République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 08 Mai 1945 de Guelma

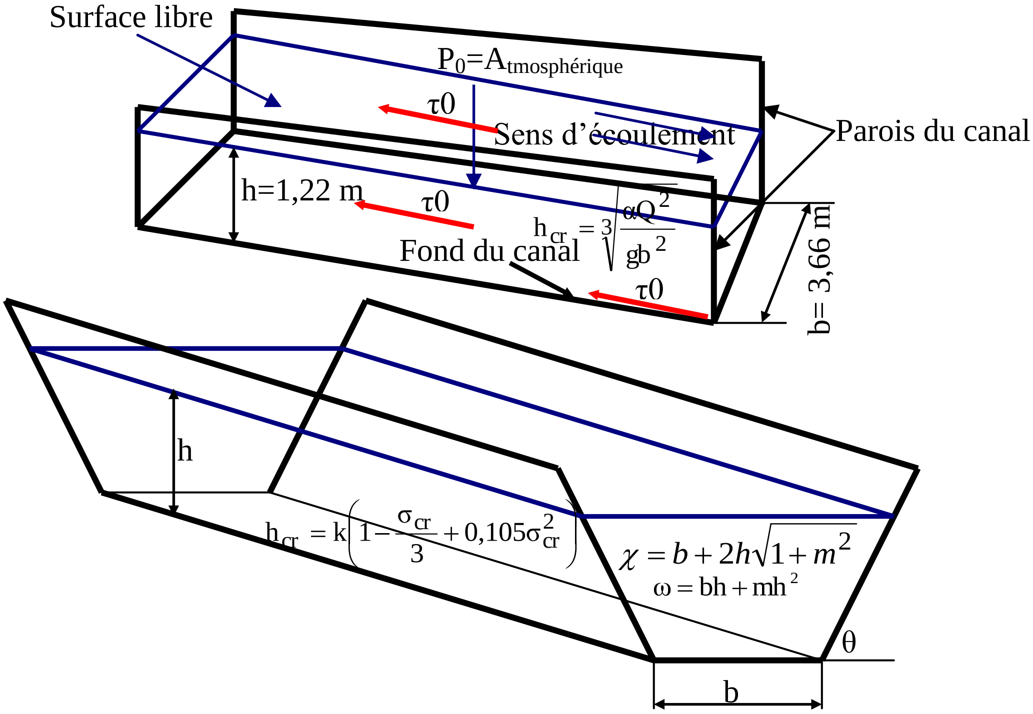
Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Civil et d'Hydraulique

Hydraulique à surface libre

Cours & Exercices

Fait par : Dr. TOUMI Abdelouaheb



Octobre 2016

SOMMAIRE

NOTATIONS

v_x : vitesse d'écoulement selon la direction x
t : le temps
h : la profondeur d'eau
L : longueur du canal
Re : nombre de Reynolds
P_{atm} : pression atmosphérique
ω: section mouillée
χ : périmètre mouillé
R_H : rayon hydraulique
B : Largeur superficielle à la surface libre
h_m : profondeur moyenne d'eau
I_r : pente géométrique du fond du radier du canal
I_p : pente piézométrique
I : pente hydraulique (gradient hydraulique)
α: coefficient de Coriolis
V_1 : vitesse moyenne d'écoulement à la section numéro 1
g : accélération de la pesanteur
z_1 : cote du fond de la section numéro 1 par rapport au plan horizontal de référence (P.H.R)
h_1 : profondeur d'eau dans la section numéro 1
θ : angle d'inclinaison du canal par rapport au plan horizontal de référence (P.H.R)
z_2 : cote du fond de la section numéro 2 par rapport au plan horizontal de référence (P.H.R)
h_2 : profondeur d'eau dans la section numéro 2
V_2 : vitesse moyenne d'écoulement de la section numéro 2
ΔH_L : perte de charge linéaire sur une distance L
dz : différence de niveau entre les deux cotes géométriques des sections 1 et 2
dh : différence de la profondeur d'eau entre la section 1 et 2
dL : différence de longueur entre les sections 1 et 2
H_1 : Energie totale au niveau de la section 1 rapportée à l'unité de poids
H_2 : Energie totale au niveau de la section 2 rapportée à l'unité de poids
H_1-H_2 : différence d'énergie totale rapportée à l'unité de poids
x : l'espace selon la direction x
$\frac{du}{dx}$: Variation de la vitesse par rapport à l'espace x
Δt : variation du temps entre t_{i+1} et t_i
F_r : nombre de Froude
ρ: la masse volumique de l'eau
U_c : vitesse caractéristique
L_c : longueur caractéristique
μ : viscosité dynamique de l'eau
ν : viscosité cinématique
ε : hauteur de rugosité
G : le poids de l'eau
τ_0 : la contrainte tangentielle visqueuse moyenne
sinα : sinus de l'angle α
tgα : tangente α
ξ : une grandeur variable
d : diamètre d'une conduite de forme circulaire
λ : coefficient de frottement
C : coefficient de Chézy

n : coefficient de rugosité
y : exposant pour déterminer le coefficient de Chézy
k : paramètre de Poli
n_{min} : rugosité minimale
n_{moy} : rugosité moyenne
n_{max} : rugosité maximale
n_{eq} : rugosité équivalente
τ : contrainte tangentielle
m : l'écartement du talus
p : paramètre de la parabole
θ : l'angle d'inclinaison
b : largeur du canal à la base
R : rayon du cercle
χ_{min} : périmètre minimum
R_{Hmax} : rayon hydraulique maximal
C : la cohésion
v_e : vitesse d'érosion
C_{FP}^{N} : Résistance de fatigue à l'arrachement
ρ_s : poids spécifique
v_{aff} : vitesse d'affouillement
h_n : profondeur normale dans un canal
E_s : énergie spécifique par unité de poids « J/N=m »
L' : distance horizontale du canal
E_{cin} : énergie cinétique
E_{pot} : énergie potentielle
E_{min} : énergie minimale
h_{cr} : la profondeur critique
q : le débit par unité de largeur (m^3/s/m)
Q : le débit total (m^3/s)
v_c : vitesse critique (m/s)
E_c : énergie critique
k : paramètre utilisé pour le calcul de h_{cr}
σ_{cr} : paramètre utilisé pour le calcul de h_{cr}
h_0 : profondeur d'eau en régime uniforme
i_0 :la pente en régime uniforme
i_{cr} : la pente critique
ω_{cr} : section critique
χ_{cr} : périmètre critique
R_{cr} : rayon hydraulique critique
B_{cr} : largeur hydraulique critique
C_{cr} : coefficient de Chézy critique
P_{cin} : paramètre cinétique
K : la débitance en régime non uniforme
dh : variation de la profondeur
dx : variation de la longueur du canal
K_0 : débitance en régime uniforme
M1 : courbe de remous en régime fluvial
M2 : courbe de décrue en régime fluvial
M3 : courbe de remous en régime fluvial
S1 : courbe de remous en régime torrentiel

S2 : courbe de décrue en régime torrentiel
S3 : courbe de remous en régime torrentiel
C1 : courbe de remous en régime critique
C2 : courbe de remous en régime critique
H2 : courbe de décrue pour une pente nulle i=0
H2 : courbe de remous pour une pente i=0
A2 : courbe de décrue pour i<0
A3 : courbe de remous pour i<0
a : hauteur du ressaut
h' : première profondeur conjuguée dans le ressaut
h'' : La deuxième profondeur conjuguée dans le ressaut
F(h) : La fonction du ressaut
χ_{Rh} : Coefficient empirique de Rajaratnam
α' : Coefficient de la quantité de mouvement ou coefficient Boussinesq
$h_{p.c}$: pertes de charge dans le ressaut
η : rendement du ressaut
L_{res} : longueur du ressaut
$L_{av.r}$: longueur de la zone aval du ressaut
H : charge au-dessus de la crête du seuil
S : épaisseur du seuil
V_0 : La vitesse d'approche de l'eau
b: La largeur du déversoir
H_0 : la charge totale au-dessus du déversoir
m: Le coefficient de débit du déversoir
P_{jet} : La pression à la sortie du jet
V_{jet} : La vitesse du jet
Z_{jet} : la cote du jet par rapport au plan horizontal de référence
$\Sigma\Delta H$: La somme des pertes de charge
m_0 : le coefficient de débit du déversoir sans tenir compte de la vitesse d'approche V_0
P1, P : la hauteur du seuil en amont et en aval de l'ouvrage
a: l'écartement du seuil par rapport à l'horizontal
Δ : la différence entre le niveau d'eau dans le bief aval et la hauteur du seuil aval
h_{av} : la hauteur d'eau en val du seuil
z :la différence entre le niveau d'eau entre l'amont et l'aval du seuil
(z/P) : La chute relative
$(z/P)_{cr}$: la valeur critique de la chute relative
σ_n : Coefficient qui tient compte des conditions d'aval de l'écoulement
B : La largeur du canal d'amené
m_c: coefficient de débit d'un déversoir contacté
m_{tr} : coefficient de débit d'un déversoir triangulaire
m_{trpz} : coefficient de débit d'un déversoir trapézoïdal
m_{parab} : coefficient de débit d'un déversoir parabolique
m_{rep} : coefficient représentatif du débit du déversoir
σ_f : coefficient de forme qui tient compte de la forme de la crête du déversoir
σ_H : coefficient de rendement de la charge
ε : coefficient de contraction latérale
a : coefficient qui est en fonction de la forme de la pile.

