

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ 8 MAI 1945 GUELMA
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE ET TÉLÉCOMMUNICATIONS



Polycopié de
Communications Numériques:
Transmission en bande de base

M1 Télécommunications

Boukharouba Abdelhak

Année Universitaire
2017-2018

Avant-propos

Ce polycopié de cours '*Transmission en bande de base*' est destiné aux étudiants du Master Télécommunications. La structure de ce polycopié est inspirée du livre 'Introduction aux communications numériques' [1] que je vois qu'il est très bien structurés en matière de présentation des cours, enchaînement des idées et formalisme mathématique. On a résumé le cours avec une reformulation mathématique qui permet aux étudiants de comprendre facilement les bases théoriques de cette partie. Les étudiants sont censés les bases en traitement du signal et en processus stochastiques qui sont des pré-requis de la matière communications numériques et en particulier la transmission en bande de base. Cette dernière est intéressante et indispensable avant d'entamer la transmission sur onde porteuse et même pour étudier les techniques avancées en communications numériques telles que le CDMA et l'OFDM car l'évaluation des performances de n'importe quel système de transmission doit être faite en bande de base (calculer du BER, diagramme de l'œil,

Sommaire

Chapitre 1 : Chaîne de transmission numérique	1
1.1 Introduction	2
1.2 La chaîne de transmission numérique	2
1.3 Type des canaux de communication	5
1.3.1 Canal à bruit additif	5
1.3.2 Canal à filtre linéaire	6
1.3.3 Canal non linéaire	6
Chapitre 2 : Transmission en bande de base sur canal idéal	7
2.1 Introduction	8
2.2 Les codes en ligne	8
2.3 Densité spectrale de puissance d'un code en ligne	10
2.4 Quelques exemples des codes en ligne	12
2.4.1 Les codes en ligne à symboles indépendants	12
2.4.2 Les codes en ligne à symboles dépendants	18
Chapitre 3 : Transmission, réception et détection en bande de base sur un canal idéal	22
3.1 Transmission en bande de base sur un canal idéal	23
3.2 Transmission d'un symbole binaire unique sur canal idéal	23
3.3 Calcul de la probabilité d'erreur	25
3.4 Le seuil optimal	26
3.5 La réponse optimale du filtre de réception	28
Chapitre 4 : Transmission en bande de base sur canal à bande limitée	32
4.1 Transmission sur un canal à bande limitée	33
4.2 Transmission d'un suite de symboles de symboles M-AIRES	33
4.3 Interférence entre symboles (IES) – Critère de Nyquist	35
Bibliographie	39

Chapitre 1

Chaine de transmission numérique

1.1 Introduction

Un système de communication numérique transporte de l'information entre un émetteur et un récepteur à travers un canal de transmission qui représente un lien physique comme l'espace libre entre deux antennes, un câble coaxial ou une fibre optique. Les signaux véhiculés peuvent être d'origine numérique comme dans les réseaux de données ou analogique (parole, image...) convertis sous forme numérique.

1.2 La chaîne de transmission numérique

Le schéma synoptique d'une chaîne de transmission numérique est schématisé sur la figure (1.1). Elle est composée de plusieurs éléments essentiels en partant de la source de message jusqu'au destinataire.

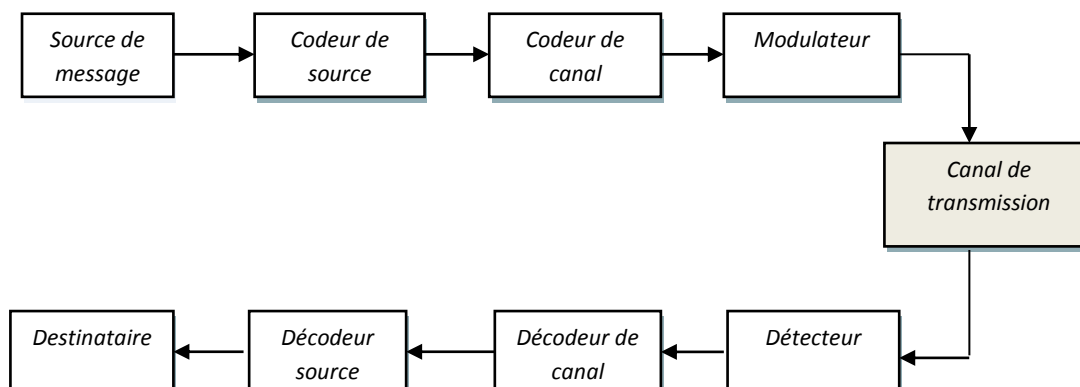


Figure (1.1) : Schéma synoptique d'une chaîne de transmission numérique.

a. La source de message

Pour une transmission numérique, le message à transmettre doit être sous forme numérique. Si le signal à transmettre est analogique (parole ou image,...), il doit être numérisé. L'opération de numérisation d'un signal analogique est composée de trois étapes principales: l'échantillonnage, la quantification et le codage.

b. Le codeur de source :

En transmission numérique, il est nécessaire que les messages à transmettre soient sous forme numérique, c'est-à-dire constitués par une suite de symboles discrets prenant leur valeur dans un alphabet fini. Si les messages sont analogiques, ils doivent être numérisés. Dans le cas des messages binaires, la source est à éléments binaires indépendants et identiquement distribués (iid) sur l'alphabet $\{0,1\}$ avec des probabilités p_0 et p_1 .

Le débit binaire D qui représente le nombre d'éléments binaires émis par unité de temps est défini par :

$$D = \frac{1}{T_b} (\text{bit} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (1.1)$$

L'unité de débit binaire D est le bit par seconde.

La rapidité de modulation R (exprimée en Bauds) est définie comme le nombre de signaux émis par le modulateur par unité de temps :

$$R = \frac{1}{T} (\text{bauds}) \quad (1.2)$$

Où T représente la durée du signal. La rapidité de modulation R peut s'exprimer en fonction du débit binaire D par la relation suivante :

$$R = \frac{D}{\log_2 M} \quad (1.3)$$

c. Le codeur de canal :

Le codage canal consiste à ajouter de la redondance dans le message binaire émis afin de le protéger contre le bruit et les perturbateurs présents sur le canal de transmission par exemple : le codage correcteur d'erreurs

d. Le modulateur :

Pour transmettre un message numérique sous forme d'une suite d'éléments binaires il est donc nécessaire de lui associer une représentation physique, sous forme d'un signal électrique. Cette opération est appelée généralement modulation.

e. Le canal de transmission :

Le canal ou le milieu de transmission représente le lien physique entre l'émetteur et le récepteur ; il est pratiquement constitué par l'un des supports suivants : câble de transmission, un câble coaxial, une fibre optique ou l'espace libre. Le canal de transmission peut inclure aussi le bruit dont les origines sont le milieu de transmission et les dispositifs électroniques nécessaires pour la transmission. Ce bruit est modélisé par une source de bruit $B(t)$ située en amont du récepteur et est considéré comme un processus aléatoire gaussien, à moyenne nulle, stationnaire, indépendant du signal émis et de densité spectrale de puissance bilatérale $\gamma_B(f)$

$$\gamma_B(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \quad (1.4)$$

f. Le détecteur :

Le détecteur a pour fonction de reconstituer le message émis où les valeurs des éléments transmis sont identifiées à partir des échantillons reçus. La décision est binaire ou M-aires et cette opération est dite « détection ».

Les décodeurs canal et source font l'opération inverse des codeurs canal et source.

1.3 Type des canaux de communication

La modélisation du canal de communication décrit le milieu de propagation, qui peut se comporter comme un filtre linéaire, ou présenter des non linéarités; il peut être aussi stationnaire ou variable en fonction du temps.

1.3.1 Canal à bruit additif :

Le modèle mathématique le plus simple d'un canal de communication est le canal à bruit additif où le signal transmis est perturbé par un bruit blanc additif $b(t)$ comme illustré sur la figure (1.2).

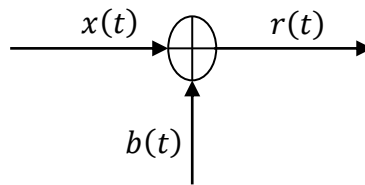


Figure (1.2) : canal à bruit additif.

Le signal à la sortie du canal est donné par :

$$r(t) = x(t) + b(t) \quad (1.5)$$

Une mesure de qualité de transmission est donnée par le rapport signal sur bruit :

$$SNR = \frac{E\{|x(t)|^2\}}{E\{|b(t)|^2\}} \quad (1.6)$$

Ou en décibel :

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} \frac{E\{|x(t)|^2\}}{E\{|b(t)|^2\}} \quad (1.6)$$

1.3.2 Canal à filtre linéaire :

Le modèle du canal à filtre linéaire avec un bruit blanc gaussien additif est représenté par la figure (1.3).

