

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 8 Mai 1945 - Guelma

Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Civil et d'Hydraulique



Modélisation et Simulation en Hydraulique

Cours & Exercices

Fait par : Dr. TOUMI Abdelouaheb

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} = \frac{y_n}{a_{nn}^{(n)}}$$
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) = \frac{1}{a_{ii}^{(n)}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n)} x_j \right) \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

$$a_p u_p^1 = a_E [f u_E^1 + (1-f) u_E^0] + a_O [f u_O^1 + (1-f) u_O^0] + [a_p^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_O] u_p^0$$

$$J(\bar{x}^{(k)}) \bar{y}^{(k)} = -\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$$
$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \bar{y}^{(k)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x) \\ \frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots, x^{2n-1} \\ 0, 1, 2x, 3x^2, \dots, (2n-1)x^{2n-2} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{2n-1} \end{array} \right\}$$

Juin 2017

Sommaire

Introduction générale.....	01
Chapitre I Résolution des équations non linéaires et des systèmes d'équations	02
1.1 Introduction.....	02
1.2 Quelques méthodes numériques pour la résolution des équations non linéaires..	02
1.2.1 Méthode de Dichotomie (Bisection).....	02
1.2.2 Méthode de la Sécante.....	05
1.2.3 Méthode de Regula Falsi (fausse position).....	08
1.2.4 Méthode de ISSAAC Newton et Joseph Raphson(N-R).....	13
1.2.5 Méthode du point fixe.....	14
1.2.6 Méthode de Steffensen (Aitken+Newton).....	16
1.2.7 Méthode de Müller.....	20
1.2.8 Méthode de Laguerre.....	23
1.2.9 Méthode de Brent.....	26
1.2.10 Méthode de Broyden.....	29
1.3 Méthodes utilisées pour résoudre les systèmes d'équations.....	31
1.3.1 Méthodes directes.....	31
1.3.1.1 Méthode de Cramer.....	31
1.3.1.2 Méthode d'inversion de la matrice.....	32
1.3.1.3 Méthodes de diagonalisation.....	33
1.3.1.4 Méthode d'orthogonalisation ou méthode de factorisation QR.....	38
1.3.1.5 Méthode de pivot de Gauss ou de Gauss-Jordan.....	41
1.3.1.6 Méthode de factorisation LU.....	47
1.3.1.7 Méthode de factorisation Cholevsky.....	49
1.3.2 Méthodes indirectes.....	52
1.3.2.1 Méthode de Jacobi.....	52
1.3.2.2 Méthode du point fixe (S.N.L).....	55
1.3.2.3 Méthode de Newton-Raphson (S.N.L).....	56
1.3.2.4 Méthode de Newton modifiée (S.N.L).....	61
1.3.2.5 Méthode du gradient conjugué.....	64
1.3.2.6 Méthode de Gauss Seidel.....	65
1.3.2.7 Méthode de Gauss Seidel accélérée (Successive Over Relaxation).....	68
1.3.2.8 Méthode de Gauss-Seidel Accélérée-Newton ou Lieberstein.....	69
1.3.2.9 Méthode de Broyden.....	71
1.3.2.10 Méthode d'approximations successives.....	71
1.3.2.11 Résolution du système tri-diagonal.....	72
1.4 Conclusion.....	72
Chapitre II Méthode des différences finies.....	73
2.1 Introduction.....	73
2.2 La différence de la dérivée première.....	73
2.3 La différence de la dérivée seconde.....	76
2.4 Conditions aux limites.....	78
2.5 Résolution numérique des équations différentielles.....	78
2.5.1 Intégration numérique des équations différentielles par les séries de Taylor...	78
2.5.2 Méthode d'Euler.....	79
2.5.3 Méthodes de Rung-Kutta.....	79
2.5.4 Méthodes multi-pas.....	82
2.5.4.1 Méthodes explicites.....	83

2.5.4.2 Méthodes implicites (Technique d'Adams-Moulton).....	84
2.5.5 Quelques programmes sur les méthodes uni-pas et multi-pas.....	89
2.6 Différences finies en régime stationnaires (permanent).....	93
2.7 Différences finies en régime transitoire (non permanent).....	103
2.7.1 Schéma explicite.....	103
2.7.2 Schéma implicite.....	103
2.7.3 Schéma de Crank Nicolson.....	104
2.8 Stabilité des schémas numériques.....	106
2.8.1 Stabilité analytique (exacte) de Von Neumann.....	106
2.8.2 Stabilité matricielle ou de Brower (approximation).....	119
2.9 Conclusion.....	124
Chapitre III Méthodes des éléments finis.....	125
3.1 Introduction.....	125
3.2 Les approximations.....	125
3.3 Interpolation polynomiale.....	126
3.3.1 Interpolation de type Lagrange.....	126
3.3.2 Interpolation de type Hermite.....	136
3.4 Approximation par éléments finis.....	138
3.5 Forme d'éléments classiques.....	140
3.6 Règle de discrétisation d'un domaine par éléments finis.....	141
3.7 Construction des fonctions d'approximation sur un élément.....	142
3.7.1 Principes de base.....	142
3.7.2 Élément triangulaire pour un problème de classe C^0	144
3.7.3 Evaluation des intégrales sur un triangle.....	146
3.8 Conclusion.....	150
Chapitre IV Méthode des volumes finis.....	151
4.1 Introduction.....	151
4.2 Illustration de la technique.....	151
4.3 Traitement de la source.....	152
4.4 Cas des problèmes instationnaires.....	153
4.5 Cas particuliers.....	154
4.6 Application à la partie diffusion (1D).....	159
4.7 Critère de convergence.....	161
4.8 Exercices.....	161
4.9 Problème de diffusion à deux dimensions (2D).....	169
4.10 Problème de diffusion à trois dimensions (3D).....	170
4.11 Résumé du problème de diffusion.....	170
4.12 Conclusion.....	171
Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements.....	172
5.1 Introduction.....	172
5.2 Calcul des courbes de remous et de décrue.....	172
5.2.1 Pour une pente positive ($i>0$).....	172
5.2.1 Pour une pente négative ($i<0$).....	177
5.2.1 Pour une pente nulle ($i=0$).....	178
5.3 Ecoulement à charge variable.....	181
5.3.1 Ecoulement à l'air libre à partir d'un réservoir prismatique à travers un orifice sans arrivée d'eau.....	181
5.3.2 Ecoulement par transvasement.....	184
5.3.3 Ecoulement à l'air libre à partir d'un réservoir non prismatique à travers un orifice sans arrivée d'eau.....	189

5.4 Simulation des écoulements dans les réseaux d'A.E.P.....	195
5.4.1 Cas d'un réseau maillé.....	195
5.4.2 Cas d'un réseau ramifié.....	199
5.5 Simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement.....	206
5.6 Conclusion.....	211
Conclusion générale.....	213
Références bibliographiques.....	214

Introduction Générale

Introduction générale

Les raisons qui m'ont incité à élaborer cet ouvrage sont nombreuses, je suis persuader que ceux du domaine et ceux qui voudront développer leurs connaissances dans cette matière les comprendront aisément.

La modélisation et la simulation ont pris un essor exponentiel parallèlement avec le développement informatique, l'utilisation des abaques est devenue une astuce du passé du fait que la modélisation et la simulation prennent leurs places en donnant une précision meilleure.

Pour mettre sur rail, l'utilité de ce travail, on a entamé comment résoudre les équations non linéaires en utilisant les méthodes itératives les plus récemment réutilisées, par la suite, on a penché en détail sur l'utilisation des méthodes directes et indirectes pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et non linéaires. Des programmes, pour la résolution des équations non linéaires et des systèmes d'équations, en langage Fortran, ont été élaborés dans le premier chapitre afin de faciliter l'utilisation de ces méthodes.

Dans un second chapitre la méthode des différences finies a été notre cible afin de mettre en exergue comment résoudre les équations différentielles du premier et de second ordre par les méthodes numériques universellement utilisées à savoir les méthodes uni et multi- pas en mettant à la porté des lecteurs des programmes, de ces méthodes, en langage Fortran. Toutefois, l'utilisation de la M.D.F pour résoudre un problème transitoire nécessite l'étude de stabilité. Donc, il n'est pas question de ne pas sacrifier une partie dans ce volet à l'étude de la stabilité des schémas numériques en différences finies.

Le troisième chapitre s'articulera sur la présentation de la méthode des éléments finis, comment faire l'approximation nodale par les interpolations de Lagrange et de Hermite. En suite l'approximation par éléments finis, la présentation des formes classiques, les règles de discrétisation d'un domaine par éléments finis et la construction des fonctions d'approximation sur un élément seront notre objet.

Le quatrième chapitre s'étale lourdement sur la méthode des volumes finis en donnant leur principe en 1D, 2D et 3D et pour rendre la méthode praticable, deux exemples sur la diffusion de la chaleur ont été examinés.

Le dernier chapitre sera consacré à la modélisation et la simulation des écoulements en commençant par la réalisation des courbes de remous et de décrues, par la suite l'étude de l'écoulement à l'air libre, à travers un orifice, à partir d'un réservoir prismatique et non prismatique et nous terminerons par la simulation des écoulements dans les réseaux d'A.E.P et d'assainissement.

En somme notre objectif final consiste à mettre à la disposition des lecteurs un ouvrage, qui contient des méthodes et des techniques, qui leur permettront simplement de s'introduire, d'enchaîner et de développer leurs connaissances dans le domaine de la modélisation et de la simulation. Enfin, sans faire d'efforts de la part des lecteurs cet ouvrage devient abusif.

CHAPITRE I

Résolution des équations non linéaires et du système d'équations

1.1 Introduction

Pour les équations non linéaires, il n'y a aucun critère permettant de savoir d'avance s'il y a ou non des racines et de deviner leur nombre. La seule méthode pratique est de faire une représentation graphique sommaire. Dans ce contexte, une présentation, en premier lieu, de quelques méthodes itératives de résolution de ce genre d'équations, d'une part et une réalisation de quelques programmes, en langage Fortran, permettant aisément leur utilisation ainsi de mettre la résolution de certains exemples concrets d'une autre part. Par la suite la représentation des méthodes directes et indirectes de résolution du système d'équations linéaires et non linéaires, les plus couramment utilisées, sera notre objectif et pour clore ce chapitre des algorithmes et des programmes ont été mis en place afin de les rendre praticables.

1.2 Algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction

Un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction est une méthode numérique ou un algorithme de recherche d'une valeur approchée d'un x vérifiant $f(x) = 0$, pour une fonction donnée f . Ici, x est un nombre réel appelé zéro de f ou lorsque f est polynomiale racine de f .

Lorsque x est un vecteur, les algorithmes pour trouver x tel que $f(x) = 0$ sont généralement appelés "algorithmes de résolution numérique d'une équation". Ces algorithmes sont une généralisation des algorithmes de recherche d'un zéro d'une fonction et peuvent s'appliquer à des équations linéaires ou non linéaires. Certains algorithmes de recherche des zéros (comme la méthode de Newton) peuvent être généralisés à la résolution numérique des équations non linéaires.

1.2.1 Méthode de Dichotomie (Bisection)

Cette méthode repose sur le constat que si le produit $f(a).f(b) < 0$ est négatif, alors la fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a,b]$. Les différentes étapes de la méthode peuvent être résumées comme suit :

1. Choisir un intervalle $[x_0 = a, x_1 = b]$ tel que $f(a).f(b) < 0$.
2. Calculer la valeur de la fonction en $x_2 = (a+b)/2$
3. On choisit un nouveau intervalle $[x_0, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$ en respectant la condition du 1. On est alors assuré de toujours encadrer la racine.
4. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à l'obtention de la précision désirée, c'est à dire jusqu'à ce que $f(x_2) < \varepsilon$, ε étant la précision désirée.

Après k itérations, la précision sur la racine s , vaut :

$$|x_k - s| < \frac{b - a}{2^{k+1}} \quad (1.2)$$

Il est donc possible d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la valeur de s avec une précision donnée. Si on désire une tolérance τ sur la racine, alors l'inégalité précédente donne le nombre d'itération minimal n qui doit vérifier

$$\frac{b - a}{2^{k+1}} < \tau \quad (1.3)$$

On en déduit le minorant de n

$$n > \frac{\log(b - a) - \log 2\tau}{\log 2} \quad (1.4)$$

Si on choisit le logarithme de base 2 (bits de précision) l'inégalité précédente se simplifie

$$n > \log_2(b - a) - 1 - \log_2 \tau \quad (1.5)$$

Il faut donc une itération supplémentaire par bit de précision. On remarquera que l'ordre de convergence vaut $p = 1$ et qu'il est indépendant de la fonction.

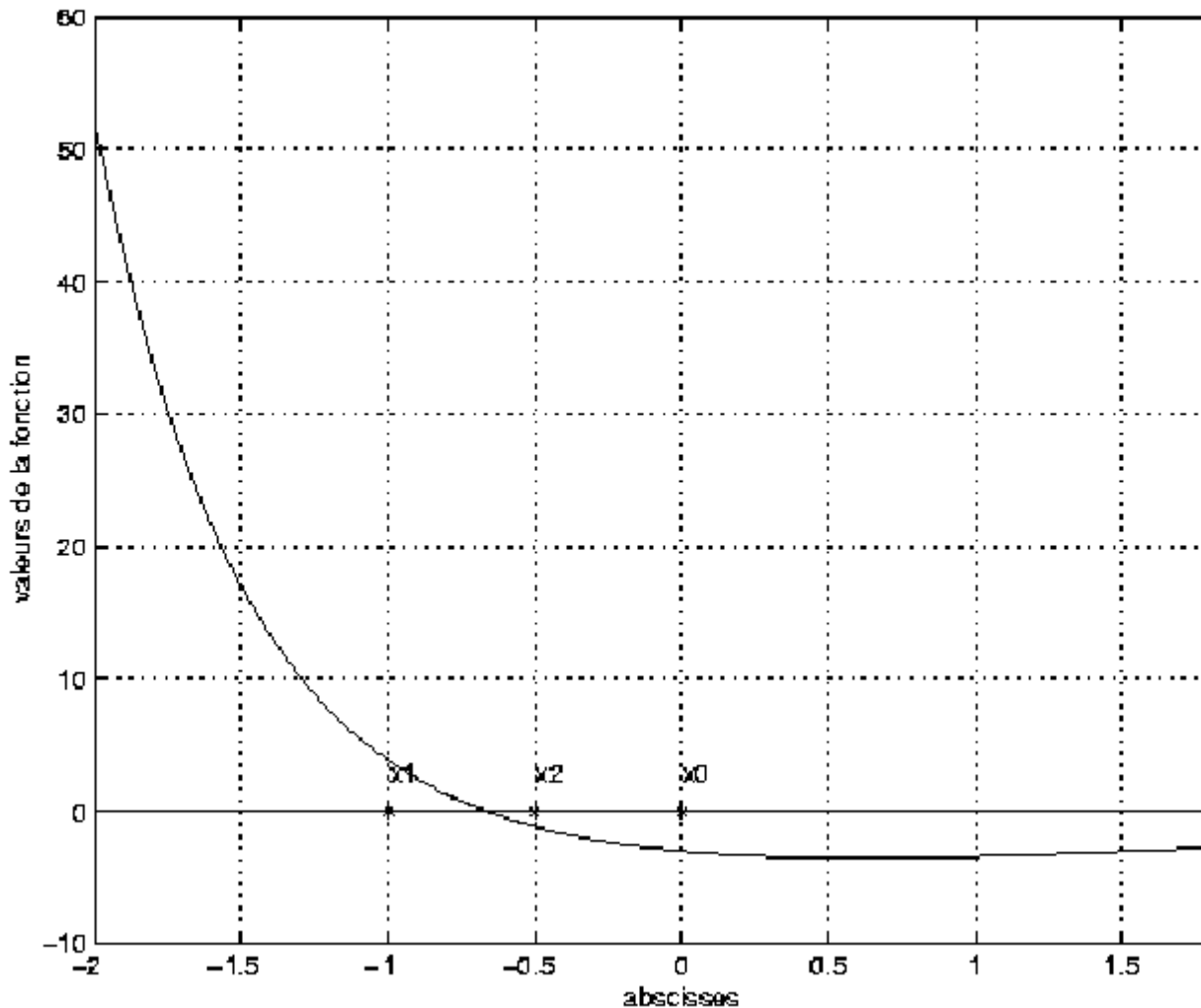


Figure 3.1: Méthode de dichotomie

Exercice n°1.1 Les points successifs pour les premiers pas d'itération apparaissent sur la figure 3.1 pour la fonction

Utiliser la méthode de dichotomie pour obtenir le zéro de l'équation suivante ?

$$f(x) = e^{-2x} - \cos x - 3$$

avec $a = -2$ et $b = 2$.

Tableau 1.1 : programme de la méthode de dichotomie

<pre>x1=-2.00 X2=2.00 IF (f(x1)*f(x2).LT.0) THEN X3=(x1+x2)/2 END IF 5 IF (f(x2)*f(x3).LT.0) THEN X1=x3 X3=(x2+x3)/2</pre>	<pre>ELSE X2=X3 X3=(x1+X3)/2 END IF IF (ABS(f(x3)).GT.0.000001) THEN GOTO 5 END IF</pre>	<pre>WRITE (*,*)'x3=',x3 STOP END Function F(x) F=EXP(-2*x)-COS(x)-3 Return END</pre>
--	--	---

Exercice n°1.2

Utiliser la méthode de Dichotomie pour résoudre l'équation non linéaire :

$\sin(x) - x \cos(x) = 0$ avec $x_1 = \pi = 3.14159265 = x_1$ et $x_2 = 3\pi/2 = 4.71238898 = x_2$

Tableau 2.2 : Programme de la méthode de dichotomie pour obtenir le zéro de l'équation $\sin(x) - x \cos(x) = 0$

<pre>x1=3.141592653589 X2=4.71238898 IF (f(x1)*f(x2).LT.0) THEN X3=(x1+x2)/2 END IF 5 IF (f(x2)*f(x3).LT.0) THEN X1=x3 X3=(x2+x3)/2</pre>	<pre>X3=(x2+x3)/2 ELSE X2=X3 X3=(x1+X3)/2 END IF IF (ABS(f(x3)).GT.0.000001) THEN GOTO 5</pre>	<pre>END IF WRITE (*,*)'x3=',x3 STOP END Function F(x) F=SIN(x)-x*COS(x) Return END</pre>
---	--	---

Tableau 1.3 : Résultats de la méthode de dichotomie

x_1	x_2	$x_3 = c$	$F(x_1)$	$F(x_2)$	$F(x_3)$
3.14159265	4.71238897	3.92699081	+3.141592654	-1.000000025	+2.069695075
3.14159265	4.712388975	4.319689893	+3.141592654	-1.000000025	+0.729194247
3.14159265	4.712388975	4.516039434		-1.000000025	-0.099749667
3.14159265	4.712388975	4.417864664		-1.000000025	+0.325498105
		4.466952049		-1.000000025	+0.115349584
		4.491495742		-1.000000025	+0.00839018
		4.503767588		-1.000000025	-0.045535842
		4.497631665		-1.000000025	-0.018536395
		4.494563704		-1.000000025	-0.005063943
		4.493029723		-1.000000025	+0.001665416
		4.493796714		-1.000000025	-0.001698691
		4.49341329		-1.000000025	-0.000016496
		4.493221471		-1.000000025	+0.000824496
		4.493317345		-1.000000025	+0.000404009
		4.493365282		-1.000000025	+0.000193757
		4.493389251		-1.000000025	+0.000088629
		4.493401235		-1.000000025	+0.000036066
		4.493407227		-1.000000025	+0.000009785
		4.493410223		-1.000000025	-0.000003355
		4.493408725		-1.000000025	+0.000003214
		4.493409474		-1.000000025	-0.00000007
		4.4934091		-1.000000025	+0.00000157
		4.493409287		-1.000000025	+0.00000075
		4.493409381		-1.000000025	+0.000000338
		4.493409428		-1.000000025	+0.000000131
		4.493409451		-1.000000025	+0.00000003
		4.493409463		-1.000000025	-0.000000021
		4.493409457		-1.000000025	+0.000000004
		4.49340946		-1.000000025	-0.000000009
		4.493409459		-1.000000025	-0.000000003
		4.493409458		-1.000000025	0

1.2.2 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une méthode dérivée de la méthode de Newton Raphson où l'on remplace la dérivée $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ On obtient la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (1.6)$$

L'initialisation nécessite deux points x_0 et x_1 , proches, si possible, de la solution recherchée.

Démonstration

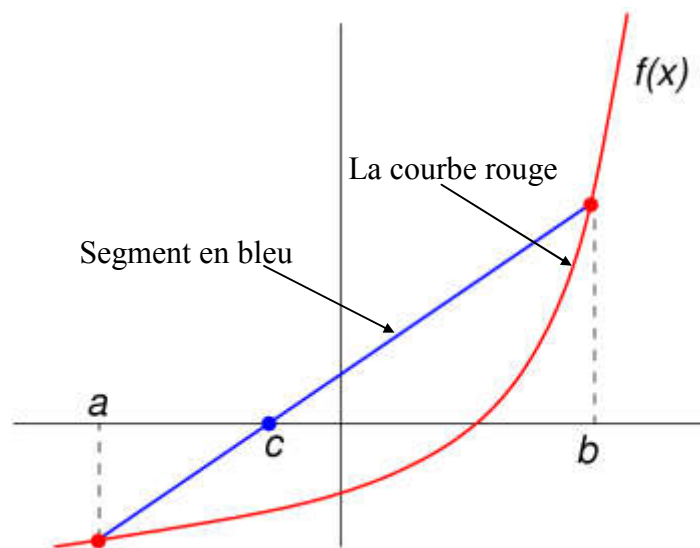


Fig.1.2 : Schéma représentatif de la méthode de la Sécante

La courbe rouge représente la fonction f et le segment en bleu, la sécante.

Pour les points a et b , on construit la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Son équation est :

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b) \quad (1.7)$$

On choisit c égal à l'abscisse du point d'ordonnée nulle de cette droite.

$$f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c - b) = 0 \quad (1.8)$$

Si on extrait c de cette équation, on retrouve la relation de récurrence (1.6).

Cette section est vide, pas assez détaillée ou incomplète.

Convergence de la méthode de la sécante

Si les valeurs initiales x_0 et x_1 sont suffisamment proches de la solution, la méthode aura un ordre de convergence de $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$ qui est le nombre d'or.

Toutefois, la fonction f doit être deux fois continûment différentiable et la solution doit être une racine simple de f .

Exercice n°1.3

Utiliser la méthode de la Sécante pour résoudre les équations suivantes :

a) $f(x) = x^3+x-1 = 0$ prendre $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,6$ et $\varepsilon < 10^{-6}$, $f(x) = x^3-0.236x-0.216 = 0$ prendre $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.6$ et $\varepsilon < 10^{-6}$

b) $f(x) = \cos(x) - x^3 = 0$ prendre $x_0 = 0,0$, $x_1 = 1,0$ et $\varepsilon < 10^{-6}$.

Les tests d'arrêts sont les suivants :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Tableau 1.4 : Programme de la méthode de la sécante

<pre> real x0(1000), x1(1000), x2(1000) x0(0)=0.5 x1(1)=0.6 i=1 5 x2(i+1)=x1(i)-(((x1(i)-x0(i-1)) *f(x1(i))))/(f(x1(i))-f(x0(i-1)))) if (abs(f(x2(i+1))).gt.0.000001) then x0(i)=x1(i) x1(i+1)=x2(i+1) i=i+1 go to 5 end if do i=0,i write (*,*)x0(i),x1(i+1),x2(i+2),f(x2(i+1)) end do x0(i)=x1(i) x1(i+1)=x2(i+1) stop end function f(x) f=x**3+x-1 end </pre>	<pre> real x0(1000), x1(1000), x2(1000) x0(0)=0.5 x1(1)=0.6 i=1 5 x2(i+1)=x1(i)-(((x1(i)-x0(i-1)) *f(x1(i))))/(f(x1(i))-f(x0(i-1)))) if (abs(f(x2(i+1))).gt.0.000001) then x0(i)=x1(i) x1(i+1)=x2(i+1) i=i+1 go to 5 end if do i=0,i write (*,*)x0(i),x1(i+1),x2(i+2),f(x2(i+1)) end do x0(i)=x1(i) x1(i+1)=x2(i+1) stop end function f(x) f=x**3-0.236*x-0.216 end </pre>
--	--

Tableau 1.5 : Résultats de calcul du zéro de la fonction $f(x) = x^3-0.236x-0.216$

itération	$x_0(i)$	$x_1(i+1)$	$x_2(i+2)$	$F(x_2(i+2))$
0	0.5	0.6	0.810088992	0.124435171
1	0.6	0.810088992	0.711822093	$-2.33163927 \cdot 10^{-2}$
2	0.810088992	0.711822093	0.727329433	$-2.88658845 \cdot 10^{-3}$
3	0.711822093	0.727329433	0.729520500	$8.40817156 \cdot 10^{-5}$
4	0.727329433	0.729520500	0.729458511	$-2.51903856 \cdot 10^{-7}$
5	0.729520500	0.729458511	0.729458690	$-8.65797567 \cdot 10^{-9}$
6	0.729458511	0.729458690	0.729458690	$-8.65797567 \cdot 10^{-9}$

Exemple n°1.6

Résultats de l'exécution manuelle de la méthode de la Sécante pour obtenir le zéro de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ prendre $x_0 = 0,5$ et $x_1 = 0,6$

i	$X(i-1)$	$X(i)$	$F(X(i-1))$	$F(X(i))$	$X(i)-X(i-1)$	$(X(i)-X(i-1))*F(X(i))$	$F(X(i))-F(X(i-1))$	$[(X(i)-X(i-1))*F(X(i))]/[F(X(i))-F(X(i-1))]$	$X(i+1)$
1	0,50000000	0,60000000	-0,37500000	-0,18400000	0,10000000	-0,01840000	0,19100000	-0,09633508	0,69633508
2	0,60000000	0,69633508	-0,18400000	0,03397580	0,09633508	0,00327306	0,21797580	0,01501571	0,68131937
3	0,69633508	0,68131937	0,03397580	-0,00241485	-0,01501571	0,00003626	-0,03639065	-0,00099643	0,68231580
4	0,68131937	0,68231580	-0,00241485	-0,00002878	0,00099643	-0,00000003	0,00238607	-0,00001202	0,68232781
5	0,68231580	0,68232781	-0,00002878	0,00000002	0,00001202	0,00000000	0,00002880	0,00000001	0,68232780
6	0,68232781	0,68232780	0,00000002	0,00000000	-0,00000001	0,00000000	-0,00000002	0,00000000	0,68232780
7	0,68232780	0,68232780	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,68232780

Exemple n°1.7

Exécution manuelle de la méthode de la Sécante pour avoir le zéro de la fonction $f(x) = \cos(x) - x^3 = 0$ prendre $x_0 = 0,0$ et $x_1 = 1,0$.

i	$X(i-1)$	$X(i)$	$F(X(i-1))$	$F(X(i))$	$X(i)-X(i-1)$	$(X(i)-X(i-1))*F(X(i))$	$F(X(i))-F(X(i-1))$	$[(X(i)-X(i-1))*F(X(i))]/[F(X(i))-F(X(i-1))]$	$X(i+1)$
1	0,000000000	1,000000000	1,000000000	-0,4596976941	1,000000000	-0,4596976941	-1,4596976941	0,3149266427	0,6850733573
2	1,000000000	0,6850733573	-0,4596976941	0,4528502345	-0,3149266427	-0,1426146040	0,9125479286	-0,1562817683	0,8413551257
3	0,6850733573	0,8413551257	0,4528502345	0,0708759682	0,1562817683	0,0110766216	-0,3819742663	-0,0289983452	0,8703534709
4	0,8413551257	0,8703534709	0,0708759682	-0,0147496135	0,0289983452	-0,0004277144	-0,0856255817	0,0049951706	0,8653583003
5	0,8703534709	0,8653583003	-0,0147496135	0,0003481474	-0,0049951706	-0,0000017391	0,0150977609	-0,0001151863	0,8654734867
6	0,8653583003	0,8654734867	0,0003481474	0,0000016440	0,0001151863	0,0000000002	-0,0003465034	-0,0000005465	0,8654740332
7	0,8654734867	0,8654740332	0,0000016440	-0,0000000002	0,0000005465	0,0000000000	-0,0000016442	0,0000000001	0,8654740331
8	0,8654740332	0,8654740331	-0,0000000002	0,0000000000	-0,0000000001	0,0000000000	0,0000000002	0,0000000000	0,8654740331

1.2.3 Méthode de Regula Falsi (fausse position)

La méthode de la fausse position ou méthode regula falsi, est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction qui combine les possibilités de la méthode de dichotomie et de la méthode de la sécante.

1.2.3.1. Aperçu historique

Les documents les plus anciens ayant résisté au temps et témoignant de la connaissance et de la compréhension de la méthode de la fausse position remontent à une date estimée entre 200 av. J.-C. et 100. La méthode a été trouvée dans un texte chinois antique intitulé les neuf chapitres sur l'art mathématique. Dans ce texte, les exemples de problèmes posés appliquent la méthode de la fausse position aux équations linéaires uniquement, et les solutions sont atteintes en seulement une étape.

En Occident, cette méthode a été beaucoup utilisée par les mathématiciens Fibonacci, Luca Pacioli Robert Recorde, et Galois.

1.2.3.2. Principe de la méthode

Comme la méthode de dichotomie, la méthode de la fausse position commence par deux points a_1 et b_1 tels que $f(a_1)$ et $f(b_1)$ soient de signes opposés, il en résulte d'après le théorème des valeurs intermédiaires que la fonction f possède au moins un zéro dans l'intervalle $[a_1, b_1]$. La méthode consiste à produire une suite décroissante d'intervalles $[a_k, b_k]$ qui contiennent tous un zéro de f .

À l'étape k , le nombre

$$c_k = a_k - \frac{a_k - b_k}{f(a_k) - f(b_k)} f(a_k) \quad (1.9)$$

est calculé. Comme expliqué ci-dessous, c_k est l'abscisse de l'intersection de la droite passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ avec l'axe des abscisses, que nous appellerons pour simplifier zéro de la sécante. Si $f(a_k)$ et $f(c_k)$ sont de mêmes signes, alors nous posons $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$, sinon nous posons $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$. Ce procédé est répété jusqu'à ce que le zéro soit suffisamment approché.

La formule (1.9) est également employée dans la méthode de la sécante, cependant la méthode de la sécante retient systématiquement les deux derniers points calculés, alors que la méthode de la fausse position retient deux points qui encadrent certainement un zéro. D'autre part, la seule différence entre la méthode de la fausse position et la méthode de dichotomie est l'utilisation de la relation $c_k = (a_k + b_k) / 2$.

La première étape de la méthode est identique à celle de la précédente. Au lieu d'utiliser le point médian, on utilise le point d'intersection avec l'axe des abscisses de la droite $(x^{(0)} = a, y^{(0)} = f(a)), (x^{(1)} = b, y^{(1)} = f(b))$. Ce point est donné par l'équation suivante qui se vérifie très simplement :

$$x^{(2)} = x^{(0)} - y^{(0)} \frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{y^{(1)} - y^{(0)}} \quad (1.10)$$

Les étapes 3 et 4 sont alors identiques à celles de la méthode de dichotomie (voir la méthode de dichotomie).

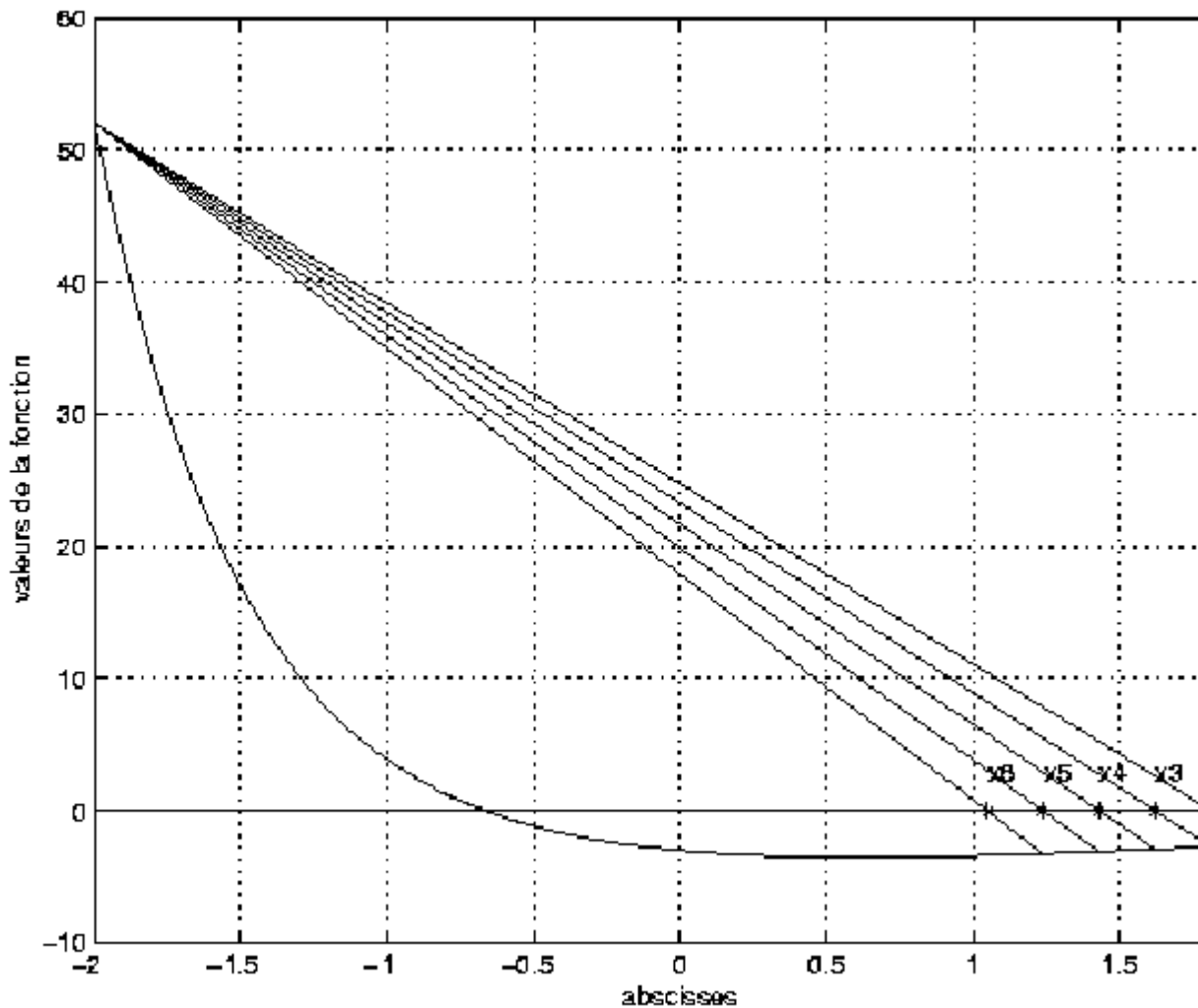


Figure 1.3: Schéma représentatif de la méthode de Régula-Falsi

La figure 1.3 montre l'évolution des points au cours des itérations. On démontre que si les dérivées $f'(s)$ et $f''(s)$ sont différents de 0, l'ordre de convergence de cette méthode vaut 1.

Exercice n°1.8

Utiliser la méthode de la fausse position pour obtenir la solution des équations suivantes :

a) $F(x)=x^3+x-1=0$ prendre $a_0=0.1$ et $b_0=1.0$

b) $f(x)=e^{(-2x)}-\cos(x)-3=0$ prendre $a_0=-2,0$ et $b_0=2,0$.

Tableau 1.8 : Programme de la méthode de la fausse position pour résoudre l'équation a.

<pre> REAL a(1000),b(1000),c(1000) a(0)=0.1 b(0)=1.0 i=0 5 c(i)=a(i)-((a(i)-b(i))*f(a(i)))/(f(a(i))-f(b(i))) IF (ABS(F(c(i))).gt.0.00000001) THEN if ((f(a(i))*f(c(i))).GT.0) then a(i+1)=c(i) b(i+1)=b(i) else a(i+1)=a(i) b(i+1)=c(i) end if </pre>	<pre> i=i+1 GOTO 5 END IF do i=0,i write (*,*)'c(i,i)'=',c(i) end do stop end FUNCTION f(x) f=x**3+x-1 Return END </pre>
---	--

Tableau 1.9 : Programme de la méthode de la fausse position pour aboutir au zéro de l'équation b.

<pre> REAL a(1000),b(1000),c(1000) a(0)=-2.0 b(0)=2.0 i=0 5 c(i)=a(i)-((a(i)-b(i))*f(a(i)))/(f(a(i))-f(b(i))) IF (ABS(F(c(i))).gt.0.00000001) THEN if ((f(a(i))*f(c(i))).GT.0) then a(i+1)=c(i) b(i+1)=b(i) else a(i+1)=a(i) b(i+1)=c(i) end if </pre>	<pre> i=i+1 GOTO 5 END IF do i=0,i write (*,*)'c(i,i)'=',c(i) end do stop end FUNCTION f(x) f=-3-cos(x)+EXP(-2*x) Return END </pre>
--	---

Tableau 1.10 : Les onze derniers résultats de la méthode de la fausse position lors de la recherche du zéro de l'équation $f(x) = e^{(-2x)} - \cos(x) - 3$

itération	a ₀	c(i)	c(i+1)	F(x)
100	-2.00000000	-0.665715456	-0.665715933	-1.37090683E-05
101	-2.00000000	-0.665715933	-0.665716290	-1.06096268E-05
102	-2.00000000	-0.665716290	-0.665716588	-8.28504562E-06
103	-2.00000000	-0.665716588	-0.665716827	-6.25848770E-06
104	-2.00000000	-0.665716827	-0.665717006	-4.94718552E-06
105	-2.00000000	-0.665717006	-0.665717125	-3.87430191E-06
106	-2.00000000	-0.665717125	-0.665717244	-2.86102295E-06
107	-2.00000000	-0.665717244	-0.665717304	-2.38418579E-06
108	-2.00000000	-0.665717304	-0.665717363	-1.84774399E-06
109	-2.00000000	-0.665717363	-0.665717423	-1.31130219E-06
110	-2.00000000	-0.665717423	-0.665717483	-8.34465027E-07

Tableau 1.11 : Exécution manuelle de la méthode de la fausse position pour la seconde équation non linéaire posée à la question b.

n	x(i)	y(i)	x(i+1)	y(i+1)	X(i+1)-X(i)	y(i+1)-y(i)	$\frac{X(i+1)-X(i)}{y(i+1)-y(i)}$	$\frac{y(i) * (X(i+1)-X(i))}{y(i+1)-y(i)}$	$\frac{X(i+2)=x(i)-y(i) * \frac{X(i+1)-X(i)}{y(i+1)-y(i)}}{y(i+1)-y(i)}$	y(i+2)
0	-2,00000000	52,01429687	2,00000000	-2,56553752	4,00000000	-54,57983439	-0,07328714	-3,81197909	1,81197909	-2,73447180
1	-2,00000000	52,01429687	1,81197909	-2,73447180	3,81197909	-54,74876867	-0,06962675	-3,62158669	1,62158669	-2,91019166
2	-2,00000000	52,01429687	1,62158669	-2,91019166	3,62158669	-54,92448853	-0,06593756	-3,42969576	1,42969576	-3,08332921
3	-2,00000000	52,01429687	1,42969576	-3,08332921	3,42969576	-55,09762608	-0,06224761	-3,23776587	1,23776587	-3,24279022
4	-2,00000000	52,01429687	1,23776587	-3,24279022	3,23776587	-55,25708709	-0,05859458	-3,04775594	1,04775594	-3,37650908
5	-2,00000000	52,01429687	1,04775594	-3,37650908	3,04775594	-55,39080595	-0,05502278	-2,86197103	0,86197103	-3,47258082
6	-2,00000000	52,01429687	0,86197103	-3,47258082	2,86197103	-55,48687769	-0,05157924	-2,68285795	0,68285795	-3,52057457
7	-2,00000000	52,01429687	0,68285795	-3,52057457	2,68285795	-55,53487144	-0,04830943	-2,51278100	0,51278100	-3,51278864
8	-2,00000000	52,01429687	0,51278100	-3,51278864	2,51278100	-55,52708551	-0,04525325	-2,35381590	0,35381590	-3,44524753
9	-2,00000000	52,01429687	0,35381590	-3,44524753	2,35381590	-55,45954440	-0,04244203	-2,20759259	0,20759259	-3,31831192
10	-2,00000000	52,01429687	0,20759259	-3,31831192	2,20759259	-55,33260879	-0,03989677	-2,07520265	0,07520265	-3,13681441
11	-2,00000000	52,01429687	0,07520265	-3,13681441	2,07520265	-55,15111128	-0,03762758	-1,95717193	-0,04282807	-2,90965136
12	-2,00000000	52,01429687	-0,04282807	-2,90965136	1,95717193	-54,92394823	-0,03563422	-1,85348878	-0,14651122	-2,64881353
13	-2,00000000	52,01429687	-0,14651122	-2,64881353	1,85348878	-54,66311040	-0,03390749	-1,76367416	-0,23632584	-2,36796228
14	-2,00000000	52,01429687	-0,23632584	-2,36796228	1,76367416	-54,38225915	-0,03243106	-1,68687864	-0,31312136	-2,08080763
15	-2,00000000	52,01429687	-0,31312136	-2,08080763	1,68687864	-54,09510450	-0,03118357	-1,62199162	-0,37800838	-1,79962565
16	-2,00000000	52,01429687	-0,37800838	-1,79962565	1,62199162	-53,81392252	-0,03014074	-1,56774957	-0,43225043	-1,53420439
17	-2,00000000	52,01429687	-0,43225043	-1,53420439	1,56774957	-53,54850126	-0,02927719	-1,52283238	-0,47716762	-1,29135562
18	-2,00000000	52,01429687	-0,47716762	-1,29135562	1,52283238	-53,30565249	-0,02856793	-1,48594102	-0,51405898	-1,07495672
19	-2,00000000	52,01429687	-0,51405898	-1,07495672	1,48594102	-53,08925359	-0,02798949	-1,45585353	-0,54414647	-0,88636831
20	-2,00000000	52,01429687	-0,54414647	-0,88636831	1,45585353	-52,90066518	-0,02752051	-1,43146022	-0,56853978	-0,72503788
21	-2,00000000	52,01429687	-0,56853978	-0,72503788	1,43146022	-52,73933475	-0,02714217	-1,41178111	-0,58821889	-0,58912828
22	-2,00000000	52,01429687	-0,58821889	-0,58912828	1,41178111	-52,60342515	-0,02683820	-1,39596997	-0,60403003	-0,47606799
23	-2,00000000	52,01429687	-0,60403003	-0,47606799	1,39596997	-52,49036486	-0,02659479	-1,38330904	-0,61669096	-0,38297725
24	-2,00000000	52,01429687	-0,61669096	-0,38297725	1,38330904	-52,39727412	-0,02640040	-1,37319829	-0,62680171	-0,30696482
25	-2,00000000	52,01429687	-0,62680171	-0,30696482	1,37319829	-52,32126169	-0,02624551	-1,36514184	-0,63485816	-0,24531328
26	-2,00000000	52,01429687	-0,63485816	-0,24531328	1,36514184	-52,25961015	-0,02612231	-1,35873369	-0,64126631	-0,19557871
27	-2,00000000	52,01429687	-0,64126631	-0,19557871	1,35873369	-52,20987558	-0,02602446	-1,35364386	-0,64635614	-0,15563068
28	-2,00000000	52,01429687	-0,64635614	-0,15563068	1,35364386	-52,16992755	-0,02594682	-1,34960574	-0,65039426	-0,12365402
29	-2,00000000	52,01429687	-0,65039426	-0,12365402	1,34960574	-52,13795089	-0,02588529	-1,34640492	-0,65359508	-0,09812840
30	-2,00000000	52,01429687	-0,65359508	-0,09812840	1,34640492	-52,11242527	-0,02583654	-1,34386962	-0,65613038	-0,07779690
31	-2,00000000	52,01429687	-0,65613038	-0,07779690	1,34386962	-52,09209377	-0,02579796	-1,34186262	-0,65813738	-0,06163070
32	-2,00000000	52,01429687	-0,65813738	-0,06163070	1,34186262	-52,07592757	-0,02576743	-1,34027456	-0,65972544	-0,04879416
33	-2,00000000	52,01429687	-0,65972544	-0,04879416	1,34027456	-52,06309103	-0,02574328	-1,33901844	-0,66098156	-0,03861262
34	-2,00000000	52,01429687	-0,66098156	-0,03861262	1,33901844	-52,05290949	-0,02572418	-1,33802516	-0,66197484	-0,03054393
35	-2,00000000	52,01429687	-0,66197484	-0,03054393	1,33802516	-52,04484080	-0,02570908	-1,33723990	-0,66276010	-0,02415401
36	-2,00000000	52,01429687	-0,66276010	-0,02415401	1,33723990	-52,03845088	-0,02569715	-1,33661921	-0,66338079	-0,01909633
37	-2,00000000	52,01429687	-0,66338079	-0,01909633	1,33661921	-52,03339320	-0,02568772	-1,33612867	-0,66387133	-0,01509483
38	-2,00000000	52,01429687	-0,66387133	-0,01509483	1,33612867	-52,02939170	-0,02568027	-1,33574103	-0,66425897	-0,01193003
39	-2,00000000	52,01429687	-0,66425897	-0,01193003	1,33574103	-52,02622690	-0,02567438	-1,33543473	-0,66456527	-0,00942766

40	-2,00000000	52,01429687	-0,66456527	-0,00942766	1,33543473	-52,02372452	-0,02566973	-1,33519273	-0,66480727	-0,00744947
41	-2,00000000	52,01429687	-0,66480727	-0,00744947	1,33519273	-52,02174634	-0,02566605	-1,33500153	-0,66499847	-0,00588592
42	-2,00000000	52,01429687	-0,66499847	-0,00588592	1,33500153	-52,02018279	-0,02566315	-1,33485048	-0,66514952	-0,00465027
43	-2,00000000	52,01429687	-0,66514952	-0,00465027	1,33485048	-52,01894714	-0,02566085	-1,33473115	-0,66526885	-0,00367386
44	-2,00000000	52,01429687	-0,66526885	-0,00367386	1,33473115	-52,01797073	-0,02565904	-1,33463688	-0,66536312	-0,00290236
45	-2,00000000	52,01429687	-0,66536312	-0,00290236	1,33463688	-52,01719923	-0,02565761	-1,33456241	-0,66543759	-0,00229280
46	-2,00000000	52,01429687	-0,66543759	-0,00229280	1,33456241	-52,01658967	-0,02565648	-1,33450359	-0,66549641	-0,00181122
47	-2,00000000	52,01429687	-0,66549641	-0,00181122	1,33450359	-52,01610809	-0,02565558	-1,33445712	-0,66554288	-0,00143077
48	-2,00000000	52,01429687	-0,66554288	-0,00143077	1,33445712	-52,01572764	-0,02565488	-1,33442042	-0,66557958	-0,00113022
49	-2,00000000	52,01429687	-0,66557958	-0,00113022	1,33442042	-52,01542709	-0,02565432	-1,33439142	-0,66560858	-0,00089279
50	-2,00000000	52,01429687	-0,66560858	-0,00089279	1,33439142	-52,01518966	-0,02565388	-1,33436852	-0,66563148	-0,00070523
51	-2,00000000	52,01429687	-0,66563148	-0,00070523	1,33436852	-52,01500210	-0,02565353	-1,33435043	-0,66564957	-0,00055707
52	-2,00000000	52,01429687	-0,66564957	-0,00055707	1,33435043	-52,01485394	-0,02565326	-1,33433613	-0,66566387	-0,00044004
53	-2,00000000	52,01429687	-0,66566387	-0,00044004	1,33433613	-52,01473691	-0,02565304	-1,33432485	-0,66567515	-0,00034759
54	-2,00000000	52,01429687	-0,66567515	-0,00034759	1,33432485	-52,01464446	-0,02565287	-1,33431593	-0,66568407	-0,00027456
55	-2,00000000	52,01429687	-0,66568407	-0,00027456	1,33431593	-52,01457143	-0,02565273	-1,33430889	-0,66569111	-0,00021688
56	-2,00000000	52,01429687	-0,66569111	-0,00021688	1,33430889	-52,01451375	-0,02565263	-1,33430332	-0,66569668	-0,00017131
57	-2,00000000	52,01429687	-0,66569668	-0,00017131	1,33430332	-52,01446818	-0,02565254	-1,33429893	-0,66570107	-0,00013532
58	-2,00000000	52,01429687	-0,66570107	-0,00013532	1,33429893	-52,01443219	-0,02565248	-1,33429546	-0,66570454	-0,00010689
59	-2,00000000	52,01429687	-0,66570454	-0,00010689	1,33429546	-52,01440376	-0,02565242	-1,33429272	-0,66570728	-0,00008443
60	-2,00000000	52,01429687	-0,66570728	-0,00008443	1,33429272	-52,01438130	-0,02565238	-1,33429055	-0,66570945	-0,00006669
61	-2,00000000	52,01429687	-0,66570945	-0,00006669	1,33429055	-52,01436356	-0,02565235	-1,33428884	-0,66571116	-0,00005268
62	-2,00000000	52,01429687	-0,66571116	-0,00005268	1,33428884	-52,01434955	-0,02565232	-1,33428749	-0,66571251	-0,00004161
63	-2,00000000	52,01429687	-0,66571251	-0,00004161	1,33428749	-52,01433848	-0,02565230	-1,33428642	-0,66571358	-0,00003287
64	-2,00000000	52,01429687	-0,66571358	-0,00003287	1,33428642	-52,01432974	-0,02565229	-1,33428558	-0,66571442	-0,00002596
65	-2,00000000	52,01429687	-0,66571442	-0,00002596	1,33428558	-52,01432283	-0,02565227	-1,33428491	-0,66571509	-0,00002051
66	-2,00000000	52,01429687	-0,66571509	-0,00002051	1,33428491	-52,01431738	-0,02565226	-1,33428438	-0,66571562	-0,00001620
67	-2,00000000	52,01429687	-0,66571562	-0,00001620	1,33428438	-52,01431307	-0,02565225	-1,33428397	-0,66571603	-0,00001280
68	-2,00000000	52,01429687	-0,66571603	-0,00001280	1,33428397	-52,01430967	-0,02565225	-1,33428364	-0,66571636	-0,00001011
69	-2,00000000	52,01429687	-0,66571636	-0,00001011	1,33428364	-52,01430698	-0,02565224	-1,33428338	-0,66571662	-0,00000798
70	-2,00000000	52,01429687	-0,66571662	-0,00000798	1,33428338	-52,01430485	-0,02565224	-1,33428318	-0,66571682	-0,00000631
71	-2,00000000	52,01429687	-0,66571682	-0,00000631	1,33428318	-52,01430318	-0,02565224	-1,33428301	-0,66571699	-0,00000498
72	-2,00000000	52,01429687	-0,66571699	-0,00000498	1,33428301	-52,01430185	-0,02565223	-1,33428289	-0,66571711	-0,00000393
73	-2,00000000	52,01429687	-0,66571711	-0,00000393	1,33428289	-52,01430080	-0,02565223	-1,33428279	-0,66571721	-0,00000311
74	-2,00000000	52,01429687	-0,66571721	-0,00000311	1,33428279	-52,01429998	-0,02565223	-1,33428271	-0,66571729	-0,00000245
75	-2,00000000	52,01429687	-0,66571729	-0,00000245	1,33428271	-52,01429932	-0,02565223	-1,33428264	-0,66571736	-0,00000194
76	-2,00000000	52,01429687	-0,66571736	-0,00000194	1,33428264	-52,01429881	-0,02565223	-1,33428259	-0,66571741	-0,00000153
77	-2,00000000	52,01429687	-0,66571741	-0,00000153	1,33428259	-52,01429840	-0,02565223	-1,33428255	-0,66571745	-0,00000121
78	-2,00000000	52,01429687	-0,66571745	-0,00000121	1,33428255	-52,01429808	-0,02565223	-1,33428252	-0,66571748	-0,00000096
79	-2,00000000	52,01429687	-0,66571748	-0,00000096	1,33428252	-52,01429783	-0,02565223	-1,33428250	-0,66571750	-0,00000075
80	-2,00000000	52,01429687	-0,66571750	-0,00000075	1,33428250	-52,01429762	-0,02565223	-1,33428248	-0,66571752	-0,00000060
81	-2,00000000	52,01429687	-0,66571752	-0,00000060	1,33428248	-52,01429747	-0,02565223	-1,33428246	-0,66571754	-0,00000047
82	-2,00000000	52,01429687	-0,66571754	-0,00000047	1,33428246	-52,01429734	-0,02565223	-1,33428245	-0,66571755	-0,00000037
83	-2,00000000	52,01429687	-0,66571755	-0,00000037	1,33428245	-52,01429724	-0,02565222	-1,33428244	-0,66571756	-0,00000029
84	-2,00000000	52,01429687	-0,66571756	-0,00000029	1,33428244	-52,01429716	-0,02565222	-1,33428244	-0,66571756	-0,00000023

85	-2,00000000	52,01429687	-0,66571756	-0,00000023	1,33428244	-52,01429710	-0,02565222	-1,33428243	-0,66571757	-0,00000018
86	-2,00000000	52,01429687	-0,66571757	-0,00000018	1,33428243	-52,01429705	-0,02565222	-1,33428242	-0,66571758	-0,00000014
87	-2,00000000	52,01429687	-0,66571758	-0,00000014	1,33428242	-52,01429701	-0,02565222	-1,33428242	-0,66571758	-0,00000011
88	-2,00000000	52,01429687	-0,66571758	-0,00000011	1,33428242	-52,01429698	-0,02565222	-1,33428242	-0,66571758	-0,00000009
89	-2,00000000	52,01429687	-0,66571758	-0,00000009	1,33428242	-52,01429696	-0,02565222	-1,33428242	-0,66571758	-0,00000007
90	-2,00000000	52,01429687	-0,66571758	-0,00000007	1,33428242	-52,01429694	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000006
91	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000006	1,33428241	-52,01429693	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000004
92	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000004	1,33428241	-52,01429691	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000004
93	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000004	1,33428241	-52,01429690	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000003
94	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000003	1,33428241	-52,01429690	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000002
95	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000002	1,33428241	-52,01429689	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000002
96	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000002	1,33428241	-52,01429689	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000001
97	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000001	1,33428241	-52,01429688	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000001
98	-2,00000000	52,01429687	-0,66571759	-0,00000001	1,33428241	-52,01429688	-0,02565222	-1,33428241	-0,66571759	-0,00000001

1.2.4 Méthode de ISSAAC Newton et Joseph Raphson(N-R)

1.2.4.1. Principe de la méthode de Newton-Raphson

Soit la fonction $f(x)$ qui est continue et continûment dérivable dans le voisinage de x . la méthode de Newton –Raphson est une méthode numérique qui permet de trouver la valeur de variable x pour laquelle $f(x)=0$ à partir d'une première estimation de la valeur de x . Pour faire le développement en série de Taylor autour d'une estimée x_0 nous donne :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^1}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (1.11)$$

Si x_0 est une estimée proche de la solution x de $f(x)=0$, alors le carré de l'erreur $\varepsilon_0 = x - x_0$ et les termes de degré supérieur sont négligeables. Sachant que $f(x)=0$ la relation (1.11) devient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0 \quad (1.12)$$

L'approximation de l'erreur est donc :

$$\varepsilon_0 = x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (1.13)$$

On peut donc considérer qu'une meilleure estimée de x sera :

$$x_1 = x_0 + \varepsilon \quad (1.14)$$

D'une manière générale :

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k \quad (1.15)$$

Où

$$\varepsilon_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.16)$$

avec k itérations.

Des équations (1.15) et (1.16) on obtient l'algorithme de Newton-Raphson.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.17)$$

La méthode de Newton, appelée aussi méthode de Newton-Raphson, " linéarise " la fonction f en la valeur approchée courante du zéro. Cela donne la relation récurrente suivante:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.17)$$

La méthode de Newton peut ne pas converger si on commence trop loin d'un zéro. Cependant, si elle converge, elle est beaucoup plus rapide que la méthode de dichotomie (sa complexité est quadratique). La méthode de Newton est importante parce qu'elle peut aisément se généraliser à des problèmes en dimensions supérieures.

1.2.4.2 Exercices

Exercice n°1.7

Utiliser la méthode de Newton-Raphson pour obtenir manuellement le zéro de la fonction $f(x)=x^3-0,236x-0,216=0$, prendre $x_0=0,75$ et $\varepsilon=10^{-6}$

Tableau 1.12. : Le programme de la méthode de N-R pour résoudre l'équation non linéaire $x^3 - 0.236x - 0.216$.

<pre> Real X(1000),f(1000),G(1000) Real r(1000),eps(1000) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultats1.default') DATA X0/0.5/ i=0 X(i)=x0 5 F(i)=X(i)**3-0.236*X(i)-0.216 G(i)=3*x(i)**2-0.236 r(i)=-f(i)/g(i) X(i+1)=X(i)+r(i) </pre>	<pre> eps(i)=ABS(X(i+1)-X(i)) if (eps(i).GT.0.0000001) then i=i+1 GO TO 5 end if do i=0,i write(7,1)X(i),F(i),EPS(i) 1 format (5x,4f12.8) end do stop end </pre>
---	--

Solution

Tableau 1.13 : Résultats de l'exécution manuelle de la méthode de Newton Raphson

n	x(n)	f(x(n))	f'(x(n))	f(x(n))/f'(x(n))	x(n+1)=x(n)-f(x(n))/f'(x(n))	$\varepsilon= x(n+1)-x(n) $
0	0,7500000000	0,028875000	1,451500000	0,019893214	0,730106786	0,019893214
1	0,7301067861	0,000882542	1,363167757	0,000647420	0,729459366	0,000647420
2	0,7294593659	0,000000918	1,360332899	0,000000675	0,729458691	0,000000675
3	0,7294586912	0,000000000	1,360329946	0,000000000	0,729458691	0,000000000

Exercice n°1.8

Utiliser la méthode de N-R pour obtenir le zéro des deux équations non linéaires suivantes :

- $f(x) = \sqrt{1+x} - x$ prendre $x_0=1$ et $\varepsilon=10^{-10}$
- $f(x) = x^3 - 2x - 5$ prendre $x_0=2$ et $\varepsilon=10^{-10}$

1.2.5 Méthode du point fixe

1.5.1. Principe de la méthode

Il y a plusieurs façons de récrire une équation $f(x)=0$ sous la forme $g(x)=x$ sans que cela change les racines. Dans ce cas, on dira que la racine x de $f(x)=0$ est un point fixe de $g(x)$. Pour chercher les points fixes de $g(x)$ on peut, sous certaines conditions, utiliser l'algorithme suivant :

$$x(n+1)=g(x(n)) \quad (1.18)$$

Pour $n=0, 1, 2, 3, \dots$

1.2.5.2. Exercices

Exercice n°1.9 : Utiliser la méthode du point fixe pour obtenir manuellement le zéro de la fonction $f(x)=x^3-0,236x-0,216=0$, prendre $x_0=0,50$ et $\epsilon=10^{-6}$

Tableau 1.14 : Programme facilitant le calcul par la méthode du point fixe.

<pre> real x(1000) x(0)=0.50 i=0 5 if (abs(x(i)-G(x(i))).GT.0.00000000001) then i=i+1 x(i)=G(x(i-1)) GO TO 5 end if </pre>	<pre> DO i=1,i WRITE (*,*)'x(',i,')=',x(i) END DO stop end function G(x) G=(0.236*x+0.216)**(0.3333333333) return end </pre>
--	--

Exercice n°1.10

a) Utiliser la méthode du point fixe pour obtenir le zéro de la fonction $f(x)=xe^x-1$

Prendre $x_0=0,5$ et $\epsilon=10^{-6}$?

b) Utiliser la méthode du point fixe pour obtenir la solution du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - (0,1x^2 + 0,1y^2 + 0,8) \\ f_2(x, y) = y - (0,1x + 0,1xy^2 + 0,8) \end{cases}$$

Prendre $x_0=0,5$, $y_0=0,5$ et $\epsilon=10^{-6}$

Solution

a) On peut réécrire $f(x)$ sous la forme de $x=e^{-x}$ par la suite nous appliquons la méthode du point fixe. Les résultats de calcul obtenus sont indiqués dans le tableau 1.14.

Tableau 1.15 : Résultats obtenus par la méthode du point fixe pour résoudre $f(x)=xe^x-1$

i	x(i)	i	x(i)	i	x(i)
0	0,5000000000	14	0,5671188643	27	0,5671433058
1	0,6065306597	15	0,5671571437	28	0,5671432817
2	0,5452392119	16	0,5671354337	29	0,5671432953
3	0,5797030949	17	0,5671477463	30	0,5671432876
4	0,5600646279	18	0,5671407633	31	0,5671432920
5	0,5711721490	19	0,5671447237	32	0,5671432895
6	0,5648629470	20	0,5671424776	33	0,5671432909
7	0,5684380476	21	0,5671437514	34	0,5671432901
8	0,5664094527	22	0,5671430290	35	0,5671432906
9	0,5675596343	23	0,5671434387	36	0,5671432903
10	0,5669072129	24	0,5671432063	37	0,5671432905
11	0,5672771960	25	0,5671433381	38	0,5671432904
12	0,5670673519	26	0,5671432634	39	0,5671432904
13	0,5671863601				

b) On peut récrire le système composé de $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x = (0,1x^2 + 0,1y^2 + 0,8) \\ y = (0,1x + 0,1xy^2 + 0,8) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} g_1(x,y) = (0,1x^2 + 0,1y^2 + 0,8) \\ g_2(x,y) = (0,1x + 0,1xy^2 + 0,8) \end{cases}$$

Tableau 1.16 : Résultats obtenus par la méthode du point fixe pour résoudre le système d'équations de l'exercice 1.11.

i	X(i)	Y(i)	i	X(i)	Y(i)	i	X(i)	Y(i)
0	0,500000000000	0,500000000000	11	0,999986943717	0,999986943824	22	0,999999999452	0,999999999452
1	0,850000000000	0,862500000000	12	0,999994777542	0,999994777559	23	0,999999999781	0,999999999781
2	0,946640625000	0,948232031250	13	0,999997911026	0,999997911028	24	0,999999999912	0,999999999912
3	0,979527245799	0,979780684901	14	0,999999164412	0,999999164412	25	0,999999999965	0,999999999965
4	0,991944381577	0,991984420255	15	0,999999665765	0,999999665765	26	0,999999999986	0,999999999986
5	0,996798674617	0,996805047652	16	0,999999866306	0,999999866306	27	0,999999999994	0,999999999994
6	0,998722790074	0,998723807574	17	0,999999946522	0,999999946522	28	0,999999999998	0,999999999998
7	0,999489645523	0,999489808182	18	0,999999978609	0,999999978609	29	0,999999999999	0,999999999999
8	0,999795942817	0,999795968833	19	0,999999991444	0,999999991444	30	1,000000000000	1,000000000000
9	0,999918390657	0,999918394819	20	0,999999996577	0,999999996577	31	1,000000000000	1,000000000000
10	0,999967358427	0,999967359093	21	0,999999998631	0,999999998631	32	1,000000000000	1,000000000000

1.2.6 Méthode de Steffensen (Aitken+Newton)

Le mot Aitken signifie dans cette méthode l'Accélération des suites récurrentes.