CHAPITRE I

Généralités sur les écoulements à surface libre dans les canaux

1-1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons aborder quelques définitions, que nous les avons jugé utile, pour la bonne compréhension de l'écoulement à surface libre. Avant de s'étaler sur les différents types d'écoulement à surface libre dans les canaux, nous devons mettre un aperçu sur les différents types de canaux et leurs caractéristiques géométriques et hydrauliques, puis nous allons mettre en exergue les différents régimes d'écoulement à surface libre.

1-2 Quelques définitions

1-2-1 Définition de l'écoulement à surface libre :

Un écoulement à surface libre est un écoulement dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

1-2-2 Définition de l'écoulement stationnaire (permanent) :

L'écoulement est dit permanent si les caractéristiques d'écoulement, en tout point, sont invariantes dans le temps ($\partial v/\partial t = 0$; $\partial h/\partial t = 0$, etc.).

1-2-3 Définition de l'écoulement non stationnaire (non permanent) :

L'écoulement est dit non stationnaire si les caractéristiques d'écoulement, en tout point, sont en fonction du temps ($\partial v/\partial t \neq 0$; $\partial h/\partial t \neq 0$, etc.).

1-12-4 Définition de l'écoulement uniforme :

L'écoulement uniforme implique deux conditions : la permanence et la continuité.
L'écoulement est uniforme si la profondeur, la pente, la vitesse et la section droite demeurent constantes sur une longueur donnée du canal ($\partial h/\partial L = 0$; $\partial v/\partial L = 0$; etc.)

1-2-5 Définition de l'écoulement non uniforme :

L'écoulement est non uniforme quand la profondeur de l'écoulement varie le long du canal ouvert : $\partial h/\partial L \neq 0$. L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non. On peut également le qualifier de tranquille, rapide ou critique.

1-2-6 Définition de l'écoulement laminaire :

L'écoulement laminaire se produit généralement dans les canaux ouverts pour des valeurs du nombre de Reynolds, Re, inférieures ou égales à 2320. (Lors du calcul du nombre de Reynolds en utilisant le rayon hydraulique $R_{H,}$ la valeur limite de Re est de 580).

1-2-7 Définition de l'écoulement turbulent

L'écoulement turbulent se produit généralement dans les canaux ouverts pour des valeurs du nombre de Reynolds, Re, supérieures à 10000.

1-3 Les canaux

1-3-1 Définition d'un canal : On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

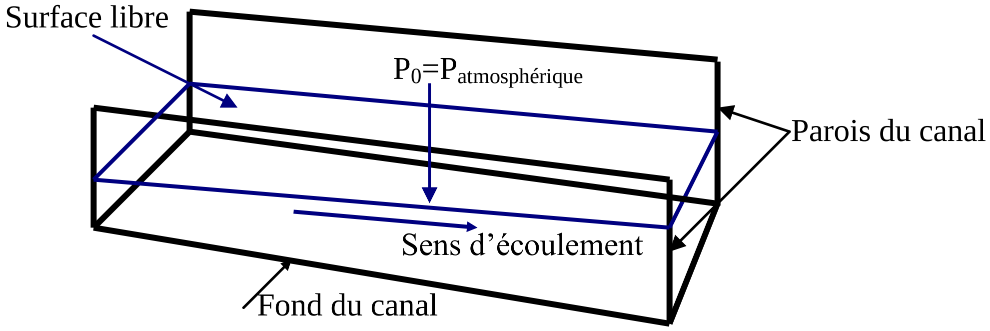


Fig. 1.1 : Schéma représentatif d'un canal

1-3-2 Les différents types de canaux

On distingue deux catégories de canaux :

a) Les canaux naturels
b) Les canaux artificiels

1-3-2-1 Les canaux naturels :

On peut ajouter aux canaux naturels les cours d'eau qui existent naturellement sur ou sous la surface de la terre tels que : les ruisselets, ruisseaux, torrents, ravins, rivières, fleuves et estuaires.

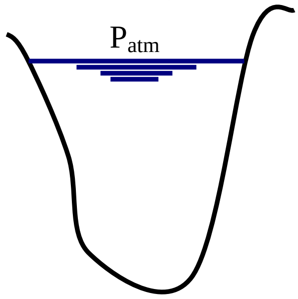


Fig. 1.2: Canal naturel

1-3-2-2 Les canaux artificiels :

Ce sont les cours d'eau réalisés par l'homme sur ou sous la surface de la terre tels que : les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction, d'évacuation, d'irrigation et de drainage ou les canaux couverts dans lesquels l'eau ne remplit pas toute la section du canal tels que : tunnels hydrauliques, aqueducs, drains et égouts.

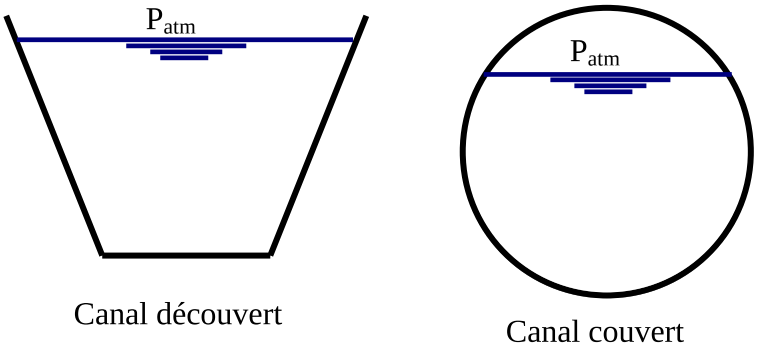


Fig. 1. 3 : Types de canaux artificiels

1-3-3 Définition d'un canal prismatique :

Un canal prismatique est un canal dont la section transversale, la pente longitudinale et la rugosité sont constantes, alors que la hauteur pourrait être variable.

Ultérieurement, nous allons utiliser la notion d'un canal prismatique artificiel ou tout court canal prismatique. On peut mettre dans cette catégorie les canaux ouverts ceux dont les paramètres (sauf la profondeur) caractérisant la forme de la section transversale restent constants le long du canal. En général, les canaux naturels ne sont pas prismatiques.

1-3-4 Propriétés géométriques et hydrauliques des canaux

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont irrégulières et l'application des théories hydrauliques donne des résultats approximatifs. Par ailleurs, les propriétés hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application des théories hydrauliques sur ces derniers donne souvent des résultats réalistes.

1-3-4-1 La section

Les éléments géométriques d'une section liquide en hydraulique à surface libre sont les suivants :

a) La section mouillée (ω) : c'est une section plane, normale à la direction de l'écoulement, dans le système international (S.I) son unité est le mètre carré (m^2).

Exemple : Prenons le cas le plus simple des canaux artificiels, le canal à section transversale rectangulaire.

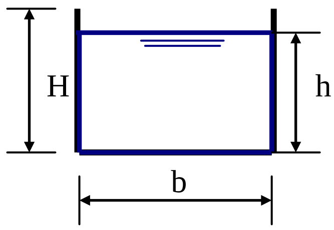


Fig.1.4 : Canal rectangulaire

Pour le canal rectangulaire représenté sur la figure 1.4,la section géométrique S=b.H alors que la section mouillée ω=b.h

La section mouillée b) Le périmètre mouillé (χ) : c'est la partie du canal en contact avec l'eau, il a comme unité le mètre (m).

Exemple : Prenons l'exemple précédent.

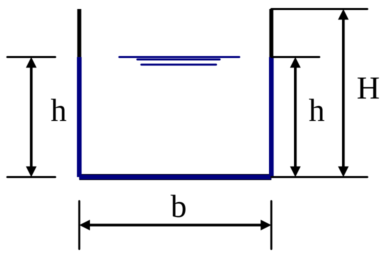


Fig .1.5 : Le périmètre mouillé d'un canal à section transversale rectangulaire

Le périmètre géométrique P=b+2 .H alors que le périmètre mouillé χ=b+h+h soit **χ=b+2.h**

c) Le rayon hydraulique (R_H) : c'est le rapport entre la section mouillée et le périmètre mouillé $R_H= \omega/\chi$

d) La profondeur d'eau (h) : c'est la profondeur du point le plus bas de la section transversale.