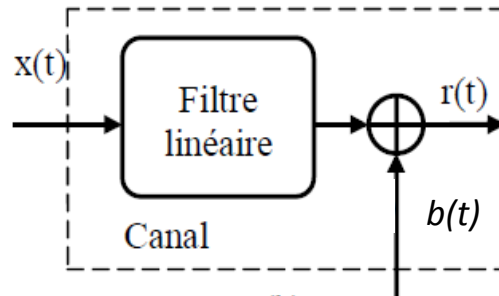


Figure (1.3) : canal à filtre linéaire.

Le signal à la sortie du canal est donné par :

$$r(t) = x(t) * b(t) + b(t) \quad (1.7)$$

$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre et $*$ dénote le produit de convolution:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t - \tau)d\tau + b(t) \quad (1.8)$$

1.3.3 Canal non linéaire

Dans les canaux de communication, la non linéarité est due essentiellement aux amplificateurs de puissance dont les meilleurs rendements sont garantis dans la zone de saturation où l'information transportée par le signal risque d'être dégradée.

Chapitre 2

Transmission en bande de base sur canal idéal

2.1 Introduction

Dans une transmission en bande de base, les symboles à émettre dans le canal de transmission ne module pas une porteuse sinusoïdale. Dans cette partie nous décrivons les codes en ligne utilisés pour la transmission en bande de base, nous allons faire ensuite une évaluation de la transmission sur un canal idéal dont la bande passante est infinie.

L'évaluation et le choix d'un code en ligne se font en fonction de la densité spectrale du code et la résistance au bruit.

2.2 Les codes en ligne

Considérons la transmission d'un message constitué par une suite d'éléments binaires α_k émis aux instants kT_b indépendants et identiquement distribués (i-i-d) sur l'alphabet $\{0,1\}$, avec :

$$p_0 = P_r\{\alpha_k = 0\} \quad \text{et} \quad p_1 = P_r\{\alpha_k = 1\}, \quad \forall k \quad (2.1)$$

L'objectif de codage en ligne est d'associer, à chaque élément binaire α_k du message, un signal $s_i(t)$ de durée T_b choisi parmi un ensemble de deux signaux, en fonction de la valeur de l'élément binaire α_k :

$$s_m(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_b[; \quad m = 0,1 \quad (2.2)$$

L'opération de codage en ligne est la suivante :

Si $\alpha_k = 0$ émission du signal $s_0(t - kT_b)$

Si $\alpha_k = 1$ émission du signal $s_1(t - kT_b)$

Ainsi, le codeur en ligne génère le signal $e(t)$ ayant l'expression suivante :

$$e(t) = \sum_k s_m(t - kT_b); \quad m = 0,1 \quad (2.3)$$

Où l'indice k varie de $-\infty$ à $+\infty$.

La valeur de l'indice m est définie en fonction de l'élément binaire α_k :

$$m = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 0$$

$$m = 1 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 1$$

Pour les codes en ligne, les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ peuvent s'exprimer à partir d'une forme d'onde unique $s(t)$ dont la durée est égale à T_b :

$$e(t) = \sum_k A_m s(t - kT_b); \quad m = 0,1 \quad (2.4)$$

Le signal $e(t)$ s'écrit simplement sous la forme :

$$e(t) = \sum_k a_k s(t - kT_b) \quad (2.5)$$

Où a_k est un élément binaire prenant ses valeurs dans l'alphabet $\{A_0, A_1\}$ avec:

$$a_k = A_0 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 0$$

$$a_k = A_1 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 1$$

Si on généralise en associant à chaque mot de n éléments binaires (n -alphabet) issu du message, un signal $s_m(t)$ de durée $T = nT_b$, choisi parmi $M = 2^n$ signaux, en fonction de la valeur du n -uplet, l'expression du signal $e(t)$ en sortie du codeur est donnée par:

$$e(t) = \sum_k s_m(t - kT) \quad (2.6)$$

$$m = 0, 1, \dots, (M - 1)$$

Les signaux $s_m(t)$ peuvent dans ce cas aussi s'exprimer en fonction d'une forme d'onde unique :

$$s_m(t) = A_m s(t) \quad ; \quad m = 0, 1, \dots, (M - 1) \quad (2.7)$$

Le signal $e(t)$ peut encore s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$e(t) = \sum_k a_k s(t - kT) \quad (2.8)$$

Où les a_k sont des symboles M-aires qui prennent leur valeur dans un alphabet à M éléments $\{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$, L'utilisation de symboles M-aires permet de réduire la rapidité de modulation R à la sortie du codeur en ligne :

$$R = \frac{D}{\log_2 M} \quad (2.9)$$

Où D représente le débit binaire

Les symboles M-aires a_k caractérisant le code en ligne sont également mutuellement indépendants.

2.3 Densité spectrale de puissance d'un code en ligne

D'après l'équation précédente (2.8), le signal $e(t)$ peut être considéré comme la sortie d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est égale à la forme d'onde $s(t)$ et son entrée est le signal $a(t)$ (figure (2.1)).

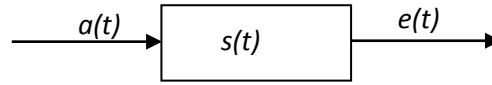


Figure (2.1) : Chronogramme du code NRZ binaire.

La sortie $e(t)$ est donnée par $e(t) = a(t) * s(t)$ et $a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$

Le signe $*$ désigne l'opération de convolution. Comme nous l'avons su, la densité spectrale de puissance, $\gamma_e(f)$ du signal $e(t)$ est donnée par l'expression suivante:

$$\gamma_e(f) = \gamma_a(f) |S(f)|^2 \quad (2.10)$$

Où $S(f) = TF\{s(t)\}$ est la transformée fourrier de la forme d'onde $s(t)$, et $\gamma_a(f)$ est la densité spectrale des symboles qui ne dépend que des propriétés statistiques des symboles a_k et qui a l'expression suivante [1, 2, 3].

$$\gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2\sigma_a^2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} R_a(k) \cos 2\pi k f T + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (2.11)$$

Où m_a , σ_a^2 et $R_a(k)$ désignent respectivement la moyenne, la variance et la fonction d'auto-corrélation normalisée des symboles centrés a_k . En tenant compte du fait que le message numérique est constitué par une suite stationnaire d'éléments binaires a_k , les symboles a_k sont aussi stationnaires et nous avons :

$$m_a = E[a_k] \quad \forall k, \quad \sigma_a^2 = E[(a_k - m_a)^2]$$

$$R_a(k) = \frac{E[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2} \quad \forall n, k$$

La densité spectrale de puissance du signal $e(t)$ a deux parties, une partie continue $\gamma_e^c(f)$:

$$\gamma_e^c(f) = |S(f)|^2 \left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2\sigma_a^2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} R_a(k) \cos(2\pi k f T) \right] \quad (2.12)$$

Et une partie discrète $\gamma_e^d(f)$ avec une série de raies aux fréquences k/T :

$$\gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| S\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (2.13)$$

En fin, remarquons que si l'intégrale de la forme d'onde $s(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ est nulle :

$$\int_0^T s(t) dt = S(0) = 0$$

La densité spectrale de puissance du code en ligne s'annule à la fréquence zéro.

2.4 Quelques exemples des codes en ligne

2.4.1 Les code en ligne à symboles indépendants

Pour ces codes en ligne, les symboles a_k sont indépendants et ainsi la fonction de corrélation

$R_a(k)$ est nulle quelque soit k différent de zéro

$$R_a(k) = \frac{E[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2} = \frac{E[(a_n - m_a)]E[(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2} = 0$$

Donc l'expression de la densité spectrale de puissance du signal $e(t)$ se réduit à :

$$\gamma_e^d(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| S\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (2.14)$$

Voici quelques exemples de codes en ligne à symboles indépendants.

- **Code NRZ binaire (Non-Retour à Zéro)**

Pour le code NRZ, on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$a_k = 1 \quad \text{si} \quad \alpha_k = -1$$

$$a_k = -1 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 0$$

La forme d'onde $s(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$s(t) = \begin{cases} V, & \forall t \in [0, T_b[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.15)$$

Un chronogramme du code NRZ binaire (0101100101101), pour $V=1$, est représenté sur la figure (2.2) :

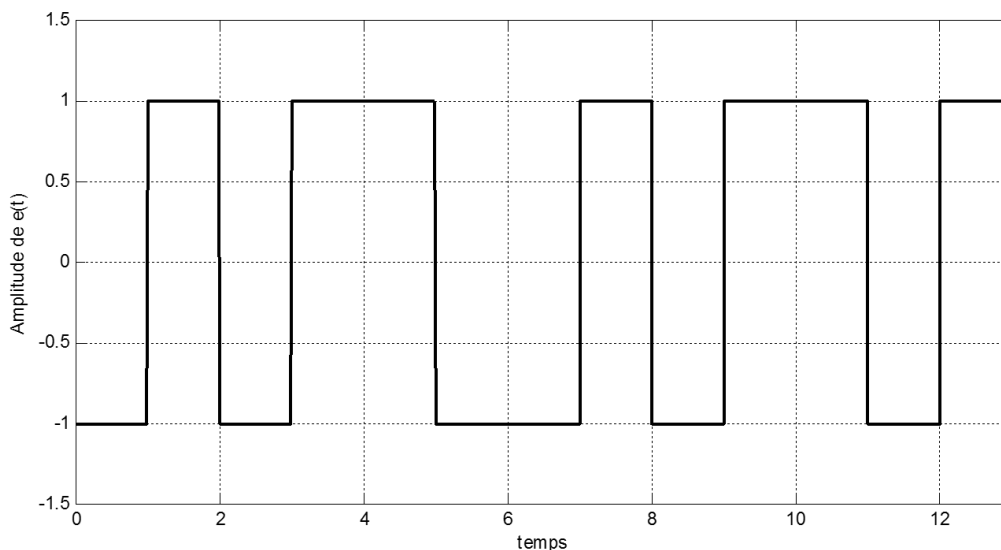


Figure (2.2) : Chronogramme du code NRZ binaire.

