

**République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**

Université 8 Mai 1945-Guelma

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de
la Matière
Département de Mathématiques**



**Polycopié des cours « Approximations
des EDP par la méthode des
différences finis (DF) »**

**Présenté par :
Dr. Fernane Khairddine**

Juin 2014

Préface

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de master 1 (option EDP et Mathématiques appliquées).

Le contenu est conforme aux programmes d'enseignement du canevas.

L'objectif est de présenter la méthode des différences finies pour résoudre les problèmes régis par des équations aux dérivées partielles. Pour bien assimiler et valider cette méthode, l'étudiant doit connaître, en amont, les méthodes analytiques et expérimentales. Le chapitre 1 donne la classification mathématique et physique des équations aux dérivées partielles.

Le chapitre 2 traite l'approximation des dérivées par différences finies.

Le chapitre 3 et 4 et 5 traite l'approximation par différences finies. Les différents types de problèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques sont analysés et validés.

Le chapitre 6 traite les propriétés des schémas numériques (consistance, stabilité, convergence,...).

Nous espérons mettre à la disposition de l'étudiant un ensemble d'outils pédagogiques qui lui permettront d'assimiler efficacement les bases essentielles de la méthode des différences finies.

Table des matières

	Préface	1
1	Classification des équations aux dérivées partielles	3
1.2.	Classification mathématiques des E.D.P linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes).	3
1.3.	Classification mathématiques des E.D.P dans le cas général (n variables indépendantes).	3
1.4.	Classification physique des E.D.P	4
	Exercices	6
2	Approximation des dérivées par différences finies	7
2.0	introduction	7
2.1.	Discrétisation du domaine	7
2.2.	Approximation des dérivées (Cas 1D)	8
	Développent en série de Taylor (Cas 2D)	12
	Exercices	15
3	Approximation de problèmes elliptiques par la méthode des différences finies	16
	Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet	16
3.1.	Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann	16
3.2.	Exemple simple 2D (stationnaire).	16
3.3	Cas d'un domaine non rectangulaire	17
3.4	Exercices	25
		27
4	Approximation d'un problème parabolique par la méthode des différences finies- Problème modèle	29
4.1.	Les schémas types	29
4.2.	Exercices	29
		35
5	Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies	37
5.1.	Résolution de l'équation de transport coefficients constants	
	Schémas explicites	37
5.1.1.	Schémas implicites	37
5.1.2	Approximation de l'équation des ondes en dimension 1	38
	Exercices	40
		44
6	Propriétés des schémas numériques	46
6.1	introduction	
6.2	La démarche : Etude de la consistance et la stabilité	46
	Exercices	54
	Bibliographie	57

Chapitre I

Classification des équations aux dérivées partielles

1.1. Définitions.

- Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n la fonction u est ses dérivées partielles. Par exemple, si u est une fonction de deux variables, une E.D.P peut s'écrire par la relation :

$$f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{x^2y}, u_{xy^2}, u_{x^3}, u_{y^3}, \dots) = 0$$

- On appelle ordre de l'E.D.P l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'E.D.P, par exemple :

$$u_{x^2y} + 3u_{xx} + xu_{yy} + u_x + u + c = 0 \text{ est d'ordre } 3$$

$$(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4(u_{xy})^2 - c = 0 \text{ est d'ordre } 2$$

- L'E.D.P est dite linéaire si f est linéaire par rapport à ses arguments u et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'E.D.P du second ordre:

$$a_1u_{xx} + a_2u_{xy} + a_3u_{yy} + a_4u_x + a_5u_y + a_6u + a_7 = 0 \quad (1.1)$$

est linéaire si les $a_i (i = 1, \dots, 7)$ ne dépendent que de (x, y)

Exemples.

-EDP linéaire, à coefficients constants: $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + u_x - ue^{xy} = 0$

-EDP linéaire, à coefficients variables: $\sin(xy)u_{xx} + 3x^2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u = 0$

-EDP non linéaire: $u_{xx} + 3u_{xy} + (u_x)^2 - ue^x - y = 0$

1.2. Classification mathématiques des E.D.P linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes).

De très nombreux phénomènes physiques se traduisent par des E.D.P linéaires du second ordre du type (1.1) qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \quad (1.2)$$

Où a, b et c ne dépendent que de (x, y) et d est une fonction linéaire de (x, y, u, u_x, u_y)

Il ya trois types d'équations aux dérivées partielles représentés par l'équation (1.2). Selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, le polynôme et l'EDP sont dits:

- hyperbolique si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;
- parabolique si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;
- elliptique si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

1.3. Classification mathématiques des E.D.P dans le cas général (n variables indépendantes).

Si u est une fonction de n variables indépendantes, les E.D.P. linéaires du second ordre sont

du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)u + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1.3)$$

- Si tous les $a_i (i = 1, \dots, n)$ sont non nuls et de même signe, l'E.D.P est de type elliptique.
- Si tous les $a_i (i = 1, \dots, n)$ sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'E.D.P est de type hyperbolique.
- Si un seul des a_i est nul (noté a_0) et tous les autres de même signe et si b_0 est non nul l'E.D.P est de type parabolique.

Les fonctions a_i et b_i étant dépendantes des variables (x_1, \dots, x_n) , la classification est évidemment fonction du point (x_1, \dots, x_n) considéré. Une E.D.P peut donc être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de type mixte.

Exemples.

Soient $u(x, y)$ une fonction de deux variables et $v(x, y, t)$ une fonction de trois variables.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ est une E.D.P elliptique}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ est une E.D.P hyperbolique}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ est une E.D.P parabolique}$$

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ est une E.D.P elliptique pour } x > 0$$

Hyperbolique pour $x < 0$

Parabolique pour $x = 0$

1.4. Classification physique des E.D.P.

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes :

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (champ, chaleur, etc..) dans un domaine borné ou non, ils sont gouvernés par des E.D.P elliptiques.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la résonance des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, etc..) à partir d'un état initial donné. Ils sont gouvernés par des E.D.P hyperboliques ou des E.D.P paraboliques.

Exemples.

1. Equation de la chaleur: $u_t = a \Delta u$.

2. Equation de Poisson: $\Delta u = f$.

3. Equation de Laplace: $\Delta u = 0$.

4. Equation des ondes: $u_{tt} = c^2 \Delta u$.

5. Equation de Helmholtz: $\Delta u + k^2 u = 0$.
6. Equation de vibration de plaque mince: $u_{tt} + a\Delta^2 u = 0$
7. Equation de Korteweg-de Vries: $u_t - v_0 u_x = \alpha u u_x - \beta u_{xxx}$.
8. Equation d'Airy: $u_t = -u_{xxx}$.
9. Equation de Burger (non dissipative) : $u_t + uu_x = 0$.
10. Equation de Burger (dissipative) : $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$.
11. Equation des ondes sphériques : $u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r)$.
12. Equations de Navier-Stokes (écoulements de fluide incompressible) :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

où ρ et μ sont des constantes, $\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ le vecteur vitesse, $p(x, y, t)$ la pression, et l'opérateur de dérivation $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ est obtenu en faisant formellement le produit scalaire de $\mathbf{v} = (u, v)$ par $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

1.5. Conditions aux limites

On doit se donner des « conditions aux limites » (CL). L'équation étant vérifiée dans un domaine D de l'espace (ou espace-temps), on distingue des conditions de trois types :

- a) Conditions de Dirichlet : on impose la valeur de u sur la bordure de D . Dans le cas où on étudie un problème dépendant du temps, cela inclut des conditions « initiales ».
- b) Conditions de Neumann : c'est la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}$ que l'on impose.
- c) On impose ces deux conditions sur la bordure de D . C'est la condition mixte.

Remarque.

Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière. (On impose alors souvent des conditions à l'infini.)

Problème "bien posé".

Soit une E.D.P valide dans D , munie de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

1. il existe une solution de l'E.D.P satisfaisant les conditions frontières (existence).
2. la solution doit être unique (unicité).
3. la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

Exercices

Ex :

1. Pour chacune des équations aux dérivées partielles, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle linéaire homogène ou non:

a) $u_{xx} - xu_y = y$, b) $u^2 + uu_y = 1$, c) $u_{xxxx} + 2u_{xyyy} + u_{yyyy} = 0$

d) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin(x)$, e) $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin(u) = e^u$

2. Vérifier que les fonctions $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = e^x \sin(y)$ sont bien des solutions de l'équation $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

3. Déterminer pour quels couples (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est (a) elliptique, (b) parabolique et (c) hyperbolique :

i) $u_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0$, ii) $u_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} - (x-3)u_y = u$

iii) $e^x u_{xx} + xu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x$ iv) $x^2 u_{xx} + 2(x-y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

v) $u_{xx} - 5u_{xy} - (x+y)u_{yy} + 4u_x - u_y = \sin(x)$

Chapitre 2

Approximation des dérivées par différences finies

2.0. Introduction.

Les problèmes de type E.D.P sont infini-dimensionnels (il s'agit de déterminer toute une fonction). Si l'on veut calculer la solution numériquement, il faut se ramener à un problème en dimension finie. Trois grandes familles de méthodes sont utilisées.

I. Les différences finies.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

II. Les volumes finis.

Intégration des équations discrètes sous formes de loi de conservation.

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence.

III. Les éléments finis.

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forma variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

D'après ce qui précède un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée :

- D'un domaine Ω
- D'une équation aux dérivées partielles (E.D.P)
- De conditions aux limites
- De conditions initiales (pour les problèmes d'évolution)

2.1. Discrétisation du domaine.

Maillage.

Puisqu'on a évoqué le mot **maillage** dans le paragraphe précédent et qu'on en aura tout le temps besoin, définissons-le ici.

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathcal{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage

voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer comme tel. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

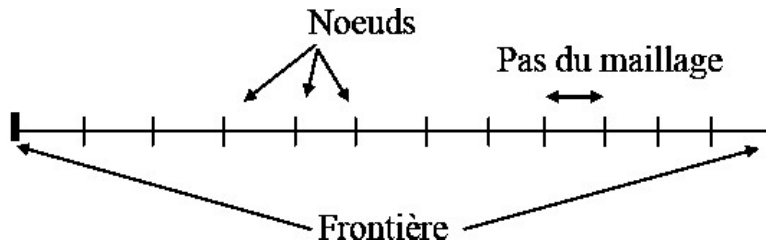


Fig. 2.1 Maillage 1D

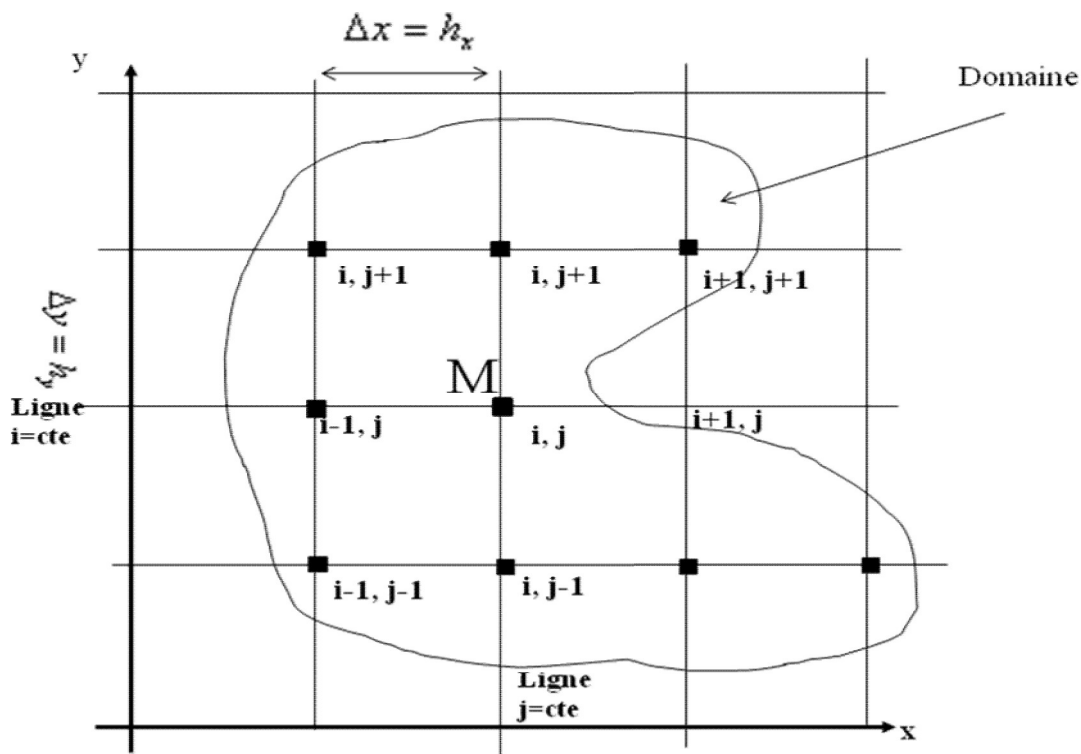


Fig. 2.2 Maillage 2D

Le nœud M a comme coordonnées $x_M = i\Delta x = ih_x$, et $y_M = j\Delta y = jh_y$ ou d'une manière condensée (i, j) .

Ainsi la fonction $u(x, y)$ prend au point $M(x_M, y_M)$ la valeur $u(i\Delta x, j\Delta y) = u(ih_x, jh_y)$ ou $u_{i,j}$ ou même u_i^j .

2.2. Approximation des dérivées.

I). Développement en série de Taylor (Cas 1D).

Si u une fonction analytique, indéfiniment dérivable au voisinage d'un point $x = x_0$ (c'est-à-dire dans un intervalle ouvert contenant le point $x = x_0$, $0 < |x - x_0| < R$), alors cette fonction peut être approché par une fonction polynomiale écrite sous la forme de série convergente qu'on appelle série de Taylor :

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0) u'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} u''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} u^{(n)}(x_0) + \dots \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) s'écrit encore :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} u^{(n)}(x_0)$$

On ne peut tenir compte que d'un nombre fini de termes : on effectue une troncature de la série. On a donc un développement à termes finis c'est le développement limité de Taylor de la fonction u autour du point $x = x_0$:

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0) u'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} u''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} u^{(n)}(x_0) + R_n \quad (2.2)$$

Le dernier terme de l'équation (2.2) est appelé reste ou erreur de troncature, est donné par la formule de Lagrange :

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} u^{(n+1)}(\zeta) \quad x - x_0 \leq \zeta \leq x + x_0 \quad (2.3)$$

Cette erreur est de l'ordre de grandeur de $(x - x_0)^{n+1}$ et est notée par $O(x - x_0)^{n+1}$. Puisque la fonction est infiniment dérivable $u^{(n+1)}(\zeta)$ existe et est bornée. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$,

la série converge. Ecrite sous la forme (2.3) la formule de Taylor est utilisée pour approcher les fonctions par des fonctions polynomiales.