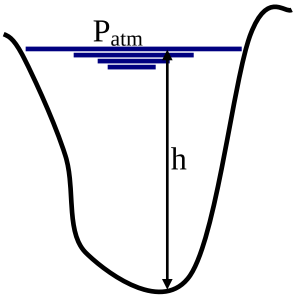


Fig .1.6 : La profondeur d'eau dans un canal

e) La largeur superficielle de la surface libre (B) : c'est la distance qui sépare la rive droite de la rive gauche normalement à la direction de l'écoulement.

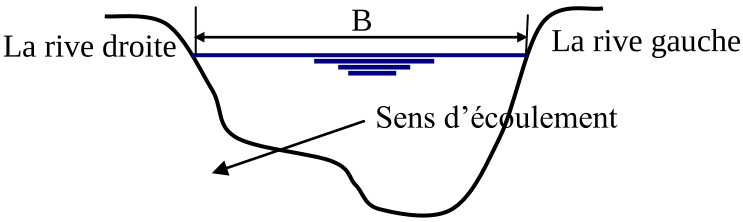


Fig .1.7: La largeur superficielle d'un canal

f) La profondeur moyenne (hm) : Elle est définie comme étant le rapport entre la section mouillée (**ω**) et la largeur au miroir (largeur superficielle de la surface libre « B »)

1-3-4-2 Les pentes

On distingue trois (3) types de pentes :

- Pente géométrique (pente longitudinale du radier « I_r ») ;
- Pente piézométrique (I_P) ;
- Pente hydraulique ou gradient hydraulique (I).

La Fig.1.2, illustre les différentes pentes entre deux sections (1-1) et (2-2).

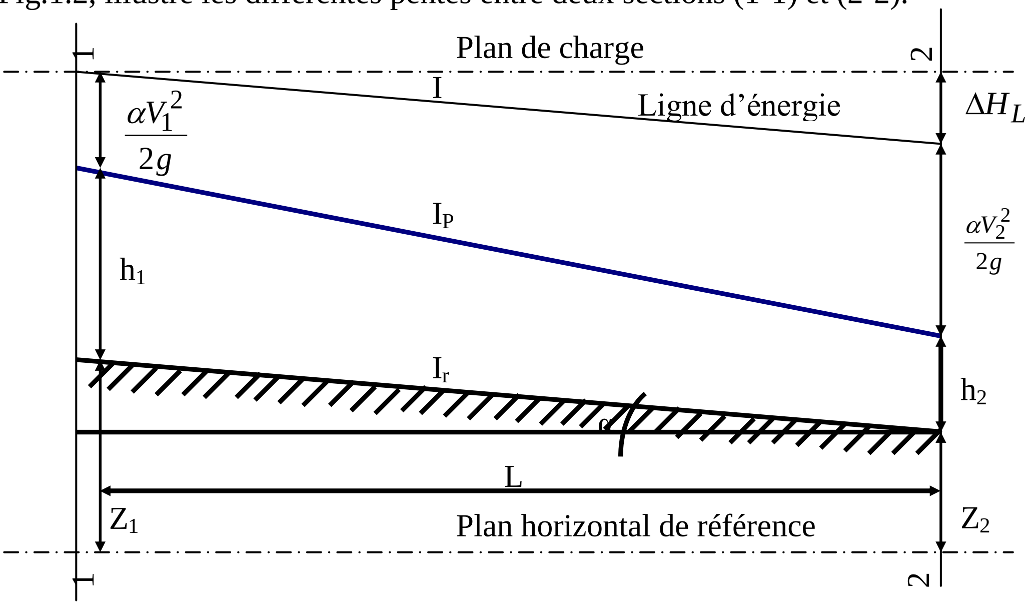


Fig.1.8 : Présentation graphique des différentes pentes en hydraulique

a) La pente géométrique (I_r ou I_F):
Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de cotes de deux sections et la distance horizontale.

$$I_r = \frac{Z_1 - Z_2}{L} = \frac{dZ}{dL}$$

Elle est peut être négative, nulle ou positive.

b) La pente piézométrique (I_P):
Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de la profondeur d'eau de sections et la distance horizontale qui les sépare.

$$I_p = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{dh}{dL}$$

Elle est peut être négative, nulle ou positive.

c) La pente hydraulique (I) :
Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de l'énergie totale de sections et la distance horizontale qui les sépare.

$$I = \frac{\Delta H_L}{L}$$

Sachant que :

$$\Delta H = H_1 - H_2$$

$$H_1 = Z_1 + h_1 + \frac{\alpha V_1^2}{2g} \quad H_2 = Z_2 + h_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g}$$

avec :
Z : la cote géométrique ;
h: la profondeur d'eau dans le canal ;
α : le coefficient de Coriolis, il est compris entre (1:1,10) ;
V : la vitesse moyenne d'écoulement ;
g: l'accélération de la pesanteur, elle est prise égale à 9,81 m/s^2 ;
$\frac{\alpha V_1^2}{2g}$: hauteur dynamique.
Elle est positive, et elle est nulle pour les liquides parfaits.

1-4 Les écoulements dans les canaux

Les écoulements dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre. Ces derniers sont dus à la pente du canal et non comme pour les conduites à la différence de charge.
Parmi les écoulements à surface libre qu'on peut rencontrer en hydraulique fluviale on peut citer les écoulements suivants:

Par rapport à l'espace :
- a) L'écoulement uniforme
- b) L'écoulement non uniforme.

Par rapport au temps
- a) L'écoulement permanent
- b) L'écoulement non permanent

1-4-1 Les différents types d'écoulements dans un canal

Une classification des écoulements à surface libre peut se faire selon la variabilité de la profondeur, h, par rapport au temps et l'espace.

$D_h=f(t,x)$ ou bien $h=f(t,x)$

1-4-1-1 Variabilité dans le temps

a- L'écoulement permanent :

L'écoulement est permanent si les vitesses moyennes et ponctuelles (V et U) ainsi que les la profondeur h ou dh restent invariables dans le temps en tout point dans l'espace dans toutes les directions, par conséquent le débit est constant entre les divers sections du canal (sans apport latéral).

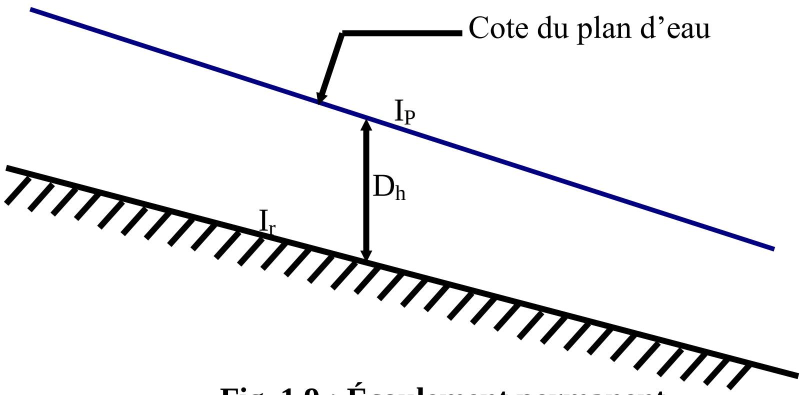


Fig. 1.9 : Écoulement permanent

b- L'écoulement non permanent :

L'écoulement est non permanent si la profondeur d'eau dh ainsi que les autres paramètres (V et U) varient avec le temps et par conséquent le débit n'est pas constant.

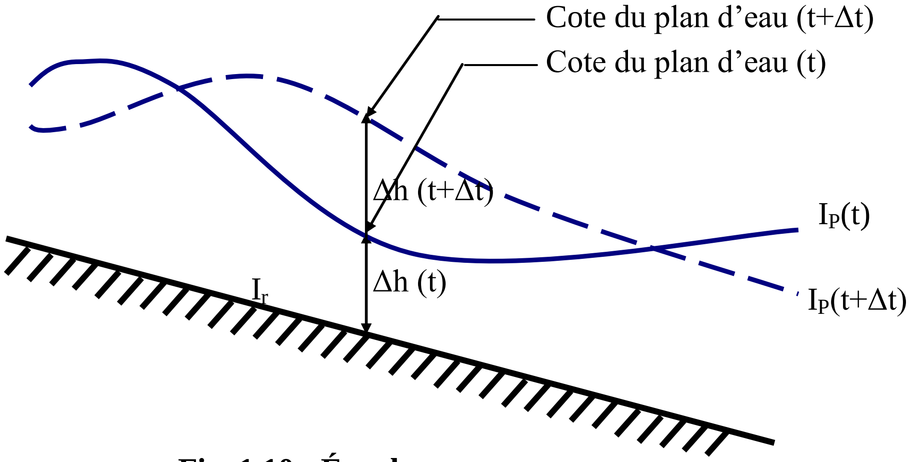


Fig. 1.10 : Écoulement non permanent

1-4-3-2 Variabilité de l'écoulement dans l'espace

a- Définition de l'écoulement uniforme :
L'écoulement est uniforme si la profondeur d'eau h ainsi que les autres paramètres (V et U) restent invariants le long de l'écoulement (d'une section à une autre) et $I=I_P$.

b- Définition de l'écoulement non uniforme :
L'écoulement est non uniforme (variant) si la profondeur d'eau h ainsi que les autres paramètres varient le long de l'écoulement (d'une section à une autre) c'est-à-dire $I \neq I_P$.
L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non permanent ; il est peut être accéléré ($\frac{du}{dx} > 0$) ou décéléré ($\frac{du}{dx} < 0$).