A partir du fait que les éléments binaires α_k sont équiprobables et i-i-d sur l'alphabet $\{0,1\}$, la moyenne m_a des symboles a_k est nulle et leur variance σ_a^2 est égale à 1. Par conséquent la densité spectrale de puissance d'un code NRZ est donnée par :

$$\gamma_e(t) = V^2 T_b \left[\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} \right]^2 = V^2 T_b \operatorname{sinc}^2(f T_b) \quad (2.16)$$

La densité spectrale de puissance d'un code NRZ, exprimé en dB, en fonction de la fréquence normalisé fT_b est représenté sur la figure (2.3).

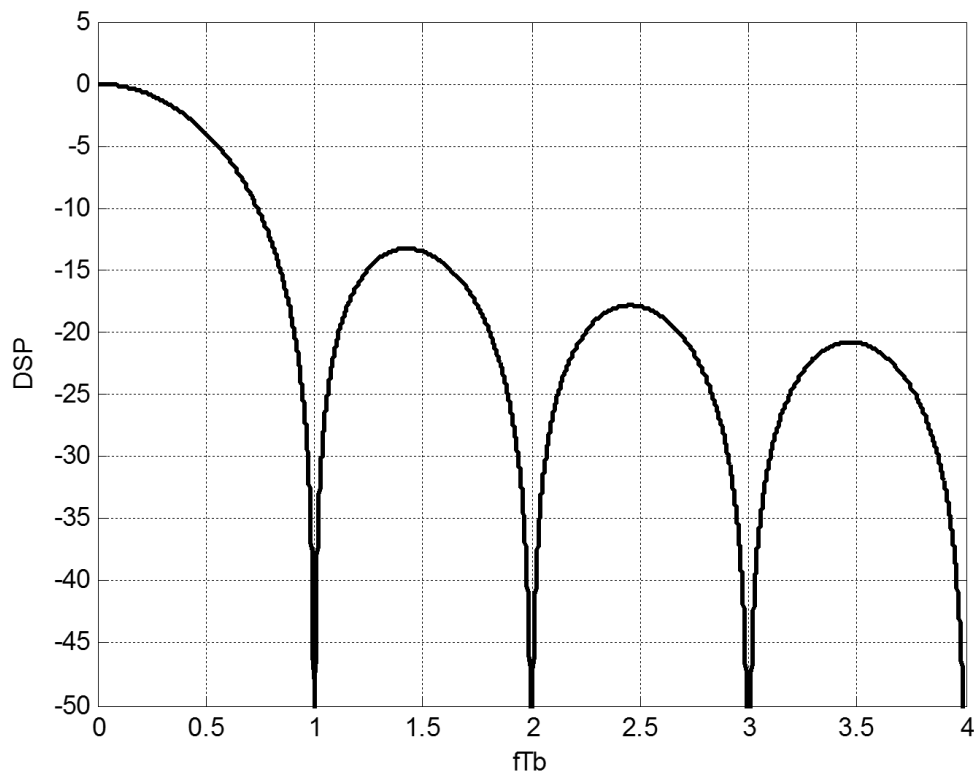


Figure (2.3) : Densité spectrale de puissance d'un code NRZ binaire.

- **Code RZ binaire (Retour à Zéro)**

Pour le code RZ, on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$a_k = 1 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 1$$

$$a_k = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_k = 0$$

La forme d'onde $s(t)$ est un signal rectangulaire de durée λT_b ($0 < \lambda \leq 1$) et d'amplitude V .

$$s(t) = \begin{cases} V, & \forall t \in [0, \lambda T_b[\\ 0, & \forall t \in [\lambda T_b, T_b[\end{cases} \quad (2.17)$$

Un chronogramme de ce code de la suite binaire (0101100101101) est représenté sur la

figure (2.4) pour $V=1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

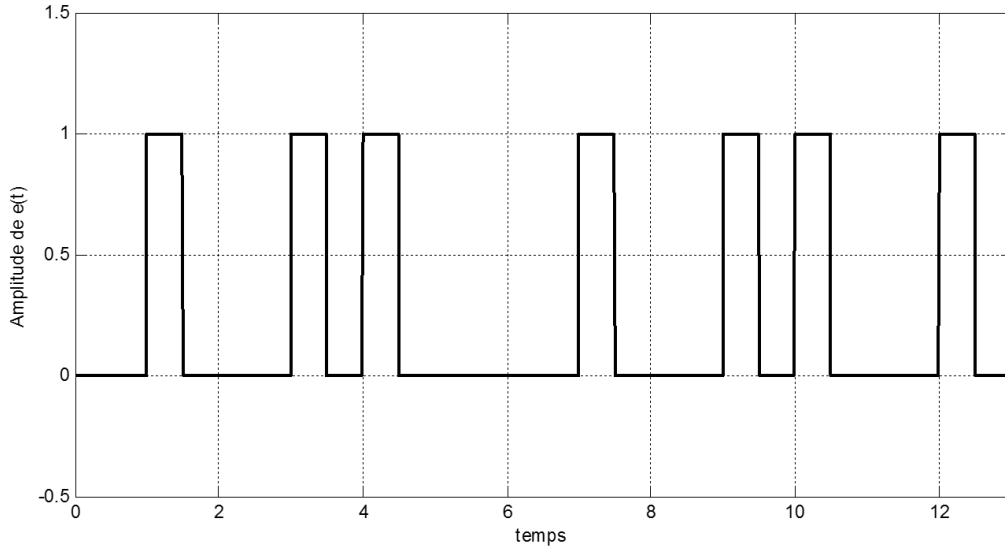


Figure (2.4) : Chronogramme du code RZ binaire pour $V=1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$

Les éléments binaires a_k étant équiprobables, indépendants, de moyenne $m_a = 1/2$ et de variance $\sigma_a^2 = 1/4$.

La densité spectrale de puissance $\gamma_e(f)$ de ce code est donnée par :

$$\gamma_e(f) = \frac{V^2 \lambda^2 T_b}{4} \left[\frac{\sin \pi f \lambda T_b}{\pi f \lambda T_b} \right]^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{V^2 \lambda}{4} \left[\frac{\sin \pi k \lambda}{\pi k \lambda} \right]^2 \delta \left(f - \frac{k}{T_b} \right) \quad (2.18)$$

Si le paramètre λ est égale 0,5, seules les raies aux fréquences $\frac{(2k+1)}{T_b}$ subsistent dans la densité spectrale de puissance de ce code :

$$\gamma_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \sin^2 \left(\frac{f T_b}{2} \right) + \frac{V^2}{16} \delta(f) + \sum_{k \neq 0} \frac{V^2}{4\pi^2} \delta \left(f - \frac{2k+1}{T_b} \right) \quad (2.19)$$

La partie continue de la densité spectrale de puissance d'un code RZ, exprimé en dB, pour $\lambda = 1/2$ et pour une puissance moyenne du code égale à 1 ($p_m=1$), est représenté sur

la figure (2.5), en fonction de la fréquence normalisé fT_b .

