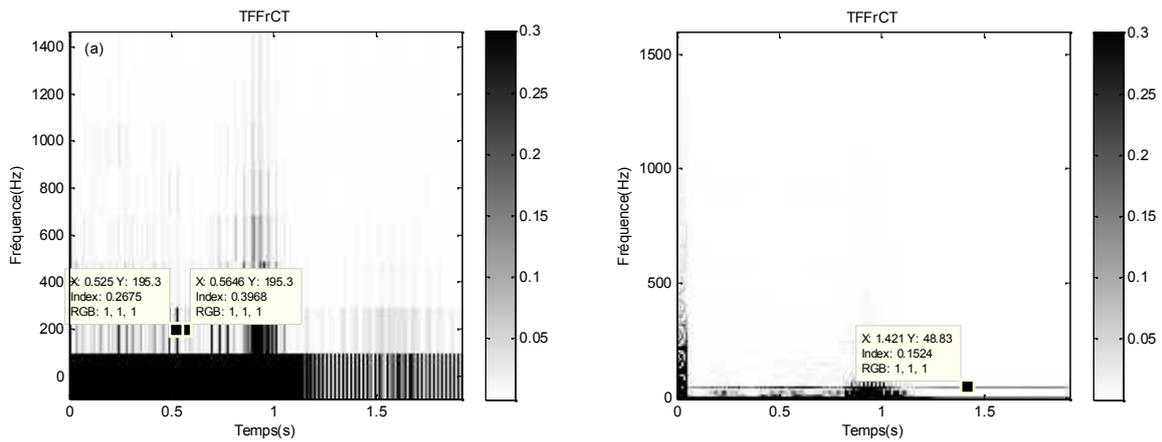


Fig. V.17 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 3.

a) $M=64$ ($t=0.002$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.04$ s)

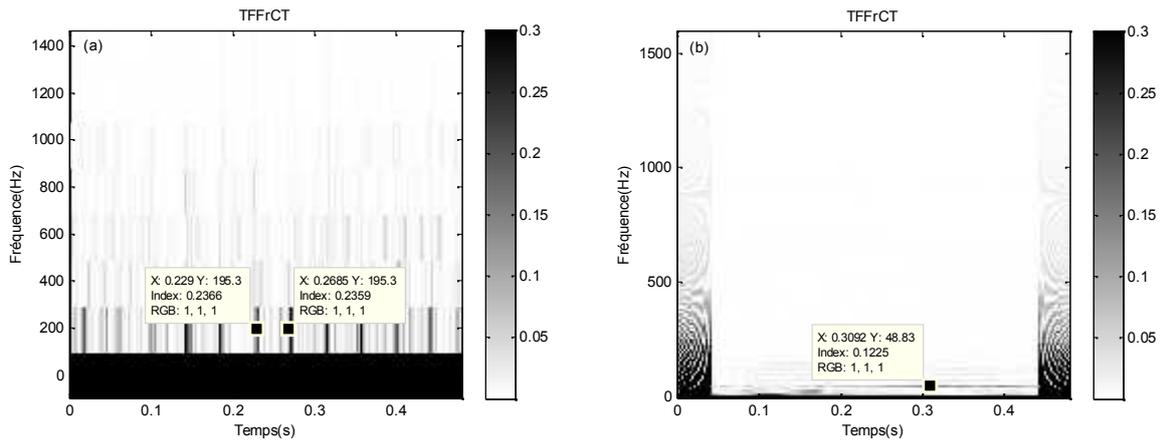


Fig. V.18 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 4.

a) $M=64$ ($t=0.01$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.17$ s)

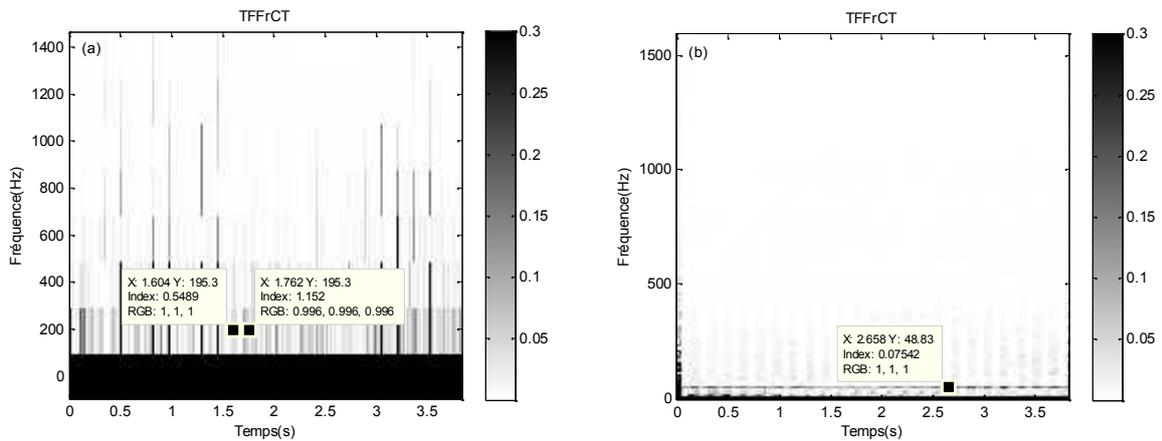


Fig. V.19 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 5.

a) $M=64$ ($t=0.001$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.02$ s)

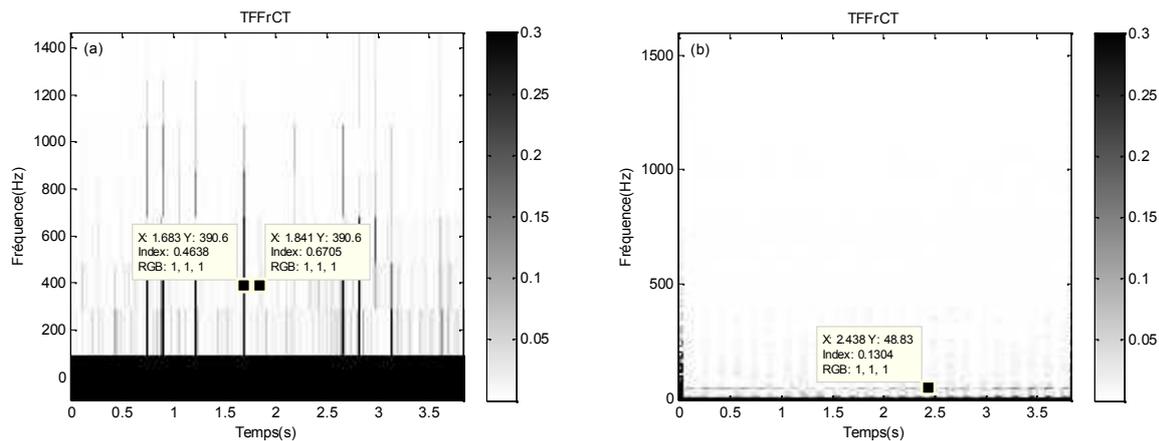


Fig. V.20 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 6.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

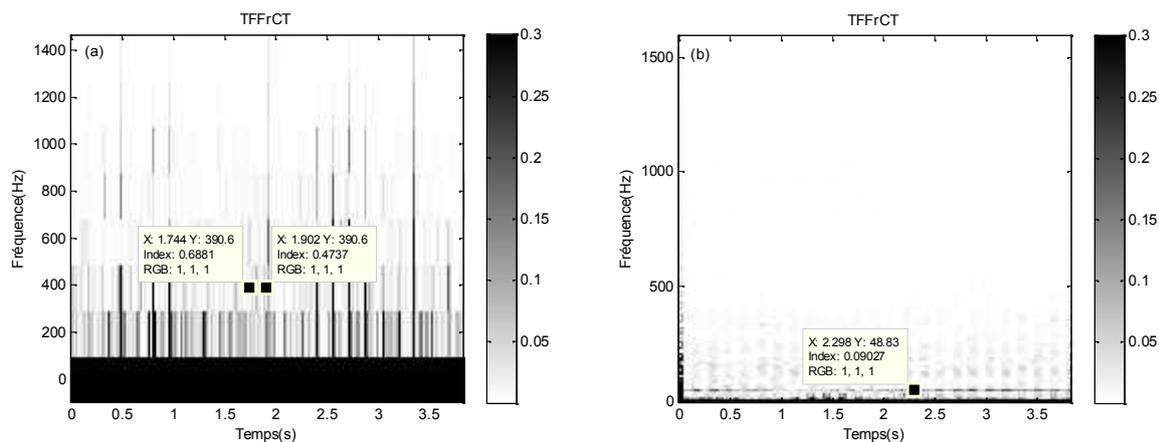


Fig. V.21 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 7.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

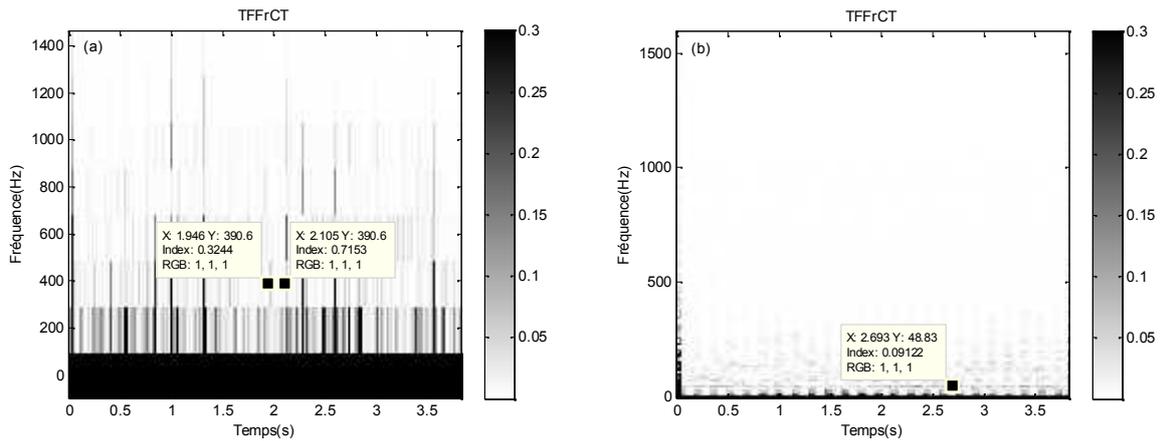


Fig. V.22 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss.de l'essai 8.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

IV.8.2.2 Deuxième cas : Disque avec deux défauts espacés de 90°

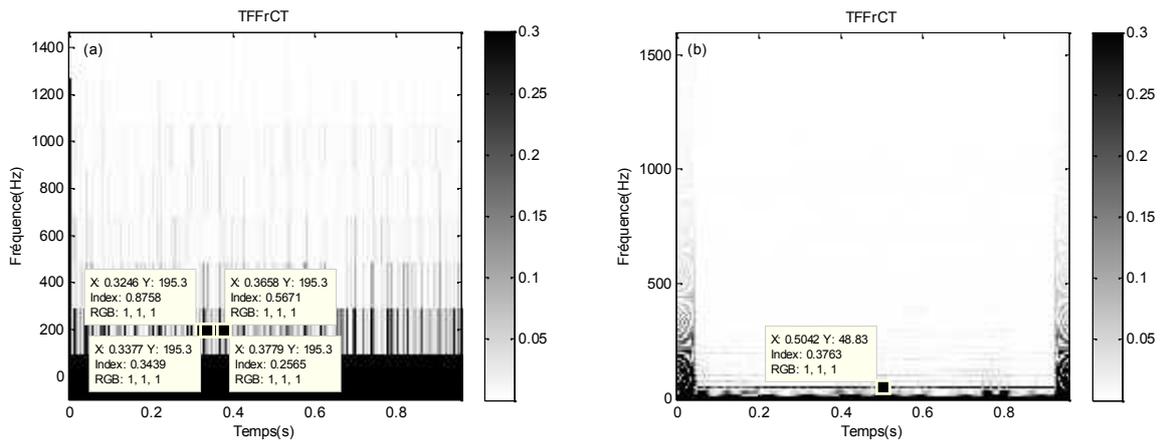


Fig. V.23 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 9.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

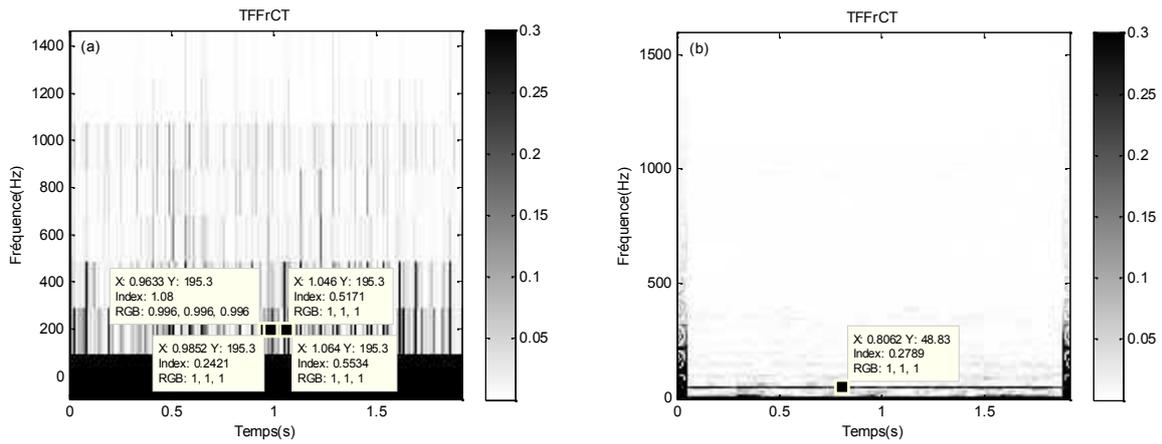


Fig. V.24 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 10.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

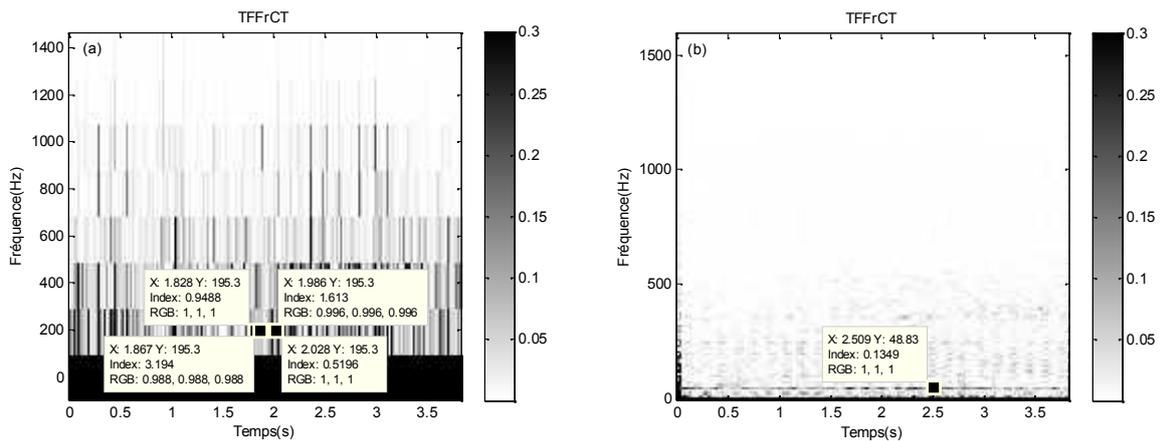


Fig. V.25 : Spectrogrammes pour deux largeurs de la fenêtre de Gauss de l'essai 11.