1.2.6.1 Principe de la méthode

On construit une suite $\{x_n\}$ à l'aide de la formule obtenue en remplaçant dans celle de la méthode de Newton-Raphson $f'(x_n)$ par l'approximation $\frac{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)}{f(x_n)}$, pente de la sécante passant par les points $(x_n + f(x_n), f(x_n + f(x_n)))$ et $(x_n, f(x_n))$.

1.2.6.2. Algorithme

a) Initialisation : x_0 quelconque (voisin de x)

b) Itération :

$$x_{n+1} = \frac{g(g(x_n))x_n - g(x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n} = g(x_n) + \frac{1}{\frac{1}{g(g(x_n)) - g(x_n)} - \frac{1}{g(x_n) - x_n}}$$

$$x_{n+1} = g(x_n) + \frac{1}{\frac{1}{g(g(x_n)) - g(x_n)} - \frac{1}{g(x_n) - x_n}} \quad (1.19)$$

avec $g(x) = f(x)+x$; $n = 0, \dots$

c) (fin si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$)

1.2.6.3. Exercices et programmes

Exercice n°1.11

On considère l'équation :

$$f(x) = (x+3)/(x-1) - x + 2 = 0$$

Cette équation a 2 racines : $2 + \sqrt{5}$ et $2 - \sqrt{5}$

Calculer numériquement seulement la racine négative, en prenant pour point de départ $x_0 = 0$.

• **Les deux premières itérations**

$$f(x_0) = f(0) = (0+3)/(0-1) - 0 + 2 = -1$$

$$g(x_0) = f(x_0) + x_0 = -1 + 0 = -1$$

$$g(g(x_0)) = g(-1) = f(-1) + (-1) = (-1+3)/(-1-1) - (-1) + 2 + (-1) = 1$$

$$x_1 = (g(g(x_0))x_0 - g(x_0)^2)/(g(g(x_0)) - 2g(x_0) + x_0) = ((1)(0) - (-1)^2)/(1 - 2(-1) + 0) = -1/3$$

$$f(x_1) = f(-1/3) = (-1/3+3)/(-1/3-1) - (-1/3) + 2 = 1/3$$

$$g(x_1) = f(x_1) + x_1 = 1/3 + (-1/3) = 0$$

$$g(g(x_1)) = g(0) = f(0) + 0 = (0+3)/(0-1) - 0 + 2 + 0 = -1$$

$$x_2 = (g(g(x_1))x_1 - g(x_1)^2)/(g(g(x_1)) - 2g(x_1) + x_1) = ((-1)(-1/3) - (0)^2)/(-1 - 2(0) + (-1/3)) = -1/4$$

Tableau 1.17 : Programme de la méthode de Steffensen pour obtenir la racine négative de l'équation de l'exercice 1.11.

<pre> REAL x(1000) x(0)=0 i=0 5 x(i+1)=(g(g(x(i)))*x(i)- (g(x(i)**2))/(g(g(x(i))))-2*g(x(i))+x(i)) if (ABS(x(i+1)-x(i)).GT.0.00000001) then x(i)=x(i+1) i=i+1 GOTO 5 end if </pre>	<pre> do i=0,i write (*,*)'x(',i,')=',x(i) end do Stop end function g(x) g=((x+3)/(x-1))-x+2+x return end </pre>
--	--

Tableau 1.18: Les six premiers résultats de l'exécution du programme de la méthode de Steffensen

i	x(i)	x(i+1)	Err (i)
1	-0.33333333333333331	-0.25000000000000000	9.73.10 ⁻⁰²
2	-0.25000000000000000	-0.23636363636363636	1.39.10 ⁻⁰²
2	-0.23636363636363636	-0.23606811145510836	2.96.10 ⁻⁰⁴
4	-0.23606811145510836	-0.23606797749981720	1.34.10 ⁻⁰⁷
5	-0.23606797749981720	-0.23606797749978969	2.75.10 ⁻¹⁴
6	-0.23606797749978969	-0.23606797749978969	0

Exercice n°1.12

Exécuter étape par étape la méthode de Steffensen pour obtenir la racine négative de la fonction $f(x) = (x+3)/(x-1) - x + 2 = 0$

solution

Tableau 1.19 : Résultats de l'exécution étape par étape de la méthode de Steffensen

N	X(i)	F(x(n))	F(x(n))+x(n)	F(G(n))+G(n)	G(G(x))x(n)	G(x(n))^2	2G(x(n))	G(G(x))x(n)-G(xn)^2	G(G(x))-2G(x(n))+x(n)	X(n+1)
1	0,0000000000	-1,0000000000	-1,0000000000	1,0000000000	0,0000000000	1,0000000000	-2,0000000000	-1,0000000000	3,0000000000	-0,3333333333
2	-0,3333333333	0,3333333333	0,0000000000	-1,0000000000	0,3333333333	0,0000000000	0,0000000000	0,3333333333	-1,3333333333	-0,2500000000
3	-0,2500000000	0,0500000000	-0,2000000000	-0,3333333333	0,0833333333	0,0400000000	-0,4000000000	0,0433333333	-0,1833333333	-0,2363636364
4	-0,2363636364	0,0010695187	-0,2352941176	-0,2380952381	0,0562770563	0,0553633218	-0,4705882353	0,0009137345	-0,0038706392	-0,2360681115
5	-0,2360681115	0,0000004847	-0,2360676268	-0,2360688956	0,0557283384	0,0557279244	-0,4721352536	0,0000004139	-0,0000017535	-0,2360679775
6	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360678449
7	-0,2360678449	-0,0000004797	-0,2360683246	-0,2360670688	0,0557278442	0,0557282539	-0,4721366492	-0,0000004097	0,0000017355	-0,2360679775
8	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360681736
9	-0,2360681736	0,0000007096	-0,2360674640	-0,2360693219	0,0557284537	0,0557278476	-0,4721349280	0,0000006061	-0,0000025675	-0,2360679775
10	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360678435
11	-0,2360678435	-0,0000004847	-0,2360683282	-0,2360670594	0,0557278416	0,0557282556	-0,4721366564	-0,0000004139	0,0000017535	-0,2360679775
12	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360683498
13	-0,2360683498	0,0000013468	-0,2360670029	-0,2360705290	0,0557287802	0,0557276299	-0,4721340059	0,0000011503	-0,0000048729	-0,2360679775
14	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360677044
15	-0,2360677044	-0,0000009882	-0,2360686926	-0,2360661054	0,0557275836	0,0557284276	-0,4721373852	-0,0000008440	0,0000035754	-0,2360679775
16	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679775	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359550	0,0000000000	0,0000000000	-0,2360652043
17	-0,2360652043	-0,0000100334	-0,2360752378	-0,2360489700	0,0557229483	0,0557315179	-0,4721504756	-0,0000085696	0,0000363013	-0,2360679775
18	-0,2360679775	0,0000000000	-0,2360679775	-0,2360679776	0,0557280900	0,0557280900	-0,4721359549	0,0000000000	-0,0000000002	-0,2360679694

Exercice n°1.13

Exécuter manuellement la méthode de Steffensen pour obtenir le zéro de la fonction $f(x)=e^x-10$ prendre $x_0=2,2$

Solution

Pour bien comprendre et exécuter étape par étape la méthode de Steffensen on doit dresser le tableau suivant :

Tableau 1.20 : Résultats de résolution de l'équation $e^x - 10$ par la méthode de Steffensen.

N	X(i)	F(x(n))	F(x(n))+x(n)	F(G(n))+G(n)	G(G(x))x(n)	G(x(n))^2	2G(x(n))	G(G(x))x(n)-G(xn)^2	$\frac{G(G(x))-2G(x(n))+x(n)}{2G(x(n))+x(n)}$	X(n+1)
1	2.2000000000	-0.9749865006	1.2250134994	-5.3707744631	-11.8157038189	1.5006580738	2.4500269989	-5.6208014620	-13.3163618927	2.3691215537
2	2.3691215537	0.6879993256	3.0571208793	14.3233617415	33.9337850232	9.3459880708	6.1142417587	10.5782415366	24.5877969524	2.3243746957
3	2.3243746957	0.2202872975	2.5446619932	5.2835835096	12.2810278123	6.4753046597	5.0893239864	2.5186342189	5.8057231526	2.3051077084
4	2.3051077084	0.0252579988	2.3303657072	2.6120666454	6.0210949591	5.4306043295	4.6607314145	0.2564429393	0.5904906296	2.3026199561
5	2.3026199561	0.0003486375	2.3029685936	2.3068043350	5.3116936968	5.3036643431	4.6059371872	0.0034871040	0.0080293537	2.3025850997
6	2.3025850997	0.000000668	2.3025851665	2.3025859018	5.3018999883	5.3018984491	4.6051703330	0.0000006685	0.0000015392	2.3025850937
7	2.3025850937	0.0000000075	2.3025851012	2.3025851838	5.3018983212	5.3018981485	4.6051702025	0.0000000750	0.0000001727	2.3025850848
8	2.3025850848	-0.0000000819	2.3025850029	2.3025841018	5.3018958093	5.3018976955	4.6051700058	-0.0000008192	-0.0000018862	2.3025850927
9	2.3025850927	-0.0000000029	2.3025850898	2.3025850575	5.3018980282	5.3018980956	4.6051701795	-0.0000000293	-0.0000000675	2.3025850884
10	2.3025850884	-0.0000000462	2.3025850422	2.3025845340	5.3018968128	5.3018978765	4.6051700844	-0.0000004620	-0.0000010637	2.3025850934
11	2.3025850934	0.0000000040	2.3025850974	2.3025851419	5.3018982240	5.3018981309	4.6051701949	0.0000000404	0.0000000930	2.3025850846
12	2.3025850846	-0.0000000837	2.3025850009	2.3025840797	5.3018957580	5.3018976863	4.6051700018	-0.0000008374	-0.0000019283	2.3025850934
13	2.3025850934	0.0000000045	2.3025850980	2.3025851479	5.3018982378	5.3018981334	4.6051701960	0.0000000453	0.0000001044	2.3025850970
14	2.3025850970	0.0000000400	2.3025851370	2.3025855773	5.3018992348	5.3018983132	4.6051702740	0.0000004002	0.0000009215	2.3025850944
15	2.3025850944	0.0000000136	2.3025851079	2.3025852571	5.3018984914	5.3018981792	4.6051702158	0.0000001356	0.0000003122	2.3025850967
16	2.3025850967	0.0000000373	2.3025851340	2.3025855441	5.3018991579	5.3018982994	4.6051702680	0.0000003729	0.0000008585	2.3025850931
17	2.3025850931	0.0000000011	2.3025850942	2.3025851066	5.3018981421	5.3018981162	4.6051701885	0.0000000113	0.0000000259	2.3025851475
18	2.3025851475	0.0000005455	2.3025856931	2.3025916940	5.3019134355	5.3019008740	4.6051713862	0.0000054554	0.0000125615	2.3025850931

1.2.7 Méthode de Müller

La méthode de Müller est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction. Elle est basée sur la méthode de la sécante. Cependant, elle utilise une approximation quadratique d'une partie de la fonction au lieu d'une approximation linéaire. Ceci offre une convergence plus rapide que la méthode de la sécante. Une particularité de cette méthode est que le candidat issu de la recherche peut devenir complexe.

1.2.7.1. Principe de la méthode

La méthode de la sécante définit une relation de récurrence basée sur l'interpolation linéaire entre deux points. La méthode de Müller de par sa nature quadratique, nécessite trois points. On pose ainsi :

$$q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

$$\begin{aligned} A &= qf(x_n) - q(1 + q)f(x_{n-1}) + q^2f(x_{n-2}) \\ B &= (2q + 1)f(x_n) - (1 + q)^2f(x_{n-1}) + q^2f(x_{n-2}) \\ C &= (1 + q)f(x_n) \end{aligned}$$

On définit ensuite trois termes :

La relation de récurrence pour cette méthode est donnée au final par :

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) \frac{2C}{\max(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})} \quad (1.20)$$

L'initialisation nécessite 3 points x_0 , x_1 et x_2 qui sont proches, si possible, de la solution recherchée.

1.2.7.2. Vitesse de convergence

La vitesse de convergence de la méthode de Müller est approximativement 1,84 contre 1,62 pour la méthode de la sécante et 2 pour la méthode de Newton-Raphson.

Plus précisément, si ξ est une racine simple de f (ainsi $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$), que f est trois fois continument différentiable et que les points de départ x_0 , x_1 , et x_2 sont pris suffisamment près de ξ , alors les itérés vérifient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x - x_k|}{|x - x_{k-1}|^p} = \left| \frac{f'''(\xi)}{6f'(\xi)} \right|^{(p-1)/2} \quad (1.21)$$

où $p \approx 1.84$ est la racine positive de $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice n°1.14

Utiliser la méthode de Müller pour obtenir la racine de l'équation non linéaire suivante :

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

Prendre $x_0=1,85$, $x_1=1,80$ et $x_2=1,90$.

Tableau 1.21 : Programme de la méthode de Müller pour résoudre l'équation non linéaire

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

<pre> REAL x(1000), max1, max2 x(0)=1.85 x(1)=1.80 x(2)=1.90 i=2 5 q=(x(i)-x(i-1))/(x(i-1)-x(i-2)) A=q*f(x(i))-q*(1+q)*f(x(i-1))+(q**2)*f(x(i-2)) B=(2*q+1)*f(x(i))-(((1+q)**2))*f(x(i-1))+(q**2)*f(x(i-2)) C=(1+q)*f(x(i)) max1=(B+SQRT(B**2-4*A*C)) max2=(B-SQRT(B**2-4*A*C)) x(i+1)=x(i)-(((x(i)-x(i-1))* (2*C))/(MAX(MAX1,MAX2))) </pre>	<pre> if (ABS(x(i+1)- x(i)).gt.0.00000001) then i=i+1 GTO 5 end if do i=0,i WRITE (*,*)'x(',i,')=',x(i) END do STOP end function f(x) f=x**3-x**2-x-1 Return End </pre>
--	---

Tableau 1.22 : Résultats d'exécution du programme de la méthode de Müller

Nombre d'itération (i)	x(i+1)
1	0,6755367770
2	1,8379777863
3	1,8392434702
4	1,8392867673
5	1,8392867552

Le tableau suivant représente l'exécution manuelle de la méthode de Müller pour obtenir le zéro de l'équation $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

Tableau 1.23 : Exécution étape par étape de la méthode de Müller

x(n-1)	x(n)	$q=(x(n)-x(n-1))/(x(n-1)-x(n-2))$	F(x(n-2))	F(x(n-1))	F(x(n))	A	B	C	B+SQRT(B ² -4AC)	B-SQRT(B ² -4AC)	2C/MAX(K OR L)	x(n+1)
1,8000000000	2,0000000000	-2,0000000000	0,3490000000	-0,2080000000	1,0000000000	-0,1880000000	-1,3960000000	-1,0000000000	-0,3020091408	-2,4899908592	6,6223161149	0,6755367770
2,0000000000	0,6755367770	-6,6223161149	-0,2080000000	1,0000000000	-1,8236055484	-34,2781169109	-18,4029139339	10,2528868621	23,3638893839	-60,1697172517	0,8776695261	1,8379777863
0,6755367770	1,8379777863	-0,8776695261	1,0000000000	-1,8236055484	-0,0071527843	0,5807888388	0,8029963662	-0,0008750035	1,6072574762	-0,0012647439	-0,0010888156	1,8392434702
1,8379777863	1,8392434702	0,0010888156	-1,8236055484	-0,0071527843	-0,0002367759	0,0000053768	0,0069289156	-0,0002370337	0,0138581990	-0,0000003679	-0,0342084361	1,8392867673
1,8392434702	1,8392867673	0,0342084361	-0,0071527843	-0,0002367759	0,0000000660	0,0000000088	0,0002449526	0,0000000682	0,0004899051	0,0000000000	0,0002784695	1,8392867552
1,8392867673	1,8392867552	-0,0002784695	-0,0002367759	0,0000000660	0,0000000000	0,0000000000	-0,0000000659	0,0000000000	0,0000000000	-0,0000001319	#VALEUR !	#VALEUR !

1.2.8 Méthode de Laguerre (elle a une vitesse de convergence quadratique)

La **méthode de Laguerre** est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction polynomiale. En d'autres termes, elle peut être utilisée pour trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme donné.

1.2.8.1. Principe de la méthode de Laguerre

Soit p un polynôme. Soit x_0 un réel supposé être une valeur approchée d'une racine de p . La méthode de Laguerre tente d'améliorer cette première approximation par une méthode itérative en utilisant la relation récurrente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{n}{S_1(x_k) \pm \sqrt{(1-n)(nS_2(x_k) + S_1^2(x_k))}} \quad (1.22)$$

Dans laquelle le symbole \pm au dénominateur est remplacé par $+$ ou $-$ selon ce qui donne un dénominateur ayant le plus grand module possible. De plus, n désigne le degré du polynôme p , S_1 et S_2 sont les premières et secondes dérivées logarithmiques de p , données par

$$S_1(x) = \frac{d}{dx} \log p(x) = \frac{p'(x)}{p(x)} \quad (1.23)$$

$$S_2(x) = \frac{d^2}{dx^2} \log p(x) = \frac{p''(x)}{p(x)} - \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2 \quad (1.24)$$

1.2.8.2. Propriétés de la méthode de Laguerre

Si x est une racine simple du polynôme p , alors la méthode de Laguerre aura une vitesse de convergence cubique lorsque la valeur approchée initiale x_0 sera assez proche de la racine x . Cependant, si x est une racine multiple, alors la convergence sera seulement linéaire.

Cela signifie que la méthode de Laguerre converge encore plus rapidement que la méthode de Newton. Cependant, la méthode de Laguerre exige le calcul des dérivées premières et secondes de p , alors que la méthode de Newton ne demande qu'une dérivée.

La méthode de Laguerre fonctionne également pour des polynômes à coefficients réels qui ont des racines complexes. Même si la valeur approchée initiale est réelle, alors la méthode fournira des valeurs approchées complexes quand l'expression sous la racine deviendra négative. C'est la grande différence avec la méthode de Newton, qui donnera toujours des solutions réelles dans ce cas.

Exercice n°1.15

Soit le problème hydraulique donné par le polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 - 0,236x - 0,216$$

Utiliser la méthode de Laguerre pour obtenir le zéro de ce polynôme ?

Prendre $x_0 = 0,75$?

Solution

Il existe deux manières pour calculer la racine de l'équation non linéaire précédente, l'une automatique basée sur le programme présenté dans le tableau 1.24 et l'autre manuelle basée sur le passage à chaque par des étapes.

Tableau 1.24 : Programme de la méthode de Laguerre

<pre> REAL x(1000),S1(1000),S2(1000) x(0)=0.75 i=0 5 S1(x(i))=(3*x(i)**2-0.236)/(x(i)**3-0.236*x(i)-0.216) S2(x(i))=(6*x(i))/(x(i)**3-0.236*x(i)-0.216)-((3*x(i)**2- 0.236)/(x(i)**3-0.236*x(i)-0.216)**2) A=S1(x(i))+SQRT((1-3)*(3*S2(x(i))+(S1(x(i)))**2)) B=S1(x(i))-SQRT((1-3)*(3*S2(x(i))+(S1(x(i)))**2)) if (ABS(A).GT.ABS(B)) then x(i+1)=x(i)-(3/A) else x(i+1)=x(i)-(3/B) end if </pre>	<pre> IF (abs ((x(i+1)- x(i))).GT.0.00000001) THEN i=i+1 GO TO 5 END IF do i=1,i WRITE (*,*)',i=','i','x(',i,')='x(i) END do STOP END </pre>
--	--

Tableau 1.25 : Résultats du programme

Nombre d'itérations (i)	x (i+1)
1	0,729457963952096
2	0,729458691168424
3	0,729458691168424
4	0,729458691168424

n=3

(1-n)=-2

$S1(x) = (3x^2 - 0,236) / (x^3 - 0,236x - 0,216)$

$S2(x) = (6x) / (x^3 - 0,236x - 0,216) - ((3x^2 - 0,236) / (x^3 - 0,236x - 0,216))^2$

Le tableau 1.25 représente l'exécution manuelle de la méthode de Laguerre pour obtenir le zéro de $f(x) = x^3 - 0,236x - 0,216$

Tableau 1.26 : Exécution étape par étape de la méthode de Laguerre

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
i	x(i)	S1(x(i))	S2(x(i))	n*S2(x(i))	S1(x(i))**2	(1- n)(nS2(x(i))+S1(x(i))**2)	((1- n)(nS2(x(i))+S1(x(i))**2))^0,5	S1(x(i))/(1- n)(nS2(x(i))+S1(x(i))**2)^0,5	n/I2	x(i+1)
0	0,75	50,26839827	-2371,067709	-7113,203126	2526,911864	9172,582523	95,77360034	146,0419986	0,020542036	0,729457963952096
1	0,729457964	-1375105,029	-1,89092E+12	-5,67275E+12	1,89091E+12	7,56368E+12	2750214,883	-4125319,912	-7,27216E-07	0,729458691168424
2	0,729458691	1,22528E+16	-1,5013E+32	-4,50391E+32	1,5013E+32	6,00521E+32	2,45055E+16	3,67583E+16	8,16142E-17	0,729458691168424
3	0,729458691	-1,6337E+16	-2,66898E+32	-8,00694E+32	2,66898E+32	1,06759E+33	3,2674E+16	-4,90111E+16	-6,12107E-17	0,729458691168424

1.2.9 Méthode de Brent

1.2.9.1 Aperçu historique

La méthode de Brent est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction combinant la méthode de dichotomie, la méthode de la sécante et l'interpolation quadratique inverse. À chaque itération, elle décide laquelle de ces trois méthodes est susceptible d'approcher au mieux le zéro, et effectue une itération en utilisant cette méthode. L'idée principale est d'utiliser la méthode de la sécante ou d'interpolation quadratique inverse parce qu'elles convergent vite, et de revenir à la robuste méthode de dichotomie si besoin est. Cela donne une méthode alliant robustesse et rapidité, qui se trouve être très populaire et très appréciée. L'idée d'allier ces méthodes différentes est due à Theodorus Dekker **(en)** (1969) et à Richard Brent **(en)** (1973).

1.2.9.2. Méthode de Dekker

L'idée de combiner les méthodes de dichotomie et de la sécante remonte à Dekker.

On suppose vouloir résoudre l'équation $f(x) = 0$. À l'image de la méthode de dichotomie, la méthode de Dekker est initialisée par deux points, disons a_0 et b_0 , tels que $f(a_0)$ et $f(b_0)$ aient des signes opposés. Si la fonction f est continue sur $[a_0, b_0]$, le théorème des valeurs intermédiaires indique l'existence d'une solution entre a_0 et b_0 .

À chaque itération, trois points entrent en jeu:

- b_k est l'itération courante, c.-à-d. l'approximation courante de la racine de f ;
- a_k est le "contrepoint," c.-à-d. un point tel que $f(a_k)$ et $f(b_k)$ aient des signes opposés. Ainsi, l'intervalle $[a_k, b_k]$ contient à coups sûr la solution. De plus, $|f(b_k)|$ doit être plus petit (en magnitude) que $|f(a_k)|$, de telle sorte que b_k soit une meilleure approximation de la racine que a_k ;
- b_{k-1} est l'itération précédente (pour la première itération, on pose $b_{-1} = a_0$).

Deux candidats à la prochaine itération sont calculés: le premier est obtenu par la méthode de la sécante

$$s = b_k - \frac{b_k - b_{k-1}}{f(b_k) - f(b_{k-1})} f(b_k) \quad (1.25)$$

et le second par la méthode de dichotomie

$$m = \frac{a_k + b_k}{2} \quad (1.26)$$

Si le résultat de la méthode de la sécante, s , tombe entre b_k et m , alors il peut devenir le prochain itéré ($b_{k+1} = s$), et dans le cas contraire, le point milieu entre en jeu ($b_{k+1} = m$).

Alors, la valeur du nouveau contrepoint est choisi de tel sorte que $f(a_{k+1})$ et $f(b_{k+1})$ aient des signes opposés. Si $f(a_k)$ et $f(b_{k+1})$ sont de signe opposé, alors le contrepoint ne change pas: $a_{k+1} = a_k$. Sinon, $f(b_{k+1})$ et $f(b_k)$ sont de signe opposé et le nouveau contrepoint devient $a_{k+1} = b_k$.

Finalement, si $|f(a_{k+1})| < |f(b_{k+1})|$, alors a_{k+1} est probablement une meilleure approximation de la solution que b_{k+1} , et par suite, les valeurs de a_{k+1} et b_{k+1} sont échangées.

En arrivant à ce point, la méthode vient de réaliser une itération. La méthode est répétée jusqu'à convergence.

Exercice n°1.16

Soit le problème hydraulique donné par l'équation suivante :

$$f(x) = x^3 - 0,236x - 0.216$$

Utiliser la méthode de Dekker pour obtenir le zéro de cette équation ?

Prendre $a_0=0,50$ et $b_0=0,8$?

Tableau 1.27 : Programme de la méthode de Dekker

<pre> REAL a(1000),b(1000) a(1)=0.5 b(1)=0.8 i=1 if (f(a(i))*f(b(i)).LT.0) then write (*,*)'il existe une solution entre ak et bk' if (ABS(f(b(i))).LT.ABS(f(a(i)))) then write (*,*)'bk est une meilleure approximation de la racine que ak' b(i-1)=a(i) 5 s=b(i)-((b(i)-b(i- 1))*f(b(i)))/(f(b(i))-f(b(i-1))) m=(a(i)+b(i))/2 IF (s.LT.b(i).AND.s.GT.m) THEN b(i+1)=s else b(i+1)=m END IF if (f(a(i))*f(b(i+1)).LT.0) then a(i+1)=a(i) else a(i+1)=b(i) end if </pre>	<pre> IF (ABS(f(a(i+1))).LT.ABS(f(b(i+1)))) THEN write (*,*)'ak+1 est une meilleure approximation de la racine que bk+1' b(i+1)=a(i+1) END IF IF (ABS(F(b(i))).GT.0.00000001) THEN i=i+1 GOTO 5 END IF END IF do i=1,i write (*,*)'b(',i,')=',b(i) end do WRITE (*,*)'s=',s stop end FUNCTION F(X) F=x**3-0.236*x-0.216 RETURN END </pre>
---	---

Solution

Tableau 1.28 : Résultats de l'exécution manuelle de l'équation $x^3 - 0,236x - 0.216$ par la méthode de Dekker

a0	b0	f(a0)	f(b0)	f(a0)*f(b0)	b-1=a0	f(b-1)	S	m
0,50	0,8000000000	-0,2090	0,1072000000	-0,0224048000	0,50	-0,2090	0,6982922201	0,6500000000
0,80	0,6982922201	0,1072	-0,0403012807	-0,0043202973	0,80	0,1072	0,7260814960	0,7491461101
0,80	0,7260814960	0,1072	-0,0045691788	-0,0004898160	0,80	0,1072	0,7291033207	0,7630407480
0,80	0,7291033207	0,1072	-0,0004831448	-0,0000517931	0,80	0,1072	0,7294214147	0,7645516603
0,80	0,7294214147	0,1072	-0,0000507053	-0,0000054356	0,80	0,1072	0,7294547824	0,7647107073
0,80	0,7294547824	0,1072	-0,0000053172	-0,0000005700	0,80	0,1072	0,7294582813	0,7647273912
0,80	0,7294582813	0,1072	-0,0000005575	-0,0000000598	0,80	0,1072	0,7294586482	0,7647291407
0,80	0,7294586482	0,1072	-0,0000000585	-0,0000000063	0,80	0,1072	0,7294586867	0,7647293241
0,80	0,7294586867	0,1072	-0,0000000061	-0,0000000007	0,80	0,1072	0,7294586907	0,7647293433
0,80	0,7294586907	0,1072	-0,0000000006	-0,0000000001	0,80	0,1072	0,7294586911	0,7647293453
0,80	0,7294586911	0,1072	-0,0000000001	0,0000000000	0,80	0,1072	0,7294586912	0,7647293456
0,80	0,7294586912	0,1072	0,0000000000	0,0000000000	0,80	0,1072	0,7294586912	0,7647293456

a) La méthode de Brent

La méthode de Dekker est efficace si f se comporte raisonnablement bien. Toutefois, dans certaines circonstances, chaque itération emploie la méthode de la sécante mais la suite des b_k converge très lentement (en particulier, $|b_k - b_{k-1}|$ peut devenir arbitrairement petit). Dans une telle configuration, la méthode de Dekker nécessite alors plus d'itérations que la méthode de dichotomie.

Brent propose une petite modification pour éviter ce problème: un test supplémentaire doit être vérifié avant que le résultat de la méthode de la sécante soit acceptée comme la prochaine itération. En particulier, si l'étape précédente utilisait la méthode de dichotomie, l'inégalité

$$|s - b_k| < \frac{1}{2} |b_k - b_{k-1}| \quad (1.27)$$

doit être vraie, sinon le point milieu m devient le prochain itéré. Si l'étape précédente utilisait l'interpolation, alors l'inégalité

$$|s - b_k| < \frac{1}{2} |b_{k-1} - b_{k-2}| \quad (1.28)$$

est utilisée à la place. Cette modification permet de remplacer la méthode de la sécante par la méthode de dichotomie lorsque la première progresse trop lentement. Brent a prouvé que cette méthode requiert au plus N^2 itérations, où N représente le nombre d'itérations pour la méthode de dichotomie. Si la fonction f se comporte bien, la méthode de Brent utilise au choix l'interpolation quadratique inverse ou l'interpolation linéaire, auquel cas la vitesse de convergence est superlinéaire.

La méthode de Brent se base sur l'interpolation quadratique inverses plutôt que l'interpolation linéaire (qui apparaît dans la méthode de la sécante) si $f(b_k)$, $f(a_k)$ et $f(b_{k-1})$ sont distincts. Ceci améliore significativement l'efficacité. Par conséquent, la condition pour accepter la valeur d'interpolation s est modifiée: s doit tomber entre $(3a_k + b_k) / 4$ et b_k .

Exercice n°1.17

On cherche à identifier une racine de $f(x) = (x + 3)(x - 1)^2$. On prend $[a_0; b_0] = [-4; 4/3]$ comme intervalle initial. On a $f(a_0) = -25$ et $f(b_0) = 0,48148$ (tous les nombres de cette section sont tronqués); ainsi les conditions $f(a_0) f(b_0) < 0$ et $|f(b_0)| \leq |f(a_0)|$ sont vérifiées. Nous allons détailler l'utilisation de Brent, qui utilise soit l'interpolation linéaire (abrégée en IL) soit l'interpolation quadratique inverse (IQI).

1. Dans la première itération, on utilise une IL entre $(b_{-1}; f(b_{-1})) = (a_0; f(a_0)) = (-4; -25)$ et $(b_0; f(b_0)) = (1,33333; 0,48148)$, ce qui conduit à $s = 1,23256$. Cette valeur tombe entre $(3a_0 + b_0) / 4$ et b_0 et, par conséquent, cette valeur est acceptée. En outre, $f(1,23256) = 0,22891$, ce qui donne $a_1 = a_0$ et $b_1 = s = 1,23256$;
2. Dans la deuxième itération, une IQI entre $(a_1; f(a_1)) = (-4; -25)$ et $(b_0; f(b_0)) = (1,33333; 0,48148)$ et $(b_1; f(b_1)) = (1,23256; 0,22891)$ donne $1,14205$; cette valeur est entre $(3a_1 + b_1) / 4$ et b_1 . De plus, l'inégalité $|1,14205 - b_1| \leq |b_0 - b_{-1}| / 2$ est satisfaite; cette valeur est donc retenue. Enfin, comme $f(1,14205) = 0,083582$, on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = 1,14205$;

3. Dans la troisième itération, on utilise une IQI entre $(a_2; f(a_2)) = (-4; -25)$ et $(b_1; f(b_1)) = (1,23256; 0,22891)$ et $(b_2; f(b_2)) = (1,14205; 0,083582)$, ce qui donne 1,09032. Cette valeur est entre $(3a_2 + b_2) / 4$ et b_2 ; mais la condition supplémentaire de Brent bloque: en effet, l'inégalité $|1,09032 - b_2| \leq |b_1 - b_0| / 2$ n'est pas vérifiée: la valeur en cours est donc rejetée. À la place, on calcule le point milieu de l'intervalle $[a_2; b_2]$: $m = -1,42897$. On a $f(m) = 9,26891$; on pose alors $a_3 = a_2$ et $b_3 = -1,42897$;
4. Dans la quatrième itération, la valeur $-1,15448$ est obtenue par IQI entre $(a_3; f(a_3)) = (-4; -25)$ et $(b_2; f(b_2)) = (1,14205; 0,083582)$ et enfin $(b_3; f(b_3)) = (-1,42897; 9,26891)$. Cette valeur ne tombe pas entre $(3a_3 + b_3) / 4$ et b_3 . Par conséquent, on calcule à la place le milieu $m = -2,71449$; on a $f(m) = 3,9393$. On pose finalement $a_4 = a_3$ et $b_4 = -2,71449$;
5. Dans la cinquième itération, une IQI donne $-3,45500$, qui tombe dans l'intervalle requis. Toutefois, l'itération précédente était une étape de dichotomie et l'inégalité $|-3,45500 - b_4| \leq |b_4 - b_3| / 2$ doit être satisfaite, ce qui n'est pas le cas. On utilise alors le point milieu $m = -3,35724$, pour lequel $f(m) = -6,78239$. Ainsi, m devient le nouveau contrepoint: $a_5 = -3,35724$ et $b_5 = b_4$;
6. Dans la sixième itération, l'IQI est interdite car $b_5 = b_4$. Par conséquent, on la remplace par une IL entre $(a_5; f(a_5)) = (-3,35724; -6,78239)$ et $(b_5; f(b_5)) = (-2,71449; 3,93934)$. Il en résulte $s = -2,95064$, qui satisfait toutes les conditions. On calcule $f(s) = 0,77032$ et on pose $a_6 = a_5$ et $b_6 = -2,95064$;
7. Dans la septième itération, on utilise encore une IQI ce qui donne $s = -3,00219$, qui vérifie toutes les conditions. Maintenant, $f(s) = -0,03515$, et on pose donc $a_7 = b_6$ et $b_7 = -3,00219$ (a_7 et b_7 sont échangés afin que $|f(b_7)| \leq |f(a_7)|$ soit vraie);
8. Dans la huitième itération, on ne peut considérer une IQI parce que $a_7 = b_6$. L'IL donne à la place $s = -2,99994$, valeur qui est acceptée;
9. Dans les itérations suivantes, la racine $x = -3$ est approchée rapidement: $b_9 = -3 + 6 \cdot 10^{-8}$ et $b_{10} = -3 - 3 \cdot 10^{-15}$.

1.2.10 Méthode de Broyden

1.2.10.1. Méthode de Quasi-Newton

La méthode de Quasi-Newton est une méthode numérique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Typiquement, le problème que résout une méthode de Quasi-Newton est $f(x) = 0$ avec $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont on ne connaît pas forcément l'expression analytique.

Pour de tels problèmes, il est en général possible d'utiliser la méthode de Newton-Raphson, dont les itérations sont $x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} \cdot f(x_k)$, mais celle-ci pose quelques problèmes pratiques :

- si le système est assez grand, le calcul de la matrice jacobienne est très long,
- de même, la résolution du système linéaire $Df(x_k)^{-1} \cdot f(x_k)$ est une opération coûteuse en calculs.

L'idée des méthodes Quasi-Newton est de remplacer $Df(x_k)^{-1}$ par une matrice B_k plus facile à calculer, et à laquelle on peut imposer certaines propriétés. Le fait qu'elle soit une approximation de l'inverse du jacobien se traduit par la **relation de Quasi-Newton**,

$$x_{k+1} = x_k - B_k \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \quad (1.29)$$

Ce qui est manifestement la généralisation du coefficient utilisé dans la méthode de la sécante.

Les itérations des méthodes de Quasi-Newton sont alors de la forme suivante :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k B_k \cdot f(x_k) \quad (1.30)$$

Dans cette formule, ρ_k est un coefficient choisi pour optimiser la convergence, et B_k est mise à jour à chaque itération selon une formule particulière. Selon les méthodes de Quasi-Newton, la formule de mise à jour varie.

Souvent on applique la méthode à la recherche d'un minimum d'une fonction $g(x)$ que l'on traduit en la recherche de $\nabla g(x) = 0$. Dans ce cas il est naturel d'imposer à la matrice B_k qu'elle soit symétrique, car elle correspond alors à la matrice hessienne de g .

1.2.10.2. Méthode de Broyden

Ici la mise à jour de la matrice B_k s'écrit :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{S_k - B_k \cdot y_k}{t_{S_k} \cdot B_k \cdot y_k} (t_{S_k} \cdot B_k) \quad (1.31)$$

avec $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Cette méthode s'applique au cas général où le jacobien n'a pas de raison d'être symétrique.

1.3 Méthodes utilisées pour résoudre les systèmes d'équations

1.3.1 Méthodes directes

1.3.1.1 Méthode de Cramer

La méthode Cramer est une méthode basée sur les déterminants pour résoudre un système de n équations linéaires à n inconnus de types $Ax=b$, elle est utilisée surtout pour les systèmes de faible taille et valable pour le $\det A \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cramer donne le procédé suivant pour obtenir les solutions x_i .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A} \quad (1.32)$$

Pour les systèmes de taille importante la résolution du système nous conduit à la recherche à chaque fois le déterminant au lieu de chercher la solution.

1.3.1.2 Méthode d'inversion de la matrice

La méthode d'inversion de la matrice est apparue simple mais la recherche de l'inverse de A qui est un travail supplémentaire. $[A]\{x\} = \{b\} \Rightarrow \{x\} = [A]^{-1}\{b\}$

Mais l'inconvénient majeur de cette méthode est la recherche de l'inverse de A qui est délicate c'est-à-dire au lieu de chercher directement la solution on se trouve devant la recherche de l'inverse de A surtout pour les systèmes d'équations de grande taille.

On appelle inverse d'une matrice A d'ordre n, la matrice B, si elle existe, telle que $BA=AB=I_n$. Où I_n la matrice unité d'ordre n.

Une matrice est dite inversible (régulière) si, et seulement si, son déterminant est différent de zéro ; l'inverse de A, noté A^{-1} , est unique.

Pour obtenir l'inverse de A on doit passer par les étapes suivantes :

- a) On prend la transposée de A notée \tilde{A} .
- b) On en déduit l'ajointe de \tilde{A} notée $\text{adj}(\tilde{A})$.
- c) On divise l'ajointe par le déterminant de A noté $(\det A)$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(\tilde{A})}{\det(A)} \quad (1.33)$$

Exercice n°1.17

Utiliser la méthode directe d'inversion de la matrice pour obtenir la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

Solution

Le programme suivant donne la solution d'un système de 3 équations à 3 inconnus par la méthode de l'inversion de la matrice.

Tableau 1.29 : Programme de la méthode de l'inversion de la matrice.

<pre> REAL A(3,3),trA(3,3),ajA(3,3), invers(3,3) REAL B(3),C(2,2),x(3),d(3) INTEGER n n=3 A(1,1)=1 A(1,2)=0 A(1,3)=-1 A(2,1)=1 A(2,2)=0 A(2,3)=0 A(3,1)=-2 A(3,2)=1 A(3,3)=2 d(1)=5 d(2)=10 d(3)=-10 DO i=1,3 do j=1,3 trA(i,j)=A(j,i) end do enddo B(1)=(A(2,2)*A(3,3))-(A(3,2)*A(2,3)) B(2)=(A(2,1)*A(3,3))-(A(3,1)*A(2,3)) B(3)=(A(2,1)*A(3,2))-(A(3,1)*A(2,2)) i=1 det=0 do j=1,3 det = det + ((-1)**(i+j))*A(i,j)*B(j) end do DO i=1,3 do j=1,3 WRITE(*,*) 'trA('i','j,')=',trA(i,j) end do enddo WRITE (*,*)'det=',det do ii=1,3 do jj=1,3 i=ii j=jj call TAW(ii,jj,C,trA) ajA(ii,jj)=((-1)**(ii+jj))*((C(1,1)*C(2,2))- (C(2,1)*C(1,2))) </pre>	<pre> end do end do do ii=1,3 do jj=1,3 invers(ii,jj)=ajA(ii,jj)/det WRITE(*,*)ajA(ii,jj)/det end do end do do ii=1,3 do jj=1,3 WRITE(*,*)'invers ('i,','j,')=',invers(ii,jj) end do end do x(1)=0 x(2)=0 x(3)=0 do ii=1,3 do jj=1,3 x(ii)=invers(ii,jj)*d(j)+x(ii) end do end do do ii=1,3 write (*,*)'x('i,')=', end do STOP END SUBROUTINE TAW(iii,jjj,C,trA) INTEGER iii, jjj REAL C(2,2),trA(3,3) i2=1 DO i1=1,3 j2 = 1 do j1=1,3 if ((i1.ne. iii).and.(j1.ne. jjj)) then C(i2,j2)=trA(i1,j1) j2=j2+1 end if end do if ((i1.ne. iii).and.(j1.ne. jjj)) then i2=i2+1 endif END DO RETURN END SUBROUTINE TAW </pre>
--	--

Résultats d'exécution

x(1)=1 ; x(2)=2 ; x(3)=3

1.3.1.3 Méthodes de diagonalisation

C'est une méthode directe de résolution du système d'équations, elle consiste à transformer le système en un système diagonal ayant les mêmes solutions qui est facile à résoudre.

La diagonalisation d'une matrice A est de transformer cette dernière pour quelle devient diagonale où la solution des systèmes d'équations liés à elle est directe. Il est clair que la solution d'un tel système est triviale. En pratique, la recherche des vecteurs propres peut s'avérer plus chère que la solution directe. Soit [x] la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de [A]

$$[x] = [\{v\}_1, \{v\}_2, \dots, \{v\}_n]$$

La matrice [x] des vecteurs propres est orthogonale :

$$[x]^{-1} = [x]^T$$

Si nous prémultiplions le système $[A]\{x\} = \{b\}$ par $[x]^T$, nous avons :

$$[x]^T[A]\{x\} = [x]^T\{b\}$$

Que nous pouvons le transformer de la manière suivante :

$$[x]^T[A][x][x]^T\{x\} = [x]^T\{b\}$$

$$[c]\{y\} = \{d\} \quad (1.34)$$

$$[c] = [x]^T[A][x], \{y\} = [x]^T\{x\} \text{ et } \{d\} = [x]^T\{b\}$$

Pour trouver la matrice des valeurs propres [c] qui est diagonale à partir de l'équation précédente, nous avons :

$$y_i = c_i/\lambda_i \text{ et } \{x\} = [x]\{y\} \quad (1.35)$$

a) Rappel sur les valeurs et les vecteurs propres

Recherche des vecteurs propres de [A]

a) Recherche des valeurs propres de [A]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, un scalaire λ d'un espace vectoriel est appelé valeur propre de l'endomorphisme (soit une matrice par exemple) f s'il existe un vecteur u non nul de l'espace vectoriel tel que $f(u) = \lambda u \Rightarrow f(u) - \lambda u = 0$.

Les valeurs propres de f sont appelées spectres de f et la plus grande valeur s'appelle le rayon spectrale.

Un vecteur u de l'espace vectoriel est appelé vecteur propre de l'endomorphisme f s'il existe une valeur propre λ tel que $f(u) = \lambda u$. Un tel vecteur est dit vecteur propre de f associé à λ .

L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre λ est un sous espace vectoriel de E, on l'appelle sous-espace propre associé à λ . On le note E_λ .

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, A la matrice carrée associée à f suivant une base B_E , et λ un élément de K. λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans K. On désigne par f l'endomorphisme de K^n tel que A soit la matrice de f suivant la base canonique K^n . On dit qu'un scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Soit X une indéterminée, $\det(A - XI_n)$ est un polynôme de degré n, appelé polynôme caractéristique de A. On le note $P_A = \det(A - XI_n)$ (1.36).

$$P_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr}A) X^{n-1} + \dots + \det A$$

Un vecteur u de K^n est vecteur propre de A si et seulement si $(A - \lambda I_n)U = 0$ ou $AU = 0U$ où U est le vecteur colonne associé à u.

Exercice n°1.18

a) Diagonaliser la matrice [A] pour obtenir la solution du système linéaire suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & (3-\lambda) & 0 \\ 2 & -4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Les valeurs propres de A qui sont racines du polynôme caractéristique $PA=(1-X)(3-X)(2-X)$

La matrice[A] de dimension 3 a trois valeurs propres distinctes, donc elle diagonalisable. Si on veut diagonaliser A, on doit déterminer les vecteurs propres correspondants.

Le sous-espace propre $E_{\lambda_1}=E_0$ correspondant à la valeur propre λ_1 est le sous-espace vectoriel :

$$E_0 = \{v_1 \in \mathbb{R}^3 / f(v_1) = \lambda_1 v_1 = 0\}$$

Un vecteur $v_1(x,y,z)$ de E_0 , vérifié le système $[A]v_1=\lambda v_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 3 \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \\ 2x - 4y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3y = 3y \\ 2x - 4y - 1z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ 3y = 3y = 1 \\ z = -2x \end{cases}$$

$$E_0 = \{x(1,1,-2), x \in \mathbb{R}\}$$

et E_0 est ainsi le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur (1, 1, -2). On a $\dim E_0=1$ (elle est répétée une seul fois sur la diagonale de la matrice D semblable à la matrice M).

Le sous-espace propre $E_{\lambda_2}=E_2$ correspondant à la valeur propre λ_2 est le sous-espace vectoriel :

$$E_2 = \{v_2 \in \mathbb{R}^3 / f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0\}$$

Un vecteur $v_2(x,y,z)$ de E_2 , vérifié le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 2 \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2x \\ 3y = 2y \\ 2x - 4y + 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3y = 2y \Rightarrow y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$E_2 = \{x(0,0,1), x \in \mathbb{R}\}$$

et E_2 est ainsi le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur (0,0,1). On a $\dim E_2=1$

Le sous-espace propre $E_{\lambda_3}=E_3$ correspondant à la valeur propre λ_3 est le sous-espace vectoriel :

$$E_3 = \{v_3 \in \mathbb{R}^3 / f(v) = \lambda_3 v_3 = 0\}$$

Un vecteur $v_3(x,y,z)$ de E_3 , vérifié le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 1 \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \\ 2x - 4y + 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 3y = 2y \Rightarrow y = 0 \\ 2x + 2z = z \Rightarrow x = -z/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$E_3 = \{x(-1,0,2), x \in \mathbb{R}\}$$

et E_3 est ainsi le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur (-1,0,2).

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice carrée P inversible d'ordre 3, et une matrice diagonale D tel que

$$D=P^{-1}.A.P$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que les valeurs propres λ_i apparaissent sur la diagonale de la matrice dan le même ordre qu'on a placé les colonnes propres pour former la matrice P.

b) Utiliser la méthode de diagonalisation pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = (1 - 2x + 4y)/2 = 5/6 \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$[X]^T \cdot [A] \cdot \{x\} = [X]^T \cdot \{b\}$$

$$[X]^T \cdot [A] \cdot [X] \cdot [X]^T \cdot \{x\} = [X]^T \cdot \{b\}$$

$$[X]^T \cdot [A] \cdot [X] = [C]$$

$$[C] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[X]^T \cdot \{x\} = \{y\}$$

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} y \\ 2x + z \\ z - x + y \end{cases}$$

$$[X]^T \cdot \{b\} = \{d\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 0 \end{cases}$$

$$[C]\{y\} = \{d\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 0 \end{cases}$$

$$\{y\} = \frac{\{d\}}{[C]} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{cases} = \begin{cases} 1/3 \\ 3/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$\{x\} = [X] \cdot \{y\} \Rightarrow \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} 1/3 \\ 3/2 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 1/3 \\ 1/3 \\ 5/6 \end{cases}$$

Exercice n°1.19

Utiliser la méthode de diagonalisation pour résoudre le problème donné par le système $AX=0$ suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solution

$$AX = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Recherche des valeurs propres de A :

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Valeurs propres :

$$\begin{aligned}
 (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3] + 2(1(-1 - \lambda) - 1) + 3[3 - (1 - \lambda)] &= 0 \\
 \Rightarrow (2 - \lambda)[-1 + \lambda^2 - 3] + 2(-2 - \lambda) + 3(2 + \lambda) &= 0 \\
 (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) - (4 + 2\lambda) + 6 + 3\lambda &= 0 \\
 2\lambda^2 - 8 - \lambda^3 + 4\lambda - 4 - 2\lambda + 6 + 3\lambda &= 0 \\
 -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3) &= 0 \\
 \lambda_1 = -2 \\
 \lambda_2 = 1 \\
 \lambda_3 = 3 \\
 (\lambda + 2)(\lambda - 1) = \lambda^2 + \lambda - 2 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + \lambda - 2) \\
 \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6
 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir :

$$x_1 = -2 ; x_2 = 1 ; x_3 = 3$$

b) Les vecteurs propres seront :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (11, 1, -14) \\
 V_2 &= (1, -1, -1) \\
 V_3 &= (1, 1, 1)
 \end{aligned}$$

c) La matrice des vecteurs propres :

$$[X] = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système :

$$\begin{aligned}
 Ax &= b \\
 [X]^T \cdot [A] \cdot \{x\} &= [X]^T \cdot \{b\}
 \end{aligned}$$

$$[X]^T \cdot [A] \cdot [X] \cdot [X]^T \cdot \{x\} = [X]^T \cdot \{b\}$$

$$[X]^T \cdot [A] \cdot [X] = [C]$$

$$[X]^T \cdot \{x\} = \{y\}$$

$$[X]^T \cdot \{b\} = \{d\}$$

$$[C]\{y\} = \{d\}$$

$$\{y\} = \frac{\{d\}}{[C]}$$

$$\{x\} = [X] \cdot \{y\}$$

$$y_i = c_i/\lambda_i \text{ et } \{x\} = [X]\{y\}$$

$$\begin{aligned}
 [x] &= \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \det\{x\} &= 11 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -14 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -14 & -1 \end{vmatrix} \\
 \det\{x\} &= 11(0) - 1(15) + 1(-1 - 14) \\
 \det\{x\} &= 0 - 15 - 15 = -30 \\
 [\tilde{X}] &= \begin{bmatrix} 11 & 1 & -14 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\tilde{x}] &= (-1)^{(i+j)} \Delta = 5 \\
 x_{11} &= (-1)^2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{12} &= (-1)^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1(2) = -2 \\
 x_{13} &= (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1(2) = 2 \\
 x_{21} &= (-1)^3 \begin{bmatrix} 1 & -14 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1(15) = -15 \\
 x_{22} &= (-1)^4 \begin{bmatrix} 11 & -14 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1(25) = 25 \\
 x_{23} &= (-1)^5 \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1(10) = -10 \\
 x_{31} &= (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & -14 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 1(-15) = -15 \\
 x_{32} &= (-1)^5 \begin{bmatrix} 21 & -14 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1(3) = -3 \\
 x_{33} &= (-1)^6 \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1(-12) = -12 \\
 [\check{X}] &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -15 & 25 & -10 \\ -15 & -3 & -12 \end{bmatrix} \\
 [\check{X}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & -1/15 \\ 1/2 & -25/3 & +13 \\ 1/2 & 1/10 & 12/30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & -1/15 \\ 1/2 & -5/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/10 & 2/5 \end{bmatrix} \\
 [C] = [X]^T \cdot [A] \cdot [X] &= \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & -1/15 \\ 1/2 & -5/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/10 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & -2/15 & 2/15 \\ 1/2 & -5/6 & 1/3 \\ 3/2 & 3/10 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 [X]^T \cdot \{x\} &= \{y\} \\
 \{x\} &= [x] \cdot \{y\} \\
 [X]^T \cdot \{b\} &= \{c\} \\
 \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/15 & -1/15 \\ 1/2 & -5/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/10 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/15 \\ -1/6 \\ 19/10 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -1/15 \\ -1/6 \\ 19/10 \end{Bmatrix} \\
 [C] \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/15 \\ -1/6 \\ 19/10 \end{Bmatrix} \\
 y_i = c_i/\lambda_i &\Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/30 \\ -1/6 \\ 19/30 \end{Bmatrix} \\
 \{x\} = [x] \cdot \{y\} &\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/30 \\ -1/6 \\ 19/30 \end{Bmatrix} \\
 x_1 &= \frac{11}{30} - \frac{1}{6} + \frac{19}{30} \Rightarrow x_1 = \frac{30}{30} - \frac{5}{30} + \frac{19}{30} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{6} \\
 x_2 &= \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{19}{30} \Rightarrow x_2 = \frac{180}{180} + \frac{30}{180} + \frac{114}{180} = \frac{324}{180} = \frac{9}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{9}{5} \\
 x_3 &= \frac{-14}{30} + \frac{1}{6} + \frac{19}{30} = \frac{-84 + 30 + 114}{180} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} = 0.33
 \end{aligned}$$

1.3.1.4 Méthode d'orthogonalisation ou méthode de factorisation QR

La décomposition QR (ou QU) d'une matrice A est une décomposition de type $A=QR$. Où Q est une matrice orthogonale ($Q.Q^T=I$), et R une matrice triangulaire supérieure. Ce type de décomposition est souvent utilisé pour le calcul de solutions de systèmes linéaires non carrés, notamment pour déterminer le pseudo-inverse d'une matrice.

Il est possible de calculer une décomposition RQ d'une matrice, ou même des décompositions QL et LQ, où la matrice L est triangulaire inférieure.

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition :

- a) La méthode de Householder où Q la matrice est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires.
- b) La méthode de Givens où la matrice Q est obtenue par produits successifs de matrices de rotation plane.
- c) La méthode de Schmidt.

a) Méthode de Householder

Soit x un vecteur colonne arbitraire de dimension m et $\alpha = \pm \|x\|$, où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne, pour des raisons de stabilité du calcul, α doit de plus être du signe du premier élément de x.

Si e_1 le vecteur $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)^T$, et définissons, si x n'est pas colinéaire à e_1 :

$$u = x - \alpha e_1 \quad (1.37)$$

$$v = \frac{u}{\|u\|} \quad (1.38)$$

$$Q = I - 2.V.V^T \quad (1.39)$$

Q est la matrice de Householder ou matrice orthogonale élémentaire et $Qx = (\alpha, 0, \dots, 0)^T$.

Si x est colinéaire à e_1 , on a le même résultat en prenant pour Q la matrice identité.

Nous pouvons utiliser ces propriétés pour transformer une matrice A de dimension m.n en une matrice triangulaire supérieure. Tout d'abord, on multiplie A par la matrice de Householder Q_1 en ayant pris le soin de choisir pour x la première colonne de A. le résultat est une matrice Q_1A avec des zéros dans la première colonne excepté du premier élément qui vaudra α .

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \dots \dots \dots * \\ 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & A' & \\ \cdot & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ceci doit être réitéré pour A' qui va être multiplié par Q'_2 (Q'_2 est plus petite que Q'_1). Si toutefois, vous souhaitez utiliser Q'_1A plutôt que A, vous deviez remplir la matrice de Householder avec des 1 dans le coin supérieur gauche :

$$Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{pmatrix}$$

Après t itérations, $t = \min(m-1, n)$, $R = Q_1 \dots Q_t Q_{t+1} A$ est une matrice triangulaire supérieure. Si $R = Q_1^T Q_2^T \dots Q_t^T$ alors $A = QR$ est la décomposition QR de A. de plus, par construction les matrices Q_k sont non seulement orthogonales mais aussi symétriques, donc $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_t$.

Exercice n°1.20

Trouver la décomposition QR de la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Solution

On choisit donc le vecteur $a_1 = (12, 6, -4)^T$ on a donc $\|a_1\| = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = 14$ ce qui nous conduit à écrire $\|a_1\|e_1 = (14, 0, 0)^T$ le calcul nous amène à $u = (-1, 3, -2)^T$ et $v = 14^{-\frac{1}{2}}(-1, 3, -2)^T$. La première matrice de Householder vaut

$$Q_1 = I - \frac{2}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} (-1 \ 3 \ -2) = I - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

Nous avons maintenant sous la diagonale uniquement des zéros dans la 1^{ère} colonne. Pour réitérer le processus, on prend la sous matrice principale.

$$A' = \begin{pmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{pmatrix}$$

On choisit donc le vecteur $a_1 = (-49, 168)^T$ on a donc $\|a_1\| = \sqrt{(-49)^2 + (168)^2} = 175$ ce qui nous conduit à écrire $\|a_1\|e_1 = (175, 0)^T$

$$\begin{aligned} x &= (-49, 168)^T \\ u &= x - a_1 e_1 = (-49, 168) - (175, 0) = (-224, 168) = 56(-4, 3) \\ \|u\| &= 56\sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 280 \\ v &= \frac{u}{\|u\|} = \frac{56}{280}(-4, 3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

La 2^{ème} matrice de Householder vaut

$$Q = I - 2 \cdot v \cdot v^T = I - 2 \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{32}{25} & \frac{-24}{25} \\ \frac{-24}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ 3 & \frac{158}{175} & \frac{-6}{175} \\ \frac{-2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}$$

$$R = Q_1 Q_2 A = Q^T \cdot I \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

$$A = QR ; R = Q^T \cdot A \quad Q^T \cdot Q = I \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

La matrice Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par conséquent on obtient la décomposition A=QR.

b) Méthode de Schmit

La méthode de Schmidt appliquée aux colonnes de la matrice $A = [a_1, \dots, a_n]$, muni du produit scalaire $\langle v, w \rangle = v^T w$ ou $\langle v, w \rangle = v^* w$ pour le cas complexe.

On définit la projection :

$$\prod e a = \frac{\langle e, a \rangle}{\langle e, e \rangle} e \quad (1.40)$$

Puis les vecteurs :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1, e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 &= a_2 - \prod e_1 a_2, e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ u_3 &= a_3 - \prod e_1 a_3 - \prod e_2 a_3, e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{aligned} \quad (1.41)$$

·
·
·

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \prod e_j a_k, e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

On réarrange ensuite les équations de sorte que les a_i soient à gauche, en utilisant le fait que les e_i sont des vecteurs unitaires.

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle e_1, a_1 \rangle e_1 \\ a_2 &= \langle e_1, a_2 \rangle e_1 + \langle e_2, a_2 \rangle e_2 \\ a_3 &= \langle e_1, a_3 \rangle e_1 + \langle e_2, a_3 \rangle e_2 + \langle e_3, a_3 \rangle e_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_k = \sum_{j=1}^{j=k} \langle e_j, a_k \rangle e_j \quad (1.42)$$

Où $\langle e_i, a_i \rangle = \|u_i\|$ ceci s'écrit matriciellement : A=QR

$$Q = [e_1, \dots, e_n] \text{ et } R = \begin{pmatrix} \langle e_1, a_1 \rangle & \langle e_1, a_2 \rangle & \langle e_1, a_3 \rangle & \dots & \dots \\ 0 & \langle e_2, a_2 \rangle & \langle e_2, a_3 \rangle & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \langle e_3, a_3 \rangle & \langle e_4, a_4 \rangle & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Exercice n°1.21

Décomposer la matrice suivante par la méthode de Schmidt.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

On peut calculer Q par les moyens de Gram-Schmidt comme suit :

$$\begin{aligned} U &= (u_1 \ u_2 \ u_3) = \begin{pmatrix} 12 & -69 & -58/5 \\ 6 & 158 & -6/5 \\ -4 & 30 & -33 \end{pmatrix} \\ Q &= \left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \ \frac{u_2}{\|u_2\|} \ \frac{u_3}{\|u_3\|} \right) = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas on peut écrire : $Q^T \cdot A = Q^T Q R = R$

$$R = Q^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

c) Méthode de Givens

Dans la décomposition de Givens, la matrice Q utilise des rotations de Givens. Chaque rotation annule un élément de la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice, construisant la matrice R, tandis que la concaténation des rotations engendre la matrice Q.

Dans la pratique, les rotations de Givens ne sont pas effectivement assurées par la construction d'une matrice pleine et une multiplication matricielle. Une procédure de rotation de Givens est utilisée à la place qui est l'équivalent de la multiplication par une matrice de Givens creuse, sans efforts supplémentaires de la manipulation des éléments non nuls. La procédure de rotation de Givens est utile dans des situations où seul un nombre relativement restreint hors éléments diagonaux doivent être remis à zéro, et est plus facilement parallélisée que les transformations de Householder.

Exercice n°1.22

Utiliser la méthode de Givens pour décomposer la matrice A en QR.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

On doit d'abord construire une matrice de rotation qui annulera l'élément le plus bas de la colonne de gauche, $a_{31}=-4$, qu'on construit par une méthode de rotation de Givens. On appelle cette matrice G_1 . On va d'abord faire une rotation du vecteur (6,-4), pour le ramener sur l'axe x. ce vecteur forme un angle $= \arctan\left(\frac{-4}{6}\right)$ la matrice G_1 est donc donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\) & \sin(\) \\ 0 & -\sin(\) & \cos(\) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83205 & -0.55470 \\ 0 & 0.55470 & 0.83205 \end{pmatrix}$$

Le produit de G_1A annule le coefficient a_{31} :

$$G_1A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 7.21110 & 125.6395 & -33.83671 \\ 0 & 112.6041 & -71.83368 \end{pmatrix}$$

Par la suite, on construit des matrices de Givens G_2 et G_3 , qui vont respectivement annuler a_{21} et a_{32} , engendrant la matrice R. la matrice orthogonale Q^T est formée de la concaténation de toutes les matrices de Givens créées $Q^T = G_3G_2G_1$.

1.3.1.5 Méthode de pivot de Gauss ou de Gauss-Jordan

La méthode de **Gauss-Jordan**, aussi appelée **pivot de Gauss**, nommée en hommage des mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est une méthode directe de résolution des systèmes linéaires qui permet de transformer un système en un système équivalent échelonné, par la suite en résout le système ainsi obtenu à l'aide d'un algorithme de remonté. Elle permet de déterminer le rang d'une matrice et de calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss sur une matrice, on obtient sa forme échelonnée réduite.

La méthode de pivot de Gauss permet de transformer un système en un système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire. On résout le système ainsi obtenu à l'aide d'un algorithme de remontée.

Les opérations autorisées pour transformer le système sont :

- *Echanger deux lignes.
- *Multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- * Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

On cherche à résoudre le système suivant de n équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Du point de vue matriciel, on a

$$Ax = b$$

avec

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

a) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Triangularisation

$$k = 1, \dots, n - 1 \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k \quad i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0 \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^k} \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = k + 1, \dots, n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \quad i = 1, \dots, k \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^k} \quad i = k + 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.44)$$

Soit U la matrice échelonnée du système, on a alors

$$U = (u_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n = (a_{ij}^{(n)}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

b) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Remontée et résolution

À présent la matrice [A] du système linéaire est échelonnée, on doit alors résoudre le système triangulaire : $Ux=b^{(n)}$

Puisque $b^{(n)}$ rappelle le, est le second membre échelonné, il a subi les mêmes opérations que la matrice échelonnée U.