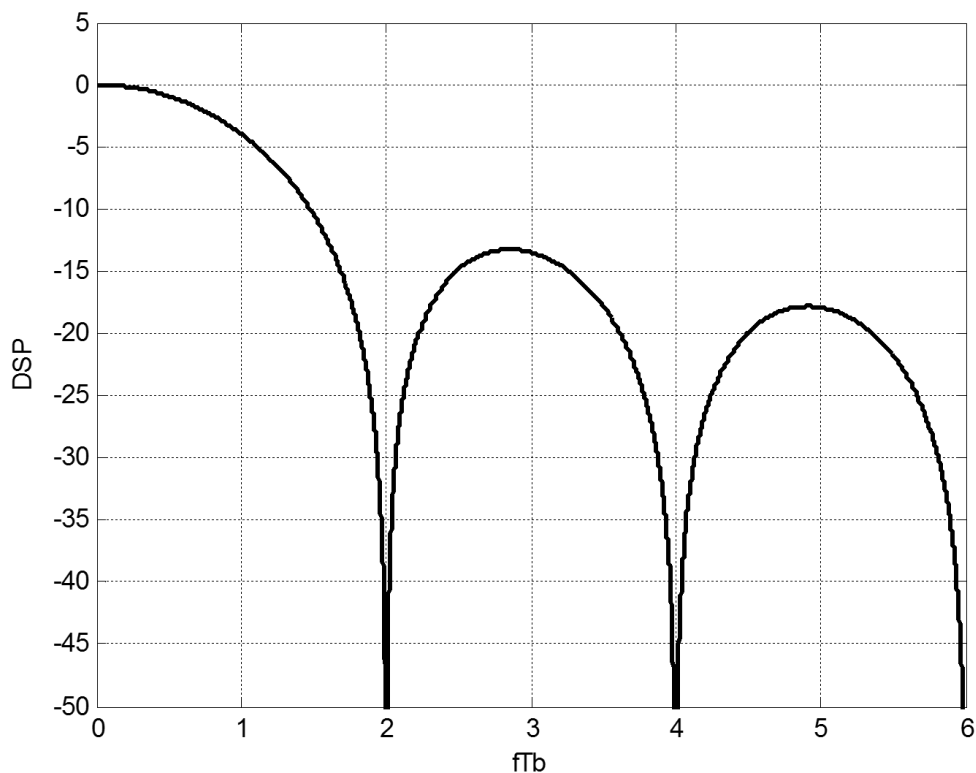


Figure (2.5) : partie continue de la densité spectrale de puissance du code RZ binaire pour $\lambda = 1/2$.

- **Code biphase binaire (ou code « Manchester »)**

Ce code en ligne utilise la même règle de codage que le code NRZ binaire :

$$a_k = 1 \quad \text{Si} \quad \alpha_k = 1$$

$$a_k = -1 \quad \text{Si} \quad \alpha_k = 0$$

Mais la forme d'onde $s(t)$ a pour expression :

$$s(t) = \begin{cases} V & \forall t \in [0, T_b/2[\\ -V & \forall t \in [T_b/2, T_b[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.20)$$

Un chronogramme du code biphase de la suite binaire (0101100101101) est représenté sur la figure (2.6)

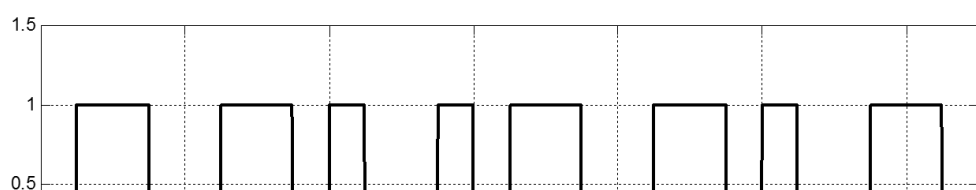


Figure (2.6) : Chronogramme du code biphase (Manchester).

Les symboles a_k sont équiprobables, indépendants, de valeur moyenne nulle et de variance unitaire.

La densité spectrale de puissance du code biphase est alors égale à :

$$\gamma_e(f) = V^2 T_b \sin^2 \left(\frac{\pi f T_b}{2} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f T_b}{2} \right) \quad (2.21)$$

La densité spectrale de puissance de ce code, exprimé en dB, est représentée sur la figure 65 en fonction de la fréquence normalisée, pour une puissance moyenne du code égale à 1 ($P_m=1$). L'intégrale de la forme d'onde $s(t)$, calculée sur l'intervalle $[0, T_b[$ étant égale à zéro, la densité spectrale de puissance du code biphase s'annule à la fréquence zéro.

La densité spectrale de puissance du code biphase binaire (Manchester), exprimé en dB, en fonction de la fréquence normalisée $f T_b$ est représenté sur la figure (2.7).

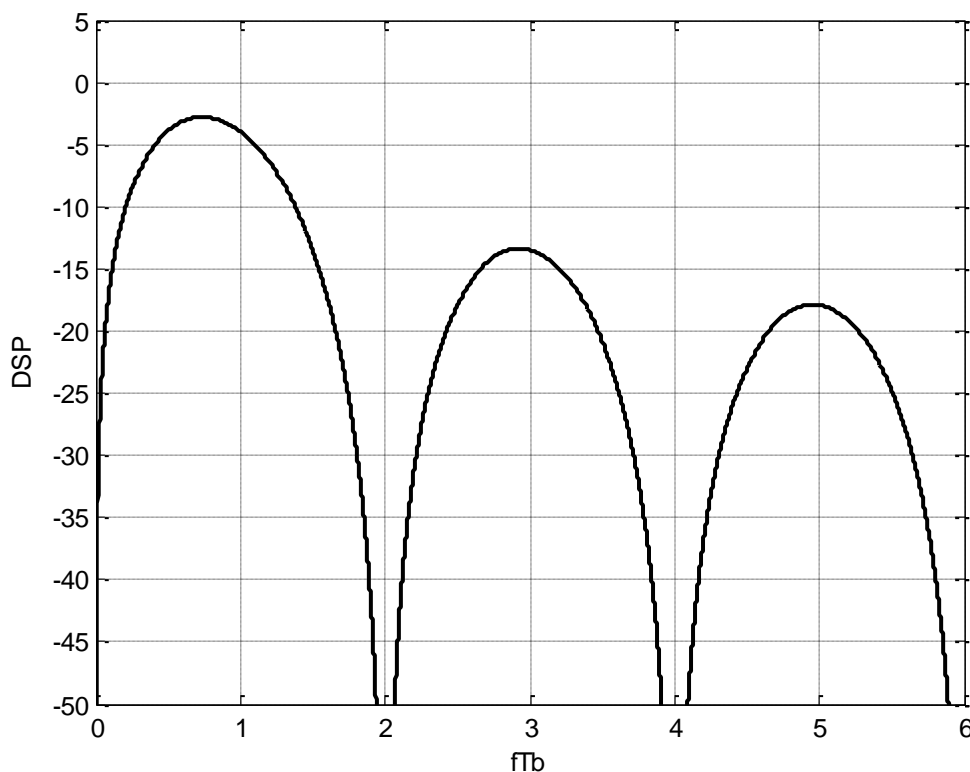


Figure (2.7) : Densité spectrale de puissance du code biphasé binaire en fonction de la fréquence normalisée fT_b .

2.4.2 Les code en ligne à symboles dépendants

Pour ce genre des codes, les symboles a_k sont dépendants cette fois-ci mais ils sont toujours à éléments binaires i-i-d. Nous présentons ici le code bipolaire (ou AMI « Alternate Marked Inversion »).

- **Le code bipolaire**

Le codage des symboles a_k est effectué en affectant alternativement les valeurs +1 et -1 aux symboles a_k lorsque l'élément binaire a_k est égale à 1.

La règle de codage est la suivante :

$$a_k = \pm 1 \quad \text{Si} \quad \alpha_k = 1$$

$$a_k = 0 \quad \text{Si} \quad \alpha_k = 0$$

La moyenne m_a des symboles a_k est nulle et leur σ_a^2 variance est égale $1/2$.

Le calcul de fonction d'autocorrélation normalisée $R_a(k)$ des symboles a_n se fait en premier temps pour $k=1$, puis en généralisant à k quelconque.

Lorsque $k=1$, seuls les réalisations $a_n = 1$ et $a_n = -1$, apportent une contribution non nulle dans le calcul de $R_a(1)$. En tenant compte du fait que la fonction d'autocorrélation est paire et que :

$$P_r\{\alpha_k = -1\} = P_r\{\alpha_k = 1\} = \frac{1}{4}$$

$$P_r\{\alpha_k = 1/\alpha_{k-1} = -1\} = P_r\{\alpha_k = -1/\alpha_{k-1} = 1\} = \frac{1}{2}$$

On a :

$$E[a_n a_{n\pm 1}] = (1) \cdot (-1) P_r\{a_n = 1, a_{n\pm 1} = -1\} + (-1) \cdot (1) P_r\{a_n = -1, a_{n\pm 1} = 1\}$$

Ce qui donne, en tenant compte du fait que σ_a^2 est égal à $1/2$:

$$R_a(1) = \frac{2}{8}(1)(-1) + \frac{2}{8}(-1)(1) = -\frac{1}{2}$$

pour k différent de 1, il est facile de montre que :

$$R_a(k) = 0 \quad \forall |k| \geq 2$$

On a donc :

$$\gamma_a(f) = \frac{1}{2T_b} + \frac{1}{T_b} \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2\pi f T_b \quad (2.22)$$

Soit :

$$\gamma_a(f) = \frac{1}{T_b} \sin 2\pi f T_b \quad (2.23)$$

La forme d'onde utilisée pour le code bipolaire est une forme d'onde de type RZ :

$$s(t) = \begin{cases} V, & \forall t \in [0, T_b/2[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.24)$$

Un chronogramme de ce code de la suite binaire (0101100101101) est représenté sur la figure

(2.8)