a) $M=64$ ($t=0.007$ s)

b) $M=1024$ ($t=0.125$ s)

V.9 Interprétation des résultats :

D'après les spectres présentés (Figs. V.4-V.14), des pics représentant les différentes fréquences de rotation et leurs harmoniques sont nettement visibles. En plus des fréquences de rotation, un pic caractéristique est apparu à une fréquence de 47.97Hz dans tous les spectres sauf pour l'essai 4 où une fausse manipulation lors de la mesure est apparemment à l'origine d'une mauvaise représentation du signal de l'effort de coupe et du spectre correspondant. D'une première vue, cette fréquence est confondue avec la 2^{ème} harmonique

de la fréquence de rotation 23.33Hz pour les 4 premiers essais, avec la 8^{ième} harmonique de la fréquence de rotation 5.91Hz pour les 4 suivants et avec la 4^{ième} harmonique de la fréquence de rotation 11.83Hz pour l'essai 10 réalisé sur le disque présentant deux défauts. Comme l'amplitude du pic correspondant est plus élevée que celui de la fréquence de rotation elle-même, ceci nous a poussé à réaliser un essai à 2000 tr/min correspondant à 33.33Hz. Le spectre résultant du signal mesuré de la force Fz (Fig. V.26) montre la présence d'un pic à la même fréquence 47.97Hz . Ce qui veut dire que cette fréquence n'est plus une harmonique de la fréquence de rotation. Nous avons réalisé par des mesures en vibration par le Pulse, indépendant de réseau électrique, et nous avons constaté la disparition de cette fréquence. Ce qui confirme que cette fréquence correspond à celle du réseau électrique (50 Hz) qui présente une défaillance dans l'alimentation de l'atelier.

Un autre pic caractérisé par une fréquence de 528.1Hz apparait uniquement lors de l'essai 2 (Fig.V.5). Pour s'assurer de ce résultat, un autre essai a été réalisé dans les mêmes conditions de coupe de l'essai 2. La figure V.27 montre la présence d'un pic à faible amplitude à cette fréquence devant un nouveau pic apparaissant à 1113Hz. Ces deux fréquences sont des résonances du disque parmi plusieurs autres qui sont écrasées dans le spectre.

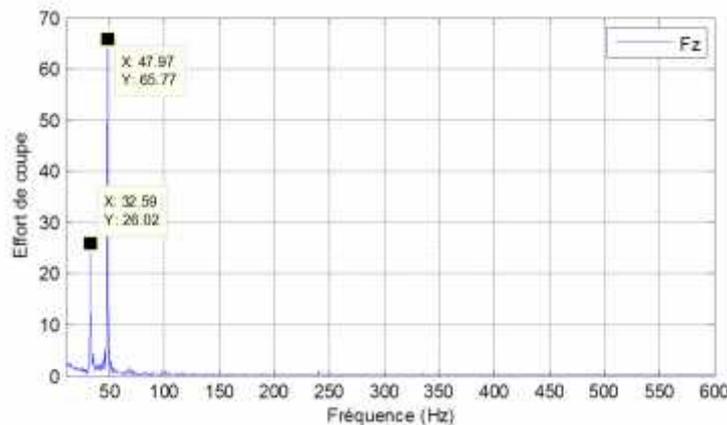


Fig. V.26 : Spectre de l'effort de coupe Fz pour un essai de confirmation à 2000 tr/min

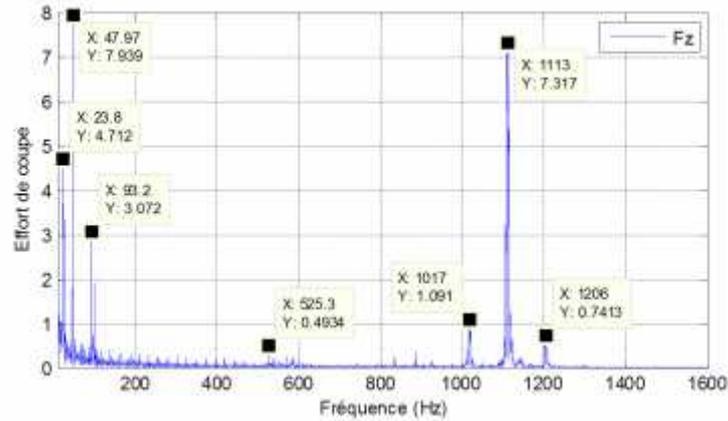


Fig. V.27 : Spectre de l'effort de coupe F_z pour un essai comparatif de l'essai 2

Les spectrogrammes montrent que la largeur de la fenêtre de Gauss utilisée joue un rôle important sur la résolution temporelle et fréquentielle. Une fenêtre étroite permet une meilleure localisation temporelle des impacts au détriment d'une résolution fréquentielle. Dans les figures (V.15a--22a), des impacts espacés de la période de contact de l'outil avec les défauts créés de 0.042 s pour une fréquence de rotation de 1400 tr/min et de 0.169 s pour une fréquence de rotation de 355 tr/min. Dans le cas d'existence de deux défauts, deux séries d'impact sont visibles (Figs. V.23a-25a) dont les périodes sont égales à 0.042 s, 0.084 s et 0.169 s correspondant respectivement aux fréquences de rotation du disque 1400 tr/min, 710 tr/min et 355 tr/min. Les impacts de chaque série sont décalés de 0.0107 s, 0.021 s et 0.042 s. Ce résultat confirme la présence de deux défauts espacés d'un angle approximatif de 90°.

Alors, lorsque cette fenêtre est large (Figs. V.15b - 25b), une bonne localisation fréquentielle est atteinte tout en perdant la résolution temporelle. Les représentations temps-fréquence issues de l'application de TFFrCT confirment, donc, les constatations précédentes en ce qui concerne les fréquences 47.97Hz, 350.8Hz et 528.1Hz. Dans ce cas, l'évolution des phénomènes fréquentiels dans le temps peut être continue pour les fréquences 47.97Hz (Figs. V.15b - 25b) et 549.3Hz (Fig. V.16b) et discontinue pour le cas de la fréquence 366.2Hz (Fig. V.15b). Comme le broutement est un phénomène aléatoire, il peut exciter certaines fréquences de résonance du disque d'une manière continue ou discontinue lors de l'usinage.

V.10. Application de la méthode des ondelettes pour la détection des défauts :

Les essais 12, 13 et 14 ont permis de relever les signaux de l'effort de coupe F_z que nous les avons choisis pour le traitement du fait que la rotation du disque induit, en principe, des impacts à chaque contact outil-pièce caractérisé par un défaut.

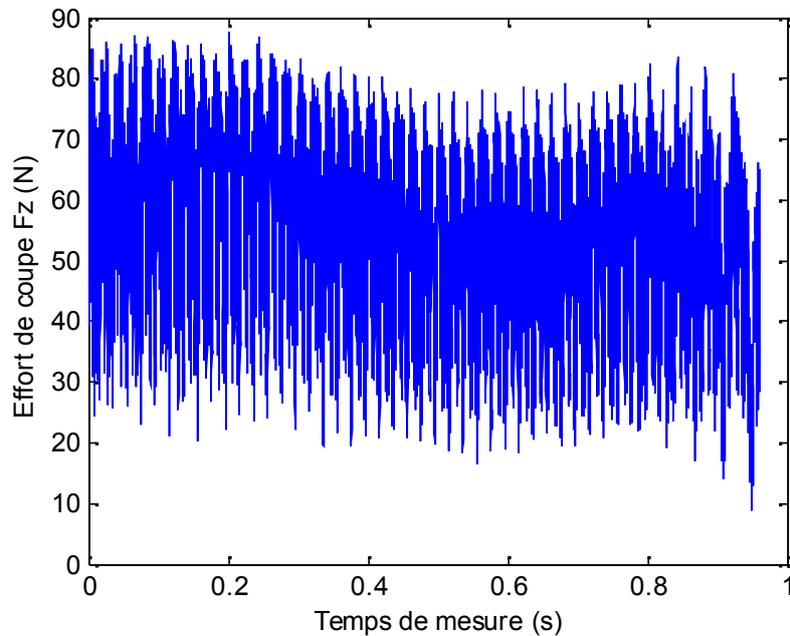


Fig. V.28. Signal de l'effort F_z mesuré sur un disque sain tournant à 1400 tr/min (essai 12)

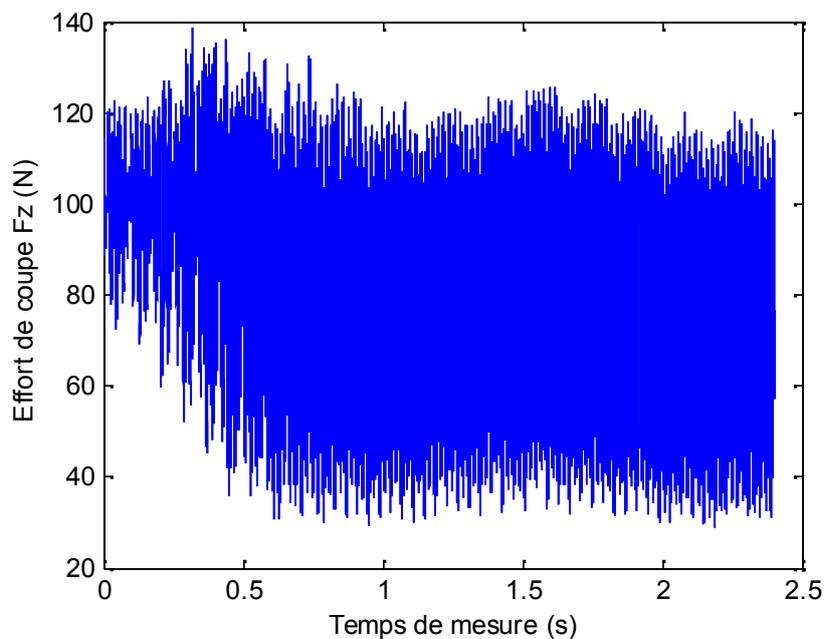


Fig. V.29. Signal de l'effort F_z mesuré dans le cas de la présence d'un seul défaut sur le disque tournant à 710 tr/min (essai 13)

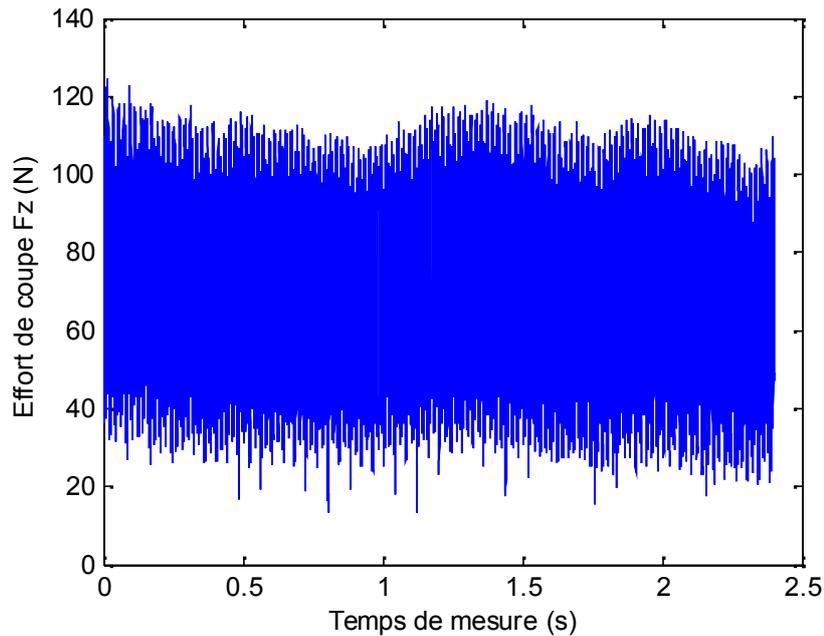


Fig. V.30. Signal de l'effort F_z dans le cas de la présence de deux défauts sur le disque tournant à 355 tr/min (essai 14)

Aucune information particulière ne peut être tirée du signal présenté en Fig. V.28. Le kurtosis correspondant, étant un paramètre très sensible aux chocs, est égale à 2.4 ; une valeur significative de l'absence d'un choc. Même constatation pour le signal de la Fig. V.29 qui ne donne aucune information sur l'existence du défaut créé sur le disque, raison de plus que son kurtosis est égale à 1.75. Le signal mesuré (Fig. V.30), encore une fois, ne donne aucune information notable.

V.11 Traitement des résultats expérimentaux par les ondelettes

Les signaux des efforts de coupe mesurés sont préalablement traités par une simple FFT. Le spectre (Fig. V.31) correspondant au signal (Fig. V.28) ne met en évidence que la fréquence de rotation et plusieurs de ses harmoniques. Ce résultat montre que le disque ne comporte aucune imperfection.

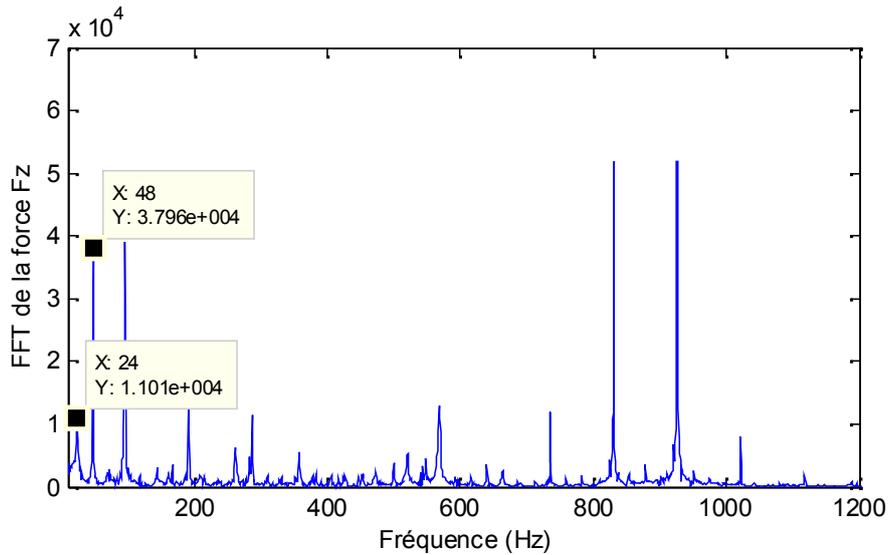


Fig. V.31. Spectre du signal de la Fig. V.28

Par ailleurs, l'analyse du spectre (Fig. V.32) correspondant au signal (Fig. V.29) montre la fréquence de rotation et un grand nombre de ses harmoniques observées auparavant avec la présence d'une modulation caractérisée par des bandes latérales autour d'une fréquence de 588Hz, espacées de la fréquence de rotation, soit environ 12 Hz. Cette fréquence est caractéristique de la présence du phénomène de broutement. Les mêmes constatations sont observés sur le spectre (Fig. V.33) pour le signal (Fig. V.30) et qui sont semblables à celles du cas avec un seul défaut mais leurs amplitudes sont plus élevées. En présence du phénomène de broutement à 588Hz, le spectre confirme bien l'existence d'un défaut d'une fréquence égale à la fréquence de rotation mais ne précise pas le nombre de défauts simulés.