On utilise alors un algorithme de remontée pour le système $Ux=b^{(n)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} = \frac{y_n}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) = \frac{1}{a_{ii}^{(n)}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n)} x_j \right) \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Le programme ci-après met en détaille la méthode de Gauss –Jordan

Exercice n°1.23

Programmer la méthode de Gauss- Jordan pour le cas d'un pivot nul pour obtenir la solution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Solution

Tableau 1.30 : programme de la méthode de Gauss-Jordan (avec pivot non nul)

<pre> REAL A(3,3),x(3),b(3) write (*,*)n read (*,*)n do i=1,3 do j=1,3 write (*,*)'A(',i,',',j,')=' read (*,*)A(i,j) end do end do do j=1,3 write (*,*)'b(',j,')=' read (*,*)b(j) end do do K=1,(n-1) Pivot=A(K,K) do i=(K+1),n b(i)=b(i)-(A(i,k)/Pivot)*b(k) do j=(k+1),n A(i,j)=A(i,j)-(A(i,k)/Pivot)*A(k,j) end do end do end do x(n)=b(n)/A(n,n) i=n-1 10 s=0 </pre>	<pre> j=n 5 s=s+A(i,j)*x(j) j=j+1 if (j.LE.i) then GO TO 5 end if x(i)=(b(i)-s)/A(i,i) i=i-1 IF (i.GE.1) THEN GO TO 10 END IF do i=1,3 do j=1,3 write (*,*)'A(',i,',',j,')=',A(i,j) end do end do do i=1,3 write (*,*)'b(',i,')=',b(i) end do do i=1,3 write (*,*)'x(',i,')=',x(i) end do stop end </pre>
--	---

Tableau 1.31 : programme de la méthode de Gauss-Jordan (avec pivot nul)

<pre> REAL A(3,3),x(3),b(3) n=3 A(1,1)=0 A(1,2)=4 A(1,3)=8 A(2,1)=4 A(2,2)=0 A(2,3)=6 A(3,1)=8 A(3,2)=6 A(3,3)=0 b(1)=2 b(2)=4 b(3)=12 do K=1,(n-1) Pivot=A(K,K) if (pivot.EQ.0) then maxp=ABS(A(k+1,k)) indicemaxp=K+1 do i=k+2,n if (maxp.lt.ABS(A(i,k))) then maxp=ABS(A(i,k)) indicemaxp=i write (*,*)'maxp=',maxp,'i=',i end if end do do i=1,n d=A(k,i) A(k,i)=A(indicemaxp,i) A(indicemaxp,i)=d end do </pre>	<pre> do i=1,3 do j=1,3 write (*,*)A(i,j) end do end do end if do i=(K+1),n b(i)=b(i)-(A(i,k)/Pivot)*b(k) do j=(k+1),n A(i,j)=A(i,j)-(A(i,k)/Pivot)*A(k,j) end do end do end do x(n)=b(n)/A(n,n) i=n-1 10 s=0 j=n 5 s=s+A(i,j)*x(j) j=j+1 if (j.LE.i) then GO TO 5 end if x(i)=(b(i)-s)/A(i,i) i=i-1 IF (i.GE.1) THEN GO TO 10 END IF do i=1,3 write (*,*)'x(',i,')=',x(i) end do stop end </pre>
--	---

Exercice n°1.24

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour obtenir la solution du système précédent ?

Solution

On établit la matrice correspondante et on applique la première étape de Gauss-Jordan, le pivot est 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

On ajoute un multiple de la première ligne aux deux autres lignes pour obtenir des zéros (respectivement $-3x_1$ et $-2x_1$); le nouveau pivot est ensuite 5 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (5) & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array} \right)$$

La deuxième ligne est multipliée par $1/5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (1) & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array} \right)$$

On ajoute cette deuxième ligne à la troisième et à la première, le nouveau pivot est -7 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (-7) & -21 \end{array} \right)$$

On divise la 3^e ligne par -7 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array} \right)$$

On utilise la 3^e ligne pour éliminer des coefficients dans la première et deuxième ligne. Nous sommes alors en présence d'une forme échelonnée réduite avec la matrice identité d'un côté et la valeur des variables de l'autre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

La solution du système est ainsi :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Exercice n°1.25

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 & L_1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 & L_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 8 & L_3 \end{cases}$$

Trouver la solution de ce système par la méthode de pivot de Gauss ?

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

► Première étape du pivot de Gauss pour éliminer les variables x_1 dans les lignes L_2 et L_3 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

► Seconde étape du pivot de Gauss pour éliminer les variables x_2 dans la ligne L_3 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

► En remontant le système, on obtient aisément la solution x du système :

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple n° 1.26

Résoudre par la méthode de Gauss-Jordan le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{-82}{25}T_{1.1} + T_{2.1} + 0T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 1T_{1.1} - \frac{82}{25}T_{2.1} + T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + T_{2.1} - \frac{82}{25}T_{3.1} + T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + T_{2.1} + T_{3.1} - \frac{82}{25}T_{4.1} = -100 \end{cases} \quad S(0)$$

Solution

$$\begin{cases} \frac{-82}{25}T_{1.1} + T_{2.1} + 0T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 1T_{1.1} + \left(-\frac{82}{25}\right)^2 T_{2.1} + \frac{82}{25}T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + T_{2.1} - \frac{82}{25}T_{3.1} + T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + T_{2.1} + T_{3.1} - \frac{82}{25}T_{4.1} = -100 \end{cases} \quad S(I)$$

$$\begin{cases} \frac{-82}{25}T_{1.1} + T_{2.1} + 0T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} - \frac{6099}{625}T_{2.1} + \frac{82}{25}T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + 0T_{2.1} + \left(-\frac{500118}{15625} + \frac{82}{25}\right)T_{3.1} + \frac{6099}{625}T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + 0T_{2.1} + T_{3.1} - \frac{82}{25}T_{4.1} = -100 \end{cases} \quad S(II)$$

$$\begin{cases} \frac{-82}{25}T_{1.1} + T_{2.1} + 0T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} - \frac{6099}{625}T_{2.1} + \frac{82}{25}T_{3.1} + 0T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + 0T_{2.1} + \left(-\frac{11221700}{390625}\right)T_{3.1} + \frac{6099}{625}T_{4.1} = 0 \\ 0T_{1.1} + 0T_{2.1} + 0T_{3.1} + \left(-\frac{920179400}{390625} + \frac{6099}{625}\right)T_{4.1} = -\frac{11221700000}{390625} \end{cases} \quad S(III)$$

$$\Rightarrow \frac{5,1555157 \cdot 10^{11}}{6103515625} T_{4.1} = -\frac{1122170000}{390625} \Rightarrow T_{4.1} = \frac{-6.8491821 \cdot 10^{18}}{-2.0138733 \cdot 10^{17}} \Rightarrow T_{4.1} = 34.00999433$$

$$T_{3.1} = \frac{390625 \times 6099 \times T_{4.1}}{11221700 \times 625} = 11.55278141$$

$$T_{3.1} = 11.55278141$$

$$T_{2,1} = 3.883128692$$

$$T_{1,1} = 1.183880699$$

Exemple n°1.27

Utiliser les méthodes de Gauss-Jordan pour résoudre le système $AX=0$ suivant?

Résolution de système $\Delta x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 & L_1 = L_1 \\ 0x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 & L_1 = 2L_2 - L_1 \\ 0x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 & L_3 = 2L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 & L_1 \\ 0x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 & 2L_2 \\ 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 = -1 & L_3 = L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$4x_2 - \frac{1}{3} = 3$$

$$4x_2 - \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow 4x_2 = \frac{1}{3} + 3 \Rightarrow 4x_2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$2x_1 - 2 \frac{10}{12} + 3 \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 2x_1 - \frac{20}{12} + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

1.3.1.6 Méthode de factorisation LU

Lorsque il n'est y a pas de changement de ligne la méthode du pivot de Gauss est équivalente à une factorisation LU

L'objectif de la décomposition LU est de mettre A sous la forme d'un produit d'une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité par une matrice triangulaire supérieure U.

Soit A une matrice de taille nxn. La factorisation LU, consiste, pour une matrice A, à déterminer une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité et une matrice triangulaire supérieure U tel que $A=LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

et

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

b) Résolution de système la méthode de factorisation LU

Pour la résolution de système linéaire de la forme : $Ax=b$, le système devient :

$$LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1), \\ Ux = y & (2). \end{cases}$$

On résout le système (1) pour trouver le vecteur y , puis le système (2) pour trouver le vecteur x . La résolution est facile par la forme triangulaire des matrices.

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1/l_{11} \\ y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j \right) \quad \forall i = 2,3, \dots, n. \end{cases} \quad (1.48)$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = y_n/u_{nn} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (1.49)$$

c) Théorèmes

- ▶ Si A admet une décomposition LU, alors celle-ci est unique.
- ▶ A admet une décomposition LU si, et seulement si, ses mineurs principaux sont non nuls (le mineur principal d'ordre k de A désigne le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en extrayant les k premières lignes et colonnes).
- ▶ Si A est simplement supposée inversible, alors A peut s'écrire $A=PLU$ où P est une matrice de permutation.

d) Algorithme général de la décomposition LU

On suppose que A admet une décomposition LU, on a alors l'algorithme de décomposition LU suivant :

$$k = 1, \dots, n-1 \left\{ \begin{array}{l} l_{ik} = 0 \\ l_{kk} = 1 \\ l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0 \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)} \end{array} \right. \begin{array}{l} i = 1, \dots, k-1 \\ \\ i = k+1, \dots, n \\ i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n \\ i = k+1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \\ i = k+1, \dots, n \quad j = k+1, \dots, n \end{array} \quad (1.50)$$

$$l_{in} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad l_{nn} = 1$$

$$U = \left(a_{ij}^{(n)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad L = \left(l_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

e) Calcul de déterminant

La décomposition LU permet aussi de calculer le déterminant de A, qui est égal au produit des éléments diagonaux de la matrice U si A admet une décomposition LU.

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U) = 1 \times \det(U) = \det(U)$$

Exercice n°1.28

Utiliser la méthode de décomposition LU pour obtenir la solution du système suivant :

$$U_{0.1} - \frac{82}{16}U_{1.1} + U_{2.1} + \frac{25}{16}U_{1.0} + \frac{25}{16}U_{1.2} = 0 \quad (1.1)$$

$$U_{0.2} - \frac{82}{16}U_{1.2} + U_{2.2} + \frac{25}{16}U_{1.2} + \frac{25}{16}U_{1.3} = 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} -\frac{82}{16}U_{1.1} + \frac{25}{16}U_{1.1} = -100 \\ \frac{25}{16}U_{1.1} - \frac{82}{16}U_{1.2} = -100 \end{cases}$$

Solution

$$A = \begin{pmatrix} -5.125 & 1.5625 \\ 1.5625 & -5.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = -5.125$$

$$U_2 = 1.5625$$

$$l_1 U_1 = 1.5625 \rightarrow l_1 = \frac{1.5625}{-5.125} = -0.3049$$

$$l_1 U_2 + U_3 = -5.125 \Rightarrow U_3 = -5.125 - l_1 U_2 = -4.6486$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.3049 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$Z_1 = -100$$

$$-0.3049Z_1 + Z_2 = -100 \Rightarrow Z_2 = -100 + 0.3049 Z_1 \Rightarrow Z_2 = -130.49$$

$$\begin{pmatrix} -5.125 & 1.5625 \\ 0 & -4.6486 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1.1} \\ T_{1.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -130.49 \end{pmatrix}$$

$$T_{1.2} = \frac{-130.49}{-4.6482} = 28.07$$

$$-5.125T_{1.1} + 1.564T_{1.2} = -100 \Rightarrow -5.125T_{1.1} = -1.564T_{1.2} - 100 \Rightarrow T_{1.1} = \frac{-143.893}{-5.125} = 28.07$$

1.3.1.7 Méthode de factorisation Cholevsky

a) Principe de la méthode de Cholevsky

La méthode de Cholevsky consiste, pour une matrice symétrique définie positive A, à déterminer une matrice triangulaire inférieur L tel que $A=LL^T$. Une matrice symétrique A est dite définie positive si, pour tout vecteur x, le produit $x^T A.x$ est positif. La matrice L est en quelque sorte une racine carrée de A. Cette décomposition permet notamment de calculer la matrice inverse A-1 et de calculer le déterminant de A (égal au carré du produit des éléments diagonaux de L).

Une matrice symétrique A est dite définie positive si, pour tout vecteur x, le produit $x^T Ax$ est positive.

Pour la résolution de système linéaire de la forme $Ax=b$, le système devient

$$LL^T x=b \rightarrow Ly=b \text{ sachant que } L^T x=y$$

Si A une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que : $A=LL^T$ (1.51).

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

b) Algorithme de la méthode de Cholevsky

On cherche la matrice :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdot & \cdot & l_{nn} \end{pmatrix}$$

De l'égalité $A=LL^T$ on déduit :

$$a_{ij} = (LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.52)$$

Puisque $l_{ij}=0$ si $1 \leq i < j \leq n$.

La matrice A étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour $i \leq j$, c'est-à-dire que les éléments l_{ij} de la matrice doivent satisfaire :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{jk} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Pour $j=1$, on détermine la première colonne de L :

- (i=1) $a_{11}=l_{11}l_{11}$ d'où $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- (i=2) $a_{12}=l_{11}l_{21}$ d'où $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$
- ...
- (i=n) $a_{1n}=l_{11}l_{n1}$ d'où $l_{n1} = \frac{a_{1n}}{l_{11}}$

On détermine la j-ème colonne de L, après avoir calculé les (j-1) premières colonnes :

* $i=j$ $a_{ii} = l_{i1}l_{i1} + \dots + l_{ij}l_{ij}$ d'où

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

* $i=j+1$ $a_{i,j+1} = l_{i1}l_{i,j+1} + \dots + l_{ij}l_{i,j+1}$ d'où $l_{i,j+1} = \frac{a_{i,j+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{i+1,k}}{l_{ij}}$

* $i=n$ $a_{i,n} = l_{i1}l_{n1} + \dots + l_{in}l_{n,i}$ d'où $l_{n,i} = \frac{a_{i,n} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{n,k}}{l_{ii}}$

c) Résolution de système d'équations par la méthode de Cholevsky

Pour la résolution de système linéaire de la forme : $Ax=b$, le système devient

$$LL^T x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1), \\ L^T x = y & (2). \end{cases}$$

On résout le système (1) pour trouver le vecteur y, puis le système (2) pour trouver le vecteur x. La résolution est facile par la forme triangulaire des matrices.

d) Calcul de déterminant par la méthode de Cholevsky

La méthode de Cholesky permet aussi de calculer le déterminant de A, qui est égal au carré du produit des éléments diagonaux de la matrice L, puisque

$$\det(A) = \det(L) \times \det(L^T) = \det(L)^2$$

Exercice n°1.29

Utiliser la méthode de Cholesky pour obtenir la solution du système symétrique suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 & L_1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = -2 & L_2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 & L_3 \end{cases}$$

Solution

On détermine la première colonne de L

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} ; l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{\sqrt{5}} ; l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (2/\sqrt{5})^2} = 3.0332$$

$$l_{j2} = (a_{j2} - l_{21}l_{j1})/l_{22} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{21}l_{31})/l_{22} = (3 - (\frac{-2}{\sqrt{5}}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}))/3.0332 = 1.2528$$

$$l_{32} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{4 - \left((\frac{-2}{\sqrt{5}})^2 + (1.2528)^2 \right)} = 1.2769$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 2.2361 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8944 & 3.0332 & 0.0000 \\ -0.8944 & 1.2528 & 1.2769 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.2361 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8944 & 3.0332 & 0.0000 \\ -0.8944 & 1.2528 & 1.2769 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4472 \\ -0.5275 \\ 2.5538 \end{pmatrix}$$

$$L^T x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.2361 & 0.8944 & -0.8944 \\ 0.0000 & 3.0332 & 1.2528 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.2769 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4472 \\ -0.5275 \\ 2.5538 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Méthodes indirectes

1.3.2.1 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi, due au mathématicien allemand Karl Jacobi, est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de forme. Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires.

a) Principe de construction

La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution de système linéaire de la forme

$$Ax=b$$

Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires. On cherche à construire l'algorithme pour $x^{(0)}$ donné, la suite

$$x^{(k+1)}=F(x^{(k)}) \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

$A=M-N$ Où M est une matrice inversible.

$$Ax=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b \quad (1.53)$$

$$x=F(x)$$

où F est une fonction affine.

b) Algorithme

$$\begin{cases} \text{donne } x^{(0)}, \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \text{ si non.} \end{cases} \quad (1.54)$$

Si x est solution de $Ax=b$ alors $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

c) Erreur

Soit $e^{(k)}$ le vecteur erreur

$$e^{(k)}=x^{(k+1)}-x^{(k)}=M^{-1}N(x^{(k)}-x^{(k-1)})=M^{-1}N e^{(k)} \quad (1.55)$$

on pose $B=M^{-1}N$, ce qui donne
 $e^{(k+1)}=B e^{(k)}=B^{(k+1)} e^{(0)}$

d) Convergence

L'algorithme converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ (matrice nulle).(matrice nulle).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ est que le rayon spectral de B vérifie

$$\rho(B) < 1,$$

on rappelle que $\rho(B) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B .

Théorème : si A est à diagonale strictement dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i = 1, \dots, n$$

Alors pour tout x_0 la méthode de Jacobi converge vers la solution x du système $Ax=b$

e) Décomposition par la méthode de Jacobi

On décompose la matrice A de la façon suivante : $A=D-E-F$

avec

- D la diagonale
- $-E$ la partie en dessous de la diagonale
- $-F$ la partie au dessus.

Dans la méthode de Jacobi, on choisit $M=D$ et $N=E+F$ (dans la méthode de Gauss-Seidel, $M=D-E$ et $N=F$).

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b \quad (1.56)$$

avec pour la ligne i de $D^{-1}(E + F) : -\left(\frac{a_{i1}}{a_{ii}}, \dots, \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}, 0, \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}, \dots, \frac{a_{in}}{a_{ii}}\right)$

on a alors :

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (1.57)$$

f) Résidu

Soit $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ le vecteur résidu. On peut écrire $x_i^{(k+1)} = \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} + x_i^{(k)}$ avec $r_i^{(k)}$ que l'on calcule de la manière suivante :

$$r_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{r_i^{(k)}}{a_{jj}} \quad (1.58)$$

g) Test d'arrêt

Pour le test d'arrêt, on utilise le vecteur résidu, ce qui donne, pour une précision donnée ε :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad (1.59)$$

Exercice n°1.30

Utiliser la méthode de Carl Jacobi pour obtenir la solution du système d'équations donné par :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 1x_3 = 9 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Tableau 1.32 : Programme facilite les calculs par la méthode de Carl Jacobi.

<pre> Real A(3,3),x(3),b1(100),b2(100),b3(100) Real x1(100),x2(100),x3(100) Real min1(100),min2(100),MIN3(100),mint(100) n=3 EPS=0.000000001 x1(0)=0 x2(0)=0 x3(0)=0 b1(1)=5 b2(1)=9 b3(1)=6 A(1,1)=3 A(1,2)=1 A(1,3)=1 A(2,1)=2 A(2,2)=6 A(2,3)=1 A(3,1)=1 A(3,2)=1 A(3,3)=4 i=1 b2(i+1)=b2(i) b3(i+1)=b3(i) min1(i)=ABS(x1(i)-x1(i-1)) </pre>	<pre> 10 x1(i)=(1/A(1,1))*(b1(i)-A(1,2)*x2(i-1)-A(1,3)*x3(i-1)) x2(i)=(1/A(2,2))*(b2(i)-A(2,1)*x1(i-1)-A(2,3)*x3(i-1)) x3(i)=(1/A(3,3))*(b3(i)-A(3,1)*x1(i-1)-A(3,2)*x2(i-1)) b1(i+1)=b1(i) min2(i)=ABS(x2(i)-x2(i-1)) min3(i)=ABS(x3(i)-x3(i-1)) mint(i)=MIN(MIN1(i),min2(i),min3(i)) if (mint(i).GT.EPS) then x1(i+1)=x1(i) x2(i+1)=x2(i) x3(i+1)=x3(i) i=i+1 GOTO 10 end if DO i=0,i WRITE (*,*)i, ' ',x1(i), ' ',x2(i), ' ',x3(i), ' ',mint(i) END DO stop end </pre>
---	---

On peut synthétiser la méthode de Karl JACOBI aux équations suivantes :

$$i = 1, \dots, n \quad x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij}x_j^k \right] \quad (1.60)$$

Tableau 1.33 : Résultats obtenus par le programme pour les données de l'exercice 1.30

i	X ₁	X ₂	X ₃	i	X ₁	X ₂	X ₃
1	0	0	0	12	1,0018124629	1,0015304277	1,0014989535
2	1,6666666667	1,5000000000	1,5000000000	13	0,9989902063	0,9991460201	0,9991642774
3	0,6666666667	0,6944444444	0,7083333333	14	1,0005632342	1,0004758850	1,0004659434
4	1,1990740741	1,1597222222	1,1597222222	15	0,9996860572	0,9997345980	0,9997402202
5	0,8935185185	0,9070216049	0,9103009259	16	1,0001750606	1,0001479442	1,0001448362
6	1,0608924897	1,0504436728	1,0498649691	17	0,9999024065	0,9999175071	0,9999192488
7	0,9665637860	0,9713916752	0,9721659594	18	1,0000544147	1,0000459897	1,0000450216
8	1,0188141218	1,0157844114	1,0155111347	19	0,9999696629	0,9999743582	0,9999748989
9	0,9895681513	0,9911434370	0,9913503667	20	1,0000169143	1,0000142959	1,0000139947
10	1,0058353988	1,0049188885	1,0048221029	21	0,9999905698	0,9999920294	0,9999921975
11	0,9967530029	0,9972511832	0,9973114282	22	1,0000052577	1,0000044438	1,0000043502

1.3.2.2 Méthode du point fixe (SNL)

Soit le problème non linéaire défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.61)$$

Imaginer une itération par la méthode du point fixe, réécrire le système (1.61) sous la forme équivalente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.62)$$

Donc le vecteur solution du système (1.61) et solution du système (1.62) et inversement.

Algorithme de la méthode du point fixe

Soit $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ la solution du système (1.61) et soit $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ une approximation de la solution $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ générer les approximations par la récurrence ainsi écrite :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.63)$$

Il peut être démontré en analyse (1.63) converge sous les conditions suffisantes suivantes (mais pas nécessaires)

1- G_1, G_2, \dots et G_n et leurs premières dérivées continues au voisinage R de la racine $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ où $R = \{(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) / |x_1 - x_1(\mathbf{k})| \leq \epsilon, |x_2 - x_2(\mathbf{k})| \leq \epsilon, \dots, |x_n - x_n(\mathbf{k})| \leq \epsilon\}$ pour tout $\epsilon > 0$

2. Les inégalités suivantes satisfaites

$$\begin{cases} |f_{1x1}| + |f_{1x2}| + \dots + |f_{1xn}| \leq K \\ |f_{2x1}| + |f_{2x2}| + \dots + |f_{2xn}| \leq K \\ \vdots \\ |f_{nx1}| + |f_{nx2}| + \dots + |f_{n xn}| \leq K \end{cases} \quad \text{pour } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ dans } R \text{ et } K > 1$$

3. Approximations $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ initiales choisies dans R

Quand l'itération converge elle est linéaire.

Exercice n°1.31

Utiliser la méthode du point fixe pour la solution du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2 + 0.8 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.1x_1x_2^2 + 0.8 \end{cases}$$

prendre $x(0,5,0,5)$ comme vecteur de démarrage.

Solution

Tableau 1.34: Résultats de calcul obtenus par la méthode du point fixe

i	X1(i)	X2(i)	i	X1(i)	X2(i)
0	0,500000000000	0,500000000000	16	0,999999866306	0,999999866306
1	0,850000000000	0,862500000000	17	0,999999946522	0,999999946522
2	0,946640625000	0,948232031250	18	0,999999978609	0,999999978609
3	0,979527245799	0,979780684901	19	0,999999991444	0,999999991444
4	0,991944381577	0,991984420255	20	0,999999996577	0,999999996577
5	0,996798674617	0,996805047652	21	0,999999998631	0,999999998631
6	0,998722790074	0,998723807574	22	0,999999999452	0,999999999452
7	0,999489645523	0,999489808182	23	0,999999999781	0,999999999781
8	0,999795942817	0,999795968833	24	0,999999999912	0,999999999912
9	0,999918390657	0,999918394819	25	0,999999999965	0,999999999965
10	0,999967358427	0,999967359093	26	0,999999999986	0,999999999986
11	0,999986943717	0,999986943824	27	0,999999999994	0,999999999994
12	0,999994777542	0,999994777559	28	0,999999999998	0,999999999998
13	0,999997911026	0,999997911028	29	0,999999999999	0,999999999999
14	0,999999164412	0,999999164412	30	1,000000000000	1,000000000000
15	0,999999665765	0,999999665765	31	1,000000000000	1,000000000000

On remarque que la convergence est lente (après 30 itérations).

1.3.2.3 Méthode de Newton-Raphson (S.N.L)

La méthode d'Issac Newton et Joseph Raphson est une méthode itérative de résolution des systèmes d'équations linéaires au non linéaires.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

soit $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ un vecteur d'approximation du système précédent.

Supposons que f_1, f_2, \dots, f_n suffisamment différentiables, le développement de f_1, f_2, \dots et f_n autour de $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ en utilisant les séries de Taylor :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots$$

supposons que $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ sont suffisamment proche de la solution

$(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ de manière à négliger les termes d'ordre supérieur à 1.

$$f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots = 0$$

$$f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots = 0$$

...

$$f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots = 0$$

Ce qui permet d'écrire

$$(x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots = -f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

$$(x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots = -f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

.

.

.

$$(x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots = -f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

On a obtenu n équations à n inconnues

$$x(k+1) = x(k) - J(x(k))^{-1} f(x(k)) \quad (1.65)$$

Sachant que $f_{1x_1}, f_{1x_2}, \dots$ et f_{1x_n} sont les dérivées premières de f_1 par rapport x_1, x_2, \dots, x_n , $f_{2x_1}, f_{2x_2}, \dots$ et f_{2x_n} sont les dérivées premières de f_2 par rapport x_1, x_2, \dots, x_n jusqu'au $f_{nx_1}, f_{nx_2}, \dots$ et f_{nx_n} sont les dérivées premières de f_n par rapport x_1, x_2, \dots, x_n

Exercice n°1.32

Utiliser la méthode de Newton-Raphson pour obtenir la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 1.2 - e^{x_1 x_2} \\ f_2(x_1, x_2) = 0.5 - \cos(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Prendre $x_1(0)=1$ et $x_2(0)=0.5$ et $\varepsilon=10^{-4}$

Solution

a) Résolution par programmation

Tableau 1.35 : Programme de résolution des systèmes d'équations par la méthode de Newton-Raphson.

<pre>REAL x1(1000), x2(1000), f1(1000) Real f2(1000), G1(1000), G2(1000) Real r1(1000), r2(1000), eps1(1000) Real eps2(1000) open(7, STATUS='unknown', FILE='resultats1. default') DATA x10, x20/1.0, 0.5/ i=0 x1(i)=x10 x2(i)=x20 5 f1(i)=1.2-(EXP(x1(i)*x2(i))) f2(i)=0.5-COS(x1(i)+x2(i)) g1(i)=-x2(i)*EXP(x1(i)*x2(i)) g2(i)=SIN(x1(i)+x2(i)) r1(i)=-f1(i)/g1(i) r2(i)=-f2(i)/g2(i)</pre>	<pre>x1(i+1)=x1(i)+r1(i) x2(i+1)=x2(i)+r2(i) eps1(i)=ABS(x1(i+1)-x1(i)) eps2(i)=ABS(x2(i+1)-x2(i)) if (eps1(i).GT.0.0000001.AND.eps2(i).GT.0.0 000001) then i=i+1 GO TO 5 end if do i=0, i write(7, 1)x1(i), F1(i), EPS1(i), x2(i), F2(i), EPS 2(i) 1 format (10x, 6f15.10) end do stop end</pre>
---	---

b) Résolution par la méthode analytique basée sur le calcul de l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} e^{x_1 x_2} & e^{x_1 x_2} \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1 x_2} - 1.2 = f_1(x_1, x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) - 0.5 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \\ -\sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 e^{1 \times 0.5} & 1 e^{1 \times 0.5} \\ -\sin(1.5) & -\sin(1.5) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_1^0, x_2^0) = e^{x_1^0 \cdot x_2^0} - 1.2 = f_1(1, 0.5) = e^{1 \times 0.5} - 1.2 = 0.4487$$

$$f_2(x_1^0, x_2^0) = \cos(x_1^0 + x_2^0) - 0.5 = f_2(1, 0.5) = \cos(1 + 0.5) - 0.5 = -0.4292$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 e^{0.5} & 1 e^{0.5} \\ -\sin(1.5) & -\sin(1.5) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.4487 \\ -0.4292 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.82 & 1.64 \\ -0.99 & -0.99 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.4487 \\ -0.4292 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.82 & 1.64 \\ -0.99 & -0.99 \end{vmatrix} = 0.82(-0.99) - (-0.99)(1.6236) = 0.8118$$

$$\det A = 0.8118$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.82 & -0.99 \\ 1.64 & -0.99 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj} \tilde{A} = (-1)^{1+1}(-0.99) = -0.99; \text{Adj} \tilde{A} = (-1)^{1+2}(1.64) = -1.64$$

$$\text{Adj} \tilde{A} = (-1)^{2+1}(-0.99) = 0.99; \text{Adj} \tilde{A} = (-1)^{2+2}(0.82) = 0.82$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.99 & -1.64 \\ 0.99 & 0.82 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj} \tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{-0.99}{0.8118} & \frac{-1.64}{0.8118} \\ \frac{0.99}{0.8118} & \frac{0.82}{0.8118} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2195 & -2.0202 \\ 1.2195 & 1.010 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.2195 & -2.0202 \\ 1.2195 & 1.010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4487 \\ -0.4292 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-1.2195) \cdot (0.4487) + (-2.0202) \cdot (-0.4292) \\ (1.2195) \cdot (0.4487) + (1.010) \cdot (-0.4292) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3199 \\ 0.1136 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6801 \\ 0.3864 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = 0.6801; x_2^1 = 0.3864$$

Calcul des valeurs des fonctions pour les nouvelles valeurs.

$$f_1(x_1^1, x_2^1) = f_1(0.6801, 0.3864) = e^{x_1 x_2} - 1.2 = 0.1005$$

$$f_2(x_1^1, x_2^1) = f_2(0.6801, 0.3864) = \cos(x_1^1 + x_2^1) - 0.5 = 0.0169$$

Les valeurs obtenues des deux fonctions sont supérieures à la précision désirée, on doit recommencer les calculs.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \\ -\sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^1, x_2^1) \\ f_2(x_1^1, x_2^1) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x_1^1, x_2^1) = f_1(0.6801, 0.3864) = e^{x_1 x_2} - 1.2 = 0.1005$$

$$f_2(x_1^1, x_2^1) = f_2(0.6801, 0.3864) = \cos(x_1^1 + x_2^1) - 0.5 = 0.0169$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6801 \\ 0.3864 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.8844 \\ -0.8755 & -0.8755 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.1005 \\ -0.0169 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.8844 \\ -0.8755 & -0.8755 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.5025 & 0.8844 \\ -0.8755 & -0.8755 \end{vmatrix} = (0.5025)(-0.8755) - (-0.8755)(0.8844)$$

$$\det A = -0.4399 - (-0.7742) = 0.3343$$

$$\det A = 0.3343$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.5025 & -0.8755 \\ 0.8844 & -0.8755 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+1}(-0.8755) = -0.8755; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+2}(0.8844) = -0.8844$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+1}(-0.8755) = +0.8755; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+2}(0.5025) = 0.5025$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.8755 & -0.8844 \\ 0.8755 & 0.5025 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{-0.8755}{0.3343} & \frac{-0.8844}{0.3343} \\ \frac{0.8755}{0.3343} & \frac{0.5025}{0.3343} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} -2.6189 & -2.6466 \\ 2.6189 & 1.5031 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6801 \\ 0.3864 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.8844 \\ -0.8755 & -0.8755 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1005 \\ -0.0169 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4617 \\ 0.1487 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 = 0.4617; x_2^2 = 0.1487$$

$$f_1(x_1^2, x_2^2) = e^{x_1^2 x_2^2} - 1.2 = -0.1289$$

$$f_2(x_1^2, x_2^2) = \cos(x_1^2 + x_2^2) - 0.5 = 0.3194$$

La précision n'est pas encore atteinte, on doit poursuivre les calculs.

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2^2 e^{x_1^2 x_2^2} & x_1^2 e^{x_1^2 x_2^2} \\ -\sin(x_1^2 + x_2^2) & -\sin(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.1289 \\ 0.3194 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4617 \\ 0.1487 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1487e^{(0.4617)(0.1487)} & 0.4617e^{(0.4617)(0.1487)} \\ -\sin(0.4617 + 0.1487) & -\sin(0.4617 + 0.1487) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.1289 \\ 0.3194 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4617 \\ 0.1487 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1487e^{(0.0686548)} & 0.4617e^{(0.0686548)} \\ -\sin(0.6104) & -\sin(0.6104) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.1289 \\ 0.3194 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4617 \\ 0.1487 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1592 & 0.4945 \\ -0.5731 & -0.5731 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.1289 \\ 0.3194 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1592 & 0.4945 \\ -0.5731 & -0.5731 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.1592 & 0.4945 \\ -0.5731 & -0.5731 \end{vmatrix} = (0.1592)(-0.5731) - (-0.5731)(0.4945)$$

$$\det A = 0.1921$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1592 & -0.5731 \\ 0.4945 & -0.5731 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+1}(-0.5731) = -0.5731; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+2}(0.4945) = -0.4945$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+1}(-0.5731) = +0.5731; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+2}(0.1592) = 0.1592$$

$$\text{Adj}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} -0.5731 & -0.4945 \\ 0.5731 & 0.1592 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } \tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{-0.5731}{0.1921} & \frac{-0.4945}{0.1921} \\ \frac{0.1921}{0.5731} & \frac{0.1921}{0.1592} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.9833 & -2.5741 \\ 2.9833 & 0.8287 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4617 \\ 0.1487 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.9833 & -2.5741 \\ 2.9833 & 0.8287 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1289 \\ -0.3194 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8993 \\ 0.2686 \end{bmatrix}$$

$$x_1^3 = 0.8993; x_2^3 = 0.2686$$

$$f_1(x_1^3, x_2^3) = e^{x_1^3 x_2^3} - 1.2 = 0.0732$$

$$f_2(x_1^3, x_2^3) = \cos(x_1^3 + x_2^3) - 0.5 = -0.1079$$

La précision n'est pas également atteinte, on doit encore poursuivre les calculs.

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2^3 e^{x_1^3 x_2^3} & x_1^3 e^{x_1^3 x_2^3} \\ -\sin(x_1^3 + x_2^3) & -\sin(x_1^3 + x_2^3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0732 \\ -0.1079 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8993 \\ 0.2686 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2686 e^{(0.8993)(0.2686)} & 0.8993 e^{(0.8993)(0.2686)} \\ -\sin(0.8993 + 0.2686) & -\sin(0.8993 + 0.2686) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0732 \\ -0.1079 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8993 \\ 0.2686 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2686 e^{(0.241552)} & 0.8993 e^{(0.241552)} \\ -\sin(1.1679) & -\sin(1.1679) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0732 \\ -0.1079 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8993 \\ 0.2686 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3419 & 1.1450 \\ -0.9199 & -0.9199 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0732 \\ -0.1079 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.3419 & 1.1450 \\ -0.9199 & -0.9199 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.3419 & 1.1450 \\ -0.9199 & -0.9199 \end{vmatrix} = (0.3419)(-0.9199) - (-0.9199)(1.1450)$$

$$\det A = 0.7387$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3419 & -0.9199 \\ 1.1450 & -0.9199 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } \tilde{A} = (-1)^{1+1}(-0.9199) = -0.9199; \text{Adj } \tilde{A} = (-1)^{1+2}(1.1450) = -1.1450$$

$$\text{Adj } \tilde{A} = (-1)^{2+1}(-0.9199) = +0.9199; \text{Adj } \tilde{A} = (-1)^{2+2}(0.3419) = 0.3419$$

$$\text{Adj}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} -0.9199 & -1.145 \\ 0.9199 & 0.3419 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } \tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{-0.9199}{0.7387} & \frac{-1.1450}{0.7387} \\ \frac{0.9199}{0.7387} & \frac{0.3419}{0.7387} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2452 & -1.5500 \\ 1.2452 & 0.4628 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8993 \\ 0.2686 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.2452 & -1.5500 \\ 1.2452 & 0.4628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0732 \\ -0.1079 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8232 \\ 0.2274 \end{bmatrix}$$

$$x_1^4 = 0.8232; x_2^4 = 0.2274$$

$$f_1(x_1^4, x_2^4) = e^{x_1^4 x_2^4} - 1.2 = 0.0058$$

$$f_2(x_1^4, x_2^4) = \cos(x_1^4 + x_2^4) - 0.5 = -0.0029$$

La précision n'est pas parfaite, on doit également poursuivre les calculs.

$$\begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2^4 e^{x_1^4 x_2^4} & x_1^4 e^{x_1^4 x_2^4} \\ -\sin(x_1^4 + x_2^4) & -\sin(x_1^4 + x_2^4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0058 \\ -0.0029 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8232 \\ 0.2274 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2274e^{(0.8232)(0.2274)} & 0.8232e^{(0.8232)(0.2274)} \\ -\sin(0.8232 + 0.2274) & -\sin(0.8232 + 0.2274) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0058 \\ -0.0029 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8232 \\ 0.2274 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2274e^{(0.171957)} & 0.8232e^{(0.171957)} \\ -\sin(1.0506) & -\sin(1.0506) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0058 \\ -0.0029 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8232 \\ 0.2274 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2742 & 0.9926 \\ -0.8677 & -0.8677 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0058 \\ -0.0029 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2742 & 0.9926 \\ -0.8677 & -0.8677 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.2742 & 0.9926 \\ -0.8677 & -0.8677 \end{vmatrix} = (0.2742)(-0.8677) - (-0.8677)(0.9926)$$

$$\det A = 0.6233$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2742 & -0.8677 \\ 0.9926 & -0.8677 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+1}(-0.8677) = -0.8677; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{1+2}(0.9926) = -0.9926$$

$$\text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+1}(-0.8677) = +0.8677; \text{Adj}\tilde{A} = (-1)^{2+2}(0.2742) = 0.2742$$

$$\text{Adj}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} -0.8677 & -0.9926 \\ 0.8677 & 0.2742 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj} \tilde{A}}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{-0.8677}{0.6233} & \frac{-0.9926}{0.6233} \\ \frac{0.8677}{0.6233} & \frac{0.2742}{0.6233} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3921 & -1.5924 \\ 1.3921 & 0.4399 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8232 \\ 0.2274 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.3921 & -1.5924 \\ 1.3921 & 0.4399 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0058 \\ -0.0029 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8266 \\ 0.2206 \end{bmatrix}$$

$$x_1^5 = 0.8266; x_2^5 = 0.22206$$

$$f_1(x_1^5, x_2^5) = e^{x_1^5 x_2^5} - 1.2 = 0.0000316843$$

$$f_2(x_1^5, x_2^5) = \cos(x_1^5 + x_2^5) - 0.5 = -0.00000212073$$

Supposons que notre critère de convergence $\epsilon=10^{-4}$ est assuré.

1.3.2.4 Méthode de Newton modifiée (Système Non Linéaire)

Pour éviter le calcul de $J^{-1}(x(k))$, la méthode de Newton améliorée (modifiée) a été développée pour faire l'objet.

$$x(k+1) = x(k) - J^{-1}(x(k))f(x(k))$$

$$y(k) = J^{-1}(x(k))f(x(k))$$

multiplions par $J(x(k))$ à gauche et à droite on aura :

$$y(k) J(x(k)) = J^{-1}(x(k)) J(x(k)) f(x(k))$$

$$y(k) J(x(k)) = f(x(k)) \quad (1.66)$$

données:

$$x(k): (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$$

$$f: (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

chercher $y(k): (y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$ en résolvant $y(k) J(x(k)) = f(x(k))$ qui est un système algébrique linéaire, utiliser à cette fin une méthode itérative tel que G-S, G-S accélérée ou SOR (successive over relaxation).

Par la suite la calculer $x(k+1)$ en se basant sur l'expression initiale.

$$x(k+1) = x(k) - y(k) \quad (1.67)$$

a) Algorithme de la méthode de Newton modifiée

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \end{cases}$$

1- Sélectionner $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ comme valeurs solutions initiales

2- $k=0$

3- Calculer les résiduels $\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$

$$J(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}$$

4- Résoudre le système linéaire $n \times n$ pour l'inconnue $\bar{y}^{(k)}$ par la méthode S.O.R par exemple.

$$J(\bar{x}^{(k)})\bar{y}^{(k)} = -\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$$

5- $\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \bar{y}^{(k)}$

6- si $\bar{x}^{(k+1)}$ est suffisamment précis aller à 7.

$k=k+1$

7- Procédure complétée

Ecrire les solutions obtenues \bar{x}^{k+1}

b) Comment tester la précision du vecteur solution (étape 6 de l'algorithme) ?

$\bar{x}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ solution de l'itération actuelle

$\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ solution de l'itération précédente donc connue.

Tolérance: $Tol = \left| \frac{x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}}{x_1^{(k+1)}} \right|$ Erreur relative sur la première composante.

Calculer $ER_i = \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right|$ $i=2, \dots, n$

Calculer $Tol = \max(Tol, ER_i)$ (1.68) $i=2, \dots, n$

Si $Tol < \epsilon$ sortir (allez à l'étape 7)

Sinon $x_i^{(k)} \leftarrow x_i^{(k+1)}$ refaire l'itération en prenant $k=k+1$.

Exercice n°1.33

Utiliser la méthode de Newton modifiée pour obtenir la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 1.2 - e^{x_1 x_2} \\ f_2(x_1, x_2) = 0.5 - \cos(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Prendre $x_1(0)=1$ et $x_2(0)=0.5$ et $\epsilon=10^{-9}$

Tableau 1.36 : Programme de la méthode de Newton modifiée pour résoudre le système d'équations non linéaires présenté dans l'exercice 1.33.

<pre> Real x1(1000),x2(1000),f1(1000),f2(1000) Real df1x1(1000),df1x2(1000),df2x1(1000),df2x2(1000) REAL A(2,2),b1(1000),b2(1000),y1(1000),y2(1000) REAL min1(1000),min2(1000),mint(100) Tol=0.000000001 eps=0.000000001 K=0 x1(k)=0.5 x2(k)=1.0 3 f1(K)=-f1x1x2(x1(k),x2(k)) f2(K)=-f2x1x2(x1(k),x2(k)) df1x1(K)=df1dx1(x1(k),x2(k)) df1x2(K)=df1dx2(x1(k),x2(k)) df2x1(K)=df2dx1(x1(k),x2(k)) df2x2(K)=df2dx2(x1(k),x2(k)) WRITE (*,*)f1(K),f2(K),df1x1(K),df1x2(K),df2x1(K),df2x2(K) A(1,1)=df1x1(K) A(1,2)=df1x2(K) A(2,1)=df2x1(K) A(2,2)=df2x2(K) i=0 y1(i)=0 y2(i)=0 i=1 b1(i)=f1(K) b2(i)=f2(K) 10 y1(i)=(1/A(1,1))*(b1(i)-A(1,2)*y2(i-1)) y2(i)=(1/A(2,2))*(b2(i)-A(2,1)*y1(i)) b1(i+1)=b1(i) b2(i+1)=b2(i) MIN1(i)=ABS(y1(i)-y1(i-1)) MIN2(i)=ABS(y2(i)-y2(i-1)) mint(i)=MIN(MIN1(i),min2(i)) if (mint(i).GT.EPS) then y1(i+1)=y1(i) y2(i+1)=y2(i) i=i+1 GOTO 10 end if x1(k+1)=x1(k)+y1(i) x2(k+1)=x2(k)+y2(i) </pre>	<pre> TOL1=abs(x1(K+1)-x1(K)) TOL2=abs(x2(K+1)-x2(K)) TOLT=MIN(tol1,tol2) if (tolt.GT.TOL) then x1(k)=x1(k+1) x2(k)=x2(k+1) k=k+1 GO TO 3 end if DO i=0,i write (*,*)i,y1(i),y2(i) END DO do k=0,K write (*,*)k,x1(k),x2(k) end do Stop end function f1x1x2(x1,x2) f1x1x2=EXP(x1*x2)-1.2 RETURN end function f2x1x2(x1,x2) f2x1x2=COS(x1+x2)-0.5 RETURN end function df1dx1(x1,x2) df1dx1=x2*EXP(x1*x2) RETURN end function df1dx2(x1,x2) df1dx2=x1*EXP(x1*x2) RETURN end function df2dx1(x1,x2) df2dx1=-SIN(x1+x2) RETURN end function df2dx2(x1,x2) df2dx2=-SIN(x1+x2) RETURN end </pre>
--	--

Tableau 1.37 : Résultats du programme de la méthode de Newton modifiée pour l'ex 1.33

i	x ₁ (i)	x ₂ (i)	i	x ₁ (i)	x ₂ (i)
10	0	0	5	0.2205256820	0.8266718390
2	0.3860145210	0.6836446520	6	0.2205574810	0.8266400690
3	0.1517637370	0.8955739140	7	0.2205573170	0.8266402480
4	0.2156520490	0.8315455320	8	0.2205573170	0.8266402480

1.3.2.5 Méthode du gradient conjugué

Cette méthode numérique permet de résoudre de grands systèmes linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Elle repose sur la recherche de directions successives permettant d'atteindre la solution exacte du système étudié.

a) Description du problème

Considérons le système suivant : $Ax=b$, où A est une matrice de taille $n \times n$ symétrique définie positive ($A^T=A$ et $x^T Ax > 0$, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ non nul). Soit x^* la solution exacte de ce système.

b) Directions conjuguées

Comme la matrice A est symétrique définie positive, on peut définir le produit scalaire suivant sur \mathbf{R}^n : $\langle u, v \rangle_A = u^T Av$. Deux éléments $u, v \in \mathbf{R}^n$ sont dit A -conjugués si :

$$u^T Av = 0$$

La méthode du gradient conjugué consiste à construire une suite (p_k) $k \in \mathbf{N}$ de n vecteurs A -conjugués. Dès lors, la suite p_1, p_2, \dots, p_n forme une base de \mathbf{R}^n . La solution exacte x^* peut donc se décomposer comme suit :

$$x_* = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n \quad (1.69)$$

Où $\alpha_k = \frac{p_k^T b}{p_k^T A p_k}$, $k = 1, \dots, n$. (1.70)

c) Construction des directions conjuguées

La solution exacte x^* peut-être également vu comme l'unique minimisant de la fonctionnelle

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

On a donc clairement $\nabla J(x) = Ax - b$, $x \in \mathbf{R}^n$ d'où

$$\nabla J(x_*) = 0$$

On définit le résidu du système d'équation comme suit $r_x = b - Ax_k = -\nabla J(x_k)$

r_k représente donc la direction du gradient de la fonctionnelle J en x_k (à un signe près).

La nouvelle direction de descente p_{k+1} suit donc celle du résidu modulo, sa A -conjugaison avec p_k , on a alors :

$$p_{k+1} = r_k - \frac{p_k^T A r_k}{p_k^T A p_k} p_k \quad (1.71)$$

C'est le choix du coefficient $\frac{p_k^T A r_k}{p_k^T A p_k}$ qui assure la A -conjugaison des directions p_k . Pour vous en assurer calculez $(A p_{k+1}, p_k)$, cette quantité est nulle.

d) Algorithme du gradient conjugué

Calcul du résidu $r_0 = b - Ax_0$ pour un vecteur x_0 quelconque. On fixe $p_0=r_0$.

Pour $k=1,2,\dots$

$$q_k = Ap_k$$

If $k=1$ $p_1=r_0$

Else

$$\beta_{k-1} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{r_{k-2}^T r_{k-2}}$$

$$p_k = r_{k-1} + \beta_{k-1} p_{k-1}$$

EndIf

$$\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{p_k^T q_k}$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$$

$$r_k = r_{k-1} + \alpha_k q_k$$

FinPour

1.3.2.6 Méthode de Gauss Seidel

La méthode de Gauss – Seidel, due aux Carl Gauss et Gabriel Seidel, est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de la forme $Ax=b$. Elle consiste à construire une suite vectorielle convergente vers la solution du système linéaire.

a) Principe de construction

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution de système linéaire de la forme $Ax=b$

Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires. On cherche à construire l'algorithme pour $x^{(0)}$ donné, la suite $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ avec $k \in \mathbf{N}$.

$A=M-N$ où M est une matrice inversible.

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = F(x) \quad (1.72)$$

où F est une fonction affine.

b) Algorithme de la méthode de G-S

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donne,} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \text{ si non.} \end{cases}$$

Si x est solution de $Ax=b$ alors $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

c) Erreur de la méthode de G-S

Soit $e^{(k)}$ le vecteur erreur

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = M^{-1}N(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = M^{-1}N e^{(k)}$$

on pose $B = M^{-1}N$, ce qui donne :

$$e^{(k+1)} = B e^{(k)} = B^{(K+1)} e^{(0)} \quad (1.73)$$

d) Convergence de la méthode de G-S

L'algorithme converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ (matrice nulle).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ est que le rayon spectral de B vérifie

$$\rho(B) < 1,$$

on rappelle que $\rho(B) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B.

Théorème : si A est à diagonale strictement dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i = 1, \dots, n$$

Alors pour tout x_0 la méthode de Jacobi converge vers la solution x du système $Ax=b$

e) Décomposition de la méthode de G-S

On décompose la matrice A de la façon suivante : $A=D-E-F$

avec

- ▀ D la diagonale
- ▀ -E la partie en dessous de la diagonale
- ▀ -F la partie au dessus.

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on choisit $M=D-E$ et $N=F$ (dans la méthode de Jacobi, $M=D$ et $N=E+F$).

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b$$

On a alors :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (1.74)$$

f) Résidu

Soit $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ le vecteur résidu. On peut écrire $x_i^{(k+1)} = \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} + x_i^{(k)}$ avec $r_i^{(k)}$ que l'on calcule de la manière suivante :

$$r_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{r_i^{(k)}}{a_{jj}} \quad (1.75)$$

g) Test d'arrêt de la méthode de G-S

Pour le test d'arrêt, on utilise le vecteur résidu $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, ce qui donne, pour une précision donnée ε :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad (1.76)$$

On peut synthétiser la méthode de Gauss –Seidel aux équations suivantes :

$$i = 1 \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^k \right]$$

$$i = 2, \dots, n - 1 \quad x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^k \right]$$

$$i = n \quad x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{k+1} \right]$$

Exercice n°1.34

Utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour obtenir la solution du système d'équations donné par :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 1x_3 = 9 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Solution

Pour faciliter l'utilisation de la méthode de Gauss-Seidel, nous avons élaboré un programme de résolution d'un système linéaire composé de 3 équations à 3 inconnues. Ce dernier programme peut être aisément développé pour résoudre un système de taille plus élevée.

Tableau 1.38 : Programme de la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre l'exercice 34.

Real A(3,3),x(3),b1(100),b2(100),b3(100)	x2(i)=(1/A(2,2))*(b2(i)-A(2,1)*x1(i)-
Real x1(100),x2(100),x3(100), min1(100)	A(2,3)*x3(i-1))
Real min2(100),min3(100),mint(100)	x3(i)=(1/A(3,3))*(b3(i)-A(3,1)*x1(i)-
n=3	A(3,2)*x2(i))
EPS=0.000000001	b1(i+1)=b1(i)
x1(0)=0	b2(i+1)=b2(i)
x2(0)=0	b3(i+1)=b3(i)
x3(0)=0	MIN1(i)=ABS(x1(i)-x1(i-1))
b1(1)=5	MIN2(i)=ABS(x2(i)-x2(i-1))
b2(1)=9	min3(i)=ABS(x3(i)-x3(i-1))
b3(1)=6	mint(i)=MIN(MIN1(i),min2(i),min3(i))
A(1,1)=3	if (mint(i).GT.EPS) then
A(1,2)=1	x1(i+1)=x1(i)
A(1,3)=1	x2(i+1)=x2(i)
A(2,1)=2	x3(i+1)=x3(i)
A(2,2)=6	i=i+1
A(2,3)=1	GOTO 10
A(3,1)=1	end if
A(3,2)=1	DO i=0,i
A(3,3)=4	WRITE (*,*)i,x1(i),x2(i),x3(i),mint(i)
i=1	END DO
10 x1(i)=(1/A(1,1))*(b1(i)-A(1,2)*x2(i-1)-	stop
A(1,3)*x3(i-1))	end

Prenons l'exercice n°1.30 de la méthode de Jacobi on obtient les résultats suivants :

Tableau 1.39 : Résultats obtenus par le programme de la méthode de Gauss-seidel

i	X ₁	X ₂	X ₃	i	X ₁	X ₂	X ₃
1	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	9	0,9971935922	0,9971519966	0,9974523939
2	1,6666666667	0,9444444444	0,8472222222	10	1,0017985365	1,0013600703	1,0014136028
3	1,0694444444	0,8032407407	0,8472222222	11	0,9990754423	0,9991648874	0,9992103483
4	1,1165123457	1,0023148148	1,0318287037	12	1,0005415881	1,0004397945	1,0004399176
5	0,9886188272	0,9558577675	0,9702932099	13	0,9997067626	0,9997461510	0,9997546543
6	1,0246163409	1,0087448560	1,0138808513	14	1,0001663982	1,0001386367	1,0001367716
7	0,9924580976	0,9894810778	0,9916597008	15	0,9999081972	0,9999217387	0,9999237413
8	1,0062864071	1,0039040173	1,0045152062	16	1,0000515067	1,0000433107	1,0000425160

La méthode de Gauss –Seidel est plus rapide que celle de Jacobi.

1.3.2.7 Méthode de Gauss Seidel accélérée (Successive Over Relaxation)

C'est une méthode itérative de résolution du système d'équations, elle est similaire à celle de Gauss- Seidel seulement dans cette méthode on introduit un coefficient $0 < \omega < 2$ optimal qui accélère la convergence de manière que la méthode S.O.R soit plus rapide que la méthode de Gauss- Seidel. Donc il $\exists \omega_{opt}$ tel que le nombre d'itérations soit minimum, ω est appelé paramètre de sur-relaxation (accélération de la convergence), il est obtenu d'une manière expérimentale en traçant le nombre d'itérations en fonction de ω .

$$i = 1 \quad x_1^{k+1} = \frac{\omega}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^k \right] + (1 - \omega) x_1^k \quad (1.77)$$

$$i = 2, \dots, n-1 \quad x_i^{k+1} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij}x_j^k \right] + (1-\omega)x_i^k \quad (1.78)$$

$$i = n \quad x_n^{k+1} = \frac{\omega}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj}x_j^{k+1} \right] + (1-\omega)x_n^k \quad (1.79)$$

Exercice n°1.35

Utiliser la méthode de S.O.R pour obtenir la solution du système d'équations donné par :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 1x_3 = 9 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Tableau 1.40 : Programme de la méthode S.O.R pour obtenir les résultats de l'exercice 1.35

Real A(3,3),x(3),b1(100),b2(100),b3(100)	x2(i)=(omega/A(2,2))*(b2(i)-A(2,1)*x1(i)-
Real,x1(100),x2(100),x3(100), min1(100)	A(2,3)*x3(i-1))+(1-omega)*x2(i-1)
REAL min2(100),MIN3(100),mint(100)	x3(i)=(OMEGA/A(3,3))*(b3(i)-A(3,1)*x1(i)-
n=3	A(3,2)*x2(i))+(1-omega)*x3(i-1)
EPS=0.000000001	b1(i+1)=b1(i)
omega=0.95	b2(i+1)=b2(i)
x1(0)=0	b3(i+1)=b3(i)
x2(0)=0	min1(i)=ABS(x1(i)-x1(i-1))
x3(0)=0	min2(i)=ABS(x2(i)-x2(i-1))
b1(1)=5	min3(i)=ABS(x3(i)-x3(i-1))
b2(1)=9	mint(i)=MIN(MIN1(i),min2(i),min3(i))
b3(1)=6	if (mint(i).GT.EPS) then
A(1,1)=3	x1(i+1)=x1(i)
A(1,2)=1	x2(i+1)=x2(i)
A(1,3)=1	x3(i+1)=x3(i)
A(2,1)=2	i=i+1
A(2,2)=6	GOTO 10
A(2,3)=1	end if
A(3,1)=1	DO i=0,i
A(3,2)=1	WRITE (*,*)i,x1(i),x2(i),x3(i),mint(i)
A(3,3)=4	END DO
i=1	stop
10 x1(i)=(omega/A(1,1))*(b1(i)-A(1,2)*x2(i-1)-A(1,3)*x3(i-1))+(1-omega)*x1(i-1)	end

1.3.2 8 Méthode de Gauss-Seidel Accélérée-Newton ou Lieberstein

La méthode Lieberstein est une méthode itérative de résolution du système d'équations non linéaires, elle est plus facile que la méthode de Newton c'est-à-dire sans calculer des matrices ou retour aux théories des graphes.

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$\bar{\phi}(\bar{u}) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(u_1, u_2, \dots, u_{1n} = 0 \\ \phi_2(u_1, u_2, \dots, u_{1n} = 0 \\ \vdots \\ \phi_n(u_1, u_2, \dots, u_{1n} = 0 \end{cases} \quad (1.80)$$

Soit $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \epsilon^{(n)}$

Supposer ϕ et ses premières dérivées du $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}$ bornées.

Développer en série de Taylor $\phi(u^{(n+1)})$ aux allons tour de $u^{(n)}$

$$\phi(u^{(n+1)}) = \phi(u^{(n)}) + \frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)})\varepsilon^{(n)} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u_A) \frac{(\varepsilon^{(n)})^2}{2!}$$

$u^{(n)} < u_A < u^{(n+1)}$ et $E = O(\varepsilon^{(n)})^2 = \frac{K'(\varepsilon^{(n)})^2}{K'}$ = et $K = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u_A)$

Exiger que $\phi(u^{(n+1)}) = 0$ pour que $u^{(n+1)}$ soit solution.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} &= -\frac{\phi(u^{(n)})}{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)})} + O\{(\varepsilon^{(n)})^2\} \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)} - \frac{\phi(u^{(n)})}{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)})} + O\{(\varepsilon^{(n)})^2\} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est le processus de Newton.

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\phi(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})}$$

Posons k indice caractérisant l'itération au lieu de n.

$$\left\{ \begin{aligned} u_1^{k+1} &= u_1^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ u_2^{k+1} &= u_2^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_2}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ &\vdots \\ u_N^{k+1} &= u_N^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_N}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \end{aligned} \right. \quad (1.81)$$

Ceci est le processus de Newton répété N fois.

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^k - \omega \frac{\phi_i(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\phi_{ii}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ \text{où } \phi_{ii} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial u_i} \text{ et } 0 < \omega < 2 \text{ paramètre de relaxation} \end{aligned} \right. \quad (1.82)$$

ω doit être obtenu expérimentalement.

Lors de l'introduction de ω dans formule la méthode est dite Lieberstein et sans le paramètre de relaxation ω la méthode est dite de Gauss-Seidel-Newton.

1.3.2.9 Méthode de Broyden

Ici la mise à jour de la matrice B_k s'écrit :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{s_k - B_k y_k}{t_{s_k} B_k y_k} (t_{s_k} B_k) \quad (1.83)$$

avec $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Cette méthode s'applique au cas général où le jacobien n'a pas de raison d'être symétrique.

1.3.2.10 Méthode d'approximations successives

C'est une méthode itérative utilisée pour résoudre les systèmes non linéaires.

Soit le problème suivant :

$$LU=f(u) \quad (1.84)$$

L est un opérateur linéaire différentiel

Linéariser l'équation (1.84) par la méthode de Picard qui introduit une suite de fonctions $\{u^{(n)}\}$ qui satisfait les conditions aux limites spécifiées et l'équation différentielle partielle.

$$Lu^{(n+1)} = f(u^{(n)}) \quad (1.85)$$

Quant la suite $\{u^{(n)}\}$ converge, la convergence est linéaire c'est-à-dire $u^{(n+1)} - u = O(u^{(n)} - u) = O(h)$ avec u la solution exacte et $u^{(n+1)}$ la solution en discret à n+1 et $u^{(n)}$ la solution en discret à n.

C'est-à-dire $\exists k = \text{constante}/E = kh$ convergence linéaire. En effet quand il y a convergence

$$\begin{aligned} Lu^{(n+1)} &= f(u^{(n+1)}) = f(u^{(n)}) + (u^{(n+1)} - u^{(n)})f'(u^{(n)}) \\ Lu^{(n+1)} &= f(u^{(n)}) + O(h) \end{aligned}$$

O(h) vitesse linéaire de convergence.

(1) Ou si f différentielle (linéarisation de Newton) (1.84) ou Bellman-Juncosa et Kalanba suggèrent une linéarisation différentes (1.85) ou (aussi utilisée par Deuglas)(3)

$$Lu^{(n+1)} = f(u^{(n+1)}) = f(u^{(n)}) + (u^{(n+1)} - u^{(n)})f'(u^{(n)}) + O(h^2)$$

O(h²) une vitesse quadratique de convergence.

n: indice indiquant l'itération

n+1 : actuelle (inconnue à trouver)

$$Lu^{(n+1)} - u^{(n+1)}f'(u^{(n)}) = f(u^{(n)}) - u^{(n)}f'(u^{(n)}) \quad (1.86)$$

Exercice N°1.36

Utiliser la méthode des approximations successives pour obtenir la solution du problème suivant :

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Prendre x0=1

$$x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k}$$

Donne

1.4142	1.5538	1.5981	1.6118	1.6161	1.6174
--------	--------	--------	--------	--------	--------	-------

La convergence de cette suite s'explique par la dérivée $\phi'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \approx 0.31$.

Exercice 1.37

Pour les itérations suivantes

a) $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.3 \begin{pmatrix} y_k \\ -\sin x_k \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

Le rayon spectrale de $\phi'(a)$ vaut $\rho \approx 0.177$ et $\rho \approx 0.447$ respectivement. C'est la raison pour laquelle la première itération converge plus rapidement que la seconde.

1.3.2.11 Résolution du système tri-diagonal

Il existe deux algorithmes permettant de résoudre un système tri-diagonal à savoir l'algorithme de THOMAS et celui de CROUT (CROUT-THOMAS).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit l'algorithme de THOMAS.

- 1- $l_{11} = a_{11}$
 $u_{12} = a_{12}/l_{11}$
- 2- $i=2$
- 3- $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$
 $l_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$
 $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$
- 4- $i=i+1$
- 5- si $i < n$ aller à 3
 Si non aller à 6
- 6- $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}/l_{11}$
 $l_{n,n} = a_{n,n} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$
- 7- $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$
 $z_i = \frac{1}{l_{ii}}(a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})$
 Pour $i=2,3,\dots, n$
- 8- $x_n = z_n$
 $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$
 Pour $i=n-1, n-2,\dots, 1$
- 9- La procédure est complétée (afficher les x_i pour $i=1, 2, 3, \dots, n$)

1.4 Conclusion

Lors de la recherche de solution d'une équation non linéaire et d'un système d'équations soit linéaires ou non linéaires, il est préférable de bien choisir la méthode la plus adéquate afin de minimiser les erreurs de troncature et d'arrondir d'une part et d'autre part de ne pas tomber dans un autre problème qui est difficile par rapport au problème en résolution. A titre d'exemple la résolution d'un système de 50 équations linéaires à 50 inconnues par la méthode d'inversion de la matrice conduit au problème de recherche des déterminants nécessaires pour appliquer la méthode.