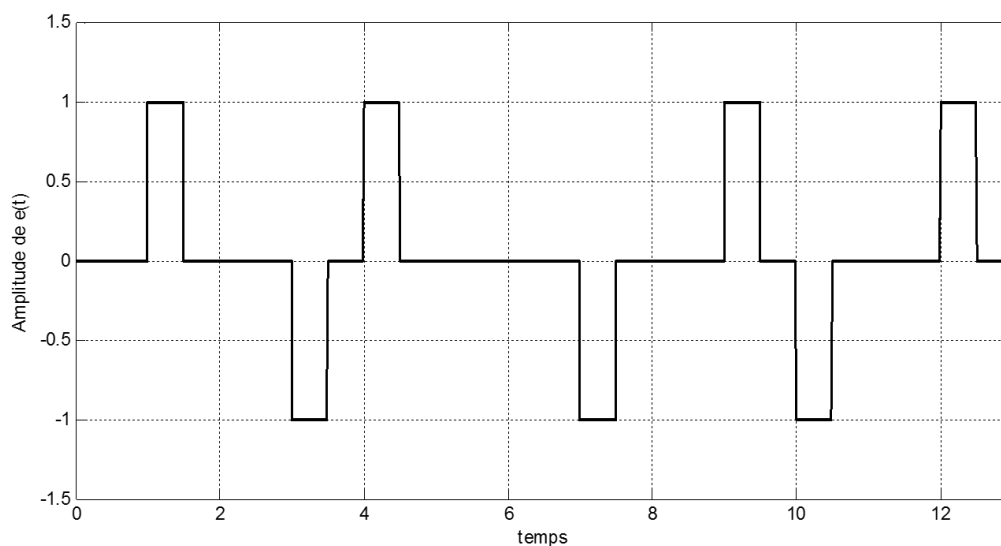


Figure (2.8) : Chronogramme du code bipolaire RZ.

La densité spectrale de puissance du code bipolaire RZ est donnée par :

$$\gamma_e(f) = \frac{V^2}{4} \sin^2(\pi f T_b) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right) \quad (2.25)$$

Elle est représentée en dB sur la figure (2.9), en fonction de la fréquence normalisée $f T_b$, pour une puissance moyenne du code égale à 1 ($p_m = 1$).

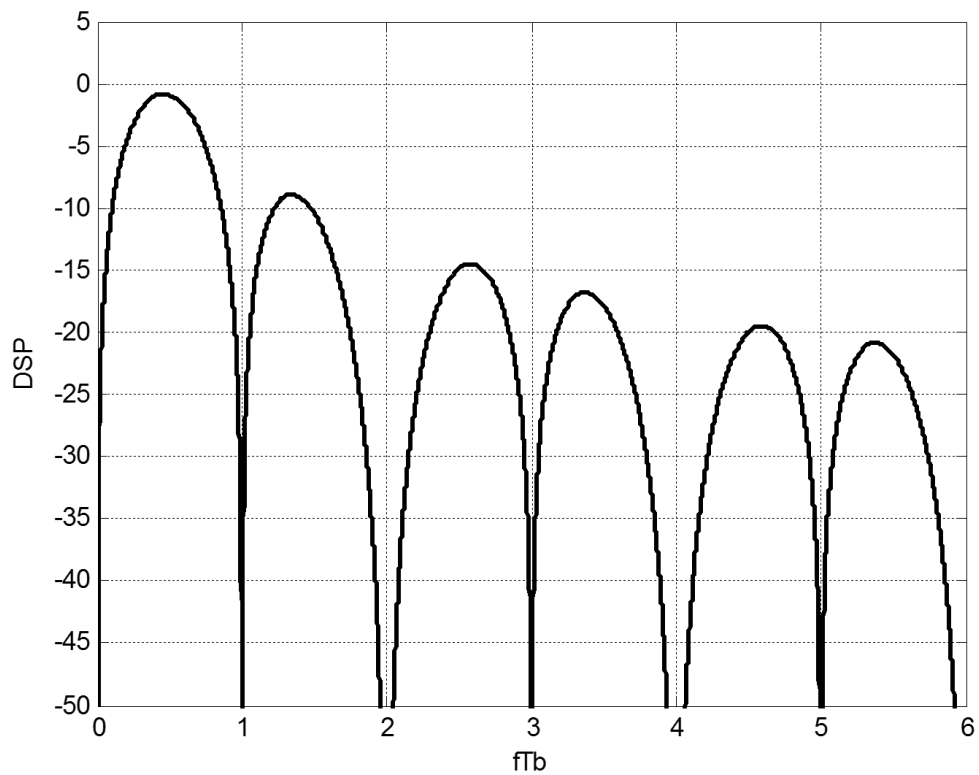


Figure (2.9) : Densité spectrale de puissance du code bipolaire RZ

Chapitre 3

Transmission, réception et détection en bande de base sur un canal idéal

3.1 Transmission en bande de base sur un canal idéal

Nous allons présenter dans cette partie une étude sur la transmission en bande de base d'un message numérique composé d'une suite d'éléments binaires α_k , i-i-d sur l'alphabet $\{0,1\}$ avec les probabilités à priori suivantes :

$$p_m = P_r\{\alpha_k = m\} \quad m = 0, 1 \quad (3.1)$$

Un système de transmission d'un message numérique en bande de base est représenté sur la figure (3.1).

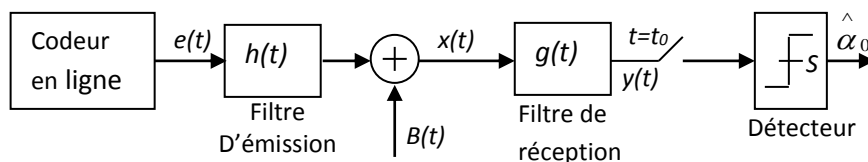


Figure (3.1) : Chaîne de transmission en bande de base.

Le signal $e(t)$ en sortie du codeur en ligne a l'expression suivante:

$$e(t) = \sum_k s_m(t - kT), \quad m = 0, 1 \quad (3.2)$$

Où $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont deux signaux quelconques de durée T . Selon la valeur de l'élément binaire α_k , $s_0(t)$ ou $s_1(t)$ va être émis sur l'intervalle $[kT, kT + T]$.

3.2 Transmission d'un symbole binaire unique sur canal idéal

Nous supposons que le canal de transmission est équivalent à un filtre linéaire et invariant dans le temps défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Dans le cas idéal, le filtre est à bande passante infinie et sa réponse impulsionnelle se simplifie à:

$$h(t) = \delta(t) \quad (3.3)$$

Pour bien étudier la structure du récepteur et optimiser ses paramètres, nous considérons la transmission d'un élément binaire unique α_0 émis à l'instant $k = 0$.

Sur l'intervalle $[0, T[$, le signal $x(t)$ à l'entrée du récepteur est égale à :

$$x(t) = s_m(t) + B(t), \quad m = 0, 1 \quad (3.4)$$

Où $s_m(t)$ est la forme d'onde correspondant à α_0 et $B(t)$ est un bruit blanc ; gaussien, centré stationnaire, de densité spectrale de puissance $\gamma_B(f)$.

$$\gamma_B(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \quad (3.5)$$

Pour détecter l'élément binaire α_0 à partir du signal $x(t)$, nous plaçons un filtre au niveau de la réception, appelé filtre de réception, de réponse impulsionnelle $g(t)$, suivi d'un échantillonneur et un comparateur à seuil (figure (3.1)).

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur de l'élément binaire α_0 selon la règle suivante :

$$y(t_0) > S \quad \text{Alors} \quad \hat{\alpha}_0 = 1$$

$$y(t_0) \leq S \quad \text{Alors} \quad \hat{\alpha}_0 = 0$$

Où $\hat{\alpha}_0$ représente le résultat de la décision au niveau du comparateur.

On peut commettre deux types de décision erronée : on décide $\hat{\alpha}_0 = 1$ alors que $\alpha_0 = 0$, ou inversement. Soient respectivement P_{e0} et P_{e1} les deux probabilités conditionnelles de décision erronée :

$$\begin{aligned} P_{e0} &= P_r\{\hat{\alpha}_0 = 1/\alpha_0 = 0\} \\ P_{e1} &= P_r\{\hat{\alpha}_0 = 0/\alpha_0 = 1\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La probabilité d'erreur P_e est alors égale à :

$$P_e(t) = p_0 P_{e0} + p_1 P_{e1} \quad (3.7)$$

Avec
$$p_m = P_r\{\alpha_0 = m\} \quad m = 0, 1$$

3.3 Calcul de la probabilité d'erreur

L'échantillon $y(t_0)$ prélevé en sortie du filtre de réception est égal à :

$$y(t_0) = a_0 r_m(t_0) + b(t_0)$$

Où $r_m(t)$ est la réponse du filtre de réception au signal $s_m(t)$ où $m = 0, 1$, et $b(t)$ le bruit filtré par le filtre de réception :

$$\begin{aligned} r_m(t) &= s_m(t) * g(t) \\ b(t) &= B(t) * g(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Conditionnellement à une valeur de l'élément binaire α_0 (0 ou 1), $y(t_0)$, noté Y est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne $r_m(t_0)$ et de variance σ^2 :

$$\sigma^2 = E[b^2(t_0)] \quad (3.9)$$

L'expression de la probabilité d'erreur P_e peut s'écrire :

$$P_e = p_0 \int_s^{+\infty} P_{Y/\alpha_0=0}(y) dy + p_1 \int_{-\infty}^s P_{Y/\alpha_0=1}(y) dy \quad (3.10)$$

Où $P_{Y/\alpha_0=1}(y)$ et $P_{Y/\alpha_0=0}(y)$ représentent respectivement les densités de probabilité conditionnelles de la variable aléatoire Y lorsque l'élément binaire α_0 est égal à 1 ou à 0, soit :

$$\begin{aligned} P_{Y/\alpha=1}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - r_1(t_0))^2}{2\sigma^2}\right) \\ P_{Y/\alpha=0}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - r_0(t_0))^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les deux densités de probabilité conditionnelles sont représentées sur la figure (3.2).