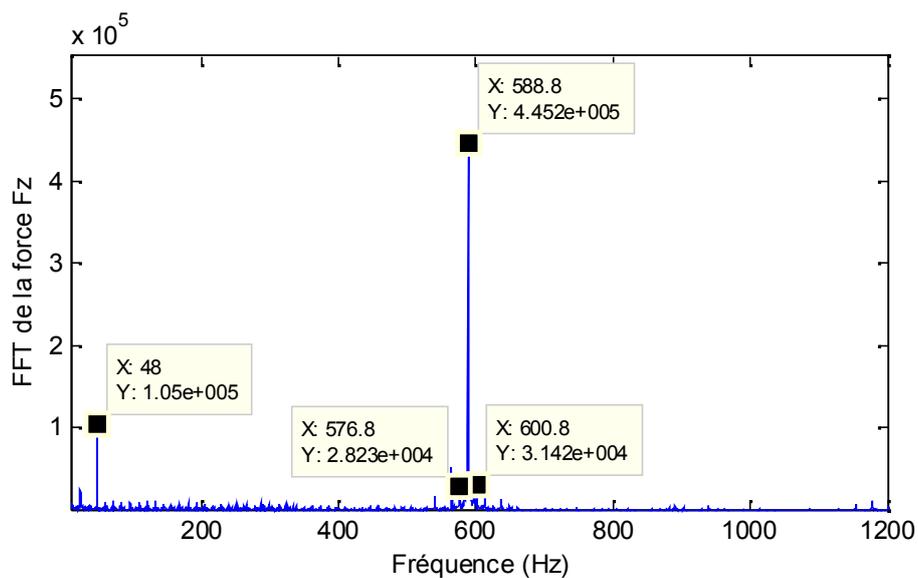


Fig. V.32. Spectre du signal de la Fig. V.29

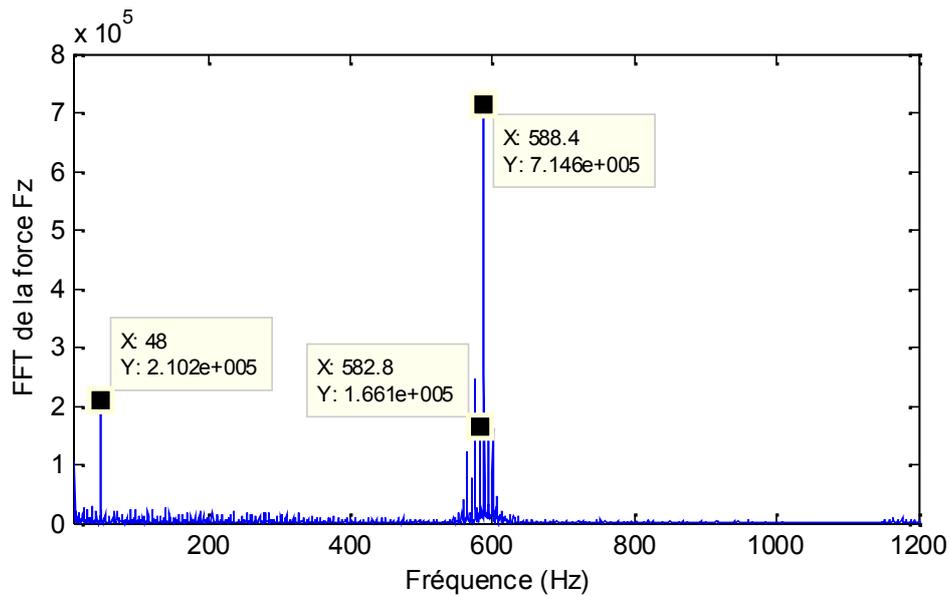


Fig. V.33. Spectre du signal de la Fig. V.30

Ce que nous proposons dans ce travail est d'introduire les deux techniques de traitement proposées auparavant pour détecter la présence d'un défaut structural sur le disque. [14,18]

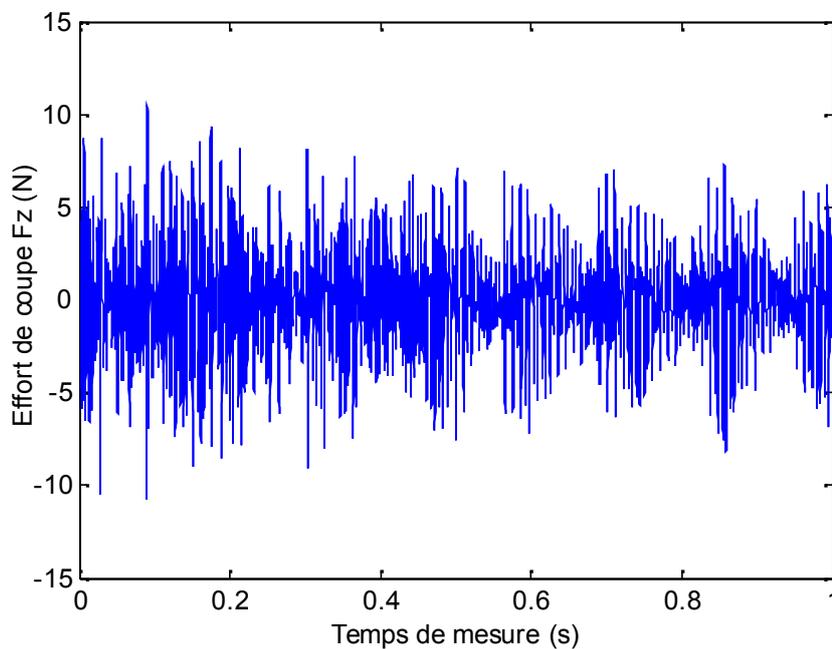


Fig. V.34. Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.28

Une première approche de démodulation basée sur l'analyse multirésolution en ondelettes et la transformée de Hilbert est appliquée pour filtrer le signal de la (Fig. V.29) et extraire la

fréquence modulante. Le signal du détail 5 (Fig. V.34) issu de la décomposition en ondelettes, ne met aucun doute sur l'existence d'un défaut du fait qu'il met en évidence clairement une série de chocs dont la période correspond à la fréquence de rotation. En plus, le kurtosis dans ce cas est égale à 44, une valeur très significative de la présence de chocs. Cette valeur importante prouve également le pouvoir de filtrage de l'approche utilisée.

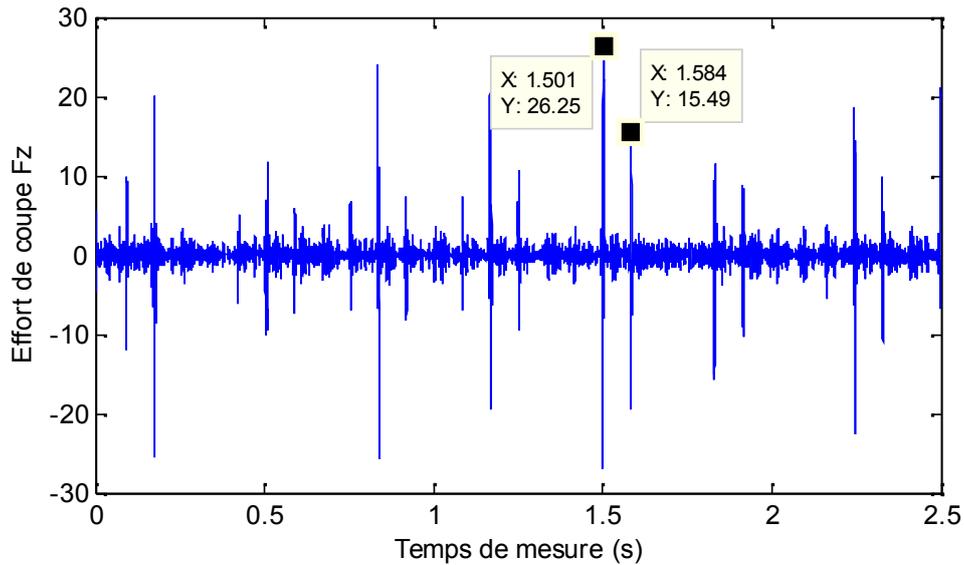


Fig. V.35. Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.29

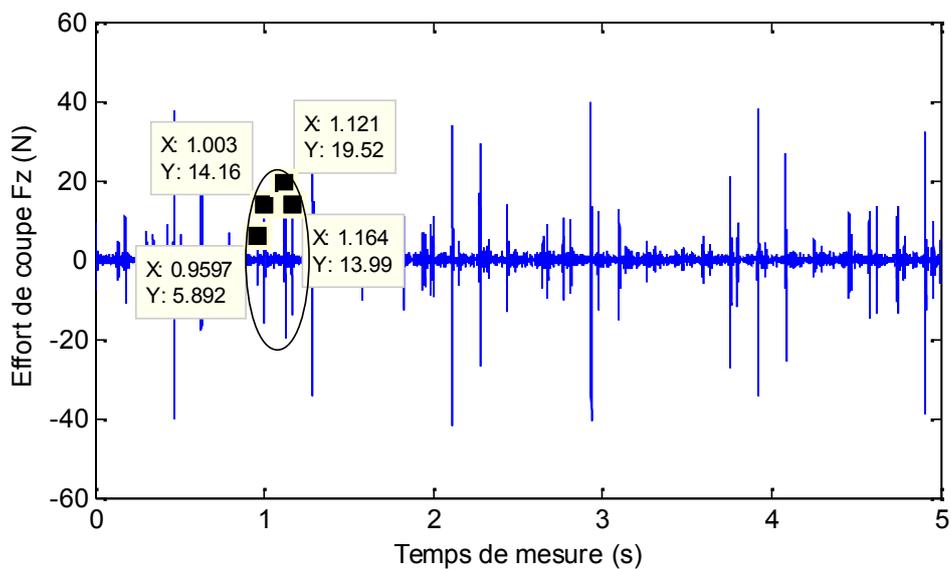


Fig. V.36. Signal filtré issu de la décomposition en ondelettes du signal original de la Fig. V.30

Le signal du détail 5 (Fig. V.36), issu de la décomposition en ondelettes du signal de la Figure V.30, montre deux séries de chocs dont la période correspond à la fréquence de rotation du disque. Ce résultat montre parfaitement la présence de deux défauts.

V.12. Conclusion

Notre travail est focalisé sur l'application des techniques de détection des défauts à travers des représentations fréquentielles et temps-fréquence. Ces techniques ont été appliquées sur les signaux des efforts de coupe mesurés lors du tournage d'un disque mince.

Nous avons utilisé la représentation fréquentielle pour déterminer la fréquence de rotation ainsi que les fréquences de résonance fortement excitées par les efforts de coupe.

La transformée de Fourier fractionnaire à court terme a été utilisée pour la représentation temps-fréquence. La fenêtre de Gauss assure un compromis entre la résolution temporelle et fréquentielle. Une fenêtre étroite permet une meilleure localisation temporelle des impacts au détriment d'une résolution fréquentielle. Or, si cette fenêtre est large, une bonne localisation fréquentielle est atteinte tout en perdant la résolution temporelle.

Les représentations temps-fréquence issues de l'application de TFFrCT ont permis de localiser les défauts créés à travers l'espace temporel entre les impacts ainsi que le broutement comme étant un phénomène aléatoire pouvant exciter certaines fréquences de résonance du disque d'une manière continue ou discontinue lors de l'usinage.

Le traitement des signaux des efforts de coupe par les ondelettes a révélé la présence d'une modulation caractérisée par des bandes latérales autour d'une fréquence significative de la présence de broutement dans certains essais. La modulation par la fréquence de rotation signifie la présence d'un défaut sur la surface. En présence du phénomène de broutement, le spectre confirme bien l'existence d'un défaut d'une fréquence égale à la fréquence de rotation mais ne précise pas le nombre de défauts simulés. La démodulation basée sur l'analyse multirésolution en ondelettes et la transformée de Hilbert appliquée pour filtrer les signaux et extraire la fréquence modulante. Le signal du détail 5 montre clairement une série de chocs dont la période correspond à la fréquence de rotation dans le cas d'un seul défaut et deux séries de chocs dans le cas d'existence de deux défauts.