Sur la figure 1.11, nous représentons un schéma qui permet de visualiser les écoulements précités.

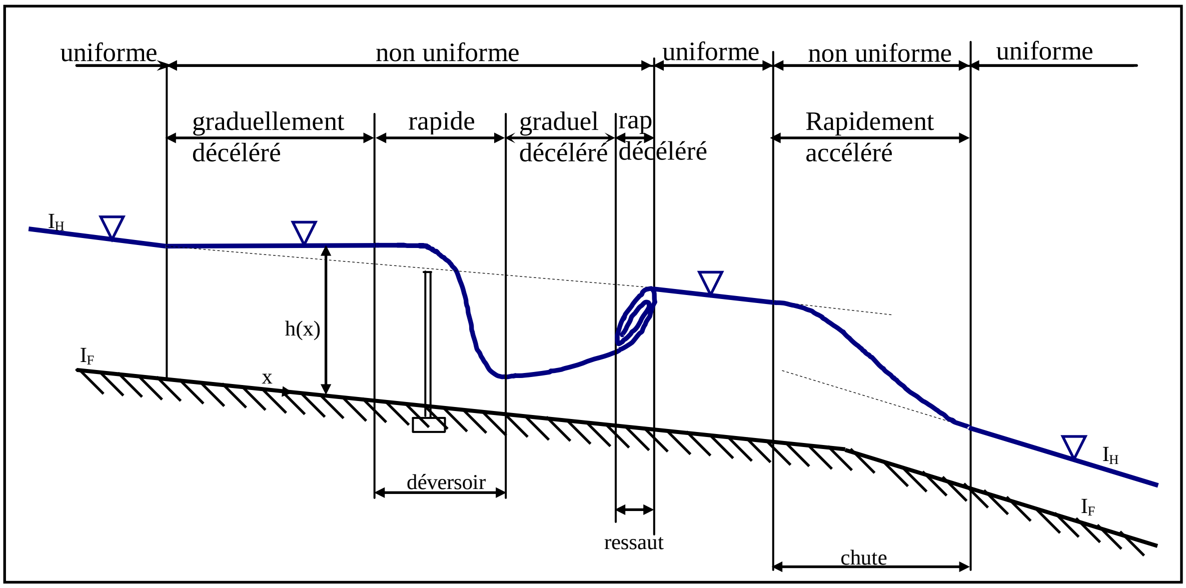


Fig. 1.11 : Variabilité des écoulements dans l'espace

Lors de l'écoulement graduellement varie la profondeur h(x) ou D_h est presque constante ainsi que les autres paramètres ne changent que très lentement d'une section à l'autre, on peut admettre que l'écoulement est quasi uniforme le long d'un petit tronçon et la vitesse reste quasiment constante.

Lors de l'écoulement rapidement varie la profondeur h(x) ou D_h et les autres paramètres changent brusquement parfois sur des discontinuités (au voisinage de singularité, déversoir, rétrécissement, élargissement, ressaut, chute brusque etc.).

1-5 Régimes d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre est soumis aux forces suivantes :

- Forces d'inertie,
- Forces de gravité,
- Forces de frottement (viscosité et rugosité).

Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients ou nombres adimensionnels suivants :

Le nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité ou :

$$Fr^{-2} = \frac{\rho g}{\rho U_c^2 / L_c} = \frac{gL_c}{U_c^2} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{U_c}{\sqrt{gL_c}}$$

Le nombre de Reynolds, qui est le rapport entre les forces d'inertie et celles de frottement ou :

$$Re^{-1} = \frac{\mu(U_c / L_c^2)}{\rho U_c^2 / L_c} = \frac{\nu}{U_c L_c} \quad \text{et} \quad Re = \frac{U_c L_c}{\nu}$$

U_c et L_c représentant une vitesse et une longueur caractéristiques ; on prend souvent $U_c=U$ et $L_c=R_H$ ou $L_c=D_h$

Pour l'étude hydraulique des canaux, on définit habituellement les nombre adimensionnels suivants :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} \;;\quad Re = \frac{4R_H U}{\nu} \quad \text{Ou}\ Re' = \frac{R_H U}{\nu} \;;_r = \frac{\varepsilon}{D_h}.$$

Le rôle du nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :

Ecoulement fluvial $Fr < 1$
Ecoulement torrentiel $Fr > 1$
Ecoulement critique $Fr \equiv Frc = 1$

Dans la pratique, on rencontre ces trois types d'écoulement.

Le rôle du nombre de Reynolds est de permettre la distinction entre les écoulements comme suit :

Ecoulement laminaire $Re' < 580$
Ecoulement turbulent $Re' > 2320$
Transition $580 < Re' < 2000$

Les expériences avec différents canaux artificiels montrent que l'écoulement est turbulent dès que le nombre de Reynolds, Re', atteint des valeurs 2000. Dans la pratique, les écoulements sont souvent turbulents, généralement rugueux.

Par conséquent, les effets du nombre de Reynolds, Re', et du nombre de Froude, Fr, donnent quatre régimes d'écoulement :

Fluvial - Laminaire $Fr<1$ et $Re'<580$
Fluvial - Turbulent $Fr<1$ et $Re'>2320$
Torrentiel - Laminaire $Fr>1$ et $Re'<580$
Torrentiel - Turbulent $Fr>1$ et $Re'>2320$.

1-6 Conclusion

Les différents types d'écoulement qu'on peut rencontrer en hydraulique fluvial à surface libre peuvent être résumés comme suit :

- Ecoulement permanent
  - Ecoulement uniforme
  - Ecoulement non uniforme
    - Ecoulement graduellement varie
    - Ecoulement rapidement varié

- Ecoulement non permanent
  - Ecoulement uniforme (très rare)
  - Ecoulement non uniforme
    - Ecoulement graduellement varié
    - Ecoulement rapidement varié

Les différents régimes d'écoulement qu'on peut rencontrer en hydraulique à surface libre sont :

Fluvial - Laminaire Fr<1 et Re'<580
Fluvial - Turbulent Fr<1 et Re'>2320
Torrentiel - Laminaire Fr>1 et Re'<580
Torrentiel - Turbulent Fr>1 et Re'>2320.

Dans le chapitre qui suit, on traitera l'écoulement uniforme dans les canaux prismatiques.

Chapitre I : Questions de cours et de compréhension

1) Définir l'écoulement uniforme ?
2) Définir l'écoulement stationnaire ?
3) Donner les sens physiques des nombres de Reynolds et de Froude ?
4) Définir l'écoulement graduellement varié ?
5) Définir l'écoulement rapidement varié ?
6) Définir un canal ?
7) Donner la définition d'un canal prismatique ?
8) Donner et expliquer les relations des différentes pentes ?
9) Donner la définition de la profondeur d'eau dans un canal ?
10) Citer les différents types de canaux et donner des exemples ?
11) Donner la définition de l'écoulement à surface libre ?
12) qu'est ce qu'une pression atmosphérique ?
13) qu'est ce qu'une pression manométrique ?
14) qu'est ce qu'une pression de vide ?
15) qu'est ce qu'une pression absolue ?
16) Donner les définitions des écoulements décéléré et accéléré ?
17) Donner la définition d'un écoulement rapide ?
18) Donner les définitions des écoulements rapidement décéléré et rapidement accéléré ?
19) C'est quoi les forces de frottement ?
20) C'est quoi les forces de viscosité ?
21) C'est quoi les forces d'inertie ?
22) Donner la définition de la section et du périmètre géométriques ?
23) Donner la définition de la section et du périmètre mouillés ?
24) Donner la définition du rayon hydraulique ?
25) Donner la définition de la vitesse moyenne dans une section ?
26) Donner la définition de la vitesse ponctuelle (locale) ?
27) C'est quoi une perte de charge ?
28) Citer les causes des pertes de charge ?
29) Donner l'équation de continuité ?
30) Représenter graphiquement l'équation d'énergie en écoulements uniforme et non uniforme ?
31) Citer les différents régimes d'écoulement ?
32 Donner la définition de la profondeur moyenne ?
33) Donner la définition de la largeur superficielle à la surface libre ?
34) Donner les définitions de la rugosité absolue et relative ?
35) Donner la définition de la profondeur géométrique d'un canal ?
36) Donner les cinq frontières du nombre de Reynolds ?
37) Donner les mêmes frontières pour le cas d'un canal de forme de la section transversale non circulaire ?
38) Donner la formule de calcul de la viscosité cinématique pour l'eau ?
39) Donner les formules de calcul des nombres de Reynolds et de Froude ?
40) Donner la formule de calcul du nombre de Reynolds pour un canal non circulaire ?