En posant $h = \Delta x = x - x_0$ la formule de Taylor (2.3) devient :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} u^{(n)}(x_0) + O(h^{n+1}) \quad (2.4)$$

a) Expression des dérivées premières.

i) Différences finies en avant.

La fonction u est connue aux points x_i (points pivots) du domaine d'analyse. A l'aide de la formule de Taylor (2.4) on développe la fonction u jusqu'à à l'ordre 2 :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(\zeta) \quad (2.5)$$

ζ abscisse d'un point se trouvant dans le voisinage de x_i avec $x_i < \zeta < x_i + h$

En résolvant (2.5) pour $u'(x_i)$, on a :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h) \quad (2.6)$$

Avec $O(h)$ l'erreur de troncature :

$$O(h) = -\frac{h}{2!} u^{(2)}(\zeta) \quad x_i < \zeta < x_i + h \quad (2.7)$$

L'erreur est de l'ordre de grandeur du pas h (de l'ordre du degré le plus petit du pas h).

La formule de dérivée première s'écrit en notation indicielle :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \quad (2.8)$$

Ce schéma est dit «**avant**» ou «**décentré avant**» ou upwind.

ii) Différences finies en arrière.

En changeant h en $-h$ dans l'équation (2.5) on obtient :

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(\zeta) \quad x_i - h < \zeta < x_i \quad (2.9)$$

En résolvant (2.9) pour $u'(x_i)$, on a :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) \quad (2.10)$$

Avec l'erreur de troncation :

$$O(h) = \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(\zeta) \quad x_i - h < \zeta < x_i \quad (2.11)$$

L'erreur est de même ordre de grandeur que celle obtenue pour le schéma de différences en avant.

La formule de dérivée première (2.10) s'écrit en notation indicielle :

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \quad (2.12)$$

Ce schéma est dit «**arrière**» ou «différences finies régressives».

iii) Différences finies centrées.

L'élimination de $u(x_i)$ des équations :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(2)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\zeta) \quad (2.13)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(2)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\zeta) \quad (2.14)$$

Nous permet de trouver la dérivée première par un schéma de différences centrées.

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.15)$$

$$O(h^2) = -\frac{h^2}{6} u^{(3)}(\zeta) \quad x_i - h < \zeta < x_i + h \quad (2.16)$$

Qui s'écrit en notation indicielle :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (2.17)$$

L'erreur est de l'ordre de h^2 .

Exemple. En considérant un pas $h = \Delta x = 0.1$, calculer par schéma de DF (a) en avant, (b) en arrière (c) et centré la dérivée première de la fonction $u(x) = x^2$ au point $x = 2$. Calculer l'erreur de troncation pour chaque cas.

Réponse. On a : $u''(x) = 2$

$$x_i = 2, \quad h = \Delta x = 0.1 \text{ et } u(x_i) = x_i^2$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2.1$$

$$u_i = u(2) = 4$$

$$x_{i-1} = x_i - \Delta x = 1.9$$

$$u_{i+1} = u(2.1) = 4.41$$

$$u_{i-1} = u(1.9) = 3.61$$

$$(a) \text{ DF en avant. } u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = 4.1, \quad O(h) = -\frac{\Delta x}{2!} u^{(2)}(\zeta) = -0.1.$$

$$(b) \text{ DF en arrière. } u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = 3.9, \quad O(h) = \frac{\Delta x}{2!} u^{(2)}(\zeta) = 0.1.$$

$$(c) \text{ DF et centré. } u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 4, \quad O(h^2) = \frac{(\Delta x)^2}{6} u^{(3)}(\zeta) = 0.$$

Remarque. Le schéma centré est meilleur que les deux autres, puisque avec une erreur en $O(h^2)$ alors que les schémas avant et arrière ont une erreur en $O(h)$.

b) Expression des dérivées secondes.

i) Différences finies en avant.

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(\zeta) \quad (2.18)$$

$$u(x_i + 2h) = u(x_i) + 2h u'(x_i) + 2h^2 u^{(2)}(x_i) + \frac{8}{3!} h^3 u^{(3)}(\zeta) \quad (2.19)$$

Eliminant $u'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i) - 2u(x_i + h) + u(x_i + 2h)}{h^2} + O(h) \quad (2.20)$$

$$O(h) = -hu^{(3)}(\zeta) \quad (2.21)$$

ζ point du voisinage de x_i , on prend le voisinage qui contient les autres $x_i < \zeta < x_i + 2h$.

En notation indicielle, on a:

$$u_i^{(2)} = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) Représente l'expression de la dérivée seconde écrite par un schéma de différences finies en avant ou progressives.

ii) Différences finies en arrière.

On considère le développement de $u(x_i - h)$ et $u(x_i - 2h)$:

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(\zeta) \quad (2.23)$$

$$u(x_i - 2h) = u(x_i) - 2h u'(x_i) + 2h^2 u^{(2)}(x_i) - \frac{4}{3} h^3 u^{(3)}(\zeta) \quad (2.24)$$

Eliminant $u'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i - 2h) - 2u(x_i - h) + u(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (2.24)$$

$$O(h) = hu^{(3)}(\zeta) \quad x_i - 2h < \zeta < x_i \quad (2.25)$$

en notation indicielle, on a:

$$u_i^{(2)} = \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{h^2} + O(h) \quad (2.26)$$

Qui est un schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde.

iii) Différences finies centrées.

On considère le développement de $u(x_i + h)$ et $u(x_i - h)$:

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\zeta) \quad (2.27)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\zeta) \quad (2.28)$$

Eliminant $u'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.29)$$

$$O(h^2) = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\zeta) \quad x_i - h < \zeta < x_i + h \quad (2.30)$$

en notation indicielle, on a:

$$u_i^{(2)} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.31)$$

Qui est un schéma de différences finies en centrées de la dérivée seconde.

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

II. Développement en série de Taylor (Cas 2D).

Soit $u(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes que nous supposons suffisamment différentiable. Si nous écrivons son développement en séries de Taylor en un point $(x + h, y + k)$, nous avons :

$$u(x, y) = u(x + h, y + k) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dots \dots \dots \quad (2.32)$$

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) + R_n$$

Avec le résidu R_n donné par :

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x + \xi h, y + \eta k) \quad \xi \in]0,1[, \quad \eta \in]0,1[\quad (2.33)$$

Ou encore $R_n = O\left[\left(|h| + |k|\right)^n\right]$.

L'équation (2.33) signifie qu'il existe un nombre positif constant M tel que :

$$|R_n| \leq M \left(|h| + |k| \right)^n .$$

Le nœud $(i\Delta x, j\Delta y)$ est entouré par les nœuds avoisinants montrés sur la figure 2.2. En développant en séries de Taylor pour $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i-2,j}$ et $u_{i+2,j}$ autour de la valeur centrale $u_{i,j}$, nous obtenons :

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h u_x + \frac{h^2}{2!} u_{xx} - \frac{h^3}{3!} u_{xxx} + \frac{h^4}{4!} u_{xxxx} + R_5 \quad (2.34)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h u_x + \frac{h^2}{2!} u_{xx} + \frac{h^3}{3!} u_{xxx} + \frac{h^4}{4!} u_{xxxx} + R_5' \quad (2.35)$$

$$u_{i-2,j} = u_{i,j} - 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{8}{6} h^3 u_{xxx} + \frac{2}{3!} h^4 u_{xxxx} + R_5'' \quad (2.36)$$

$$u_{i+2,j} = u_{i,j} + 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{8}{6} h^3 u_{xxx} + \frac{2}{3!} h^4 u_{xxxx} + R_5''' \quad (2.37)$$

Ici $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, etc.... et toutes les dérivées sont évaluées au nœud (i, j) .

Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée première.

En négligent les termes d'ordre 2 et plus dans les équations (2.34) et (2.35) nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (2.39)$$

Nous avons donc approché u_x par des différences finies d'ordre 1 progressives (ou à droite) et régressives (ou à gauche) respectivement.

Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par les différences centrées.

En soustrayant (2.34) de (2.35) et en négligent les termes d'ordre 4 et plus nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.40)$$

C'est l'approximation de u_x par des différences finies centrées d'ordre 2.

Approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée seconde.

En multipliant l'équation (2.35) par (-2), en ajoutant le résultat à l'équation (2.37) et en négligent les termes d'ordre 3 et plus nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^2} + O(h) \quad (2.41)$$

C'est l'approximation de la dérivée seconde à l'ordre 1 par des différences finies à droite. De même, en utilisant (2.34) et (2.36), nous obtenons l'approximation à l'ordre 1 en h de la dérivée seconde par des différences finies à gauche :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \quad (2.42)$$

Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée seconde.

En ajoutant les équations (2.34) et (2.35) et en négligent les termes d'ordre 4 et plus nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.43)$$

C'est l'approximation de la dérivée seconde à l'ordre 2 par des différences finies centrées.

Approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première par des différences à droite ou à gauche.

De l'équation (2.35) nous pouvons tirer :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2}u_{xx} - \frac{h^2}{6}u_{xxx} + O(h^3) \quad (2.44)$$

En substituant par u_{xx} de l'équation (2.41) nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.45)$$

C'est l'approximation à l'ordre 2 en h de la dérivée première u_x par des différences finies à droite. De même, en utilisant (2.34) et (2.36), nous obtenons l'approximation à l'ordre 2 en h de u_x par des différences finies à gauche :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2) \quad (2.46)$$

Approximation de u_y et u_{yy} .

Les approximations de u_y et u_{yy} sont obtenues de la même façon que celles de u_x et u_{xx} et sont données ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{2k} + O(k^2) \quad (2.50)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2k} + O(k^2) \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{k^2} + O(k) \quad (2.52)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{k^2} + O(k) \quad (2.53)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (2.54)$$

Approximation de la dérivée croisée u_{xy} .

Le principe est toujours basé sur les développements de Taylor:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \quad (2.55)$$

Or

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + O(h^2) \text{ d'après (2.40)}$$

Et

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j-1} = \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} + O(h^2) \text{ d'après (2.40)}$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{4hk} [u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}] + O(h + k^2) \quad (2.56)$$

Définition (Ordre du schéma). On dit qu'un schéma de discrétisation à N points de discrétisation est d'ordre p s'il existe $C \in \mathfrak{R}^+$, ne dépendant que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfasse : $\max_{i=1,\dots,N} |R_i| \leq Ch^p$ où h est le pas du maillage (c.à.d. le

maximum des écarts $x_{i+1} - x_i$). On dit qu'un schéma de discrétisation est consistant si

$\max_{i=1,\dots,N} |R_i| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ où N est le nombre de points de discrétisation.

Exercices

Ex 1 : Soit $u \in C^3(\mathcal{R})$. Déterminer a, b, c pour que la différence finie :

$$\frac{au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}}{h}$$

soit une approximation d'ordre au moins 2 de $u'(x_n)$.

Ex 2 : Différence finie d'ordre 4.

Soit $u \in C^7(\mathcal{R})$. Déterminer a, b, c, d, e pour que la différence finie :

$$\frac{au_{n-2} + bu_{n-1} + cu_n + du_{n+1} + eu_{n+2}}{h^2}$$

soit une approximation d'ordre au moins 4 de $u''(x_n)$.

Ex 3 : Différence finie d'ordre p.

Soit $u \in C^{p+1}(\mathcal{R})$. Déterminer a_0, a_1, \dots, a_p pour que la différence finie :

$$\frac{a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_pu_{n+p}}{h}$$

soit une approximation d'ordre au moins p de $u'(x_n)$.

Ex 4 : Montrer que le schéma en DF :

$$\frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2}$$

est précis d'ordre 4 pour l'approximation de u'' .

Chapitre 3

Approximation de problèmes elliptiques par la méthode des différences finies

3.1. Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

- Problème modèle

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} -u'(x) = f(x) & , x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

Où f est une fonction continue.

On découpe le domaine de calcul en n intervalles, $n \geq 1$, de longueur $h = \frac{1}{n}$ (dit pas de discrétisation).

Nous désignons par : $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$. En particulier : $x_0 = 0$ et $x_n = 1$.

Le maillage est construit de $(n+1)$ noeuds. La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au noeud x_i .

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i \quad (3.2)$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.3)$$

L'équation discrétisée est ainsi:

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (3.4)$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

3.2. Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta \end{cases} \quad (3.6)$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, n inconnues u_i pour $i = 1, \dots, n$.

D'autre part, il faut discrétiser la condition de Neumann $u'(1) = \beta$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences finies: elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1 :

$$u'(1) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} + O(h) \quad (3.7)$$

Sous forme matricielle, on obtient:

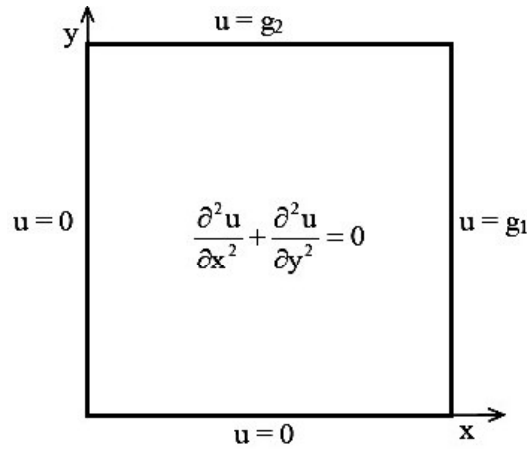
$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ \frac{\beta}{h} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.3. Exemple simple 2D (stationnaire).

3.3.1 Cas de conditions de Dirichlet.

On considère un domaine carré, donc 2 dimensions d'espace (problème 2D), où on veut résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Équation de Laplace}) \quad (3.9)$$



Les conditions limites sont de type Dirichlet, telles que décrites sur le schéma ci-contre, g_1 et g_2 étant 2 constantes quelconques.

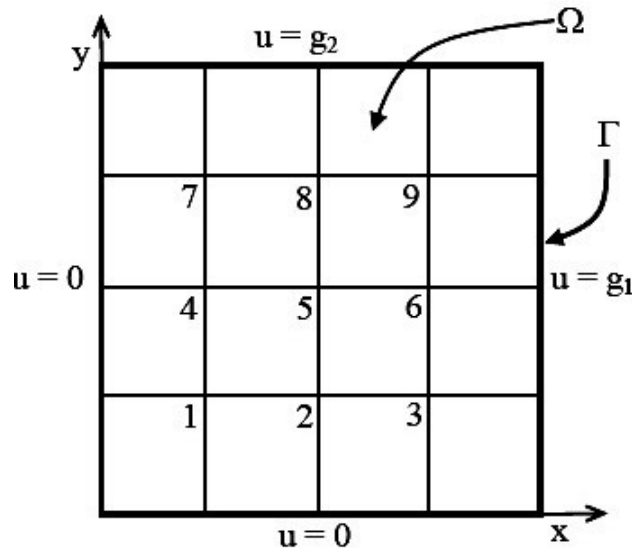
a- Discrétisation du domaine d'étude.