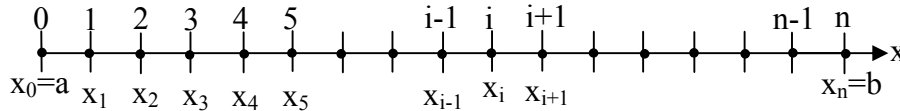
CHAPITRE II

Méthode des différences finies

2.1 Introduction

La méthode de différences finies consiste à diviser l'intervalle, de définition de la fonction f , $[a, b]$ en n intervalles de pas h , la valeur de ce pas est égale à $h=(b-a)/(n-1)$.

Si on travaille dans une seule dimension l'intervalle de définition d'une fonction f peut être discrétiser comme suit.

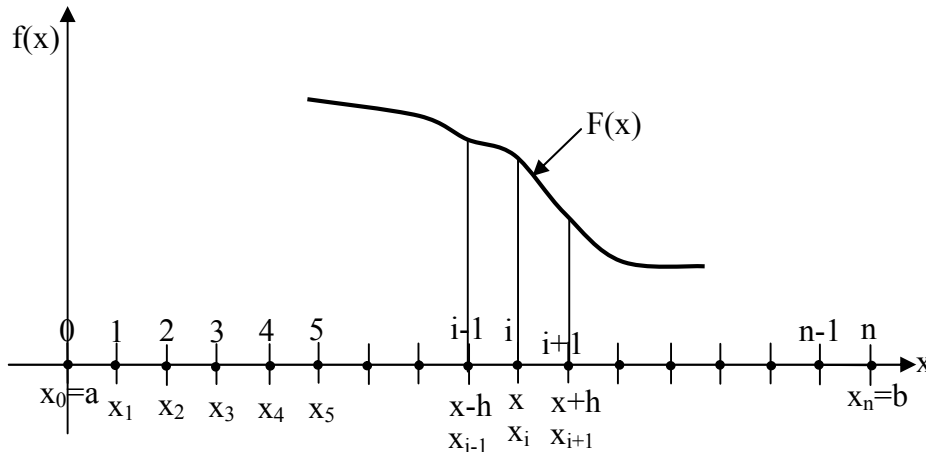


On donne à chaque nœud un numéro en commençant de la première jusqu'au dernier nœud par la suite on attribue à chaque nœud, i , une composante x_i . La valeur de cette composante x_i est donnée par l'expression suivante : $x_i = x_{i-1} + h$ ou $x_i = x_0 + i.h$

Exemple

$$x_1 = x_{1-1} + h = x_0 + h \text{ et } x_2 = x_{2-1} + h = x_1 + h = x_0 + 2h$$

$$x_1 = x_0 + 1.h = x_0 + h \text{ et } x_2 = x_0 + 2.h = x_0 + 2h$$



La fonction $f(x)$ peut être linéaire ou non linéaire.

2.2 La différence de la dérivée première

Le développement limité, de la fonction $f(x)$, en série de Taylor au voisinage de x_0 peut s'exprimer par l'expression ci-après.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$

On peut tirer $f'(x)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - \frac{(x-x_0)}{2!} f''(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{3!} f'''(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{n!} f^n(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} + O(h)$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$\text{Avec } O(h^2) = -\frac{(x-x_0)}{2!}f''(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{3!}f'''(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{n!}f^n(x_0)$$

On a déjà dit que $h=x_i - x_{i-1}$ comme on peut écrire pour $i=1$ que $h= x_1 - x_0$

Posons $h= x - x_0$ dans l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h^1}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0)$$

D'où $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{h} + O(h)$; le terme $O(h)$ signifie une erreur de l'ordre de h .

$$\text{Avec } O(h^2) = -\frac{h}{2!}f''(x_0) - \frac{h^2}{3!}f'''(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{n!}f^n(x_0)$$

$h= x - x_0 \Rightarrow x= x_0+h$ est l'équivalent dans notre discrétisation à $i=1 \Rightarrow x_1= x_0+h$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + O(h)$$

L'erreur $E = -\frac{h}{2}f''(x)$ donc il existe un K tel que $E_{\max}=K.h$

$$K = \max \left| -\frac{f''(x)}{2} \right|$$

a) La différence directe de la dérivée première

Au voisinage point x_i le développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$ est:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{((x_i+h)-x_i)^1}{1!}f'(x_i) + \frac{((x_i+h)-x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{((x_i+h)-x_i)^3}{3!}f'''(x_i) + \dots + \frac{((x_i+h)-x_i)^n}{n!}f^n(x_i)$$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_i) \quad (1)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x_i) - \frac{h^2}{3!}f'''(x_i) - \dots - \frac{h^{n-1}}{n!}f^n(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Pour ne pas entrainer à chaque fois le h , mettons $x=x_i$ et $x_i+h=x_{i+1}$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Pour ne pas entrainer à chaque fois le x , on peut définir $f(x_{i+1}) = f_{i+1}$ et $f(x_i) = f_i$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Cette dernière expression s'appelle la différence directe de la dérivée première. C'est un schéma en en avant avec une erreur du premier ordre.

b) La différence inverse de la dérivée première

Le développement en série de Taylor de $f(x)$ au voisinage de x_{i-1} donne

$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(x_i-h)-x_i)^1}{1!} f'(x_i) + \frac{((x_i-h)-x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{((x_i-h)-x_i)^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{((x_i-h)-x_i)^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n (h)^n}{n!} f^n(x_i) \quad (2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_i) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots + (-1)^n \frac{h^{n-1}}{n!} f^n(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

$$\text{Avec } O(h) = \frac{h}{2!} f''(x_i) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots + (-1)^n \frac{h^{n-1}}{n!} f^n(x_i)$$

Comme la différence directe dérivée première, on peut définir $f(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $f(x_i) = f_i$, $x_i - h = x_{i-1}$ et $x = x_i$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

Cette expression est la différence inverse de la dérivée première. C'est un schéma en arrière avec la même erreur de même ordre.

b) La différence centrale de la dérivée première

La différence centrale de la dérivée première s'obtient de la soustraction des expressions (2)-(1)

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n (h)^n}{n!} f^n(x_i) \quad (2)$$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (1)$$

$$f(x_i - h) - f(x_i + h) = -\frac{2h^1}{1!} f'(x_i) - \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) - \dots - \frac{2(h)^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i - h) - f(x_i + h)}{-2h} + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{2(h)^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(h)^{n-1}}{n!} f^n(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h} + O(h^2) \text{ tel que } O(h^2) = \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(h)^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Chapitre II Méthode des différences finies

Cette dernière s'appelle la différence centrale de la dérivée première. Ce schéma est plus précis avec une erreur du second ordre.

NB : Les schémas en avant et en arrière sont simples et non précis alors que le schéma central est plus précis.

2.3 La différence de la dérivée seconde

a) La différence directe de la dérivée seconde

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{2h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{2^n h^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + \frac{4h^3}{3} f'''(x_i) + \dots + \frac{2^n h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (3)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) - \frac{4h^3}{3} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n 2^n h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (4)$$

Pour obtenir la différence directe de la dérivée deuxième $f''(x)$, on doit éliminer $f'(x)$ entre les expressions (1) et (3). Pour ce faire on multiplie l'expression (1) par 2 par la suite on fait la soustraction de (3)- la nouvelle expression de (1) qu'on le désigne par (5).

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_i) \quad \times 2$$

$$2f(x_i + h) = 2f(x_i) + \frac{2h^1}{1!} f'(x_i) + 2 \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + 2 \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + 2 \frac{h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (5)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + \frac{4h^3}{3} f'''(x_i) + \dots + \frac{2^n h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (3)$$

(5)-(3) donne :

$$f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + h^3 f'''(x_i) + \dots + \frac{(2^n - 1)h^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$h^2 f''(x_i) = f(x_i + 2h) + f(x_i) - 2f(x_i + h) - h^3 f'''(x_i) - \dots - \frac{(2^n - 1)h^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + 2h) + f(x_i) - 2f(x_i + h)}{h^2} - hf'''(x_i) - \dots - \frac{(2^n - 1)h^{n-2}}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + 2h) + f(x_i) - 2f(x_i + h)}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) = -hf'''(x_i) - \dots - \frac{(2^n - 1)h^{n-2}}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+2} + f_i - 2f_{i+1}}{h^2} + O(h)$$

Cette dernière expression est la différence directe (schéma en avant) de la dérivée seconde où l'erreur est de premier ordre.

b) La différence inverse de la dérivée seconde

Pour obtenir la différence inverse de la dérivée seconde, on doit éliminer entre les expressions (2) et (4) la dérivée première $f'(x)$. A cet effet, on multiplie l'expression (2) par 2 pour obtenir l'expression (6) par la suite on fait la soustraction entre (4) et (6).

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n (h)^n}{n!} f^n(x_i) \quad \times 2$$

$$2f(x_i - h) = 2f(x_i) - 2hf'(x_i) + h^2 f''(x_i) - \frac{1h^3}{3} f'''(x_i) + \dots + \frac{2(-1)^n (h)^n}{n!} f^n(x_i) \quad (6)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) - \frac{4h^3}{3} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n 2^n h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (4)$$

La soustraction de (4) – (6) donne ce qui suit :

$$f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) - h^3 f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n (2^n - 2) h^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + hf'''(x_i) - \dots - \frac{(-1)^n (2^n - 2) h^{n-2}}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) = hf'''(x_i) - \dots - \frac{(-1)^n (2^n - 2) h^{n-2}}{n!} f^n(x_i)$$

Lorsqu'on néglige les dérivées d'ordre supérieur à 3 on obtient la différence inverse de la dérivée seconde.

$$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

Cette dernière expression est la différence inverse (schéma en arrière) de la dérivée seconde où l'erreur est de premier ordre.

c) La différence centrale de la dérivée seconde

Pour obtenir la différence centrale de la dérivée seconde, on doit éliminer entre les expressions (1) et (2) la dérivée première $f'(x)$. A cet effet, on fait la somme des deux expressions par la suite on extrait $f''(x)$.

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_i) \quad (1)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \frac{h^1}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n (h)^n}{n!} f^n(x_i) \quad (2)$$

La somme des expressions (1) +(2) donne

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \dots + \frac{2h^n}{n!} f^n(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(x_i) - \dots - \frac{2h^{n-2}}{n!} f^{(n)}(x_i)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$O(h^2) = -\frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(x_i) - \dots - \frac{2h^{n-2}}{n!} f^{(n)}(x_i)$$

Lorsqu'on néglige les dérivées d'ordre supérieur à 4 on obtient la différence centrale de la dérivée seconde.

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Cette dernière expression est la différence centrale de la dérivée seconde où l'erreur est de second ordre.

2.4 Conditions aux limites

Il existe trois conditions aux limites

a) Condition limite du premier type ou condition de Dirichlet

Elle est donnée par l'expression $y(a)=\alpha$

b) Condition limite du deuxième type ou condition de Neumann

$$\alpha y'(a)=\beta$$

c) Condition au limite du troisième type (condition mixte ou de Robins)

$$\alpha y'(a)+\beta y(a)=\gamma$$

2.5 Résolution numérique des équations différentielles

Les équations différentielles se subdivisent en deux types, les équations différentielles ordinaires (O.D.E) et les équations différentielles partielles (P.D.E).

2.5.1 Intégration numérique des équations différentielles par les séries de Taylor

Soit l'E.D.O donnée par la forme suivante :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

La fonction f doit être suffisamment différentiable par rapport x et y

Il est connu que (1) possède une solution unique si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue dans le domaine d'intérêt.

Chapitre II Méthode des différences finies

Soit $y(x)$ la solution exacte de (1), $y(x)$ est développée en série de Taylor aux allons tour de x_0

$$y(x) = y(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!}y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}y^{(n)}(x_0) \quad (2)$$

Il faut noter que les dérivées y', y'', y''' etc. ne sont pas connues explicitement.

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = f_x + f_y \cdot y' = f_x + f_y \cdot f$$

$$y''' = f'' = f_{xx} + f_{xy} \cdot f + f_{yx} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f$$

$$y'''' = f_{xxx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

$$x_i = x_0 + i \cdot h$$

$i=0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$$y(n+1) = y(n) + (x_{n+1} - x_n)f + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!}f' + \dots$$

$y(x_{n+1})$ la solution exacte et $y(n+1)$ la solution approchée.

Posons $h = x_{n+1} - x_n$ la solution approchée devient :

$$y(n+1) = y(n) + hf + \frac{h^2}{2!}f' + \frac{h^3}{3!}f'' \dots$$

Introduisant l'opérateur $T_K(x, y)$ on aura :

$$y(n+1) = y(n) + hT_K(x_n, y_n)$$

$$\text{Où } T_K(x, y) = f + \frac{h}{2!}f' + \frac{h^2}{3!}f'' + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(x, y)$$

$N=1, 2, 3, \dots$

La méthode de Taylor a l'inconvénient de calculer les dérivées qui ne sont pas connues explicitement.

2.5.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler n'est pas utilisée en pratique (méthode de Taylor pour $n=1$) car elle utilise un pas h très petit pour avoir une précision acceptable en théorie.

$$y(n+1) = y(n) + hf(x_n, y_n)$$

2.5.3 Méthodes de Rung-Kutta (Carl Rung & Martin Wilhelm Kutta en 1901)

La méthode de Taylor est à éviter à cause de calcul des dérivées, la méthode de Rung-Kutta permet d'obtenir une meilleure précision tout en évitant les calculs des dérivées, nous allons

Chapitre II Méthode des différences finies

développer les plus simples des méthodes de Rung-Kutta puis les autres méthodes seront données sans mettre le détaille.

Les méthodes de Rung-Kutta sont des méthodes d'approximation de la solution d'équations différentielles et qui ne demandent pas le calcul de la dérivée.

a) Méthodes de Rung-Kutta d'ordre 1

La méthode de Rung- Kutta d'ordre1 est équivalente à celle d'Euler.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(n + 1) = y(n) + hf(x_n, y_n)$$

b) Méthodes de Rung Kutta d'ordre 2 (méthode du point milieu)

Elle peut s'écrire :

$$y(n + 1) = y(n) + aK_1 + bK_2 \quad (1)$$

où

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta K_1)$$

a, b, α et β sont des constantes à déterminer de manière que (1) correspond à l'algorithme de Taylor. Développer $y(x_{n+1})$ en série de Taylor jusqu'au terme d'ordre h^3 .

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h^1}{1!} y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h^1}{1!} f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} (f_x + f_y \cdot f) + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^4) \quad (2)$$

$E = O(h^4)$, il existe un K tel que $E=K \cdot h^4$.

Aussi on utilise le développement en série de Taylor pour la fonction à deux variables

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{h} = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta K_1) &= f(x_n, y_n) + \alpha h f_x + \beta K_1 f_y + \frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta K_1 f_{xy} + \frac{\beta^2 K_1^2}{2} f_{yy} + O(h^2) \\ &= f(x_n, y_n) + \alpha h f_x + \beta K_1 f_y + \frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta K_1 f_{xy} + \frac{\beta^2 K_1^2}{2} f_{yy} + O(h^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Si on substitue l'expression de K_2 dans (1) et en réarrangeant selon les puissances de h on obtient :

$$y_{n+1} = y_n + (a + b)hf + bh^2(\alpha \cdot f_x + \beta f \cdot f_y) + bh^3(\frac{\alpha^2}{2} f_{xx} + \alpha \cdot \beta f f_{xy} + \frac{\beta^2}{2} f^2 f_{yy} + O(h^4)) \quad (4)$$

En comparant (4) et (2) on obtient :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \alpha b = \beta b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chapitre II Méthode des différences finies

Quatre inconnues avec 3 équations donc il y a ∞ de solutions dont la plus simple $\alpha=\beta=1$ et $a=b=1/2$.

Donc on a un algorithme.

$$\begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \\ y(n+1) = y(n) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ x_n = x_0 + n \cdot h \end{cases}$$

L'algorithme obtenu s'appelle méthode de Rung-Kutta d'ordre 2.

c) Méthodes de Rung Kutta d'ordre 3

La méthode de Rung-Kutta d'ordre 3 c'est une méthode numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles, l'algorithme suivant donne les étapes à suivre lors de la résolution.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ x_n = x_0 + n \cdot h \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + 0,5h, y_n + 0,5hf(x_n, y_n)) \\ K_3 = hf(x_n + h, y_n - K_1 + 2K_2) \\ y(n+1) = y(n) + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{cases}$$

d) Méthodes de Rung Kutta d'ordre 4

La méthode de Rung-Kutta d'ordre 4, est un algorithme permettant de résoudre les équations différentielles selon les procédés suivants :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ x_n = x_0 + n \cdot h \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + 0,5h, y_n + 0,5hf(x_n, y_n)) \\ K_3 = hf(x_n + 0,5h, y_n + 0,5K_2) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y(n+1) = y(n) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

Les avantages de la méthode de Rung- Kutta.

- Facile à programmer
- Auto démarrante
- La taille du pas peut être changée sans difficulté
- Caractéristiques de stabilité assez bonne (petites perturbations des conditions initiales produisent des petites perturbations dans les approximations).

Les méthodes citées précédemment sont des méthodes uni-pas il existe des méthodes multi-pas qui donnent également des précisions satisfaisantes lors des résolutions des équations différentielles.

2.5.4 Méthodes multi-pas

Les méthodes discrétisées précédemment sont appelées méthodes uni-pas car les approximations au point x_{i+1} sont fonction des informations du point x_i . Il est raisonnable de développer les méthodes utilisant les points $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ ceci dans le but de réduire l'erreur $|w(j) - y(x_j)|$ qui tend à augmenter avec j .

a) Définition

Une méthode multi-pas pour résoudre par exemple une équation différentielle ordinaire par approximation de $w(i+1)$ à $x(i+1)$ peut être représentée par l'équation suivante, en montée >1 :

$$w(i+1) = a_{m-1}w(i) + a_{m-2}w(i-1) + \dots + a_0w(i+1-m) + h(b_m f(x(i+1), w(i+1)) + b_{m-1}f(x_i, w_i) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, w_{i+1-m}))$$

Pour $i=m-1, m, \dots, N-1$

Où les valeurs initiales $w_0=\alpha_0, w_1=\alpha_1, w_{m-1}=\alpha_{m-1}, h=(b-a)/N$

Si $b_m=0 \Rightarrow c$ 'est une méthode explicite.

Si $b_m \neq 0 \Rightarrow c$ 'est une méthode implicite.

Une procédure pour obtenir les méthodes multi-pas est d'intégrer dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'équation différentielle $y'=f(x,y(x))$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

$f(x,y(x))$ ne peut être intégré car la solution $y(x)$ n'est pas connue, on intègre par contre un polynôme d'interpolation P déterminé par les points obtenus précédemment.

$$y(x_{i+1}) \approx w(x_{i+1}) = w(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

$p(x)$ peut être choisi comme étant le polynôme de Lagrange, ou de Newton.

2.5.4.1 Méthodes explicites

a) Méthode explicite à 2 pas

Pour obtenir la méthode explicite à deux pas on suit les démarches suivantes :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x_{i+1}) \approx w(x_{i+1}) = w(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

Pour obtenir l'approximation de l'intégrale de $f(x, y(x))$, on utilise une fonction l'interpolation, de cette fonction, et ce en se basant sur la méthode de Lagrange en deux (2) points $(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$ et $(x_i, y(x_i))$. Dans ce cas là, le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$P(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i, y(x_i))$$

$$P(x) = \frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))}{x_{i-1} - x_i} (x - x_i) + \frac{f(x_i, y(x_i))}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$

$$P(x) = \frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))}{-h} (x - x_i) + \frac{f(x_i, y(x_i))}{h} (x - x_{i-1})$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))}{-h} (x - x_i) + \frac{f(x_i, y(x_i))}{h} (x - x_{i-1}) \right) dx$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \left[\frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) (x - x_i)^2}{-2h} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \left[\frac{f(x_i, y(x_i)) (x - x_{i-1})^2}{2h} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \left[\frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) (x - x_i)^2}{-2h} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \left[\frac{f(x_i, y(x_i)) (x - x_{i-1})^2}{2h} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) ([x_{i+1} - x_i]^2 - [x_i - x_i]^2)}{-2h} + \frac{f(x_i, y(x_i)) ([x_{i+1} - x_{i-1}]^2 - [x_i - x_{i-1}]^2)}{2h}$$

$$x_{i+1} - x_{i-1} = 2h, \quad x_{i+1} - x_i = h \text{ et } x_i - x_{i-1} = h$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) ([h]^2 - [0]^2)}{-2h} + \frac{f(x_i, y(x_i)) ([2h]^2 - [h]^2)}{2h}$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) (h^2)}{-2h} + \frac{f(x_i, y(x_i)) (3h^2)}{2h}$$

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) - \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \frac{3h}{2} f(x_i, y(x_i))$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha_0 \\ w(x_{i+1}) = w(x_i) - \frac{h}{2} f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) + \frac{3h}{2} f(x_i, w(x_i)) \\ i = 1, 2, 3 \dots N - 1 \end{cases}$$

Ce dernier schéma numérique s'appelle la méthode explicite à 2 pas connue sous le nom de technique d'Adams-Bashforth d'ordre 2. Il existe une autre procédure basée sur les séries de Taylor pour obtenir le même résultat.

Par la même manière on obtient les méthodes explicites à 3 pas, 4 pas et 5 pas.

b) Méthode explicite à 3 pas

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{h}{12} [23f(x_i, w(x_i)) - 16f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) + 5f(x_{i-2}, w(x_{i-2}))]$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = \frac{3}{8} y^4 (\mu_i) h^3$

c) Méthode explicite à 4 pas

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{h}{24} [55f(x_i, w(x_i)) - 59f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) + 37f(x_{i-2}, w(x_{i-2})) - 9f(x_{i-3}, w(x_{i-3}))]$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = \frac{251}{720} y^5 (\mu_i) h^4$

d) Méthode explicite à 5 pas

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{h}{720} [1901f(x_i, w(x_i)) - 2274f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) + 2616f(x_{i-2}, w(x_{i-2})) - 1274f(x_{i-3}, w(x_{i-3})) + 251f(x_{i-4}, w(x_{i-4}))]$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = \frac{59}{288} y^6 (\mu_i) h^5$

2.5.4.2 Méthodes implicites (Technique d'Adams-Moulton)

Si le point $(x_{i+1}, f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$ est inclus dans le mode d'interpolation lors de l'approximation de l'intégrale ainsi écrite les méthodes implicites sont obtenues.

a) Méthode implicite à 2 pas

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{h}{12} [5f(x_{i+1}, w(x_{i+1})) + 8f(x_i, w(x_i)) - f(x_{i-1}, w(x_{i-1}))]$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = -\frac{1}{24} y^4 (\mu_i) h^3$

b) Méthode implicite à 3 pas

$$w(x_{i+1}) = w(x_i) + \frac{h}{24} [9f(x_{i+1}, w(x_{i+1})) + 19f(x_i, w(x_i)) - 5f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) + f(x_{i-2}, w(x_{i-2}))]$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = -\frac{19}{720} y^5 (\mu_i) h^4$

c) Méthode implicite à 4 pas

$$\begin{aligned}
 (w_{i+1}) &= w(x_i) \\
 &+ \frac{h}{720} [251f(x_{i+1}, w(x_{i+1})) + 646f(x_i, w(x_i)) - 264f(x_{i-1}, w(x_{i-1})) \\
 &+ 106f(x_{i-2}, w(x_{i-2})) - 19f(x_{i-3}, w(x_{i-3}))]
 \end{aligned}$$

L'erreur de troncature $E_{i+1} = -\frac{3}{160}y^6(\mu_i)h^5$

Où $x_i \leq \mu_i \leq x_{i+1}$

En général, les coefficients des termes de f et de l'erreur sont plus petits dans les méthodes d'Adams-Moulton donc plus grande stabilité (inconditionnellement stables) pour les méthodes implicites ce qui conduit à des petites erreurs d'arrondies mais elles présentent l'inconvénient d'être compliquées à résoudre. Les méthodes explicites sont simples à résoudre mais elles sont conditionnellement stables ce qui augmente l'erreur d'arrondie.

Exercice n°2.1

Comparer les résultats numériques de la résolution analytique avec ceux de la résolution par les méthodes de RK2 et RK4 du problème défini par l'équation différentielle ordinaire ci-après.

$$\begin{cases}
 y' = f(x, y) = 2x - y \\
 y(x_0 = 0) = y_0 = 0
 \end{cases}$$

Solution

Recherche de la solution analytique

$$y' = f(x, y) = 2x - y$$

$$y' = f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x - \lambda y) = \lambda(2x - y) = \lambda^1(2x - y) = \lambda^1 f(x, y)$$

C'est une équation de degré 1 $y' = 2x - y \Rightarrow y' + y = 2x$

a) Solution homogène

$$y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -dx \Rightarrow \ln |y| = -x + c$$

$$|y| = e^{-x+c} \Rightarrow y = \pm e^{-x+c}$$

Posons $k = \pm e^c$ nous aurons $y = ke^{-x}$

b) Solution particulière

Nous avons $y' + y = 2x$ elle de la forme $y' + p(x)y = q(x)$

On suppose que $k=k(x)$

$$y = k(x)e^{-x} \Rightarrow y' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$$

$$y' + y = 2x \Rightarrow (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} = 2x \Rightarrow k'(x)e^{-x} = 2x \Rightarrow k(x) = \int \frac{2x}{e^{-x}} dx$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$k(x) = \int 2xe^x dx$$

On fait l'intégration par partie $\int udv = uv - \int vdu$

Posons $u = x \Rightarrow du = dx$ et $dv = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$k(x) = \int 2xe^x dx = 2 \left(\int xe^x dx \right) = 2 \left(xe^x - \int e^x dx \right) = 2(xe^x - e^x + c) = 2xe^x - 2e^x + 2c$$

$$k(x) = 2xe^x - 2e^x + 2c \Rightarrow y = (2xe^x - 2e^x + 2c)e^{-x} \Rightarrow y = (2x - 2 + 2ce^{-x})$$

La condition initiale $y(x=0)=0$ donne la valeur de c .

$$0 = (0 - 2 + 2ce^0) \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = (2x - 2 + 2e^{-x})$$

Exercice n°2.2

Comparer les résultats numériques de la résolution analytique avec ceux de la résolution par les méthodes de RK4 et de prédiction correction d'Adams (4pas)-Moulton (3pas) du problème défini par l'équation différentielle ordinaire ci-après.

$$\begin{cases} y' = f(t, y) = 5(y - t^2) & 0 \leq t \leq 5 \\ y(t_0 = 0) = y_0 = 0.08 \end{cases}$$

Solution

Solution= solution homogène (Ae^{5t})+solution particulière ($t^2 + 0,4t + 0,08$)

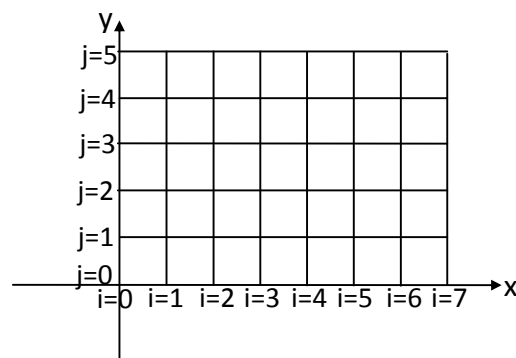
La solution exacte $y(t) = Ae^{5t} + t^2 + 0,4t + 0,08$

$y(0)=0,08 \Rightarrow A=0$ et la solution exacte devient : $y(t) = t^2 + 0,4t + 0,08$

Exercice n°2.3

Déterminer la forme de l'équation de Laplace approximée par la méthode de différences finies lorsqu'on considère les intervalles Δx et Δy différents.

$\Delta x = hx$ et $\Delta y = hy$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = 0$$

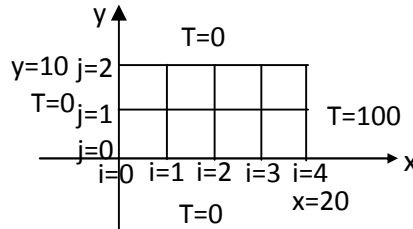
$$\Rightarrow u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + \frac{h_x^2}{h_y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = 0$$

Posons $r = \frac{h_x^2}{h_y^2}$ nous aurons : $u_{i-1,j} - (2+2r)u_{i,j} + u_{i+1,j} + ru_{i,j-1} + ru_{i,j+1} = 0$

Premier cas : $\Delta x = \Delta y = 5 \Rightarrow r = 1$ l'équation précédente devient :

$$u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0$$

Pour obtenir les valeurs de la température aux nœuds intérieurs, de la discrétisation suivante, lors de la propagation de la chaleur dans une plaque homogène l'équation précédente génère les 3 équations suivantes :



Au nœud $(i=1, j=1)$ $T_{0,1} - 4T_{1,1} + T_{2,1} + T_{1,0} + T_{1,2} = 0 \Rightarrow 0 - 4T_{1,1} + T_{2,1} + 0 + 0 = 0$

$$-4T_{1,1} + T_{2,1} + 0T_{3,1} = 0$$

Au nœud $(i=2, j=1)$ $T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{3,1} + T_{2,0} + T_{2,2} = 0 \Rightarrow T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{3,1} + 0 + 0 = 0$

$$T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{3,1} = 0$$

Au nœud $(i=3, j=1)$ $T_{2,1} - 4T_{3,1} + T_{4,1} + T_{3,0} + T_{3,2} = 0 \Rightarrow T_{2,1} - 4T_{3,1} + 100 + 0 + 0 = 0$

$$0T_{1,1} + T_{2,1} - 4T_{3,1} = -100$$

On a trois équations à trois inconnus.

$$\begin{cases} -4T_{1,1} + T_{2,1} + 0T_{3,1} = 0 \\ T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{3,1} = 0 \\ 0T_{1,1} + T_{2,1} - 4T_{3,1} = -100 \end{cases}$$

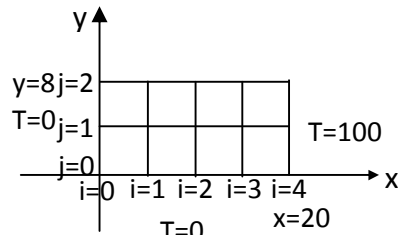
Utilisons l'une des méthodes déjà utilisée au chapitre 1 pour obtenir les valeurs aux nœuds intérieurs.

$T_{1,1} = 1,78$, $T_{2,1} = 7,14$ et $T_{3,1} = 26,78$

Chapitre II Méthode des différences finies

Second cas : $\Delta x \neq \Delta y \Rightarrow r \neq 1$ l'équation prend sa forme initiale qui est.

$$u_{i-1,j} - (2+2r)u_{i,j} + u_{i+1,j} + ru_{i,j-1} + ru_{i,j+1} = 0$$



$$r = \frac{h_x^2}{h_y^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1,5625$$

Au nœud $(i=1, j=1)$ $T_{0,1} - 5,125T_{1,1} + T_{2,1} + T_{1,0} + T_{1,2} = 0 \Rightarrow 0 - 5,125T_{1,1} + T_{2,1} + 0 + 0 = 0$

$$-5,125T_{1,1} + T_{2,1} + 0T_{3,1} = 0$$

Au nœud $(i=2, j=1)$ $T_{1,1} - 5,125T_{2,1} + T_{3,1} + T_{2,0} + T_{2,2} = 0 \Rightarrow T_{1,1} - 5,125T_{2,1} + T_{3,1} + 0 + 0 = 0$

$$T_{1,1} - 5,125T_{2,1} + T_{3,1} = 0$$

Au nœud $(i=3, j=1)$ $T_{2,1} - 5,125T_{3,1} + T_{4,1} + T_{3,0} + T_{3,2} = 0 \Rightarrow T_{2,1} - 5,125T_{3,1} + 100 + 0 + 0 = 0$

$$0T_{1,1} + T_{2,1} - 5,125T_{3,1} = -100$$

On a trois équations à trois inconnus.

$$\begin{cases} -5,125T_{1,1} + T_{2,1} + 0T_{3,1} = 0 \\ T_{1,1} - 5,125T_{2,1} + T_{3,1} = 0 \\ 0T_{1,1} + T_{2,1} - 5,125T_{3,1} = -100 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne les valeurs suivantes :

$$T_{1,1} = 0,804108, \quad T_{2,1} = 4,2110556 \text{ et } T_{3,1} = 20,3163033$$

Chapitre II Méthode des différences finies

2.5.5 Quelques programmes sur les méthodes uni-pas et multi-pas

Programme de la méthode de Rung-Kutta d'ordre 1 (Euler)

REAL x(50), y(50),exac(50),err(50)	y(i))/exac(i))*100
open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat1.default')	END do
DATA n,x1,xn,y1/11,0,1,0/	do i=1,n
h=(xn-x1)/(n-1)	write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i)
x(1)=x1	1 format (5x,4f12.8)
y(1)=y1	end do
do 20 i=1,n	write (7,*)'fin de programme'
x(i+1)=x(i)+h	close (7)
20 y(i+1)=y(i)+h*fonc(x(i),y(i))	stop
do i=1,n	end
x(i+1)=x(i)+h	function fonc(x,y)
exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2	fonc=2*x-y
ERR(i)=ABS((exac(i)-	return
	end

Méthode de Rung-Kutta d'ordre 2

REAL x(50), y(50),exac(50),err(50)	ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100
open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat2.default')	END do
DATA n,x1,xn,y1/11,0,1,0/	do i=1,n
h=(xn-x1)/(n-1)	write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i)
x(1)=x1	1 format (5x,4f12.8)
y(1)=y1	end do
do 20 i=1,n	write (7,*)'fin de programme'
t1=h*fonc(x(i),y(i))	close (7)
t2=h*fonc(x(i)+h,y(i)+h*fonc(x(i),y(i)))	stop
x(i+1)=x(i)+h	end
20 y(i+1)=y(i)+0.5*(t1+t2)	function fonc(x,y)

Chapitre II Méthode des différences finies

<pre>do i=1,n x(i+1)=x(i)+h exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2</pre>	<pre>fonc=2*x-y return end</pre>
---	----------------------------------

Méthode de Rung-Kutta d'ordre 3

<pre>REAL x(50), y(50),exac(50),err(50) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat3.default') DATA n,x1,xn,y1/10,0,1,0/ h=(xn-x1)/(n) x(0)=x1 y(0)=y1 do 20 i=0,n t1=fonc(x(i),y(i)) t2=fonc(x(i)+0.5*h,y(i)+0.5*h*t1) t3=fonc(x(i)+h,y(i)-t1*h+2*t2*h) x(i+1)=x(i)+h 20 y(i+1)=y(i)+h*(t1+4*t2+t3)/6 do i=0,n x(i+1)=x(i)+h</pre>	<pre>exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2 ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100 END do do i=0,n write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i) 1 format (5x,4f12.8) end do stop end function fonc(x,y) fonc=2*x-y return end</pre>
---	--

Méthode de Rung-Kutta d'ordre 4

<pre>REAL x(50), y(50),exac(50),err(50) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat4.default') DATA n,x1,xn,y1/11,0,1,0/ h=(xn-x1)/(n-1) x(1)=x1 y(1)=y1 do 20 i=1,n t1=h*fonc(x(i),y(i)) t2=h*fonc(x(i)+(h/2),y(i)+0.5*t1) t3=h*fonc(x(i)+(h/2),y(i)+0.5*t2)</pre>	<pre>x(i+1)=x(i)+h exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2 ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100 END do do i=1,n write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i) 1 format (5x,4f12.8) end do stop end</pre>
---	---

Chapitre II Méthode des différences finies

<pre>t4=h*fonc (x(i)+h,y(i)+t3) x(i+1)=x(i)+h 20 y(i+1)=y(i)+(t1+2*t2+2*t3+t4)/6 do i=1,n</pre>	<pre>function fonc(x,y) fonc=2*x-y return end</pre>
---	---

Méthodes de D'Adams – Bashforth (explicite à 3 pas et implicite(Adams-Moulton) à 2 pas)

<pre>REAL x(50) , Y(50),exac(50),err(50) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat5.default') DATA n,x1,xn,y1/10,0,1,0/ h=(xn-x1)/(n) x(0)=x1 y(0)=y1 i=0 3 t1=h*fonc(x(i),y(i)) t2=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t1) t3=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t2) t4=h*fonc(x(i)+h,y(i)+t3) y(i+1)=y(i)+(t1+2*t2+2*t3+t4)/6 x(i+1)=x(0)+(i+1)*h i=i+1 IF(i.le.1)GO TO 3 6 y(i+1)=y(i)+(h/12)*(23*fonc(x(i),y(i))-16*fonc(x(i-1),y(i-1)) +5*fonc(x(i-2),y(i-2))) x(i+1)=x(0)+(i+1)*h y(i+1)=y(i)+(h/12)*(5*fonc(x(i+1),y(i+1))+8*fonc(x(i),y(i))-fonc(x(i-1),y(i-1)))</pre>	<pre>i=i+1 IF(i.LE.(n-1))go to 6 do i=0,n x(i+1)=x(0)+(i+1)*h exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2 ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100 END do do i=0,n write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i) 1 format (5x,4f12.8) end do write (7,*)'fin de programme' close (7) stop end function fonc(x,y) fonc=2*x-y return end</pre>
---	---

Chapitre II Méthode des différences finies

Méthodes de D'Adams – Bashforth (explicite à 4 pas et implicite (Adams-Moulton) à 3 pas)

<pre> REAL x(50) , Y(50),exac(50),err(50) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat6.default') DATA n,x1,xn,y1/10,0,1,0/ h=(xn-x1)/(n) x(0)=x1 y(0)=y1 i=0 3 t1=h*fonc(x(i),y(i)) t2=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t1) t3=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t2) t4=h*fonc(x(i)+h,y(i)+t3) y(i+1)=y(i)+(t1+2*t2+2*t3+t4)/6 x(i+1)=x(0)+(i+1)*h i=i+1 IF(i.le.2)GO TO 3 6 y(i+1)=y(i)+(h/24)*(55*fonc(x(i),y(i))-59*fonc(x(i-1),y(i-1)) +37*fonc(x(i-2),y(i-2))-9*fonc(x(i-3),y(i-3))) x(i+1)=x(0)+(i+1)*h y(i+1)=y(i)+(h/24)*(9*fonc(x(i+1),y(i+1))+19*fonc(x(i),y(i))- 5*fonc(x(i-1),y(i-1))+fonc(x(i-2),y(i-2))) i=i+1 </pre>	<pre> IF(i.LE.(n-1))go to 6 do i=0,n x(i+1)=x(0)+(i+1)*h exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2 ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100 END do do i=0,n write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i) 1 format (5x,4f12.8) end do write (7, *)'fin de programme' close (7) stop end function fonc(x,y) fonc=2*x-y return end </pre>
--	---

Méthodes explicite à 5 pas (d'Adams – Bashforth) et implicite (d'Adams-Moulton) à 4 pas

<pre> REAL x(50) , Y(50),exac(50),err(50) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat7.default') DATA n,x1,xn,y1/10,0,1,0/ h=(xn-x1)/(n) x(0)=x1 y(0)=y1 i=0 </pre>	<pre> i=i+1 IF(i.LE.(n-1))go to 6 do i=0,n x(i+1)=x(0)+(i+1)*h exac(i)=2*EXP(-x(i))+2*x(i)-2 ERR(i)=ABS((exac(i)-y(i))/exac(i))*100 END do </pre>
---	---

Chapitre II Méthode des différences finies

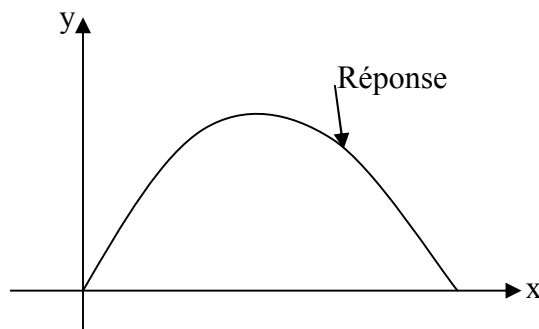
<pre> 3 t1=h*fonc(x(i),y(i)) t2=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t1) t3=h*fonc(x(i)+h/2,y(i)+0.5*t2) t4=h*fonc(x(i)+h,y(i)+t3) y(i+1)=y(i)+(t1+2*t2+2*t3+t4)/6 x(i+1)=x(0)+(i+1)*h i=i+1 IF(i.le.3)GO TO 3 6 y(i+1)=y(i)+(h/720)*(1901*fonc(x(i),y(i))-2274*fonc(x(i-1),y(i-1))+2616*fonc(x(i-2),y(i-2))-1274*fonc(x(i-3),y(i-3)) +251*fonc(x(i-4),y(i-4))) x(i+1)=x(0)+(i+1)*h y(i+1)=y(i)+(h/720)*(251*fonc(x(i+1),y(i+1))+664*fonc(x(i),y(i))-264*fonc(x(i-1),y(i-1))+106*fonc(x(i-2),y(i-2)) -19*fonc(x(i-3),y(i-3))) </pre>	<pre> do i=0,n write(7,1)x(i),y(i),exac(i),err(i) 1 format (5x,4f12.8) end do write (7,*)'fin de programme' close (7) stop end function fonc(x,y) fonc=2*x-y return end </pre>
---	--

2.6 Différences finies en régime stationnaires (permanent)

Exercice n°2.4

Utiliser la méthode de différences finies pour obtenir la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + Ay = B \\ y(0) = 0 \\ y(b) = 0 \\ a = 0 \leq x \leq b \end{cases}$$



Discretisons notre domaine d'intérêt en n nœuds de pas h.

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_i} + (Ay)_{x=x_i} = (B)_{x=x_i}$$

Lors de la résolution on suppose que les paramètres A et B sont des constantes et on utilise la différence centrale de la dérivée deuxième.

Chapitre II Méthode des différences finies

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Utilisons la différence centrale de la dérivée première nous aurons :

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$
$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + 2u_i = x_i$$

Multiplions par h^2 nous aurons :

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} - \frac{h}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) + 2h^2u_i = h^2x_i$$
$$\left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{i-1} + (2h^2 - 2)u_i + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_{i+1} = h^2x_i$$

Au nœud $i=1$ $\left(1 + \frac{h}{2}\right)u_0 + (2h^2 - 2)u_1 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_2 = h^2x_1$

Un point fictif u_0 est apparu, pour éliminer ce point on utilise les conditions aux limites données en ce point, $u' = 1$ $x = 0$, il s'agit là de la condition de Neumann .

$$u'_1 = \frac{u_2 - u_0}{2h} = 1 \Rightarrow u_0 = u_2 - 2h$$
$$\left(1 + \frac{h}{2}\right)(u_2 - 2h) + (2h^2 - 2)u_1 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_2 = h^2x_1$$
$$(2h^2 - 2)u_1 + 2u_2 = h^2x_1 + \left(1 + \frac{h}{2}\right)(2h)$$

Au nœud $i=2 \Rightarrow \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_1 + (2h^2 - 2)u_2 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_3 = h^2x_2$

Au nœud $i=n \Rightarrow \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{n-1} + (2h^2 - 2)u_n + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_{n+1} = h^2x_n$

On constate qu'un point fictif $n+1$ est apparu, pour éliminer ce point, on profite de la troisième condition aux limites (condition de Robins) donnée, $u' + u = 0$ $x = 1$.

Au point $i=n \Rightarrow u'_1 + u = 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + u_n = 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_{n-1} + 2hu_n = 0$

$$u_{n+1} = u_{n-1} - 2hu_n$$
$$\left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{n-1} + (2h^2 - 2)u_n + \left(1 - \frac{h}{2}\right)(u_{n-1} - 2hu_n) = h^2x_n$$
$$2u_{n-1} + (2h^2 - 2)u_n + \left(1 - \frac{h}{2}\right)(-2hu_n) = h^2x_n$$
$$2u_{n-1} + (2h^2 - 2 - 2h + h^2)u_n = h^2x_n$$
$$2u_{n-1} + (3h^2 - 2h - 2)u_n = h^2x_n$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (2h^2 - 2) & 2 & 0 \\ (1 + \frac{h}{2}) & (2h^2 - 2) & (1 - \frac{h}{2}) \\ & (1 - \frac{h}{2}) & (2h^2 - 2) & (1 - \frac{h}{2}) \\ & & & 2 & (3h^2 - 2h - 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h^2 x_1 + (1 + \frac{h}{2})(2h) \\ h^2 x_n \\ h^2 x_n \\ \vdots \\ h^2 x_n \end{Bmatrix}$$

On peut utiliser l'une des méthodes étudiées au chapitre I pour résoudre ce système.

Exercice n°2.6

Obtenir la méthode implicite à 2 pas ?

Pour obtenir la méthode implicite à 2 pas on suit les démarches suivantes :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

en se basant sur le polynôme de Lagrange donné par l'expression suivante :

$$P(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x)$$

$$l_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

$$l_0(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) = \frac{1}{2h^2} (x^2 - (x_{i+1} + x_i)x + x_i x_{i+1})$$

$$l_1(x) = \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) = \frac{1}{-h^2} (x^2 - (x_{i+1} + x_{i-1})x + x_{i-1} x_{i+1})$$

$$l_2(x) = \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) = \frac{1}{2h^2} (x^2 - (x_{i-1} + x_i)x + x_{i-1} x_i)$$

Par la méthode de Lagrange en trois (3) points $(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$, $(x_i, y(x_i))$ et $(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$ le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$P(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) f(x_i, y(x_i)) \\ + \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$y(x_{i+1}) \approx w(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) &\approx w(x_i) \\
 &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \right) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_{i-1}-x_{i+1}} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \right) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \right) f(x_i, y(x_i)) \\
 &+ \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} \right) \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) dx
 \end{aligned}$$

$$x_{i+1} - x_{i-1} = 2h, \quad x_{i+1} - x_i = h \text{ et } x_i - x_{i-1} = h$$

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) &\approx w(x_i) \\
 &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{-h} \right) \left(\frac{x-x_{i+1}}{-2h} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \left(\frac{x-x_{i+1}}{-h} \right) f(x_i, y(x_i)) \\
 &+ \left(\frac{x-x_{i-1}}{2h} \right) \left(\frac{x-x_i}{h} \right) f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) &\approx w(x_i) \\
 &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + \left(\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{-h^2} \right) f(x_i, y(x_i)) \\
 &+ \left(\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2} \right) f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) dx
 \end{aligned}$$

$$P_0(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x^2 - (x_{i+1} + x_i)x + x_i x_{i+1})}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) dx$$

$$P_0(x) = \left[\left(\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)x^2 + x_i x_{i+1} x}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$P_0(x) = \left(\frac{\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1}^2 - x_i^2) + x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$P_0(x) = \left(\frac{\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}x_i x_{i+1}^2 - \frac{1}{2}x_{i+1} x_i^2}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$P_0(x) = \left(\frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 + \frac{1}{6}x_i^3 + \frac{1}{2}x_i x_{i+1}^2 - \frac{1}{2}x_{i+1} x_i^2}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

On a $x_{i+1} = x_i + h$

$$P_0(x) = \left(\frac{\frac{1}{6}(x_i^3 - (x_i + h)^3) + \frac{1}{2}x_i(x_i + h)^2 - \frac{1}{2}(x_i + h)x_i^2}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$\frac{1}{6}(x_i^3 - (x_i + h)^3) = \frac{1}{6}(x_i^3 - (x_i^3 + 2hx_i^2 + x_i h^2 + hx_i^2 + 2h^2x_i + h^3)) = \frac{1}{6}(-3hx_i^2 - 3x_i h^2 - h^3)$$

$$\frac{1}{2}x_i(x_i + h)^2 - \frac{1}{2}(x_i + h)x_i^2 = \frac{1}{2}x_i(x_i^2 + 2hx_i + h^2) - \frac{1}{2}x_i^3 - \frac{1}{2}hx_i^2 = \frac{1}{2}hx_i^2 + \frac{1}{2}x_ih^2$$

Le numérateur = $\frac{1}{6}(-3hx_i^2 - 3x_ih^2 - h^3) + \frac{1}{2}hx_i^2 + \frac{1}{2}x_ih^2$

$$P_0(x) = \left(\frac{\frac{1}{6}(-3hx_i^2 - 3x_ih^2 - h^3) + \frac{1}{2}hx_i^2 + \frac{1}{2}x_ih^2}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$P_0(x) = \left(\frac{\left(\frac{-3}{6}hx_i^2 + \frac{1}{2}hx_i^2 - \frac{3}{6}x_ih^2 + \frac{1}{2}x_ih^2 - \frac{1}{6}h^3 \right)}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$P_0(x) = \left(\frac{\left(0 - 0 - \frac{1}{6}h^3 \right)}{2h^2} \right) f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) = -\frac{1}{12}hf(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$P_1(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-h^2} \right) f(x_i, y(x_i)) dx$$

$$P_1(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{-h^2} (x^2 - (x_{i+1} + x_{i-1})x + x_{i-1}x_{i+1}) f(x_i, y(x_i)) dx$$

$$P_1(x) = \frac{\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_{i-1})x^2 + x_{i-1}x_{i+1}x \right)_{x_i}^{x_{i+1}}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P_1(x) = \frac{\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_{i-1})(x_{i+1}^2 - x_i^2) + x_{i-1}x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P_1(x) = \frac{\frac{1}{3}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(x_{i+1}^3 - x_{i+1}x_i^2 + x_{i-1}x_{i+1}^2 - x_{i-1}x_i^2) + hx_{i-1}x_{i+1}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P_1(x) = \frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(-x_{i+1}x_i^2 + x_{i-1}x_{i+1}^2 - x_{i-1}x_i^2) + hx_{i-1}x_{i+1}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$x_{i-1} = x_i - h$$

$$P_1(x) = \frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(-(x_i - h)x_i^2 + (x_i - h)x_{i+1}^2 - (x_i - h)x_i^2) + h(x_i - h)x_{i+1}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P_1(x) = \frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(-(x_i^3 - hx_i^2) + (x_i x_{i+1}^2 - hx_{i+1}^2) - (x_i^3 - hx_i^2)) + h(x_i x_{i+1} - hx_{i+1})}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P_1(x) = \frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 + \frac{1}{2}x_i^3 - \frac{1}{2}hx_i^2 - \frac{1}{2}x_i x_{i+1}^2 + \frac{1}{2}hx_{i+1}^2 + \frac{1}{2}x_i^3 + \frac{1}{2}hx_i^2 + hx_i x_{i+1} - h^2 x_{i+1}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P1(x) = \frac{-\frac{1}{6}x_{i+1}^3 + \frac{2}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}x_ix_{i+1}^2 + \frac{1}{2}hx_{i+1}^2 + hx_ix_{i+1} - h^2x_{i+1}}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$P1(x) = \frac{-\frac{1}{6}(x_i + h)^3 + \frac{2}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}x_i(x_i + h)^2 + \frac{1}{2}h(x_i + h)^2 + hx_i(x_i + h) - h^2(x_i + h)}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$-\frac{1}{6}(x_i + h)^3 + \frac{2}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}x_i(x_i + h)^2 = -\frac{1}{6}(x_i^3 + 3hx_i^2 + 3h^2x_i + h^3) + \frac{2}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(x_i^3 + 2hx_i^2 + h^2x_i)$$

$$= -\frac{1}{6}x_i^3 + \frac{2}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}x_i^3 - \frac{3}{6}hx_i^2 - hx_i^2 - \frac{3}{6}h^2x_i - \frac{1}{2}h^2x_i - \frac{1}{6}h^3$$

$$= 0x_i^3 - \frac{9}{6}hx_i^2 - 1h^2x_i - \frac{1}{6}h^3$$

$$\frac{1}{2}h(x_i + h)^2 + hx_i(x_i + h) - h^2(x_i + h) = \frac{1}{2}h(x_i^2 + 2hx_i + h^2) + hx_i^2 + h^2x_i - h^2x_i - h^3$$

$$= \frac{1}{2}hx_i^2 + h^2x_i + \frac{1}{2}h^3 + hx_i^2 + h^2x_i - h^2x_i - h^3$$

$$= \frac{3}{2}hx_i^2 + h^2x_i - \frac{1}{2}h^3$$

$$P1(x) = \frac{-\frac{9}{6}hx_i^2 - 1h^2x_i - \frac{1}{6}h^3 + \frac{3}{2}hx_i^2 + h^2x_i - \frac{1}{2}h^3}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P1(x) = \frac{-\frac{9}{6}hx_i^2 + \frac{3}{2}hx_i^2 - 1h^2x_i + h^2x_i - \frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{2}h^3}{-h^2} f(x_i, y(x_i))$$

$$P1(x) = \frac{-\frac{8}{12}h^3}{-h^2} f(x_i, y(x_i)) = \frac{8}{12}hf(x_i, y(x_i))$$

$$P2(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2h^2} \right) f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) dx$$

$$P2(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2h^2} (x^2 - (x_{i-1} + x_i)x + x_{i-1}x_i) f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) dx$$

$$P2(x) = \frac{\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)x^2 + x_{i-1}x_ix \right)_{x_i}^{x_{i+1}}}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$P2(x) = \frac{\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)(x_{i+1}^2 - x_i^2) + x_{i-1}x_i(x_{i+1} - x_i)}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$x_i = x_{i-1} + h \Rightarrow x_{i-1} = x_i - h$$

$$P2(x) = \frac{\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(2x_i - h)(x_{i+1}^2 - x_i^2) + h(x_i - h)x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$P2(x) = \frac{\frac{1}{3}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(2x_i - h)x_{i+1}^2 + \frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 + h(x_i - h)x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$P2(x) = \frac{\frac{1}{3}(x_i + h)^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(2x_i - h)(x_i + h)^2 + \frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 + h(x_i - h)x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$P2(x) = \frac{\frac{1}{3}(x_i + h)^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{2}(2x_i - h)(x_i + h)^2 + \frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 + h(x_i - h)x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$\frac{1}{3}(x_i + h)^3 = \frac{1}{3}(x_i^3 + 3hx_i^2 + 3x_ih^2 + h^3) = \frac{1}{3}x_i^3 + hx_i^2 + x_ih^2 + \frac{1}{3}h^3$$

$$-\frac{1}{2}(2x_i - h)(x_i + h)^2 = -\frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 - (2x_i - h)x_ih - \frac{1}{2}(2x_i - h)h^2$$

P2(x)

$$= \frac{hx_i^2 + x_ih^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 - (2x_i - h)x_ih - \frac{1}{2}(2x_i - h)h^2 + \frac{1}{2}(2x_i - h)x_i^2 + h(x_i - h)x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$P2(x) = \frac{hx_i^2 + x_ih^2 + \frac{1}{3}h^3 - 2hx_i^2 + h^2x_i - h^2x_i + \frac{1}{2}h^3 + hx_i^2 - h^2x_i}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$P2(x) = \frac{+\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}h^3}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) = \frac{\frac{5}{6}h^3}{2h^2} f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) = \frac{5}{12} hf(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

$$w(x_{i+1}) \approx w(x_i) + \frac{5}{12} hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + \frac{8}{12} hf(x_i, y(x_i)) - \frac{1}{12} hf(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$w(x_{i+1}) \approx w(x_i) + \frac{h}{12} [5f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + 8f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]$$

Exercice n°2.7

- a) Trouver le schéma numérique, de tous les nœuds ainsi que la forme matricielle du problème suivant :

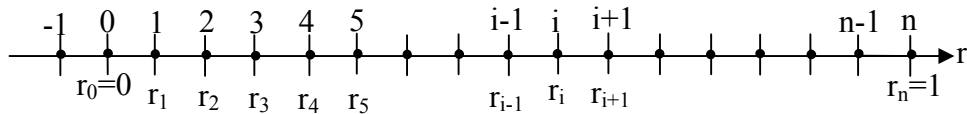
$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + 1 = 0 & 0 < r < 1 \\ \frac{du}{dr} = 0 & r = 0 \\ u = 0 & r = 1 \end{cases}$$

- b) Obtenir le schéma numérique au nœud 0.

$$\frac{du}{dr} = 0 \text{ pour } r = a$$

Solution

Notre intervalle peut être discrétiser comme suit.



L'utilisation des différences centrales des dérivées première et seconde permet d'écrire le problème précédent sous la forme :

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + 1 = 0$$

$$r_i = ih$$

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{1}{ih} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + 1 = 0$$

Multiplions par h^2

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} + \frac{1}{2i}(u_{n+1} - u_{n-1}) + h^2 = 0$$

$$u_{i-1} - \frac{1}{2i}u_{n-1} - 2u_i + u_{i+1} + \frac{1}{2i}u_{n+1} + h^2 = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right)u_{i-1} - 2u_i + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)u_{i+1} = -h^2$$

Pour $i=1,3,4,\dots,n-1$

Pour $i=0$

$$\left(1 - \frac{1}{2 \times 0}\right)u_{0-1} - 2u_0 + \left(1 + \frac{1}{20}\right)u_{0+1} = -h^2$$

$$\left(1 - \frac{1}{0}\right)u_{-1} - 2u_0 + \left(1 + \frac{1}{0}\right)u_1 = -h^2$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{du}{dr}\right)_{r=0} = \frac{0}{0}$$

On est tombé dans la forme de l'indéfini et on remarque que l'indéfinie est obtenue au point $r=0$ car $\frac{1}{r} \frac{du}{dr}$ est indéterminé, donc on utilise la règle de l'Hôpital pour éliminer l'indéfinie au $r=0$.

$$\frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{d^2u}{dr^2}$$

On remplace cette dernière dans la formule de base on obtient :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d^2u}{dr^2} + 1 = 0 \Rightarrow 2 \frac{d^2u}{dr^2} + 1 = 0$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$2 \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} + 1 = 0 \quad (1)$$

La condition aux limites donnée $\frac{du}{dr} = 0$ au $i = 0 \Rightarrow \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow u_{-1} = u_1$ (2)

On remplace (2) dans (1) on aura $2 \frac{u_1 - 2u_0 + u_1}{h^2} + 1 = 0 \Rightarrow 2(2u_1 - 2u_0) + h^2 = 0$

$$-4u_0 + 4u_1 = -h^2$$

On peut écrire le système obtenu sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{2i}\right) & -2 & \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \\ & & \left(1 - \frac{1}{2i}\right) & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h^2 \\ -h^2 \\ -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 - \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \end{Bmatrix}$$

Si la condition au nœud 0 change et prend $\frac{du}{dr} = 0$ pour $r = a$.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + 1 = 0$$

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)_{r=a} + \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dr}\right)_{r=a} + 1 = 0$$

$$\frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} + \frac{1}{r} \frac{(u_1 - u_{-1})}{2h} + 1 = 0 \Rightarrow u_{-1} - 2u_0 + u_1 + \frac{h}{2r}(u_1 - u_{-1}) = -h^2$$

Pour $r=a$ on aura :

$$u_{-1} - 2u_0 + u_1 + \frac{h}{2a}u_1 - \frac{h}{2a}u_{-1} = -h^2 \Rightarrow \left(1 - \frac{h}{2a}\right)u_{-1} - 2u_0 + \left(1 + \frac{h}{2a}\right)u_1 = -h^2$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=a} = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow u_1 = u_{-1}$$

$$\left(1 - \frac{h}{2a}\right)u_1 - 2u_0 + \left(1 + \frac{h}{2a}\right)u_1 = -h^2 \Rightarrow -2u_0 + 2u_1 = -h^2$$

e) Utiliser une approximation de $f(x,y(x))$ par le polynôme de Lagrange pour obtenir les méthodes explicite à 5 pas et implicite à 4 pas.

2.7 Différences finies en régime transitoire (non permanent)

Prenons un exemple le problème en régime non permanent, à une seule dimension, donné par l'équation $U_t = U_{xx}$

2.7.1 Schéma explicite

$$U_t = U_{xx}$$

$$u_t = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_{xx} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Le reste $O(\Delta t \pm \Delta x^2)$, posons $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$u_i^{k+1} - u_i^k = r(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) \Rightarrow u_i^{k+1} = ru_{i-1}^k + (1 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k$$

K par temps précédent

K+1 par temps actuel (recherché)

L'écriture matricielle du schéma explicite.

$$\bar{u}_i^{k+1} = A \cdot \bar{u}_i^k$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-2r) & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & (1-2r) & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & (1-2r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & (1-2r) & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & (1-2r) & r \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{Bmatrix}$$

On constate que la résolution de ce système est directe. Toutefois, les schémas explicites sont généralement conditionnellement stables. Dans ce cas on doit chercher le critère de stabilité.

2.7.2 Schéma implicite

$$u_t = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_{xx} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

Posons $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$u_i^{k+1} - u_i^k = r(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1})$$

$$ru_{i-1}^{k+1} - 2ru_i^{k+1} + ru_{i+1}^{k+1} = u_i^{k+1} - u_i^k$$

$$-ru_{i-1}^{k+1} + 2ru_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} + u_i^{k+1} = u_i^k \Rightarrow -ru_{i-1}^{k+1} + (2r+1)u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} = u_i^k$$

$$ru_{i-1}^{k+1} - (2r+1)u_i^{k+1} + ru_{i+1}^{k+1} = -u_i^k$$

L'écriture matricielle du schéma implicite est

$$A\bar{u}_i^{k+1} = \bar{B}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+2r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -(1+2r) & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -(1+2r) & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -(1+2r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -(1+2r) & r \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{Bmatrix}$$

La résolution est indirecte et elle est inconditionnellement stable.

2.7.3 Schéma de John Crank & Phyllis Nicolson (Crank-Nicolson)

Cette méthode a été publiée en 1947 par la mathématicienne Phyllis Nicolson (1917-1968) et le physicien John Crank (1916-2006).

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

Posons $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$u_i^{k+1} - u_i^k = \frac{r}{2}(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) + \frac{r}{2}(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1})$$

$$u_i^{k+1} - \frac{r}{2}(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) = \frac{r}{2}(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) + u_i^k$$

$$-\frac{r}{2}u_{i-1}^{k+1} + (1+r)u_i^{k+1} - \frac{r}{2}u_{i+1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{i-1}^k + (1-r)u_i^k + \frac{r}{2}u_{i+1}^k$$

$$\frac{r}{2}u_{i-1}^{k+1} - (1+r)u_i^{k+1} + \frac{r}{2}u_{i+1}^{k+1} = -\frac{r}{2}u_{i-1}^k - (1-r)u_i^k - \frac{r}{2}u_{i+1}^k$$

Chapitre II Méthode des différences finies

L'écriture matricielle de ce schéma est :

$$A\bar{u}_i^{k+1} = B\bar{u}_i^k$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+r) & \frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2} & -(1+r) & \frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} & -(1+r) & \frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2} & -(1+r) & \frac{r}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2} & -(1+r) \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-r) & -\frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{2} & -(1-r) & -\frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2} & -(1-r) & -\frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{2} & -(1-r) & -\frac{r}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{2} & -(1-r) \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{Bmatrix}$$

Le reste $O(\Delta t \pm \Delta x^2)$; résolution $A\bar{u}_i^{k+1} = B\bar{u}_i^k$; stabilité inconditionnelle.

Remarque : un problème est dit bien posé si la solution existe, elle est unique et elle dépend essentiellement des conditions initiales.