CHAPITRE II

L'écoulement uniforme dans les canaux prismatiques

2-1 Introduction

Nous allons entamer ce chapitre par une définition de l'écoulement uniforme, ses conditions et son équation générale. Les distributions verticales de la vitesse enrégimes laminaire et turbulent seront également présentées. Nous allons aussi mettre en évidence cet écoulement dans les canaux artificiels et enfin nous allons examiner les différents problèmes à rencontrer lors de dimensionnement des canaux.

2-2 Définition de l'écoulement uniforme

L'écoulement est dit uniforme lorsque la profondeur h(x) et les autres paramètres comme la vitesse moyenne (V), les vitesses ponctuelles (u,v,w) et la pente demeurent constantes d'une section à une autre.

2-3 Conditions de l'écoulement uniforme dans les canaux prismatiques

Sur la surface libre des courants sans charge il s'établit une pression constante, en général, atmosphérique. C'est pourquoi, pour ces courants la pente piézométrique correspond à la pente de la surface libre $I_P=I_{lib}$.

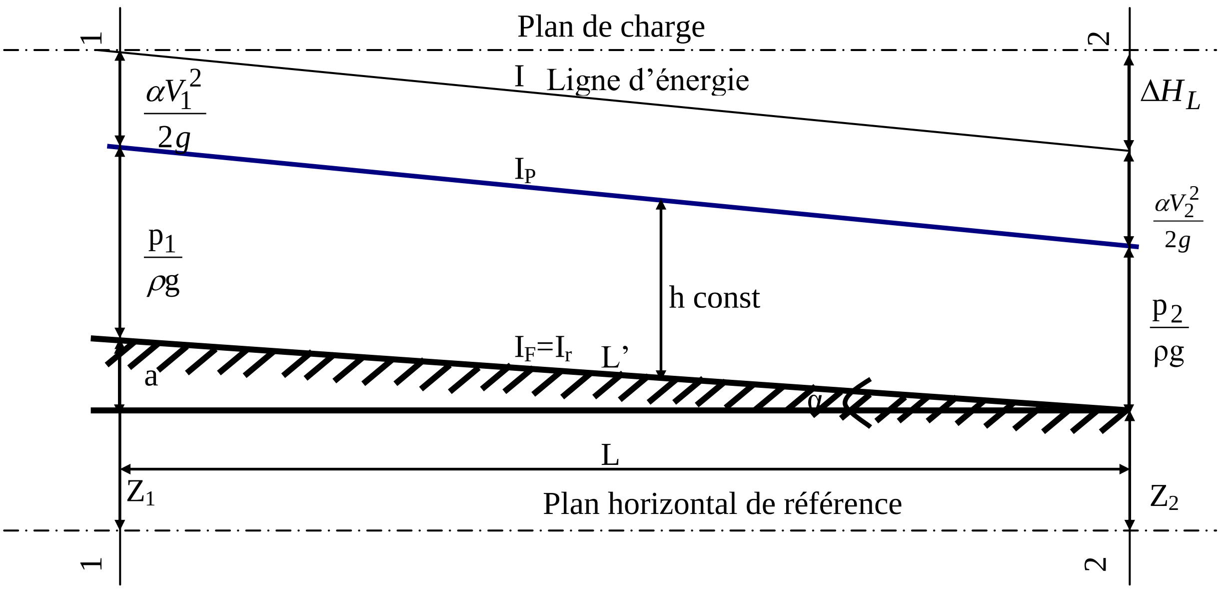


Fig.2-1: Ecoulement uniforme dans un canal prismatique

Sin (α)=a/L ; tg(α)=a/L'   Pour les petites angles sin (α)=tg(α)

Autrement dit, un écoulement uniforme à surface libre peut exister si l'égalité suivante est vérifiée :

$$I=I_P=I_{Lib}$$

Mais pour cela, il est nécessaire que la grandeur $\frac{\alpha V^2}{2g}$ reste constante en longueur du courant. Ceci n'est possible qu'à des conditions suivantes :

a- Le débit de l'eau dans le canal est constant (Q=constant.) ;

b- Le canal est prismatique ;

c- La profondeur d'eau dans le canal est constante en sa longueur ;

d- La ligne du fond ne se casse pas c'est-à-dire le canal a une pente constante (I_r=Sin(α)=constante) ;

e- La rugosité du fond et des parois est constante en longueur (n=constante) ;

f-Les résistances locales sont absentes.

2-4 Equation générale de l'écoulement uniforme dans un canal prismatique

Considérons un volume de liquide ABCD de section constante ω et de longueur L. Le volume du liquide est considéré comme étant en équilibre puisque l'écoulement est permanent et uniforme (accélération nulle). Ajoutant les forces agissant dans la direction de l'écoulement x.

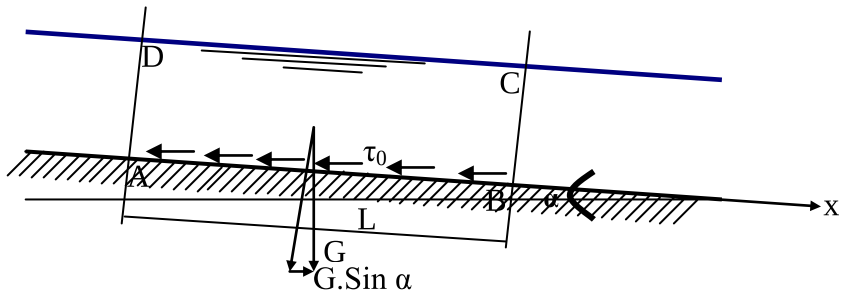


Fig.2-2: Schéma représentatif d'un volume de liquide en écoulement uniforme

Force sur la surface AD - Force sur la surface BC + G Sinα – Forces résistantes = 0

$\rho gh\omega - \rho gh\omega + \rho g\omega L \sin\alpha - \tau_0 \chi L = 0$

où τ_0 est une contrainte tangentielle visqueuse moyenne à la paroi (Pa) agissant sur une surface ayant L mètres de long et le périmètre mouillé χ mètres de large. Alors

$\rho g\omega L \sin\alpha = \tau_0 \chi L$ et $\tau_0 = \dfrac{\rho g\omega \sin\alpha}{\chi} = \rho g R_H I \Rightarrow \tau_0 = \rho g R_H I$ (2-1)

puisque $R_H = \omega/\chi$ et $\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha$ pour de petits angles α.

Pavlowsky a appelé l'équation (1), l'équation fondamentale de l'écoulement uniforme.

Par analyse dimensionnelle, on suppose que :

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \xi \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \tau_0 = \rho g \xi \frac{V^2}{2g} \qquad (2\text{-}2)$$

en considérant que ξ comme une grandeur variable

alors des équations (1) et (2) nous pouvons tirer le gradient hydraulique $I = \dfrac{\xi}{R_H}\dfrac{V^2}{2g}$

$I = \dfrac{\Delta H}{L} = \dfrac{\xi}{R_H}\dfrac{V^2}{2g} \Rightarrow \Delta H = \xi \dfrac{L}{R_H}\dfrac{V^2}{2g}$ **(2-3)** Cette dernière relation, c'est la formule de Weisbach.

Pour une conduite circulaire $\omega = \dfrac{\pi d^2}{4}$ et $\chi = \pi d$ donc $R_H = \dfrac{\omega}{\chi} = \dfrac{d}{4}$ d'où

$\Delta H = 4\xi \dfrac{L}{d}\dfrac{V^2}{2g}$ on pose $\lambda = 4\xi \Rightarrow \Delta H = \lambda \dfrac{L}{d}\dfrac{V^2}{2g}$ (2-4) c'est la formule de Darcy Weisbach

de l'équation (4) nous pouvons écrire que :

$\dfrac{\Delta H}{L} = 4\dfrac{\xi}{d}\dfrac{V^2}{2g} \Rightarrow I = \dfrac{\lambda}{d}\dfrac{V^2}{2g} = \dfrac{\lambda}{4R_H}\dfrac{V^2}{2g} \Rightarrow R_H I = \dfrac{\lambda V^2}{8g}$ alors $V = \sqrt{\dfrac{8g}{\lambda}}\sqrt{R_H I}$ on pose

$C = \sqrt{\dfrac{8g}{\lambda}}$ d'où

$V = C\sqrt{R_H I}$ (2-5) cette dernière relation s'appelle la formule de Chézy utilisée pour l'écoulement uniforme.
avec :
C : est le coefficient de Chézy, il a la dimension de la racine carrée de celle de l'accélération de la pesanteur: $\sqrt{m}/s$.
Pour l'écoulement laminaire $\lambda = \frac{64}{R_e} \Rightarrow C = \sqrt{(\frac{8g}{64})R_e}$ avec R_e : nombre de Reynolds.