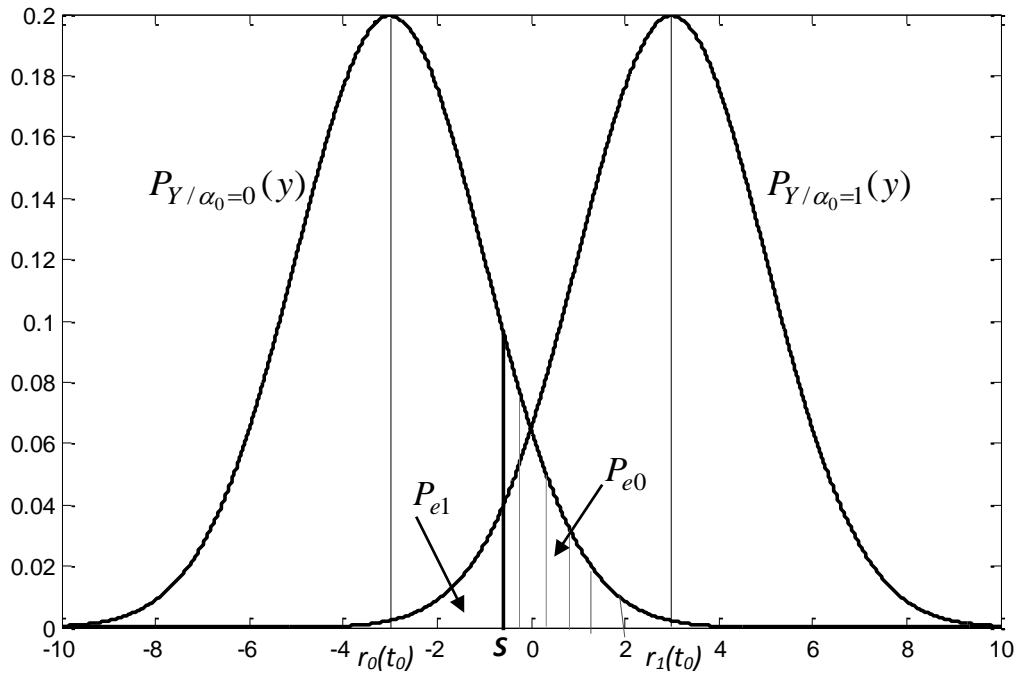


Figure (3.2) : Représentation des densités de probabilité conditionnelles

Pour un seuil S quelconque, les deux probabilités conditionnelles de décision erronée P_{e0} et P_{e1} sont représentées respectivement par les surfaces délimitées par le seuil S et les deux graphes de probabilités conditionnelles comme montré sur la figure (3.2).

La probabilité d'erreur P_e a finalement pour expression :

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[p_0 \int_S^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y - r_0(t_0))^2}{2\sigma^2}\right) dy + p_1 \int_{-\infty}^S \exp\left(-\frac{(y - r_1(t_0))^2}{2\sigma^2}\right) dy \right] \quad (3.12)$$

Nous allons maintenant chercher à minimiser la probabilité d'erreur en fonction du seuil S .

3.4 Le seuil optimal

Le seuil optimal est celui qui minimise la probabilité d'erreur, par conséquent la dérivée de la probabilité d'erreur par rapport à S doit être nulle :

$$\frac{dP_e}{dS} = 0 \quad (3.13)$$

Ce qui conduit à résoudre l'équation :

$$p_0 \exp\left(-\frac{(S - r(t_0))^2}{2\sigma^2}\right) - p_1 \exp\left(-\frac{(S - r(t_1))^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \quad (3.14)$$

Le seuil optimale, noté S_{opt} , est alors égal à :

$$S_{opt} = \frac{r(t_0) + r(t_1)}{2} + \sigma^2 \ln \frac{p_0}{p_1} \quad (3.15)$$

Où $\ln(\cdot)$ désigne le logarithme népérien.

Le seuil optimal dépend de la distribution de probabilité $\{p_0, p_1\}$, c'est-à-dire des statistiques du message ; si, par exemple, $p_1 > p_2$, le seuil se déplace vers les valeurs négative, de manière à « favoriser » le décision $\hat{\alpha}_k=1$.

Lorsque $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, le seuil optimal est égal à zéro, le circuit de décision vient donc tester le signe de l'échantillon $y(t_0)$ pour décoder l'élément binaire α_0 . Ce résultat est finalement assez logique puisque, pour $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, la valeur, moyenne de l'échantillon $y(t_0)$ est nul et son signe, en l'absence de bruit, dépend de la valeur de l'élément binaire α_0 .

Dans le cas particulier où $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, le seuil optimal égal la moyenne arithmétique des deux signaux à la sortie de récepteur $r_0(t)$ et $r_1(t)$ à l'instant de décision t_0 :

$$S_{opt} = \frac{r(t_0) + r(t_1)}{2} \quad (3.16)$$

Et la probabilité d'erreur devient :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{r(t_1) - r(t_0)}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (3.17)$$

Où $\operatorname{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire définie par :

$$(3.18)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du$$

3.5 La réponse optimale du filtre de réception

Posons

$$\rho = \frac{r(t_1) - r(t_0)}{\sigma} \quad (3.19)$$

La probabilité d'erreur P_e peut être écrite sous la forme :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right) \quad (3.20)$$

Pour minimiser la probabilité d'erreur P_e , il faut maximiser le rapport ρ .

Cherchons maintenant l'expression du rapport ρ en fonction de la réponse impulsionnelle du filtre de réception. On a d'une part :

$$r_1(t_0) - r_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) [s_1(t_0 - t) - s_0(t_0 - t)] dt \quad (3.21)$$

et d'autre part sachant que $b(t) = B(t) * g(t)$, la variance σ^2 du bruit est alors égale à :

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (3.22)$$

En utilisant le théorème de Parseval, la variance σ^2 du bruit peut être exprimée en fonction de la réponse impulsionnelle $g(t)$ du filtre de réception :

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (3.23)$$

Finalement l'expression du rapport ρ est donné par :

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)[s_1(t_0 - t) - s_0(t_0 - t)] dt}{\sqrt{\frac{N_0}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \right)^{1/2}} \quad (3.24)$$

Pour maximiser ce rapport, on utilise l'inégalité de Schwarz:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt \right) \quad (3.25)$$

L'égalité est vérifiée lorsque $u(t) = Kv(t)$ où K est un coefficient réel quelconque.

En posant :

$$u(t) = g(t) \text{ et } v(t) = s_1(t_0 - t) - s_0(t_0 - t) \quad (3.26)$$

Donc ρ est maximal si :

$$g(t) = K[s_1(t_0 - t) - s_0(t_0 - t)] \quad (3.27)$$

C'est-à-dire ρ est maximal si $g(t)$ est adapté au signal $[s_1(t) - s_0(t)]$

Posons $\Delta^2 = r_1(t_0) - r_0(t_0)$

A partir de l'équation (3.21) on trouve que

$$\Delta^2 = TF^{-1}\{[S_1(f) - S_0(f)]G_r(f)\}|_{t=t_0} \quad (3.28)$$

Pour $K=1$ et en remplaçant $G(f)$ par sa valeur à partir de l'équation (1.37), on trouve.

$$\Delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f) - S_0(f)|^2 df \quad (3.29)$$

Et la variance σ^2 du bruit aura l'expression suivante :

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f) - S_0(f)|^2 df \quad (3.30)$$

Finalement la valeur maximale de ρ est :

$$\rho_{max} = \frac{\Delta}{\sqrt{N_0/2}}$$

La probabilité minimale se réduit alors à :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\Delta^2}{4N_0}} \quad (3.31)$$

On a aussi, d'après le théorème de Parseval.

$$\Delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f) - S_0(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t) - s_0(t)|^2 dt \quad (3.32)$$

Donc Δ^2 représente le carré de la distance Euclidienne entre $s_1(t)$ et $s_0(t)$

Cas particuliers

1. Le code NRZ

Pour le code NRZ, les signaux $s_1(t)$ et $s_0(t)$ s'expriment à partir d'une forme d'onde unique $s(t)$ tel que $s(t) = s_1(t) = -s_0(t)$.