V.13 Références bibliographiques

- [1]. M. Kaymakci, Z. M. Kilic and Y. Altintas (2012). Unified cutting force model for turning, boring, drilling and milling operations. *International Journal of Machining Tools & Manufacture*, 54–55, 34–45.
- [2]. H. K. Akyildiz and H. Livatyali (2011). Prediction and experimental analysis of cutting forces during machining of precision external threads. *Mach. Sci. and Technology*, 15, 485–506.
- [3]. H. Aouici, M. A. Yallese, K. Chaoui, T. Mabrouki and J. F. Rigal (2012). Analysis of surface roughness and cutting force components in hard turning with CBN tool: Prediction model and cutting conditions optimization. *Measurement*, 45, 344–353.
- [4]. J. Luo, D. Yu, M. Liang (2012). Application of multi-scale chirplet path pursuit and fractional Fourier transform for gear fault detection in speed-up and speed-down processes. *Journal of Sound and Vibration*, 331, 4971-4986.
- [5]. R. H. Miah, M. Herrera, Baan, M. D. Sacchi (2011). Application of fractional Fourier transform in cepstrum analysis. *Recovery*.
- [6]. W. J. Chang, T. H. Fang and C. I. Weng (2004). Inverse determination of the cutting force on nanoscale processing using atomic force microscopy. *Nanotechnology*, 15, 427–430.
- [7]. F. Mata, E. Beamud, I. Hanafi, A. Khamlichi, A. Jabbouri and M. Bezzazi (2010). Multiple regression prediction model for cutting forces in turning carbon-reinforced PEEK CF30. *Advanced in Material Sciences and Engineering*, 2010, 7 p.
- [8]. G. Petropoulos, I. Ntziantzias and C. Anghel (2005). A predictive model of cutting force in turning using taguchi and response surface techniques. *International Conference on Experiments/Process/System Modelling/Simulation/Optimization*, Athens, 6-9 July, 2005.
- [9]. S. Mallat. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition. The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pat. Analy. and Mach. Intelligence*, vol. 11 (7), pp. 674-693.
- [10]. C. Li, M. Liang (2012). Time–frequency signal analysis for gearbox fault diagnosis using a generalized synchrosqueezing transform, *Mechanical Systems and Signal Processing* 26. 205–217.
-

- [11]. U. P. Poudel, G. Fu, J. Ye (2007). Wavelet transformation of mode shape difference function for structural damage location identification. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 36, 1089–1107.
- [12]. J. Xiang, Y. Zhong, X. Chen and Z. He (2008). Crack detection in a shaft by combination of wavelet-based elements and genetic algorithm. *International Journal of Solids and Structures*, 45, 4782–4795.
- [13]. F. K. Omar and A. M. Gaouda (2012). Dynamic wavelet-based tool for gearbox diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26, 190–204.
- [14]. S. Brabhakar, A. R. Mohanty and A. S. Sekhar (2002). Application of discrete wavelet transform for detection of ball bearings race faults. *Trib. International*, 35, 793-800.
- [15]. M. C. Djamaa, M. Khechana, A. Djebala, S. Boucherit (2013). Identification d'un défaut structural surfacique à partir des signaux des efforts de coupe lors du tournage d'un disque. 8^{ième} Conférence Internationale Conception et Production Intégrées, Tlemcen, 21-23 octobre 2013.
- [16]. C. K. Sung, H. M. Tai and C.W. Chen (2000). Locating defects of gear system by the technique of wavelet transform. *Mechanical and mechanical theory*, 35, 1169-1182.
- [17]. L. J. Stankovic, T. Alieva, Martin J. Bastiaans (2002). Time-frequency signal analysis Based on the windowed Fractional Fourier Transform. Volkswagen stiftung, Federal Republic of Germany.
- [18]. M. Khechana, M. C. Djamaa, A. Djebala, Z. Boumazza (2015). Identification of structural. damage in the turning process of a disk based on the analysis of cutting force signals. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 80(5), 1363-1368.
- [19] A. T. Catherall. D. P. Williams (2010). High resolution spectrograms using a component optimized short-term fractional Fourier transform. *Signal Processing*, 90, 1591–1596,
- [20] I. Khelf (2014). Diagnostic des machines tournantes par les techniques de l'intelligence artificielle. Thèse de Doctorat, Université de Annaba, 206 p.
-

CHAPITRE I.

NOTIONS GENERALES SUR LA DYNAMIQUE DES DISQUES MINCES

ET SUR L'USINAGE A GRANDE VITESSE

I.1. Introduction.....	4
I.2. Dynamique des disques minces.....	4
I.3. Usinage des disques minces	5
I.4. Usinage à grande vitesse.....	7
I.4.1 Exigences liées à l'ensemble du système d'usinage assurant l'UGV.....	9
I.5. Conclusion	9
I.6. Références bibliographiques	10

I.1 Introduction :

L'usinage à grande vitesse, souvent abrégé par le mot UGV, est un procédé d'enlèvement de matière à des vitesses de coupe très élevées au point que la chaleur de coupe n'aura pas le temps suffisant pour se propager dans la pièce et dans l'outil. La plus grande quantité de chaleur de coupe se dégage à travers les copeaux à plus de 80%. Si de plus, on utilise le liquide d'arrosage, il est évident qu'une partie de la chaleur dégagée est évacuée par le liquide de lubrification.

La définition de l'UGV, en termes de valeurs de la vitesse de coupe, n'est pas figée. Pour certains industriels, la vitesse de coupe utilisée dans l'UGV est de quatre fois plus que celle utilisée en usinage conventionnel. Pour d'autres, elle peut atteindre une valeur de dix fois plus.

I.2. Dynamique des disques minces :

Les problèmes majeurs rencontrés lors de l'usinage des disques minces proviennent, en général, des vibrations résultantes des efforts de coupe. C'est pour cette raison que la dynamique des pièces minces en cours d'usinage doit faire l'objet d'une étude minutieuse. De nombreux travaux de recherche ont été entrepris pour l'étude de la dynamique des disques avec et sans rotation dans les cas libre et forcé mais avec des excitations outre que celles des efforts d'usinage.

Helmut *et al.* [1] ont approximé la fréquence naturelle la plus basse d'un disque qui tourne à une vitesse constante sous différentes conditions aux limites: encastéré, simplement supporté, libre et guidé. Dans un autre article, Helmut *et al.* [2] ont fait une étude sur la détermination des fréquences naturelles des plaques circulaires avec différents conditions aux limites dans laquelle ils ont envisagé les modes symétriques et antisymétriques. Gottfried *et al.* [3] ont étudié les vibrations planes d'un disque en rotation où deux plaquettes fixes sont utilisées comme force de frottement distribuée sur la surface du disque. La recherche de la solution exacte des vibrations libres et forcées d'un système de disque-broche a été entreprise par Parker *et al.* [4]. La manipulation des fonctions propres complexes, possèdent les propriétés d'un système gyroscopique classique, ont conduit au calcul des fréquences propres et des vitesses critiques. Mignolet *et al.* [5] ont utilisé les techniques de perturbation pour déterminer les fréquences naturelles et les fonctions de forme modale d'un disque flexible où ils ont introduit la notion de la rigidité normalisée d'un disque. Les vibrations planes d'un disque rotatif annulaire ont été étudiées par Chen *et al.* [6]. Ils ont examiné l'influence du taux d'encastrement sur les fréquences

naturelles et les vitesses critiques du disque rotatif. La vitesse limite avec laquelle le disque tourne sans problème est déterminée à travers la vitesse critique du mode axisymétrique. Bucher [7] a présenté une méthode de séparation des vibrations d'un disque dans des entités simples. La décomposition des données mesurées par un ensemble de capteurs dans le domaine temporel permet de représenter la contribution individuelle de chaque mode de vibration. Maretic [8] a étudié les vibrations transverses et la stabilité d'un disque mince rotatif excentré. Il a déterminé les contraintes et les déplacements du plan médian du disque. Les fréquences naturelles des vibrations transversales en fonction de la vitesse de rotation et de l'excentricité ont été déterminées en utilisant la méthode de Galerkin. Les fonctions de forme modale se trouvent déformées par rapport à celles d'un disque non excentré. La vitesse de rotation critique résultant d'une baisse de stabilité a été déterminée dans le premier mode. Liang *et al.* [9] ont mené une étude sur les vibrations libres d'un disque en matériau orthotrope. Les fréquences naturelles, les modes et la stabilité ont été déterminés avec un chargement transversal concentré et stationnaire. Ils ont montré que l'augmentation du rapport des coefficients de Poisson contribue à l'élévation des fréquences naturelles.

I.3. Usinage des disques minces :

Le tournage des pièces minces tels que les disques, les tubes et toute paroi mince est considéré parmi les usinages difficiles. Les problèmes majeurs qu'on peut rencontrer se manifestent par leurs flexions et leurs vibrations. Ces pièces répondent facilement à la flexion dès qu'ils entrent en contact avec l'outil sous l'action de l'effort de coupe. Une solution logique peut être pratiquée en procédant à la limitation de l'effort de coupe par le contrôle des paramètres de coupe si on possède son modèle, mais cette stratégie contribue à une perte de productivité se manifestant par l'augmentation du temps d'usinage.

Parmi les problèmes gênants, la pièce mince perd sa rigidité par décroissance de sa section au fur et à mesure de l'évolution de l'usinage. A partir d'une certaine épaisseur, le simple fait d'effleurer la pièce avec l'outil la fait entrer en résonance ce qui peut détruire la paroi qui se fait happer par l'outil. Les vibrations représentent, donc, le facteur le plus dangereux dans l'usinage des pièces minces car elles peuvent rendre la coupe instable et par conséquent altérer la surface usinée. L'usinage est un processus évolutif, c'est-à-dire que le comportement de l'usinage d'un disque mince varie au fil du temps. Au début d'une opération de dressage, le disque est plus épais, donc

plus rigide. Ceci permet de choisir des profondeurs de passe plus grandes. Par la suite, son épaisseur devient plus faible, sa rigidité décroît et la déflexion augmente ainsi que le niveau des vibrations. Ceci impose une minimisation de la profondeur de passe pour réduire la force de coupe responsable sur la déflexion. Comme conséquence, on se trouve devant l'obligation de réduire certaines conditions de coupe en particulier l'avance et la profondeur de passe dans le but de minimiser les déformations et les vibrations. Inversement au cas de dressage, les problèmes se posent dès le début dans le cas de chariotage, mais ils se trouvent moindres dès que le diamètre diminue vu que la rigidité du disque augmente. Finalement, on est amené à trouver un compromis entre le principe de la productivité maximale qui incite à exploiter au maximum les moyens de production (machine, outil, pièce) et la qualité des pièces usinées.

La modélisation des efforts de coupe est un sujet de recherche en usinage. Un modèle efficace permet de prédire les valeurs des forces de coupe et ceci avant l'usinage. Dans le cas d'un disque mince, on peut déterminer la valeur de la déflexion du disque provoquée par la force de coupe simulée. La connaissance de la flèche permet de prendre une décision sur la valeur nécessaire à la compensation de la trajectoire et ceci convient pour le tournage à commande numérique. Tant que de l'usinage est évolutif dans le temps, on doit passer par l'optimisation de tous les paramètres entrant en jeu (V_c , a , p , géométrie de la plaquette, ...) et ceci pour toutes les opérations.

Les modes de vibrations donnent à la surface usinée une forme ondulatoire (des ventres et des nœuds). Donc, même si on suppose que l'outil est rigide et que sa trajectoire est rectiligne, son bec est obligé à parcourir différentes zones dans la matière du disque et comme conséquence, la surface aura une rugosité variable d'une zone à l'autre. La recherche d'un modèle qui donne au bec de l'outil une trajectoire ondulée, conforme aux ondulations de la surface, est difficile car la forme modale est obtenue grâce à une projection sur la base modale. Or, ces deux éléments font partie de l'analyse modale, qui ignore la force appliquée au disque. On est donc, dans un cas de vibrations libres, alors qu'en réalité, l'outil exerce un effort de coupe sur le disque.

Les solutions des industriels sont multiples pour minimiser la flexion et les vibrations du disque mince. L'idée la plus efficace chez les industriels est la rigidification de la pièce qui ne se réalise que par l'ajout d'un montage d'usinage approprié. Ce dernier va jouer le rôle d'un appui plan pour soutenir la pièce contre la flexion provoquée par les efforts de coupe et l'amortir contre les

vibrations transverses. Cette solution, malgré qu'elle soit jugé acceptable, elle est couteuse. Des logiciels de fabrication assistée par ordinateur proposent des stratégies d'usinage à choisir par l'utilisateur en se servant des capteurs pour déterminer les fréquences de vibration des broches, ce qui permet à l'utilisateur d'éviter les fréquences indésirables.

En résumé et pour éviter les fréquences à problème, on doit choisir une vitesse de rotation convenable, amortir la pièce en cours d'usinage, utiliser les broches à vitesse variable pour s'éloigner de l'auto excitation dans le but de s'opposer aux vibrations, procéder au contrôle en temps réel par l'utilisation d'actionneurs pilotés dynamiquement en fonction de mesures retournées.

I.4. Usinage à grande vitesse :

Ce type de procédés trouve ses applications dans différents domaines tel que l'aéronautique, l'automobile, la fabrication des moules et des matrices et bien d'autres domaines de l'électronique, médical, horlogerie, industrie du bois et des composites.

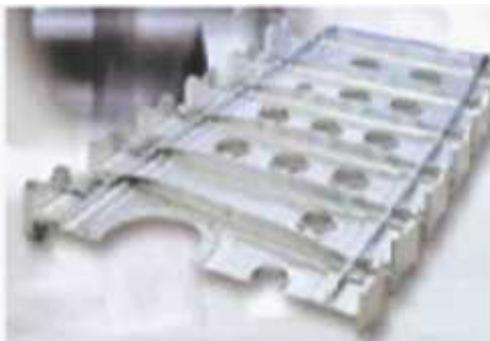


Fig. I.1. Exemple de l'UGV d'une voile mince en Aluminium en aéronautique [10].



Fig. I.2. Exemple de fabrication par UGV à Commande numérique des matrices de forge pour bielle en acier traité [10].

L'UGV, caractérisé par des vitesses de coupe élevées, montre que les phénomènes de coupe sont plus complexes que ceux existant en tournage conventionnel. Le mécanisme de la coupe dans le cas de l'usinage conventionnel se fait par déformation plastique jusqu'au cisaillement du copeau. Dans le cas de l'UGV, la vitesse élevée ne permet pas à la matière de se cisailer mais elle se rompt pour donner naissance à un copeau fragmenté. Les copeaux en usinage conventionnel n'évacuent qu'environ 40 % de la chaleur dégagée et le reste est absorbé par la pièce et l'outil [11]. Par contre, en UGV, le temps nécessaire à la propagation de la chaleur issue de la zone de coupe, n'est

pas suffisant pour se diffuser dans la pièce et l'outil. Donc, environ 80 % de cette chaleur est acheminée par les copeaux [11].

En UGV, chaque matériau possède sa plage de vitesses possibles. La gamme de l'UGV est la plus haute tandis que la plus basse correspond à l'usinage conventionnel. La figure I.3 montre quelques valeurs des vitesses de coupe à titre indicatif [11].

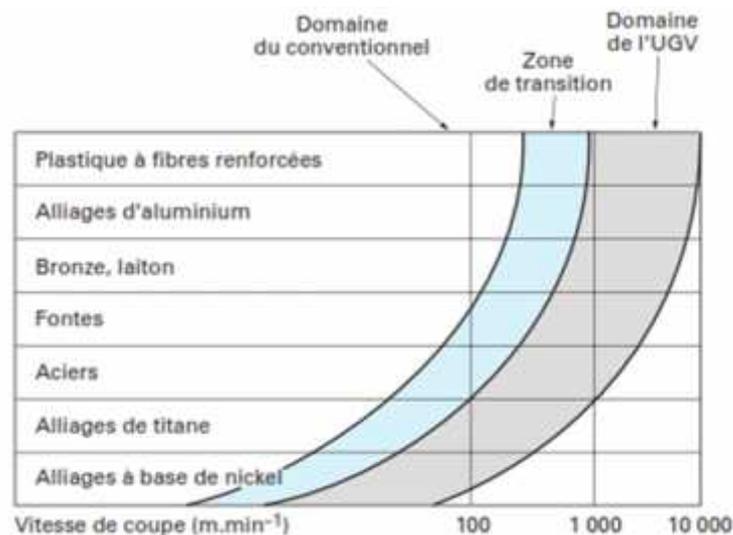


Fig. I.3. Plages des vitesses de coupe approximatives pour différents matériaux. [11].