2-5 Formule de Chézy
Pour l'écoulement à surface libre et dans le cas du régime uniforme la vitesse moyenne d'écoulement est donnée par la formule (2-5) ou bien de Chézy.
$V = C\sqrt{R_H I}$
où
C : Le coefficient de Chézy, il a comme unité le ($m^{0,5}/s$) ;
R_H : Le rayon hydraulique (m) :
I : Le gradient hydraulique ou la perte de charge par unité de longueur ; dans le cas de l'écoulement uniforme I=la pente du radier (du fond) du canal.

2-5-1 Détermination du coefficient de Chézy
Pour le calcul du coefficient de Chézy il existe une panoplie de formules, parmi ces formules nous mentionnerons dans ce qui suit celles les plus souvent utilisées.

a) Formule de Manning (1891)
Manning donne la formule suivante :

$$C = \frac{1}{n} R_H^{\frac{1}{6}} \qquad (2\text{-}6)$$

où n est le coefficient de rugosité et R_H est le rayon hydraulique.
Blench (1939) considère le coefficient C comme une variable qui dépend non seulement de n mais aussi de $R_H$et dont l'exposant dépend à son tour de n et de R_H. C'est la formule dite de *Pavlovski*

b) Formule de Pavlovski (1940)

$$C = \frac{1}{n} R_H^{y}, \ (m^{0,5}/s) \qquad (2\text{-}7)$$

où n est le coefficient de rugosité et R_H est le rayon hydraulique.
y est un exposant déterminé soit d'après la relation complète :

$$y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R_H}(n - 0{,}10) \qquad (2\text{-}7\text{-}1)$$

soit d'après les égalités simplifiées :

$y = 1{,}5\sqrt{n}$ à R_H<1 m ; (2-7-1')

$y = 1{,}3\sqrt{n}$ à R_H>1 m. (2-7-1'')

La relation (2.7) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour *n* compris entre 0,011 et 0,04.

c) Formule d'Agroskine
La formule d'Agroskine qui calcule le coefficient de Chézy est la suivante :

$$C = 4\sqrt{2g}(k + \lg R_H) \qquad (2\text{-}8)$$

où k est le paramètre de Poli choisi conformément aux données du tableau n°2-1

Tableau n°2-1 : Valeurs du paramètre de poli k pour la formule d'Agroskine

Classe	Caractéristique de la surface du lit	k
I	Enduit de ciment ; béton bien lissé à joints lissés	4,70
II	Tuyaux neufs en acier et en fonte	4,50 à 4,45
III	Aqueducs de céramique	4,40
IV	Tuyaux en béton en éléments normaux	4,10
V	Tuyaux normaux en fonte et en acier ; béton lissé sans aspérités ni enfoncements dus au coffrage peu ajusté	4,00 à 4,08
VI	Maçonnerie en briques à joints bien lissés, revêtement en pierres taillées	3,75
VII	Béton rugueux avec traces de coffrage à ajutage mauvais	3,5
VIII	Maçonnerie en briques à joints bruts ; bétonnage assez brut	3,30
IX	Bétonnage brut avec aspérités et enfoncements sans lissage des joints, béton projeté avec lissage	3,15
X	Béton projeté sans lissage	2,95
XI	Canaux dans les sols de loess et d'argile réalisés par les machines avec finition manuelle	2,80 à 2,70
XII	Canaux dans les sols de sable réalisés par les machines avec manuelle	2 ,70 à 2,60
XIII	Canaux de terre réalisés par les machines sans finition ultérieure dans de bonnes conditions d'entretien et de réparation ; pavé de pierres sur mortier	2,50
XIV	Canaux et galerie bien taillés dans la roche	2,40
XV	Canaux de terre dans des conditions d'entretien et de réparation moyennes ; pavé de pierres sans mortier	2,30 à 2,20
XVI	Gabions	2,10
XVII	Canaux de terres dans des conditions d'entretien inférieures à celles moyennes	2,00
XVIII	Canaux de terres dans des conditions assez mauvaises ; pierres entassées	1,90
XIX	Canaux et galeries dans la roche sans lissage continu	1,70

Comme la formule est semi –empirique et les grandeurs qui font partie de son deuxième terme ne sont mesurées qu'en mètres, au lieu de la formule précédente on peut écrire :

$$C = 17{,}72(k + \lg R_H)\ ,\ (m^{0,5}/s) \quad (2\text{-}8')$$

Etant donné que la formule d'Agroskine est semi empirique et que les grandeurs incluses dans le deuxième terme sont exprimées uniquement en unité de longueur, à savoir le mètre, on recommande l'utilisation de la formule suivante :

$$C = \frac{1}{n} + 17{,}72 \lg R_H\ ,\ (m^{0,5}/s) \quad (2\text{-}8'')$$

d) Formule de Ganguillet-Kutter (1869)

La formule de Kutter est donnée par la relation suivante :

$$C = \frac{23 + \frac{0{,}00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_H}}\left(23 + \frac{0{,}00155}{I}\right)} \qquad (2\text{-}9)$$

avec $I<0{,}0005$ et n : le coefficient de rugosité, peut être choisi à partir du tableau n°**2-**2

Tableau n° 2-2 : coefficient de rugosité

matériaux	n		
	n_{min}	n_{moy}	n_{max}
Acier et fonte	0,010	0,013	0,016
Ciment et béton lisse	0,011	0,013	0,016
Béton grossier	-	0,018	-
Argile compacte	-	0,023	-
Terre	0,0275	0,030	0,035

Le coefficient *n* de la formule de Kutter est connu sous le nom de " coefficient *n* de *Kutter* ". Bien que la relation précédente apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente *I*, afin de simplifier la forme de l'équation. On peut en effet s'apercevoir que le terme $0{,}00155/I$ n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient *C*, pour une même valeur du coefficient de rugosité *n* et du rayon hydraulique R_H. A titre indicatif, pour $n = 0{,}01$ et $R_H = 1{,}20$ m, *C* ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de *I* : $102 \leq C \leq 103$ lorsque $0{,}00005 \leq J \leq 0{,}01$.

e) Formule de Bazin (1897)

Bazin considère que la valeur du coefficient *C* de *Chézy* dépend du rayon hydraulique R_H mais ne dépend pas de la pente *I* du canal. Le coefficient *C* peut alors être déterminé par l'expression :

$$\boldsymbol{C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_H}}}}$$

*m*est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont les valeurs sont représentées dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 : Valeurs moyennes de m utilisées dans la formule de Bazin

Type du canal ouvert	m
Ciment très lisse, bois bien raboté	0,11
Bois raboté, rigoles de bois neuves, fonte revêtue	0,20
Bon tuyau d'égout vitrifié, bonne maçonnerie de brique, tuyau de béton moyen, bois non raboté, caniveau de métal lisse.	0,29
Tuyau d'égout de terre moyen et tuyau de fonte moyen, garniture de ciment moyenne.	0,40
Canaux à même la terre droit et en bon état.	1,54
Canaux à même la terre d'état moyen.	2,36
Canaux découpés dans le roc.	3,50
Rivières en bon état.	3,00

La formule de *Bazin* a été développée à l'origine pour de petits canaux, si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

f) Formule de Hager (1989) : Hager a pu montrer que la rugosité absolue ε et le coefficient *k* de Strickler sont liés par la relation :

$$\frac{k\varepsilon^{1/6}}{8{,}2\sqrt{g}} = 1$$

g) Formule de Powell (1950)

Powell propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient *C* de *Chézy*, mais elle se présente sous une forme implicite :

$$C = -23{,}2\log\left(\frac{1{,}811C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_H}\right)$$

A l'origine, la formule de *Powell* a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans sa relation sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C = -42\log\left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_H}\right)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de Reynolds. Le terme $C/(4R) \rightarrow 0$ et la relation précédente devient :

$$C = -42\log\left(\frac{\varepsilon}{R_H}\right)$$

Par contre, pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation de Powell peut s'écrire :

$$C = -42\log\left(\frac{C}{4R}\right)$$

2-5-2 Détermination du coefficient de rugosité

a) Coefficient de rugosité

Le coefficient de rugosité n, des canaux naturels, est déterminé selon les propriétés du canal. On peut obtenir le coefficient de rugosité n à partir des tableaux spéciaux, comme celui de M. Srybny (tableau n°**2**-3).

b) Coefficient de rugosité équivalente

Dans le cas où le canal a une rugosité hétérogène du périmètre mouillé, on peut introduire dans ce cas la notion du coefficient de rugosité équivalente, ce dernier est donné par la formule suivante :

$$n_{éq} = \frac{\left[\sum_{1}^{N}(\chi_i n_i^2\right]^{1/2}}{\chi^{1/2}} \qquad (2\text{-}10)$$

où N est le nombre de parties du périmètre mouillé à rugosités différentes ; χ_i, la longueur de la partie mouillée à rugosité constante n_i ; χ, la longueur totale du périmètre mouillé.