Le domaine d'étude comprend le domaine interne, noté Ω , et la frontière, notée Γ .

On va créer un maillage relativement lâche (afin de limiter ensuite les écritures; mais l'extension à plus de noeuds ne pose aucun problème) et régulier.

Ce maillage introduit en tout **25** noeuds, dont **9** noeuds internes et **16** noeuds frontières.

Cependant, les noeuds frontières ne constituent pas des valeurs à rechercher, puisque la valeur de la fonction u est connue (conditions de Dirichlet).



Seuls les noeuds ici numérotés de **1** à **9** constituent donc les inconnues de notre problème, sachant que bien sûr, les conditions limites doivent intervenir dans la solution.

Le maillage étant régulier, on pose $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{4}$

b- Discrétisation de l'équation

Cette étape consiste à remplacer l'EDP par une équation algébrique approchée.

On peut maintenant avoir une approximation de la dérivée seconde en x_i , en utilisant le développement de Taylor d'une fonction au voisinage d'un point.

Nous rappelons que le maillage est régulier : $\Delta x = \Delta y = h$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.11)$$

En sommant ces 2 expressions :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.13)$$

Comme l'équation à résoudre est $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ on obtient :

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = 0 \quad (3.14)$$

En négligeant l'écriture de $O(h^2)$.

Soit :

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad (3.15)$$

Cette expression constitue donc une approximation de l'EDP écrite au noeud x_{ij} . C'est une relation entre 5 noeuds qui approxime l'EDP écrite au noeud u_{ij} . Calquée sur le maillage, on l'écrit sous forme graphique comme ci-dessous à droite où on représente les coefficients de chacun des noeuds :

$$\begin{array}{c}
 U_{i,j+1} \\
 | \\
 U_{i-1,j} - U_{i,j} - U_{i+1,j} \\
 | \\
 U_{i,j-1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 | \\
 \mathbf{1} - \mathbf{4} - \mathbf{1} \\
 | \\
 \mathbf{1}
 \end{array}$$

c- Ecriture du système d'équations

On va maintenant écrire l'équation discrétisée en chacun des noeuds inconnus, ce qui va conduire à un système de 9 équations à 9 inconnues. Pour cela, on reprend la numérotation des 9 noeuds de 1 à 9 ; en effet, cela est moins laborieux que de travailler en double coordonnée (i,j) .

$$\text{Noeud 1 : } -4u_1 + u_2 + u_4 = 0 \quad (3.16)$$

Les noeuds à gauche et en bas correspondent aux conditions de Dirichlet nulles.

$$\text{Noeud 2 : } u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 = 0 \quad (3.17)$$

$$\text{Noeud 3 : } u_2 - 4u_3 + g_1 + u_6 = 0 \quad (3.18)$$

le noeud à droite correspond à la condition de Dirichlet égale à g_1

$$\text{Noeud 4 : } u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 = 0 \quad (3.19)$$

$$\text{Noeud 5 : } u_4 + u_2 - 4u_5 + u_6 + u_8 = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{Noeud 6 : } u_5 + u_3 - 4u_6 + g_1 + u_9 = 0 \quad (3.21)$$

$$\text{Noeud 7 : } u_4 - 4u_7 + u_8 + g_2 = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{Noeud 8 : } u_7 + u_5 - 4u_8 + u_9 + g_2 = 0 \quad (3.23)$$

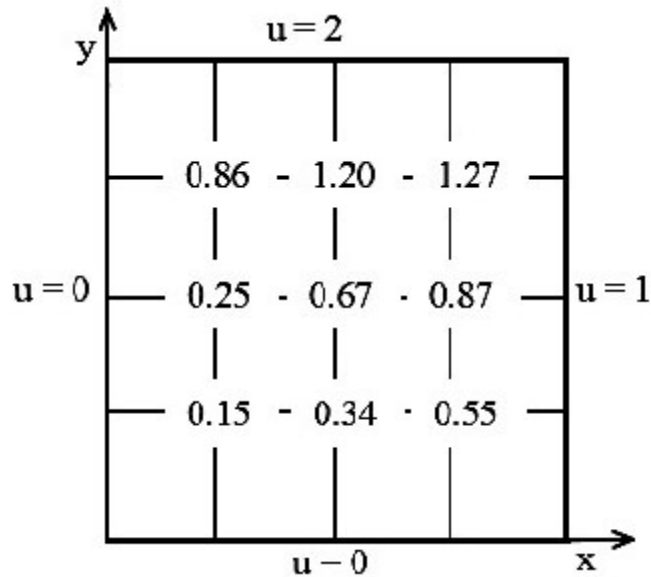
$$\text{Noeud 9 : } u_8 + u_6 - 4u_9 + g_1 + g_2 = 0 \quad (3.24)$$

On représente généralement ce système d'équations sous forme matricielle, ce qui permet de bien choisir ensuite la méthode de résolution qui sera adoptée. Ici, la première ligne sert à bien repérer les colonnes, sachant que l'absence d'une valeur dans la matrice carrée correspond à zéro.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & \\
 -4 & 1 & & 1 & & & & & & \\
 1 & -4 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & -4 & & & 1 & & & & \\
 1 & & & -4 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & -4 & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 1 & -4 & & & 1 & \\
 & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 & -4 &
 \end{array} \right)
 \begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -g_1 \\
 0 \\
 0 \\
 -g_1 \\
 -g_2 \\
 -g_2 \\
 -g_1 - g_2
 \end{pmatrix}
 \quad (3.25)$$

d- Résolution du système d'équations

Avec $g_1 = 1, g_2 = 2$. La résolution de ce système par la méthode d'élimination de Gauss donne :

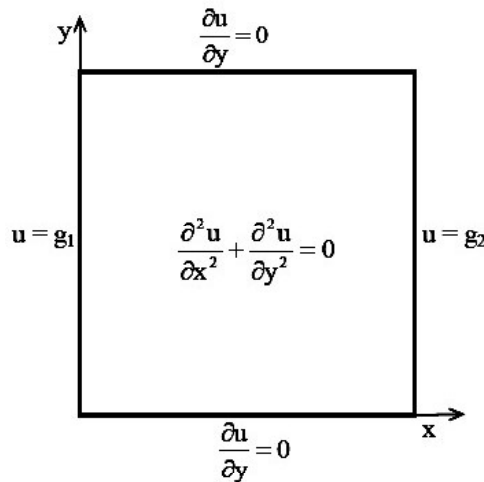


Un maillage plus fin permettrait d'obtenir une meilleure précision (mais avec plus d'équations à résoudre).

3.3.1. Cas de conditions de Neumann homogènes.

On considère le même problème que précédemment: un domaine carré, donc 2 dimensions

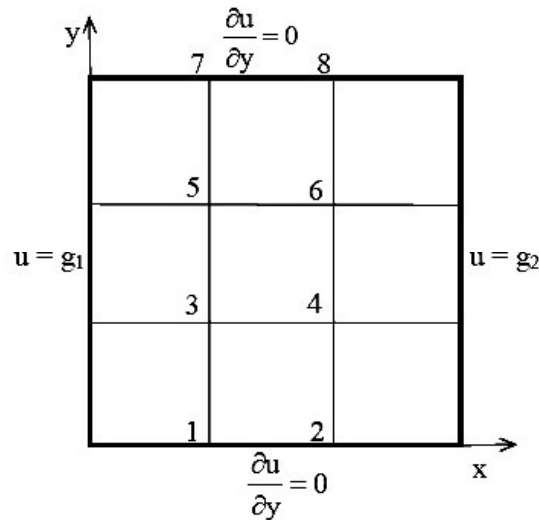
d'espace, où on veut résoudre le problème suivant: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.



Les conditions limites sont de type Dirichlet à droite et à gauche, telles que décrites sur le schéma ci-contre, et de type Neumann homogène (c'est-à-dire nulle) en haut et en bas.

a-Discrétisation du domaine d'étude.

Afin de limiter le nombre d'équations à écrire, on adopte le maillage suivant.



Les noeuds inconnus sont numérotés de 1 à 8. S'il n'y a pas de problème pour les noeuds internes 3 à 6, on peut légitimement s'interroger sur les noeuds frontières 1, 2 et 7, 8. En effet, la valeur de la dérivée est connue en ces noeuds, mais en aucun cas la valeur de la fonction. Ce sont donc bien des noeuds inconnus.

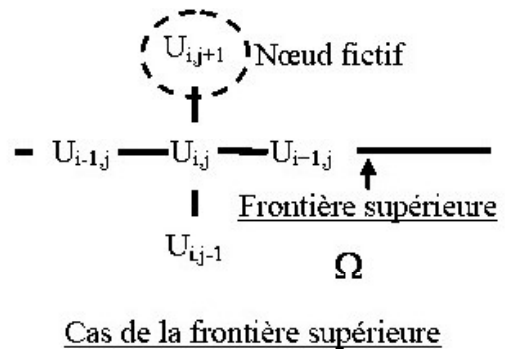
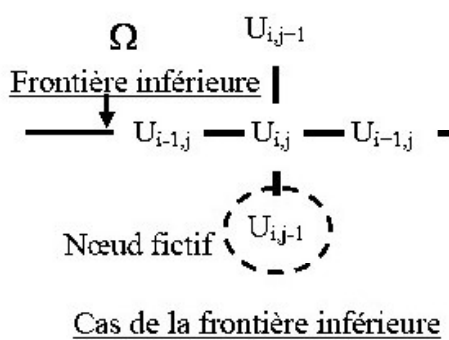
b-Discretisation de l'équation.

On a exactement la même équation que précédemment; elle peut être approximée par l'expression :

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad (3.26)$$

écrite au noeud inconnu u_{ij} .

Ceci introduit une difficulté aux noeuds frontières puisque cette discrétisation de l'équation introduit à chaque fois un noeud en dehors du domaine d'étude, qu'on appelle « **noeud fictif** »



Pour éliminer les noeuds fictifs de la discrétisation, il suffit de prendre en compte la condition de flux sur la frontière en question.

Prenons l'exemple du noeud numéro 1 et nommons le noeud fictif 3'.

- La discrétisation de l'équation au noeud 1 donne :

$$g_1 + u_3, -4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (3.27)$$

- La discrétisation centrée de la condition de flux au noeud 1 s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_3 - u_{3'}}{2h} = 0 \quad \text{Ce qui implique que } u_{3'} = u_3 \quad (3.28)$$

On remplace $u_{3'}$ dans la discrétisation de l'équation :

$$g_1 + u_3 - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad \text{Soit } g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \quad (3.29)$$

Ceci qui permet d'éliminer le noeud fictif de l'équation écrite au noeud 1.

Remarquons que cette discrétisation vérifie simultanément l'équation et la condition limite.

On obtient donc 3 formes différentes de discrétisation selon la position du noeud:

Noeuds frontière supérieure

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \quad \mathbf{-4} \quad \mathbf{-1} \\ | \\ \mathbf{2} \end{array}$$

Noeuds internes

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ | \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{-4} \quad \mathbf{-1} \\ | \\ \mathbf{1} \end{array}$$

Noeuds frontière inférieure

$$\begin{array}{c} \mathbf{2} \\ | \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{-4} \quad \mathbf{-1} \end{array}$$

c-Ecriture du système d'équations.

La mise sous forme matricielle donne:

$$\text{Noeud 1 : } g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \quad (3.30)$$

$$\text{Noeud 2 : } u_1 - 4u_2 + g_2 + 2u_4 = 0 \quad (3.31)$$

$$\text{Noeud 3 : } g_1 + u_1 - 4u_3 + u_4 + u_5 = 0 \quad (3.31)$$

$$\text{Noeud 4 : } u_3 + u_2 - 4u_4 + g_2 + u_6 = 0 \quad (3.32)$$

$$\text{Noeud 5 : } g_1 + u_3 - 4u_5 + u_6 + u_7 = 0 \quad (3.33)$$

$$\text{Noeud 6 : } u_5 + u_4 - 4u_6 + g_2 + u_8 = 0 \quad (3.34)$$

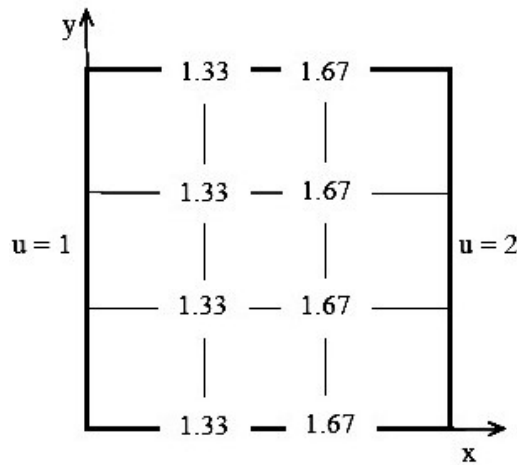
$$\text{Noeud 7 : } g_1 + 2u_5 - 4u_7 + u_8 = 0 \quad (3.35)$$

$$\text{Noeud 8 : } u_7 + 2u_6 - 4u_8 + g_2 = 0 \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} -4 & 1 & 2 & & & \\ 1 & -4 & & 2 & & \\ 1 & & -4 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & -4 & & 1 \\ & & 1 & & -4 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & -4 & \\ & & & & 2 & & -4 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 & -4 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

d-Résolution du système d'équations.

En prenant $g_1 = 1$ et $g_2 = 2$ dans un domaine carré de 1 mètre de côté, nous obtenons la solution:

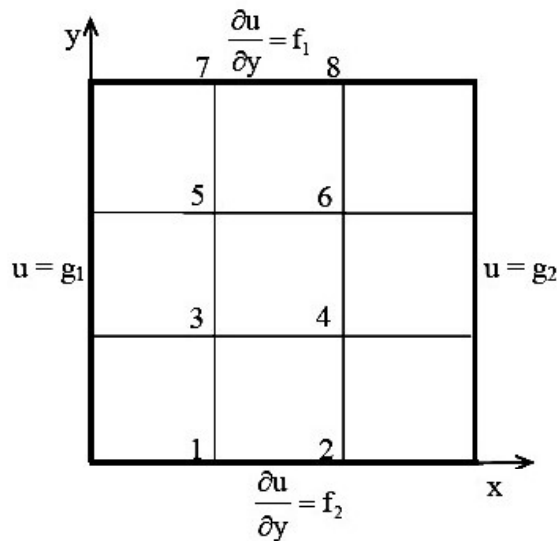


La solution dans cet exemple est un plan entre les valeurs 1 et 2 selon Ox . Ce qui vérifie parfaitement l'équation à résoudre (toutes les dérivées secondes sont nulles, donc leur somme est nulle) et les dérivées premières en y sont nulles.