L'expression de Δ^2 devient :

$$\Delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|s(t)|^2 dt = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (3.33)$$

Pour le code NRZ, on associe à l'élément binaire α_0 le signal $a_0 s(t)$ et l'énergie par élément binaire transmis E_b est donnée par :

$$E_b = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^2 s^2(t) dt \quad (3.34)$$

Sachant que $a_0 = \pm 1$, la probabilité d'erreur P_e est alors égale à :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (3.35)$$

La probabilité d'erreur P_e ne dépend donc pas de la forme d'onde $s(t)$ mais uniquement de son énergie.

2. Le code RZ.

Pour le code RZ, posons $s(t) = s_1(t)$ et $s_0(t) = 0$

L'expression de Δ^2 devient :

$$\Delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (3.36)$$

Pour le code RZ, on définit l'énergie moyenne par élément binaire reçue à l'entrée du récepteur comme suit.

$$E_{mb} = \int_{-\infty}^{\infty} E[a_0^2] s^2(t) dt \quad (3.37)$$

Sachant que $E[a_0] = 1/2$, la probabilité d'erreur P_e est alors égale à :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \quad (3.38)$$

Chapitre 4

Transmission en bande de base sur canal à bande limitée

4.1 Transmission sur un canal à bande limitée

Le modèle du canal idéal qu'on a étudié où la bande passante est infinie est physiquement irréalisable. Les canaux physiques utilisés sont toujours des canaux à bande limitée. Il se pose alors le problème de transmettre le débit le plus grand possible dans une bande de fréquence donnée et sans perdre en performances par rapport à la transmission sur une bande illimitée.

4.2 Transmission d'une suite de symboles M-AIRES

Nous allons cette fois-ci étudier la transmission d'une suite de symboles M -aire sur un canal à bande limitée. Nous constatons que la limitation de bande est due à la présence d'un filtre d'émission, non idéal cette fois-ci, en sortie du codeur et due au canal de transmission lui-même. Le principe de transmission d'un message numérique en bande de base sur un canal à bande limitée est représenté sur la figure (4.1) [1, 4].

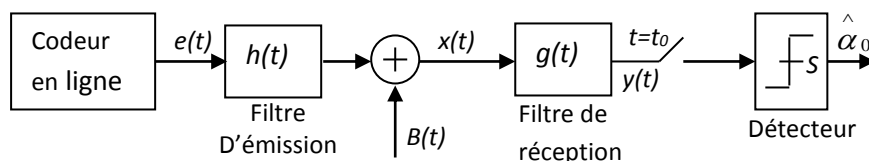


Figure (4.1) : principe d'une chaîne de transmission en bande de base à bande limitée

Le signal $x(t)$ reçu par le récepteur est égale à :

$$x(t) = \sum_k a_k s_e(t - kT) + B(t) \quad (4.1)$$

Où $s_e(t)$ est la sortie du filtre d'émission.

$$s_e(t) = s(t) * h(t) \quad (4.2)$$

Le récepteur constitué d'un filtre linéaire de réponse $g(t)$, d'un échantillonneur et d'un comparateur à seuil.

La sortie $y(t)$ du filtre de réception à l'instant $t_0 + nt$ est donné par:

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT) \quad (4.3)$$

Où $r(t)$ et $b(t)$ résultent respectivement du filtrage du signal $s_e(t)$ et bruit $B(t)$ par le filtre de réception:

$$r(t) = s_e(t) * g(t) \quad (4.4)$$

$$b(t) = B(t) * g(t)$$

Pour un canal idéal, nous avons vu que chaque échantillon $y(t_0 + nT)$ dépendait du seul symbole a_n et du bruit. Ceci était dû à l'utilisation d'un filtre de réception adapté à la forme d'onde $s(t)$ de durée T . Dans un canal à bande limitée, le signal $r(t)$ n'est plus de durée T . L'échantillon $y(t_0 + nT)$ dépend du symbole a_n , mais aussi des symboles antérieurs et même postérieurs au symbole a_n si l'instant initial de décision t_0 est supérieur à T .

Cette situation est illustrée sur la figure (4.3).

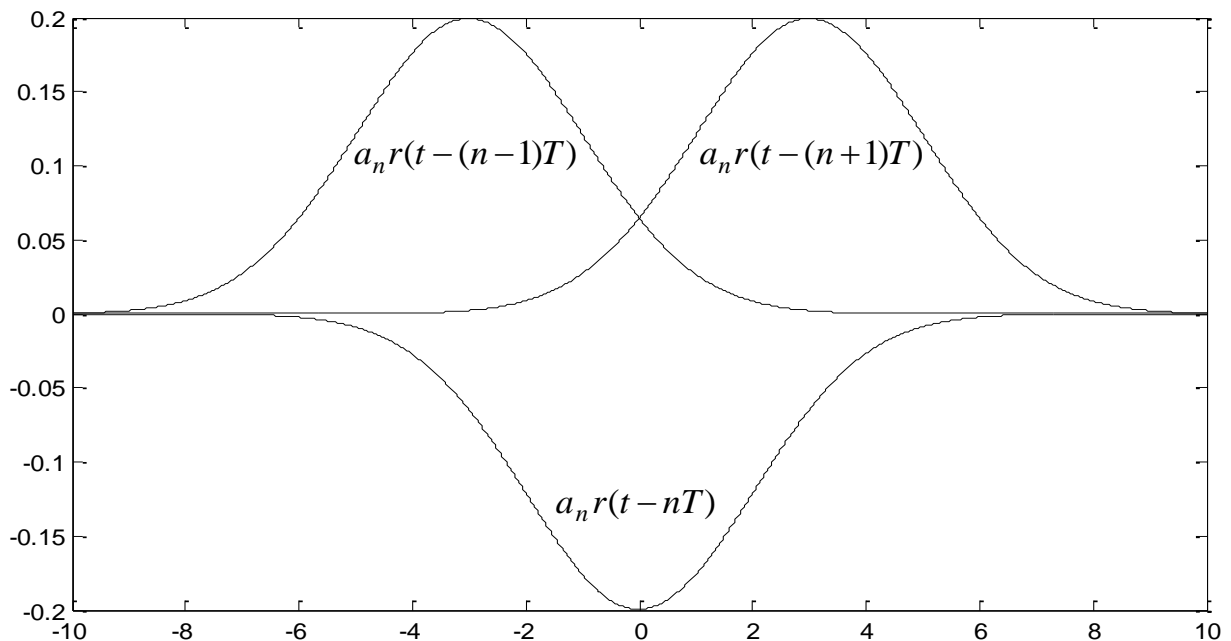


Figure (4.3) : l'interférence entre symboles

L'échantillon $y(t_0 + nT)$ peut être décomposé en une somme de trois termes :

$$y(t_0 + nT) = a_n(t_0) + \sum_{m \neq 0} a_{n-m} r(t_0 + mT) + b(t_0 + nT) \quad (4.5)$$

Le premier terme dépend du symbole a_n , le deuxième qui dépend des symboles a_{n-m} ($m \neq 0$) est appelé terme d'Interférence Entre Symbole (IES) et le troisième représente le bruit.

4.3 Interférence entre symbole (IES) – Critère de Nyquist

L'absence d'IES aux instants de décision ($t_0 + nT$) impose que l'impulsion $r(t)$ vérifie la condition suivante :

$$r(t_0 + nT) = r(t_0) \delta_{0,n} \quad \forall n \quad (4.6)$$

Où $\delta_{0,n}$ représente le de Kronecker. L'impulsion $r(t)$ peut être de durée et de forme quelconque, mais tous ses échantillons aux instants ($t_0 + nT$), doivent être nuls.

Introduisons le signal échantillonné $r_e(t)$ défini par :

$$r_e(t) = r(t) \sum_n \delta(t - t_0 - nT) \quad (4.7)$$

Sa transformée de Fourier $R_e(f)$ égale à:

$$R_e(f) = \frac{1}{T} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi n \frac{t_0}{T}} \quad (4.8)$$

Le signal échantillonné $r_e(t)$ peut encore s'écrire :

$$r_e(t) = \sum_n r(t_0 + nT) \delta(t - t_0 - nT) \quad (4.9)$$

Et sa transformé de Fourier $R_e(f)$ peut maintenant s'exprime en fonction des échantillons $r(t_0 + nT)$.

$$R_e(f) = \sum_n r(t_0 + nT) e^{-j2\pi f(t_0 + nT)} \quad (4.10)$$

La condition d'absence d'IES est vérifiée si :

$$\sum_n R\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi\left(f - \frac{n}{T}\right)t_0} = T \cdot r(t_0) \quad (4.11)$$

En posant :

$$R^{(t_0)}(f) = \frac{R(f)}{r(t_0)} e^{j2\pi f t_0} \quad (4.12)$$

La condition d'absence d'IES peut s'exprimer comme suit :

$$\sum_n R^{(t_0)}\left(f - \frac{n}{T}\right) = T \quad (4.13)$$

Cette condition est appelé critère de Nyquist.