Parmi les avantages de l'UGV, on peut constater que la productivité augmente car elle varie proportionnellement avec les vitesses de coupe et d'avance avec une nette amélioration de l'état de surface et de la précision [12]. Les efforts de coupe qui diminuent avec l'augmentation de la vitesse de coupe, rendent l'usinage des pièces à épaisseurs réduites plus confortable. Compte tenu que la grande quantité de chaleur est évacuée par les copeaux, la pièce est moins affectée thermiquement, ceci laisse la structure de la matière de la pièce inchangée. De plus, on peut usiner à sec et économiser le lubrifiant car le refroidissement ne sera plus utile. Dans le cas des pièces dures et à la différence de l'UGV, le tournage par usinage conventionnel peut contribuer à la perte des résultats de la trempe par affection thermique.

I.4.1 Exigences liées à l'ensemble du système d'usinage assurant l'UGV

Les tours travaillant à grandes fréquences de rotation ainsi que tous les mécanismes qui les composent, doivent être conçus pour pouvoir assurer une coupe stable. Ces exigences

commencent du bâti de la machine jusqu'à sa broche et englobe encore le montage porte-pièce et porte-outil.

Les dimensions et le matériau des bâtis doivent être le résultat d'un calcul dynamique car la fréquence de rotation élevée influe sur la géométrie de la pièce usinée à travers les modes de vibration de la machine toute entière. Une attention particulière doit être accordée à l'équilibrage de la broche qui offre une meilleure stabilité du système porte-pièce. Les tours à commande numérique, équipés d'un nombre élevé de capteurs fonctionnant en temps réel, doivent être capables de localiser les zones de coupe stable et de s'adapter avec les vitesses de rotation et d'avance les plus élevées.

Les outils destinés à l'UGV doivent être capables de travailler dans les conditions de coupe les plus sévères et d'avoir des durées de vie les plus longues possibles. Actuellement, on utilise les outils en nitrure de bore cubique (CBN), en diamant (PCD), en carbure, en céramique,... L'élévation de la vitesse de coupe contribue à la minimisation des forces de coupe. Pour une vitesse de coupe élevée et constante, on peut encore minimiser la force de coupe en réduisant la profondeur de passe, tout en choisissant une vitesse d'avance élevée pour garantir un débit de copeau élevé.

I.5. Conclusion

D'après tout ce qui a été exposé, le tournage des disques minces par usinage conventionnel pose des problèmes se caractérisant par la déformation du disque à cause des efforts de coupe élevés et un état de surface médiocre à cause des vibrations. Le recours à l'usinage à grande vitesse qui se caractérise par une vitesse de coupe élevée et par conséquent des efforts de coupe en moins, un temps d'usinage en moins et une augmentation du débit de copeau et de productivité peut être la meilleure solution. Non seulement, le tournage UGV permet de façonner des formes irréalisables par le procédé de tournage conventionnel mais aussi il permet l'usinage des matériaux ayant subi un traitement thermique. Il peut présenter certains problèmes provoqués par les vibrations en particulier le passage par des zones de coupe instable (fréquences de résonance, vitesses critiques de rotation) qui peuvent conduire à un état de surface altérée et la cassure ou la déchirure de la pièce. De point de vue sécurité, l'UGV exige des moyens et des techniques pour sécuriser l'environnement de production.

On conclut donc, que le tournage des disques minces peut se faire par l'UGV pour bénéficier de ses avantages. Alors, pour se débarrasser de ses inconvénients, on doit passer par le calcul dynamique afin de pouvoir éviter les vitesses critiques de rotation, les fréquences de résonance et les zones de coupe instable.

I.6. Références bibliographiques :

- [1]. H. F. Bauer, W. Eidel (2007). Transverse vibration and stability of spinning circular plates of constant thickness and different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 300, 877-895.
- [2]. H. F. Bauer, W. Eidel (2006). Determination of the lower natural frequencies of circular plates with mixed boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 292, 742-764.
- [3]. S. K. Gottfried, D. Hochlenert, O.N. Kirillov, P.Hagedorn (2009). In and out of plane vibrations of a rotating plate with frictional contact: investigations on squeal phenomena. *Journal of Applied Mechanics*, 76, 1-15.
- [4]. R. G. Parker, P.J. Sathé (1999). Exact solutions for the free and forced vibration of a rotating disk-spindle system. *Journal of Sound and Vibration*, 223(3), 445-465.
- [5]. M. P. Mignolet, C.D. Eick, M.V. Harish (1996). Free vibration of flexible rotating disks. *Journal of Sound and Vibration*, 196(5), 537-577.
- [6]. J. S. Chen, J.L. Jhu (1996). On the in plane vibration and stability of a spinning annular disk. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4), 585-593.
- [7]. I. Bucher (2011). Transforming and separating rotating disk vibrations using a sensor array. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 1244-1264.
- [8]. R. Margetic (2005). Transverse vibration and stability of an eccentric rotating circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 280, 467-478.
- [9]. D. S. Liang, H. J. Wang, L. W. Chen (2002). Vibration and stability of rotating polar orthotropic annular disks subjected to a stationary concentrated transverse load. *Journal of Sound and Vibration*, 250 (5), 795-811.
- [10]. A. L. Defretin, G. Levaillant (1999). Usinage à grande vitesse. *Techniques de l'ingénieur*, BM 7 180 - 3.

[11]. www.compumachine.com/Products/Vibrafree/VFApps/SYS-849: Techniques avancées de mise en forme : usinage1.

[12]. S. Kurra, N. H. Rahman, S. P. Regalla, A. K. Gupta. (2015). Modeling and optimization of surface roughness in single point incremental forming process. *Journal of materials research and technology*. 4(3): 304–313.

CHAPITRE III :

MODELISATION DE LA DYNAMIQUE DES DISQUES MINCES EN ROTATION

III.1. Introduction.....	29
III.2. Calcul et simulation des vibrations libres du disque mince stationnaire.....	29
III.2.1 Equation différentielle du mouvement.....	29
III.2.2 Validation du programme développé.....	32
III.2.3 Simulation sur le disque réel.....	36
III.3. Calcul et simulation des vibrations libres du disque mince en rotation.....	40
III.4. Stabilité du disque en rotation.....	47
III.5. Conclusion.....	47
III.6. Références bibliographiques.....	48

III.1 Introduction :

L'étude des vibrations libres transversales des disques minces a été débutée durant les années vingt du 20^{ième} siècle [1]. A partir de là, les travaux de recherche ne cessaient pas de modéliser les vibrations des disques minces en adoptant la théorie des plaques minces. Pour cela, les modèles trouvés varient selon la prise en compte ou non de quelques paramètres. Citons l'effet de la rotation du disque. Dans ce cas, la force centrifuge induit les contraintes radiales et tangentielles. La prise en compte ou non de l'effet de la rigidité en flexion et les contraintes de cisaillement. D'autres paramètres qui influent sur le modèle vibratoire est l'effet gyroscopique pour les vitesses de rotation élevées, l'inertie de rotation, ...

Dans ce chapitre, nous développons les modèles de vibrations linéaires libres du disque mince dans les deux cas avec et sans rotation. Les résultats des différentes approches sont ensuite confrontés à une simulation numérique. Enfin, on consacre une partie de l'étude à la stabilité du disque tournant à grande vitesse.

III.2 Calcul et simulation des vibrations libres du disque mince stationnaire :

III.2.1 Equation différentielle du mouvement :

Une excitation du disque stationnaire induit le mouvement transversal. La recherche de l'équation différentielle de ce mouvement nécessite la détermination du Lagrangien du système ayant le déplacement transversal w comme degré de liberté: Notre disque est mince, homogène et isotrope, d'épaisseur constante h , encasté à son rayon intérieur r_i et libre à son rayon extérieur r_e . Fig.III.1.

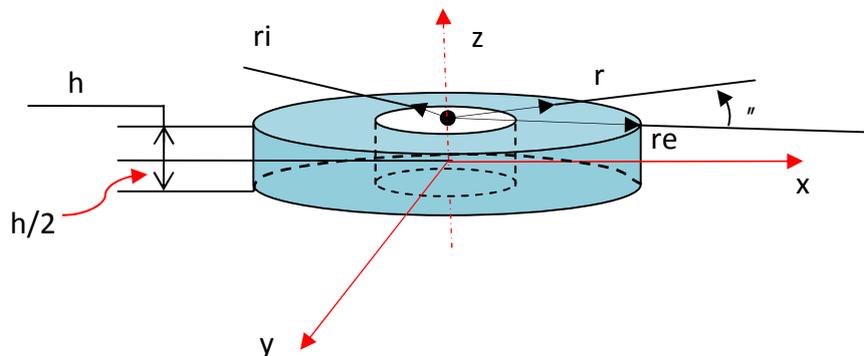


Fig. III.1. Géométrie du disque.

Reprenons les développements du chapitre II et plus précisément les équations II.41 et II.42.

$$D \nabla_r^2 \nabla_r^2 w(r, n, t) + \dots h \frac{\partial^2 w(r, n, t)}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (III.1)$$

$$\text{Avec : } \nabla_r^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\epsilon^2)} \dots \dots \dots (III.2)$$

La solution générale de l'équation (III.1) peut être développée selon une série de fonctions connues. Les variations radiales $R_n(r)$ seront approximées par une série de fonctions de Bessel, alors que les variations circonférentielles peuvent être approximées par une série de Fourier (fonctions cosinus et sinus). [2].

$$w(r, n, t) = R_{m,n}(r) (\cos(n_n) + \sin(n_n)) \sin(\check{S}.t) \dots \dots \dots (III.3)$$

$$\text{Avec : } R_{m,n}(r) = C_1 J_n(\check{\}mn r) + C_2 Y_n(\check{\}mn r) + C_3 I_n(\check{\}mn r) + C_4 K_n(\check{\}mn r) \dots \dots \dots (III.4)$$

Le contour intérieur ($r = r_i$) est encasté, ce qui induit un déplacement et une pente nuls, les deux premières conditions aux limites sont alors :

$$w(r, n, t) \Big|_{r=r_i} = \frac{\partial w(r, n, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = 0 \dots \dots \dots (III.5)$$

Le contour extérieur ($r = r_e$) est libre. Cette situation induit deux autres conditions aux limites, à savoir la force transverse et le moment qui sont nuls. Exprimées en fonction de la flèche w , il vient que :

$$\left(\frac{\partial^2 w(r, n, t)}{\partial r^2} + \epsilon \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, n, t)}{\partial n^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, n, t)}{\partial r} \right) \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \dots \dots \dots (III.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w(r, n, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, n, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, n, t)}{\partial n^2} \right) + \left. \frac{1-\epsilon}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\frac{\partial w(r, n, t)}{\partial r} + \frac{w(r, n, t)}{r} \right) \right|_{r=r_e} = 0 \dots \dots \dots (III.7)$$

A l'aide du MAPLE, la substitution de l'équation (III.3) dans les équations (III.5) à (III.7), donne les quatre équations suivantes :

$$J_n(m, \}mn r_i)C_1 + Y_n(m, \}mn r_i)C_2 + I_n(m, \}mn r_i)C_3 + K_n(m, \}mn r_i)C_4 = 0 \dots\dots\dots(III.8)$$

$$\}mn J'_n(m, \}mn r_i)C_1 + \}mn Y'_n(m, \}mn r_i)C_2 + \}mn I'_n(m, \}mn r_i)C_3 + \}mn K'_n(m, \}mn r_i)C_4 = 0 \dots\dots\dots(III.9)$$

$$\begin{aligned} & (\}mn^2 J''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{\epsilon}{r_e^2} J_n(m, \}mn r_e) + \frac{\epsilon}{r_e} \}mn J'_n(m, \}mn r_e)C_1 + \\ & (\}mn^2 y''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{\epsilon}{r_e^2} y_n(m, \}mn r_e) + \frac{\epsilon}{r_e} \}mn y'_n(m, \}mn r_e)C_2 + \\ & (\}mn^2 I''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{\epsilon}{r_e^2} I_n(m, \}mn r_e) + \frac{\epsilon}{r_e} \}mn I'_n(m, \}mn r_e)C_3 + \\ & (\}mn^2 K''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{\epsilon}{r_e^2} K_n(m, \}mn r_e) + \frac{\epsilon}{r_e} \}mn K'_n(m, \}mn r_e)C_4 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(III.10)$$

$$\begin{aligned} & (\}mn^3 J'''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{2-\epsilon}{r_e^2} J'_n(m, \}mn r_e) + n^2 \frac{3-\epsilon}{r_e^3} J_n(m, \}mn r_e) + \\ & \frac{1}{r_e} \}mn^2 J''_n(m, \}mn r_e) - \frac{1}{b^2} \}mn J'_n(m, \}mn r_e)C_1 + (\}mn^3 y'''_n(m, \}mn r_e) - \\ & n^2 \frac{2-\epsilon}{r_e^2} y'_n(m, \}mn r_e) + n^2 \frac{3-\epsilon}{r_e^3} y_n(m, \}mn r_e) + \frac{1}{r_e} \}mn^2 y''_n(m, \}mn r_e) - \\ & \frac{1}{r_e^2} \}mn y'_n(m, \}mn r_e)C_2 + (\}mn^3 I'''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{2-\epsilon}{r_e^2} I'_n(m, \}mn r_e) + \dots\dots\dots(III.11) \\ & n^2 \frac{3-\epsilon}{r_e^3} I_n(m, \}mn r_e) + \frac{1}{r_e} \}mn^2 I''_n(m, \}mn r_e) - \frac{1}{r_e^2} \}mn I'_n(m, \}mn r_e)C_3 + \\ & (\}mn^3 K'''_n(m, \}mn r_e) - n^2 \frac{2-\epsilon}{r_e^2} K'_n(m, \}mn r_e) + n^2 \frac{3-\epsilon}{r_e^3} K_n(m, \}mn r_e) + \\ & \frac{1}{r_e} \}mn^2 K''_n(m, \}mn r_e) - \frac{1}{r_e^2} \}mn K'_n(m, \}mn r_e)C_4 = 0 \end{aligned}$$

Les 4 conditions aux limites (III.8) à (III.11) forment un système de 4 équations à 4 inconnues C_1, C_2, C_3 et C_4 . Chaque condition aux limites est traduite par une ligne de la matrice \mathbf{M} . L'écriture matricielle de ce système est donnée par :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III.12)$$

La solution, où le vecteur colonne C_i est une solution triviale, n'a pas d'intérêt pratique puisqu'on cherche les valeurs de λ_{mn} qui sont contenues dans $[M]$. Il faut, donc, chercher les valeurs λ_{mn} pour lesquelles le déterminant de la matrice $[M]$ est nul.

$$\text{Det}([M])=0 \dots\dots\dots(III.13)$$

Les racines du polynôme caractéristique de (III.13) sont les valeurs propres de $[M]$.