3.3.2. Cas de conditions de Neumann non homogènes

Il n'y a pas de difficulté particulière, il suffit de suivre la méthode en intégrant la condition de flux non homogène au niveau de la discrétisation.

Prenons comme exemple des conditions de flux égales à f_1 à la frontière supérieure et f_2 à la frontière inférieure.



a-Discretisation du domaine d'étude.

Cette étape est strictement identique à la précédente

b-Discretisation de l'équation.

On a exactement la même équation que précédemment; elle peut être approximée par l'expression :

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad \text{écrite au noeud inconnu } u_{ij} \quad (3.38)$$

Comme auparavant, des noeuds fictifs apparaissent; on discrétise donc la condition de flux. Prenons l'exemple du noeud numéro 1 et nommons le noeud fictif 3'.

- La discrétisation de l'équation au noeud 1 donne :

$$g_1 + u_3, -4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (3.39)$$

- La discrétisation centrée de la condition de flux au noeud 1 s'écrit :
-

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_3 - u_{3'}}{2h} = f_2$$

Ce qui implique que $u_{3'} = u_3 - 2hf_2$.

On remplace $u_{3'}$ dans la discrétisation de l'équation :

$$g_1 + u_3 - 2hf_2 - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad \text{soit} \quad g_1 - 2hf_2 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \quad (3.40)$$

c-Ecriture du système d'équations.

La mise sous forme matricielle donne:

$$\text{Noeud 1: } g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 2hf_2 \quad (3.41)$$

$$\text{Noeud 2: } u_1 - 4u_2 + g_2 + 2u_4 = 2hf_2 \quad (3.42)$$

$$\text{Noeud 3: } g_1 + u_1 - 4u_3 + u_4 + u_5 = 0 \quad (3.43)$$

$$\text{Noeud 4: } u_3 + u_2 - 4u_4 + g_2 + u_6 = 0 \quad (3.44)$$

$$\text{Noeud 5: } g_1 + u_3 - 4u_5 + u_6 + u_7 = 0 \quad (3.45)$$

$$\text{Noeud 6: } u_5 + u_4 - 4u_6 + g_2 + u_8 = 0 \quad (3.46)$$

$$\text{Noeud 7: } g_1 + 2u_5 - 4u_7 + u_8 = -2hf_1 \quad (3.47)$$

$$\text{Noeud 8: } u_7 + 2u_6 - 4u_8 + g_2 = -2hf_1 \quad (3.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} -4 & 1 & 2 & & & \\ 1 & -4 & & 2 & & \\ 1 & & -4 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & -4 & & 1 \\ & & 1 & & -4 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & -4 & & 1 \\ & & & & 2 & & -4 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 & -4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 2hf_2 & -g_1 \\ 2hf_2 & -g_2 \\ -g_1 & \\ -g_2 & \\ -g_1 & \\ -g_2 & \\ -2hf_1 & -g_1 \\ -2hf_1 & -g_2 \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

3.4 Cas d'un domaine non rectangulaire

On va voir qu'il faut être prudent pour discrétiser l'opérateur près du bord d'un domaine non rectangulaire. Nous décrivons une première méthode qui semble naturelle, mais qui conduit malheureusement à une perte de l'ordre de consistance. Nous verrons ensuite une autre méthode par interpolation, qui fournit quant à elle un meilleur ordre de consistance. Pour fixer les idées, on considère le cas du Laplacien. On choisit un pas de discrétisation uniforme avec $h = h_x = h_y$ et on note :

$$S_h = \{(ih, jh), i, j \in \mathbf{Z}\}, \quad (3.50)$$

un maillage uniforme de \mathbb{R}^2 tout entier. On définit alors le maillage intérieur

$$\Omega_h = S_h \cap \Omega \quad (3.51)$$

et on note

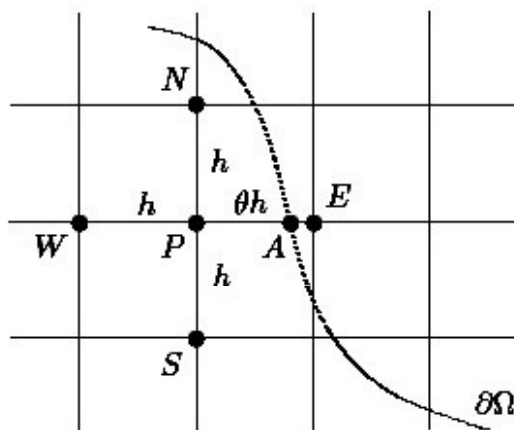
$$\overline{\Omega}_h = S_h \cap \overline{\Omega}. \quad (3.52)$$

Ces définitions coïncident avec celles données dans le cadre d'un domaine rectangulaire. Enfin, on désigne par *voisins* d'un point P du maillage S_h , les points du maillage S_h ayant même abscisse ou même ordonnée que P et situés à une distance h de P .

Première (mauvaise) méthode.

Pour un point P du maillage Ω_h **qui n'est pas près du bord** (c'est-à-dire dont les 4 voisins W, N, S, E situés à une distance h de P sont dans $\overline{\Omega}_h$), on utilise le schéma à 5 points standard (3.13).

Pour un point P du maillage Ω_h **qui est près du bord** (c'est-à-dire dont au moins un voisin n'est pas dans $\overline{\Omega}_h$), on procède de la façon suivante. Supposons pour fixer les idées, que W, N, S soient dans $\overline{\Omega}_h$ mais que $E \notin \overline{\Omega}_h$ (voir la figure). On considère alors le point A d'intersection du bord $\partial\Omega$ avec le segment PE et on note θh la distance de A à P ($0 < \theta < 1$).



-Cas d'un domaine non-rectangulaire.

Par développement de Taylor, on a :

$$u(A) = u(P) + \theta h \frac{\partial u}{\partial x}(P) + \frac{(\theta h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) + \frac{(\theta h)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(P) + O(h^4), \quad (3.53)$$

$$u(W) = u(P) - h \frac{\partial u}{\partial x}(P) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(P) + O(h^4). \quad (3.54)$$

En éliminant $(\frac{\partial u}{\partial x})(P)$ dans les deux équations précédentes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) = \frac{2}{h^2} \left(\frac{u(A)}{\theta(1+\theta)} + \frac{u(W)}{1+\theta} - \frac{u(P)}{\theta} \right) + (1-\theta) \frac{h}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(P) + O(h^2). \quad (3.55)$$

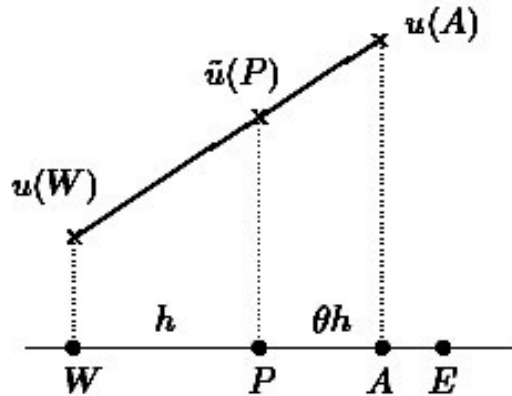
Si on considère l'approximation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) \approx \frac{2}{h^2} \left(\frac{u(A)}{\theta(1+\theta)} + \frac{u(W)}{1+\theta} - \frac{u(P)}{\theta} \right), \quad (3.56)$$

pour un point P **près du bord**, on voit qu'on obtient un ordre de consistance en $O(h)$, là où on avait un ordre $O(h^2)$ avec le schéma standard à 5 points (pour un point P loin du bord). Cette méthode est donc à éviter.

Deuxième (bonne) méthode.

On utilise les formules standard (schéma à 5 points de (3.13)) pour les points P entourés par des points intérieurs. Pour les autres points proches du bord, on procède par **interpolation linéaire**. On détermine une valeur $\tilde{u}(P)$ par interpolation linéaire de u entre W et A , selon la direction WE (voir la figure).



Interpolation linéaire en un point P près du bord.

Plus précisément, on a : $\frac{u(A)-u(W)}{(1+\theta)h} = \frac{\tilde{u}(P)-u(W)}{h}$, ce qui donne :

$$\tilde{u}(P) = \frac{u(A) + \theta u(W)}{1 + \theta}. \quad (3.57)$$

Par ailleurs, en utilisant les développements de Taylor (3.53) et (3.54), on obtient

$$u(P) = \tilde{u}(P) - \theta \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) + O(h^3) \quad (3.58)$$

Si on considère l'approximation $u(P) \approx \tilde{u}(P) = \frac{u(A) + \theta u(W)}{1 + \theta}$ pour un point P **près du bord**, on voit qu'on obtient un ordre de consistance en $O(h^2)$. On conserve ainsi l'ordre du schéma standard à 5 points.

Exercices

Ex 1 : On considère le problème suivant :

$$(1) \begin{cases} u''(x) - u(x) = 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

1)- Calculer la fonction u de classe C^2 qui vérifie l'équation différentielle (1).

2) On souhaite approcher la solution du problème (1) à l'aide d'une méthode de différences finies. On se donne un maillage uniforme du segment $[0, 1]$ constitué des points

uniformément espacés $h = \frac{1}{3}$.

(a) Montrer que le schéma aux différences finies peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $AU = F$, où A est une matrice carrée de taille 3×3 et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq 3}$. On écrira précisément la matrice A et le second membre F (Utiliser les différences finies :

i) en arrière (à gauche) pour approché u'

ii) centré arrière pour approché u'').

(b) Résoudre (1) pour les deux cas (i et ii).

(c) Comparer la solution exacte avec la solution numérique. Conclure.?

Ex 2 : Ecrire le système linéaire obtenu lorsqu'on discrétise le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{si } 0 < x, y < 3 \\ u(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = x^3 \\ u(3, y) = 27y - 9y^2 \\ u(x, 3) = x^3 - 27x \end{cases}$$

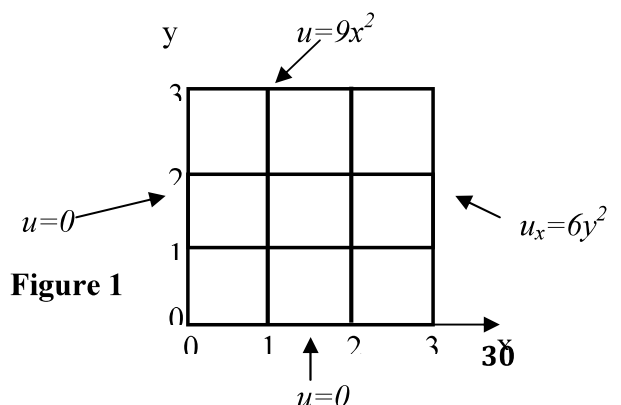
par différences finies avec un pas uniforme $h = \frac{1}{N} = 1$ dans les deux directions d'espace.

Estimer les résultats obtenus, si la solution exacte est : $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

Ex 3: Considérons le problème aux limites mixtes pour l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta u = 2x^2 + 2y^2$$

Cette équation étant vérifiée dans la région et avec les conditions aux limites présentées dans la figure 1 (utiliser le maillage $h=k=1$ proposé dans la même figure)



Écrire (sans le résoudre) le système matriciel qui permet de résoudre ce problème.

Ex 4: Trouver le système d'équations aux points du maillage pour le problème stationnaire ($u_{xx} + u_{yy} = 0$). Résoudre le système obtenu.

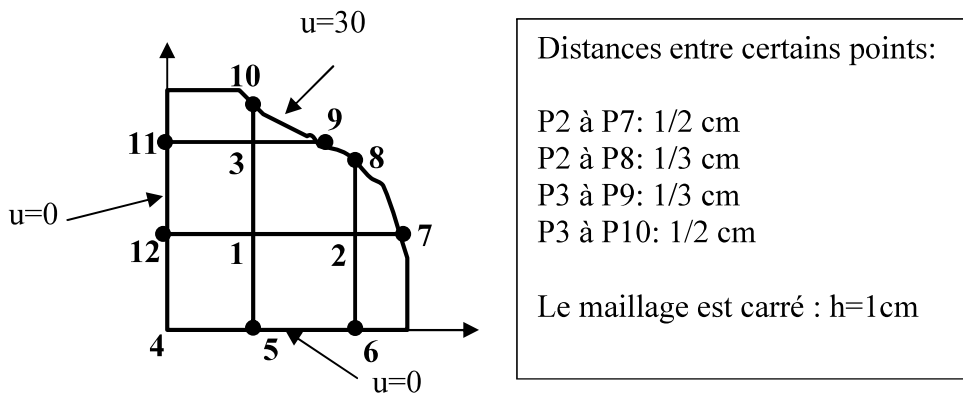


Figure 2

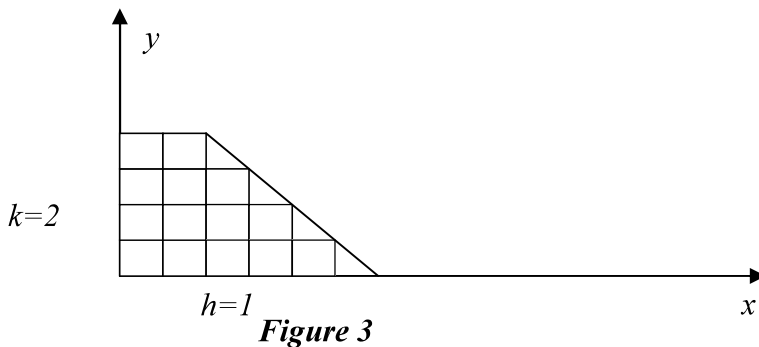
Ex 5 : Appliquer la méthode des différences finies au problème hyperbolique suivant pour $u(x, y)$:

$$u_{yy} = c^2 u_{xx}$$

Conditions initiales : $u(x, 0) = f(x)$ $u_y(x, 0) = g(x)$

Conditions limites : $u = 0$ aux frontières gauche et droite dans le domaine suivant (figure 3):

(utiliser le maillage $h=1$ et $k=2$ ci-dessous)



Approximation d'un problème parabolique par la méthode des différences finies

4.1. Problème modèle

On considère le problème modèle de l'équation de la diffusion 1D :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T & (4.1) \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, & (4.2) \text{ Condition initiale} \\ u(0,t) = g_1(t), & 0 \leq t \leq T, & (4.3) \text{ Condition aux limites de Dirichlet} \\ u(L,t) = g_2(t), & 0 \leq t \leq T, & (4.4) \text{ Condition aux limites de Dirichlet} \end{cases}$$

avec f , g_1 et g_2 sont des constantes données. On suppose que le problème (P) admet une unique solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Supposons qu'on travaille entre 0 et L en Ox, on obtient un domaine non borné en temps si on cherche à dessiner le domaine où on doit résoudre l'équation.