La fonction $N_m^{(t_0)}(f)$ de largeur de bande minimale, que nous noterons $N_m^{(t_0)}(f)$ qui assure une IES nulle et donc égale à :

$$N_m^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T, & \forall |f| \leq 1/2T \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.14)$$

On peut déduire donc que la bande de fréquence minimale nécessaire à la transmission en bande de base sans IES d'un signal numérique avec une rapidité de modulation $R = 1/T$ est égale à $1/2T$. Cette bande est appelé bande de Nyquist.

La fonction $R(f)$ correspondant a pour expression :

$$R(f) = r(t_0) N_m^{(t_0)}(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (4.15)$$

Et le signal $r(t)$ la transformée de Fourier inverse de $R(f)$ est donné par :

$$r(t) = r(t_0) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - t_0}{T} \right) \quad (4.16)$$

La fonction $N_m^{(t_0)}(f)$ présente des discontinuités aux fréquences $\pm 1/T$ (filtre passe-bas idéal physiquement irréalisable).

Une solution retenue dans la transmission en bande de base est le filtre en cosinus surélevé dont une réponse fréquentielle réelle et positive $CS_\alpha(f)$ [1, 5]:

$$CS_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \sin \frac{\pi T}{\alpha} \left(\frac{1}{2T} - |f| \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.17)$$

Où α est le coefficient de retombée (roll-off) $0 \leq \alpha \leq 1$.

Le filtre en cosinus surélevé occupe la bande de fréquence $\left[-\frac{(1+\alpha)}{2T}, \frac{(1+\alpha)}{2T} \right]$. Sa réponse impulsionnelle est la suivante :

$$CS_\alpha(t) = \frac{\sin(\pi t/T) \cos(\pi \alpha t/T)}{\pi t/T \left(1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T^2} \right)} \quad (4.18)$$

La réponse impulsionnelle $cs_\alpha(t)$ et sa transformée de Fourier normalisée $\frac{CS_\alpha(f)}{T}$ pour différents valeurs du paramètre α sont représentées sur la figure (4.4). On notera que pour $\alpha = 0$, la fonction $CS_0(f)$ n'est autre que $N_m^{(t_0)}(f)$.

La bande de fréquence occupée par la fonction $CS_\alpha(f)$ est égale à $\frac{(1+\alpha)}{2T}$ (en raisonnant sur les fréquences positives), soit une multiplication de la bande minimale (égale à $\frac{1}{2T}$) par $(1 + \alpha)$.

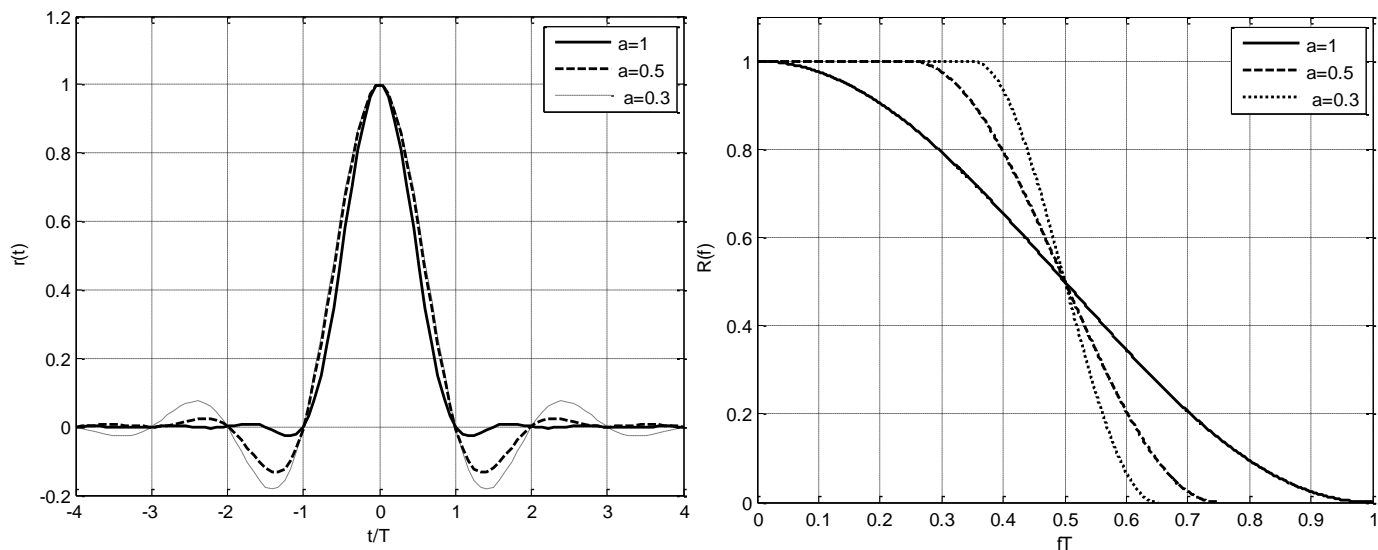


Figure (4.4) : Réponse impulsionnelle et réponse en fréquentielle d'un filtre en cosinus surélevé pour différentes valeurs du facteur de retombée α (1 : $\alpha = 1$; 2 : $\alpha = 0,5$; 3 : $\alpha = 0,3$)

Le filtre en cosinus surélevé n'est pas le seul filtre qui vérifie le critère de Nyquist.

La figure (4.5) représente un exemple où une réponse fréquentielle de largeur de bande supérieure à $1/T$ et vérifie le critère de Nyquist (une IES nulle aux instants de décision).

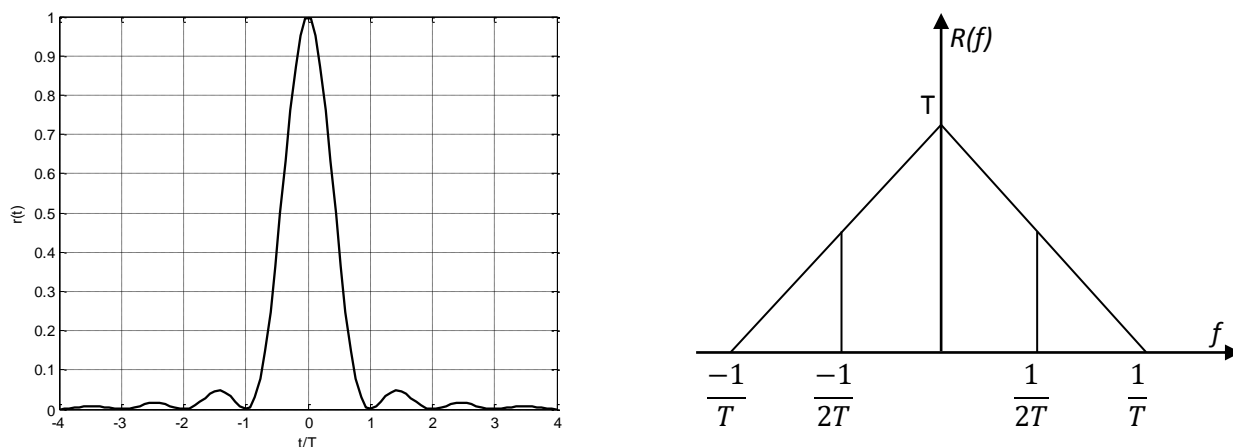


Figure (4.5) : la réponse impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre vérifiant le critère de Nyquist

On peut conclure que l'on peut très bien trouver des filtres de bande supérieure à $1/T$ et vérifiant le critère de Nyquist. Pour plus de détails sur l'utilité, l'amélioration et le domaine d'application de ce genre de filtres vous pouvez consulter ces articles [6-11].

Bibliographie

- [1] Joindot, M., & Glavieux, A. (2007). Introduction aux communications numériques. Dunod.
- [2] Guimaraes, D. A. (2010). Digital Transmission: A Simulation-Aided Introduction with VisSim/Comm. Springer Science & Business Media.
- [3] Bic, J. C., Duponteil, D., & Imbeaux, J. C. (1986). Eléments de communications numériques (Vol. 9). Dunod.
- [4] Benedetto, S., & Biglieri, E. (1999). Principles of digital transmission: with wireless applications. Springer Science & Business Media.
- [5] Madhow, U. (2008). Fundamentals of digital communication. Cambridge University Press.
- [6] Farhang-Boroujeny, B. (2008). A square-root Nyquist (M) filter design for digital communication systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(5), 2127-2132.
- [7] Kisel, A. V. (1999). An extension of pulse shaping filter theory. *IEEE transactions on communications*, 47(5), 645-647.
- [8] Beaulieu, N. C., Tan, C. C., & Damen, M. O. (2001). A "better than" Nyquist pulse. *IEEE Communications Letters*, 5(9), 367-368.
- [9] Beaulieu, N. C. (1991). The evaluation of error probabilities for intersymbol and cochannel interference. *IEEE Transactions on Communications*, 39(12), 1740-1749.
- [10] Assalini, A., & Tonello, A. M. (2004). Improved nyquist pulses. *IEEE Communications Letters*, 8(2), 87-89.
- [11] Xia, X. G. (1997). A family of pulse-shaping filters with ISI-free matched and unmatched filter properties. *IEEE Transactions on Communications*, 45(10), 1157-1158.