Tableau n°2-3 : Coefficient de rugosité n

Calasse	Type de paroi	n	1/n
I	Surfaces très lisse ; surfaces ouvertes d'émail et de glaçure	0,009	111
II	Planches très bien usinées et ajutées. Meilleur enduit en ciment pur	0,010	100
III	Meilleur enduit de ciment (1/3 de sable). Tuyaux propres (neufs) en céramique, en fonte et fer, bien posés et raccordés, planches bien usinées.	0,011	90,9
IV	Planches non usinées bien ajutées. Conduites d'adduction dans des conditions normales, sans incrustation visible, tuyaux d'égout assez propres, un assez bon bétonnage	0,012	83,3
V	Maçonnerie en pierres de taille dans les meilleures conditions, maçonnerie en briques assez bonne, tuyaux d'égout dans les conditions normales, conduites d'eau peu encrassées	0,013	76,9
VI	Tuyaux encrassés (d'adduction et d'égout), bétonnage des canaux dans les conditions moyennes	0,014	71,4
VII	Maçonnerie en briques médiocre, revêtement en pierres de taille dans les conditions moyennes. Tuyaux d'égout fortement encrassés. Bâche sur lattes de bois	0,015	66,7
VIII	Maçonnerie en moellons bonne, vieille maçonnerie en briques (non consolidée) ; bétonnage relativement brut. Roche très lisse, bien rodée	0,017	58,8
IX	Canaux à couche de vase épaisse stable, canaux dans un loess compact et dans un petit gravier dense recouvert d'un film de vase continu	0,018	55,6
X	Maçonnerie en pierres de taille médiocre (satisfaisante) ; pavé de pierres. Canaux réalisés assez proprement dans la roche. Canaux dans le loess, le gravier compact, la terre compacte recouverte d'un film de vase (en état normal)	0,020	50
XI	Canaux dans l'argile compacte. Canaux dans le loess, le gravier, la terre recouverte d'un film de vase discontinu. Grands canaux de terre dans les conditions d'entretien et de réparation au-dessus de celles moyennes	0,0225	44,4
XII	Bonne maçonnerie sèche. Grands canaux de terre dans les moyennes conditions d'entretien et de réparation et petits canaux de terre dans les bonnes conditions. Rivières dans les conditions favorables (lit droit propre à courant libre sans chutes de terre ni fosses d'affouillement profondes)	0,025	40
XIII	Canaux de terre (canaux grands dans les conditions d'entretien inférieures à celles à celles moyennes, petits canaux dans les conditions moyennes)	0,0275	36,4
XIV	Canaux de terre dans les mauvaises conditions (par exemple, par endroits avec algues, pierres ou gravier sur le fond) ; à herbes assez denses ; avec chutes de talus locales, etc. Rivières dans des conditions favorables du courant	0,030	33,3
XV	Canaux dans des mauvaises conditions (à profil incorrect ; encrassés de pierres et d'algues). Rivières dans des conditions relativement favorables, mais avec une certaine quantité de pierres et d'algues	0,035 28,6	28,6 28,6
XVI	Canaux dans de très mauvaises conditions (grandes fosses d'affouillement et chutes de terre, grande quantité de jonc, racines denses, grandes pierres dans le lit). Rivières à conditions du courant plus mauvaises que dans les classements précédents, augmentation de la quantité de pierres et d'algues, lit sinueux avec une faible quantité de fosses d'affouillement et des hauts-fonds	0,040 et plus	25 et moins

2-6 Distribution verticale des vitesses

Pour connaitre la distribution verticale des vitesses dans un canal ouvert, on doit tout d'abord élucider le régime d'écoulement dans ce canal à savoir laminaire ou turbulent.

2-6-1 Cas de l'écoulement laminaire

Lorsque l'écoulement est laminaire R_e<2320, la viscosité devient le facteur dominant dans l'écoulement et la contrainte tangentielle est donnée par :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \qquad (2\text{-}11)$$

avec μ est la viscosité dynamique.

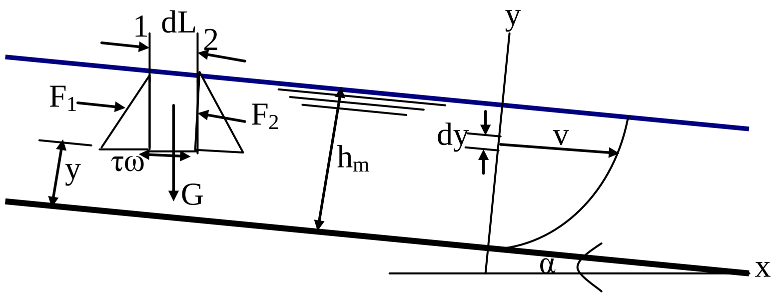


Fig.2-3: Répartition verticale de la vitesse dans un canal (cas du régime laminaire)

Pour un système en équilibre, on applique le premier principe de Newton :

$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 - F_2 + \rho g(h_m - y)dLdz\sin\alpha - \tau dLdz = 0$$

Puisque F_2=F_2 $\Rightarrow \tau = \rho g(h_m - y)\sin\alpha$ (2-12)

De (11) et (12) $\Rightarrow dv = \frac{\rho g}{\mu}(h_m - y)\sin(\alpha)dy = \frac{\rho g I}{\mu}(h_m - y)dy$ (2-13)

Etant donné que pour les faibles valeurs de α, sinα =tgα=I. En intégrant (2-13), on obtient :

$$v = \frac{\rho g I}{\mu}(y h_m - \frac{1}{2}y^2) + C \qquad (14)$$

Pour y=0 v=0 d'après la courbe, la valeur de la constante C=0

L'équation (14) est une équation de second degré représentant une parabole.

$$v = \frac{\rho g I}{\mu}(y h_m - \frac{1}{2}y^2) \qquad (2\text{-}15)$$

Il ressort que pour un écoulement laminaire, la distribution verticale de la vitesse dans un canal découvert est parabolique.

La vitesse moyenne V est donnée par : $V = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int dQ}{\int d\omega} = \frac{\int v d\omega}{\int d\omega} = \frac{\rho g I}{\mu} \frac{\int (y h_m - \frac{1}{2}y^2) dy dz}{\int dy dz}$

Où dz est une constante (dimension perpendiculaire au plan de la Fig.2-3)

$$V = \frac{\rho g I\, dz}{\mu h_m dz} \int_0^{h_m} \left(y h_m - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \frac{\rho g h_m^2}{3\mu} \qquad (2\text{-}16)$$

2-6-2 Cas de l'écoulement turbulent
Pour le régime turbulent $R_e > 10^4$, la contrainte tangentielle visqueuse peut s'exprimer par la relation de *Prandtl* (1926) :

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \qquad (2\text{-}17)$$

où l est une longueur caractéristique dite la longueur de mélange, elle est en fonction de dz, dv/dz est le gradient de vitesse à la hauteur y et ρ est la masse volumique du liquide en écoulement.