Les valeurs propres λ_{mn} sont liées aux pulsations propres \check{S}_{mn} du disque par la relation développée dans [2].

$$\check{S}_{mn} = \sqrt{\frac{D\}^4_{mn}}{\dots h}} \dots\dots\dots(III.14)$$

Vu que la relation (III.13) est non linéaire, elle contient les fonctions de Bessel et leurs dérivées de différents ordres et elle peut s'étaler sur un nombre de lignes qui atteint quelques pages. Pour cela, on a développé un programme qui détermine symboliquement l'expression de $[M]$, le polynôme caractéristique, ainsi que l'extraction des différentes racines et par conséquent les fréquences propres des différentes modes.

III.2.2 Validation du programme développé :

Pour valider le programme Matlab, une simulation numérique a été faite par le code de calcul ANSYS, où on a choisi l'élément qui s'adapte bien pour modéliser les pièces minces, soit l'élément SHELL93 pour le maillage Il compte 8 nœuds dont chacun comporte six degrés de liberté (UX, UY, UZ, RX, RY, RZ) (Fig. III.2). Notons que le code ANSYS offre une grande variété d'éléments. Un tel type d'élément est choisi en fonction de la nature du problème traité (statique, modal, harmonique,...), du type du matériau (isotrope, anisotrope, orthotrope,),

l'ordre de grandeur des déformations (petites, grandes), la forme de la pièce (poutre, plaque,...), etc.

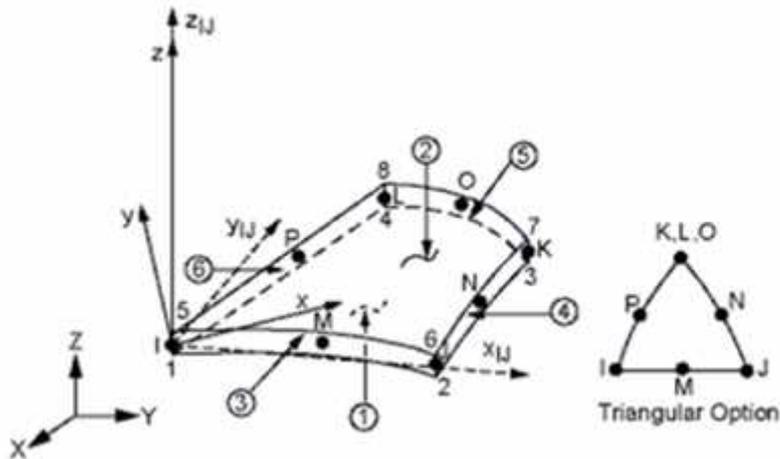


Fig. III.2. Géométrie de l'élément de maillage SHELL 93 [3].

Lors de la création géométrique du disque, on peut spécifier les distances entre les points I, J, K de l'élément SHELL93 en fonction de la section du disque et que le plan neutre divise cette section par 2, c'est-à-dire qu'il se situe à mi-épaisseur $h/2$ du disque. (Fig. III.3).

Les caractéristiques du disque utilisé pour la validation du programme développé sont les suivantes : $r_i=0.1$ m, $r_e=0.2$ m, $h=0.003$ m, $E=1.1e11$ N/m², $\rho=4430$ kg/m³, $\nu=0.35$.

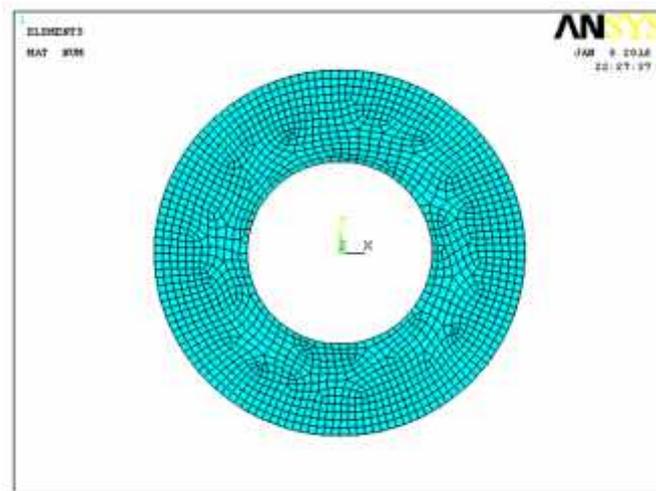


Fig.III.3. Maillage du disque de référence obtenu en appliquant l'élément SHELL93.

Quelques déformées propres obtenues par ANSYS sont représentées par les figures suivantes :

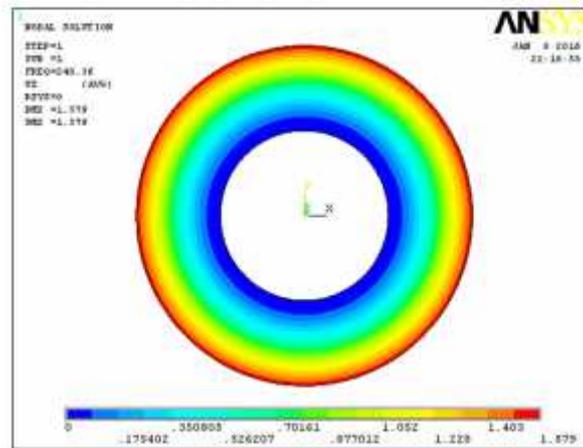


Fig. III.4. Déformée du mode (0, 0), sa fréquence est 240.36 Hz.

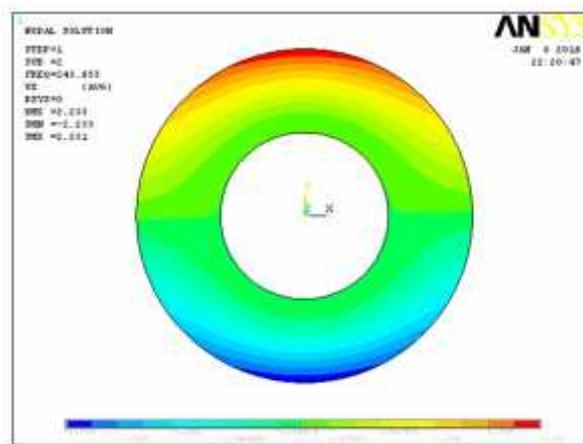


Fig.III.5. Déformée du mode (0, 1), sa fréquence est 243.96 Hz.

Le tableau III.1 montre les résultats obtenus par notre programme, ceux simulés par le code de calcul ANSYS et d'autres résultats trouvés dans la référence [2].

m \ n →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	Prog.	240,51	244,24	266,88	333,25	458,02	639,92	873,21	1153,31	1477,15	1842,73	2248,73
	ANSYS	240,36	243,96	266,22	332,01	456,08	637,01	868,88	1147,00	1468,00	1830,00	2231,00
	Ref.	240,52	244,25	266,89	333,25	458,03	639,93	873,22	1153,30	1477,20	-----	-----
1	Prog.	1562,66	1592,47	1682,32	1833,42	2047,40	2325,86	2669,94	3079,95	3555,17	4093,85	4693,49
	ANSYS	1556,00	1585,00	1673,00	1521,00	2032,00	2306,00	2646,00	3050,00	3518,00	4049,00	4638,00
	Ref.	1562,70	1592,50	1682,30	1833,40	2047,40	2325,90	2669,90	3080,00	3555,20	-----	-----
2	Prog.	4470,66	4502,10	4596,86	4756,11	4981,44	5274,58	5637,17	6070,62	6576,08	7154,40	-----
	ANSYS	4425,00	4456,00	4547,00	4702,00	4920,00	5205,00	5558,00	5979,00	6472,00	-----	-----
	Ref.	4470,70	4502,10	4596,90	4756,10	4981,40	5274,60	5637,20	6070,60	6576,10	-----	-----

TAB. III.1. Valeurs en Hz des fréquences trouvées par notre programme, simulées par ANSYS et celles de la référence [2]

III.2.3 Simulation sur le disque réel :

Les caractéristiques du disque réel sont les suivantes : $r_i=0.025$ m, $r_e=0.15$ m, $h=0.01$ m, $E=2.068e11$ N/m², $\rho=7800$ kg/m³, $\nu=0.29$.

La simulation par le code ANSYS est faite en choisissant l'élément SHELL93.

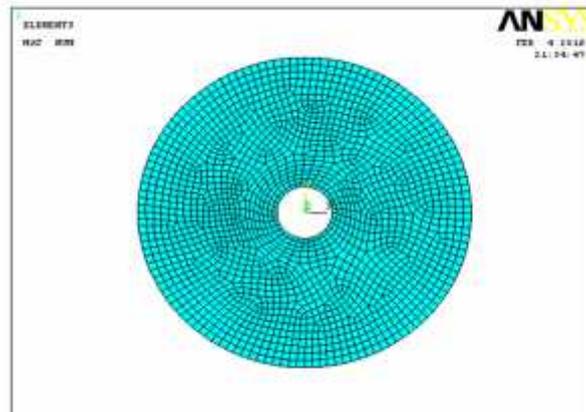


Fig.III.6. Maillage du disque réel obtenu en appliquant l'élément SHELL93.

Voici quelques déformées propres correspondant aux six premières fréquences propres.

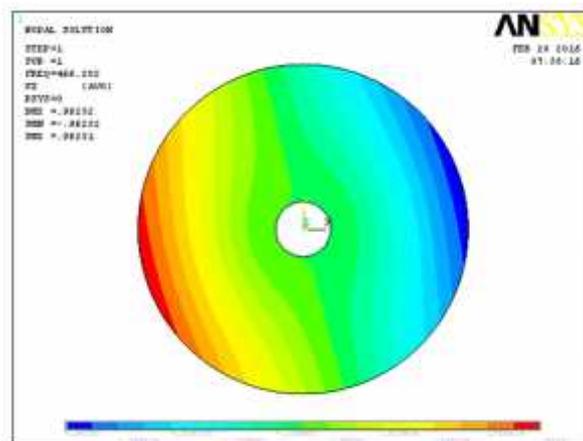
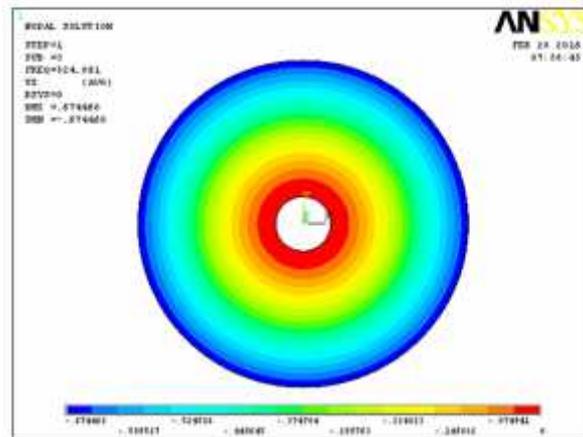


Fig.III.7. Déformée du mode (0, 1), sa fréquence est 466.20 Hz.



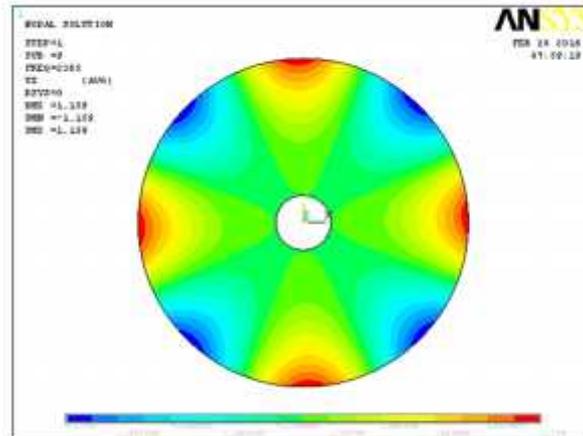


Fig.III.11. Déformée du mode (0, 4), sa fréquence est 2365.00 Hz.

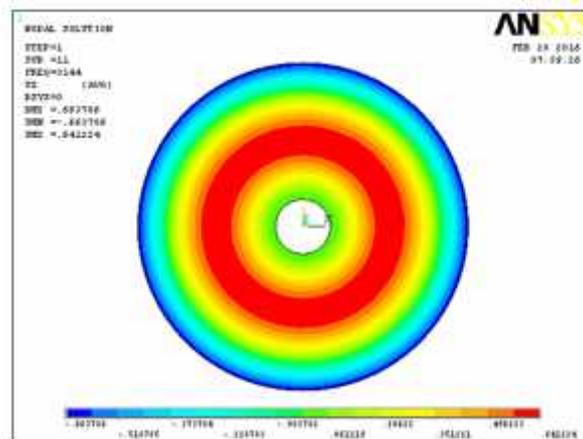


Fig.III.12. Déformée du mode (1, 0), sa fréquence est 3144.00 Hz.

Le tableau III.2 montre les fréquences propres que nous avons calculé par Matlab, celles par ANSYS en appliquant le type d'élément SHELL93 et celles obtenues expérimentalement pour le disque réel.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	Prog.	528.20	476.71	674.09	1383.03	2410.66	3695.14	5225.02	6996.34	9006.61
	Ansysis	524.09	466.20	659.66	1364.00	2365.00	3598.00	5044.00	6690.00	8523.00
	Experim.	-	475.93	673.23	1381.30	2407.57	3685.04	5217.86	6984.18	-
1	Prog.	3254.87	3509.38	4383.98	5967.13	8112.82	10642.92	13478.58	16596.99	19990.50
	Ansysis	3144.00	3377.00	4212.00	5732.00	7735.00	10023.00	12515.00	15180.00	17996.00
	Experim.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	Prog.	9505.63	9845.29	10955.47	12972.12	15849.53	19356.73	23284.35	-	-
	Ansysis	8857.00	9155.00	10160.00	12007.00	14568.00	17548.00	-	-	-
	Experim.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	Prog.	18850.75	19254.57	20528.34	22799.29	-	-	-	-	-
	Ansysis	16737.00	17073.00	18155.00	-	-	-	-	-	-
	Experim.	-	-	-	-	-	-	-	-	-

TAB. III.2. Valeurs en Hz des fréquences calculées par Matlab, celles simulées par ANSYS et certaines, mesurées expérimentalement.

III.3. Calcul et simulation des vibrations libres du disque mince en rotation :

Dans cette partie, on envisage le cas des vibrations libres du disque qui tourne autour de son axe de révolution z avec une vitesse de rotation h (rd/s).

Pour simuler le cas de tournage à grande vitesse, l'équation différentielle du mouvement doit tenir compte de toutes les quantités qui dépendent de la vitesse de rotation. Citons les contraintes planes radiales et tangentielles induites par l'effet de la force centrifuge, l'inertie plane de rotation, l'effet gyroscopique (force de Coriolis). Pour cela, on utilise l'équation II.50 du chapitre II. [4, 5, 6, 7].

$$D \nabla^4 w(r, \theta, t) + \dots h \left(\frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t \partial \theta} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right) = \dots \dots \dots (III.15)$$

$$\dots h \Omega^2 \left[\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \right) \right]$$

Cette équation montre que si la vitesse de rotation s'annule ($\Omega = 0$), toutes les quantités qui en dépendent, s'annulent aussi. On revient donc, à l'écriture de l'équation du mouvement dans le cas du disque stationnaire (III.1).