En effet, on commence à étudier le phénomène à $t = t_0$, mais il n'y a pas de frontière pour $t > 0$ (en tous cas, on ne peut pas écrire de condition limite à un temps $t_1 > t_0$ car cela n'a pas de sens physique).

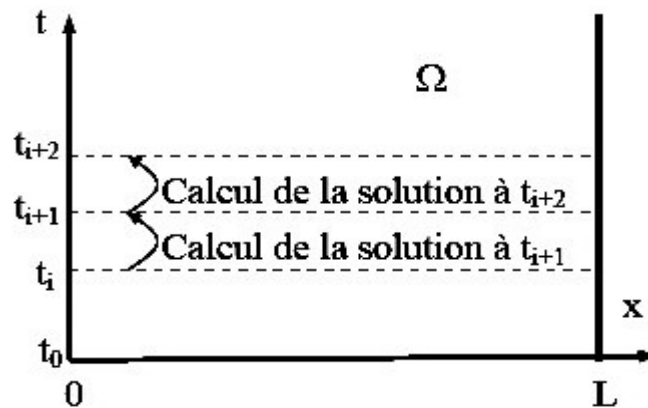


FIGURE 4. 1.

Dans un tel cas, le principe de la méthode consiste, connaissant la solution à un pas de temps t_i à calculer la solution au pas de temps t_{i+1} , puis connaissant cette solution à t_{i+1} , on calcule celle à t_{i+2} et ainsi de suite jusqu'au moment où on décide d'arrêter les calculs.

On procède donc pas de temps par pas de la condition initiale (à t_0).

4.2. Les schémas types.

4.2.1 Discrétisation du domaine d'étude.

Pour deux entiers M et N données, on discrétise de façon uniforme les intervalles d'espace $[0, L]$ et de temps $[0, T]$ en introduisant les points $x_j = jh, j = 0, \dots, M+1, t_n = n\Delta t, n = 0, \dots, N$.

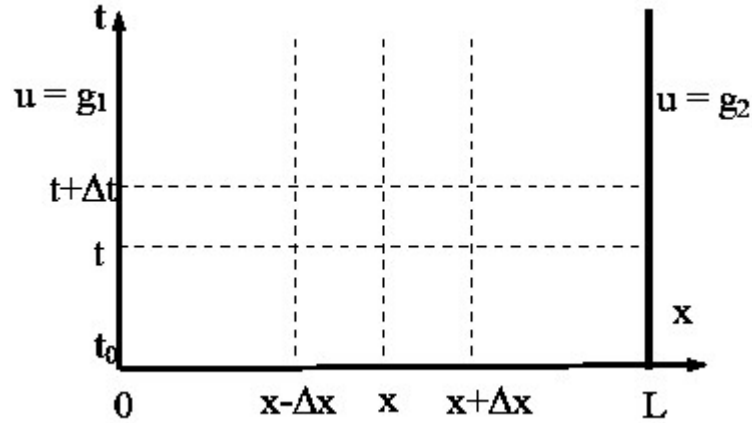


FIGURE 4. 2.

où h est le pas de discrétisation en espace donné par $h = \frac{1}{M+1}$ et $\Delta t = k$ est le pas de

discrétisation en temps avec $\Delta t = \frac{T}{N}$. On introduit enfin les points

$$u_j^n = (x_j, t_n) \quad (4.5)$$

pour $j = 0, \dots, M+1$ et $n = 0, \dots, N$, qui définissent un maillage du domaine spatio-temporel $\bar{\Omega}$ et qu'on appellera *noeuds* du maillage.

4.2.2 Discrétisation de l'équation

On cherche alors une approximation $u_j^n = (x_j, t_n)$ de la solution exacte aux noeuds $x_{j,n}$, en discrétisant la dérivée en espace par un schéma en avant au temps t_n et la dérivée en temps par un schéma décentré progressif (la différence centrée est pourtant plus précise et pas considérée ici car elle coïncide à un schéma instable), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad O(\Delta t) = \frac{-\Delta t}{2} u''(\xi), \quad t_n < \xi < t_n + \Delta t \\ &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \\ &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'équation (4.1) s'écrit alors :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2, k) \quad (4.8)$$

En trouvant l'erreur et en réarrangeant, le problème approché consiste alors à trouver u_j^n pour $j = 0, \dots, M+1$, $n = 0, \dots, N$ telle que :

$$u_j^{n+1} = ru_{j+1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j-1}^n, \quad (4.9)$$

$$u_0^n = g_1$$

$$u_{M+1}^n = g_2$$

$$u_j^0 = f(x_j)$$

avec

$$r = \frac{k}{h^2}.$$

Définition.

- Un schéma aux différences finies est **explicite** si on peut écrire u_j^{n+1} comme combinaison linéaire finie des u_j^n pour $n \leq N$.
- Le schéma est dit **implicite** si d'autres valeurs de u sont nécessaires (p.ex. $u_{j\pm 1}^{n+1}$).
- schéma aux différences finies est à **un pas de temps** s'il utilise les valeurs de u à deux instants seulement, par exemple en t_n et t_{n+1} .
- Le schéma est à **pas multiples** si la valeur de u à plus de deux instants intervient.

Remarque.

Un schéma à un pas construit $(u_j^n)_j$, pour tout $n \geq 1$, à partir des conditions initiales $u_j^0 = f(x_j)$. Pour initialiser un schéma à J pas, les u_j^0 ne sont pas suffisants, il faut fournir $(u_j^n)_j$ pour J instants.

Le schéma (4.9) est explicite dans la mesure où l'on calcule u_j^{n+1} directement à partir de u_j^n

La figure 4.3 indique les valeurs nécessaires au calcul de u_j^n en un noeud P_j^n donné. Ceci définit le *cône* de dépendance numérique du schéma d'Euler explicite.

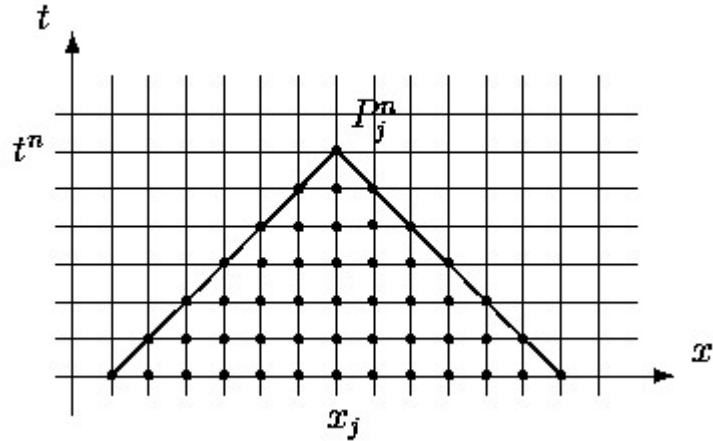


FIGURE 4. 3. Cône de dépendance numérique du schéma d'Euler explicite.

On peut écrire le problème approché sous forme matricielle en regroupant les inconnues dans un vecteur $u^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T$. Le problème approché s'écrit alors :

$$u^{n+1} = (I_d - rA)u^n + rb \quad (4.10)$$

avec $b = (g_1, 0, \dots, 0, g_2)^T \in \mathbb{R}^M$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M,M}$$

Convergence.

On pose $e_j^n = u(jh, nk) - u_j^n$. En supposant la solution exacte u suffisamment régulière, l'erreur de consistance donne, pour $j = 1, \dots, M$:

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{k} = \frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{h^2} + O(k + h^2) \quad (4.11)$$

AVEC $e_0^n = g_1 - g_1 = 0$ ET $e_{M+1}^n = g_2 - g_2 = 0$. Matriciellement en posant $e^n = (e_1^n, \dots, e_M^n)$, on obtient :

$$e^{n+1} = Me^n + k O(k + h^2) \quad (4.12)$$

Pour $r \leq \frac{1}{2}$, on montre que, pour tout $n = 0, \dots, N$,

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + TO(k + h^2). \quad (4.13)$$

Puisque $e^0 = 0$, on a :

$$\|e^n\|_\infty = O(k + h^2) \text{ si } r \leq 1/2 \quad (4.14)$$

Conclusion. Le schéma d'Euler explicite est simple (pas de système linéaire à résoudre) mais il y a une condition de stabilité à respecter, ce qui limite le pas de temps pour un pas h donné.

Schéma d'Euler implicite.

En écrivant les deux membre de (4.1) à l'instant t_{n+1} où la solution n'est pas connue, ce qui donne :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \quad (4.15)$$

En notant $r = \frac{k}{h^2}$, le problème approché consiste alors à trouver u_j^n pour $j = 0, \dots, M+1$ et $n = 0, \dots, N$ telle que :

$$u_j^n = -ru_{j+1}^{n+1} + (1 + 2r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1}, \quad (4.16)$$

avec les conditions limites $u_0^n = g_1$, $u_{M+1}^n = g_2$ et la donnée initiale $u_j^0 = f(x_j)$.

A chaque étape il faut résoudre un système tridiagonal pour obtenir u_j^{n+1} à partir de u_j^n .

En regroupant les inconnues dans les vecteurs $u^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T$, le système précédent s'écrit sous forme matricielle :

$$Mu^{n+1} = u^n + r (g_1, 0, \dots, 0, g_2)^T \quad (4.17)$$

La matrice $M = I_d + rA$ est à diagonale strictement dominante donc définie positive; de plus elle est indépendante du temps. On effectue ainsi une décomposition de Choleski (CC^T) de la matrice M , une fois pour toute.

Conclusion. Le schéma d'Euler implicite nécessite la résolution d'un système linéaire (contrairement au schéma explicite) mais il est inconditionnellement stable. Il n'y a pas de restriction sur les pas de temps et d'espace. On peut prendre ainsi des pas de temps assez grands.

Schéma de Crank-Nicholson (1947)

La méthode Crank-Nicholson, appelée aussi méthode semi implicite, se base sur le principe de la méthode implicite.

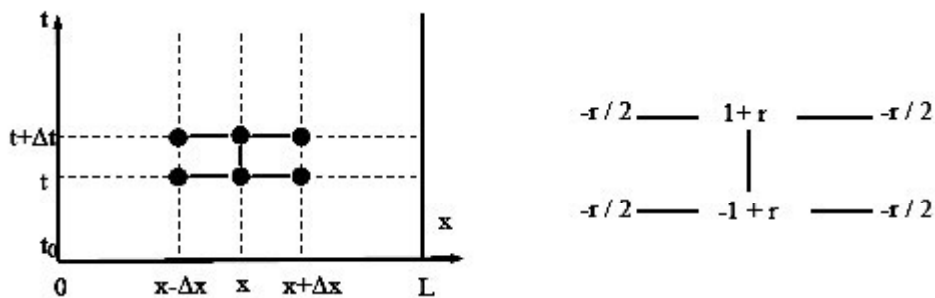


FIGURE 4. 4. Schéma de Crank-Nicholson

Le schéma numérique est une combinaison des méthodes explicite et implicite. On évalue la moyenne des dérivées secondes de l'équation parabolique par rapport à x en n et $n+1$, on a :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) \quad (4.18)$$

En posant $r = \frac{\Delta t}{h^2}$, le problème approché consiste alors à trouver u_j^n pour $j = 0, \dots, M+1$ et $n = 0, \dots, N$ telle que :

$$-ru_{j+1}^{n+1} + 2(1+r)u_j^{n+1} + ru_{j-1}^{n+1} = -ru_{j-1}^n - 2(1-r)u_j^n - ru_{j+1}^n \quad (4.19)$$

pour $j = 0, \dots, M+1$ et avec les conditions aux limites $u_0^n = g_1$, $u_{M+1}^n = g_2$ et la condition initiale $u_j^0 = f(x_j)$. En regroupant les inconnues dans les vecteurs $u^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^T$, le système précédent s'écrit sous forme matricielle :

$$(I_d + rA)u^{n+1} = (I_d - rA)u^n + r(g_1, 0, \dots, 0, g_2)^T \quad (4.20)$$

La matrice $(I_d + rA)$ est symétrique définie positive.

Conclusion. Le schéma de Crank-Nicholson est un schéma précis en temps (ordre 2) qui est inconditionnellement L^2 -stable mais qui est L^∞ -stable sous la condition $r \leq 1$.

4.2.3 θ -schéma pour l'équation de la chaleur.

Il s'agit d'une généralisation des schémas précédents. Avec $0 \leq \theta \leq 1$, ce schéma s'écrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \left(\theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Sous forme matricielle, le système correspondant s'écrit :

$$(I_d + \theta rA)u^{n+1} = (I_d - (1-\theta)rA)u^n + r(g_1, 0, \dots, 0, g_2)^T \quad (4.22)$$

Cas particuliers. $\theta = 0 \rightarrow$ Euler explicite.

$\theta = 1 \rightarrow$ Euler implicite

$\theta = 1/2 \rightarrow$ Crank-Nicholson

Consistance.

L'erreur de consistance est en $O(\Delta t + h^2)$ si $\theta \neq 1/2$ et en $O((\Delta t)^2 + h^2)$ si $\theta = 1/2$.

Stabilité.

- i) Pour $0 \leq \theta \leq 1/2$, le schéma est L^2 -stable (et stable au sens de Von Neumann) si $r \leq \frac{1}{2-4\theta}$.
- ii) Pour $1/2 \leq \theta \leq 1$, le schéma est inconditionnellement L^2 -stable.
- iii) Pour $0 \leq \theta \leq 1$, le schéma est L^∞ -stable si $r \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$.

4.2.4 Autres schémas

★ **Richardson**

Il s'agit d'un schéma centré en temps. Ce schéma s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) \quad (4.23)$$

Ce schéma est toujours instable (exercice)!

★ **Dufort-Frankel (1953)**

Ce schéma s'écrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{h^2} (u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n) \quad (4.24)$$

Il s'agit d'un schéma explicite. L'erreur de consistance est en $O((\Delta t)^2 + h^2 + (\frac{\Delta t}{h})^2)$. Par

conséquent, il faut que $\frac{\Delta t}{h} \rightarrow 0$. Pour avoir un schéma d'ordre 2 en h , il faut prendre $\Delta t = O(h^2)$. Ce schéma est inconditionnellement L^2 -stable.