Pour avoir aisément la solution de n'importe quel schéma numérique, il faut démontrer que le schéma est consistant, il converge, il est stable.

Exercice n°2.8

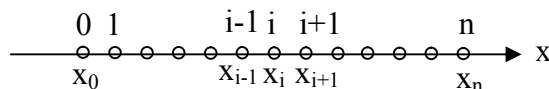
Ecrire la forme matricielle du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ \frac{du}{dx} = 0 & x = 0 \quad t > 0 \\ \frac{du}{dx} + u = 0 & x = 1 \quad t > 0 \\ u(0,0) = 1 & 0 \leq x \leq 1 \quad t = 0 \end{cases}$$

Le schéma explicite de ce problème est

$$u_i^{k+1} = ru_{i-1}^k + (1 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k$$

$$t = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t_k = 0 \Rightarrow t_k = k \cdot \Delta t$$



Pour ($i=1$ où $x=x_0=0$), $x_i=x_0+i \cdot h$

$$u_1^{k+1} = ru_0^k + (1 - 2r)u_1^k + ru_2^k$$

On observe la création d'un point fictif u_0^k dont il faut se débarrasser en utilisant les conditions limites.

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{u_2^k - u_0^k}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow u_2^k = u_0^k$$

$$u_1^{k+1} = (1 - 2r)u_1^k + 2ru_2^k$$

Pour $(i=2,3,\dots,n-1)$, $x_i=x_0+i.h$

$$u_i^{k+1} = ru_{i-1}^k + (1 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k$$

Pour $(i=n \text{ où } x=x_n=1)$, $x_i=x_0+i.h$

$$u_n^{k+1} = ru_{n-1}^k + (1 - 2r)u_n^k + ru_{n+1}^k$$

Un point fictif a été créé à $i=n$, il faut se débarrasser de ce point par le biais des conditions aux limites.

$$\left. \frac{du}{dx} + u \right|_{x=1} = 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2\Delta x} + u_n^k = 0 \Rightarrow u_{n+1}^k = u_{n-1}^k - 2\Delta x \cdot u_n^k$$

$$u_n^{k+1} = ru_{n-1}^k + (1 - 2r)u_n^k + r(u_{n-1}^k - 2\Delta x \cdot u_n^k)$$

$$u_n^{k+1} = 2ru_{n-1}^k + (1 - 2r - 2r\Delta x)u_n^k$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2r) & 2r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & (1-r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & (1-r) & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & (1-r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & (1-r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2r & (1-2r-2rh) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{Bmatrix}$$

2.8 Stabilité des schémas numériques

Il y a deux types d'approches pour étudier la stabilité des schémas numériques. La première est la méthode analytique de Von Neumann basée sur les séries de Fourier, et la deuxième approche est appelée la méthode matricielle ou approchée de Brower.

On dit qu'un schéma numérique est stable lorsque la solution n'évolue pas exponentiellement c'est-à-dire les erreurs cumulées commises sont contrôlables (très petites).

2.8.1 Stabilité analytique (exacte) de Von Neumann

Elle est valable seulement pour les conditions aux limites de Dirichlet.

a) Stabilité du schéma explicite

a) Trouver la stabilité, par la méthode de Von Neumann, du schéma numérique explicite en régime transitoire donné par l'équation à une seule dimension suivante:

Chapitre II Méthode des différences finies

$$u_i^{k+1} = ru_{i-1}^k + (1 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k$$

Remplacer $p \rightarrow i$ et $q \rightarrow k$ l'équation précédente devient :

$$u_p^{q+1} = ru_{p-1}^q + (1 - 2r)u_p^q + ru_{p+1}^q$$

La solution par séparation de variable de notre équation en discret ou en continue est donnée par $u(x, t) = e^{i\beta x} e^{\alpha t}$

U_p^q : La solution exacte du numérique.

u_p^q : La solution numérique obtenue.

$E_p^q = U_p^q - u_p^q$: L'erreur d'arrondi cumulée.

$$u_p^{q+1} = ru_{p-1}^q + (1 - 2r)u_p^q + ru_{p+1}^q \quad (1)$$

$$U_p^{q+1} = rU_{p-1}^q + (1 - 2r)U_p^q + rU_{p+1}^q \quad (2)$$

(2)-(1) donne :

$$U_p^{q+1} - u_p^{q+1} = r(U_{p-1}^q - u_{p-1}^q) + (1 - 2r)(U_p^q - u_p^q) + r(U_{p+1}^q - u_{p+1}^q)$$

$$E_p^{q+1} = rE_{p-1}^q + (1 - 2r)E_p^q + rE_{p+1}^q$$

L'erreur a la forme $E_p^q = e^{i\beta \cdot x_p} e^{\alpha \cdot t_q}$ car cette erreur vérifie également l'équation (1).

Sachant que $x=ph$ et $t=q \cdot \Delta t=qk$

$$E_p^q = e^{i\beta \cdot x_p} e^{\alpha \cdot t_q} = e^{i\beta \cdot p \cdot h} e^{\alpha \cdot \Delta t \cdot q}$$

On pose $\xi = e^{\alpha \cdot \Delta t}$ on obtient : $E_p^q = e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q$

Pour que l'erreur E_p^q soit contrôlable il faut que $|\xi| < 1$, ce qui garantira donc une évolution non exponentielle de la solution.

$$E_p^{q+1} = rE_{p-1}^q + (1 - 2r)E_p^q + rE_{p+1}^q$$

$$e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^{q+1} = re^{i\beta \cdot (p-1) \cdot h} \xi^q + (1 - 2r)e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q + re^{i\beta \cdot (p+1) \cdot h} \xi^q$$

Diviser tous les membres par $e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q$ on obtient :

$$\xi = re^{-i\beta \cdot h} + (1 - 2r) + re^{i\beta \cdot h}$$

$$\xi = (1 - 2r) + r(\cos(\beta h) - \sin(\beta h)) + r(\cos(\beta h) + \sin(\beta h))$$

$$\xi = (1 - 2r) + 2r \cos(\beta h) = 1 - 2r(1 - \cos(\beta h))$$

$$\xi = 1 - 2r \left(1 - \left(\cos^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right) = 1 - 2r \left(2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)$$

$$\xi = 1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)$$

Où $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{\Delta t}{h^2}$ le schéma est stable si $|\xi| < 1 \Rightarrow \left| 1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right| < 1$

C'est-à-dire (i.e) $1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) < 1$ toujours vrai \forall les valeurs de r et β

$$-\left(1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right) < 1 \Rightarrow 1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) > -1$$

$$1 - 4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) > -1 \Rightarrow -4r \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) > -2 \Rightarrow r < \frac{1}{2 \left(\sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)} < \frac{1}{2}$$

Il faut chercher β qui donne la plus grande valeur de r . donc le critère de stabilité de ce schéma numérique est $r < \frac{1}{2}$

b) Obtenir le critère de stabilité, par la méthode de Von Neumann, du schéma numérique à deux dimensions du problème transitoire ci-après.

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{(\Delta y)^2}$$

Posons $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ et $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ et $h_x = \Delta x$ et $h_y = \Delta y$ et remplacer $p \rightarrow i, l \rightarrow j$ et $q \rightarrow k$

$$\frac{u_{p,l}^{q+1} - u_{p,l}^q}{\Delta t} = \frac{u_{p-1,l}^q - 2u_{p,l}^q + u_{p+1,l}^q}{h_x^2} + \frac{u_{p,l-1}^q - 2u_{p,l}^q + u_{p,l+1}^q}{h_y^2}$$

$$u_{p,l}^{q+1} - u_{p,l}^q = \frac{\Delta t}{h_x^2} (u_{p-1,l}^q - 2u_{p,l}^q + u_{p+1,l}^q) + \frac{\Delta t}{h_y^2} (u_{p,l-1}^q - 2u_{p,l}^q + u_{p,l+1}^q)$$

$$u_{p,l}^{q+1} = r_x (u_{p-1,l}^q + u_{p+1,l}^q) + (1 - 2r_x - 2r_y) u_{p,l}^q + r_y (u_{p,l-1}^q + u_{p,l+1}^q)$$

$$E_{p,l}^{q+1} = r_x (E_{p-1,l}^q + E_{p+1,l}^q) + (1 - 2r_x - 2r_y) E_{p,l}^q + r_y (E_{p,l-1}^q + E_{p,l+1}^q)$$

La résolution par la méthode de la séparation de variable de l'équation de base à deux dimensions est de la forme $e^{\alpha t}$ avec $\alpha t = T(t).X(x).Y(y)$ donc on peut écrire $U(x,y,t) = e^{i\beta x e^{i\gamma y} e^{\alpha t}}$

Sachant que $x_p = p.h_x, y_l = l.h_y$ et $t_q = q.\Delta t = qk$

$$\begin{aligned}
 E_p^q &= e^{i\beta \cdot x_p} e^{i\gamma \cdot y_l} e^{\alpha \cdot t_q} = e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} e^{\alpha \cdot \Delta t \cdot q} = e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^q \\
 &e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^{q+1} \\
 &= r_x \left(e^{i\beta \cdot (p-1) h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^q + E_{p+1,l}^q e^{i\beta \cdot (p+1) h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^q \right) \\
 &+ (1 - 2r_x - 2r_y) e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^q \\
 &+ r_y \left(e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot (l-1) h_y} \xi^q + e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot (l+1) h_y} \xi^q \right)
 \end{aligned}$$

Diviser les deux membres par $e^{i\beta \cdot p h_x} e^{i\gamma \cdot l h_y} \xi^q$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 \xi &= r_x (e^{-i\beta \cdot h_x} + e^{i\beta \cdot h_x}) + (1 - 2r_x - 2r_y) + r_y (e^{-i\gamma \cdot h_y} + e^{i\gamma \cdot h_y}) \\
 \xi &= r_x (2\cos(\beta \cdot h_x)) + (1 - 2r_x - 2r_y) + r_y (2\cos(\gamma \cdot h_y)) \\
 \xi &= 1 - 2r_x \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) \right) \right) \\
 &\quad - 2r_y \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) \right) \right) \\
 \xi &= 1 - 2r_x \left(2\sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) \right) - 2r_y \left(2\sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) \right) \\
 \xi &= 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Pour garantir la stabilité de ce schéma numérique il faut exiger que $|\xi| < 1$

$$\begin{aligned}
 |\xi| < 1 &\Rightarrow \left| 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) \right| < 1 \\
 &\begin{cases} 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) < 1 \\ -\left(1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right)\right) < 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La première équation $1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) < 1$ toujours vrai quelques soient les valeurs de r_x , r_y , β et γ .

La deuxième équation $-\left(1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right)\right) < 1$

$$1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) > -1 \Rightarrow -4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) > -2$$

$$4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) + 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) < 2 \Rightarrow r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) + r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$r_x + r_y < \frac{1}{2} \text{ Car } \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) \leq 1 \text{ et } \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) \leq 1$$

$$\text{Si } r_x=r_y=r \text{ le critère de stabilité } r_x + r_y < \frac{1}{2} \Rightarrow 2r < \frac{1}{2} \Rightarrow r < \frac{1}{4}$$

b) Obtenir le critère de stabilité, par la méthode de Von Neumann, du schéma numérique à trois dimensions du problème transitoire suivant :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,m}^{k+1} - u_{i,j,m}^k}{\Delta t} &= \frac{u_{i-1,j,m}^k - 2u_{i,j,m}^k + u_{i+1,j,m}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1,m}^k - 2u_{i,j,m}^k + u_{i,j+1,m}^k}{(\Delta y)^2} \\ &+ \frac{u_{i,j,m-1}^k - 2u_{i,j,m}^k + u_{i,j,m+1}^k}{(\Delta z)^2} \end{aligned}$$

Posons $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ et $r_z = \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}$ et $h_x = \Delta x$, $h_y = \Delta y$ et $h_z = \Delta z$ et remplacer $p \rightarrow i$, $l \rightarrow j$, $n \rightarrow m$ et $q \rightarrow k$

$$\begin{aligned} u_{i,j,m}^{k+1} &= r_x(u_{i-1,j,m}^k + u_{i+1,j,m}^k) + (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z)u_{i,j,m}^k + r_y(u_{i,j-1,m}^k + u_{i,j+1,m}^k) \\ &+ r_z(u_{i,j,m-1}^k + u_{i,j,m+1}^k) \end{aligned}$$

$$x_p = p \cdot h_x, y_l = l \cdot h_y, z_m = m \cdot h_z \text{ et } t_q = q \cdot \Delta t = qk$$

$$\begin{aligned} E_{i,j,m}^{k+1} &= r_x(E_{i-1,j,m}^k + E_{i+1,j,m}^k) + (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z)E_{i,j,m}^k + r_y(E_{i,j-1,m}^k + E_{i,j+1,m}^k) \\ &+ r_z(E_{i,j,m-1}^k + E_{i,j,m+1}^k) \end{aligned}$$

La résolution par la séparation de variable donne une fonction de la forme :

$$U(x, y, z, t) = e^{i\beta x} e^{i\gamma y} e^{i \cdot z} e^{\alpha t}$$

$$x_p = p \cdot h_x, y_l = l \cdot h_y \text{ et } t_q = q \cdot \Delta t = qk \Rightarrow U(x, y, z, t) = e^{i\beta \cdot p \cdot h_x} e^{i \cdot \gamma \cdot l \cdot h_y} e^{i \cdot n \cdot h_z} e^{\alpha \Delta t \cdot q}$$

$$U(x, y, z, t) = e^{i\beta \cdot p \cdot h_x} e^{i \cdot \gamma \cdot l \cdot h_y} e^{i \cdot n \cdot h_z} e^{\alpha \Delta t \cdot k} = e^{i\beta \cdot p \cdot h_x} e^{i \cdot \gamma \cdot l \cdot h_y} e^{i \cdot n \cdot h_z} \xi^k$$

$$\begin{aligned} E_{p,l,n}^{q+1} &= r_x(E_{p-1,l,n}^q + E_{p+1,l,n}^q) + (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z)E_{p,l,n}^q + r_y(E_{p,l-1,n}^q + E_{p,l+1,n}^q) \\ &+ r_z(E_{p,l,n-1}^q + E_{p,l,n+1}^q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^{k+1} \\
 &= r_x (e^{i\beta.(p-1).h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k + e^{i\beta.(p+1).h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k) \\
 &+ (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z) e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k \\
 &+ r_y (e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.(l-1).h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k + e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.(l+1).h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k) \\
 &+ r_z (e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .(n-1).h_z} \xi^k + e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .(n+1).h_z} \xi^k)
 \end{aligned}$$

Divisons les deux termes par $e^{i\beta.p.h_x} e^{i.\gamma.l.h_y} e^{i. .n.h_z} \xi^k$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 \xi &= r_x (e^{-i\beta.h_x} + e^{i\beta.h_x}) + (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z) + r_y (e^{-i.\gamma.h_y} + e^{i.\gamma.h_y}) \\
 &+ r_z ((e^{-i. .h_z} + e^{i. .h_z}))
 \end{aligned}$$

$$\xi = (1 - 2r_x - 2r_y - 2r_z) + r_x (2\cos(\beta.h_x)) + r_y (2\cos(\gamma.h_y)) + r_z (2\cos(.h_z))$$

$$\xi = 1 - 2r_x (1 - \cos(\beta.h_x)) - 2r_y (1 - \cos(\gamma.h_y)) - 2r_z (1 - \cos(.h_z))$$

$$\begin{aligned}
 \xi &= 1 - 2r_x \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right)\right)\right) - 2r_y \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right)\right)\right) \\
 &- 2r_z \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\xi = 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right)$$

Pour garantir la stabilité de ce schéma numérique il faut que $|\xi| < 1$

$$|\xi| < 1 \Rightarrow \left| 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) \right| < 1$$

$$\begin{cases}
 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) < 1 \\
 -\left(1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right)\right) < 1
 \end{cases}$$

La première équation $1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) < 1$ toujours vrai quelques soient $r_x, r_y, r_z, \beta, \gamma$ et \square .

La deuxième équation $-\left(1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right)\right) < 1$

$$\begin{aligned}
 1 - 4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) &> -1 \\
 \Rightarrow -4r_x \sin^2\left(\frac{\beta.h_x}{2}\right) - 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma.h_y}{2}\right) - 4r_z \sin^2\left(\frac{.h_z}{2}\right) &> -2
 \end{aligned}$$

$$4r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) + 4r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) + 4r_z \sin^2\left(\frac{\cdot h_z}{2}\right) < 2$$

$$\Rightarrow r_x \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) + r_y \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) + r_z \sin^2\left(\frac{\cdot h_z}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$r_x + r_y + r_z < \frac{1}{2} \text{ Car } \sin^2\left(\frac{\beta \cdot h_x}{2}\right) \leq 1, \sin^2\left(\frac{\gamma \cdot h_y}{2}\right) \leq 1 \text{ et } \sin^2\left(\frac{\cdot h_z}{2}\right) \leq 1$$

$$\text{Si } r_x = r_y = r_z = r \text{ le critère de stabilité } r_x + r_y + r_z < \frac{1}{2} \Rightarrow 3r < \frac{1}{2} \Rightarrow r < \frac{1}{6}$$

b) Stabilité du schéma implicite

Obtenir la stabilité, par la méthode de Von Neumann, du schéma numérique implicite en régime transitoire donné par l'équation à une seule dimension suivante:

$$u_t = u_{xx}$$

$$ru_{i-1}^{k+1} - (2r+1)u_i^{k+1} + ru_{i+1}^{k+1} = -u_i^k$$

$$ru_{p-1}^{q+1} - (2r+1)u_p^{q+1} + ru_{p+1}^{q+1} = -u_p^q$$

Sachant que l'erreur $E_p^q = e^{i\beta p h \xi^q}$

$$re^{i\beta(p-1)h\xi^{(q+1)}} - (2r+1)e^{i\beta p h \xi^{(q+1)}} + re^{i\beta(p+1)h\xi^{(q+1)}} = -e^{i\beta p h \xi^q}$$

Diviser tous les termes par $e^{i\beta p h \xi^q}$

$$re^{-i\beta h \xi} - (2r+1)\xi + re^{i\beta h \xi} = -1 \Rightarrow \xi \left((re^{-i\beta h} + re^{i\beta h}) - (2r+1) \right) = -1$$

$$\xi(2r\cos(\beta h) - (2r+1)) = -1 \Rightarrow \xi(-1 - 2r + 2r\cos(\beta h)) = -1$$

$$\xi(-1 - 2r(1 - \cos(\beta h))) = -1 \Rightarrow \xi \left(-1 - 2r \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \right) \right) = -1$$

$$\xi \left(-1 - 4r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) = -1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

Il faut que $|\xi| < 1$ pour garantir la stabilité du schéma numérique.

$$|\xi| < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + 4r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right| < 1 \text{ toujours vrai quelques soient les valeurs de } \beta \text{ et } h.$$

Le schéma implicite est toujours stable.

c) Stabilité du schéma numérique de Crank Nicolson ou (mixte)

Pour obtenir le critère de stabilité, par la méthode de Von Neumann, du schéma numérique de Crank-Nicolson en régime transitoire d'une équation à une seule dimension, on doit faire ce qui suit:

$$u_t = u_{xx}$$

Le schéma mixte de ce problème a la forme $A\bar{u}_i^{k+1} = B\bar{u}_i^k$.

$$\frac{r}{2}u_{p-1}^{q+1} - (1+r)u_p^{q+1} + \frac{r}{2}u_{p+1}^{q+1} = -\frac{r}{2}u_{p-1}^q - (1-r)u_p^q + \frac{r}{2}u_{p+1}^q$$

Sachant que l'erreur $E_p^q = e^{i\beta p h \xi^q}$

$$\begin{aligned} \frac{r}{2}e^{i\beta(p-1)h\xi^{q+1}} - (1+r)e^{i\beta p h \xi^{q+1}} + \frac{r}{2}e^{i\beta(p+1)h\xi^{q+1}} &= -\frac{r}{2}e^{i\beta(p-1)h\xi^q} - (1-r)e^{i\beta p h \xi^q} \\ &\quad - \frac{r}{2}e^{i\beta(p+1)h\xi^q} \end{aligned}$$

On divise tous les termes par $e^{i\beta p h \xi^q}$ on aura :

$$\begin{aligned} \frac{r}{2}(e^{-i\beta h \xi}) - (1+r)\xi + \frac{r}{2}e^{i\beta h \xi} &= -\frac{r}{2}(e^{-i\beta h}) - (1-r) - \frac{r}{2}(e^{i\beta h}) \\ \xi \left[\frac{r}{2}(e^{-i\beta h}) - (1+r) + \frac{r}{2}(e^{i\beta h}) \right] &= -\frac{r}{2}(e^{-i\beta h}) - (1-r) - \frac{r}{2}(e^{i\beta h}) \\ \xi [r \cos(\beta h) - (1+r)] &= -r \cos(\beta h) - (1-r) \\ \xi [-1 - r(1 - \cos(\beta h))] &= -1 + r(1 - \cos(\beta h)) \\ \xi \left[-1 - r \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \right) \right] &= -1 + r \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \right) \\ \xi \left[-1 - r \left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \right] &= -1 + r \left(\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \\ \xi \left[-1 - 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right] &= -1 + 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \Rightarrow \xi = \frac{-1 + 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}{\left[-1 - 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right]} \\ \xi &= \frac{1 - 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}{\left[1 + 2r \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

Pour garantir la stabilité il faut que $|\xi| \leq 1$ ce qui est toujours vérifié quelque soit la valeur de r .

Chapitre II Méthode des différences finies

NB : Les schémas implicites et de Crank-Nicolson sont inconditionnellement stables alors que le schéma explicite est conditionnellement stable.

Exercice n°2.9

Trouver le critère de stabilité du problème en régime transitoire donné par l'équation ci-après.

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} \Rightarrow u_t = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

Solution

Le schéma explicite de ce problème s'écrit :

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}$$

Remplacer $p \rightarrow i$ et $q \rightarrow k$ l'équation devient :

$$\frac{u_p^{q+1} - u_p^q}{\Delta t} = \frac{u_{p-1}^q - 2u_p^q + u_{p+1}^q}{h^2} + \frac{1}{r_p} \frac{u_{p+1}^q - u_{p-1}^q}{2h}$$

Multiplications par Δt , n'oublier point que $r_i = p.h$

$$u_p^{q+1} - u_p^q = \frac{\Delta t}{h^2} (u_{p-1}^q - 2u_p^q + u_{p+1}^q) + \frac{\Delta t}{2.p.h^2} (u_{p+1}^q - u_{p-1}^q)$$

Posons $x = \frac{\Delta t}{h^2}$

$$u_p^{q+1} = x \left(1 - \frac{1}{2p}\right) u_{p-1}^q + (1 - 2x) u_p^q + x \left(1 + \frac{1}{2p}\right) u_{p+1}^q$$

La solution par séparation de variable de notre équation en discret ou en continue est donnée par $u(x, t) = e^{i\beta x} e^{\alpha t}$

U_p^q : La solution exacte du numérique.

u_p^q : La solution numérique obtenue.

$E_p^q = U_p^q - u_p^q$: L'erreur d'arrondi cumulée.

$$u_p^{q+1} = x \left(1 - \frac{1}{2p}\right) u_{p-1}^q + (1 - 2x) u_p^q + x \left(1 + \frac{1}{2p}\right) u_{p+1}^q \quad (1)$$

$$U_p^{q+1} = x \left(1 - \frac{1}{2p}\right) U_{p-1}^q + (1 - 2x) U_p^q + x \left(1 + \frac{1}{2p}\right) U_{p+1}^q \quad (2)$$

(2)-(1) donne :

$$U_p^{q+1} - u_p^{q+1} = x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)(U_{p-1}^q - u_{p-1}^q) + (1 - 2x)(U_p^q - u_p^q) + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)(U_{p+1}^q - u_{p+1}^q)$$

$$E_p^{q+1} = x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)E_{p-1}^q + (1 - 2x)E_p^q + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)E_{p+1}^q$$

$$E_p^q = e^{i\beta \cdot x_p} e^{\alpha \cdot t_q} = e^{i\beta \cdot p \cdot h} e^{\alpha \cdot \Delta t \cdot q}$$

On pose $\xi = e^{\alpha \cdot \Delta t}$ on obtient : $E_p^q = e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q$

$$e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^{q+1} = x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)e^{i\beta \cdot (p-1) \cdot h} \xi^q + (1 - 2x)e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)e^{i\beta \cdot (p+1) \cdot h} \xi^q$$

On divise par $e^{i\beta \cdot p \cdot h} \xi^q$ on obtient

$$\xi = x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)e^{-i\beta h} + (1 - 2x) + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)e^{i\beta h}$$

$$\xi = x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)(\cos(\beta h) - i \sin(\beta h)) + (1 - 2x) + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)(\cos(\beta h) + i \sin(\beta h))$$

$$\begin{aligned} \xi &= x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)\cos(\beta h) - x\left(1 - \frac{1}{2p}\right)i \sin(\beta h) + (1 - 2x) + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)\cos(\beta h) \\ &\quad + x\left(1 + \frac{1}{2p}\right)i \sin(\beta h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos(\beta h) - \frac{x}{2p} \cos(\beta h) - x \cdot i \sin(\beta h) + \frac{x}{2p} i \sin(\beta h) + (1 - 2x) \\ &\quad + x \cos(\beta h) + \frac{x}{2p} \cos(\beta h) + x \cdot i \sin(\beta h) + \frac{x}{2p} i \sin(\beta h) \end{aligned}$$

$$\xi = 2x \cos(\beta h) + \frac{x}{p} i \sin(\beta h) + (1 - 2x) \Rightarrow \xi = 1 - 2x(1 - \cos(\beta h)) + \frac{x}{p} i \sin(\beta h)$$

$$\xi = 1 - 2x(1 - \cos(\beta h)) + \frac{x}{p} i \sin(\beta h) \Rightarrow \xi = 1 - 2x\left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)\right) + \frac{x}{p} i \sin(\beta h)$$

$\xi = 1 - 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{x}{p} i \sin(\beta h)$ c'est un imaginaire pour garantir la stabilité il faut que le $|\xi| < 1|$ puisque est un complexe son module $\|\xi\|$ est.

$$\|\xi\|^2 = \left(1 - 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{x}{p} \sin(\beta h)\right)^2$$

$$\|\xi\|^2 = 1 - 8x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{x^2}{p^2} \sin^2(\beta h)$$

$$\|\xi\|^2 = 1 - 8x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{x^2}{p^2} \left(2 \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2$$

$$\|\xi\|^2 = 1 - 8x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{4x^2}{p^2} \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$\|\xi\|^2 = 1 + 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$$

Pour garantir la stabilité il faut que $\varepsilon = 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \leq 0$

i.e $\|\xi\| \leq 1$

$$16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \leq -16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \geq 16x^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \geq 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \Rightarrow 2 \geq \frac{x}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4x \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$2 \geq x \left(\frac{1}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \Rightarrow x \left(\frac{1}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \leq 2$$

$$x \leq \frac{2}{\left(\frac{1}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)}$$

$$\frac{2}{\left(\frac{1}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)} \geq \frac{2}{\left(\frac{1}{p^2} + 4\right)}$$

Car $\left(\frac{1}{p^2} \cos^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$ est toujours $\leq \left(\frac{1}{p^2} + 4\right)$

On prendra la valeur de $x \leq \frac{2}{\left(\frac{1}{p^2} + 4\right)}$ pour garantir la stabilité, c'est-à-dire que la stabilité est de choisir $\Delta t, \Delta x, P \forall \beta$

Exercice n°2.10

Trouver le critère de stabilité, par la méthode de Von Neumann, du problème en régime transitoire donné par l'équation ci-après.

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Solution

Le schéma numérique de ce problème peut s'écrire :

Chapitre II Méthode des différences finies

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\Delta t} + O(k^2) \text{ et } \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + O(h^2)$$

Multiplions par $2\Delta t$ et remplacer $p \rightarrow i$, $q \rightarrow k$ et $r = \frac{\Delta t}{h^2}$ l'équation devient :

$$u_p^{q+1} - u_p^{q-1} = \frac{2\Delta t}{h^2} (u_{p-1}^q - 2u_p^q + u_{p+1}^q) \Rightarrow u_p^{q+1} - u_p^{q-1} = 2r(u_{p-1}^q - 2u_p^q + u_{p+1}^q)$$

$$u_p^{q+1} - u_p^{q-1} = 2ru_{p-1}^q - 4ru_p^q + 2ru_{p+1}^q$$

$$E_p^q = e^{i.\beta.p.h\xi^q}$$

$$e^{i.\beta.p.h\xi^{q+1}} - e^{i.\beta.p.h\xi^{q-1}} = 2re^{i.\beta.(p-1).h\xi^q} - 4re^{i.\beta.p.h\xi^q} + 2re^{i.\beta.(p+1).h\xi^q}$$

On divise par $e^{i.\beta.p.h\xi^q}$ on obtient :

$$\xi - \xi^{-1} = 2re^{-i.\beta.h} - 4r + 2re^{i.\beta.h} \Rightarrow \xi - \xi^{-1} = -4r + 4r\cos(\beta h)$$

$$\Rightarrow \xi - \xi^{-1} = -4r(1 - \cos(\beta h)) \Rightarrow \xi - \xi^{-1} = -8r \sin^2 \frac{(\beta h)}{2}$$

On multiplie par ξ on aura :

$$\xi^2 + 8r \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \xi - 1 = 0$$

C'est une équation de second ordre, on utilise le discriminant pour obtenir ξ_1 et ξ_2

$$\text{On remarque } \begin{cases} \xi_1 \cdot \xi_2 = -1 & (1) \\ \xi_1 + \xi_2 = -B = 8r \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} & (2) \end{cases}$$

D'après (1) si $|\xi_1| < 1 \Rightarrow |\xi_2| > 1$ ce qui conduit à un schéma non stable.

Si $|\xi_1| = |\xi_2| \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 = 0$ ce qui impossible d'après (2).

Ce schéma numérique est toujours instable.

Exercice n°2.11

Trouver le critère de stabilité, par la méthode de Von Neumann, du problème en régime transitoire donné par l'équation ci-après. Sachant que $m = \Delta t / \Delta x$.

$$z_{i,j+1} = -z_{i,j-1} + m^2(z_{i-1,j} - z_{i+1,j}) + 2(1 - m^2)z_{i,j}$$

Solution

Mettre $p \rightarrow i$ et $q \rightarrow j \Rightarrow E_p^q = e^{i.\beta.p.h\xi^q}$

$$z_{p,q+1} = -z_{p,q-1} + m^2(z_{p-1,q} - z_{p+1,q}) + 2(1 - m^2)z_{p,q}$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$e^{i.\beta.p.h\xi^{q+1}} = -e^{i.\beta.p.h\xi^{q-1}} + m^2(e^{i.\beta.(p-1).h\xi^q} - e^{i.\beta.(p+1).h\xi^q}) + 2(1 - m^2)e^{i.\beta.p.h\xi^q}$$

On divise par $e^{i.\beta.p.h\xi^q}$ on aura :

$$\xi = -\xi^{-1} + m^2(e^{-i.\beta.h} + e^{i.\beta.h}) + 2(1 - m^2) \Rightarrow \xi = -\xi^{-1} + m^2 \cdot 2 \cos(\beta h) + 2(1 - m^2)$$

On multiplie par ξ

$$\xi^2 = -1 + 2m^2 \cdot \cos(\beta h) \xi + 2(1 - m^2)\xi \Rightarrow \xi^2 + 1 - 2m^2 \cdot \cos(\beta h) \xi - 2(1 - m^2)\xi = 0$$

$$\xi^2 + 1 + 2m^2(1 - \cos(\beta h)) \xi - 2\xi = 0$$

$$\Rightarrow \xi^2 + 1 + 2m^2(1 - (\cos^2 \frac{(\beta h)}{2} - \sin^2 \frac{(\beta h)}{2}))\xi - 2\xi = 0$$

$$\xi^2 + 1 + 4m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \xi - 2\xi = 0 \Rightarrow \xi^2 - 2 \left(1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \right) \xi + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \xi_1 = A + (A^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ \xi_2 = A - (1 - A^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Où $A = 1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2}$

$$1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \leq 1$$

Il y a deux cas à distinguer

Quand $A < -1 \Rightarrow |\xi_2| > 1$ le schéma est toujours instable.

Quand $-1 < A < 1 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = A + i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}} \\ \xi_2 = A - i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \|\xi_1\| = \|\xi_2\| = \left\{ A^2 + ((A^2 - 1)^{\frac{1}{2}})^2 \right\} = 1$

C'est-à-dire (i.e) choisir m tel que $-1 \leq A \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \leq 1 \text{ toujours vrai } \forall m \\ -(1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2}) \leq 1 \end{cases}$

$$-\left(1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \right) \leq 1 \Rightarrow \left(1 - 2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \right) \geq -1 \Rightarrow -2m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \geq -2$$

$$m^2 \sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{(\beta h)}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{(\beta h)}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{(\beta h)}{2}} \geq 1$$

Pour assurer la stabilité on prend $m \leq 1$.

2.8.2 Stabilité matricielle ou de Brower (approximation)

Elle est valable quelque soit le type de la condition aux limites.

$$\bar{u}^{q+1} = A\bar{u}^q$$

$$\bar{u}^1 = A\bar{u}^0$$

$$\bar{u}^2 = A\bar{u}^1 = AA\bar{u}^0 = A^2\bar{u}^0$$

$$\bar{u}^3 = A\bar{u}^2 = AA\bar{u}^1 = A^2A\bar{u}^0 = A^3\bar{u}^0$$

Etc.

$$\bar{u}^q = A^q\bar{u}^0 \quad (1)$$

$$\bar{u}^{*q} = A^q\bar{u}^{*0} \quad (2)$$

Erreur est donnée par la différence entre les équations (1) et (2)

$$\bar{E}^q = \bar{u}^q - \bar{u}^{*q} = A^q(\bar{u}^0 - \bar{u}^{*0}) = A^q\bar{e}^0$$

Le rayon spectral qui est la plus grande valeur des valeurs propres ne doit pas dépasser 1 pour qu'il n'ait pas une évolution exponentielle de l'erreur.

Pour qu'il n'ait pas une évolution de l'erreur cumulée d'une manière exponentielle il faut que le rayon spectral de la matrice créée (la plus grande valeur de A) soit inférieure à 1, ceci nous garantira la stabilité.

a) Théorème du 1^{er} cercle de Gerschgorin

Le plus grand module des valeurs propres d'une matrice carrée A ne peut excéder la somme des modules des éléments le long d'une ligne ou d'une colonne.

Preuve

$$A\bar{x}_i = \lambda_i\bar{x}_i$$

\bar{x}_i vecteurs propres de A

Le problème consiste à déterminer les n valeurs propres de A.

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \dots + a_{1n}v_n = \lambda_1v_1$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 + \dots + a_{2n}v_n = \lambda_2v_2$$

.....

$$a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + a_{s3}v_3 + \dots + a_{sn}v_n = \lambda_sv_s$$

Soit $v_s = \max(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, sélectionner la $s^{\text{ème}}$ équation et diviser par v_s .

$$\lambda_i = a_{s1} \frac{v_1}{v_s} + a_{s2} \frac{v_2}{v_s} + a_{s3} \frac{v_3}{v_s} + \dots + a_{ss} \frac{v_s}{v_s} + a_{sn} \frac{v_n}{v_s}$$

$$|\lambda_i| \leq |a_{s1}| + |a_{s2}| + |a_{s3}| + \dots + |a_{sn}| \text{ car } \left(\frac{v_1}{v_s}\right) \leq 1$$

En particulier ceci est valable pour $i=1, n$

$$|\lambda_i| = \max_{s=1, n} |\lambda_s|$$

Quand les valeurs propres de la transposée de A sont les mêmes que celles de A le théorème est aussi vrai pour les colonnes.

b) Théorème du 2^{ème} cercle de Gerschgorin ou de Brower

Soit P_s la somme du module des éléments le long de la $s^{\text{ème}}$ ligne avec (éléments de la diagonale a_{ss} non inclus), donc chaque valeur propre de A se trouve à l'intérieure ou sur l'un des cercles $|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s = |a_{s1}| + |a_{s2}| + |a_{s3}| + \dots + |a_{sn}|.$$

Preuve :

$$\lambda_i = a_{s1} \frac{v_1}{v_s} + a_{s2} \frac{v_2}{v_s} + a_{s3} \frac{v_3}{v_s} + \dots + a_{ss} \frac{v_s}{v_s} + a_{sn} \frac{v_n}{v_s}$$

$$|\lambda - a_{ss}| \leq |a_{s1}| + |a_{s2}| + |a_{s3}| + \dots + |a_{sn}| \leq P_s$$

Exercice n°2.12

Obtenir le critère de stabilité par la méthode de Brower du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ \frac{du}{dx} = 0 & x = 0 \quad t > 0 \\ u = \text{constante} & x = 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \quad t = 0 \end{cases}$$

Solution

Le schéma explicite en différences finies du problème est de type $u_{j+1} = Au_j$

Pour éviter l'indétermination de $\frac{1}{x} u_x = \frac{0}{0}$ à $t=0$ on dérive la fonction de base (règle de l'hôpital). $u_t = u_{xx} + \frac{(u_x)'}{(x)'} = u_{xx} + u_{xx} = 2u_{xx}$

$$\begin{pmatrix} (1-4r) & 4r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(1-\frac{1}{2p}\right)r & (1-2r) & \left(1+\frac{1}{2p}\right)r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{1}{2p}\right)r & (1-2r) & \left(1+\frac{1}{2p}\right)r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{1}{2p}\right)r & (1-2r) & \left(1+\frac{1}{2p}\right)r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{1}{2p}\right)r & (1-2r) & \left(1+\frac{1}{2p}\right)r & 0 \end{pmatrix}$$

Critères de stabilité $|\lambda - a_{ss}| = P_S$

Pour la première ligne : $i=1$ $a_{11} = 1 - 4r$, $P_S = 4r$

$$|\lambda - (1 - 4r)| = 4r$$

$$\lambda - (1 - 4r) = \pm 4r$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - (1 - 4r) = 4r \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 - (1 - 4r) = -4r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 8r \end{cases}$$

Pour garantir la stabilité il faut que $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$

$|\lambda_1| \leq 1$ Toujours vrai

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |1 - 8r| \leq 1$$

$$\begin{cases} (1 - 8r) \leq 1 \Rightarrow (1 - 8r) \leq 1 \\ -(1 - 8r) \leq 1 \Rightarrow (1 - 8r) \geq -1 \end{cases}$$

$(1 - 8r) \leq 1$ Toujours vrai $\forall r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$(1 - 8r) \geq -1 \Rightarrow -8r \geq -2 \Rightarrow 8r \leq 2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{4}$$

Le critère de stabilité pour $i=1$ est $r_1 \leq \frac{1}{4}$

Pour $i=2$, $n-1 \Rightarrow |\lambda - a_{ss}| = P_S$

$$a_{ss} = 1 - 2r \text{ et } P_S = \left(1 - \frac{1}{2p}\right)r + \left(1 + \frac{1}{2p}\right)r = 2r$$

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - (1 - 2r) = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 - (1 - 2r) = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r \end{cases}$$

Pour garantir la stabilité, il faut exiger que $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$

$|\lambda_1| \leq 1$ toujours vrai \forall la valeur de r .

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} (1 - 4r) \leq 1 \\ -(1 - 4r) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - 4r) \leq 1 \text{ toujours vrai} \\ (1 - 4r) \geq -1 \Rightarrow -4r \geq -2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le critère de stabilité pour $i=2, n-1$ est $r_i \leq \frac{1}{2}$

Le critère global de stabilité $r \leq \min\{r_1, r_i\} \Rightarrow r \leq \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow r \leq \frac{1}{4}$

Exercice n°2.13

Trouver le critère de stabilité, par la méthode de Brower, du problème en régime transitoire donné par l'équation ci-après.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ -\frac{du}{dx} + H_1 u = 0 & x = 0 \quad t > 0 \\ \frac{du}{dx} + H_2 u = 0 & x = 1 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \quad t = 0 \end{cases}$$

Sachant que $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$ et $H_1 > H_2$

Le schéma explicite de ce problème est déjà exposé aux paragraphes précédentes il est donné pour les nœuds $i=2, n-1$ par $u_i^{k+1} = ru_{i-1}^k + (1 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k$

Alors que pour le reste des nœuds $i=1$ et $i=n$ on doit utiliser les conditions aux limites associées au problème.

Pour $i=1$ $u_1^{k+1} = ru_0^k + (1 - 2r)u_1^k + ru_2^k$ un point fictif u_0^k est apparu, il faut le se débarrasser. A cet effet utilisons-nous la première troisième condition à gauche.

$$\begin{aligned} -\frac{du}{dx} + H_1 u = 0 &\Rightarrow -\left(\frac{u_2^k - u_0^k}{2h}\right) + H_1 u_1^k = 0 \Rightarrow -(u_2^k - u_0^k) + 2hH_1 u_1^k = 0 \\ &\Rightarrow u_0^k = u_2^k - 2hH_1 u_1^k \end{aligned}$$

$$u_1^{k+1} = r(u_2^k - 2hH_1 u_1^k) + (1 - 2r)u_1^k + ru_2^k \Rightarrow u_1^{k+1} = (1 - 2r - 2rhH_1)u_1^k + 2ru_2^k$$

Pour $i=n$ $u_n^{k+1} = ru_{n-1}^k + (1 - 2r)u_n^k + ru_{n+1}^k$ un point fictif u_{n+1}^k est apparu, il faut le se débarrasser. A cet effet utilisons-nous la troisième condition à droite.

$$\frac{du}{dx} + H_2 u = 0 \Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h}\right) + H_2 u_n^k = 0 \Rightarrow (u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) + 2hH_2 u_n^k = 0$$

Chapitre II Méthode des différences finies

$$\Rightarrow u_{n+1}^k = u_{n-1}^k - 2hH_2 u_n^k$$

$$u_n^{k+1} = ru_{n-1}^k + (1 - 2r)u_n^k + r(u_{n-1}^k - 2hH_2 u_n^k) \Rightarrow u_n^{k+1} = 2ru_{n-1}^k + (1 - 2r - 2rhH_2)u_n^k$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2r - 2rhH_1) & 2r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & (1 - 2r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & (1 - 2r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & (1 - 2r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & (1 - 2r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2r & (1 - 2r - 2rhH_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{Bmatrix}$$

Critère de stabilité en appliquant le théorème de Brouwer ligne par ligne (ie : $i=1$; $i=2, n-1$, $i=n$) et par conséquent trouver trois critères et finalement choisir le critère minimum comme critère global de stabilité.

Critères de stabilités $|\lambda - a_{ss}| = P_S$

Pour la première ligne : $i=1 \Rightarrow a_{11} = (1 - 2r - 2rhH_1)$ et $P_S = 2r$

$$|\lambda - (1 - 2r - 2rhH_1)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - (1 - 2r - 2rhH_1) = 2r \\ \lambda_2 - (1 - 2r - 2rhH_1) = -2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - 2rhH_1 \\ \lambda_2 = (1 - 4r - 2rhH_1) \end{cases}$$

Exiger $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$ pour que la stabilité soit garantie.

$$|\lambda_1| \leq 1 \Rightarrow |1 - 2rhH_1| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2rhH_1 \leq 1 \text{ toujours vrai} \\ -(1 - 2rhH_1) \leq 1 \Rightarrow (1 - 2rhH_1) \geq -1 \end{cases}$$

$$(1 - 2rhH_1) \geq -1 \Rightarrow -2rhH_1 \geq -2 \Rightarrow 2rhH_1 \leq 2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{hH_1}$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |(1 - 4r - 2rhH_1)| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} (1 - 4r - 2rhH_1) \leq 1 \text{ toujours vrai} \\ -(1 - 4r - 2rhH_1) \leq 1 \end{cases}$$

$$(1 - 4r - 2rhH_1) \geq -1 \Rightarrow (-4r - 2rhH_1) \geq -2 \Rightarrow (4r + 2rhH_1) \leq 2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{(2 + hH_1)}$$

Le critère de stabilité au nœud $i=1$ (la première ligne) est $r_1 \leq \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow r \leq \min\left\{\frac{1}{hH_1}, \frac{1}{(2+hH_1)}\right\} \Rightarrow r \leq \frac{1}{(2+hH_1)}$

Pour $i=2, n-1$ $|\lambda - a_{ss}| = P_S$; $a_{ii} = (1 - 2r)$; $P_S = |r| + |r| = 2r$

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - (1 - 2r) = 2r \\ \lambda_2 - (1 - 2r) = -2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - (1 - 2r) = 2r \\ \lambda_2 - (1 - 2r) = -2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = (1 - 4r) \end{cases}$$

Pour garantir la stabilité il faut exiger $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$.

$$|\lambda_1| \leq 1 \Rightarrow |1| \leq 1 \text{ toujours vrai}$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |(1 - 4r)| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} (1 - 4r) \leq 1 \text{ toujours vrai} \\ -(1 - 4r) \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(1 - 4r) \leq 1 \Rightarrow (1 - 4r) \geq -1 \Rightarrow -4r \geq -2 \Rightarrow 2r \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$$

Le critère de stabilité pour $i=2, n-1$ est $r \leq \frac{1}{2}$.

Pour $i=n$ $|\lambda - a_{ss}| = P_S$; $a_{ii} = (1 - 2r - 2rhH_2)$; $P_S = |2r| = 2r$

$$|\lambda - (1 - 2r - 2rhH_2)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - (1 - 2r - 2rhH_2) = 2r \\ -(\lambda_2 - (1 - 2r - 2rhH_2)) = 2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = (1 - 2rhH_2) \\ \lambda_2 = 1 - 4r - 2rhH_2 \end{cases}$$

Par analogie avec la première ligne on obtient :

$$|\lambda_1| \leq 1 \Rightarrow |1 - 2rhH_2| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2rhH_2 \leq 1 \text{ toujours vrai } \forall r \\ -(1 - 2rhH_2) \leq 1 \Rightarrow (1 - 2rhH_2) \geq -1 \end{cases}$$

$$(1 - 2rhH_2) \geq -1 \Rightarrow -2rhH_2 \geq -2 \Rightarrow 2rhH_2 \leq 2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{hH_2}$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |(1 - 4r - 2rhH_2)| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} (1 - 4r - 2rhH_2) \leq 1 \text{ toujours vrai} \\ -(1 - 4r - 2rhH_2) \leq 1 \end{cases}$$

$$(1 - 4r - 2rhH_2) \geq -1 \Rightarrow (-4r - 2rhH_2) \geq -2 \Rightarrow (4r + 2rhH_2) \leq 2 \Rightarrow r \leq \frac{1}{(2 + hH_2)}$$

Le critère de stabilité au nœud $i=n$ (la $n^{\text{ème}}$ ligne) est $r_1 \leq \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow r \leq \min\left\{\frac{1}{hH_2}, \frac{1}{(2+hH_2)}\right\} \Rightarrow r \leq \frac{1}{(2+hH_2)}$

Le critère global de stabilité $r \leq \min\left\{\frac{1}{(2+hH_1)}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(2+hH_2)}\right\} \Rightarrow r \leq \frac{1}{(2+hH_1)}$ puisque $H_1 > H_2$.

2.9 Conclusion

La résolution des équations en différences finies nécessite la connaissance de plusieurs méthodes. A cet effet, nous avons présenté les méthodes uni et multi pas pour la résolution des équations différentielles du premier ordre en développant quelques programmes d'une part et d'autre part, et en premier volet, nous nous sommes étalés sur les techniques utilisées pour la résolution des équations de second ordre en mettant quelques exemples à la portée des lecteurs. En second volet, nous avons mis en exergue comment étudier la stabilité des schémas numériques (explicite, implicite et Crank-Nicholson) en régime transitoire par les deux techniques analytique de John Von Neumann et approchée de Brower afin que nos schémas seront stables et par conséquent l'erreur n'évolue pas exponentiellement.

CHAPITRE III

Méthode des éléments finis

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment résoudre un système d'équations différentielles sur un domaine qui n'est pas simple, il faut le discrétiser en sous domaine ou éléments de formes géométriques simples.

3.2 Les approximations

L'extrapolation permet de construire une fonction approchée à partir des valeurs exactes (définies sur un domaine d'intérêt) avec la possibilité de sortir du domaine.

Mesure des déplacements ε sous différentes températures

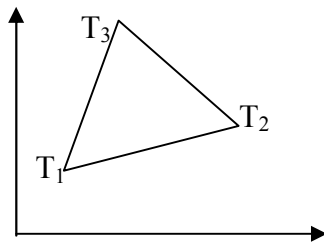
$\varepsilon = \varepsilon_1$ à $t = 10^\circ\text{C}$

$\varepsilon = \varepsilon_2$ à $t = 250^\circ\text{C}$

$\varepsilon = \varepsilon_3$ à $t = 500^\circ\text{C}$

$\varepsilon = ?$ à $t = 1000^\circ\text{C}$ extrapolation vers 1000°C .

L'interpolation c'est la construction d'une fonction approchée à partir des valeurs exactes sans sortir du domaine d'intérêt.



Comme c'est dit précédemment l'interpolation consiste à construire une fonction approchée, cette dernière peut être polynomiale, trigonométrique, logarithmique, exponentielle etc.

En méthodes des éléments finis on s'intéresse seulement à l'interpolation par une fonction approchée polynomiale à raison de :

- a) Fonction continue (dans leur domaine borné)
- b) Fonction facile à dériver
- c) Fonction facile à intégrer
- d) Fonction facile à programmer.

Il existe deux types d'interpolation polynomiale, le premier est de Lagrange et le second est de Hermite.

Pour Lagrange en chaque point il y a une seule information alors que pour Hermite en chaque point il y a plus qu'une information.

3.3 Interpolation polynomiale c'est de construire une fonction approchée U_{app} sur un domaine borné $[a,b]$ à partir de quelques valeurs exactes tel que l'erreur $e(x)=U_{ex}(x)-U_{app}(x)$ tend vers zéro.

3.3.1 Interpolation de type Lagrange

a) Cas unidimensionnel (1D)

Nous pouvons approximer une fonction inconnue, V , par une fonction approchée, U , construite sur la base de fonctions polynômiales (ou trigonométriques) linéairement indépendantes.

$$U_{app}(x) = \sum \alpha_i u^i = \alpha_0 + \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots$$

Si nous avons n points $\rightarrow n$ informations $\rightarrow n$ paramètres $\alpha_i \rightarrow$ le polynôme est de degré $(n-1)$.

$$U_{app}(x) = \sum \alpha_i u^i = \alpha_0 + \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$$

Que nous pouvons écrire sous forme matricielle somme suit :

$$U_{app}(x) = \langle 1, x, x^2, x^3 \dots x^{n-1} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix} = \langle p(x) \rangle \{ \alpha_i \}$$

$\langle p(x) \rangle$: les polynômes de l'interpolation (sont linéairement indépendants).

$\langle \alpha_i \rangle$: les paramètres de l'interpolation (n'ont aucun sens physique)

Pour déterminer les α_i , on fait coïncider les valeurs approchées aux valeurs exactes aux n points, appelés nœuds. Nous pouvons écrire alors :

$$\begin{aligned}
 U(x_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 + \dots + \alpha_{n-1} x_1^{n-1} = V_1 \\
 U(x_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 + \dots + \alpha_{n-1} x_2^{n-1} = V_2 \\
 &\dots \\
 U(x_n) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \alpha_3 x_n^3 + \dots + \alpha_{n-1} x_n^{n-1} = V_n
 \end{aligned}$$

Que nous pouvons réécrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix}$$

Ou sous la forme compactée

$$\{U_i\} = [A]\{\alpha_i\} = \{V_i\}$$

où

$\{U_i\}$ Valeurs nodales

$[A]$ Matrice géométrique

$\{\alpha_i\}$ Valeurs des paramètres.

Si la matrice $[A]$ n'est pas singulière, nous pouvons écrire :

$$\{\alpha_i\} = [A]^{-1}\{V_i\}$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation de $U_{app}(x)$, nous avons :

$$U_{app}(x) = \langle 1, x, x^2, x^3 \dots x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \{V_i\}$$

Que nous pouvons écrire comme suit :

$$U_{app}(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots N_n(x) \rangle \{V_i\}$$

Ou tout simplement $U_{app}(x) = \langle N \rangle \{V_i\}$

Avec $\langle N \rangle = \langle 1, x, x^2, x^3 \dots x^{n-1} \rangle [A]^{-1}$

Comme $U(x_i) = V_i$, il découle que :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \text{si} \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Comme c'est dit précédemment, il existe deux (2) types d'interpolation, interpolation de Lagrange et celle de Hermite. Pour Lagrange les fonctions $N_j(x)$ sont des polynômes d'ordre $(n-1)$ définies par :

$$N_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

$$N_1(x_1) = 1 \dots N_2(x_1) = 0 \dots N_n(x_1) = 0$$

$$N_1(x_2) = 0 \dots N_2(x_2) = 1 \dots N_n(x_2) = 0$$

$$N_1(x_n) = 0 \dots N_2(x_n) = 0 \dots N_n(x_n) = 1$$

On peut synthétiser l'interpolation nodale comme suit :

$$U_{app}(x) = \langle N_i(x) \rangle = \langle N_1, N_2, N_3, \dots, N_i \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$\langle N_i(x) \rangle$: Fonction d'interpolation

 : Fonction de poids

 : Fonction de forme

$\langle N_i(x) \rangle$ est un polynôme ayant le même degré que $U_{app}(x)(p(x))$.

$$\sum N_i(x) = 1$$

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

$$U_{app}(x) = \langle p(x) \rangle \{ \alpha_i \}$$

$$\{ U_i \} = [A] \{ \alpha_i \}$$

$$\{ \alpha_i \} = [A]^{-1} \{ U_i \}$$

$$U_{app}(x) = \langle p(x) \rangle [A]^{-1} \{ U_i \}$$

$$U_{app}(x) = N_i(x) \{ U_i \}$$

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x-x_j)}{\prod_{j=1}^n (x_i-x_j)} \text{ sauf pour } i=j$$

Exercice n° 3.1



Pour $T=15^\circ$ $T(3)=15.999$

$$T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x = \langle 1, x \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_0 = 10 \text{ et } \alpha_0 + 5\alpha_1 = 20 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

$$\{ \alpha_i \} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$T(x) = 10 + 2x$$

$$e(x) = U_{\text{exa}} - U_{\text{app}}$$

$$U_{\text{app}}(x = 3) = 10 + 2(3) = 16$$

$$e(x) = 15.999 - 16 = -0.001$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \langle 1, x \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \langle 1, x \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow T(x) = \langle \left(1 - \frac{1}{5}x\right), \left(0 + \frac{1}{5}x\right) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{1}{5}x \text{ et } N_2(x) = \frac{1}{5}x$$

$$\sum N_i(x) = 1$$

$$\int_0^5 \sum N_i(x) dx = \text{longueur}$$

$$T(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + \dots$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = \bar{T}$$

$$T(x) = \bar{T} = (N_1 + N_2 + N_3) \bar{T}$$

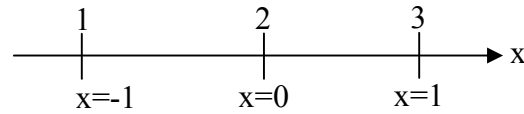
$$\sum N_i = 1$$

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1}^n (x_i - x_j)}$$

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 5)}{(0 - 5)} = 1 - \frac{x}{5}$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)}{(5 - 0)} = \frac{x}{5}$$

Exercice n°3.2



$n=3$ le degré du polynôme $n-1=3-1=2$

$$U_{app}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

$$U_{app}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x = \langle 1, x, x^2 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & (0)^2 \\ 1 & 1 & (1)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$U_{app}(x) = \langle 1, x, x^2 \rangle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$U_{app}(x) = \langle (-0.5x + 0.5x^2), (1 - x^2), (0.5x + 0.5x^2) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x) = -0.5x + 0.5x^2 ; N_2(x) = 1 - x^2 ; N_3(x) = 0.5x + 0.5x^2$$

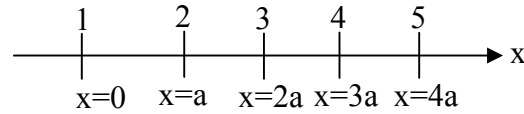
$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1}^n (x_i - x_j)}$$

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = -0.5x + 0.5x^2$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = 1 - x^2$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = 0.5x + 0.5x^2$$

Exercice n°3.3



Déterminer $N_4(x)$ et $N_5(x)$?

Le degré du polynôme $n-1=5-1=4$

$$N_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)}$$

$$N_3(x) = \frac{(x - 0)(x - a)(x - 3a)(x - 4a)}{(2a - a)(2a - a)(2a - 3a)(2a - 4a)} = \frac{(x)(x - a)(x - 3a)(x - 4a)}{4a^4}$$

$$N_5(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(4a)(3a)(2a)(a)}$$

$$N_5(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{24a^4}$$

Exercice n°3.4

$F(x) = \sin(x)$

Trouver $f_{app}(x)$ aux points $x_1=0, x_2=\pi/2, x_3=\pi$

Déterminer l'erreur à $x=\pi/4$ et $x=\pi/6$

Solution

On peut utiliser le polynôme de Lagrange

$$P(x) = \sum_{j=0}^n y_j N_j(x)$$

Le degré du polynôme est $3-1=2$

$$N_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)}{\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)(0 - \pi)} = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)}{\left(\frac{\pi^2}{2}\right)} = \frac{2}{\pi^2}$$

$$N_1(x) = \frac{2}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) (x - \pi)$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - \pi)}{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)} = \frac{x(x - \pi)}{\left(\frac{-\pi^2}{4}\right)} = -\frac{4x}{\pi^2} (x - \pi)$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{(\pi - 0)\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi^2}{2}\right)} = \frac{2x}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_{\text{app}}(x) = \frac{2}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) (x - \pi) f(x_1 = 0) - \frac{4x}{\pi^2} (x - \pi) f\left(x_2 = \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2x}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x_3 = \pi)$$

$$f_{\text{app}}(x) = -\frac{4x}{\pi^2} (x - \pi)$$

Calcul de l'erreur à $x = \pi/4$ et $x = \pi/6$

$$f_{\text{app}}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4x}{\pi^2} (x - \pi) = -\frac{4\frac{\pi}{4}}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

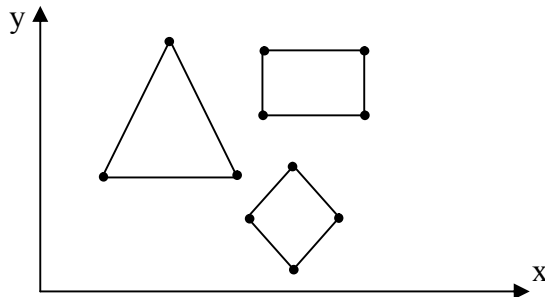
$$\text{erreur} = f\left(x = \frac{\pi}{4}\right) - f_{\text{app}}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} = -0,024893218 = -2,489\%$$

$$f_{\text{app}}\left(x = \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4x}{\pi^2} (x - \pi) = -\frac{4\frac{\pi}{6}}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) = -\frac{4}{6\pi} \left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{20}{36}$$

$$f\left(x = \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{erreur} = f\left(x = \frac{\pi}{6}\right) - f_{\text{app}}\left(x = \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{20}{36} = -0,055555555 = -5,55\%$$

b) Cas bidimensionnel (2D)



$$U_{\text{app}}(x, y) = \sum_{i,j=0}^n \alpha_k x^i y^j$$

Chapitre III Méthodes des éléments finis

$$U_{\text{app}}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \dots$$

Interpolation de type Lagrange à deux dimensions :

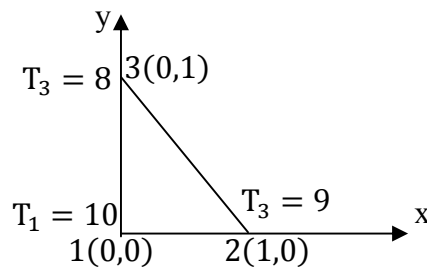
n : nœuds \rightarrow n informations \rightarrow n paramètres.

$$U_{\text{app}}(x, y) = \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

Triangle de Pascal

1	1 seul paramètre	constante
x, y	3 paramètres	linéaires
x^2, xy, y^2	6 paramètres	Quadratique
x^3, x^2y, xy^2, y^3	10 paramètres	cubique
$x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$	15 paramètres	quartique
$x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5$	21 paramètres	quartique

Exercice n°3.5



Trouver :

- $T_{\text{app}}(x, y)$ approchée ?
- Les fonctions de forme ?
- $T(C, D, G)$?
- Erreur (C, D, G) si $T_{\text{exacte}}(C, D, G) = 9.001$.

Solution

$$T_{\text{app}}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = \langle 1, x, y \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Chapitre III Méthodes des éléments finis

$$\alpha_0 = 10 ; \alpha_0 + \alpha_1 = 9 \Rightarrow \alpha_1 = -1 \text{ et } \alpha_0 + \alpha_2 = 8 \Rightarrow \alpha_2 = -2$$

$$T_{\text{app}}(x, y) = 10 - x - 2y$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{app}}(x, y) = \langle 1, x, y \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{\text{app}}(x, y) = \langle (1 - x - y), (0 + x + 0), (0 + 0 + y) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x, y) = 1 - x - y, N_2(x, y) = x \text{ et } N_3(x, y) = y$$

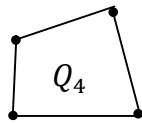
$$\sum N_i(x, y) = 1$$

$$T_{\text{app}}(\text{C. D. G}) \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = 10 - x - 2y \Rightarrow 10 - \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{3} = 9$$

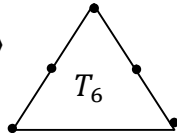
$$\text{Erreur} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = 9,001 - 9 = 0.001$$

Exercice n°3.6

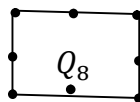
$$P(x, y) = \langle 1, x, y, xy \rangle$$



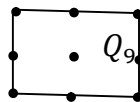
$$P(x, y) = \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2 \rangle$$



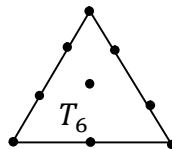
$$P(x, y) = \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2 \rangle$$



$$P(x, y) = \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3 \rangle$$



$$P(x, y) = \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3, y^3 \rangle$$

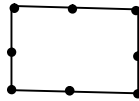


Les éléments de Lagrange ont les mêmes nœuds à l'intérieur du domaine.

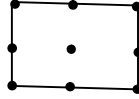
Chapitre III Méthodes des éléments finis

Les éléments de Serendip n'ont pas de nœuds à l'intérieur du domaine.