La recherche des fréquences propres et les harmoniques associées passe par les étapes suivantes:

- Ecrire la solution sous la forme :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [A_{mn}(t) \cos(n\theta) + B_{mn}(t) \sin(n\theta)] R_{mn}(r) \dots \dots \dots (III.16)$$

- Substituer l'équation (III.16) et les expressions des contraintes τ_{rr} et $\tau_{r\theta}$ du chapitre II dans (III.15).
- Addimensionner l'équation nouvellement obtenue par les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \sqrt{\frac{hr_e^4}{D}}; & \bar{t} &= \frac{t}{t_0}; & \check{S} &= \check{S}_{mn}t_0; & \bar{\Omega} &= \Omega t_0; & \bar{w} &= \frac{w}{h}; & \zeta &= \frac{r_i}{r_e}; \\
 \bar{R}_{mn} &= \frac{R_{mn}(r)}{h}; & \bar{r} &= \frac{r}{r_e}; & \dagger_0 &= \frac{D}{r_e h^2}; & \dagger_{rr} &= \frac{\dagger_{rr}}{\dagger_0}; & \dagger_{\theta\theta} &= \frac{\dagger_{\theta\theta}}{\dagger_0}
 \end{aligned}
 \tag{III.17}$$

- Multiplier les 2 membres de l'équation adimensionnée par :

$$\bar{r}\bar{R}_{mn}(\bar{r})(\cos(n_\theta) + \sin(n_\theta)) \tag{III.18}$$

ou bien, on multiplie à 2 reprises, une fois par $\bar{r}\bar{R}_{mn}(\bar{r})\sin(n_\theta)$ et une deuxième fois par

$\bar{r}\bar{R}_{mn}(\bar{r})\cos(n_\theta)$ et en intégrant l'équation résultante par rapport à \bar{r} et θ tels que :

$\zeta \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. C'est à dire $\int_0^1 \int_0^{2\pi} l'equation_adimensionnee \cdot \bar{r} \cdot d\theta \cdot d\bar{r}$

- Appliquer la propriété d'orthogonalité des modes : $\bar{R}_{m,n}(\bar{r})\bar{R}_{k,l}(\bar{r}) = 0$

On aboutit à un système de deux équations différentielles couplées à deux inconnues A(t) et B(t) :

$$\begin{aligned}
 A''_{i,j} + 2n\bar{\Omega}B'_{i,j} + (\check{S}_{m,n}^2 - n^2\bar{\Omega}^2)A_{i,j} &= 0 \\
 B''_{i,j} - 2n\bar{\Omega}A'_{i,j} + (\check{S}_{m,n}^2 - n^2\bar{\Omega}^2)B_{i,j} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 A'_{i,j} &= y_{1,i,j} \\
 A_{i,j} &= y_{2,i,j} \\
 B'_{i,j} &= y_{3,i,j} \\
 B_{i,j} &= y_{4,i,j}
 \end{aligned}
 e^{\check{S}\bar{t}} \tag{III.20}$$

Où les $y_{1,i,j}, y_{2,i,j}, y_{3,i,j}, y_{4,i,j}$ et } sont des nombres complexes.

La substitution du système d'équations (III.20) dans (III.19) donne:

$$\left. \begin{aligned}
 \} y_{1ij} + 2n\bar{\Omega}y_{3ij} + (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2)y_{2ij} &= 0 \\
 \} y_{3ij} - 2n\bar{\Omega}y_{1ij} + (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2)y_{4ij} &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{III.21}$$

Le système d'équations (III.21) est à 4 inconnues, mais (III.20) permet d'écrire les deux relations suivantes :

$$y_{1ij} = \lambda y_{2ij} \quad \text{et} \quad y_{3ij} = \lambda y_{4ij} \dots\dots\dots(III.22)$$

Ceci permet d'exprimer le système (III.21) en fonction de y_1 et y_3 seulement ou en fonction de y_2 et y_4 seulement. Le système (III.21) devient :

$$\left. \begin{aligned} \lambda y_{1ij} + 2n\bar{\Omega} y_{3ij} + (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2) \frac{y_{1ij}}{\lambda} &= 0 \\ \lambda y_{3ij} - 2n\bar{\Omega} y_{1ij} + (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2) \frac{y_{3ij}}{\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(III.23)$$

L'aménagement de III.23, nous donne :

$$\left. \begin{aligned} \left[\lambda + \frac{1}{\lambda} (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2) \right] y_{1ij} + 2n\bar{\Omega} y_{3ij} &= 0 \\ -2n\bar{\Omega} y_{1ij} + \left[\lambda + \frac{1}{\lambda} (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2) \right] y_{3ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(III.24)$$

Finalement, la solution de III.24 est celle qui annule son déterminant, soit :

$$\left[\lambda + \frac{1}{\lambda} (\check{S}_{ij}^2 - n^2\bar{\Omega}^2) \right]^2 + [2n\bar{\Omega}]^2 = 0 \dots\dots\dots(III.25)$$

L'équation caractéristique est du 4^{ème} degré par rapport à λ . Sa résolution, à l'aide du MAPLE, a donné les 4 solutions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= +i(n\bar{\Omega} + \check{S}) \\ \lambda_2 &= -i(n\bar{\Omega} + \check{S}) \\ \lambda_3 &= +i(n\bar{\Omega} - \check{S}) \\ \lambda_4 &= -i(n\bar{\Omega} - \check{S}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(III.26)$$

Pour connaître les valeurs réelles des différentes variables, on doit retourner aux relations (III.17) en annulant l'addimensionnement. La représentation de ces fréquences montre une symétrie par rapport à l'axe des vitesses de rotation. Fig. III.12.

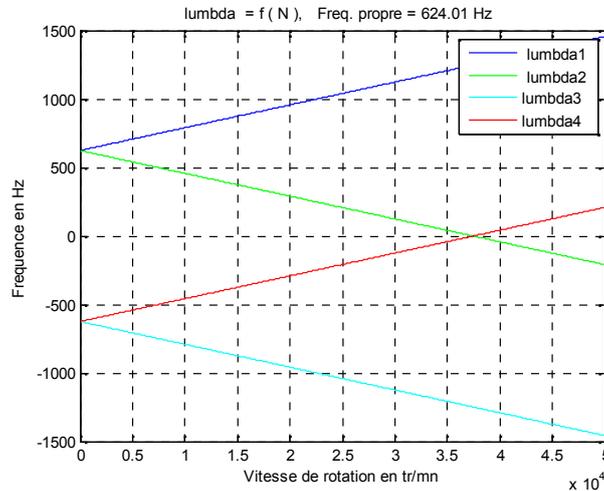


Fig. III.13. Symétrie des solutions λ_i ($i=1 \text{ à } 4$).

Compte tenu que les pulsations \check{S} et les vitesses de rotation $\bar{\Omega}$ sont des grandeurs positives, on va s'intéresser aux parties positives des fréquences λ_i .

La solution (III.26) peut être réduite à:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= +i(n\Omega + \check{S})t_0 \\ \lambda_3 &= +i(n\Omega - \check{S})t_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(III.27.a)$$

Ou à :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= -i(n\Omega + \check{S})t_0 \\ \lambda_4 &= -i(n\Omega - \check{S})t_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(III.27.b)$$

Un programme Matlab a été développé pour calculer et représenter la dépendance entre les fréquences des différents modes et les vitesses de rotation du disque. (Diagramme de Campbell).

La rotation du disque induit pour chaque mode, deux ondes de mêmes fréquences de départ mais qui divergent avec l'augmentation de la fréquence de rotation : une se dirigeant vers

l'avant, et une se dirigeant vers l'arrière. La vitesse de rotation du disque s'ajoute à la vitesse de l'onde se propageant dans la même direction, c'est-à-dire vers l'avant. Tandis que la vitesse de propagation de l'onde se déplaçant dans le sens inverse sera minimisée de la valeur de la vitesse de rotation du disque.

Les figures suivantes montrent les variations des fréquences (Hz) en fonction des vitesses de rotation (tr/mn) du disque rotatif pour les six premiers. Chaque figure visualise deux fréquences. Une, dite "directe" (ou Forward) et l'autre dite "rétrograde" (ou Backward) pour une gamme de vitesses de rotation qui varie entre 0 et 40000 tr/mn.

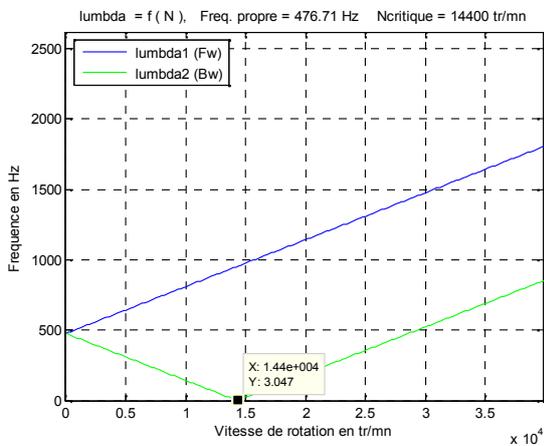


Fig. III.14.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la fréquence 476.71 Hz.

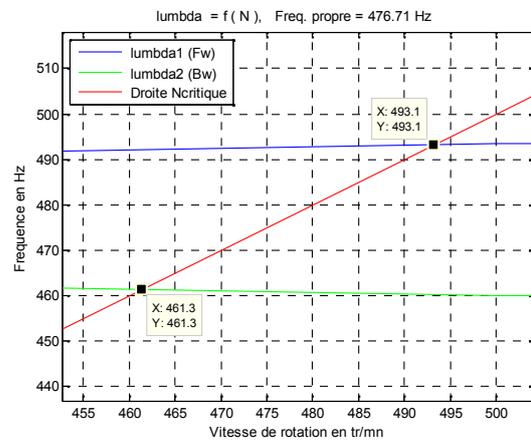


Fig. III.14.b. Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 476.71 Hz.

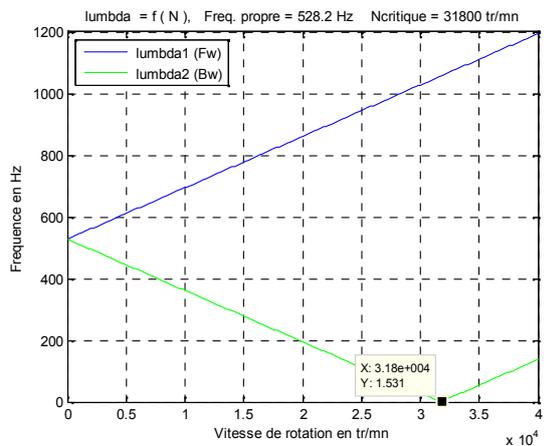


Fig. III.15.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la

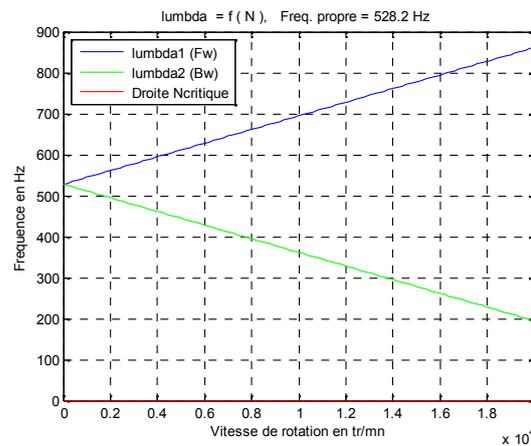


Fig. III.15.b. Représentation de la droite

fréquence 528.20 Hz.

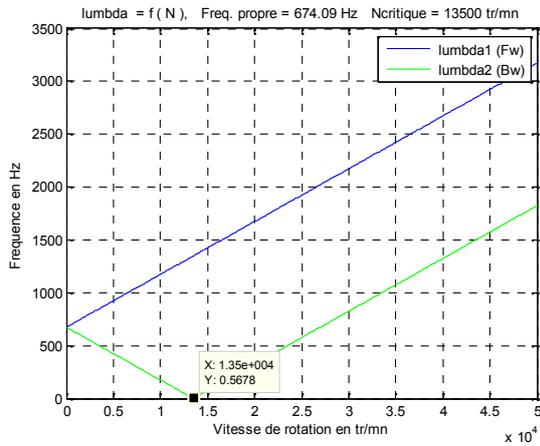


Fig. III.16.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la fréquence 674.09 Hz.

$N_{critique}$ pour la fréquence 528.20 Hz. ($n=0$).

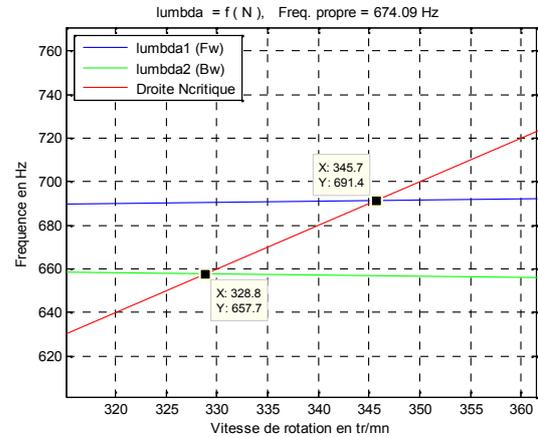


Fig. III.16.b. Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 674.09 Hz.

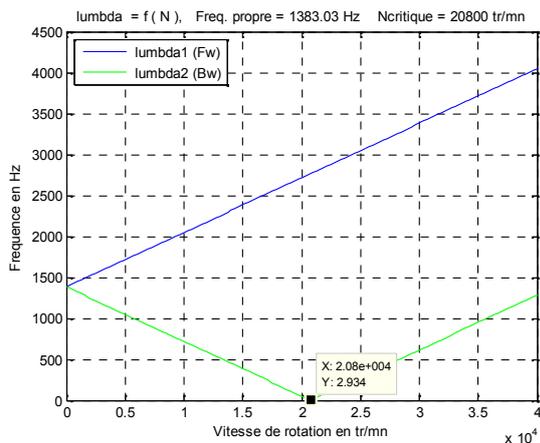


Fig. III.17.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la fréquence 1383.03 Hz.