★ **Schéma rétrograde**

Il s'agit d'un schéma implicite qui s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} \right) = \frac{1}{h^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \quad (4.25)$$

L'erreur de consistance est en $O((\Delta t)^2 + h^2)$ et le schéma est inconditionnellement L^2 -stable. Ce schéma est plus stable que celui de Crank-Nicholson au sens suivant : quand $r = \frac{\Delta t}{h^2} \rightarrow +\infty$, le facteur d'amplification ζ du schéma de Crank-Nicholson tend vers -1 alors que celui du schéma rétrograde tend vers 0 .

Exercices

Ex 1 : Les extrémités d'une barre sont maintenues en contact avec des blocs de glace à 0°C. Sachant que l'équation aux dérivées partielles de la température et la distribution initiale de température sont sous forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 2x \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x,0) = 2(1-x) \quad 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Utiliser la méthode explicite pour calculer la température en fonction du temps dans les cas suivants :

- i) $\Delta x = h = \frac{1}{10}, \quad \Delta t = k = \frac{1}{1000}$
- ii) $\Delta x = h = \frac{1}{10}, \quad \Delta t = k = \frac{5}{1000}$
- iii) $\Delta x = h = \frac{1}{10}, \quad \Delta t = k = \frac{1}{100}$

Ex 2 : Résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad x = 0, \quad \forall t \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -u \quad x = 1, \quad \forall t \end{cases}$$

En utilisant la méthode explicite et en appliquant les conditions aux limites par des

différences centrées. Prendre $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ et, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{4}$.

Ex 3 : Même exercice 2 ; sauf qu'il faut utiliser les différences à droite pour approcher la condition aux limites en $x = 0$.

Ex 4 : Résoudre l'exercice 2 par la méthode de Crank-Nicholson. Prendre , $r = 1$ et

$$\Delta x = h = \frac{1}{10}.$$

Chapitre 5

Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

5.1 Résolution de l'équation de transport coefficients constants.

On considère le problème modèle : l'équation dite de convection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

Avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x) \forall x \in \mathcal{R}$.

Elle correspond par exemple à un transport de contaminant en rivière sans diffusion où c est la

vitesse de l'eau et peut s'établir facilement en établissant un bilan de polluant.

5.1.1. Schémas explicites

La dérivée par rapport au temps est toujours discrétisée selon le schéma $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$.

Il y a ensuite différents cas selon la façon de discrétiser la dérivée en espace.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + r(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad (5.2)$$

Le schéma obtenu est nommé **explicite décentré amont**.

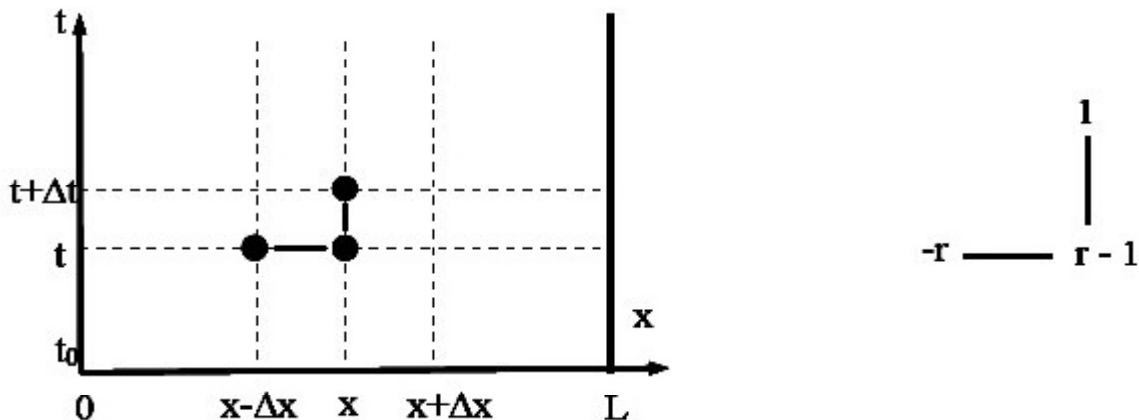


Figure 5.1. Schéma explicite décentré amont

Ce schéma est stable si $c < 0$ et $r \leq 1$, instable si $c > 0$.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$.

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_i^{t+1} - u_i^t + r(u_{i+1}^t - u_i^t) = 0. \quad (5.3)$$

Le schéma obtenu est nommé explicite décentré aval

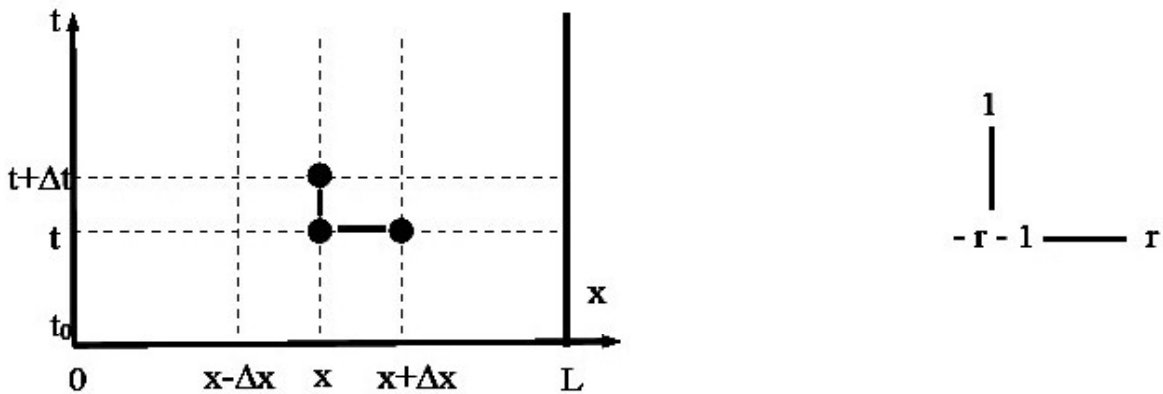


Figure 5.2. Schéma explicite décentré aval

Ce schéma est stable si $c < 0$ et $|r| \leq 1$, instable si $c > 0$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$.

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + r(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad (5.4)$$

Le schéma obtenu est nommé explicite centré.

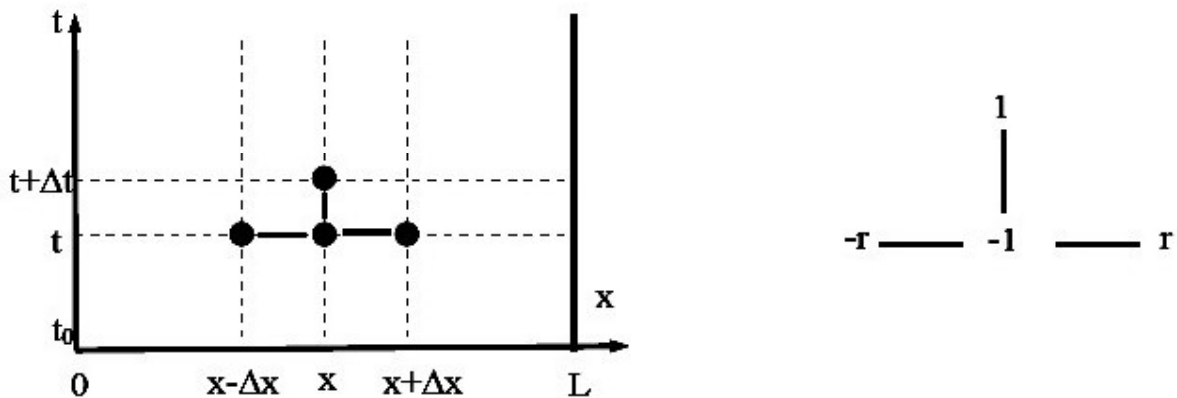


Figure 5.3. Schéma explicite centré

Ce schéma est toujours instable.

5.1.2. Schémas implicites.

La dérivée par rapport au temps est toujours discrétisée selon le schéma $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$

Il y a ensuite différents cas selon la façon de discrétiser la dérivée en espace.

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$.

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + r(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0 . \quad (5.5)$$

Le schéma obtenu est nommé implicite décentré amont.

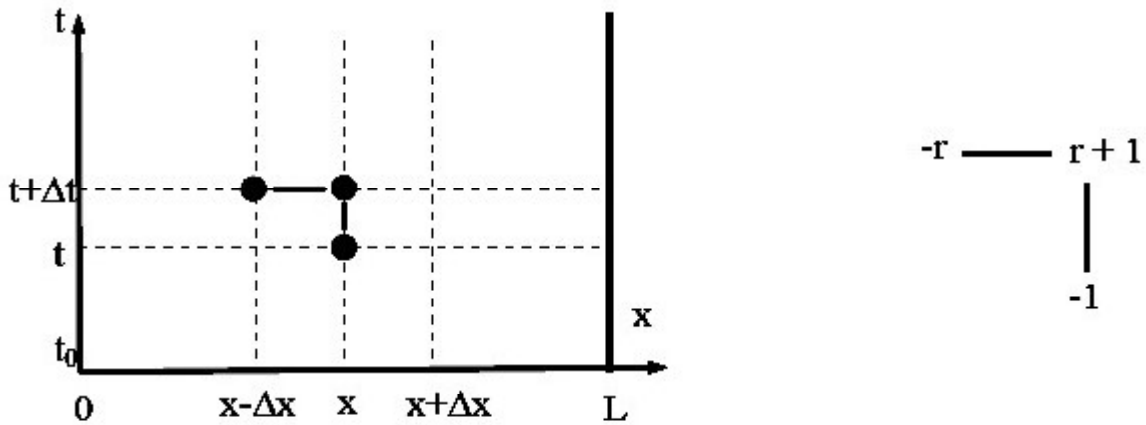


Figure 5.4. Schéma implicite décentré amont

Ce schéma est stable si $c > 0$, instable si $c < 0$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée : $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} = 0$.

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + r(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) = 0 . \quad (5.6)$$

Le schéma obtenu est nommé implicite décentré aval.

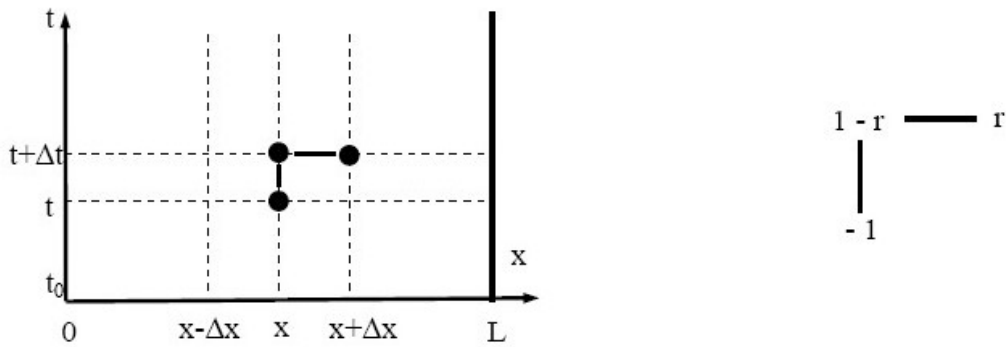


Figure 5.5. Schéma implicite décentré aval

Ce schéma est stable si $c < 0$, instable si $c > 0$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$

Ce qui conduit à l'équation discrétisée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$, nous avons :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{r}{2}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (5.7)$$

Le schéma obtenu est nommé implicite centré.

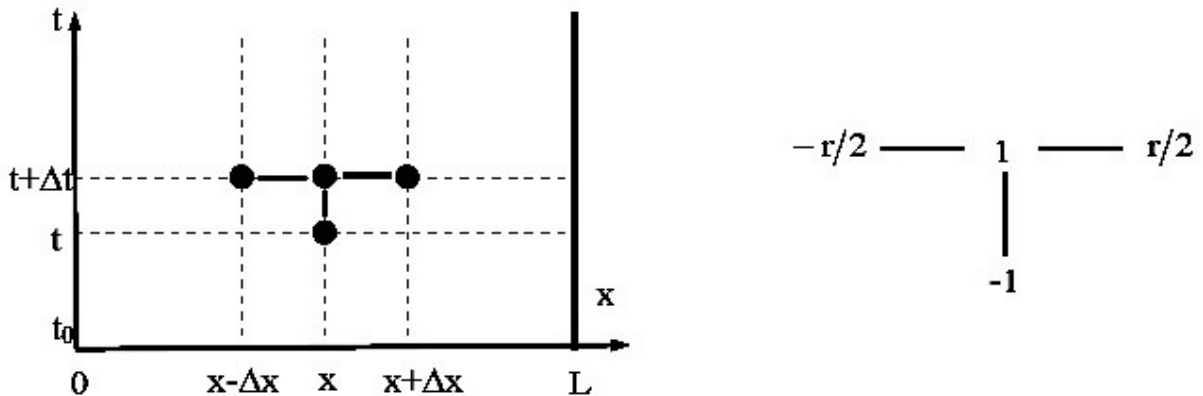


Figure 5.6. Schéma implicite centré

Ce schéma est stable si $|r| \leq 1$.

Approximation de l'équation des ondes en dimension 1.

Soit à résoudre l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (5.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq a & (5.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq a & (5.10) \end{cases}$$

Où c est une constante.

On choisit un maillage de l'espace (x, t) correspondant à des pas $\Delta x = h$ et $\Delta t = k$.
 En supposant $u(x, t)$ connue jusqu'à instant k , la discrétisation par les différences finies centrées au nœud (j, n) donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} \\ &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2}\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}\end{aligned}\quad (5.12)$$

En portant (5.11) et (5.12) dans (5.8), on obtient :

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} &= c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= c^2 \left(\frac{k}{h} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\end{aligned}\quad (5.13)$$

Ou encore, en regroupant les termes :

$$u_j^{n+1} = -u_j^{n-1} + 2(1 - \lambda)u_j^n + \lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \quad (5.14)$$

Où $\lambda = c^2 \left(\frac{h}{k} \right)^2$.

Si u est connue pour tout $x = j\Delta x$ jusqu'à $t = n\Delta t$, le second membre de (5.14) est connu, ce qui détermine u_j^{n+1} . C'est un schéma explicite qui donne la valeur inconnue u_j^{n+1} à l'étape t_{n+1} en fonction des valeurs connues $u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j-1}^n, u_j^{n-1}$ à l'étape t_n et t_{n-1} comme indiqué sur la figure 5.7.