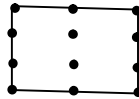
Serendip



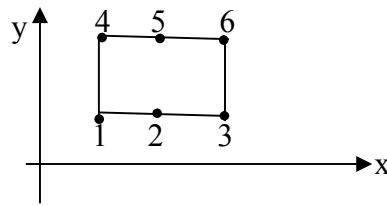
Lagrange



Lagrange

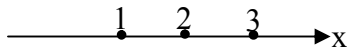


Pour les éléments quadratiques (rectangle, carré)

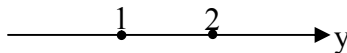


$$N_k(x, y) = N_i(x) \cdot N_j(y)$$

Fonction de forme de Lagrange.



$$\rightarrow N_1(x), N_2(x), N_3(x)$$



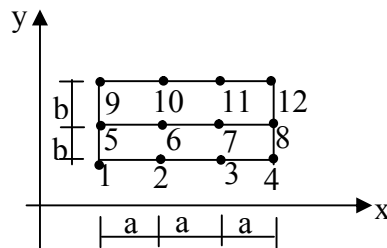
$$\rightarrow N_1(y), N_2(y)$$

$$N_5(x, y) = N_2(x) \cdot N_2(y)$$

$$N_6(x, y) = N_3(x) \cdot N_2(y)$$

$$N_3(x, y) = N_3(x) \cdot N_1(y)$$

Exercice n°3.7



$$N_k(x, y) = N_i(x) \cdot N_j(y)$$

$$N_6(x, y) =$$

$$N_7(x, y) =$$

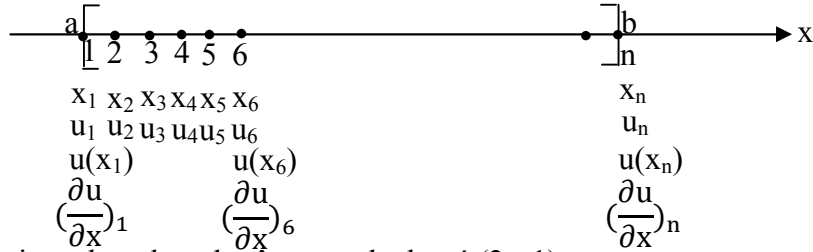
$$N_{10}(x, y) =$$

$$N_{11}(x, y) =$$

3.3.2 Interpolation de type Hermite

a) cas unidimensionnel

Les informations sont liées



2n informations donc le polynôme est de degré (2n-1)

$$U(x) = \alpha_0 + \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots + \alpha_{2n-1} u^{2n-1}$$

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, x^3, \dots, x^{2n-1} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{2n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \langle 0, 1, 2x, 3x^2, \dots, (2n-1)x^{2n-2} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{2n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ \frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots, x^{2n-1} \\ 0, 1, 2x, 3x^2, \dots, (2n-1)x^{2n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{2n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\{U_i\} = [P(x)] \cdot \{\alpha_i\}$$

{U_i} vecteur inconnu

[P(x)] matrice polynômiale

{α_i} vecteur paramètres

$$\begin{Bmatrix} U_1(x) \\ \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)_1 \\ U_2(x) \\ \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)_2 \\ \vdots \\ U_n(x) \\ \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x_1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, x_1^5, x_1^6, \dots, x_1^{2n-1} \\ 0, 1, 2x_1, 3x_1^2, \dots, (2n-1)x_1^{2n-2} \\ 1, x_2, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5, x_2^6, \dots, x_2^{2n-1} \\ 0, 1, 2x_2, 3x_2^2, \dots, (2n-1)x_2^{2n-2} \\ \vdots \\ 1, x_n, x_n^2, x_n^3, x_n^4, x_n^5, x_n^6, \dots, x_n^{2n-1} \\ 0, 1, 2x_n, 3x_n^2, \dots, (2n-1)x_n^{2n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\{U_i\} = [A] \cdot \{\alpha_i\}$$

$$\{\alpha_i\} = [A]^{-1} \cdot \{U_i\}$$

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} U(x) \\ \frac{\partial U(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} = [P(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{U_i\} = [N_i(x)] \cdot \{U_i\}$$

$[N_i(x)]$ matrice des fonctions de forme.

Exercice n°3.8

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ x=0 & & x=l \\ w_1 & & w_2 \\ \theta_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 & & \theta_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \end{array} \\ \{w\} = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x_1, x_1^2, x_1^3 \\ 0, 1, 2x_1, 3x_1^2 \\ 1, x_2, x_2^2, x_2^3 \\ 0, 1, 2x_2, 3x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 1, 1, l^2, l^3 \\ 0, 1, 2l, 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ -3/l^2, -2/l, 3/l^2, -1/l \\ 2/l^3, 1/l^2, -2/l^3, 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ -3/l^2, -2/l, 3/l^2, -1/l \\ 2/l^3, 1/l^2, -2/l^3, 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

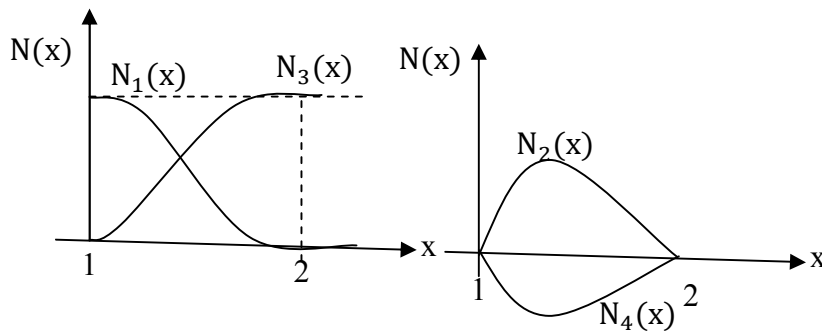
$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right), \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right), \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right), \left(\frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) \\ \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right), \left(1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right), \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right), \left(\frac{-2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right), N_2(x) = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right), N_3(x) = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) \text{ et } N_4(x) = \left(\frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)$$

$$N'_1(x) = \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right), N'_2(x) = \left(1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right), N'_3(x) = \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) \text{ et } N'_4(x) = \left(\frac{-2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right)$$

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2$$

$$\theta(x) = N'_1 w_1 + N'_2 \theta_1 + N'_3 w_2 + N'_4 \theta_2$$



3.4 Approximation par éléments finis

Dans la partie précédente, nous avons construit une fonction approchée U de V sur tout son domaine $\Omega : [x_1, x_n]$. maintenant, supposons que le nombre de points x_i soit très important. Ceci pourrait aboutir à des polynômes de degré trop élevé, et donc à des phénomènes d'instabilité. Pour éviter ce genre de problème, nous allons construire la fonction U par morceaux, nous subdivisons le domaine Ω en un nombre fini de sous domaine Ω^e sur lesquels la construction de U est simplifiée. Dans ce cas, nous faisons tout simplement une approximation par éléments finis. La méthode d'approximation par éléments finis nécessite donc les étapes suivantes :

- Discrétiser le domaine Ω en un nombre finis de sous domaines ou éléments, Ω^e ,
- Définir une fonction approchée $U^e(x)$ différente sur chaque élément par l'approximation nodale sur chaque élément Ω^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur Ω^e et sur sa frontière.

Les fonctions approchées $U^e(x)$ sur chaque élément doivent être construites de manière à être continues sur Ω^e , et elles doivent aussi satisfaire des conditions de continuité entre les différents éléments. Une fois toutes les fonctions $U^e(x)$ construites, la fonction approchée $U(x)$ est obtenue par :

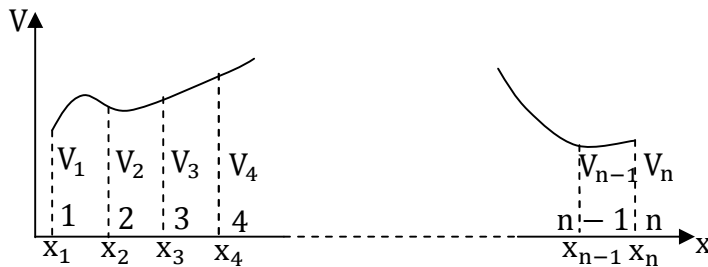
$$U(x) = \sum_e U^e(x)$$

Définitions

- a) Les points sur lesquels la fonction approchée $U^e(x)$ coïncide avec la fonction exacte V sont les nœuds d'interpolation.
- b) Les coordonnées, x_i , de ces nœuds sont les coordonnées nodales.
- c) Les valeurs $V_i = U(x_i) = U^e(x_i)$ sont les variables nodales.

Exemple n°3.1

Soit une fonction V définie dans le domaine $\Omega : [x_1, x_n]$ et représentée par le graphe suivant :



Nous nous proposons de construire une fonction approchée de V au moyen d'une approximation par éléments finis. Pour cela définissons d'abord la géométrie des éléments :

Nœuds : $1, 2, \dots, n-1, n$

Coordonnées nodales : $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$

Domaine complet : $x_1 \leq x \leq x_n$

Eléments : $\Omega_1 : [x_1, x_2]$

$\Omega_2 : [x_2, x_3]$

.

.

$\Omega_{n-1} : [x_{n-1}, x_n]$

Variables nodales : $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$

Les fonctions approchées $U^e(x)$ doivent être linéaires sur chaque élément,

Elément 1 : $x_1 \leq x \leq x_2$ $U_1(x) = N_1(x)V_1 + N_2(x)V_2$

Les fonctions approchées $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont des fonctions linéaires en x qui satisfont les relations :

$$N_1(x_1) = 1 \quad N_2(x_1) = 0$$

$$N_1(x_2) = 0 \quad N_2(x_2) = 1$$

Et elles sont données par :

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Elément 2 : $x_2 \leq x \leq x_3$ $U_2(x) = N_1(x)V_2 + N_2(x)V_3$

$$N_1(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \quad N_2(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

Elément n-1 : $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ $U_{n-1}(x) = N_1(x)V_{n-1} + N_2(x)V_n$

$$N_1(x) = \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} \quad N_2(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

La fonction approchée $U(x)$ est obtenue sur le domaine complet, Ω , en faisant la somme des fonctions $U^e(x)$:

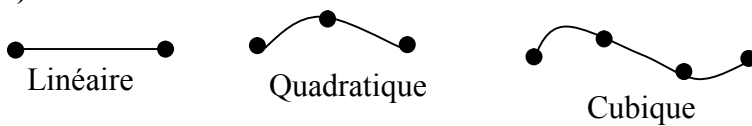
$$U(x) = \sum_e U^e(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_{n-1}(x)$$

L'approximation nodale par éléments finis s'étend aussi à l'approximation des fonctions à plusieurs variables. Par contre, la définition analytique des éléments et la construction des fonctions d'interpolation deviennent plus compliquées comme nous allons le voir dans le reste du chapitre.

3.5 Forme d'éléments classiques

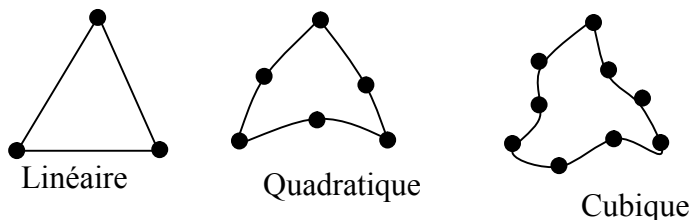
Nous distinguons trois familles d'éléments correspondant à des domaines à une, deux et trois dimensions. Chaque élément est identifié par sa forme, le type de courbe ou de surface qui forme sa frontière, ainsi que le nombre de nœuds nécessaires pour le définir. Il faut que le nombre de nœuds géométriques sur chaque frontière soit compatible avec la forme de la courbe qui constitue la dite frontière.

a) Éléments à une dimension

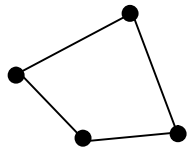


b) Éléments à deux dimensions

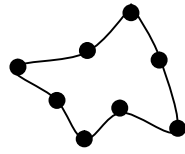
Éléments triangulaire



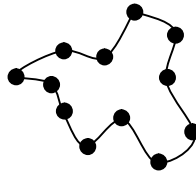
Éléments quadrilatéraux



Linéaire



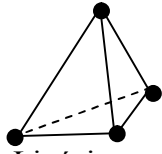
Quadratique



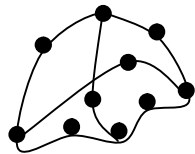
Cubique

c) Éléments à trois dimensions

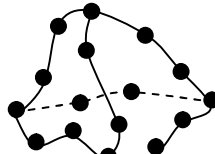
Éléments tétraédriques



Linéaire

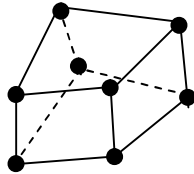


Quadratique

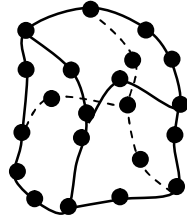


Cubique

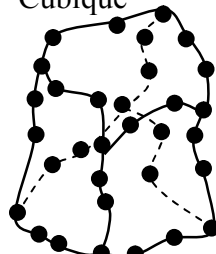
Éléments hexaédriques



Linéaire

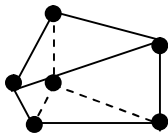


Quadratique

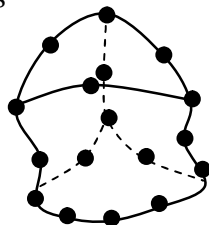


Cubique

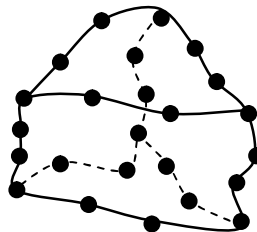
Éléments prismatiques



Linéaire



Quadratique

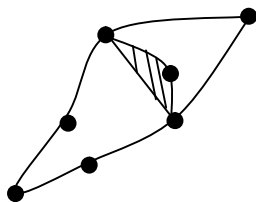


Cubique

3.6 Règle de discrétisation d'un domaine par éléments finis

La discrétisation d'un domaine par éléments finis doit obéir aux règles suivantes :

Le recouvrement de deux éléments ou plus est exclus :

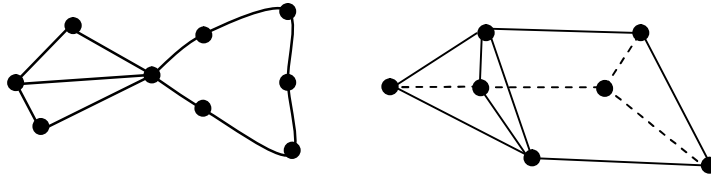


Ce qui signifie que les éléments sont assemblés de sorte qu'ils ont :

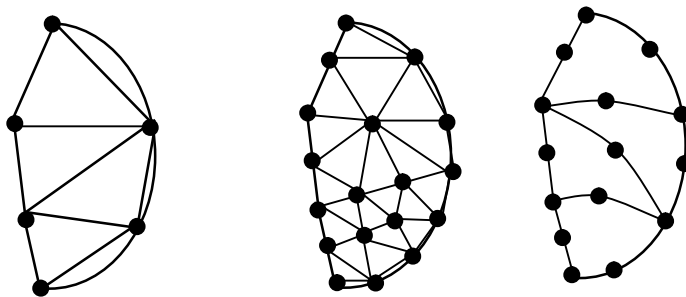
* soit une intersection réduite à un sommet

* soit une intersection réduite à un coté commun ou surface commune

b) L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine original. Les trous entre les éléments sont exclus.



c) Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur de discrétisation est inévitable. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments à frontières plus complexes.



3.7 Construction des fonctions d'approximation sur un élément

3.7.1 Principes de base

La construction de la fonction approchée, U , sur un élément par la méthode d'approximation générale ou nodale doit répondre essentiellement aux besoins du problème à solutionner ainsi qu'aux exigences de la géométrie de l'élément. La fonction approchée, U , doit satisfaire les conditions de constructions imposées par l'opérateur différentiel ou sa forme intégrale faible quand elle existe. Donc même le domaine et les éléments sont les mêmes, les fonctions approchées sont différentes. De plus il n'existe pas de règles systématiques permettant la construction de ces fonctions. Seules l'intelligence et l'expérience ont permis de les trouver pour certains problèmes et certains éléments classiques. Par contre, il existe deux principes qui peuvent servir comme « garde fou », et qu'il faut toujours essayer de les respecter lors de la construction de ces fonctions. Ces deux principes sont :

* Le principe de compatibilité.

* Le principe l'état complet.

La raison pour laquelle la fonction approchée doit satisfaire ces deux principes est la suivante : assurer la convergence de la solution quand on augmente le nombre d'éléments et/ou on diminue leurs tailles (tailles d'

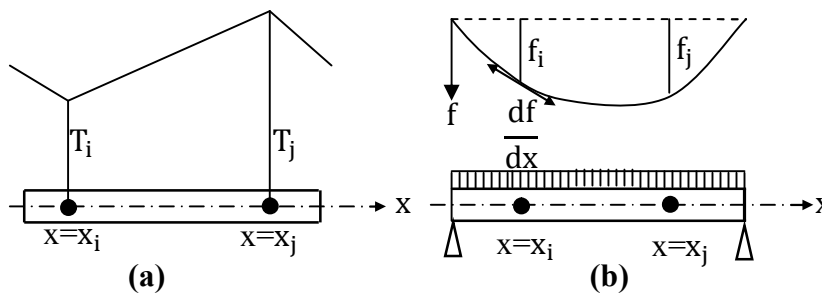
a) Principe de compatibilité

Le principe de compatibilité peut être exposé comme suit :

* Pour un problème de classe C^0 (construire C^0), la fonction approchée, U , pas ses dérivées doit être continue sur la frontière de l'élément.

* Pour un problème de classe C^1 , la fonction approchée et ses dérivées premières doivent être continues sur la frontière de l'élément.

* Donc, pour un problème de classe C^n , la fonction approchée et sa dérivée d'ordre n doivent être continues sur la frontière de l'élément. Pour des raisons pédagogiques, il est plus clair d'illustrer ce principe à l'aide d'un exemple. Considérons les deux problèmes suivants :



La figure (a) représente un problème thermique : transmission de température dans une tige métallique. La fonction exacte, $T(x)$, qui représente la distribution de la température sur toute la longueur de la tige est continue. Donc la fonction approchée, $U(x)$, (pas nécessairement sa dérivée) doit être continue aux points de jonction des éléments. Par contre, dans le cas de la figure (b) qui représente une poutre fléchie (problème de classe C^1), non seulement la fonction $U(x)$ qui doit être approximer la flèche doit être continue, mais aussi sa dérivée qui représente la pente de la flèche. La pente doit être continue, sinon on aurait des cassures dans la déformation de la poutre.

Les problèmes d'élasticité plane sont des problèmes de classe C^0 . Par contre, les problèmes de déformation de poutre, plaques et coques sont des problèmes de classe C^1 .

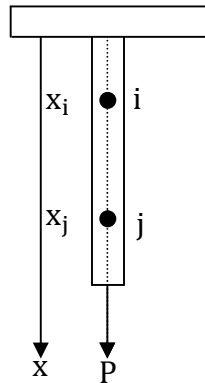
b) Principe d'état

Le principe de l'état complet peut être se traduit ainsi : quand la taille de l'élément se réduit à zéro (tend vers un point), la fonction approchée doit être capable de représenter :

* Pour un problème de classe C^0 , une valeur constante de la fonction exacte, mais aussi une valeur constante de ses dérivées première,

* Pour un problème de classe C^1 , une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées premières et secondes.

Comme pour le principe de compatibilité, il est plus facile de comprendre le principe de l'état complet à l'aide d'un exemple, soit la figure suivante qui représente un problème de contrainte dans une tige (problème de classe C^0).



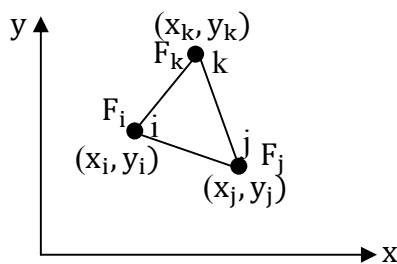
Dans ce cas, la fonction exacte représente le déplacement ; pour un élément linéaire à deux nœuds, nous pouvons approximer la fonction exacte par une fonction approchée, U , de la forme :

$$U(x)=a+bx$$

Remarque que si x tend vers zéro, la taille de l'élément est réduite à un point. D'où, $U=a$ qui est un constante. Ce qui est logique, car la fonction exacte possède une valeur constante en chaque point du domaine. La fonction approchée, U , doit être aussi capable de représenter un mouvement de corps rigide. Ce cas se produirait si la tige n'était pas fixée à sa partie supérieure (chute libre), et chaque point aurait eu le même déplacement, $U=a$. ensuite, nous avons $dU/dx=b$. Cette condition représente le cas réel où la déformation est constante sur l'élément.

3.7.2 Élément triangulaire pour un problème de classe C^0

Soit un problème de classe C^0 ou la fonction $f(x,y)$ représente la fonction inconnue :



Nous commençons d'abord par construire une fonction approchée $U(\{x\}), \{x\}^T=(x,y)$. En vertu des principes de compatibilité et de l'état complet, la fonction $U(\{x\})$ doit avoir un terme constant et des dérivées premières en x et y constantes. Pour cela, nous choisissons $U(\{x\})$ sous la forme suivante :

$$U(\{x\})=U(x,y)=a+bx+cy \quad (3.1)$$

La fonction U contient autant de termes que de valeurs nodales.

La fonction $U(x,y)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U(x, y) = \langle 1, x, y \rangle \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Au nœuds $i(x=x_i, y=y_i)$, $j(x=x_j, y=y_j)$ et $k(x=x_k, y=y_k)$, nous devons avoir respectivement $U_i=F_i$, $U_j=F_j$ et $U_k=F_k$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} F_i &= a + bx_i + cy_i \\ F_j &= a + bx_j + cy_j \\ F_k &= a + bx_k + cy_k \end{aligned} \quad (3.3)$$

Que nous pouvons réécrire sous forma matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Nous pouvons résoudre le système précédent pour les constantes a , b et c qui sont les paramètres généraux de l'approximation. Si la matrice du système précédent n'est pas singulière, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Maintenant, nous pouvons réécrire l'équation (3.2) sous la forme suivante :

$$U(x, y) = \langle 1, x, y \rangle \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Qui est de la forme :

$$U(x, y) = N_i(x, y)F_i + N_j(x, y)F_j + N_k(x, y)F_k \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_k - y_j)(x_j - x) - (x_k - x_j)(y_j - y)] \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_i - y_k)(x_k - x) - (x_i - x_j)(y_k - y)] \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2A} [(y_j - y_i)(x_i - x) - (x_j - x_i)(y_i - y)] \end{aligned}$$

Où A est l'aire du triangle i - j - k

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

Nous sommes donc passés d'une approximation générale (4.6) à une approximation nodale (4.12). Les fonctions N_i , N_j et N_k sont des fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme.

Remarquer que :

$$\text{Au nœud } i \quad N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_j(x_i, y_i) = 0, \quad N_k(x_i, y_i) = 0$$

$$\text{Au nœud } j \quad N_i(x_j, y_j) = 0, \quad N_j(x_j, y_j) = 1, \quad N_k(x_j, y_j) = 0$$

$$\text{Au nœud } k \quad N_i(x_k, y_k) = 0, \quad N_j(x_k, y_k) = 0, \quad N_k(x_k, y_k) = 1$$

Nous pouvons arriver au même résultat en introduisant la notion de coordonnées barycentriques sur un triangle. Ceci est d'autant plus intéressant puisque, au moyen de ces coordonnées, nous pouvons facilement évaluer des intégrales à une et deux dimensions sur un triangle.

3.7.3 Evaluation des intégrales sur un triangle

Principe de la méthode des éléments finis

La MEF est une méthode numérique approchée de résolution des équations aux dérivées partielles. Elle est applicable en :

Mécanique

Hydraulique

Electricité

Géotechnique

Bio mécanique

A titre d'exemple le calcul d'une surface A d'une géométrie quelconque revient à évaluer l'intégrale suivant :

$$A = \int_x \int_y dx dy$$

Si la géométrie est très complexe on décompose (maillage) la géométrie en petits éléments (éléments finis de surface connue).

$$A = \sum A_i$$

Tel que A_i petits éléments de surface connue sur chaque élément, on applique le même principe initialement appliqué pour évaluer la surface totale.

$$A_i = \int_{x_i} \int_{y_i} dA_i$$

Chapitre III Méthodes des éléments finis

On applique le même principe de calcul de surface

On fait l'assemblage ou la sommation : $A = \sum A_i$

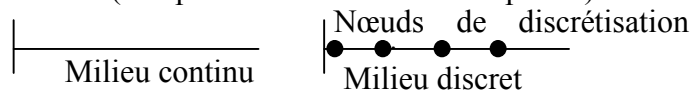
Cette idée est généralisée par les ingénieurs pour le calcul des moments d'inerties, pression, centre de torsion etc.

Pour déterminer la mécanique des solides (déformables) on doit déterminer :

$3U_i$, $6\sigma_{ij}$ et $6\varepsilon_{ij}$ en utilisant les 15 équations aux E.D.P qu'on peut les regrouper dans le P.D.V.

Discrétisation

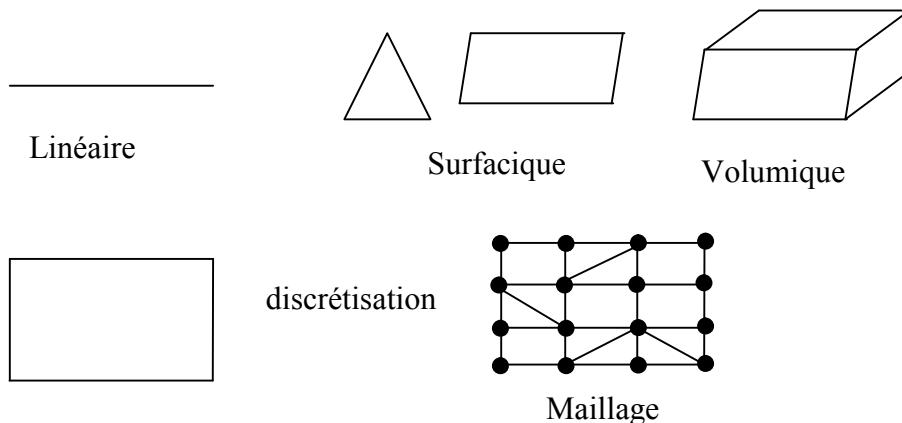
On appelle discrétisation le passage du milieu continu (constitué d'une infinité de points) vers un milieu discret (composé d'un nombre fini de points).



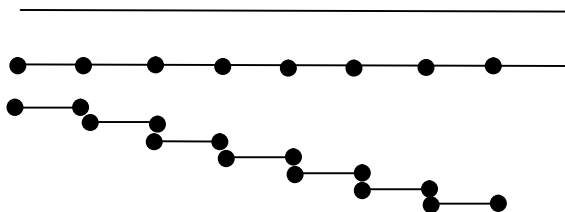
Maillage

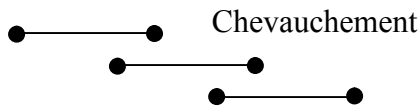
C'est la construction d'éléments (maille, morceau, sous domaine,...) à partir des nœuds de discrétisation. Ces éléments ont une géométrie simple qui peut être linéaire, surfacique ou volumique tel que on doit y avoir que

$$\sum l_i = l, \sum A_i = A, \sum V_i = V$$



Remarque : Dans l'opération de maillage (discrétisation) il faut éviter les chevauchements et les vides.





Les ingrédients nécessaires pour un calcul par MEF.

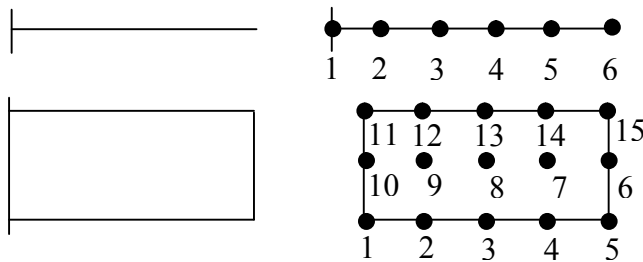
- **Repère global (x,y,z)**

Dans lequel on résout le système final pour déterminer les composantes des déplacements (u,v,w). C'est dans ce système qu'on repère les nœuds.

Tableau des coordonnées

Nœud	x	y	z
1	x1	y1	z1
2	x2	y2	z2
3	.	.	.
.	.	.	.

Numérotation globale des nœuds

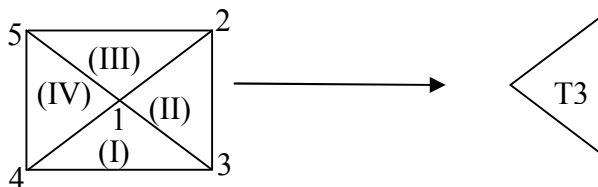


- **Numérotation des éléments**

Elle est fonction du type d'élément et du nombre de nœuds par élément. En fonction de cette numérotation on construit le tableau de connectivité (en évitant le chevauchement et les vides).

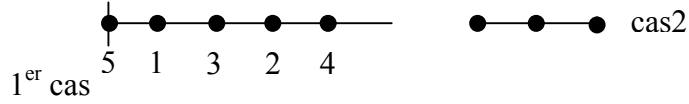
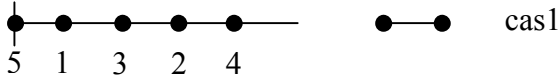
éléments	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4	Nœud 5
1					
2					
3					
4					

Exemple n°3.2



éléments	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
1	4	3	1
2	3	2	1
3	2	5	1
4	5	4	1

Exemple n°3.3



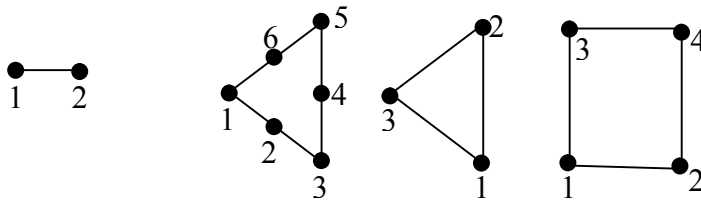
éléments	Nœud 1	Nœud 2
1	5	1
2	4	2
3	1	3
4	3	2

2^{ème} cas

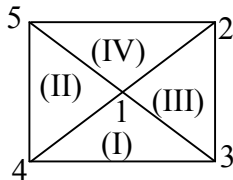
éléments	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
1	5	1	3
2	3	2	4

Tableau de connectivité

Numérotation locale des nœuds (au niveau élémentaire)

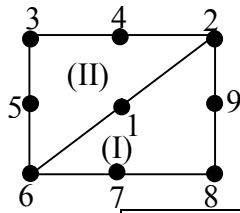


Exemple 3.4



éléments	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
1	4	3	1
2	1	4	5
3	1	2	3
4	1	5	2

Exemple 3.5



éléments	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4	Nœud 5	Nœud 6
1	2	4	3	5	6	1
2	1	2	9	8	7	6

Repère local (élémentaire)

Pour écrire la loi de comportement (relations contraintes déformations)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

3.8 Conclusion

La méthode des éléments finis permet de résoudre certains problèmes ayant une structure complexe en utilisant une approximation nodale. Il existe deux méthodes d'interpolation nodale l'une de Lagrange et l'autre de Hermite. Pour déterminer les paramètres de l'interpolation, α_i , il faut coïncider les valeurs approchées aux valeurs exactes aux n points, appelés nœuds.

La fonction approchée est atteinte par la multiplication des polynômes d'interpolation par les paramètres de l'interpolation.

CHAPITRE IV

Méthode des volumes finis

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de mettre à la portée du lecteur l'utilisation de la méthode des volumes finis en écoulements stationnaire et instationnaire. Nous l'entamerons par une illustration de la technique des volumes finis lors de la résolution d'une équation aux dérivées partielles en régime permanent et, comment faire le traitement de la source lorsque cette dernière fait partie de l'équation. Nous élucidons également cette technique lorsque le régime est non permanent en mettant en détaille quatre exercices à une dimension et à deux dimensions en régimes stationnaire et instationnaire. Nous aborderons par la suite, le cas des écoulements permanents et non permanent à 1 et à 2 dimensions et, enfin, l'application de cette technique à la partie diffusion à 1, 2 et 3 Dimension(s) en mettant le détaille de la solution de deux exercices à la disposition des lecteurs.

Le concept de la méthode des volumes finis est lié directement au principe de conservation qui est continu dans les équations de transport qu'on à résoudre.

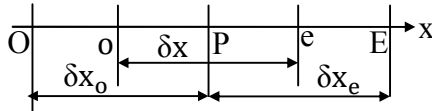
Le domaine dans lequel on cherche la solution est divisé en certains nombre finis de volume de contrôle.

L'équation à résoudre est intégrée sur chaque volume de contrôle, des interpolations sont nécessaires pour évaluer les quantités sur les faces des volumes de contrôle.

La technique de volume de contrôle présente le principe de conservation au niveau des cellules est global.

4.2 Illustration de la technique des volumes finis

En une dimension : premier degré

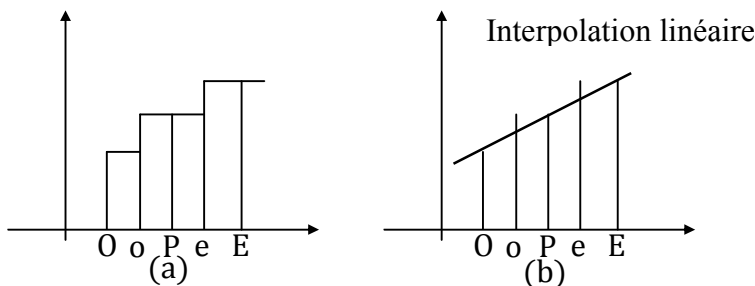
$$\frac{d}{dx} \left(v \frac{du}{dx} \right) + s = 0$$


Δx. 1.1

$$\int_o^e \left(\frac{d}{dx} \left(v \frac{du}{dx} \right) + s \right) dx = 0 \Rightarrow \left(v \frac{du}{dx} \right)_o^e + \int_o^e s dx$$

S est le terme source.

On doit nécessairement faire des hypothèses sur l'approximation des quantités sur les faces du volume de contrôle.



L'approximation qui donne le profil en escalier suppose que la valeur de la quantité ou de la variable pour une cellule donnée ne change pas jusqu'au volume de contrôle suivant.

Cette équation peut être intéressante dans certains cas et non valable lorsque on a évalué le gradient ($\frac{du}{dx}$ non défini).

$$v_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - v_o \frac{u_P - u_O}{\delta x_o} + \bar{S} \cdot \Delta x$$

\bar{S} c'est la moyenne.

Posons $a_E = \frac{v_e}{\delta x_e}$ et $a_O = \frac{v_o}{\delta x_o}$

$$v_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - v_o \frac{u_P - u_O}{\delta x_o} + \bar{S} \cdot \Delta x = a_E(u_E - u_P) - a_O(u_P - u_O) + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow a_E u_P + a_O u_P = a_E u_E + a_O u_O + \bar{S} \cdot \Delta x \Rightarrow (a_E + a_O) u_P = a_E u_E + a_O u_O + \bar{S} \cdot \Delta x$$

Posons $a_P = a_E + a_O$ et $b = \bar{S} \cdot \Delta x$ nous aurons : $a_P u_P = a_E u_E + a_O u_O + b$

L'équation finale indique que chaque nœud doit être lié à ses voisins immédiats (à côté).

On déduit :

$$a_P u_P = \sum_{i=1}^i (a_i u_i) + b$$

$$a_P = \sum a_i$$

Le i indique le nombre de voisins

Les schémas d'interpolation pour le même code peuvent être différents pour les différentes variables.

Dans le processus de calcul on doit nécessairement vérifier qu'on a une solution physiquement réaliste.

4.3 Traitement de la source

Pour des raisons de stabilité on adopte une forme linéaire pour la source.

$$S = S_c + S_p u_P$$

$$S_c > 0, S_p < 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad \bar{S} = \bar{S}_u + \bar{S}_p \cdot \phi_P$$

$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^i (a_i \phi_i) + \bar{S} \Rightarrow (a_P - \bar{S}_p) \phi_P = \sum_{i=1}^i (a_i \phi_i) + \bar{S}_u \Rightarrow a'_P \phi_P = \sum_{i=1}^i (a_i \phi_i) + \bar{S}_u$$

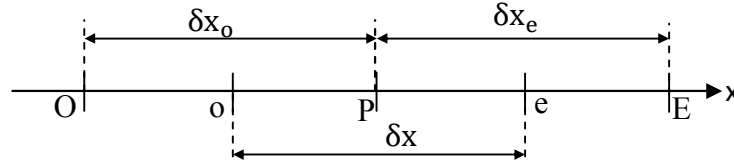
$a'_P > a_P$ car $S_p < 0$

Cette forme linéaire de la source permet de stabiliser la solution car on a augmenté le coefficient multipliant la variable U_p .

Le système d'équation à résoudre peut s'écrire sous la forme matricielle avec des éléments non nuls le long des diagonales principales. La résolution de ce système se fait par l'algorithme de Tomas (TDMA).

4.4 Cas des problèmes instationnaires

Toujours on travaille à une dimension (1D).



$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx dt \Rightarrow \rho (u_p^1 - u_p^0) \Delta X = \int_t^{t+\Delta t} \left(v_e \frac{u_E - u_p}{\delta x_e} - v_o \frac{u_p - u_o}{\delta x_o} \right) dt$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{g}_p dt = (f \mathbf{g}_p^1 + (1-f) \mathbf{g}_p^0) \Delta t$$

$$\rho (u_p^1 - u_p^0) \frac{\Delta X}{\Delta t} = f \left(v_e \frac{u_E^1 - u_p^1}{\delta x_e} - v_o \frac{u_p^1 - u_o^1}{\delta x_o} \right) + (1-f) \left(v_e \frac{u_E^0 - u_p^0}{\delta x_e} - v_o \frac{u_p^0 - u_o^0}{\delta x_o} \right)$$

$$a_E = \frac{v_e}{\delta x_e}; a_O = \frac{v_o}{\delta x_o}; a_P^0 = \rho \frac{\Delta X}{\Delta t}; a_P = a_E + a_O$$

$$(u_p^1 - u_p^0) a_P^0 = f (a_E (u_E^1 - u_p^1) - a_O (u_p^1 - u_o^1)) + (1-f) (a_E (u_E^0 - u_p^0) - a_O (u_p^0 - u_o^0))$$

$$(u_p^1 - u_p^0) a_P^0 = a_E (f u_E^1 + (1-f) u_E^0) + a_O (f u_p^1 + (1-f) u_o^0) + (-(1-f) a_E - (1-f) a_O) u_p^0$$

$$u_p^1 a_P^0 = a_E (f u_E^1 + (1-f) u_E^0) + a_O (f u_p^1 + (1-f) u_o^0) + (a_P^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_O) u_p^0$$

$$u_p^1 a_P^0 = a_E (f u_E^1 + (1-f) u_E^0) + a_O (f u_p^1 + (1-f) u_o^0) + (f a_E + f a_O + a_P^0 - (a_E + a_O)) u_p^0$$

$$a_P = f a_E + f a_O + a_P^0$$

$$u_p^1 a_P^0 = a_E (f u_E^1 + (1-f) u_E^0) + a_O (f u_p^1 + (1-f) u_o^0) + (a_P - (a_E + a_O)) u_p^0$$

Résultat final

$$a_P u_p^1 = a_E [f u_E^1 + (1-f) u_E^0] + a_O [f u_p^1 + (1-f) u_o^0] + [a_P - (1-f) a_E - (1-f) a_O] u_p^0$$

4.5 Cas particuliers

a) $f=0$ dans ce cas on maintient l'ancien valeur dans l'intervalle Δt

$$u_P^1 a_P^0 = a_E [0 \cdot u_E^1 + (1 - 0)u_E^0] + a_O [0 \cdot u_P^1 + (1 - 0)u_O^0] + [a_P^0 - (1 - 0)a_E - (1 - 0)a_O]u_P^0$$

$$a_P u_P^1 = a_E u_E^0 + a_O u_O^0 + [a_P^0 - a_E - a_O]u_P^0$$

La nouvelle valeur à l'instant $t + \Delta t$ est obtenue directement (de façon explicite) en fonction des valeurs de l'instant précédent (on a une solution explicite).

b) $f=1$, l'équation finale devient :

$$u_P^1 a_P^0 = a_E (u_E^1 + (1 - 1)u_E^0) + a_O (u_P^1 + (1 - 1)u_O^0) + (a_P^0 - (1 - 1)a_E - (1 - 1)a_O)u_P^0$$

$$u_P^1 a_P^0 = a_E (u_E^1 + 0u_E^0) + a_O (u_P^1 + 0u_O^0) + (a_P^0 - 0a_E - 0a_O)u_P^0$$

$$u_P^1 a_P^0 = a_E u_E^1 + a_O u_P^1 + a_P^0 u_P^0$$

Cette solution est de type implicite (elle est plus compliquée et plus stable).

On remarque que lorsqu'on fait tendre $\Delta t \rightarrow \infty \Rightarrow a_P^0 = \rho \frac{\Delta X}{\Delta t} \rightarrow 0$ et on se trouve alors au cas stationnaire.

c) $f=0,5$ on suppose dans ce cas une variation linéaire à priori ce schéma parait le plus stable, c'est le schéma numérique de Crank –Nicholson.

$$u_P^1 a_P^0 = a_E \left(\frac{1}{2} u_E^1 + \frac{1}{2} u_E^0 \right) + a_O \left(\frac{1}{2} u_P^1 + \frac{1}{2} u_O^0 \right) + \left(a_P^0 - \frac{1}{2} a_E - \frac{1}{2} a_O \right) u_P^0$$

$$u_P^1 a_P^0 = \frac{1}{2} a_E (u_E^1 + u_E^0) + a_O \frac{1}{2} (u_P^1 + u_O^0) + \left(a_P^0 - \frac{1}{2} a_E - \frac{1}{2} a_O \right) u_P^0$$

La solution médiane est beaucoup implicite mais il ne pose pas le problème de stabilité.

$$a_P^0 = \rho \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

$$a_P^0 > a_E + a_O \Rightarrow \rho \frac{\Delta X}{\Delta t} > \frac{v_e}{\delta x_e} + \frac{v_o}{\delta x_o}$$

$$\frac{v_e}{\delta x_e} + \frac{v_o}{\delta x_o} = 2 \frac{v}{\Delta X}$$

$$\rho \frac{\Delta X}{\Delta t} > 2 \frac{v}{\Delta X} \Rightarrow \Delta t < \rho \frac{\Delta X^2}{2v}$$

Exercice n°4.1

Écoulement stationnaire à 1D

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + S = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(v \frac{du}{dx} \right) + s = 0$$

$$\int_o^e \left(\frac{d}{dx} \left(v \frac{du}{dx} \right) + s \right) dx = 0 \Rightarrow \left(v \frac{du}{dx} \right)_o^e + \int_o^e s dx$$

$$v_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - v_o \frac{u_P - u_O}{\delta x_o} + \bar{S} \cdot \Delta x$$

\bar{S} c'est la moyenne.

Posons $a_E = \frac{v_e}{\delta x_e}$ et $a_O = \frac{v_o}{\delta x_o}$

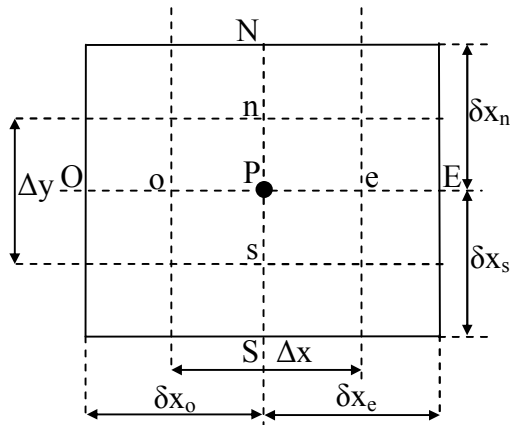
$$v_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - v_o \frac{u_P - u_O}{\delta x_o} + \bar{S} \cdot \Delta x = a_E(u_E - u_P) - a_O(u_P - u_O) + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow a_E u_P + a_O u_P = a_E u_E + a_O u_O + \bar{S} \cdot \Delta x \Rightarrow (a_E + a_O) u_P = a_E u_E + a_O u_O + \bar{S} \cdot \Delta x$$

Posons $a_P = a_E + a_O$ et $b = \bar{S} \cdot \Delta x$ nous aurons : $a_P u_P = a_E u_E + a_O u_O + b$

Écoulement stationnaire à 2D

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S = 0$$



$$\int_o^e \int_s^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S \right) dx dy = 0$$

$$\int_s^n v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_o^e dy + \int_o^e v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s^n dx + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0$$

$$\int_s^n \left(v_e \left(\frac{u_E - u_P}{\delta x_e} \right) - v_o \left(\frac{u_P - u_O}{\delta x_o} \right) \right) dy + \int_0^e \left(v_n \left(\frac{u_N - u_P}{\delta x_n} \right) - v_s \left(\frac{u_P - u_S}{\delta x_s} \right) \right) dx + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0$$

$$\left(v_e \left(\frac{u_E - u_P}{\delta x_e} \right) - v_o \left(\frac{u_P - u_O}{\delta x_o} \right) \right) \Delta y + \left(v_n \left(\frac{u_N - u_P}{\delta x_n} \right) - v_s \left(\frac{u_P - u_S}{\delta x_s} \right) \right) \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0$$

$$\begin{aligned} u_P \left(\frac{v_e}{\delta x_e} + \frac{v_o}{\delta x_o} \right) \Delta y + \left(\frac{v_n}{\delta y_n} + \frac{v_s}{\delta y_s} \right) \Delta x \\ = u_E \left(\frac{v_e}{\delta x_e} \right) \Delta y + u_O \left(\frac{v_o}{\delta x_o} \right) \Delta y + u_N \left(\frac{v_n}{\delta x_n} \right) \Delta x + u_S \left(\frac{v_s}{\delta x_s} \right) \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

$$a_E = \left(\frac{v_e}{\delta x_e} \right) \Delta y, a_O = \left(\frac{v_o}{\delta x_o} \right) \Delta y, a_N = \left(\frac{v_n}{\delta y_n} \right) \Delta x, a_S = \left(\frac{v_s}{\delta x_s} \right) \Delta x, a_P = a_E + a_O + a_S + a_N$$

$$a_P u_P = \sum_{i=(E,O,N,S)}^i a_i u_i + \bar{S} \Delta x \Delta y$$

$$\bar{S} = S_C + S_P u_P$$

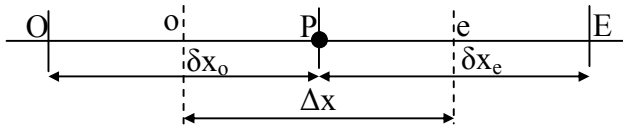
Enfin on est arrivé à une équation algébrique linéaire. Cette dernière hypothèse augmente la stabilité.

$$(a_P + a_P) u_P = \sum_{i=(E,O,N,S)}^i a_i u_i + S_C \Rightarrow u_P = \frac{\sum_{i=(E,O,N,S)}^i a_i u_i + S_C}{(a_P + a_P)}$$

Exercice n°4.2

Écoulement instationnaire à 1D (avec le terme source)

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right) + S = 0$$



$$\int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \rho \frac{\partial f}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt dx + \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e S dt dx$$

$$\rho (f_P^1 - f_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} v \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_o^e dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e (S_u + S_P f_P) dt dx$$

$$\rho (f_P^1 - f_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} (S_u + S_P f_P) \Delta x dt$$

Schéma explicite

$$\rho(f_P^1 - f_P^0)\Delta x = \left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) \Delta t + (S_u + S_P f_P) \Delta t \Delta x$$

$$\rho(f_P^1 - f_P^0)\Delta x = \frac{v_e}{\delta x_e} f_E^0 \Delta t + \frac{v_o}{\delta x_o} f_O^0 \Delta t - \left(\frac{v_e}{\delta x_e} + \frac{v_o}{\delta x_o} + S_P \Delta x \right) f_P^0 \Delta t + S_u \Delta t \Delta x$$

$$\rho \frac{\Delta X}{\Delta t} f_P^1 = - \left(\frac{v_e}{\delta x_e} + \frac{v_o}{\delta x_o} + S_P \Delta x - \rho \Delta x \right) f_P^0 + \frac{v_e}{\delta x_e} f_E^0 + \frac{v_o}{\delta x_o} f_O^0 + S_u \Delta x$$

$$a_E = \frac{v_e}{\delta x_e}; a_O = \frac{v_o}{\delta x_o}; a_P^0 = \rho \frac{\Delta X}{\Delta t}; a_P = a_E + a_O$$

$$a_P^0 f_P^1 = - (a_P - a_P^0 + S_P \Delta x) f_P^0 + a_E f_E^0 + a_O f_O^0 + S_u \Delta x$$

Schéma implicite

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) dt = \left(v_e \frac{f_E^1 - f_P^1}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^1 - f_O^1}{\delta x_o} \right) \Delta t$$

$$\rho(f_P^1 - f_P^0)\Delta x = \left(v_e \frac{f_E^1 - f_P^1}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^1 - f_O^1}{\delta x_o} \right) \Delta t + (S_u + S_P f_P) \Delta t \Delta x + (S_u + S_P f_P^1) \Delta t \Delta x$$

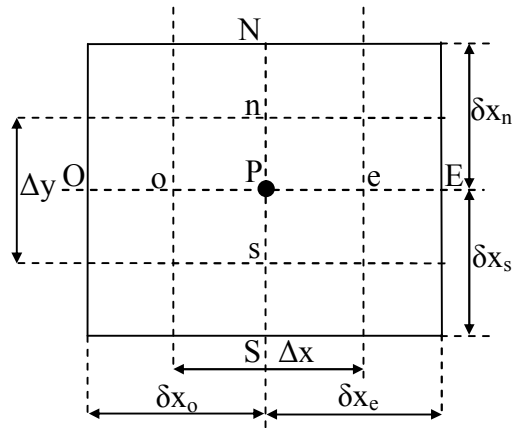
$$a_P^0 f_P^1 = a_E f_E^1 + a_O f_O^1 - a_E f_P^1 + (S_u + S_P f_P^1) \Delta x + a_P^0 f_P^0$$

$$(a_P^0 + a_E - S_P \Delta x) f_P^1 = a_E f_E^1 + a_O f_O^1 + S_u \Delta x + a_P^0 f_P^0$$

Ecoulement instationnaire à 2D (avec le terme source)

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial f}{\partial y} \right) + S = 0$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \int_s^n \rho \frac{\partial f}{\partial t} dt dx dy = \int_o^e \left[\int_s^n [\rho f_P dy]_t^{t+\Delta t} \right] dx = \rho (f_P^1 - f_P^0) \Delta x \Delta y$$



$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \right] dt dy &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \left[\left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right)_o^e \right] dy \right] dt \\
 \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \left[\left(v \frac{\partial f}{\partial x} \right)_o^e \right] dy \right] dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_s^n \left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) dy \right] dt \\
 &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) \Delta y \right] dt \\
 &= \int_t^{t+\Delta t} f dt = (0,3f_P^1 + 0,7f_P^0) \Delta t \\
 \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) \Delta y \right] dt &= 0,3 \left(v_e \frac{f_E^1 - f_P^1}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^1 - f_O^1}{\delta x_o} \right) \Delta y \Delta t + 0,7 \left(v_e \frac{f_E^0 - f_P^0}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^0 - f_O^0}{\delta x_o} \right) \Delta y \Delta t \\
 \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \left[\int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \right] dt dx &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \left[\left(v \frac{\partial f}{\partial y} \right)_s^n \right] dx \right] dt \\
 \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \left[\left(v \frac{\partial f}{\partial y} \right)_s^n \right] dx \right] dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_o^e \left(v_n \frac{f_N - f_P}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P - f_S}{\delta y_s} \right) dx \right] dt \\
 &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(v_n \frac{f_N - f_P}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P - f_S}{\delta y_s} \right) \Delta x \right] dt \\
 \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(v_e \frac{f_E - f_P}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P - f_O}{\delta x_o} \right) \Delta y \right] dt &= 0,3 \left(v_n \frac{f_N^1 - f_P^1}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P^1 - f_S^1}{\delta y_s} \right) \Delta x \Delta t + 0,7 \left(v_s \frac{f_N^0 - f_P^0}{\delta y_s} - v_o \frac{f_P^0 - f_S^0}{\delta y_s} \right) \Delta x \Delta t \\
 \int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \int_s^n S dt dx dy &= \int_t^{t+\Delta t} (\bar{S} \Delta x \Delta y) dt
 \end{aligned}$$

Sachant que S a la forme linéaire.

$$\bar{S} = (S_u + S_p f_p)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_o^e \int_s^n S dt dx dy = \int_t^{t+\Delta t} (S_u + S_p f_p) \Delta x \Delta y dt = [0,3(S_u + S_p f_p^1) + 0,7(S_u + S_p f_p^0)] \Delta x \Delta y \Delta t$$

$$\begin{aligned}
 & \rho(f_P^1 - f_P^0)\Delta x\Delta y \\
 &= 0,3 \left(v_e \frac{f_E^1 - f_P^1}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^1 - f_O^1}{\delta x_o} \right) \Delta y \Delta t + 0,7 \left(v_e \frac{f_E^0 - f_P^0}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^0 - f_O^0}{\delta x_o} \right) \Delta y \Delta t \\
 &+ 0,3 \left(v_n \frac{f_N^1 - f_P^1}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P^1 - f_S^1}{\delta y_s} \right) \Delta x \Delta t + 0,7 \left(v_n \frac{f_N^0 - f_P^0}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P^0 - f_S^0}{\delta y_s} \right) \Delta x \Delta t \\
 &+ [0,3(S_u + S_P f_P^1) + 0,7(S_u + S_P f_P^0)] \Delta x \Delta y \Delta t
 \end{aligned}$$

Divisons les deux membres par Δt on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \rho(f_P^1 - f_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \\
 &= 0,3 \left(v_e \frac{f_E^1 - f_P^1}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^1 - f_O^1}{\delta x_o} \right) \Delta y + 0,7 \left(v_e \frac{f_E^0 - f_P^0}{\delta x_e} - v_o \frac{f_P^0 - f_O^0}{\delta x_o} \right) \Delta y \\
 &+ 0,3 \left(v_n \frac{f_N^1 - f_P^1}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P^1 - f_S^1}{\delta y_s} \right) \Delta x + 0,7 \left(v_n \frac{f_N^0 - f_P^0}{\delta y_n} - v_s \frac{f_P^0 - f_S^0}{\delta y_s} \right) \Delta x \\
 &+ [0,3(S_u + S_P f_P^1) - 0,7(S_u + S_P f_P^0)] \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

on pose

$$\frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} = a_P^0; \quad a_E = \frac{v_e}{\delta x_e} \Delta y; \quad a_O = \frac{v_o}{\delta x_o} \Delta y; \quad a_S = \frac{v_s}{\delta y_s} \Delta x; \quad a_N = \frac{v_n}{\delta y_n} \Delta x; \quad a_P = a_E + a_O + a_S + a_N$$

$$\begin{aligned}
 f_P^1 [a_P^0 + 0,3(a_E + a_O + a_S + a_N)] &= 0,3[a_E f_E^1 + a_O f_O^1 + a_N f_N^1 + a_S f_S^1] + [a_P^0 + (-0,7(a_E + a_O + a_S + a_N))] f_P^0 \\
 &+ 0,7[a_E f_E^0 + a_O f_O^0 + a_N f_N^0 + a_S f_S^0] + [0,3(S_u + S_P f_P^1) + 0,7(S_u + S_P f_P^0)] \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_P^1 [a_P^0 + 0,3a_P - 0,3S_P \Delta x \Delta y] &= 0,3[a_E f_E^1 + a_O f_O^1 + a_N f_N^1 + a_S f_S^1] + 0,7[a_E f_E^0 + a_O f_O^0 + a_N f_N^0 + a_S f_S^0] \\
 &+ f_P^0 [a_P^0 - 0,7a_P + 0,7S_P \Delta x \Delta y] + S_u \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

4.6 Application de la technique à la partie diffusion (1D)

Considérons un problème de transport de la variable ϕ par diffusion.

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S_\phi = 0 \quad (4.1)$$

La clé de la méthode des volumes finis réside dans l'application du théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski, qui permet de changer une intégrale de volume en intégrale de surface.

$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) dv + \int_{CV} S_\phi dv = \int_A n(\Gamma \text{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dv = 0 \quad (4.2)$$

A est la surface enveloppant le volume de contrôle

n est le vecteur unitaire.

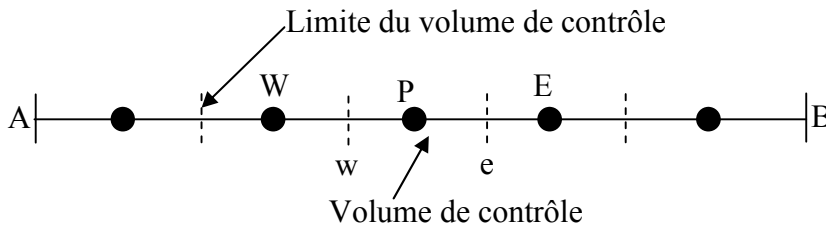
L'équation (4.1) en 1D prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.3)$$

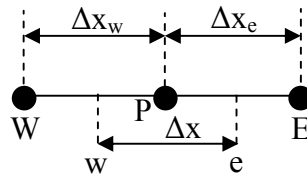
Avec Γ est le coefficient de diffusion et S est le terme source.

Première étape de résolution : le maillage

La valeur de ϕ aux frontières A et B est maintenue constante (conditions de Dirichlet). La première étape dans cette méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volume de contrôle. L'opération consiste à subdiviser le domaine de calcul (Ligne AB) en un certain nombre de segments (Volume de contrôle). Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment correspondant. Il est commode de s'arranger pour que les facettes des nœuds de frontières coïncident exactement avec les frontières du domaine de calcul. Dans le cas de la figure ci-dessous le domaine de calcul est divisé en cinq volumes de contrôles.



Système de notation



Deuxième étape de résolution : la discrétisation

L'intégration de l'équation (4.3) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dv + \int_{\Delta V} S dv = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V \quad (4.4)$$

Interprétation (principe de conservation)

$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e$: Flux diffusif de ϕ sortant de la facette e

$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w$: Flux diffusif de ϕ entrant par la facette w

$\bar{S} \Delta V$: Production de ϕ dans le volume de contrôle

Dans le cas général où le coefficient de diffusivité n'est pas constant ses valeurs sur les facettes "w" et "e" du volume de contrôle CV seront exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux P, W et E par :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E - \Gamma_P}{2} ; \Gamma_w = \frac{\Gamma_P - \Gamma_W}{2} \quad (4.5)$$

Pour simplifier l'expression, nous allons utiliser un maillage uniforme $\square \Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x$ et appliquer un schéma centré d'ordre deux pour remplacer les dérivés premières sur les facettes du volume de contrôle.

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}\right) \quad (4.6)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}\right) \quad (4.7)$$

Généralement le terme source S peut aussi dépendre de la fonction ϕ elle-même. Dans une telle situation nous écrirons :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_P\phi_P \quad (4.8)$$

En substituant les équations (5), (6), (7), (8) et (9) dans (4), nous obtenons :

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}\right) + (S_u + S_P\phi_P) = 0 \quad (4.9)$$

Et après arrangement :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \quad (4.10)$$

Avec

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} A_w, a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} A_e, a_P = a_W + a_E - S_P \quad (4.11)$$

Troisième étape : Solution des équations

L'équation (11) sera construite pour tous les volumes de contrôles du domaine de calcul. En vue d'incorporer les conditions aux limites, un traitement spécial sera réservé aux volumes de frontières. Le système d'équations résultant sera un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'inconnus que d'équations. La distribution discrète de la variable ϕ sur le domaine de calcul peut être obtenue par inversion de la matrice du système d'équations. Cependant, cette méthode n'est quasiment jamais utilisée pour la simple raison qu'elle est très coûteuse en mémoire de stockage. Les méthodes itératives (par exemple : Gauss-Seidel) sont plus efficaces dans ce cas. Dans un calcul itératif il faut aussi définir un critère de convergence pour pouvoir arrêter les calculs à un moment donné.

4.7 Critère de convergence

A partir de l'équation (10) nous pouvons écrire une expression du résidu pour estimer la satisfaction éventuelle de l'équation :

$$R = \sum_{\text{l'ensemble des volumes}} |a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u - a_P\phi_P|$$

R représente le résidu des calculs et possède par conséquent l'unité de l'équation différentielle intégrée. Dans notre cas c'est le flux de chaleur (Joule par second). Pour avoir une idée précise sur la convergence des calculs, il faut contrôler la valeur normalisée du résidu $R/F \leq \epsilon$ où F représente le flux total.

1.8 Applications

Soit l'équation de Fourier régissant le transfert de chaleur par conduction en une seule dimension.

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$$

Avec λ la conductivité thermique et T la température.

Le terme source peut être remplacé par exemple par la production de chaleur engendrée par le passage d'un courant électrique.

Exercice n°4.3

Considérons la conduction thermique dans un fil isolé de 0,5 m de long, où les deux bouts sont maintenus à une température constante 100°C et 500°C respectivement. Soit : $\lambda=1000$ W/m/K et $A=0.01$ m². Les nœuds frontières nécessitent un traitement spécial pour l'implémentation des conditions aux limites. Le coefficient de la face considérée est annulé (coupant la liaison avec la frontière) et le flux à travers cette frontière est introduit sous forme de source S_u ou S_p .

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dv + \int_{\Delta V} S dv = \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V$$

Le coefficient de la conductivité thermique est constant $\lambda_e = \lambda_w = 1000$ W/M/K
La surface $A=0.01$ m² est également constante.

$$\begin{aligned} \lambda_e A_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta X} \right) - \lambda_w A_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta X} \right) + (S_u + S_p T_P) &= 0 \quad (9) \\ \lambda_e A_e \frac{T_E}{\Delta X} - \lambda_e A_e \frac{T_P}{\Delta X} - \lambda_w A_w \frac{T_P}{\Delta X} + \lambda_w A_w \frac{T_W}{\Delta X} + (S_u + S_p T_P) &= 0 \\ \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w T_W + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e T_E - \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e T_P - \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w T_P + S_p T_P + S_u &= 0 \\ \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w T_W + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e T_E + S_u &= \left(\frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e + \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w - S_p \right) T_P \\ \left(\frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e - S_p \right) T_P &= \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w T_W + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e T_E + S_u \\ a_p T_P &= a_w T_W + a_e T_E + S_u \end{aligned}$$

Avec

$$a_w = \frac{\lambda_w}{\Delta x} A_w, a_e = \frac{\lambda_e}{\Delta x} A_e, a_p = a_w + a_e - S_p$$

Posons $a_p = a_e + a_o$ et $b = \bar{S} \cdot \Delta x$ nous aurons : $a_p u_p = a_e u_e + a_o u_o + b$

L'équation finale indique que chaque nœud doit être lié à ces voisins immédiats (à côté).