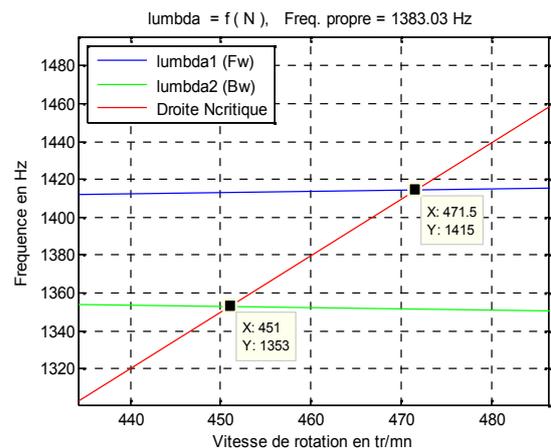


Fig. III.17.b. Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence 1383.03 Hz.

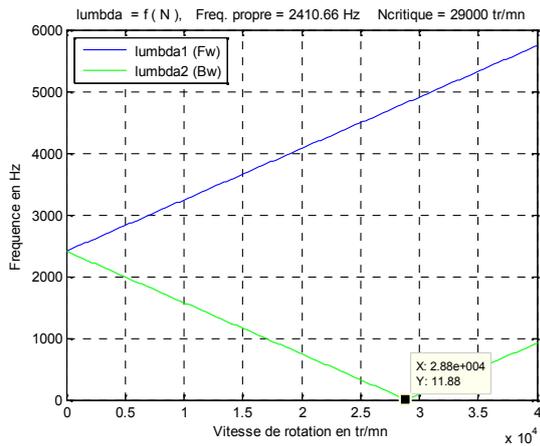


Fig. III.18.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la fréquence 2410.66 Hz.

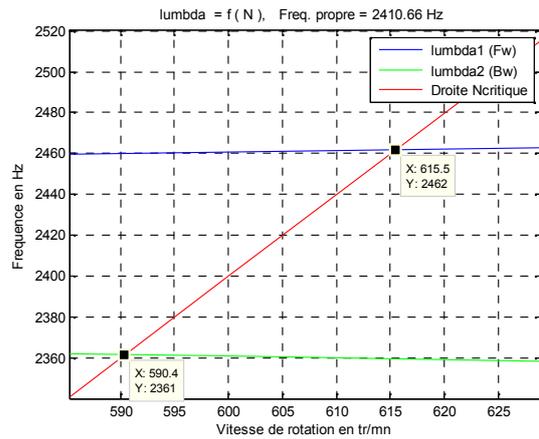


Fig. III.18.b. Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence.2410.66 Hz.

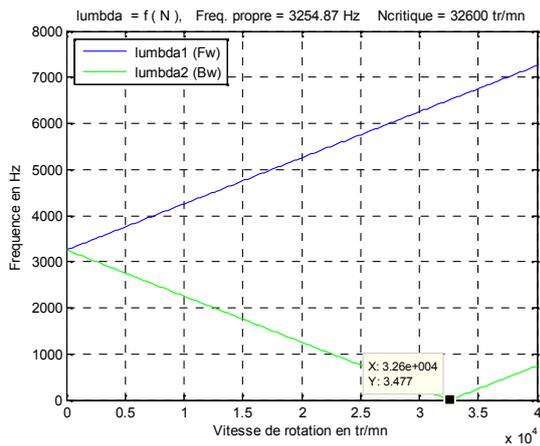


Fig. III.19.a. Représentation de $\lambda = f(N)$ pour la fréquence 3254.87 Hz.

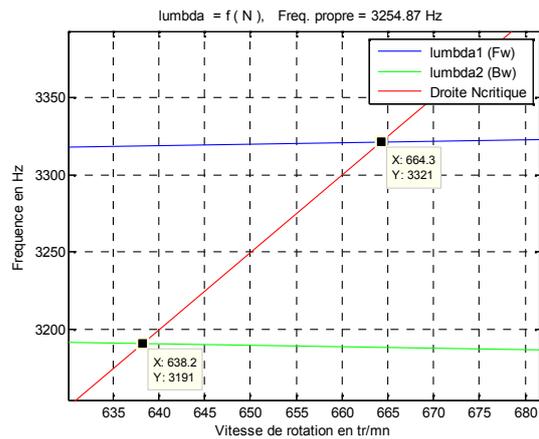


Fig. III.19.b. Représentation de la droite $N_{critique}$ pour la fréquence.3254.87 Hz.

Comme les ondes rétrogrades se propagent dans le sens inverse à la rotation. Les graphiques sur les fig.III.14.a à fig.III.19.a montrent que les fréquences de ces ondes s'annulent à une certaine vitesse de rotation N . Cette vitesse est appelée vitesse de rotation critique. A ce stade, la vitesse de propagation de ces ondes est égale à la vitesse de rotation du disque. Ces valeurs sont considérablement élevées dont la plus petite valeur est $N=13600$ tr/mn (tableau III.3). Par ailleurs, les figures III.14.b - III.19.b présentent les droites : $\check{S}_{mn} = n\check{h}$ pour les six premiers

modes. Chaque mode présente deux points d'intersection, un point avec la fréquence directe (Fw) et un autre point avec la fréquence rétrograde (Bw). Les coordonnées des points d'intersection montrent qu'il y a d'autres vitesses de rotation critiques à basses valeurs qui sont localisées entre 345.68 et 664.25 tr/mn pour le cas des fréquences directes (tableau III.3). Par conséquent, on peut usiner à grande vitesse à condition que la vitesse de rotation ne coïncide pas avec l'une des vitesses critiques.

<i>Mode</i>	<i>(0,1)</i>	<i>(0,0)</i>	<i>(0,2)</i>	<i>(0,3)</i>	<i>(0,4)</i>	<i>(1,0)</i>
Fréquence (Hz)	476.71	528.20	674.09	1383.03	2410.66	3254.87
$N_{critique}$ (tr/mn)	14400.00	31600.00	13500.00	20800.00	28800.00	32600.00
$N_{critique}$ (Fw) (tr/mn)	493.14	/	345.68	471.48	615.48	664.25
N (Bw) (tr/mn)	461.34	/	328.82	450.99	590.37	638.22

TAB.III.3. Récapitulatif des vitesses de rotation critiques en fonction des fréquences.

III.4. Stabilité du disque en rotation :

Un mode est considéré stable si la partie réelle de sa fréquence naturelle est nulle. Si la partie réelle est positive, le mode est instable. Si de plus, sa partie imaginaire est nulle, le mode correspondant est instable. Si les parties imaginaires de deux fréquences ayant des parties réelles égales, les deux modes sont instables aussi [8, 9, 10, 11].

La stabilité du disque en rotation nous mène à examiner la forme de la solution (III.27.a ou III.27.b). Celle qu'on a retenue est III.27.a puisque la solution III.27.b mène au même résultat. Ces deux solutions sont purement complexes et sont conjuguées. Par conséquent, ces modes sont constables.

III.5. Conclusion :

La recherche des fréquences propres et ses harmoniques ainsi que les vitesses de rotation critiques d'un disque annulaire, mince et élastique dans les cas stationnaire, en rotation ou forcé, doit passer par la recherche d'un modèle analytique qui se manifeste par l'équation différentielle du mouvement. Cette dernière est en général, une équation aux dérivées partielles. Dans d'autres cas, c'est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées.

Pour les résultats trouvés, on a constaté une bonne concordance entre les différentes valeurs issues de la modélisation, celles de la simulation par Ansys, d'autres trouvées dans la littérature et finalement celles trouvées expérimentalement.

Concernant la stabilité dynamique du disque en rotation, les fréquences des modes trouvés sont des nombres complexes imaginaires purs. Les parties réelles nulles montrent sa stabilité. Chaque mode se manifeste par deux fréquences, une en avant et une autre en arrière. La vitesse de rotation critique la plus basse est de 13600 tr/mn. Sur le tableau III.3, sont exposées les vitesses de rotation critiques relatives aux six premiers modes pour les fréquences rétrogrades. Toutes ces vitesses de rotation sont à éviter.

III.6. Références bibliographiques :

- [1]. N. Baddour. (2001). A modelling and vibration analysis of spinning disks. PhD thesis. Graduate department of mechanical and industrial engineering. University of Toronto. 250p.
- [2]. M. Abdul hamid. (2002). Réponse forcée des ensembles tournants de turbomachine. Application au cas d'une turbine à gaz. Thèse de Doctorat, INSA de LYON, 120p.
- [3]. Documentation du code ANSYS, version 11.0.
- [4]. R. Margetic. (2005). Transverse vibration and stability of an eccentric rotating circular plate. Journal of sound and vibration. 280, 467-478.
- [5]. K. N. Koo. (2006). Vibration analysis and critical speeds of polar orthotropic annular discs in rotation. Composite Structures, vol. 76, pp. 67-72.
- [6]. Tolorunshagba J. M. and Ogunlade S. T. (2015). Resonant speeds and vibrational response of a prestressed rectangular plate travelled by moving concentrated load. International Interdisciplinary Journal of Scientific Research Vol. 2 No. 1.
- [7]. E. Aubry, D. Fendeleur, F.M. Schmitt, M. Renner (2015). Measurement of the natural frequencies and critical speed of roll-tensioned discs.
- [8]. T. H. Young, M.Y. Wu. (2004). Dynamic stability of disks with periodically varying spin rates subjected to stationary in-plane edge loads. Transactions of the ASME. Vol.71. pp.450-458.

[9]. D.S. Liang, H.J. Wang and L.W. (2002). Chen. Vibration and stability of rotating polar orthotropic annular disks subjected to a stationary concentrated transverse load. *Journal of Sound and Vibration*. 250(5), 795-811.

[10]. J. E. Oh, H. H. Yoo. (2002). Non-linear vibration of a flexible spinning disc with angular acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 231, pp.375-391.

[11]. F. B. Helmut W. Eidel. (2007). Transverse vibration and stability of spinning circular plates of constant thickness and different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 300, 877-895.

CONCLUSION GENARALE ET PERSPECTIVES

Le tournage des disques minces est un procédé d'usinage qui présente beaucoup de difficultés à cause des vibrations du disque lui-même surtout lorsqu'il est excité par les efforts de coupe. Le cas sera aggravé si les vibrations des différents composants du système usinant (la machine, la broche, le porte-outil et l'outil) entrent en jeu. En usinage conventionnel, en plus de la déformation du disque à cause des efforts de coupe élevés, les conséquences des vibrations sur la stabilité de l'usinage des disques minces sont souvent constatées par un état de surface médiocre. Si les solutions technologiques appliquées pour améliorer la rigidité de la pièce ne peuvent pas être adoptées, le recours à l'usinage à grande vitesse semble être l'unique meilleure solution. L'UGV, qui se caractérise par des efforts de coupe très faibles, un temps d'usinage très court, un échauffement très faible au niveau de la pièce usinée, une productivité très élevée et un niveau vibratoire très bas, se confronte parfois à des problèmes provoqués par les vibrations se manifestant au passage sur les fréquences de résonance et les vitesses critiques de rotation. D'où, la coupe devient instable provoquant ainsi une surface altérée et même parfois la cassure la pièce.

Lorsque l'UGV est adopté comme solution pour le tournage des disques minces, on doit passer par le calcul dynamique pour pouvoir éviter les vitesses critiques de rotation, les fréquences de résonance afin d'éviter les zones de coupe instable. La formulation du modèle de vibration est basée sur la détermination du Lagrangien qui est fonction des énergies cinétique et de déformation et qui dépendent à leur tour des expressions des déplacements, des déformations et des contraintes. La description des déformations en fonction des différentes composantes de déplacement, qui n'étaient pas linéaires et par conséquent il est difficile de les résoudre, doit passer par une linéarisation en appliquant les hypothèses de Kirchhoff avec la supposition que le disque présente une symétrie axiale selon l'axe z. Par conséquent, on a exprimé les déplacements seulement en fonction du rayon du disque dans le cas du disque stationnaire et en fonction du rayon et de la vitesse de rotation dans le cas du disque rotatif.

Une fois le modèle est défini, on procède à la recherche des fréquences propres dans le cas du disque stationnaire ainsi que les vitesses de rotation critiques du disque en rotation. Pour

la résolution analytique, les démarches suivies commencent par l'adoption d'une forme de solution qui est en général une projection dans la base modale faisant apparaître la fréquence recherchée, le nombre de diamètres et de cercles nodaux. Comme le modèle de vibrations est une équation aux dérivées partielles couplées dont la manipulation est lourde, on a eu recours à l'addimensionnement de ses variables dans le but de la transformer en une équation différentielle ordinaire moins difficile à résoudre. L'application des critères d'orthogonalité des modes nous a amené à l'obtention d'un système d'équations qui peut être résolu analytiquement ou numériquement.

Les résultats obtenus par la modélisation ont montré qu'il y a une bonne concordance avec ceux simulés par le code de calcul en éléments finis Ansys, d'autres trouvés dans la littérature et finalement ceux trouvés expérimentalement.

Concernant la stabilité dynamique du disque en rotation, tous les modes trouvés sont des nombres complexes imaginaires purs. Leurs parties réelles étant nulles, la stabilité est garantie. Les vitesses de rotation critiques ont été déterminées après avoir tracé les diagrammes de Campbell.

Comme nous n'avons pas pu réaliser des essais de tournage à grande vitesse, nous avons orienté l'étude à la détection des défauts structuraux et du phénomène de broutement. Pour réaliser cet objectif, nous avons procédé à la mesure des efforts de coupe selon un protocole expérimental prédéfini. Sachant que les signaux mesurés sont toujours entachés par les incertitudes de mesure, le débruitage de ces signaux pour qu'on puisse accéder aux informations utiles par les techniques de traitement de signal était nécessaire. A travers des représentations temps-fréquence par la TFFrCT, appliquées sur les signaux des efforts de coupe mesurés lors du tournage d'un disque mince, ont permis de localiser les défauts créés à travers l'espace temporel entre les impacts ainsi que le broutement comme étant un phénomène aléatoire pouvant exciter certaines fréquences de résonance du disque d'une manière continue ou discontinue lors de l'usinage.

Le traitement des signaux des efforts de coupe par la FFT a révélé la présence d'une fréquence caractéristique du phénomène de broutement dans certains essais. La modulation par la fréquence de rotation autour de cette fréquence signifie la présence d'un défaut sur la

surface mais ne précise pas le nombre de défauts existants. L'analyse multirésolution en ondelettes appliquée pour filtrer les signaux à travers la démodulation montre clairement l'existence d'une série de chocs dont la période correspond à la fréquence de rotation dans le cas d'un seul défaut et deux séries de chocs dans le cas d'existence de deux défauts dans le signal du détail 5.

Finalement et suite à la complexité de ce sujet, l'étude peut être étendue au cas des vibrations forcées en vue de déterminer les déplacements du disque sous l'effet des efforts de coupe. Par ailleurs, si on tient compte des effets thermiques dans la zone de coupe, la formulation mathématique faite dans le deuxième chapitre peut prédire la réalité d'usinage. Concernant le phénomène du broutement, objet de nos prochaines études, d'autres paramètres à savoir la mesure du bruit émis lors de l'usinage et l'état de surface peuvent aider à détecter son apparition.