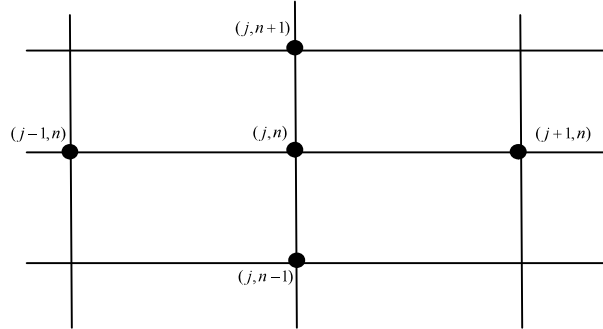


Figure 5.7: schéma explicite centrée pour l'équation des ondes

En mettant $k = 0$ i.e. $t = 0$ dans (5.14), on voit clairement sur la figure 5.7 qu'il est nécessaire de connaître $u_{j,0}$ et $u_{j,-1}$.

$u_{j,0}$ est obtenue de la condition initiale :

$$u_{j,0} = f_j \quad (5.15)$$

Et $u_{j,-1}$ est déterminé par la donnée de la dérivée à $t = 0$.

En approchant cette dérivée par les différences finies centrées, nous avons :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,0} = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\Delta t} \quad (5.16)$$

L'équation (5.14) écrite en $k = 0$ deviennent alors, en tenant compte des condition (5.15) et (5.16) :

$$\begin{cases} u_j^1 = -u_j^{-1} + 2(1-\lambda)f_j + \lambda(f_{j+1} + f_{j-1}) \\ 2\Delta t g_j = u_j^1 - u_j^{-1} \end{cases} \quad (5.17)$$

L'élimination de u_j^1 entre ces deux équations donne u_j^{-1} pour tout j . On pourra alors calculer facilement u_j^1 par la première équation de (5.17). il suffit de mettre $j = 1, \dots, m$. Ayant calculé les valeurs aux nœuds $(j, 1)$, nous passons ensuite aux nœuds $(j, 2)$. Pour cela, il faut applique l'équation (5.14) en $k = 1$; on voit alors que u_j^2 ne peut être déterminer que pour $j = 2, \dots, m-1$. De même pour les nœuds $(j, 3)$, u_j^3 peut être déterminer seulement pour $j = 3, \dots, m-2$ et ainsi de suite, de sorte que le domaine où u peut être déterminer se rétrécit lorsque $j = 2, \dots, m-1$ croît.

Remarque.

La solution ne peut être déterminé complétement (c à d. pour tout $t \geq 0$ et tout x tel que $0 \leq x \leq a$) que si l'on impose des conditions aux limite en $x = 0$ et $x = a$ par exemple :

$$\begin{cases} u(0, t) = H_0(t) \\ u(a, t) = H_a(t) \end{cases}$$

En effet, avec ces conditions on applique (5.14) pour toutes les valeurs de $j (j = 1, \dots, m) \quad \forall k$.

On montre que la solution (5.14) n'est pas stable si $\Delta t > \frac{\Delta x}{c}$. C'est la raison pour la quelle il faut employer les méthodes implicites.

Schéma implicite.

La dérivée par rapport à t approchée comme dans le cas explicite (équation (5.11)), $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n}$

est cependant évaluée en prenant la demi somme des valeurs de cette dérivée en $(n-1)$ et $(n+1)$, on écrit donc :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n-1} \right] \quad (5.18)$$

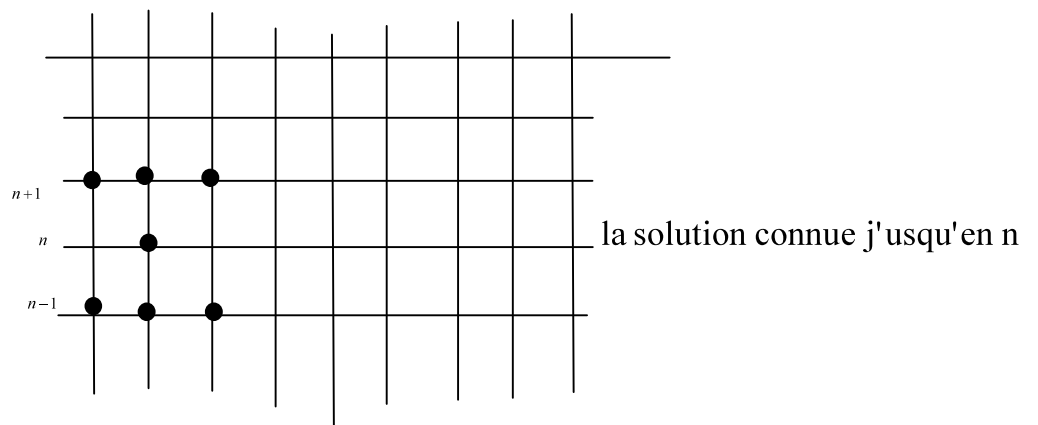


Figure 5.8: schéma implicite centrée pour l'équation des ondes

C'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j,n} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \right] \quad (5.19)$$

En portant (5.18) et (5.11) dans (5.8), il vient :

$$-\frac{\lambda}{2} u_{j+1}^{n+1} + (1 + \lambda) u_j^{n+1} - \frac{\lambda}{2} u_{j-1}^{n+1} = 2 u_j^n + \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^{n-1} - 2 u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \quad (5.20)$$

On obtient un système à matrice tridiagonale qui peut être résolu par double balayage, ou par méthode itérative, à condition de connaître les conditions aux limites, par exemple en $x = 0$ et $x = a$; ceci n'était pas nécessaire dans la méthode explicite.

Remarque.

L'avantage principal de la méthode implicite est qu'elle est stable $\forall \Delta t$; on peut donc utiliser des pas sur le temps plus importants que dans la méthode explicite, ce qui permet de gagner du temps, au prix d'une compulsion mineure des calculs.

Exercices

Ex 1 : La fonction u est solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Et satisfait les conditions initiales : $u(x,0) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$

Et les conditions aux limites : $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $t > 0$

$$u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

En utilisant un maillage rectangulaire défini par $\Delta x = h = \frac{1}{10}$, $\Delta t = k = \frac{1}{1000}$, calculer

une solution par la méthode de différences finies explicite aux points $(0; 0.001)$,

$(0.1; 0.001)$ et $(0.9; 0.001)$ dans le plan $(x; t)$.

Ex 2 : Déterminer, par la méthode implicite, la solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Avec les conditions suivantes :
$$\begin{cases} u(x,0) = 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x,0) = 2(1-x), & 0.5 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Utiliser $\Delta x = h = 0.1$, $\Delta t = k = 0.01$.

Ex 3 : Résoudre l'équation :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad x = 0, \quad \forall t \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -u \quad x = 1, \quad \forall t \end{cases}$$

En utilisant la méthode explicite et en appliquant les conditions aux limites par des

différences centrées. Prendre $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ et, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{4}$.

Ex 4 : Même exercice 3 ; sauf qu'il faut utiliser les différences à droite pour approcher la condition aux limites en $x = 0$.

Ex 5 : Trouver les équations de la méthode de Crank-Nicholson pour le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Satisfaisant la condition initiale : $u(x,0) = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$

et la condition aux limites : $u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$

et les résoudre directement pour au moins deux intervalles de temps. Evaluer la solution analytique correspondante $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ et calculer l'erreur dans la solution numérique.

Chapitre 6

Propriétés des schémas numériques

6.1. Introduction

Nous avons montré dans les chapitres précédents que différents schémas formules pour les mêmes problèmes ne se comportent pas de la même manière. En particulier la stabilité et la précision de la solution ne sont pas les mêmes. Celle-ci sont seulement deux parmi plusieurs propriétés par lesquelles les schémas numériques sont classifiés et caractérisés.

6.2. La démarche : Etude de la consistance et la stabilité

Pour une équation aux dérivées partielles donnée, l'idée est donc de construire une équation discrète où les opérateurs différentiels sont remplacés par des opérateurs d'approximation. La solution continue n'a a priori pas de raison d'être solution de cette équation discrète.

La question qui se pose donc naturellement est de savoir si, pour une équation discrète particulière (on parlera également de schéma) obtenue en utilisant la méthode de différences finies, la solution de l'équation discrète obtenue approche de la solution du problème continu et d'autre part quand il y a convergence, de quantifier la vitesse de convergence.

Cette analyse se fait toujours en deux étapes fondamentales qui seront donc le dénominateur commun de chaque étude de schéma :

- **La consistance** qui correspond à l'erreur d'approximations liées lorsqu'on remplace l'EDP par des différences finies. Il est fondamental de comprendre que, bien que très intuitive en tant que condition nécessaire, la consistance d'une méthode ne suffit pas à obtenir la convergence.
- **La stabilité** qui assure que l'opérateur discret est bien inversible et la norme de son inverse est bornée indépendamment du pas de discrétisation.

On montrera alors que dès qu'un schéma est consistant et stable alors il est convergent, c'est à dire que la solution numérique calculée à partir de ce schéma tend, quand les paramètres de discrétisation tendent vers 0, vers la solution de l'équation aux dérivées partielles initiale.

L'objectif de ce chapitre étant de présenter et d'analyser quelques schémas classiques pour les équations paraboliques et hyperboliques linéaires, nous étudierons donc par différentes approches la consistance et la stabilité des schémas avant d'obtenir le résultat final de convergence.

6.3. Notions sur les erreurs de la méthode

6.3.1. Présentation

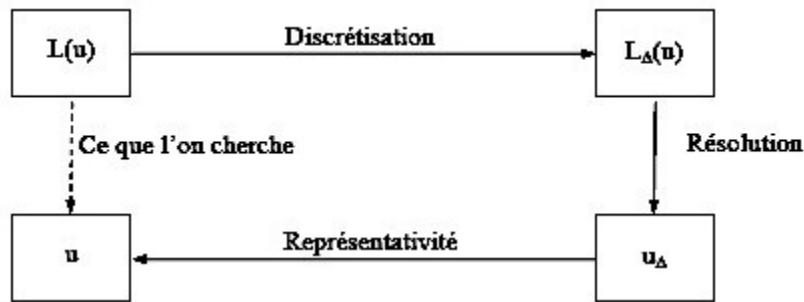
Soit une équation aux dérivées partielles en u notée $L(u) = g$ où L est un opérateur différentiel. Par exemple, dans l'équation de Laplace, L est

l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, et $L(u) = 0$ est alors l'équation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

On peut alors formaliser l'équation discrétisée sous la forme $L_\Delta(u) = g$ où Δ est symboliquement le pas de discrétisation et L_Δ un opérateur algébrique.

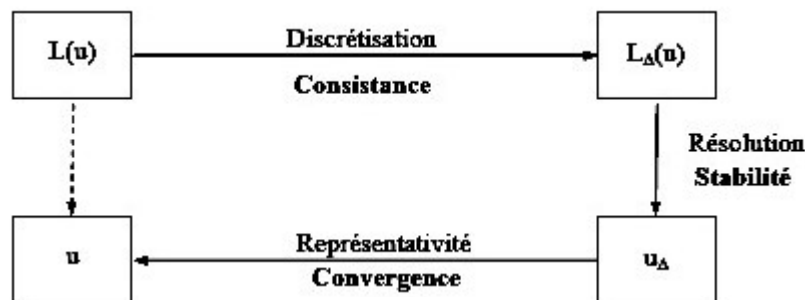
La solution obtenue par la méthode des différences finies peut alors se noter u_Δ , c'est-à-dire

l'approximation de u avec le pas de discrétisation Δ .



On peut étudier les erreurs au niveau des différentes étapes de ce schéma :

- a) La discrétisation est liée à la notion de consistance (ou de cohérence). Un schéma de discrétisation consistant est un schéma qui représente bien l'équation d'origine.
- b) La résolution des équations obtenues est liée à la notion de stabilité de la solution. Une solution u_Δ stable doit vérifier le problème $L_\Delta(u) = g$.
- c) La représentativité de u_Δ est liée à la notion de convergence. u_Δ doit être une approximation convenable de u .
- d)



6.3.2. La consistance

On appelle erreur de troncature la quantité

$$R_\Delta(u) = L_\Delta(u) - L(u)$$

C'est-à-dire concrètement la différence entre le schéma discrétisé et l'équation d'origine.

$L_\Delta(u)$ est dit consistant si $R_\Delta \rightarrow 0$ quand $\Delta \rightarrow 0$

Reprenons l'exemple précédent en posant $L(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et étudions la consistance.

L'opérateur différentiel ``dérivée seconde par rapport à une variable z peut se symboliser

par $L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et l'équation peut alors se représenter par:

$$L(u) = L_x(u) + L_y(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Le développement de Taylor au voisinage de x s'écrit :

$$u(x \pm \Delta x, y) = u(x, y) \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots$$

On en déduit:

$$u(x + \Delta x, y) + u(x - \Delta x, y) = 2u(x, y) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4 \partial^4 u}{12 \partial x^4} + \dots$$

$$\underbrace{\frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}}_{L_{\Delta x}(u)} - \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{L_x(u)} = \underbrace{\frac{\Delta x^2 \partial^4 u}{12 \partial x^4}}_{R_{\Delta x}(u)} + \dots$$

De la même façon, le développement de Taylor au voisinage de y s'écrit :

$$u(x, y \pm \Delta y) = u(x, y) \pm \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dots$$

On aboutit à :

$$\underbrace{\frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}}_{L_{\Delta y}(u)} - \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{L_y(u)} = \underbrace{\frac{\Delta y^2 \partial^4 u}{12 \partial y^4}}_{R_{\Delta y}(u)} + \dots$$

On peut sommer les 2 expressions du dessus:

$$L_{\Delta x}(u) + L_{\Delta y}(u) - L_x(u) - L_y(u) = L_{\Delta}(u) - L(u) = R_{\Delta x}(u) + R_{\Delta y}(u) = R_{\Delta}(u)$$

$$\text{L'erreur de troncature totale est donc } R_{\Delta}(u) = \frac{\Delta x^2 \partial^4 u}{12 \partial x^4} + \frac{\Delta y^2 \partial^4 u}{12 \partial y^4} + K$$

Cette quantité tend vers 0 quand Δx et Δy tendent vers 0. Le schéma de discrétisation est donc consistant.

Considérons maintenant une fonction u dépend du temps et d'une seule variable d'espace x . Notons l'équation aux dérivées partielles régissant u par :

$$L(u) = 0 \quad (6.1) \quad *$$

En remplaçant les dérivées de (6.1) par leurs approximations, nous obtenons le schéma numérique suivante:

$$L_{\Delta}(u) = 0 \quad (6.2)$$

Définition On appelle erreur de consistance à l'instant t_n du schéma (6.2) le vecteur $R_{\Delta}(u)$ de \mathfrak{R}^n .