On déduit :

$$\begin{aligned} a_p u_p &= \sum_{i=1}^i (a_i u_i) + b \\ a_p &= \sum a_i \end{aligned}$$

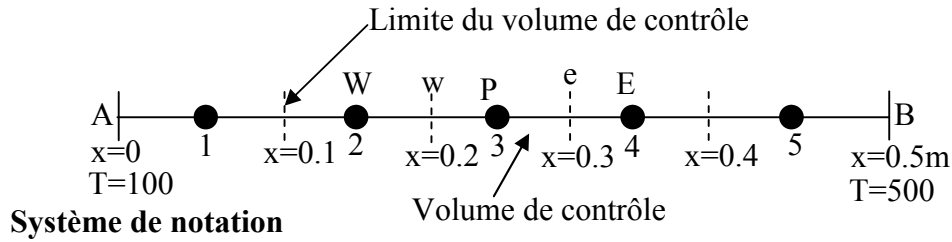
i indique le nombre de voisins

Solution

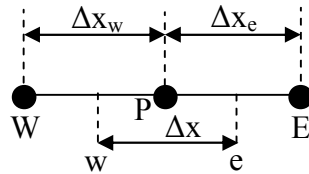
Pour cet exercice le terme source $S=0$ et par conséquent l'équation devient :

$$\left(\frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e \right) T_P = \frac{\lambda_w}{\Delta X} A_w T_W + \frac{\lambda_e}{\Delta X} A_e T_E$$

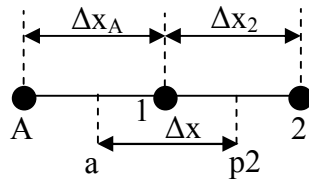
$$\begin{aligned} a_p T_P &= a_w T_W + a_e T_E \\ A_w &= \frac{\lambda_w}{\Delta x} A_w, a_e = \frac{\lambda_e}{\Delta x} A_e, a_p = a_w + a_e \end{aligned}$$



Système de notation



Le premier volume de contrôle



Le premier volume de contrôle

$$a_1 T_1 = a_A T_A + a_2 T_2$$

$$\Delta x_A = 0,05 \text{ et } \Delta x_2 = 0,1 ; A_A = A_2 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$\frac{\lambda_A}{\Delta x_A} = \frac{1000}{0,05} = 20000$$

$$\frac{\lambda_2}{\Delta x_2} = \frac{1000}{0,1} = 10000$$

$$a_A = \frac{\lambda_A}{\Delta x_A} A_A = 20000 \times 0,01 = 200$$

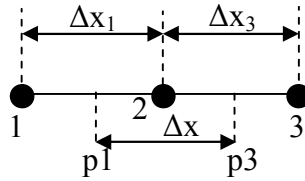
$$a_2 = \frac{\lambda_2}{\Delta x_2} A_2 = 10000 \times 0,01 = 100$$

$$a_1 = a_A + a_2 = 200 + 100 = 300$$

$$300 T_1 = 200 T_A + 100 T_2$$

$$300 T_1 - 100 T_2 + 0 T_3 + 0 T_4 + 0 T_5 = 200 T_A \quad (1)$$

Le second volume de contrôle



$$\Delta x_1 = \Delta x_3 = 0.1 ; A_1 = A_3 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$\frac{\lambda_1}{\Delta x_1} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$\frac{\lambda_3}{\Delta x_3} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\Delta x_1} A_1 = 10000 \times 0.01 = 100$$

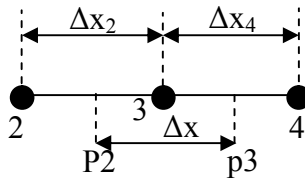
$$a_3 = \frac{\lambda_3}{\Delta x_3} A_3 = 10000 \times 0.01 = 100$$

$$a_2 = a_1 + a_3 = 100 + 100 = 200$$

$$200T_2 = 100T_1 + 100T_3$$

$$-100T_2 + 200T_2 - 100T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 0 \quad (2)$$

Le troisième volume de contrôle



$$\Delta x_2 = \Delta x_4 = 0.1 ; A_2 = A_4 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$\frac{\lambda_2}{\Delta x_2} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$\frac{\lambda_4}{\Delta x_4} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{\Delta x_2} A_2 = 10000 \times 0.01 = 100$$

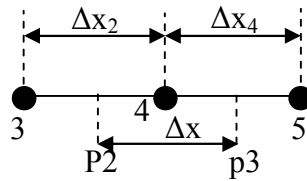
$$a_4 = \frac{\lambda_4}{\Delta x_4} A_4 = 10000 \times 0.01 = 100$$

$$a_3 = a_2 + a_4 = 100 + 100 = 200$$

$$200T_3 = 100T_2 + 100T_4$$

$$0T_1 - 100T_2 + 200T_3 - 100T_4 + 0T_5 = 0 \quad (3)$$

Le quatrième volume de contrôle



$$\Delta x_3 = \Delta x_5 = 0.1 ; A_3 = A_5 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$\frac{\lambda_3}{\Delta x_3} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$\frac{\lambda_5}{\Delta x_5} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$a_3 = \frac{\lambda_3}{\Delta x_3} A_3 = 10000 \times 0.01 = 100$$

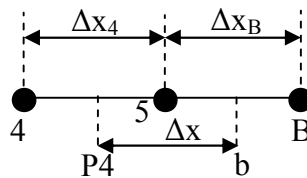
$$a_5 = \frac{\lambda_5}{\Delta x_5} A_5 = 10000 \times 0.01 = 100$$

$$a_4 = a_3 + a_5 = 100 + 100 = 200$$

$$200T_4 = 100T_3 + 100T_5$$

$$0T_1 + 0T_2 - 100T_3 + 200T_4 - 100T_5 = 0 \quad (4)$$

Le cinquième volume de contrôle



$$\Delta x_4 = 0.1 \text{ et } \Delta x_B = 0.05 ; A_4 = A_B = 0,01 \text{ m}^2$$

$$\frac{\lambda_4}{\Delta x_4} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$\frac{\lambda_B}{\Delta x_B} = \frac{1000}{0.05} = 20000$$

$$a_4 = \frac{\lambda_4}{\Delta x_4} A_4 = 10000 \times 0.01 = 100$$

$$a_B = \frac{\lambda_B}{\Delta x_B} A_B = 20000 \times 0.01 = 200$$

$$a_5 = a_4 + a_B = 100 + 200 = 300$$

$$300T_5 = 100T_4 + 200T_B$$

$$0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 100T_4 + 300T_5 = 200T_B \quad (5)$$

On peut écrire le système suivant :

$$\begin{cases} 300T_1 - 100T_2 + 0T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 200T_A & (1) \\ -100T_2 + 200T_2 - 100T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 0 & (2) \\ 0T_1 - 100T_2 + 200T_3 - 100T_4 + 0T_5 = 0 & (3) \\ 0T_1 + 0T_2 - 100T_3 + 200T_4 - 100T_5 = 0 & (4) \\ 0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 100T_4 + 300T_5 = 200T_B & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300T_1 - 100T_2 + 0T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 20000 & (1) \\ -100T_2 + 200T_2 - 100T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 0 & (2) \\ 0T_1 - 100T_2 + 200T_3 - 100T_4 + 0T_5 = 0 & (3) \\ 0T_1 + 0T_2 - 100T_3 + 200T_4 - 100T_5 = 0 & (4) \\ 0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 100T_4 + 300T_5 = 100000 & (5) \end{cases}$$

C'est un système linéaire de cinq équations à 5 inconnus, on peut utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour obtenir sa solution (voir les programmes du chapitre I).

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{pmatrix}$$

Exercice n°4.4

Considérons une plaque d'épaisseur $L = 2$ cm, et de conductivité thermique constante $\lambda=0.5$ W/m/K, assez haute et large pour qu'on puisse considérer que le transfert de chaleur existe seulement dans le sens de l'épaisseur. Les deux faces de la plaque sont maintenues à des températures constantes de 100°C et 200°C . Supposons qu'il existe une génération de chaleur interne uniforme de $q = 1000$ kW/m³.

Calculer la distribution de la température à travers l'épaisseur de la plaque. Comparer le résultat avec la solution analytique :

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2\lambda}(L - x) \right] x + T_A$$

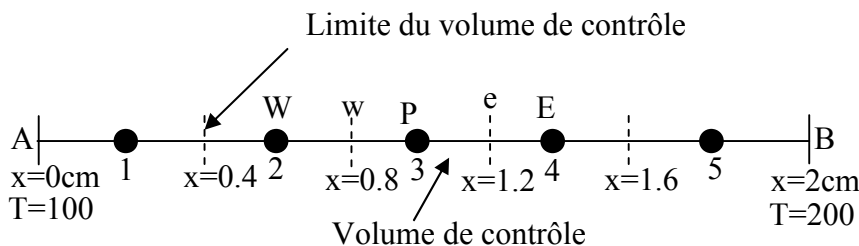
Solution

Dans ce cas le terme source n'est pas négligeable

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_w}{\Delta x} + \frac{\lambda_e}{\Delta x} - S_p \right) T_P &= \frac{\lambda_w}{\Delta x} T_W + \frac{\lambda_e}{\Delta x} T_E + S_u \\ a_P T_P &= a_W T_W + a_E T_E + S_u \end{aligned}$$

Avec

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x}, a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}, a_P = a_W + a_E - S_p$$



Posons $a_P = a_E + a_O$ et $b = \bar{S} \cdot \Delta x$ nous aurons : $a_P u_P = a_E u_E + a_O u_O + b$

L'équation finale indique que chaque nœud doit être lié à ces voisins immédiats (à côté).

On déduit :

$$a_P u_P = \sum_{i=1}^i (a_i u_i) + b$$

$$a_P = \sum a_i$$

i indique le nombre de voisins

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x, \quad \bar{S} = 1000 \text{kw/m}^3 = 10^6 \text{w/m}^3$$

$$\Delta x_A = 0.02 \text{ et } \Delta x_2 = 0.04$$

$$a_A = \frac{\lambda_A}{\Delta x_A} = \frac{0.5}{0.002} = 250$$

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{\Delta x_2} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x = 1000000 \times 0.004 = 400$$

$$a_1 = a_A + a_2 = 250 + 125 = 375$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b$$

$$375 T_1 = 250 T_A + 125 T_2 + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$375 T_1 - 125 T_2 + 0 T_3 + 0 T_4 + 0 T_5 = 250 \times 100 + 1000000 \times 0.004$$

$$375 T_1 - 125 T_2 + 0 T_3 + 0 T_4 + 0 T_5 = 25000 + 4000$$

$$375 T_1 - 125 T_2 + 0 T_3 + 0 T_4 + 0 T_5 = 29000 \quad (1)$$

$$\Delta x_1 = 0.04 \text{ et } \Delta x_3 = 0.04$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\Delta x_1} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$a_3 = \frac{\lambda_3}{\Delta x_3} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x = 1000000 \times 0.004 = 4000$$

$$a_1 = a_A + a_2 = 125 + 125 = 250$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b$$

$$250 T_2 = 125 T_1 + 125 T_3 + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$375T_1 - 125T_2 + 125T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 1000000 \times 0.004$$

$$-125T_1 + 250T_2 - 125T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 4000 \quad (2)$$

$\Delta x_2 = 0.04$ et $\Delta x_4 = 0.04$

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{\Delta x_2} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$a_4 = \frac{\lambda_4}{\Delta x_4} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x = 1000000 \times 0.004 = 4000$$

$$a_3 = a_2 + a_4 = 125 + 125 = 250$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b$$

$$250T_3 = 125T_2 + 125T_4 + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$0T_1 - 125T_2 + 250T_3 - 125T_4 + 0T_5 = 1000000 \times 0.004$$

$$-0T_1 - 125T_2 + 250T_3 - 125T_4 + 0T_5 = 4000 \quad (3)$$

$\Delta x_3 = 0.04$ et $\Delta x_5 = 0.04$

$$a_3 = \frac{\lambda_3}{\Delta x_3} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$a_5 = \frac{\lambda_5}{\Delta x_5} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x = 1000000 \times 0.004 = 4000$$

$$a_4 = a_3 + a_5 = 125 + 125 = 250$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b$$

$$250T_4 = 125T_3 + 125T_5 + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$0T_1 + 0T_2 - 125T_3 + 250T_4 + 125T_5 = 1000000 \times 0.004$$

$$T_1 + 0T_2 - 125T_3 + 250T_4 + 125T_5 = 4000 \quad (4)$$

$\Delta x_4 = 0.04$ et $\Delta x_B = 0.04$

$$a_4 = \frac{\lambda_4}{\Delta x_4} = \frac{0.5}{0.004} = 125$$

$$a_B = \frac{\lambda_5}{\Delta x_5} = \frac{0.5}{0.002} = 250$$

$$b = \bar{S} \cdot \Delta x = 1000000 \times 0.004 = 4000$$

$$a_5 = a_4 + a_B = 125 + 250 = 375$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b$$

$$375T_5 = 125T_4 + 250T_B + \bar{S} \cdot \Delta x$$

$$0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 125T_4 + 375T_5 = 250T_B + 1000000 \times 0.004$$

$$0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 125T_4 + 375T_5 = 54000 \quad (5)$$

$$\begin{cases} 375T_1 - 125T_2 + 0T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 29000 & (1) \\ -125T_1 + 250T_2 - 125T_3 + 0T_4 + 0T_5 = 4000 & (2) \\ -0T_1 - 125T_2 + 250T_3 - 125T_4 + 0T_5 = 4000 & (3) \\ T_1 + 0T_2 - 125T_3 + 250T_4 + 125T_5 = 4000 & (4) \\ 0T_1 + 0T_2 + 0T_3 - 125T_4 + 375T_5 = 54000 & (5) \end{cases}$$

La solution de ce système donne les résultats suivants :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{Bmatrix}$$

4.9 Problème de diffusion à deux dimensions (2D)

La méthode utilisée précédemment peut facilement être appliquée au cas de transport à deux dimensions. Soit l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dy} \right) + S = 0$$

L'intégration de l'équation précédente autour du volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{\Delta v} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dx dy + \int_{\Delta v} \frac{d}{dy} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dy} \right) dx dy + S \int_{\Delta v} S_\phi dV = 0$$

En utilisant les égalités suivantes :

$A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, nous obtenons :

$$\left[\Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e - \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w \right] \Delta y + \left[\Gamma_n \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_n - \Gamma_s \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_s \right] \Delta x + \bar{S} \Delta V$$

Comme précédemment cette équation traduit un principe de conservation. En utilisant les mêmes approximations centrées utilisées dans le paragraphe précédent nous posons :

$$\text{Le flux à travers la face Ouest} = \Gamma_w \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w = \Gamma_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x^-}$$

$$\text{Le flux à travers la face Est} = \Gamma_e \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \Gamma_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x^+}$$

$$\text{Le flux à travers la face nord} = \Gamma_n \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_n = \Gamma_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y^+}$$

Le flux à travers la face sud = $\Gamma_s \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_s = \Gamma_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y^-}$

Et l'équation précédente devient :

$$\Gamma_e \Delta y \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x^+} - \Gamma_w \Delta y \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} + \Gamma_n \Delta x \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y} - \Gamma_s \Delta x \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y} + \bar{S} \Delta V$$

En linéarisant le terme source comme précédemment et en arrangeant l'équation, nous obtenons la forme suivante:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \Delta y ; a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \Delta y ; a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta y} \Delta x ; a_N = \frac{\Gamma_n}{\Delta y} \Delta x ; a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$$

4.10 Problème de diffusion à trois dimensions (3D)

Dans le cas d'un problème 3D, chaque nœud P a six nœuds voisins notés W, E, S, N, B et T. et les six facettes du volume de contrôle sont notées w, e, s, n, b et t respectivement. L'intégration et la discrétisation de l'équation (1) donne :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \Delta y \Delta z ; a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \Delta y \Delta z ; a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta y} \Delta x \Delta z ; a_N = \frac{\Gamma_n}{\Delta y} \Delta x \Delta z ; a_T = \frac{\Gamma_t}{\Delta z} \Delta x \Delta y ; a_B = \frac{\Gamma_b}{\Delta z} \Delta x \Delta y ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$$

4.11 Résumé du problème de diffusion

L'équation de diffusion prend la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum (a_{nb} \phi_{nb}) + S_U$$

Où le terme de la sommation indique la somme des nœuds voisins (nb), le terme source est toujours linéarisé suivant la formule : $S_U = S_P \phi_P$, et le coefficient du nœud P est exprimé suivant la relation:

$$a_P = \sum a_{nb} - S_P$$

Les conditions aux limites sont implémentées par élimination du coefficient de la face considérée et introduction du flux dans les termes sources S_u et S_P .

3.12 Conclusion

La méthode des volumes finis est une méthode efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles, elle exploite des approximations d'intégrales. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient pas compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois hyperboliques de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

La méthode des volumes finis est parmi les méthodes qui peuvent donner à l'utilisateur un autre moyen d'estimer certaines quantités.

CHAPITRE V

Modélisation & simulation des écoulements

5.1 Introduction

Dans le cinquième chapitre, nous étudierons trois volets à savoir : le calcul des courbes de remous et de décrue, la vidange d'un barrage ou/et d'un réservoir dans l'atmosphère ainsi que l'écoulement par transvasement entre deux barrages ou deux réservoirs et, enfin, la simulation des écoulements dans les réseaux d'alimentation en eau potable (A.E.P) et d'assainissement.

Le premier volet a pour objectif de mettre en exergue les équations de base permettant de calculer et de réaliser la construction des courbes de remous et de décrue, en écoulement graduellement varié, dans les cas où la pente du canal est positive, négative et nulle d'une part et d'autre part élaborer les programmes nécessaires pour rendre aisé leurs calculs.

Le second volet permettra de renforcer les connaissances des lecteurs vis-à-vis les équations régissant les écoulements d'un barrage ou d'un réservoir vers l'atmosphère ainsi que les écoulements par transvasement entre deux réservoirs (barrages). Il permettra également de réaliser quelques algorithmes permettant de calculer les temps de remplissage ou de vidange, d'un volume d'eau, à travers un orifice ou un ajutage placé au fond des réservoirs de formes géométriques différentes.

Le troisième volet sera consacré, quant à lui, à la simulation de l'écoulement de l'eau dans les réseaux maillés et ramifiés en se basant sur les programmes utilisant la méthodes et les formules les plus couramment utilisées pour calculer les débits, les vitesses, les pertes de charge, les cotes piézométriques, les pressions au sol ainsi que d'autre paramètres. Puis nous examinerons l'écoulement dans les réseaux d'assainissement pour différentes sections transversales et terminerons ce volet par l'élaboration de quelques programmes que nous les jugerons utiles pour comprendre clairement la simulation de cet écoulement.

5.2 Calcul des courbes de remous et de décrue

5.2.1 Pour une pente positive ($i > 0$), l'équation de l'écoulement non permanent est donnée par :

$$i dx = \frac{1 - P_c}{1 - \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2} dh \text{ avec } Q' = \omega C \sqrt{R_H} \sqrt{i}$$

Où i est la pente du canal ; P_c est le paramètre de cinétique ; Q est le débit ; ω la section mouillée ; C est le coefficient de Chézy ; R_H est le rayon hydraulique ; Q' est le débit fictif en régime non uniforme mais dans les conditions uniformes et la surface libre a une pente égale à la pente du fond.

$$dx = \frac{a}{i} \left[1 - \frac{1 - j_{moy}}{1 - z^2} \right] dz \dots\dots\dots (5.1)$$

L'intégration de l'équation (5.1) dans les limites du tronçon donne :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{i} \left[1 - \frac{1 - j_{\text{moy}}}{1 - z^2} \right] dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{i} \left[dz - (1 - j_{\text{moy}}) \frac{dz}{1 - z^2} \right]$$

D'où

Si z_1 et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i} (z_2 - z_1) - \frac{a}{i} (1 - j_{\text{moy}}) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + z_2}{1 - z_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z_1}{1 - z_1} \right] \dots \dots \dots (5.2)$$

Si z_1 et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i} (z_2 - z_1) - \frac{a}{i} (1 - j_{\text{moy}}) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{z_2 + 1}{z_2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{z_1 + 1}{z_1 - 1} \right] \dots \dots \dots (5.3)$$

Exercice n° 1

Un canal trapézoïdal de largeur $b=20$ m, de coefficient d'écartement du talus $m=1,25$, le coefficient de rugosité $n=0,020$ de pente $i=0,001$ évacue un débit $Q=60$ m³/s. Le canal comporte une vanne qui provoque l'élévation du niveau en amont jusqu'à la profondeur de 2,0 m.

- a) Déterminer la distance jusqu'à la section du canal dont la profondeur est égale à 1,7m ?
- b) Réaliser le calcul de la courbe de remous et la construire ?

Solution

a) détermination de la distance jusqu'à la profondeur $h=1,7$ m

1- Calcul de la profondeur normale, h_0 ,

Nous avons effectué le calcul de la profondeur normale dans le canal par le biais d'un programme que nous avons élaboré.

La valeur de h_0 obtenue est : $h_0=1,4599=1,46$ m

2- Calcul de la profondeur critique, h_{cr} ,

Ensuite, en calculant la profondeur critique à l'aide de la formule d'Agroskine

$$k = 3 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = 3 \sqrt{\frac{1,1 \times 60^2}{9,81 \times 20^2}} = 0,972 \text{ m} ; \sigma_{cr} = \frac{mk}{b} = \frac{1,25 \times 0,972}{20} = 0,06$$

en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k \left(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0,105 \sigma_{cr}^2 \right) = 0,972 \left(1 - \frac{0,06}{3} + 0,105 \times 0,06^2 \right) = 0,95 \text{ m} .$$

La comparaison des valeurs obtenues de h_0 , h_{cr} et de la profondeur donnée 2,0 m près de l'ouvrage indique que le problème traite la courbe de remous M_1 .

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs $h_1=2$ m et $h_2=1,7$ m a été effectué par un programme et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau (5.1).

Les équations utilisées pour réaliser les calculs sont les suivantes :

si z_1 et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i} (z_2 - z_1) - \frac{a}{i} (1 - j_{\text{moy}}) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + z_2}{1 - z_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z_1}{1 - z_1} \right]$$

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

si z_1 et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - J_{\text{moy}}) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{z_2 + 1}{z_2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{z_1 + 1}{z_1 - 1} \right]$$

Tableau (5.1) : Résultats des calculs donnant la distance séparant les deux profondeurs

sections	h (m)	ω (m ²)	χ (m)	R (m)	B (m)	C (m ^{0,5} /s)	K
1-1	1,7	37,61	25,44	1,478	24,25	53,366	2440,52
2-2	2,0	45	26,40	1,70	25	54,647	3210,36

Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
1,286	1,039	0,277	0,282	0,729	490,81
1,692	0,679	0,288			

2- Pour réaliser la courbe de remous, on doit incrémenter la différence de profondeur entre la profondeur normale obtenue $h_0=1,5$ et celle $h= 2$ m en cinq (5) incréments, les résultats de calcul obtenus sont représentés dans le tableau (5.2).

Tableau (5.2) : résultats de calcul de la courbe de remous

sections	h_1 (m)	h_2 (m)	x (m)	distance cumulée (m)
1	1,5	1,6	493,74	493,74
2	1,6	1,7	250,10	743,84
3	1,7	1,8	188,52	932,36
4	1,8	1,9	160,16	1092,52
5	1,9	2,0	144,02	1236,58

Sur la figure (5.1), nous représentons l'allure de la courbe de remous obtenue.

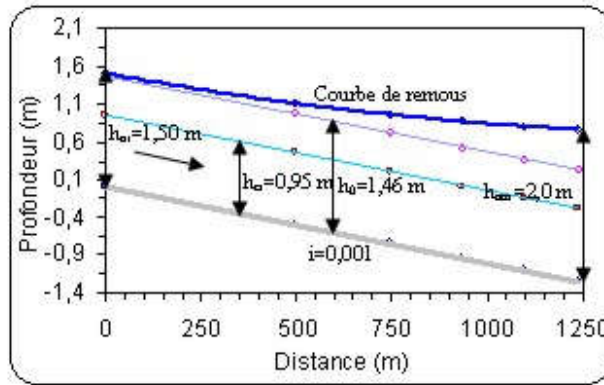


Fig.5.1 : Courbe de remous de type M_1 obtenue après réalisation des calculs

Nous avons basé sur le programme (5.1) pour réaliser les calculs afin de tracer la courbe de remous de l'exercice n°1.

Programme (5.1) : Calcul des courbes de remous et de décrue lorsque la pente du canal est positive

<pre> Real h(5000000),w(5000000),x(5000000) Real R(5000000),C(5000000),Q(5000000) Real hcr(5000000),Bcr(5000000),wcr(5000000) Real A(5000000) write (*,*)'programme de résolution du problème du premier type en écoulement graduellement varié' write (*,*)'cas d'un canal à section transversale trapézoïdale' write (*,*)'introduire la valeur du débit Q0=' read (*,*)Q0 write (*,*)'introduire la pente longitudinale du canal p=' read (*,*)p write (*,*)'introduire le coefficient de rugosité en=' read (*,*)en write (*,*)'introduire l'écartement du talus em =' read (*,*)em write (*,*)'introduire la largeur du canal b=' read (*,*)b write (*,*)'introduire une valeur initiale quelconque de la profondeur hi=' read (*,*)hi write (*,*)'introduire une valeur initiale quelconque hcrj=' read (*,*)hcrj write (*,*)'introduire le coefficient de Coriolis alpha=' read (*,*)alpha write (*,*)'introduire la profondeur initiale h1=' read (*,*)h1 write (*,*)'introduire la profondeur finale h2=' read (*,*)h2 write (*,*)'introduire l'accélération de la pesanteur g=' </pre>	<pre> else FI1=0.50*LOG((1+z1)/(1-z1)) end if if (Z2.GT.1) then FI2=0.50*LOG((z2+1)/(z2-1)) else FI2=0.50*LOG((1+Z2)/(1-Z2)) end if dji1=(alpha*p*B1*c1**2)/(9.81*x1) dji2=(alpha*p*B2*c2**2)/(9.81*x2) djimoy=(dji1+dji2)/2 a1=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a1/p)*((Z2-Z1)-(1-djimoy)*(FI2- FI1)) WRITE (*,*)'X3=',X3 endif if (h0.GT.h1.AND.hcr1.LT.h2) then write (*,*)'c'est une courbe de remous de type M2' AK0= Q0/SQRT(p) w1=b*h1+em*h1**2 X1=b+2*h1*SQRT(1+em**2) R1=w1/X1 B1=b+2*em*h1 c1=(1/en)*R1**(0.166666666) AK1=w1*c1*SQRT(R1) w2=b*h2+em*h2**2 X2=b+2*h2*SQRT(1+em**2) R2=w2/X2 B2=b+2*em*h2 </pre>
--	--

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

<pre> read (*,*)g i=0 h(i)=hi 5 w(i)=b*h(i)+em*h(i)**2 X(i)=b+2*h(i)*SQRT(1+em**2) R(i)=w(i)/x(i) c(i)=(1/en)*(R(i)**(0.1666666666)) Q(i)=w(i)*c(i)*SQRT(R(i)*p) if (ABS(q(i)-Q0).GT.0.001) then IF (Q(i).GT.Q0) THEN h(i+1)=h(i)-0.00001 END IF IF (Q(i).LT.Q0) THEN h(i+1)=h(i)+0.00001 END IF i=i+1 GOTO 5 end if h0=h(i) write (*,*)h0,Q(i) write (*,*)'calcul de la profondeur critique dans le canal' j=0 hcr(j)=hcrj 10 Bcr(j)=b+2*hcr(j)*SQRT(1+em**2) wcr(j)=b*hcr(j)+em*(hcr(j)**2) A(j)=(wcr(j)**3)/Bcr(j) d=(alpha*Q0**2)/9.81 if (ABS(A(j)-d).GT.0.001) then if (A(j).GT.d) then hcr(j+1)=hcr(j)-0.000001 ELSE hcr(j+1)=hcr(j)+0.000001 end if j=j+1 GO TO 10 end if hcr1=hcr(j) write (*,*)hcr1 write (*,*)'détermination du type de la courbe de remous' IF (hcr1.LT.h0) THEN write (*,*)'la courbe est de type M' if (h0.LT.h1.AND.h0.LT.h2) then write (*,*)'c"est une courbe de remous de type M1' AK0= Q0/SQRT(p) w1=b*h1+em*h1**2 X1=b+2*h1*SQRT(1+em**2) R1=w1/X1 B1=b+2*em*h1 c1=(1/en)*R1**(0.1666666666) AK1=w1*c1*SQRT(R1) </pre>	<pre> c2=(1/en)*R2**(0.1666666666) AK2=w2*c2*SQRT(R2) Z1=AK1/AK0 Z2=AK2/AK0 if (Z1.GT.1) then FI1=0.50*LOG((z1+1)/(z1-1)) else FI1=0.50*LOG((1+z1)/(1-z1)) end if if (Z2.GT.1) then FI2=0.50*LOG((z2+1)/(z2-1)) else FI2=0.50*LOG((1+Z2)/(1-Z2)) end if dji1=(alpha*p*B1*c1**2)/(9.81*x1) dji2=(alpha*p*B2*c2**2)/(9.81*x2) djimoy=(dji1+dji2)/2 a1=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a1/p)*((Z2-Z1)-(1-djimoy))*(FI2- FI1) write (*,*)'X3=',X3 endif if (hcr1.GT.h1.AND.hcr1.GT.h2) then write (*,*)'c"est une courbe de remous de type M3' endif else write (*,*)'la courbe est de type S2' AK0= Q0/SQRT(p) w1=b*h1+em*h1**2 X1=b+2*h1*SQRT(1+em**2) R1=w1/X1 B1=b+2*em*h1 c1=(1/en)*R1**(0.1666666666) AK1=w1*c1*SQRT(R1) w2=b*h2+em*h2**2 X2=b+2*h2*SQRT(1+em**2) R2=w2/X2 B2=b+2*em*h2 c2=(1/en)*R2**(0.1666666666) AK2=w2*c2*SQRT(R2) Z1=AK1/AK0 Z2=AK2/AK0 if (Z1.GT.1) then FI1=0.50*LOG((z1+1)/(z1-1)) else FI1=0.50*LOG((1+z1)/(1-z1)) end if if (Z2.GT.1) then FI2=0.50*LOG((z2+1)/(z2-1)) </pre>
--	--

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

<pre> w2=b*h2+em*h2**2 X2=b+2*h2*SQRT(1+em**2) R2=w2/X2 B2=b+2*em*h2 c2=(1/en)*R2**(0.166666666) AK2=w2*c2*SQRT(R2) Z1=AK1/AK0 Z2=AK2/AK0 if (Z1.GT.1) then FI1=0.50*LOG((z1+1)/(z1-1)) else FI2=0.50*LOG((1+Z2)/(1-Z2)) </pre>	<pre> end if dji1=(alpha*p*B1*c1**2)/(9.81*x1) dji2=(alpha*p*B2*c2**2)/(9.81*x2) djmoy=(dji1+dji2)/2 a1=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a1/p)*((Z2-Z1)-(1-djmoy)*(FI2- FI1)) write (*,*)'X3=',X3 end if stop end </pre>
---	---

5.2.2 Pour une pente négative ($i < 0$), l'équation de l'écoulement non permanent pour une pente négative est donnée par l'expression suivante :

$$|i|dx = -\frac{1 - P_C}{1 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2} dh \text{ avec } Q' = \omega C \sqrt{R} \sqrt{|i|}$$

$$dx = \frac{a}{|i|} \left[\frac{1 - j_{moy} \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 + \left(\frac{K_0}{K}\right)^2} \right] dz = \frac{a}{|i|} \left[\frac{1 - j_{moy} \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^2}} \right] dz = \frac{a}{|i|} \left[\frac{z^2 - j_{moy}}{z^2 + 1} \right] dz = \frac{a}{|i|} \left[\frac{z^2 + 1 - 1 - j_{moy}}{z^2 + 1} \right] dz$$

$$dx = \frac{a}{|i|} \left[-1 + \frac{1 + j_{moy}}{z^2 + 1} \right] dz = \frac{a}{|i|} \left[-dz + (1 + j_{moy}) \frac{dz}{z^2 + 1} \right]$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{|i|} \left[-dz + (1 + j_{moy}) \frac{dz}{z^2 + 1} \right] = \frac{a}{|i|} \left[-(z_2 - z_1) + (1 + j_{moy})(\arctg(z_2) - \arctg(z_1)) \right]$$

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{|i|} \left[-(z_2 - z_1) + (1 + j_{moy})(\arctg(z_2) - \arctg(z_1)) \right] \dots \dots \dots (5.4)$$

Pour résoudre les problèmes concernant les courbes de remous et de décrue, lorsque la pente du canal est négative (contre pente), nous pourrions utiliser le programme (5.2).

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Programme (5.2) : Calcul des courbes de remous et de décrue lorsque la pente du canal est négative

<pre> Real h(25000000), w(25000000), x(25000000) Real R(25000000), C(25000000), Q(25000000) Real K0, K1, K2, J1, J2, Jmoy write (*, *)'introduire la valeur du débit Q0=' read (*, *)Q0 write (*, *)'introduire la valeur de la pente p=' read (*, *)p write (*, *)'introduire la valeur de la largeur du canal b=' read (*, *)b write (*, *)'introduire la valeur de la rugosité en=' read (*, *)en write (*, *)'introduire la valeur du coefficient de Coriolis alpha=' read (*, *)alpha write (*, *)'introduire la valeur de la pesanteur g=' read (*, *)g write (*, *)'introduire une valeur initiale de la profondeur normale hi=' read (*, *)hi write (*, *)'introduire la valeur de la première profondeur d'eau h1=' read (*, *)h1 write (*, *)'introduire la valeur de la deuxième profondeur d'eau h2=' read (*, *)h2 hcr=((alpha*Q0**2)/(g*b**2))**(0.3333333) write (*, *)'la valeur de hcr=', hcr if (p.LT.0) then WRITE (*, *)'c'est une courbe de remous de type A' </pre>	<pre> K0=Q0/SQRT(ABS(p)) w1=b*h1 x1=b+2*h1 RH1=w1/X1 B1=b C1=(1/en)*RH1**(0.1666667) K1=w1*c1*SQRT(RH1) w2=b*h2 x2=b+2*h2 RH2=w2/X2 B2=b C2=(1/en)*RH2**(0.1666667) K2=w2*c2*SQRT(RH2) Z1=K1/K0 Z2=K2/K0 j1=(alpha*ABS(p)*B1*C1**2)/(g*X1) j2=(alpha*ABS(p)*B2*C2**2)/(g*X2) Jmoy=(J1+J2)/2 a=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a/ABS(P))*(-(Z2-Z1)+(1+jmoy)*(atan(z2)- atan(z1))) write (*, *)'la distance qui sépare les deux profondeurs est x3=', x3 else write (*, *)'chercher d'autre programme pour les pentes positives et nulles' end if stop end </pre>
---	---

5.2.3 Pour une pente nulle (i=0):

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}\right)} = \frac{0 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{(1 - P_c)} \Rightarrow dx = \frac{(1 - P_c)}{-\frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}} dh = \frac{(1 - P_c)}{-\frac{Q^2}{K^2}} dh$$

On multiplie les deux parties par i' qui est une valeur arbitraire positive ($i' > 0$), on obtient :

$$i' dx = \frac{(1 - P_c)}{-\frac{Q^2}{K^2}} i' dh = \frac{(1 - P_c)}{-\frac{Q^2}{i' K^2}} dh$$

On pose $Q' = \sqrt{i'} K = \omega C \sqrt{R i'}$ on obtient : $i' dx = \frac{(1 - P_c)}{-\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2} dh$

$$dx = \frac{a}{i} \left[\frac{1 - j_{\text{moy}} \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{-\left(\frac{K_0}{K}\right)^2} \right] dz = \frac{a}{i} \left[\frac{1 - j_{\text{moy}} \frac{1}{z^2}}{-\frac{1}{z^2}} \right] dz = \frac{a}{i} [j_{\text{moy}} - z^2] dz$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{i} [j_{\text{moy}} - z^2] dz = \frac{a}{i} \left[j_{\text{moy}}(z_2 - z_1) - \frac{1}{3}(z_2^3 - z_1^3) \right]$$

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i} \left[j_{\text{moy}}(z_2 - z_1) - \frac{1}{3}(z_2^3 - z_1^3) \right] \dots\dots\dots (5.5)$$

Les équations (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5) nous permettent de calculer la longueur de la courbe de remous ou de décrue pour l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques.

Exercice n° 2

Déterminer la longueur de la courbe de remous dans un canal rectangulaire horizontal aux données suivantes : le débit $Q=30 \text{ m}^3/\text{s}$, la largeur $b=10 \text{ m}$, le coefficient de rugosité $n=0,020$, la profondeur initiale $h_1=0,5 \text{ m}$ et la profondeur finale $h_2=0,8 \text{ m}$.

Solution

On trouve la profondeur critique :

$$h_{\text{cr}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,0 \times 30^2}{9,81 \times 20^2}} = 0,97 \text{ m}$$

Comme les deux profondeurs données sont inférieures à h_{cr} , les conditions sont réelles (nous avons la courbe de remous).

Prenons une valeur positive arbitraire de la pente i_0 . Par exemple, $i_0=0,0001$. Alors :

$$K_0 = Q/\sqrt{i_0} = 30,0/\sqrt{0,0001} = 3000 \text{ m}^3/\text{s}.$$

L'équation de calcul de la distance entre les deux profondeurs est la suivante :

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i} \left[j_{\text{moy}}(z_2 - z_1) - \frac{1}{3}(z_2^3 - z_1^3) \right]$$

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs $h_1=0,5 \text{ m}$ et $h_2=0,8 \text{ m}$ a été effectué par un programme et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau (5.3).

Tableau (5.3) : résultats de calcul de la distance qui sépare les deux profondeurs

h (m)	ω (m ²)	χ (m)	R (m)	C (m ^{0,5} /s)	K (m ³ /s)	z	z ³
0,5	5,0	11	0,45	43,84	147,79	0,049265	0,0001196
0,8	8,0	11,6	0,69	47,00	312,23	0,104078	0,0011274

Suite du tableau (5.3)

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

j	j _{moy}	a	x (m)
0,017813	0,018611	5,47311	37,45
0,019499			

On peut aisément obtenir la solution de ce problème en se basant sur le programme (5.3).

Programme (5.3) : Calcul des courbes de remous et de décrue lorsque la pente du canal est nulle

<pre> Real h(25000000), w(25000000), x(25000000), Real R(25000000),C(25000000),Q(25000000) Real K0,K1,K2,J1,J2,Jmoy write (*,*)'introduire la valeur du débit Q0=' read (*,*)Q0 write (*,*)'introduire la valeur de la pente p=' read (*,*)p write (*,*)'introduire une valeur arbitraire très petite de la pente p1=' read (*,*)p1 write (*,*)'introduire la valeur de la largeur du canal b=' read (*,*)b write (*,*)'introduire la valeur de la rugosité en=' read (*,*)en write (*,*)'introduire la valeur du coefficient de coriolis alpha=' read (*,*)alpha write (*,*)'introduire la valeur de la pesanteur g=' read (*,*)g write (*,*)'introduire la valeur de la première profondeur d'eau h1=' read (*,*)h1 write (*,*)'introduire la valeur de la deuxième profondeur d'eau h2=' read (*,*)h2 hcr=((alpha*Q0**2)/(g*b**2))*0.3333333 write (*,*)'la valeur de hcr=',hcr if (h1.LT.hcr.AND.h2.LT.hcr) then write (*,*)'la courbe de remous existe' end if if (p.EQ.0) then WRITE (*,*)'c'est une courbe de remous de type H' if (h1.Gt.h2) then write (*,*)'c'est une courbe de type H2' K0=Q0/SQRT(p1) w1=b*h1 x1=b+2*h1 RH1=w1/X1 B1=b </pre>	<pre> B2=b C2=(1/en)*RH2**0.1666667 K2=w2*c2*SQRT(RH2) Z1=K1/K0 Z2=K2/K0 j1=(alpha*p1*B1*C1**2)/(g*X1) j2=(alpha*p1*B2*C2**2)/(g*X2) Jmoy=(J1+J2)/2 a=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a/P1)*(j1*(Z2-Z1)-(1/3)*(z2**3-z1**3)) write (*,*)'la distance qui sépare les deux profondeurs est x3=',x3 else write (*,*)'c'est une courbe de type H3' K0=Q0/SQRT(p1) w1=b*h1 x1=b+2*h1 RH1=w1/X1 B1=b C1=(1/en)*RH1**0.1666667 K1=w1*c1*SQRT(RH1) w2=b*h2 x2=b+2*h2 RH2=w2/X2 B2=b C2=(1/en)*RH2**0.1666667 K2=w2*c2*SQRT(RH2) Z1=K1/K0 Z2=K2/K0 j1=(alpha*p1*B1*C1**2)/(g*X1) j2=(alpha*p1*B2*C2**2)/(g*X2) Jmoy=(J1+J2)/2 a=(h2-h1)/(Z2-Z1) x3=(a/P1)*(j1*(Z2-Z1)-(0.33333333)*(z2**3)- z1**3)) write (*,*)a,w1,w2,x1,x2,RH1,RH2,c1,c2 write (*,*)k1,k2,z1,z2,j1,j2,jmoy write (*,*)'la distance qui sépare les deux profondeurs est x3=',x3 end if </pre>
---	---

$C1=(1/en)*RH1**(0.1666667)$ $K1=w1*c1*SQRT(RH1)$ $w2=b*h2$ $x2=b+2*h2$ $RH2=w2/X2$	end if stop end
---	-----------------------

5.3 Ecoulement à charge variable

5.3.1 Ecoulement à l'air libre à partir d'un réservoir prismatique à travers un orifice sans arrivée d'eau

Soit le réservoir représenté sur la fig.5.2, Le volume évacué par l'orifice est égal au volume diminue dans le réservoir.

$$dV_1 = dV_2$$

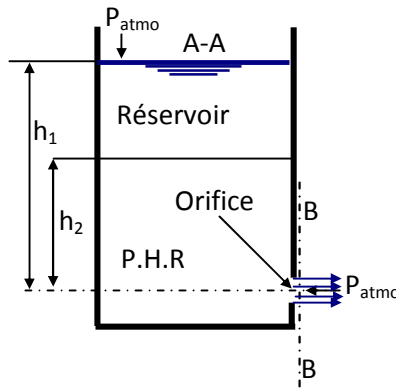


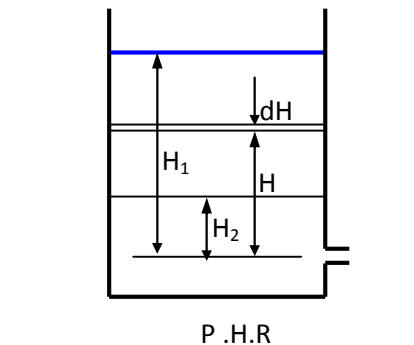
Fig.5.2 : Ecoulement par orifice à charge variable

$$\mu\omega\sqrt{2gh}dt = -\Omega dh \Rightarrow dt = -\frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} -\frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}}$$

$$t = -\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}) \quad (5.6)$$

Exercice n°3

Un réservoir de 1,2 m de diamètre contient de l'huile de densité 0,75. Un ajutage de 7,5 cm de diamètre est fixé près du fond du réservoir ($\mu=0,85$). Combien de temps faut-il pour que le niveau passe de 1,8 m à 1,2 m au-dessus de l'ajutage ?



Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Solution

La formule donnant le temps de vidange d'un réservoir en régime transitoire est la suivante :

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})$$

$$t = \frac{2\frac{\pi D^2}{4}}{\mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})$$

Où D: diamètre du réservoir et d : diamètre de l'ajutage.

$$t = \frac{2\frac{\pi 1,2^2}{4}}{0,85\frac{\pi 0,075^2}{4}\sqrt{19,62}} (\sqrt{1,8} - \sqrt{1,2}) = 33,4797 \text{ secondes}$$

Programme (5.4) : Calcul du temps de vidange d'un réservoir cylindrique prismatique

<pre>real t,mu write (*,*)'introduire le coefficient de débit mu=' read (*,*)mu write (*,*)'introduire le diamètre du réservoir d=' read (*,*)d write (*,*)'introduire le diamètre de orifice dorf=' read (*,*)dorf</pre>	<pre>write (*,*)'introduire la première profondeur dans le réservoir h1=' read (*,*)h1 write (*,*)'introduire la deuxième profondeur dans le réservoir h2=' read (*,*)h2 w=(3.14159265*dorf**2)/4 omega=(3.14159265*d**2)/4 t=(2*omega*(sqrt(h1)-sqrt(h2)))/(mu*w*sqrt(2*9.81)) write (*,*)'t=',t stop end</pre>
---	--

Exercice n°4

Déterminer le temps t de vidange de la retenue d'eau à partir du repère 78,0 m jusqu'à 74,0 m par un orifice de vidange dans le corps de barrage, le centre de l'orifice est au repère 72,0 m. L'aire de l'orifice $\omega=20,0 \text{ m}^2$, le coefficient de débit $\mu=0,70$; l'absence d'arrivée d'eau dans la retenue. La dépendance entre l'aire Ω du niveau de la retenue d'eau et le repère z est caractérisée par les données suivantes :

Z (m)	78	77	76	75	74	73	72
Ω mln de (m ²)	9,7	5,8	4,0	2,3	1,3	0,6	0,2

Solution

$$dV_1 = Qdt = Q = \mu\omega\sqrt{2gh}dt$$

$$dV_2 = -\Omega dh = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2} dh$$

Le volume évacué par l'orifice de vidange est égal au volume réduit dans le réservoir

$$dV_1 = dV_2$$

$$\mu\omega\sqrt{2gh}dt = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2}dh \Rightarrow dt = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)dh}{2\mu\omega\sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)dh}{2\mu\omega\sqrt{2gh}}$$

$$t = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}) \quad (5.7)$$

$$t_1 = -\frac{(9,7 + 5,8) \times 10^6}{0,7 \times 20 \sqrt{19,62}}(\sqrt{5} - \sqrt{6}) = 53344,89550 \text{ secondes}$$

$$t_2 = -\frac{(5,8 + 4) \times 10^6}{0,7 \times 20 \sqrt{19,62}}(\sqrt{4} - \sqrt{5}) = 37306,59545 \text{ secondes}$$

$$t_3 = -\frac{(4 + 2,3) \times 10^6}{0,7 \times 20 \sqrt{19,62}}(\sqrt{3} - \sqrt{4}) = 27221,713867 \text{ secondes}$$

$$t_4 = -\frac{(2,3 + 1,3) \times 10^6}{0,7 \times 20 \sqrt{19,62}}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 18451,4181675 \text{ secondes}$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 53344,90 + 37306,60 + 27221,71 + 18451,42 \\ = 136324,63 \text{ secondes}$$

$$t = 37 \text{ Heures } 52 \text{ minutes et } 4 \text{ secondes}$$

Programme (5.5) : Calcul du temps de vidange d'un barrage

Real Z(7),S(7),mu	S(7)=200000
Z(1)=78	sorf=20
Z(2)=77	mu=0.7
Z(3)=76	g=9.81
Z(4)=75	t1=(s(1)+s(2))*(sqrt(z(1)-72)-sqrt(z(2)-72))/(mu*sorf*sqrt(3*g))
Z(5)=74	t2=(s(2)+s(3))*(sqrt(z(2)-72)-sqrt(z(3)-72))/(mu*sorf*sqrt(2*g))
Z(6)=73	t3=(s(3)+s(4))*(sqrt(z(3)-72)-sqrt(z(4)-72))/(mu*sorf*sqrt(2*g))
Z(7)=72	t4=(s(4)+s(5))*(sqrt(z(4)-72)-sqrt(z(5)-72))/(mu*sorf*sqrt(2*g))
S(1)=9700000	t=(t1+t2+t3+t4)/3600
S(2)=5800000	write (*,*)'t1=',t1,'t2=',t2,'t3=',t3,'t4=',t4
S(3)=4000000	write (*,*)'t=',t
S(4)=2300000	Stop
S(5)=1300000	end
S(6)=600000	

5.3.2 Ecoulement par transvasement

a) Cas où les deux réservoirs sont reliés par une conduite

$$\mu_{\text{Système}} = \frac{1}{\sum \xi} = \frac{1}{\sum (\lambda \frac{l}{d} + \xi_e + \xi_{\text{Sor}})}$$

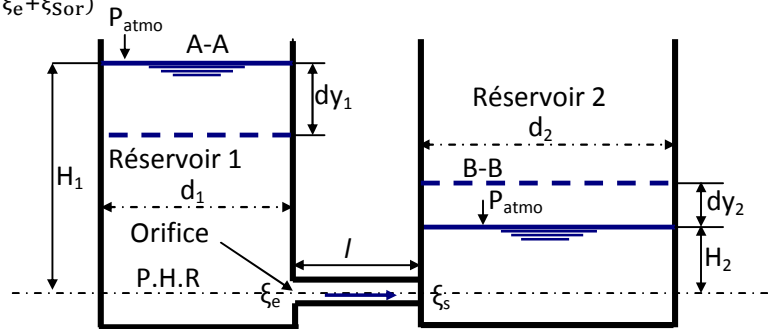


Fig.5.3 : Ecoulement par transvasement

La différence de niveau entre les deux réservoirs est égale à la somme des profondeurs de la montée et de la descente dans les deux réservoirs.

$$dh = dy_1 + dy_2$$

Le volume qui sort du réservoir 1 entre dans le réservoir 2, et de ce fait on peut écrire :

$$dV_1 = dV_2 \Rightarrow \Omega_1 dy_1 = \Omega_2 dy_2 \Rightarrow dy_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1$$

Ecrivons l'une des profondeurs en fonction des aires des deux réservoirs et la différence initiale de niveau d'eau dans les deux réservoirs Ω_1 , Ω_2 et dh.

$$\begin{aligned} dh = dy_1 + dy_2 &\Rightarrow dh = dy_1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1 = dy_1 \left(1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_2} dy_1 \Rightarrow dy_1 \\ &= \frac{\Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh \end{aligned}$$

$$dV_1 = dV_2 = \Omega_1 dy_1 = \Omega_1 \frac{\Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh$$

Le volume sortant à travers l'orifice durant le temps dt est :

$$dV_3 = \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh} dt$$

Le volume descendu du réservoir 1 au temps dt est égal au volume sortant par l'orifice en même intervalle du temps.

$$\begin{aligned} -dV_1 = dV_3 &\Rightarrow -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh = \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh} dt \Rightarrow dt \\ &= -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh}} dh \end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1=H_1-H_2}^{h_2=0} - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh}} dh \Rightarrow t = - \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_{h_1}^0$$

$$t = - \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_{h_1}^0$$

Exercice n°5

Deux vases cylindriques verticaux sont reliés par un tuyau horizontal $d=150$ mm dont l'axe se trouve à la hauteur $a=2,0$ m du fond. Le tuyau est muni d'une vanne. Les diamètres des vases $D_1 = 2,5$ m, $D_2 = 1,5$ m.

La profondeur de l'eau dans le premier vase à vanne fermée $h_1=7$ m, le deuxième vase est rempli d'eau jusqu'au niveau de l'axe du tuyau, $h_2=2,0$ m. Le coefficient de débit $\mu_{\text{système}}=0,50$.

Déterminer le temps T nécessaire après l'ouverture de la vanne pour que les deux vases aient le même niveau ?

Solution

Les données sont : $d=150$ mm $=0,15$ m, $D_1 = 2,5$ m, $D_2 = 1,5$ m, $H_1=7$ m, $H_2=2,0$ et $\mu_{\text{système}}=0,50$.

$h_1 = H_1 - H_2 = 7 - 2 = 5$ m

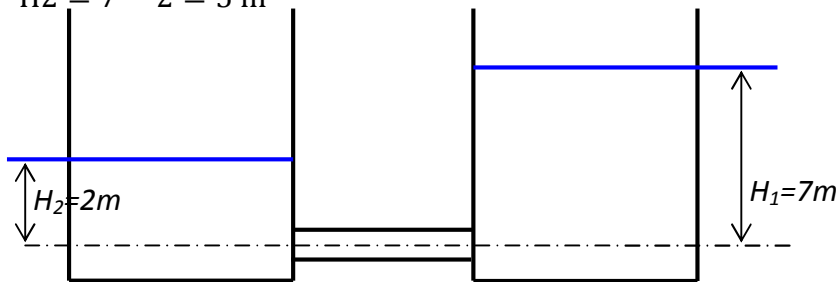


Fig.5.4 : Ecoulement par transvasement

La différence de niveau entre les deux réservoirs est égale à la somme de celui de la montée et de la descente dans les deux réservoirs.

$$dh = dy_1 + dy_2$$

Le volume qui sort du réservoir 1 entre dans le réservoir 2, et de ce fait on peut écrire :

$$dV_1 = dV_2 \Rightarrow \Omega_1 dy_1 = \Omega_2 dy_2 \Rightarrow dy_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1$$

Ecrivons l'une des profondeurs en fonction des aires des deux réservoirs et la différence initiale de niveau d'eau dans les deux réservoirs Ω_1 , Ω_2 et dh .

$$\begin{aligned} dh = dy_1 + dy_2 &\Rightarrow dh = dy_1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1 = dy_1 \left(1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_2} dy_1 \Rightarrow dy_1 \\ &= \frac{\Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh \end{aligned}$$

$$dV_1 = dV_2 = \Omega_1 dy_1 = \Omega_1 \frac{\Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh$$

Le volume sortant à travers l'orifice durant le temps dt est :

$$dV_3 = \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh} dt$$

Le volume descendu du réservoir 1 au temps dt est égal au volume sortant par l'orifice en même intervalle du temps.

$$\begin{aligned} -dV_1 = dV_3 &\Rightarrow -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)} dh = \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh} dt \Rightarrow dt \\ &= -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh}} dh \end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1=5}^{h_2=0} -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2gh}} dh \Rightarrow t = -\frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_5^0$$

$$t = -\frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_{\text{système}} \omega \sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_5^0$$

Les sections des deux réservoirs sont données par :

$$\Omega_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi 2,5^2}{4} = 4,9087 \text{ m}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi 1,5^2}{4} = 1,7671 \text{ m}^2$$

La section de l'orifice

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 0,150^2}{4} = 0,01767 \text{ m}^2$$

$$t = -\frac{2 \times 4,9087 \times 1,7671}{(4,9087 + 1,7671) \times 0,5 \times 0,01767 \sqrt{19,62}} (0 - \sqrt{5}) = 148,485 \text{ secondes}$$

Programme (5.5) : Calcul du temps de transvasement entre deux réservoirs reliés par une conduite

<pre> real musyst Pi=3.14159265 write (*,*)'d=' read (*,*)d write (*,*)'d1=' read (*,*)d1 write (*,*)'d2=' read (*,*)d2 write (*,*)'H1=' read (*,*)H1 write (*,*)'H2=' read (*,*)H2 </pre>	<pre> write (*,*)'musyst=' read (*,*)musyst Ah1=(H1-H2) Ah2=0 w=(pi*d**2)/4 S1=(pi*d1**2)/4 S2=(pi*d2**2)/4 t1=-((2*S1*S2*(SQRT(Ah2)-SQRT(Ah1)))) t2=((S1+S2)*musyst*w*SQRT(19.62)) t=t1/t2 write (*,*)'t1=',t1,'t2=',t2,'t=',t stop end </pre>
--	---

b) Cas où les deux réservoirs sont adjacents

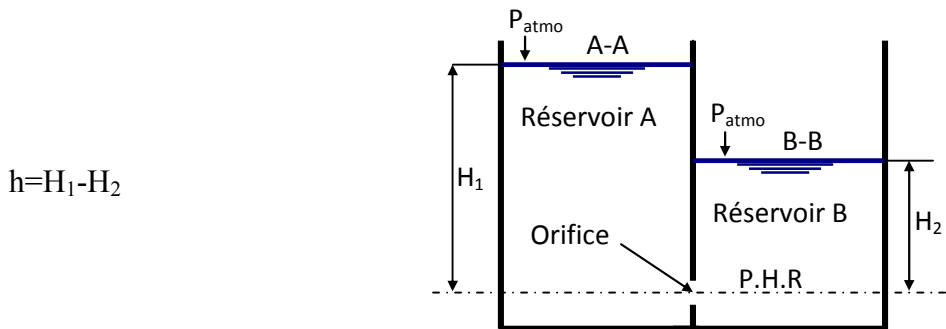


Fig.5.5 : Ecoulement à travers un orifice où les deux réservoirs sont adjacents

$$\mu_{\text{Système}} = \frac{1}{\sum \xi} = \frac{1}{\sum (\xi_e + \xi_{\text{Sor}})}$$

$$t = - \frac{2\Omega_1\Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)\mu_{\text{système}}\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_{h_1}^0$$

Exercice n°6

Deux réservoirs rectangulaires ont une paroi commune ou un orifice de surface 230 cm² et de coefficient 0,80 a été ménagé. Le réservoir A a 2,4 m de côté, et la profondeur initiale au-dessus de l'orifice est de 3m. Le réservoir B a 1,2 m de côté et la profondeur initiale au-dessus de l'orifice est de 0,90 m. Combien faudra-t-il de temps pour que l'eau soit au même niveau des deux côtés ?

Solution

$$\mu = 0,80$$

$$\omega = 230 \text{ cm}^2$$

$$dV = Qdt \Rightarrow dV = \mu\omega\sqrt{2gh}dt$$

$$y_1 + y_2 = 3 - 0,9 = 2,1 = h_1$$

$$h_2 = 0$$

$$\Omega_1 dy_1 = \Omega_2 dy_2 \Rightarrow dy_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1$$

$$dh = dy_1 + dy_2 \Rightarrow dh = dy_1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dy_1 = \left(1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) dy_1 \Rightarrow dy_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dh$$

$$dV = \Omega_1 dy_1 = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dh$$

$$dV = \mu\omega\sqrt{2gh}dt = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dh \Rightarrow dt = \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}}{\mu\omega\sqrt{2gh}} dh \Rightarrow dt = \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}}{\mu\omega\sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

$$t = \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-\frac{1}{2}} dh = -2 \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}}{\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{h}]_{h_1}^{h_2}$$

$$t = -2 \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}}{\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}] = -2 \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}]$$

Pour notre cas $h_1=2,1$ et $h_2=0$

$$t = 2 \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{0} - \sqrt{2,1}] = 2 \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2)\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{2,1}]$$

On peut également suivre l'étape suivante pour aller vite au même résultat.

$$dy_1 + \frac{2,4 \times 2,4}{1,2 \times 1,2} dy_1 = 5 dy_1 \Rightarrow dy_1 = \frac{1}{5} dh$$

$$dV = \Omega_1 dy_1 = 2,4 \times 2,4 \left(\frac{1}{5} dh\right) = 1,152 dh$$

$$dV = \mu\omega\sqrt{2gh}dt = 1,152 dh \Rightarrow dt = \frac{1,152 dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1,152 dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}} = \frac{1,152}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-\frac{1}{2}} dh$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1,152}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1=2,1}^{h_2=0} h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{-2 \times 1,152}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left[h^{\frac{1}{2}}\right]_{2,1}^0$$

$$= \frac{-2 \times 1,152}{0,80 \times 240 \times 10^{-4} \sqrt{19,62}} [-2,1^{\frac{1}{2}}] = 40,966 \text{ secondes}$$

$$t = 40,966 \text{ secondes}$$

Programme (5.6) : programme de calcul du temps de transvasement entre deux réservoirs adjacents

<pre> REAL mu, L1,L2 write (*,*)'introduire le diamètre de l'orifice dorf=' read (*,*)dorf write (*,*)'introduire le coefficient de l'orifice mu=' read (*,*)mu write (*,*)'introduire le coté du premier reservoir L1=' read (*,*)L1 write (*,*)'introduire le coté du second reservoir L2=' read (*,*)L2 write (*,*)'introduire la profondeur d'eau dans le premier reservoir y1=' read (*,*)y1 </pre>	<pre> write (*,*)'introduire la profondeur d'eau dans le second reservoir y2=' read (*,*)y2 h1=y1-y2 h2=0 pi=3.14159265 w=pi*dorf**2/4 S1=L1*L1 S2=L2*L2 t=-2*((S1*S2)/(S1+S2))*(SQRT(h2)- SQRT(h1))/(mu*w*SQRT(2*9.81)) write (*,*)t stop end </pre>
--	---

5.3.3 Ecoulement à l'air libre à partir d'un réservoir non prismatique à travers un orifice sans arrivée d'eau

a) Cas de vidange d'un récipient conique à base circulaire

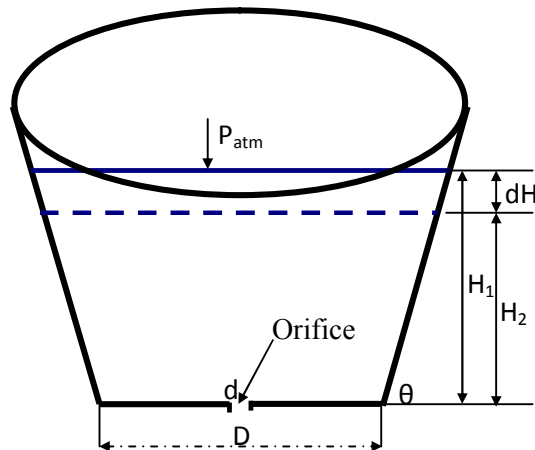


Fig.5.6 : Ecoulement à l'air libre à travers un orifice

$$\begin{aligned}
 dV &= \mu \omega \sqrt{2gH} dt \\
 dV &= \pi \frac{(D + 2H \cot \theta)^2}{4} dH \\
 \mu \omega \sqrt{2gH} dt &= \pi \frac{(D + 2H \cot \theta)^2}{4} dH \Rightarrow dt = \frac{\pi (D + 2H \cot \theta)^2}{4 \mu \omega \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}} \Rightarrow t \\
 &= \frac{\pi}{4 \mu \omega \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{(D + 2H \cot \theta)^2 dH}{\sqrt{H}}
 \end{aligned}$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{(D^2 + 4HD\cot\theta + 4H^2\cot^2\theta)dH}{\sqrt{H}}$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_{H_1}^{H_2} (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4HD\cot\theta H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4H^2\cot^2\theta H^{-\frac{1}{2}} dH) \right)$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_{H_1}^{H_2} (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4D\cot\theta H^{\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4\cot^2\theta H^{\frac{3}{2}} dH) \right)$$

Le récipient est vide si $H_2=0$ et $H_1=H$.

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_H^0 (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_H^0 4D\cot\theta H^{\frac{1}{2}} dH + \int_H^0 4\cot^2\theta H^{\frac{3}{2}} dH) \right)$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\left[(2D^2 H^{\frac{1}{2}}) \right] + \left[\frac{8}{3} D\cot\theta H^{\frac{3}{2}} \right] + \left[\frac{8}{5} (\cot\theta)^2 H^{\frac{5}{2}} \right] \right)$$

Exercice n°7

Un récipient conique à base circulaire de diamètre D avec une inclinaison θ , déterminer le temps de vidange t de ce récipient.

Solution

$$dV = \mu\omega\sqrt{2gH}dt$$

$$\begin{aligned} dV &= \pi \frac{(D + 2H\cot\theta)^2}{4} dH \Rightarrow \mu\omega\sqrt{2gH}dt = \pi \frac{(D + 2H\cot\theta)^2}{4} dH \Rightarrow dt \\ &= \frac{\pi(D + 2H\cot\theta)^2 dH}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{H}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{(D + 2H\cot\theta)^2 dH}{\sqrt{H}} \end{aligned}$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{(D^2 + 4HD\cot\theta + 4H^2(\cot\theta)^2)dH}{\sqrt{H}}$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_{H_1}^{H_2} (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4HD\cot\theta H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4H^2(\cot\theta)^2 H^{-\frac{1}{2}} dH) \right)$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_{H_1}^{H_2} (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4D\cot\theta H^{\frac{1}{2}} dH + \int_{H_1}^{H_2} 4(\cot\theta)^2 H^{\frac{3}{2}} dH) \right)$$

Le récipient est vide si $H_2=0$ et $H_1=H$.

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\int_H^0 (D^2 H^{-\frac{1}{2}} dH + \int_H^0 4D \cot\theta H^{\frac{1}{2}} dH + \int_H^0 4(\cot\theta)^2 H^{\frac{3}{2}} dH \right)$$

$$t = \frac{\pi}{4\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\left[2D^2 H^{\frac{1}{2}} \right] + \left[\frac{8}{3} D \cot\theta H^{\frac{3}{2}} \right] + \left[\frac{8}{5} (\cot\theta)^2 H^{\frac{5}{2}} \right] \right)$$

Application :

Calculer le temps de vidange d'un réservoir identique ayant les caractéristiques suivantes :
 $\theta=60^\circ$, $\mu=0,62$, $d=0,05$ m $H= 3$ m et $D=2$ m.

$$t = \frac{\pi}{4 \times 0,62 \frac{\pi(0,05)^2}{4} \sqrt{19,62}} \left(\left[(2(2)^2(3)^{\frac{1}{2}}) \right] + \left[\frac{8}{3} \times 2 \times \cot(60^\circ)(3)^{\frac{3}{2}} \right] + \left[\frac{8}{5} (\cot 60^\circ)^2 (3)^{\frac{5}{2}} \right] \right)$$

$$t = 145,653([13,85640] + [16] + [8,314]) = 5559,60$$

$t = 1$ heures 32 minutes et 39,60 secondes

Programme (5.7) : Calcul du temps de vidange d'un réservoir conique à base circulaire

real t,mu,tita	read (*,*)h1
write (*,*)'introduire la valeur de tita='	write (*,*)'introduire la deuxième profondeur d"eau dans le réservoir h2='
read (*,*)tita	read (*,*)h2
write (*,*)'introduire le coefficient de débit mu='	tita=tita*(3.14159265/180)
read (*,*)mu	w=(3.14159265*dorf**2)/4
write (*,*)'introduire le diamètre du réservoir d='	t1=-(3.14159265)/(4*mu*w*sqrt(2*9.81))
read (*,*)d	t2=2*d**2*(h2**(0.5)-h1**(0.5))
write (*,*)'introduire le diamètre de orifice dorf='	t3=((2.66666666)*d*(h2**(1.5))*(cos(tita)/sin(tita))-
read (*,*)dorf	(2.66666666)*d*(h1**(1.5))*(cos(tita)/sin(tita)))
write (*,*)'introduire la première profondeur d"eau dans le réservoir h1='	t4=1.6*((cos(tita)/sin(tita))**2)*(h2**(2.5)-h1**(2.5))
	t=t1*(t2+t3+t4)
	write (*,*)'t=',t
	stop
	end

b) Cas de vidange d'une citerne non prismatique

Soit la citerne représentée par la figure 5.7, Le volume évacué du réservoir est donné par la relation :

$$dV = \Omega dh$$

Pour ce genre de réservoir , on doit écrire $\Omega = f(h)$

$$\Omega = 2lx \text{ et } y = h - R$$

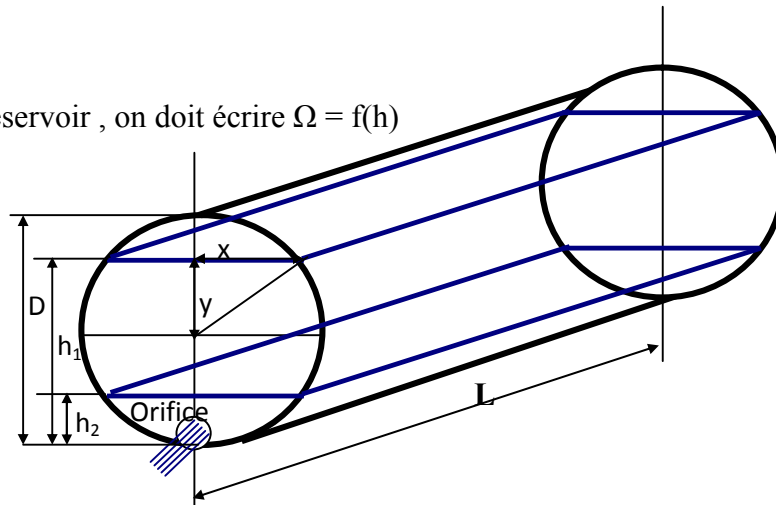


Fig.5.7 : Vidange d'une citerne non prismatique

$$R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - (h - R)^2 \Rightarrow x^2 = h^2 - 2hR \Rightarrow x = \sqrt{h(2R - h)} = \sqrt{h(d - h)}$$

$$\Omega = 2x\sqrt{h(d - h)}l$$

$$dV = \Omega dh = 2x\sqrt{h(d - h)}l dh$$

Le volume sortant par l'orifice est égal :

$$dV = \mu\omega\sqrt{2gh} dt$$

$$2x\sqrt{h(d - h)}l dh = -\mu\omega\sqrt{2gh} dt \Rightarrow dt = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{h(d - h)} dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow t$$

$$= -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\sqrt{h(d - h)} dh}{\sqrt{h}}$$

$$t = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{h(d - h)} h^{-\frac{1}{2}} dh = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} (d - h)^{\frac{1}{2}} dh \Rightarrow$$

$$t = \frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(-\frac{2}{3} (d - h)^{3/2} \right)_{h_1}^{h_2}$$

Pour calculer le temps de vidange $H_1=D$ et $H_2=0$

$$t = \frac{4ld^{\frac{3}{2}}}{3\mu\omega\sqrt{2g}}$$

Exercice n°8

Déterminer le temps de vidange d'une citerne non prismatique à travers un orifice de 5 cm de diamètre. Le diamètre et la longueur de la citerne sont respectivement $d=1,2$ m et $l=3$ m, le coefficient du débit de l'orifice est de $\mu=0,65$.

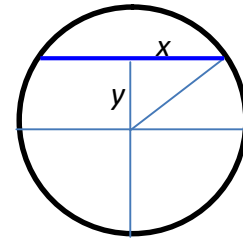
Solution

Le volume évacué du réservoir à travers l'orifice est donné par la relation :

$$dV = \Omega dh$$

Pour ce genre de réservoir, on doit écrire $\Omega = f(h)$

$$\Omega = 2lx \text{ et } y = h - R$$



$$R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - (h - R)^2 \Rightarrow x^2 = h^2 - 2hR \Rightarrow x = \sqrt{h(2R - h)} = \sqrt{h(d - h)}$$

$$\Omega = 2x\sqrt{h(d - h)}l$$

$$dV = \Omega dh = 2x\sqrt{h(d - h)}l dh$$

Le volume sortant par l'orifice est égal :

$$dV = \mu\omega\sqrt{2gh} dt$$

$$2x\sqrt{h(d - h)}l dh = -\mu\omega\sqrt{2gh} dt \Rightarrow dt = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{h(d - h)} dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow t = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\sqrt{h(d - h)} dh}{\sqrt{h}}$$

$$t = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{h(d - h)} h^{-\frac{1}{2}} dh = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} (d - h)^{\frac{1}{2}} dh = -\frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(-\frac{2}{3}(d - h)^{\frac{3}{2}}\right)_{h_1}^{h_2}$$

Si $H_1=D$ et $H_2=0$

$$t = \frac{4l}{3\mu\omega\sqrt{2g}} \left((d - h)^{\frac{3}{2}}\right)_{1,2}^0 = \frac{4 \times 3}{3 \times 0,65 \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \sqrt{19,62}} \left((d - 0)^{\frac{3}{2}} - (d - d)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4 \times 3 d^{\frac{3}{2}}}{3 \times 0,65 \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \sqrt{19,62}}$$

$$t = \frac{4 \times 3 (1,2)^{\frac{3}{2}}}{3 \times 0,65 \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \sqrt{19,62}} = 930,120 \text{ Secondes} = 15 \text{ minutes et } 30,12 \text{ secondes}$$

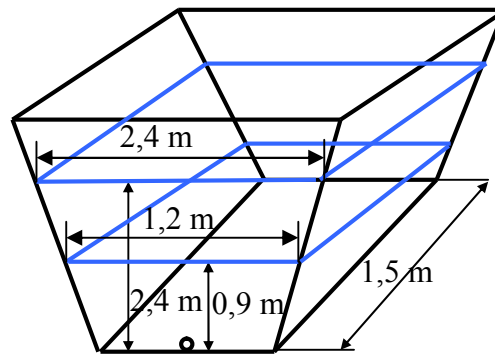
Programme (5.8) : Calcul du temps de vidange d'une citerne

<pre> real t,mu write (*,*)'introduire la longueur de la citerne L=' read (*,*)L write (*,*)'introduire le coefficient de débit mu=' read (*,*)mu write (*,*)'introduire le diamètre de la citerne d=' read (*,*)d write (*,*)'introduire le diamètre de orifice dorf=' </pre>	<pre> read (*,*)dorf write (*,*)'introduire la première profondeur dans la citerne h1=' read (*,*)h1 write (*,*)'introduire la deuxième profondeur dans la citerne h2=' read (*,*)h2 w=(3.14159265*dorf**2)/4 t=(4*L*((d-h2)**(1.5)-(d-h1)**(1.5)))/(3*mu*w*sqrt(2*9.81)) write (*,*)'t=',t stop end </pre>
--	---

Exercice n°9

Un réservoir de section droite en forme de trapèze a une longueur constante de 1,50 m. Quand l'eau a une profondeur de 2,40 m au-dessus de l'orifice de 5 cm de diamètre ($\mu=0,65$) la largeur de la surface de l'eau est de 1,80 m, et a une profondeur de 0,90 m elle est de 1,20 m. Quel temps faudra-t-il pour que le niveau se rabatte de 2,40 m à 0,90 m ?

Solution



$$\mu = 0,65$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0,05)^2}{4} = 0,001963495$$

Le volume évacué par l'orifice, durant un temps dt , s'obtient par les deux relations suivantes :

$$dV_1 = Qdt = Q = \mu\omega\sqrt{2gh}dt$$

$$dV_2 = -\Omega dh = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)}{2} dh$$

$$\Omega_1 = 1,80 \times 1,50 = 2,7 \text{ m}^2$$

$$\Omega_2 = 1,20 \times 1,50 = 1,8 \text{ m}^2$$

$$\Omega = \frac{2,7 + 1,8}{2} = 2,25 \text{ m}^2$$

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Le volume évacué par l'orifice est égal au volume réduit dans le réservoir

$$dV_1 = dV_2$$

$$\mu\omega\sqrt{2gh}dt = -\Omega dh \Rightarrow dt = -\frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} -\frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2gh}}$$

$$t = -\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})$$

$$t = -\frac{2 \times 2,25}{0,65 \times 0,00196 \sqrt{19,62}}(\sqrt{0,9} - \sqrt{2,4}) = 478,013 \text{ secondes}$$

Programme (5.9) : Calcul du temps de vidange d'un réservoir trapézoïdal à base rectangulaire

<pre> real t,mu,L,L1,L2 write (*,*)'introduire la longueur du réservoir L=' read (*,*)L write (*,*)'introduire le coefficient de débit mu=' read (*,*)mu write (*,*)'introduire la largeur du réservoir qui correspond à la profondeur h1, L1=' read (*,*)L1 write (*,*)'introduire la largeur du réservoir qui correspond à la profondeur h2, L2=' read (*,*)L2 </pre>	<pre> write (*,*)'introduire le diamètre de orifice dorf=' read (*,*)dorf write (*,*)'introduire la première profondeur dans la citerne h1=' read (*,*)h1 write (*,*)'introduire la deuxième profondeur dans la citerne h2=' read (*,*)h2 omega1=L*L1 omega2=L*L2 omega=(omega1+omega2)/2 w=(3.14159265*dorf**2)/4 t=-((2*omega*(sqrt(h2)-sqrt(h1)))/(mu*w*sqrt(2*9.81))) write (*,*)'t=',t stop end </pre>
---	---

5.4 Simulation des écoulements dans les réseaux d'alimentation en eau potable

5.4.1 Cas d'un réseau d'A.E.P de type maillé

Exercice n°10

Un réseau maillé d'alimentation en eau potable est composé d'une seule maille. Le débit à l'entrée de la maille $Q=500$ l/s. Ce débit se répartit sur les deux tronçons de la maille en Q_1 et Q_2 . Toutes les caractéristiques des conduites sont indiquées sur la figure (5.8).

Calculer le débit circulant dans chaque tronçon ?

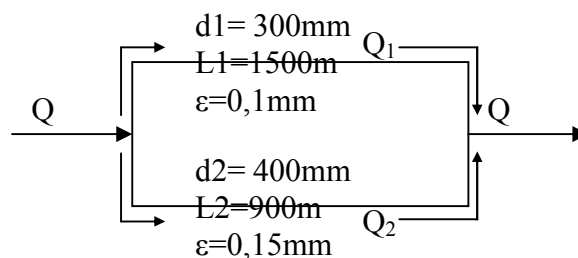


Fig. (5.8) : Réseau maillé

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Utiliser la méthode d'Hardy-Cross pour effectuer les calculs et utiliser la formule de Colebrook et White pour calculer le coefficient de frottement λ , sachant que la température de l'eau est de 20°C.

$$\Delta Q = - (\Sigma \Delta H / 2 \Sigma (\Delta H / Q_0))$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} \right]$$

Programme (5.10) : Calcul d'équilibrage d'un réseau maillé composé d'une seule maille sans utilisation des procédures et des fonctions.

<pre> REAL d1,d2,L1,L2,Epsilon1,Epsilon2,Q,Q1(1000) Real Q2(1000),lambda11(10000),lambda22(10000) real dh1(1000),dh2(1000),a1(1000),a2(1000) REAL RE1(10000),RE2(10000),f(1000) Real sdh(100),dQ(1000) Real V1(10000),V2(10000),W1(10000),W2(10000) REAL nu,lambda1,lambda2,lambda11,lambda22 REAL Q11,Q22,d,pch1,pch2,h11,dh12,sdhr Q=0.5 d1=0.3 d2=0.4 L1=1500 L2=900 pi=3.141592654 epsilon1=0.0001 epsilon2=0.00015 t=20 g=9.79819393 write (*,*)'calcul de la viscosité du liquide circulant dans les conduites' nu=(0.0178/(1+0.0337*t+0.000221*t**2))*0.0001 WRITE (*,*)'nu=',nu write (*,*)'calcul des nombres de Reynolds' i=0 j=0 Q1(i)=Q/2 Q2(j)=-Q/2 iter=1 5 W1(i)=(pi*d1**2)/4 V1(i)=Q1(i)/W1(i) RE1(i)=(V1(i)*d1)/NU WRITE (*,*)'w1(',i,')=',w1(i) WRITE (*,*)'V1(',i,')=',V1(i),'RE1(',i,')=',RE1(i) IF (RE1(i).GT.2320) THEN Lambda1=0.3164/(RE1(i)**0.25) lambda11(0)=lambda1 10 lambda11(i+1)=(- 2*LOG10((2.51/(RE1(i)*SQRT(lambda11(i))))+(0.27*EP </pre>	<pre> dh11=dh1(i) write (*,*)'dh11=',dh11,i W2(j)=(pi*d2**2)/4 V2(j)=-Q2(j)/W2(j) RE2(j)=(V2(j)*d2)/NU WRITE (*,*)'w2(',j,')=',w2(j) WRITE (*,*)'V2(',j,')=',V2(j),'RE2(',j,')=',RE2(j) IF (RE2(j).GT.2320) THEN Lambda2=0.3164/(RE2(j)**0.25) lambda22(j)=lambda2 20 lambda22(j+1)=(- 2*LOG10((2.51/(RE2(j)*SQRT(lambda22(j))))+(0.27* EPSILON2)/d2))**(-2) IF (ABS(Lambda22(j+1)- lambda22(j)).GT.0.00000001) THEN RE2(j+1)=RE2(j) j=j+1 GO TO 20 END IF endif lambda222=lambda22(j+1) write (*,*)'lambda222=',lambda222 write (*,*)'j=',j do j=0,j write (*,*)'lambda22(',j,')=',lambda22(j) end do do k=0,j dh2(k)=- (8*lambda22(k)*L2*Q2(k)**(2))/(g*pi**2*d2**(5)) a2(K)=dh2(K)/Q2(K) Q2(k+1)=Q2(k) end do do k=0,j write (*,*)'dh2(',k,')=',dh2(k),'a2(',k,')=',a2(k) END do dH22=dh2(j) write (*,*)'dH22=',dH22,j sdhr=dh11+dH22 </pre>
---	---

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

<pre> SILON1/d1)))**(-2) IF (ABS(Lambda11(i+1)- lambda11(i)).GT.0.0000001) THEN RE1(i+1)=RE1(i) i=i+1 GO TO 10 END IF endif lambda111=lambda11(i+1) write (*,*)'lambda111=',lambda111 write (*,*)'i=',i do i=0,i write (*,*)'lambda11(',i,')=',lambda11(i) end do do k=0,i dh1(k)=(8*lambda11(k)*L1*Q1(k)**(2))/(g*pi**2*d1** (5)) a1(K)=dh1(K)/Q1(K) Q1(k+1)=Q1(k) end do do k=0,i write (*,*)'dh1(',k,')=',dh1(k),'a1(',k,')=',a1(k) END do write (*,*)'-----' </pre>	<pre> write (*,*)'-----' write (*,*)'Iteration = ',iter, ' ', 'sdhr=',ABS(sdhr) do K=0,j dQ(k)=-sdhr/(2*(a1(k)+a2(k))) WRITE (*,*)'dQ(',k,')=',dQ(k) enddo DO K=0,i Q1(k)=Q1(K)+dQ(k) write (*,*)'Q1(',k,')=',Q1(k) END DO DO K=0,j Q2(k)=Q2(K)+dQ(k) write (*,*)'Q2(',k,')=',Q2(k) ENDDO if (ABS(sdhr).GT.0.000001) then Q1(0)=Q1(i) Q2(0)=Q2(j) i=0 j=0 iter=iter+1 READ (*,*)zzz GOTO 5 end if WRITE (*,*)'Q1(',i,')=',Q1(i),'Q2(',j,')=',Q2(j) stop end </pre>
---	--

Tableau (5.4) : Résultats de l'exécution du programme

<pre> W1(0)=7,06858411E-02 V1(0)=1,93050206 RE1(0)=573424,188 lambda111=1,638693932E-02 i=4 lambda11(0)=1,1497879E-02 lambda11(1)=1,65780522E-02 lambda11(2)=1,63811371E-02 lambda11(3)=1,63871162E-02 lambda11(4)=1,63869336E-02 dh1(0)=10,9333181 a1(0)=80,1215439 dh1(1)=15,7640581 a1(1)=115,522171 dh1(2)=15,5768118 a1(2)=114,149986 dh1(3)=15,5824966 a1(3)=114,191650 dh1(4)=15,5823231 a1(4)=114,190384 dh1(5)=15,5823288 a1(5)=114,190422 dh11=15,5823288 i=5 W2(0)=0,125663713 V2(0)=2,89296579 RE1(0)=1145744,50 lambda222=1,621558385E-02 j=4 lambda22(0)=9,67084710E-02 lambda22(1)=1,63673311E-02 </pre>	<pre> dh2(2)=-15,5800047 a2(2)=42,8562737 dh2(3)=-15,5823669 a2(3)=42,8627739 dh2(4)=-15,5823298 a2(4)=42,8626709 dh2(5)=-15,5823298 a2(5)=42,8626709 dh22=-15,5823298j=5 itération =7 sdhr=9,53674316E-07 dQ(0)= 4,51190996E-09 dQ(1)= 3,00303138E-09 dQ(2)= 3,03705816E-09 dQ(3)= 3.03612691E-09 dQ(4)= 3,03615333E-09 dQ(5)= 3,03615266E-09 Q1(0)=0,136459157 Q1(1)=0,136459157 Q1(2)=0,136459157 Q1(3)=0,136459157 Q1(4)=0,136459157 Q1(5)=0,136459157 Q2(0)=-0,363540778 Q2(1)=-0,363540778 Q2(2)=-0,363540778 Q2(3)=-0,363540778 </pre>
---	---

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

lambda22(2)=1,62134189E-02 lambda22(3)=1,62158776E-02 lambda22(4)=1,62158385E-02 dh2(0)=-9,29303360 a2(0)=25,5625591 dh2(1)=-15,7279034 a2(1)=43,2631035	Q2(4)=-0,363540778 Q2(5)=-0,363540778 Q1(5)=0,136459157 Q2(5)=-0,363540778
--	---

Programme (5.11) : Calcul d'équilibrage d'un réseau maillé composé d'une seule maille avec utilisation des procédures et des fonctions.

<pre> External dh Real nu,lambd1,dh1,lambd2,dh2,lambd3 ,dh3,L,g,lambd0(1000),L1,Q1,w1,L2,Q2,w2 Integer i,j Q=0.6 Q1=Q/2 Q2=-Q/2 d1=0.3 d2=0.25 L1=1200 L2=1100 pi=3.141592654 eps1=0.0002 eps2=0.00015 t=20 g=9.79819393 nu=(0.0178/(1+0.0337*t+0.000221*t**2))*0.0001 write (*,*)'nu=',nu NB=0 5 Call Hardycross1(i,RE1,L1,V1,g,d1, Lambd1,dh1,Lambd2,eps1,Lambd0,Lambd3,d h31,dh,Q1,w1,nu,a1) write (*,*)'w1=',w1 write (*,*)'V1=',V1 write (*,*)'Re1=',Re1 IF (RE1.LT.2320) THEN write (*,*)'lambd1=',lambd1 write (*,*)'dH1=',dH1 ELSE write (*,*)'lambd2=',lambd2 do i=0,i WRITE (*,*)'lambd0('i,')=',lambd0(i) end do write (*,*)'lambd3=',lambd3 write (*,*)'dH31=',dH31 WRITE (*,*)'a1=',a1 END IF CALL Hardycross2(j,RE2,L2,V2,g,d2,LAMBDA1,dh1,L AMBDA2,eps2,LAMBDA0,LAMBDA3,dh32,dh, Q2,w2,nu,a2) write (*,*)'w2=',w2 write (*,*)'V2=',V2 write (*,*)'Re2=',Re2 IF (RE2.LT.2320) THEN write (*,*)'lambd1=',lambd1 </pre>	<pre> SUBROUTINE Hardycross1(i,RE,L,V,g,d,lambd1,dh1 ,lambd2,eps,LAMBDA0,LAMBDA3, dh3,dh,Q,w,nu,a) REAL Lambd0(1000),RE,L,V,g,d, lambd1,dh1,LAMBDA2,LAMBDA3, dh3,eps,Q,w,nu,a INTEGER i w=(3.141592654*d**2)/4 V=Q/w Re=(V*d)/nu if (RE.LT.2320) then lambd1=64/Re dH1=lambd1*L*V**2/(2*d*g) ENDIF if (RE.GT.2320) then lambd2=0.3164/(Re**0.25) lambd0(0)=lambd2 i=0 10 lambd0(i+1)=(- 2*LOG10((2.51/(Re*SQRT(lambd0(i))))+(0.27*eps/d))**(-2) IF (ABS(Lambd0(i+1)- lambd0(i)).GT.0.00000001) THEN i=i+1 GO TO 10 END IF ENDIF Lambd3=lambd0(i) dH3=dh(lambd3,L,V,g,d) a=dH3/Q RETURN END SUBROUTINE Hardycross1 SUBROUTINE Hardycross2(j,RE,L,V,g,d,lambd1,dh1 ,lambd2,eps,LAMBDA0,LAMBDA3, dh3,dh,Q,w,nu,a) REAL Lambd0(1000),RE,L,V,g,d, lambd1,dh1,LAMBDA2,LAMBDA3, dh3,eps,Q,w,nu,a INTEGER j w=(3.141592654*d**2)/4 V=-Q/w Re=(V*d)/nu if (RE.LT.2320) then lambd1=64/Re </pre>
---	---

<pre> write (*,*)'dh1=',dh1 ELSE write (*,*)'lambda2=',lambda2 do j=0,j WRITE (*,*)'lambda0('j,')=',lambda0(j) end do write (*,*)'lambda3=',lambda3 write (*,*)'dh32=',dh32 WRITE (*,*)'a2=',a2 END IF sdhr=dh31+dh32 WRITE (*,*)'sdhr=',sdhr dQ=-sdhr/(2*(a1+a2)) WRITE (*,*)'dQ=',dQ Q1=Q1+dQ Q2=Q2+dQ write (*,*)'Q1=',Q1,'Q2=',Q2 if (ABS(sdhr).GT.0.000001) then NB=NB+1 READ (*,*)zzz GOTO 5 end if write (*,*)'nb=',nb stop end </pre>	<pre> dh1=-lambda1*L*V**2/(2*d*g) ENDIF if (RE.GT.2320) then lambda2=0.3164/(Re**0.25) lambda0(0)=lambda2 j=0 10 lambda0(j+1)=(- 2*LOG10((2.51/(Re*SQRT(lambda0(j))))+(0.27*eps)/d))**(-2) IF (ABS(Lambda0(j+1)- lambda0(j)).GT.0.0000001) THEN j=j+1 GO TO 10 END IF ENDIF Lambda3=lambda0(j) dh3=-dh(lambda3,L,V,g,d) a=dh3/Q RETURN END SUBROUTINE Hardycross2 FUNCTION dh(LAMBDA,L,V,g,d) REAL lambda,L,V,g,d dh=(lambda*L*V**2)/(2*g*d) RETURN END </pre>
---	---

5.4.2 Cas d'un réseau d'alimentation en eau potable de type ramifié

Le réseau ramifié ne comporte aucune alimentation en retour. Toutefois, il présente l'avantage d'être économique et l'inconvénient de manque de sécurité et de souplesse en cas de rupture. La figure (5.9) donne un schéma d'un réseau ramifié.

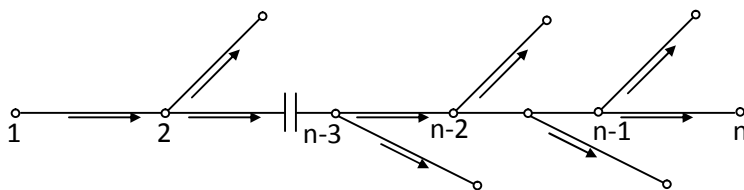


Fig. (5.9) : Schéma d'un réseau d'A.E.P ramifié

NB : Le dimensionnement d'un réseau ramifié d'alimentation en eau potable doit s'effectuer avec méthode.

Exercice n°11

Une ville de 5000 habitants alimentée en eau à partir d'un réservoir. Le réseau de cette ville est de type ramifié. La figure (5.10) montre un schéma approximatif de ce réseau..

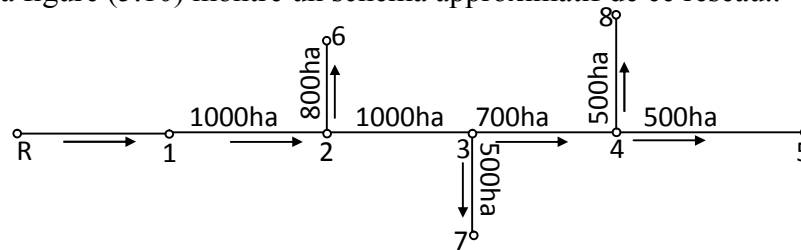


Fig. (5.10) : Schéma approximatif du réseau ramifié de l'exercice n11

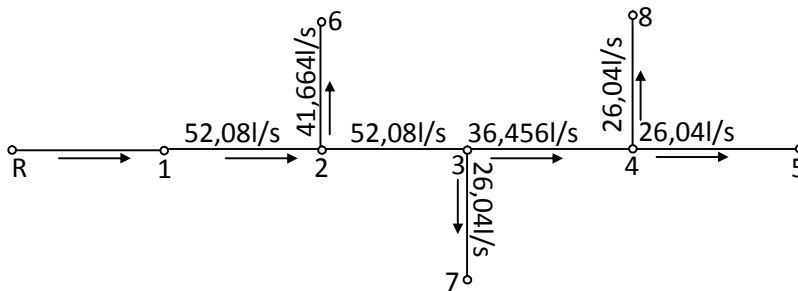
Calculer les diamètres des tronçons et les pressions au sol sachant que la dotation est de l'ordre de 150 l/ha/j et la température de l'eau est égale à 10°C.?
Prendre une rugosité $\epsilon=2.10^{-3}$ m

Solution

La consommation journalière sera : $5000 \times 150 = 750 \text{ m}^3/\text{j}$, ou 8,68 l/s et le débit spécifique est égal à $q_{sp}=0,01736 \text{ l/s/ha}$. Dressons un tableau pour faire les calculs.

Tableau (5.5) : Résultats de calcul des consommations moyennes et de pointes de chaque tronçon

Tronçons	Nombres d'habitants	Consommation (l/s)	
		moyenne	Coefficient de pointe (K=3)
R-1	0	-	-
1-2	1000	$0,01736 \times 1000=17,36$	52,08
2-3	1000	$0,01736 \times 1000=17,36$	52,08
3-4	700	$0,01736 \times 700=12,152$	36,456
4-5	500	$0,01736 \times 500=8,68$	26,04
2-6	800	$0,01736 \times 800=13,888$	41,664
3-7	500	$0,01736 \times 500=8,68$	26,04
4-8	500	$0,01736 \times 500=8,68$	26,04



Afin de déterminer les débits dans les différents tronçons, partons de l'amont du réseau (conduites en impasse) et remontons de proche en proche jusqu'à l'aval (réservoir). Dressons un tableau dans lequel on met la répartition provisoire des débits routes et d'extrémités pour chaque tronçon.

Tableau (5.6) : répartition provisoire des débits routes et d'extrémités de chaque tronçon.

Désignation des tronçons	Débits (l/s)		
	en route (Q_r)	extrémité (Q_E)	du tronçon
4-5	26,04	-	26,04
4-8	26,04	-	26,04
3-4	36,456	52,08	88,536
3-7	26,04	-	26,04
2-3	52,08	114,576	166,656
2-6	41,664	-	41,664
1-2	52,08	208,316	260,396
1-R	-	260,396	260,396

Il est à noter que les débits des tronçons obtenus ne sont pas les débits de calcul du diamètre. Pour avoir les débits de calcul, on doit utiliser la formule d'une conduite assurant un service mixte, $Q_c = Q_E + \alpha Q_r$. Le tableau (5.7) donne les débits de calcul en prenant la valeur de α à partir du rapport $Q_r/Q_E = f(\alpha)$, pour les tronçons assurant un débit en route on prend $\alpha = 0,57735$.

La différence entre les débits des (5.5) et (5.6) est sensible pour les conduites en impasse.

$$j = (8\lambda / \pi^2 \cdot g) \cdot (Q_c^2 / d^5)$$

Nous avons utilisé la formule de Colebrook –White pour calculer le coefficient de frottement λ .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,53}{Re \sqrt{\lambda}} \right]$$

$$\Delta H = j \cdot L$$

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Tableau (5.7) : Débits de dimensionnement des tronçons.

Désignation des tronçons	Débits (l/s)			
	en route (Q_r)	extrémité (Q_E)	α	de calcul (Q_C)
4-5	26,04	-	0,57735	15,034
4-8	26,04	-	0,57735	15,034
3-4	36,456	52,08	0,52148526	71,091266
3-7	26,04	-	0,57735	15,034
2-3	52,08	114,576	0,51526333	141,4109
2-6	41,664	-	0,57735	24,0547
1-2	52,08	208, 316	0,50924975	234,8377
1-R	-	260, 396	0	260,396

Tableau (5.8) : Calcul des diamètres des conduites (Cas de pointe)

Tronçons	L(m)	Ø(mm)	Q(l/s)	ΔH (m)	V(m/s)	$H_{piéz}$ Amont (m)	$H_{piéz}$ aval (m)	Cote au sol (m)	Pression au sol (m)
R-1	520	500	260,396	2,669	1,326	60,000	57,331	28	29,331
1-2	480	500	260,396	2,464	1,326	57,331	54,867	26	28,867
2-3	620	450	166,656	2,282	1,048	54,867	52,585	27	25,585
3-4	650	350	88,536	2,563	0,920	52,585	50,022	24	26,022
4-5	500	200	26,04	3,359	0,829	50,022	46,663	23	23,663
2-6	900	250	41,664	4,708	0,849	54,867	50,159	25	25,159
3-7	850	200	26,04	5,710	0,829	52,585	46,875	22	24,875
4-8	720	200	26,04	4,837	0,829	50,022	45,185	21	24,185

Des valeurs obtenues des pressions au sol, le point le plus défavorable dans le réseau est celui ayant la faible pression, dans notre exemple le point 5 est le plus défavorable.

Nous avons réalisé un programme permettant de calculer le coefficient de frottement, les pertes de charge, les cotes piézométriques et les pressions au sol.

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Après avoir déterminé le nœud le plus défavorable dans notre réseau, il nous suffit maintenant de révérier les pressions et les débits pour le cas de pointe plus incendie ($Q_i=16,67$ l/s). Ce qui nécessite une nouvelle répartition des débits.

Tableau (5.9) : Calcul des débits des tronçons pour le cas de pointe plus incendie

Désignation des tronçons	Débits (l/s)		
	en route(Q_r)	Extrémité(Q_E)	du tronçon
4-5	26,04	16,67	42,71
4-8	26,04	-	26,04
3-4	36,456	68,75	105,206
3-7	26,04	-	26,04
2-3	52,08	131,246	183,326
2-6	41,664	-	41,664
1-2	52,08	224,99	277,07
1-R	-	277,07	277,07

Tableau (5.10) : Calcul des diamètres des conduites (Cas de pointe plus incendie)

Tronçons	L(m)	Ø(mm)	Q(l/s)	ΔH(m)	V(m/s)	$H_{piézAmont}$ (m)	$H_{piéz}$ aval (m)	Cote au sol (m)	Pression au sol (m)
R-1	520	500	277,07	3,021	1,411	60,000	56,979	28	28,979
1-2	480	500	277,07	2,788	1,411	56,979	54,191	26	28,191
2-3	620	450	183,326	2,7589	1,153	54,191	51,432	27	24,432
3-4	650	350	105,206	3,6133	1,093	51,432	47,8189	24	23,8189
4-5	500	200	42,71	8,992	1,360	47,8189	38,8266	23	15,8266
2-6	900	250	41,664	4,7081	0,849	54,191	49,483	25	24,483
3-7	850	200	26,04	5,7099	0,829	51,432	45,722	22	23,722
4-8	720	200	26,04	4,8366	0,829	47,8189	42,982	21	21,982

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Les valeurs des vitesses et des pressions aux nœuds sont acceptables puisque les premières se trouvent dans la gamme de $0,5 \leq V \leq 1,5$ m/s. et les pressions au sol ne dépassent pas la pression limite, 40 m.c.e, dans les réseaux de distribution d'eau.

Tableau (5.11) : Calcul des diamètres des conduites à partir de la formule $Q_c = Q_E + \alpha Q_r$

Tronçons	L(m)	Ø(mm)	Q(l/s)	ΔH(m)	V(m/s)	H _{piézA} mont (m)	H _{piéz} aval (m)	Cote au sol (m)	Pression au sol (m)
R-1	520	500	260,396	2,669	1,326	60,000	57,331	28	29,331
1-2	480	500	234,8377	2,006	1,196	57,331	55,325	26	29,325
2-3	620	400	141,4109	3,065	1,125	55,325	52,2599	27	25,2599
3-4	650	300	71,0913	3,745	1,006	52,2599	48,5146	24	24,5146
4-5	500	150	15,034	5,211	0,85075	48,5146	43,3036	23	20,3036
2-6	900	200	24,0547	5,164	0,76568	55,325	50,161	25	25,161
3-7	850	150	15,034	8,859	0,85075	52,2599	43,401	22	21,401
4-8	720	150	15,034	7,504	0,85075	48,5146	41,0108	21	20,0108

Tableau (5.12) : calcul des débits des tronçons en tenant compte du débit d'incendie

Désignation des tronçons	Débits (l/s)			
	en route (Q _r)	extrémité (Q _E)	α	de calcul (Q _C)
4-5	26,04	-	0,57735	15,034
4-8	26,04	16,67	0,51661148	30,123
3-4	36,456	68,75	0,5173938	87,6121
3-7	26,04	-	0,57735	15,034
2-3	52,08	131,246	0,51376481	158,00287
2-6	41,664	-	0,57735	24,0547
1-2	52,08	224,986	0,50863675	251,4758
1-R	-	277,066	0	277,066

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Le calcul des diamètres à partir des débits de calcul $Q_c = Q_E + \alpha Q_f$ permet d'obtenir une variante plus économique en diamètres.

Après ce calcul, il en résulte que le nœud n°8 est le nœud le plus défavorable dans ce réseau. Dans ce cas, on doit vérifier que le débit d'incendie, $Q_i = 16,67$, doit sortir en ce point sans que les vitesses et les pressions dépassent les limites autorisées.

Tableau (5.13): Vérification des caractéristiques des tronçons pour le cas de pointe plus incendie

Tronçons	L(m)	Ø(mm)	Q(l/s)	ΔH(m)	V(m/s)	H _{piéz} Amont (m)	H _{piéz} aval (m)	Cote au sol (m)	Pression au sol (m)
R-1	520	500	277,066	2,669	1,326	60,000	57,331	28	29,331
1-2	480	500	251,4758	2,006	1,196	57,331	55,325	26	29,325
2-3	620	400	158,00287	1,646	0,889	55,325	53,679	27	26,679
3-4	650	300	87,6121	3,745	1,006	53,679	49,934	24	25,934
4-5	500	150	15,034	5,211	0,85075	49,934	44,723	23	21,723
2-6	900	200	24,0547	5,164	0,76568	55,325	50,161	25	25,161
3-7	850	150	15,034	8,859	0,85075	53,679	44,82	22	22,82
4-8	720	150	30,123	7,504	0,85075	49,934	42,43	21	21,43

Nous avons élaboré un programme permettant de faire aisément les calculs d'un réseau ramifié.

Programme (5.12) : Calcul d'un réseau ramifié

<pre> Realnu,g, lambda0(1000),CPN(9) RealCTNN(9),PSol(9)Q(8),w(8) Real V(8),Re(8),d(8),lambda1(8) Real l(8), dh1(8),dh3(8), lambda2(8) Real lambda3(8) t=10 g=9.81 eps=0.002 d(1)=0.500 d(2)=0.500 d(3)=0.400 d(4)=0.300 d(5)=0.150 d(6)=0.200 d(7)=0.150 d(8)=0.150 </pre>	<pre> if (RE(i).LT.2320) then lambda1(i)=64/Re(i) dh1(i)=lambda1(i)*L(i)*v(i)**2/(2*d(i)*g) ENDIF if (RE(i).GT.2320) then lambda2(i)=0.3164/(Re(i)**0.25) lambda0(0)=lambda2(i) j=0 10 lambda0(j+1)=(- 2*LOG10((2.51/(Re(i)*SQRT(lambda0(j)))+(0.27*eps)/d(i))))**(-2) IF (ABS(Lambda0(j+1)-lambda0(j)).GT.0.00000001) THEN j=j+1 GO TO 10 END IF ENDIF lambda3(i)=lambda0(j) </pre>
---	--

<pre> L(1)=520 L(2)=480 L(3)=620 L(4)=650 L(5)=500 L(6)=900 L(7)=850 L(8)=720 Q(1)=0.260396 Q(2)=0.2348377 Q(3)=0.1414109 Q(4)=0.071091266 Q(5)=0.015034 Q(6)=0.0240547 Q(7)=0.015034 Q(8)=0.015034 CPN(0)=60 CTNN(1)=28 CTNN(2)=26 CTNN(3)=27 CTNN(4)=24 CTNN(5)=23 CTNN(6)=25 CTNN(7)=22 CTNN(8)=21 nu=(0.0178/(1+0.0337*t+0.000221*t **2))*0.0001 do i=1,8 w(i)=(3.14159265358979*d(i)**2)/4 V(i)=Q(i)/w(i) Re(i)=(V(i)*d(i))/nu </pre>	<pre> dh3(i)=lambda3(i)*L(i)*v(i)**2/(2*d(i)*g) end do write(*,*)'Affichage des résultats' write(*,*)'les nombres de Reynolds dans les tronçons' do i=1,8 WRITE (*,*)'Re(',i,')=',Re(i) end do write(*,*)'les coefficients de frottement dans les tronçons' do i=1,8 write(*,*)'lambda3(',i,')=',lambda3(i) end do write(*,*)'les pertes de charge et les vitesses dans les tronçons' DO i=1,8 Write(*,*)'dh3(',i,')=',dh3(i),'v(',i,')=',v(i) END DO DO K=1,5 CPN(K)=CPN(K-1)-dh3(K) Psol(K)=CPN(K)-CTNN(K) ENDDO CPN(6)=CPN(2)-dh3(6) Psol(6)=CPN(6)-CTNN(6) CPN(7)=CPN(3)-dh3(7) Psol(7)=CPN(7)-CTNN(7) CPN(8)=CPN(4)-dh3(8) Psol(8)=CPN(8)-CTNN(8) write(*,*)'les cotes piézométriques et pressions aux noeuds' DO k=1,8 write(*,*)'CPN(',k,')=',CPN(k), 'Psol(',k,')=',Psol(k) end do stop end </pre>
--	--

5.5 Simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement

Les réseaux d'assainissement sont généralement composés de tronçons à section transversale circulaire où l'écoulement de l'eau dans lesquels se fait à surface libre.

La vitesse moyenne dans un canal à surface libre est donnée par la relation de Chézy.

$$V = C\sqrt{R_H I}$$

Où C est le coefficient de Chézy en (m^{0.5}/s), R_H le rayon hydraulique en (m) et I le gradient hydraulique.

$$C = \frac{1}{n} R_H^{\frac{1}{6}}$$

Avec n est le coefficient de rugosité du canal.

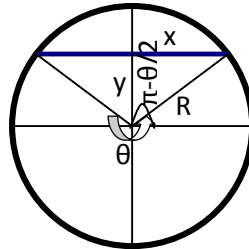
Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

L'expression de la section mouillée ayant une forme circulaire non pleine est donnée comme suit:

$$\omega = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin\theta)$$

L'expression du périmètre mouillé peut prendre la forme suivante :

$$\chi = R \cdot \theta$$



$$R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{R(1 - \theta \cdot \sin\theta)}{2}$$

$$V = \frac{1}{n} R_H^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{R(1 - \theta \cdot \sin\theta)}{2}} \cdot I$$

alors que le débit s'écrit sous la forme:

$$Q = \omega \cdot V = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin\theta) \cdot C \sqrt{R_H I} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin\theta) \frac{1}{n} R_H^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{R(1 - \theta \cdot \sin\theta)}{2}} \cdot I$$

Exercice n°12

a) Exécuter le programme relatif à la section transversale circulaire non pleine pour les données suivantes : $n=0,014$, $R=0,5m$ et $I=0,001$ afin de calculer :

b) La profondeur normale, la vitesse moyenne, la vitesse à pleine section et le rapport

$V/V(\text{plein section})$ dans un canal circulaire pour un angle compris entre 250 et 260°

c) Le débit pour un angle donné, le débit à pleine section, rapport Q/Q_{PS} (à pleine section) pour un angle compris entre 300 et 310.

d) Déduire les angles pour lesquels la vitesse et le débit sont maximums.

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Programme (5.12) : Calcul d'un écoulement à surface libre dans un canal à section transversale circulaire non pleine

<pre> Real tita(365),titar(365),a(365),b(365),c(365), d(365),v(365),h(365),t(365),rv(365),Q(365),Rq(365),w (365),x(365),RH(365) write (*,*) 'introduire la valeur du la pente=' read (*,*)p write (*,*)'introduire la valeur du Rugosité en =' read (*,*)en write (*,*)'imroduire la valeur du R=' read (*,*)R i=0 tita(i)=0 5 titar(i)=(tita(i)*3.14159265)/180. A(i)=R/(2*titar(i)) B(i)=titar(i)-SIN(titar(i)) C(i)=(A(i)*B(i))**(0.66666666) D(i)=(p**(0.5))*C(i) w(i)=((R**2)/2)*(titar(i)-SIN(titar(i))) x(i)=titar(i)*R RH(i)=w(i)/x(i) V(i)=D(i)/(en) Q(i)=((R**2/2)*b(i))*V(i) h(i)=R-COS(titar(i)/2)*R t(i)=(h(i)/(2*R))*100 if (tita(i).LT.360) then tita(i+1)=tita(i)+1 i=i+1 </pre>	<pre> goto 5 end if do i=0,360 Rv(i)=v(i)/v(360) Rq(i)=Q(i)/Q(360) end do do i=250,260 write (*,*)'W(',i,')=',W(i),'X(',i,')=',X(i),'RH(',i,')=',RH(i) end do do i=250,260 write (*,*)'h(',i,')=',h(i),'v(',i,')=',v(i),'Rv(',i,')= ',Rv(i) end do do i=300,310 write (*,*)'W(',i,')=',W(i),'X(',i,')=',X(i),'RH(',i,')=',RH(i) end do do i=300,310 write (*,*)'v(',i,')=',v(i),'Q(',i,')= ',Q(i),'Rq(',i,')= ',Rq(i) end do do i=300,310 write (*,*)'h(',i,')= ',h(i),'taux(',i,')= ',t(i) end do stop end </pre>
--	--

Tableau (5.14) : Résultats de calcul pour des angles compris entre 250 et 260°

θ°	Section (m ²)	Périmètre (m)	Rayon hydraulique (m)	Coefficient de Chézy (m ^{0.5} /s)	vitesse (m/s)	Rapport des vitesses	Profondeur d'eau (m)	Rapport (h/d)
250	0.66287702	2.18166161	0.30384043	58.56608580	1.02086663	1.13885999	0.78678823	78.67882540
251	0.66578692	2.19038844	0.30395839	58.56987760	1.02113080	1.13915467	0.79035157	79.03515630
252	0.66866082	2.19911504	0.30405906	58.57310870	1.02135623	1.13940620	0.79389274	79.38927460
253	0.67149854	2.20784163	0.30414253	58.57579040	1.02154326	1.13961482	0.79741144	79.74114230
254	0.67429978	2.21656823	0.30420890	58.57791900	1.02169180	1.13978052	0.80090755	80.09075160
255	0.67706448	2.22529483	0.30425832	58.57950210	1.02180243	1.13990402	0.80438071	80.43807220
256	0.67979234	2.23402166	0.30429086	58.58055110	1.02187538	1.13998532	0.80783081	80.78308110
257	0.68248332	2.24274826	0.30430669	58.58105850	1.02191079	1.14002490	0.81125736	81.12574010
258	0.68513715	2.25147486	0.30430594	58.58103180	1.02190912	1.14002299	0.81466025	81.46602630
259	0.68775380	2.26020145	0.30428872	58.58047870	1.02187037	1.13997984	0.81803918	81.80391690
260	0.69033301	2.26892805	0.30425513	58.57939910	1.02179527	1.13989604	0.82139385	82.13938140

Le tableau (5.14) permet de savoir quel est le taux de remplissage d'un canal à section transversale circulaire non plein pour avoir une vitesse maximale. On remarque que l'angle 257° donne la plus grande vitesse qui correspond un taux de remplissage d'environ 81,125%.

Les résultats pour des angles compris entre 300 et 310° sont représentés dans le tableau (5.14)

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Tableau (5.15) : Résultats de calcul pour des angles compris entre 300 et 310°

θ°	Section (m ²)	Périmètre (m)	Rayon hydraulique (m)	Coefficient de Chézy (m ^{0.5} /s)	débit (m ³ /s)	Rapport des débits	Profondeur d'eau (m)	Rapport (h/d) (%)
300	0.76275164	2.61799407	0.29134965	58.15776440	0.75717819	1.07549787	0.93301272	93.30127720
301	0.76382607	2.62672067	0.29079074	58.13915250	0.75727481	1.07563508	0.93517792	93.51779170
302	0.76486784	2.63544726	0.29022315	58.12022400	0.75732052	1.07570004	0.93730986	93.73098750
303	0.76587731	2.64417386	0.28964710	58.10098270	0.75731629	1.07569408	0.93940854	93.94085690
304	0.76685482	2.65290070	0.28906277	58.08142850	0.75726271	1.07561791	0.94147384	94.14738460
305	0.76780081	2.66162729	0.28847045	58.06157680	0.75716072	1.07547307	0.94350547	94.35054780
306	0.76871556	2.67035389	0.28787029	58.04142760	0.75701106	1.07526052	0.94550329	94.55033110
307	0.76959956	2.67908049	0.28726259	58.02098850	0.75681454	1.07498133	0.94746721	94.74671940
308	0.77045316	2.68780708	0.28664750	58.00026320	0.75657201	1.07463682	0.94939703	94.93970490
309	0.77127665	2.69653392	0.28602520	57.97925950	0.75628424	1.07422805	0.95129269	95.12927250
310	0.77207065	2.70526052	0.28539604	57.95798490	0.75595224	1.07375658	0.95315397	95.31539150

Le tableau (5.15) permet de savoir quel est le taux de remplissage d'un canal à section transversale circulaire non plein pour avoir un débit maximum. Donc, La valeur de l'angle qui donne, en écoulement à surface libre, le débit maximum dans un canal à section transversale circulaire est égale à 302° qui correspond à un taux de remplissage d'environ 93,73%.

Exercice n°13

Pour un écoulement à surface libre le débit augmente progressivement, dans un canal à section transversale circulaire, jusqu'au remplissage total de la section. On demande de tracer la fluctuation du rapport des vitesses/ vitesse à pleine section et du rapport débits/ débit à pleine section en fonction du rapport relative de remplissage (h/d).

Solution

On peut utiliser le programme (5.13) pour obtenir les résultats nécessaires pour tracer la fluctuation des rapports des vitesses et des débits.

Programme (5.13) : Calcul de simulation dans un canal à section transversale circulaire non pleine

<pre>Real tita(365),titar(365),a(365),b(365),c(365),d(365) real x(365),w(365),RH(365),cC(365),v(365),rv(365), h(365),t(365),Q(365),Rq(365) open (7,STATUS='unknown',FILE='resultat21.default') open (8,STATUS='unknown',FILE='resultat22.default') write (*,*) 'introduire la valeur du la pente=' read (*,*)p write (*,*)'introduire la valeur du Rugosité en =' read (*,*)en write (*,*)'introduire la valeur du R=' read (*,*)R i=0 tita(i)=0 5 titar(i)=(tita(i)*3.14159265)/180.</pre>	<pre>if (tita(i).LT.360) then tita(i+1)=tita(i)+1 i=i+1 goto 5 end if do i=0,360 Rv(i)=v(i)/v(360) Rq(i)=Q(i)/Q(360) end do do i=0,360 write(7,1)w(i),x(i),RH(i),cC(i),v(i),Rv(i),h(i),t(i) 1 format (5x,8f12.8) end do write (7,*)'fin de programme'</pre>
---	---

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

<pre> A(i)=R/(2*titar(i)) B(i)=titar(i)-SIN(titar(i)) C(i)=(A(i)*B(i)**(0.66666666)) D(i)=(p**(0.5))*C(i) V(i)=D(i)/(en) Q(i)=((R**2/2)*b(i))*V(i) W(i)=((R**2/2)*b(i)) x(i)=R*titar(i) RH(i)=w(i)/x(i) cC(i)=(1/en)*(Rh(i)**(0.16666667)) h(i)=R-COS(titar(i)/2)*R t(i)=(h(i)/(2*R))*100 </pre>	<pre> close (7) do i=0,360 write(8,2)w(i),x(i),RH(i),cC(i),Q(i),RQ(i),h(i),t(i) 2 format (5x,8f12.8) end do write (8,*)'fin de programme' close (8) stop end </pre>
--	---

Il faut éviter de dimensionner les tronçons des réseaux d'assainissement à des rapports de la vitesse à la vitesse à la section pleine inférieur à 1/10. Pour la simple raison d'éviter les dépôts dans les tronçons.

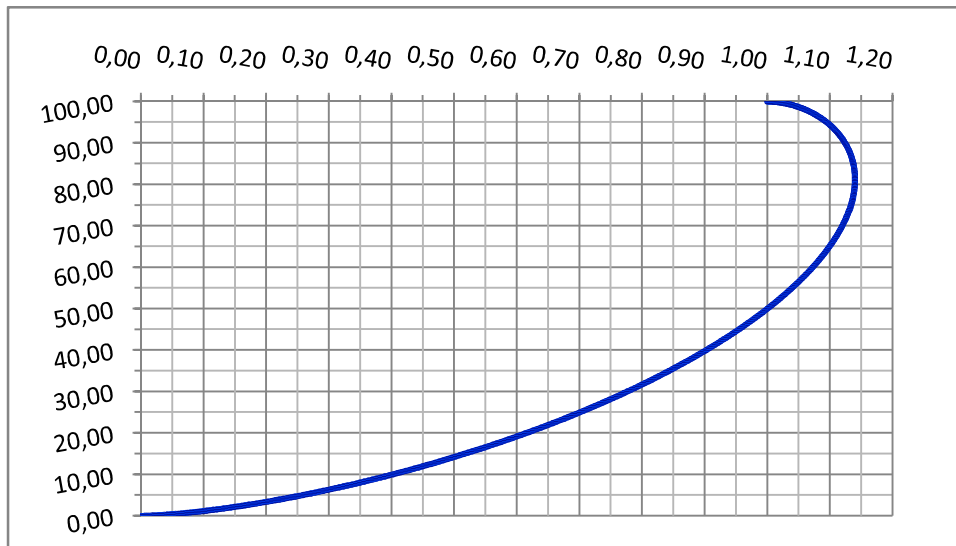


Fig. (5.11) : Pourcentage de remplissage de la section transversale d'un canal circulaire en fonction du rapport de la vitesse à la vitesse à section pleine

Le rapport de vitesse à la vitesse à pleine section permet de déduire pour quel angle, ou bien pour quelle hauteur relative de remplissage la vitesse de l'eau dans le canal est maximale. Dans notre exemple, cette hauteur est de l'ordre de 81.1257% du diamètre du canal.

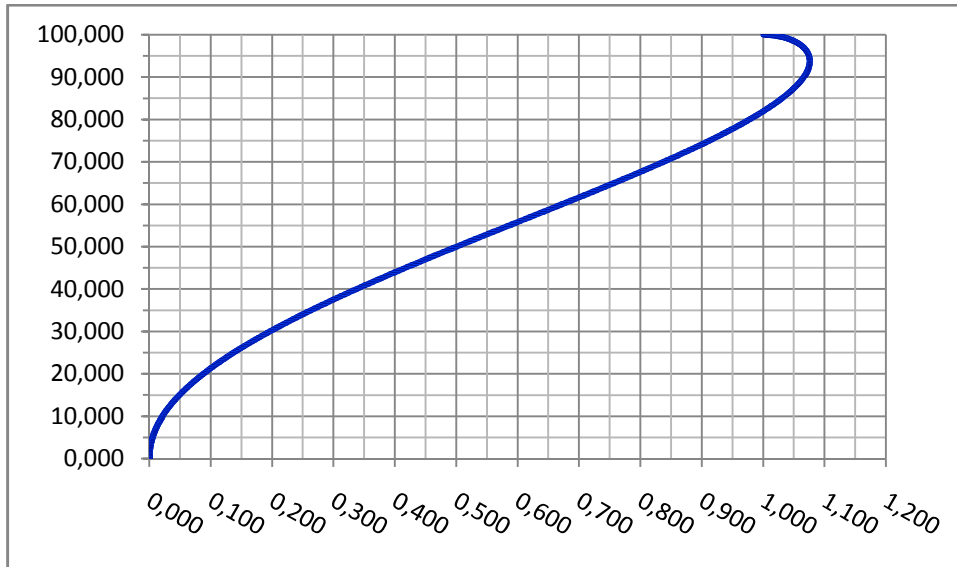


Fig. (5.12) : Pourcentage de remplissage de la section transversale d'un canal circulaire en fonction du rapport du débit au débit à section pleine

Le rapport du débit au débit à pleine section permet de déduire pour quel angle ou bien pour quelle hauteur relative de remplissage le débit traversant le canal est maximum, dans notre exemple, cette hauteur peut atteindre jusqu'à 93.73% du diamètre du canal d'une part et d'autre part il permet de soustraire la vitesse d'autocurage qui correspond à $1/10^{\text{ème}}$ du débit à pleine section ($Q_{p.s}/10$).

0,70402575) soit une vitesse de 0,0896 m/s. il est à noter également qu'un réseau d'assainissement fonctionne dans de bonnes conditions quand le taux de remplissage est inférieur ou égal à 80%, soit un vide au-dessus de la surface libre qui n'excède pas 20% pour que l'écoulement ne sera pas gêné dans le réseau.

5.6 Conclusion

Le suivi de l'allure de la courbe des écoulements graduellement variés à surface libre dans les canaux à pentes positive, négative et nulle engendre les types M qui est lui-même composé des courbes (M1, M2 et M3) en régime fluvial, S (S1, S2 et S3) en régime torrentiel, A (A2 et A3) pour les canaux à contre pente, H (H2 et H3) pour les canaux horizontaux (pente nulle) et C (C1 et C3) pour les canaux à pente critique. Toutefois, le traçage de l'une de ces courbes, par l'un des procédés les plus couramment utilisés, nécessite un calcul très délicat ce qui nous a obligé de réaliser quelques programmes permettant de le rendre aisé.

Cette partie peut aider davantage ceux qui s'intéressent au domaine, de l'écoulement de l'eau dans l'atmosphère ou par transvasement à partir d'un barrage ou d'un réservoir à travers un orifice ou un ajutage. Nous avons examiné plusieurs formes des réservoirs du fait que la forme rentre considérablement dans l'estimation du temps de descente ou de montée du plan d'eau d'un niveau à l'autre. L'expression permettant de calculer le temps de déplacement du niveau d'eau, dans l'un ou l'autre direction, prend plusieurs formes. A cet effet, nous avons réalisé un programme de chaque forme.

Chapitre V Modélisation et simulation des écoulements

Les réseaux d'alimentation en eau potable ont pris également leurs parts en programmation afin de calculer leur équilibrage avec finesse et déterminer par la suite tous les paramètres caractéristiques de ces réseaux.

Le calcul des réseaux d'assainissement nécessite obligatoirement le passage par les relations de base qui régissent les écoulements de l'eau dans lesquels. A cet effet, la détermination des rapports $V/V_{P,S}$, $Q/Q_{P,S}$ et h/d ainsi que le traçage des courbes $V/V_{P,S}$ et $Q/Q_{P,S}$ en fonction de (h/d) de chaque conduite permettent de dimensionner avec exactitude le réseau.

Ce qui reste aux intéressants de ce domaine est le développement de ces programmes pour les rendre applicables aux réseaux de taille, mettre à la portée des gens des logiciels qui permettent de calculer le temps de passage du plan d'eau d'un niveau à l'autre quel que soit la forme du réservoir d'une part et d'autre part de réaliser le calcul des courbes de remous et de décrues quel que soit le type de la courbe et le régime d'écoulement.

Conclusion générale

Conclusion générale

La modélisation et la simulation, d'un domaine, s'avère d'une grande importance, vu l'essor informatique que connaît notre ère et la précision méticuleuse donnée par les méthodes et les techniques numériques développées depuis l'antiquité à nos jours. A l'instar des autres disciplines, le domaine de l'engineering est d'une importance primordiale pour prévoir certaines grandeurs afin de prendre les meilleures décisions probables.

La résolution des équations non linéaires montre qu'il existe plusieurs façons pour aboutir aux résultats, mais le choix de l'un ou de l'autre manière dépend de sa convergence, sa robustesse, sa stabilité et sa précision.

La résolution du système d'équations se fait par des méthodes directes et des méthodes indirectes. Toutefois, les conditions initiales et aux limites, la convergence et la stabilité du problème, à résoudre, dans certains cas exige l'un ou l'autre méthode par rapport aux autres.

La présentation de la technique des différences finies, pour la résolution des équations aux dérivées partielles, et ses étendues vers les équations du premier et de second ordre donne un outil facile, efficace et moderne pour résoudre, surtout, dans certains problèmes où leur solution analytique est ardue.

La connaissance de la méthode des éléments finis pour transformer la résolution des problèmes difficiles, liés par exemple aux formes géométriques complexes, à des problèmes simples peut aider l'utilisateur fortement à estimer et prévoir ce qu'il faut faire dans telle ou telle situation.

L'utilisation de la méthode des volumes finis, pour estimer certaines grandeurs physiques, peut également rentrer dans l'apprentissage de l'une des techniques pratiques les plus répandues dans le domaine de l'engineering, à l'instar du domaine de l'énergie afin de l'utiliser là où il faut.

La réalisation des courbes de remous et de décrues, pour les pentes positive, négative et nulle, en se basant sur les programmes des techniques existantes peut rendre leurs calculs aisés. S'ajoute à celle-ci les écoulements à charge variable, à partir d'un réservoir prismatique ou non prismatique, à travers un orifice et l'écoulement par transvasement.

La simulation des réseaux d'A.E.P ramifié et maillé ainsi que les réseaux d'assainissement ont été également notre cible dans ce travail.

Enfin, la résolution numérique de certains problèmes en hydraulique, en se basant sur les formules analytiques obtenues ainsi que les méthodes précitées, s'avère d'une importance primordiale pour consolider et réarranger avec pertinence les connaissances acquises des lecteurs dans le domaine de la modélisation et de la simulation.

Je ne connais rien et je ne connais qu'une seule vérité que je ne connais rien.

Enfin, je dis que seulement celui qui ne travaille pas qui ne trompera pas du fait que sa grande erreur est qu'il ne fait rien.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Abbes AZI, Méthodes numériques appliquées aux calculs des écoulements et du transfert de chaleur, méthode des volumes finis, page 31- page 40.
- [2] Amar KHENNANE, Méthodes des éléments finis, Enoncé des principes de base, OPU : 11-1997, 198 pages.
- [3] AMTOUT Lounis, cahier du module méthodes appliquées, ENSH, 2006/2007.
- [4] BABA-HAMED C & BENHABIB K, Algèbre I, rappels de cours et exercices avec solutions, OPU, Réimpression 1992, 285 pages.
- [5] DAMOU Merzak, cahier du module analyse fonctionnelle, Chapitre de la méthode des volumes finis, ENSH, 2005/2006.
- [6] D. Pastre, méthodes numériques 2001/2002, Université René Descartes, UFR de mathématiques et informatiques, Chapitre 10, méthodes itératives 4.
- [7] F. Pascal et S. Martin, résolution d'équations différentielles avec conditions aux limites ; Epreuve de modélisation (option calcul scientifique TP18 2008-2009).
- [8] George KOEPFLER, optimisation et algorithmes M1 MI 2009-2010, UFR de Mathématiques et Informatique, université Paris Descartes.
- [9] HARHAD. A, cahier du module d'analyses numériques, ENSH, 1994/1995.
- [10] <https://perso.univ-rennes1.fr/Marie-Pierre.lebaud/agint/ecrit/analyse-reelle/> Equations-Non Linéaires/X-racine.
- [11] <https://www.unige.ch/-wanner/teaching/Numi/Numi6.pdf>, Chapitre IV, Méthodes Itératives – Equations Non Linéaires.
- [12] KADA ALLAB, éléments d'analyses, fonction d'une variable réelle, OPU, réimpression 1993, 510 pages.
- [13] Mohamed HANOUI, 19 programmes BASIC. Entreprise nationale du livre, 151 pages.
- [14] Nadir SOUALEM, méthode du pivot de Gauss, 01 Juin 2006.
- [15] Nadir SOUALEM, méthode de Jacobi, 20 Mai 2006.
- [16] Nadir SOUALEM, méthode de Gauss-Seidel, 29 Mai 2006.
- [17] Nadir SOUALEM, méthode du gradient conjugué, 12 Octobre 2005.
- [18] PD Smith, Basic hydraulics, 155 pages.
- [19] Pierre Liétar, Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Jacobi et par la méthode de Gauss-Seidel, 13/12/2003.