On dit que le schéma est consistant pour la norme $\|\cdot\|$ de \mathfrak{R}^n si $\sup_{0 \leq n \leq N+1} \|R_{\Delta}(u)^{(n)}\| \rightarrow 0$, quand

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ et } h \rightarrow 0.$$

Si de plus il existe $C > 0$, $p > 0$ et $q > 0$ indépendants de Δt et h tels que :

$$\sup_{0 \leq n \leq N+1} \|R_{\Delta}(u)^{(n)}\| \leq C [(\Delta t)^p + (h)^q] \quad (6.3)$$

on dit que le schéma est consistant d'ordre p en temps et q en espace pour la norme $\|\cdot\|$.

Notons que la limite $\Delta t \rightarrow 0$ correspond à la limite $N \rightarrow +\infty$, et la limite $h \rightarrow 0$ à $M \rightarrow +\infty$.

Exemple.

Etudier l'ordre du schéma aux différences finies suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (6.4)$$

Avec l'équation de transport ($c > 0$) ;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathfrak{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathfrak{R}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. Posons $U_j^n = u(x_j, t_n)$. Un développement de Taylor nous donne :

$$u(x_j, t_{n\pm 1}) = u(x_j, t_n) \pm \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\Delta t^3), \quad (6.6)$$

$$u(x_{j\pm 1}, t_n) = u(x_j, t_n) \pm h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h^3). \quad (6.7)$$

Cela indique que :

$$\varepsilon_j^n = \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = o(\Delta t^2 + h^2), \quad (6.8)$$

ce qui indique que le schéma (6.4) est consistant à l'ordre deux. Lorsque $c \frac{\Delta t}{h} = 1$ le schéma numérique devient :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - u_{j+1}^n + u_{j-1}^n, \quad (6.9)$$

Équation qui est aussi satisfaite par la solution exacte. Dans ce cas particulier, le schéma est consistant à l'ordre infini.

6.3.3. Stabilité.

La notion de stabilité ne s'applique qu'au cas de la discrétisation d'un problème dépendant du temps (problème parabolique ou hyperbolique). Elle s'applique donc à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs (ou perturbations) par le schéma.

Définition.

On dit qu'un schéma est stable si l'erreur de discrétisation est bornée (la solution approchée est bornée) indépendamment du pas du maillage.

6.4. Analyse de la stabilité :

Il existe plusieurs méthodes pour tester la stabilité des schémas numériques. Parmi celle-ci, e La méthode de von-Neumann (ou de Fourier) et la méthode matricielle sont les plus utilisées.

6.4.1 Analyse de Von Neumann

La stabilité au sens faible se fait par l'analyse de Von Neumann. L'EDP est discrétisée et une équation d'évolution pour l'erreur e_j^n . La question est de savoir si cette erreur croît exponentiellement avec le temps ou non. L'analyse de Von Neumann repose sur la sélection d'un mode de Fourier :

$$u_j^n = \phi(ns) e^{i\alpha x} \quad (6.10)$$

où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $x = jh$.

Il s'agit de s'assurer que chaque mode de Fourier de l'erreur décroît de manière monotone dans le temps. Si on note e_j^n l'erreur entre la solution exacte et la solution discrétisée au point de maillage j et au n ème pas de temps, on a :

$$e_j^n = \phi(ns)e^{i\alpha h} \quad (6.11)$$

On définit le gain entre deux pas de temps pour chaque mode de Fourier :

$$\xi(n, j, \alpha) = \frac{\phi((n+1)s)}{\phi(ns)} \quad (6.12)$$

Une condition nécessaire de stabilité du schéma est la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) :

$$|\xi(n, j, \alpha)| \leq 1$$

Exemples.

1-Equation de convection.

Considérons l'équation de convection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.13)$$

-discrétisation explicite schéma spatial centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (6.14)$$

La même équation est vérifiée par l'erreur entre la solution de l'équation aux dérivées partielles et son approximation:

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t} + c \frac{e_{j+1}^n - e_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (6.15)$$

En exprimant la variation du mode de Fourier k de l'erreur entre deux pas de temps comme

$$e_j^{n+1} = \xi e_j^n \quad (6.16)$$

on obtient que

$$\xi = \frac{e_j^{n+1}}{e_j^n} = 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (2i \sin(\alpha\Delta x)) \quad (6.17)$$

Le schéma est inconditionnellement instable puisque $|\xi| > 1$ pour tout c et tout $\alpha\Delta x$.

-discrétisation explicite schéma spatial décentré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (6.18)$$

Le schéma est conditionnellement stable puisque $|\xi| < 1$ si $|c| < 1$.

6.4.2. Analyse de stabilité par la méthode matricielle

La stabilité au sens fort s'étudie de manière globale.

Rappel: On définit la norme de la matrice C comme

$$\|C\| = \text{Max}_u \frac{|Cu|}{|u|} \quad (6.19)$$

On appelle le rayon spectral d'une matrice le module de sa plus grande valeur propre.

$$\rho(C) = \text{Max}_j |\lambda_j| \quad (6.20)$$

Propriété: $\|C\| \geq \rho(C)$.

La méthode de Von Neumann permet de déterminer un critère simple pour la stabilité des schémas numériques relatifs à l'équation donnée. Mais elle n'est pas utilisable si les conditions aux limites ont de l'importance : la perturbation a une évolution périodique, qui n'est pas compatible avec toutes les conditions aux limites. La prise en compte des conditions d'interface entre deux zones de calcul n'est pas possible. La méthode matricielle, qui tient compte de la distribution spatiale de la perturbation, est alors utilisée.

Pour faire ça nous devons écrire les divers schémas numériques sous la forme :

$$AU^{n+1} = BU^n \quad (6.21)$$

Où U^{n+1} est le vecteur de composants U_j^{n+1} , $j = 0, \dots, N_x$ et où les matrices A et B tiennent les conditions aux limites.

Si les valeurs propres de la matrice $M = A^{-1}B$ sont toutes de module inférieur ou égale à 1 ($|\lambda_i| \leq 1, \forall i$), la méthode définie par l'équation (6.21) est stable.

Exemple.

Etudier la stabilité du schéma explicite classique :

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n, \quad j = 1, \dots, N_x - 1. \quad (6.22)$$

Pour lequel la matrice A , de dimension $(N-1) \times (N-1)$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & r & 1-2r & r & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & r & 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & r & 1-2r & r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

où $r \frac{k}{h^2} > 0$.

Supposer que les valeurs aux frontières sont connues (Pb de Dirichlet).

Lemme. L'ensemble des valeurs propres de la matrice B , définie par :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Est donnée par:

$$VP(B) = \left\{ -4 \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)}, i = 1, \dots, N-1 \right\}. \quad (6.25)$$

Démonstration: Les valeurs propres B peuvent se calculer à partir des valeurs propres de l'opérateur continu; on commence donc par chercher u solution de:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Cherchons $u(x)$ sous la forme :

$$u(x) = a \cos \sqrt{\alpha x} + b \sin \sqrt{\alpha x} \quad (6.27)$$

Comme $u(0) = 0$, on $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$. De même, $u(1) = b \sin \sqrt{\alpha} = 0$, et donc $\sqrt{\alpha} = k\pi$. Les valeurs propres et les vecteurs propres associés de l'opérateur continu sont donc $(k^2\pi^2, \sin k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 1, \dots, N$, soit $\mathbf{v}^{(k)} \in \mathfrak{R}^N$ tel que $v_i^{(k)} = \sin k\pi i h$. Calculons $B\mathbf{v}^{(h)}$:

$$(B\mathbf{v}^{(k)})_i = v_{i-1}^{(k)} - 2v_i^{(k)} + v_{i+1}^{(k)} \quad (6.28)$$

et donc

$$(B\mathbf{v}^{(k)})_i = \sin k\pi(i-1)h - 2 \sin k\pi i h + \sin k\pi(i+1)h \quad (6.29)$$

En développant, on obtient:

$$(B\mathbf{v}^{(k)})_i = \sin k\pi i h \cos(-k\pi h) + \cos k\pi i h \sin(-k\pi h) - 2 \sin k\pi i h + \sin k\pi i h \cos k\pi h + \cos k\pi i h \sin k\pi h \quad (6.30)$$

Après simplifications, il vient:

$$(B\mathbf{v}^{(k)})_i = 2 \sin k\pi i h (-1 + \cos k\pi h). \quad (6.31)$$

Or, $\cos k\pi h = 1 - 2 \sin^2(\frac{k\pi h}{2})$. On a donc:

$$\begin{aligned} (B\mathbf{v}^{(k)})_i &= 2 \sin k\pi i h \times (-2 \sin^2 \frac{k\pi h}{2}) \\ &= -4 \sin^2 \frac{k\pi h}{2} (\mathbf{v}^{(k)})_i, \quad \forall k = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.32)$$

On a $h = \frac{1}{N+1}$, et donc les valeurs propres de B s'écrivent $\mu_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}$, $k = 1, \dots, N-1$.

La matrice M peut être réécrite :

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r \left(\begin{array}{cccccccc} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) = I_{N-1} + rB$$

Où I_{N-1} est la matrice unité d'ordre $(N-1) \times (N-1)$ et B est une matrice dont les valeurs propres sont données par :

$$\mu_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (6.33)$$

Ainsi les valeurs propres de M sont alors :

$$\lambda_k = 1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (6.34)$$

Donc le schéma (a) est stable si : $\max_k |1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}| \leq 1$ i.e.

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)} \leq 1, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (6.35)$$

L'inégalité de gauche donne : $r \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{N\pi}{2(N+1)}$, quand $h \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{2} \sin^2 \frac{N\pi}{2(N+1)} \rightarrow 1$

donc $r \leq \frac{1}{2}$.

6.5. Convergence.

Théorème de Lax

Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Exercices

Ex 1 : Trouver la condition de stabilité du schéma de Crank-Nicholson pour un problème de Dirichlet.

Ex 2 : L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est approchée au point (i, h, j, k) par l'équation aux différences

:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} - \frac{u_{i+1,j} - 2(\theta u_{i,j+1} + (1-\theta)u_{i,j-1}) + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Montrer que l'erreur de troncation locale en ce point est

$$\frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (2\theta - 1) \frac{2k}{h^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O\left(\frac{k^3}{h^2}, h^4, k^4\right)$$

Discuter la consistance de ce schéma avec l'E.D.P lorsque : i) $k = r h$ et ii) $k = r h^2$

Où r est une constante positive et θ un paramètre variable.

Ex 3 : L'équation hyperbolique $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est approchée en (i, h, j, k) par le schéma de différence explicite :

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Trouver la condition de stabilité de ce schéma.

Ex 4 :

a) Utiliser la méthode de Fourier pour montrer que le schéma :

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

Est stable pour $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ (approximation explicite à $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$):

b) $u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$ est stable pour toutes les valeurs positives de r .

(Méthode de Richardson).

Ex 5 : On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de transport ($c > 0$) ;

$$c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathfrak{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathfrak{R}. \end{cases} \quad (1)$$

1)- Etudier l'ordre et la stabilité, par la méthode de Fourier, des schémas aux différences finies suivants :

$$d) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

$$e) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3)$$

$$f) \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0. \quad (5)$$

2)- Indiquer les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique des deux derniers schémas.

Ex 6 : Soit u une solution régulière de l'équation de transport (1)

1) Montrer que

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre μ) pour résolution numérique de l'équation du transport:

$$g) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\mu \Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

2)- Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Discuter la précision du schéma lorsque $c\Delta t = h$.

3)- Calculer le coefficient d'amplification du schéma et en déduire sa stabilité sous condition CFL.

Ex7 : Pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $c > 0$, on considère des schémas de différences finies explicites associés à des maillages réguliers de l'espace et du temps $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. On considère le schéma:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \left(\alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \beta \frac{u_{j+2}^n - u_{j-2}^n}{4\Delta x} \right) = 0$$

Déterminez les coefficients α et β pour que le schéma soit d'ordre 2 en temps et 4 en espace.

Bibliographie

- [1] **J. Baranger**. Analyse numérique. Hermann, 1988.
- [2] **J. Beuneu**. Algorithmes pour le calcul scientifique. Cours de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, 1999.
- [3] **N. Champagnat**. Différences finies et analyse numérique matricielle : cours harmonisation en IMAFA. 15 octobre 2010.
- [4] **D. CHRISTIAN**. Cours méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par différences finies et volumes finis. Master map m1 math appliquée ue2 edp2 2010/2011. Université de cergy-pontoise, département de mathématique, 95302, cergy-pontoise, cedex France.
- [5] **F. CRES**. Modélisation Introduction aux équations aux dérivées partielles et leurs résolutions numériques.
- [7] **J.A. Desideri**. Introduction à l'analyse numérique. INRIA, 1998.
- [8] **E. Goncalvès**. Méthodes, analyse et calculs numériques, institut polytechnique de Grenoble, Septembre 2005.
- [9] **M. Granger**. Licence à distance Chapitre V : Equations différentielles. Méthodes numériques à un pas.
- [11] **E. Hairer**. Méthodes numériques. Cours de l'université de Genève, 2004.
- [12] **R. Herbin**, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Master de mathématiques, Université Aix Marseille 1, 3 décembre 2008.
- [13] **C. Hirsch**. Numerical computation of internal and external flows, volume I : fundamentals of numerical discretization. John Wiley & Sons, Chichester, New York, 1986.
- [14] **P. Lascaux and R. Theodor**. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes I et II. Masson, Paris, 1986.
- [15] **V. Legat**. Mathématique et méthodes numériques. Cours de l'université catholique de Louvain, 2004.
- [16] **P. Le Quéré et B. Podvin**. Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles 2010.
- [17] **B. Mohammadi and J.H. Saiaç**. Pratique de la simulation numérique. Dunod, 2003.
- [18] **N. Point and J.H. Saiaç**. Equations aux dérivées partielles - mathématiques et méthodes numériques. Cours de l'ESCPI, 2005.
- [19] **A. Quarteroni**. Analyse numérique. Cours de l'EPFL, 2003.
- [20] **J. Reveillon**. Simulation et modélisation numérique. Cours de l'université de Rouen, 2003.

[21] **Randall J. LeVeque**. Finite Difference Methods for Differential Equations. DRAFT VERSION for use in the course A Math 585-586. University of Washington Version of September, 2005

[22] **J.-F. Scheid**. Méthodes numériques pour la dynamique des fluides, Université de Lorraine Master 2 IMOI. Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques, Option Calcul Scientifique, 2011-2012.

[23] **D. Senechal**. Histoire des sciences. Cours de l'université de Sherbrooke, 2004.

[24] **A.Sophie Bonnet-BenDhia, S. Fliss, P. Joly et P. Moireau**. Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique. April 19, 2011.

[25] **A. Taik**. Cours: Equations aux dérivées partielles méthodes des différences finies. Cours AN3 LST-MI. Département de Mathématiques FST-Mohammedia, (2008).

[26] **P. Viot**. Méthodes d'analyse numériques. Cours de DEA de Jussieu, 2003.