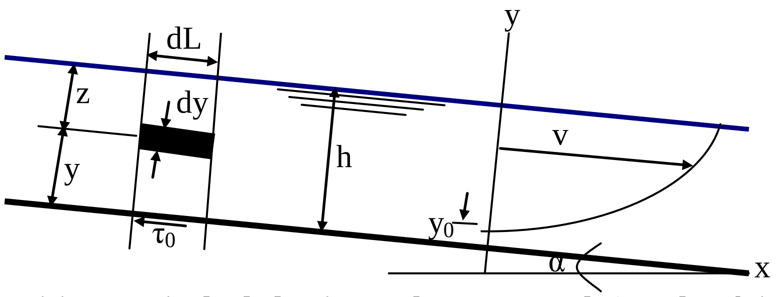


Fig.2-4: Répartition verticale de la vitesse dans un canal (cas du régime turbulent)

D'après l'expression (2-1) $\tau_0 = \rho g R_H I$, puisque le rayon hydraulique R_H pour des canaux larges est égal à la profondeur.
Sur la couche limite, puisque y est très petit, $z \cong h$ et $\tau \cong \tau_0$ .Ainsi on peut égaler les valeurs de τ_0.
En comparant les équations (2-1) et (2-17)

$$\rho l^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = \rho g I \text{ ou } \frac{dv}{dz} = \pm\sqrt{\frac{gzI}{l^2}}$$

Pour intégrer cette expression, essayer une valeur de $l = k(h-z)(z/h)^{1/2}$. Alors,

$$-\frac{dv}{dz} = \sqrt{gI}\left[\frac{z^{1/2}}{k(h-z)(z/h)^{1/2}}\right] = \frac{\sqrt{gIh}}{k}\left(\frac{1}{h-z}\right)$$

Posons y= (h-z) et dy=-dz, alors,

$$+y\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\sqrt{gIh}}{k} \text{ et } dv = \frac{\sqrt{gIh}}{k}\left(\frac{dy}{y}\right).$$

Puisque $\tau_0/\rho = \rho g I/\rho = gIh$, $dv = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left(\frac{dy}{y}\right)$ ou $v = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln y + C$

Pour $y = y_0$, $v \cong 0$, alors $C = (-1/k)\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln y_0$ et

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \qquad (2\text{-}18)$$

Pour un écoulement turbulent la distribution verticale de la vitesse dans un canal découvert est logarithmique.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* utilise deux approches:
1. La longueur de mélange est proportionnelle à y, soit *l* = Ky où K est le facteur de proportionnalité entre *l* et y et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.

2. La contrainte tangentielle est constante.

L'expression (2-18) devient :

Ou sous la forme suivante : $$v = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\,Ln\frac{y}{y_o}$$

$$v = \frac{5}{2} v_f \,Ln\frac{y}{y_o}$$

Où : v_f est la vitesse de frottement, elle est égale à la racine du rapport des deux termes $\tau 0/\rho$.

Cette dernière relation indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance y. Elle est connue soue le nom de loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses.

NB : Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie.

2-7 L'écoulement uniforme dans les canaux artificiels

Les conditions de l'écoulement uniforme de l'eau sont presque totalement remplies dans les canaux artificiels. Les formes des sections transversales les plus utilisées sont : triangulaire, rectangulaire, trapézoïdale, parabolique, demi-circulaire et circulaire.

2-7-1 Canal à section transversale triangulaire

La section mouillée (ω) : $\omega = 2(\frac{1}{2}xh)$

$$\cot g\theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h\cot g\theta$$

Posons $m = \cot g\theta \Rightarrow x = mh \Rightarrow \omega = mh^2$

$$\omega = mh^2$$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = 2\sqrt{x^2 + h^2} = 2\sqrt{(mh)^2 + h^2}$

$$\chi = 2h\sqrt{1+m^2}$$

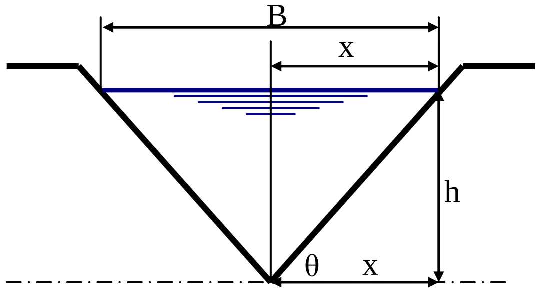


Fig. 2-5 : canal triangulaire

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{mh^2}{2h\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow R_H = \frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}$

2-7-2 Canal à section transversale rectangulaire

La section mouillée (ω) : $\omega = bh$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = b + 2h$

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{b+2h}$

Pour les canaux rectangulaires larges B>>h, on peut prendre en première approximation $\omega = Bh$ et $\chi = B \Rightarrow R_H = h$

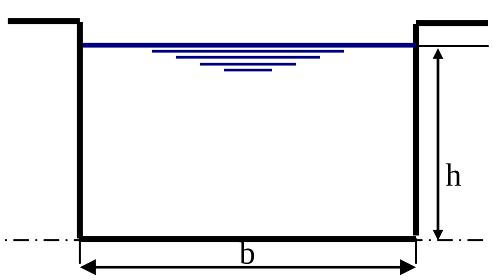


Fig. 2-6 : canal rectangulaire

2-7-3 Canal à section transversale trapézoïdale

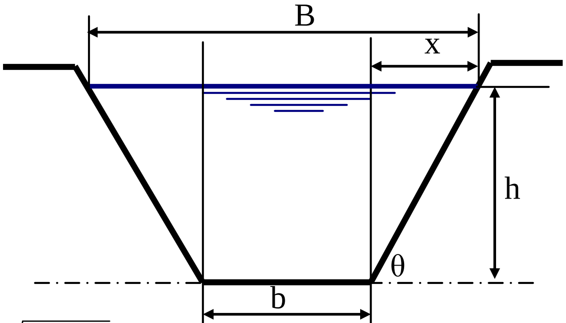


Fig. 2-7 : canal trapézoïdal

La section mouillée (ω) : $\omega = 2(\frac{1}{2}xh) + bh$

$\cot g\theta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h\cot g\theta$

Posons $m = \cot g\theta \Rightarrow x = mh \Rightarrow \omega = mh^2 + bh$

Le périmètre mouillé (χ) :

$\chi = b + 2\sqrt{x^2 + h^2} = b + 2\sqrt{(mh)^2 + h^2} \Rightarrow \chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$

Le rayon hydraulique (R$_H$) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh + mh^2}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}$

2-7-4 Canal à section transversale parabolique

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{2}{3}Bh = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Comme $B = 2\sqrt{2p}\sqrt{h}$ avec p le paramètre de la parabole.

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right]$

$\tau = h/p$ **:** La profondeur relative et $m = 1/\sqrt{2\tau}$ la pente du talus à la surface de l'eau

$\chi = pN$

avec $N = \left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right]$

Le rayon hydraulique (R$_H$) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2Bh}{3pN}$

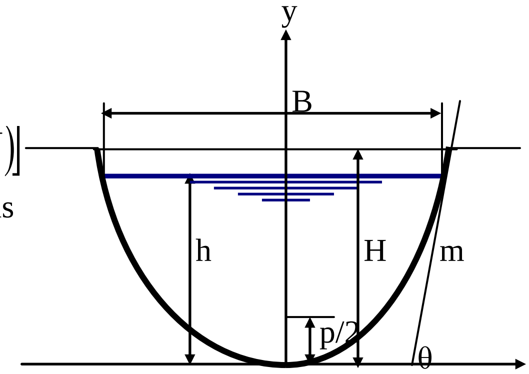


Fig. 2-8: canal parabolique

Pour les canaux paraboliques larges B>>h, on peut prendre en première

Approximation $\omega = \frac{2}{3}Bh$ et $\chi = B \Rightarrow R_H = \frac{2}{3}h$

Dans le tableau n°4, nous donnons la valeur de N pour différentes valeurs de τ.

Tableau n°2-4 : les valeurs de N pour différentes valeurs de la profondeur relative

τ	N	τ	N	τ	N	τ	N
0,001	0,09	0,15	1,15	0,55	2,44	0,95	3,48
0,005	0,20	0,20	1,34	0,60	2,58	1,00	3,61
0,01	0,28	0,25	1,54	0,65	2,71	1,05	3,72
0,02	0,40	0,30	1,71	0,70	2,83	1,10	3,84
0,04	0,57	0,35	1,85	0,75	2,97	1,15	3,97
0,06	0,71	0,40	2,02	0,80	3,10	1,20	4,08
0,08	0,82	0,45	2,16	0,85	3,23	1,25	4,19
0,10	0,93	0,50	2,30	0,90	3,34	-	-

2-7-5 Canal à section transversale demi-circulaire

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{1}{2}\theta R^2$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = \theta R$

Le rayon hydraulique (R$_H$) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{1}{2}\theta R^2}{\theta R} = \frac{1}{2}R$

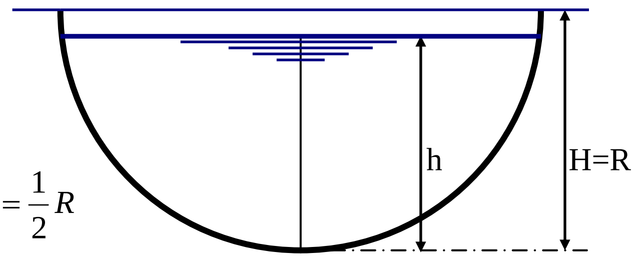


Fig.2-9: canal demi-circulaire

Quand θ=π (demi-circulaire) $\Rightarrow \omega = \frac{1}{2}\pi R^2$ et $\chi = \pi R$

Alors $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{1}{2}R$

2-7-6 Canal à section transversale circulaire (égout circulaire)

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{1}{2}\theta R^2$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = \theta R$

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{1}{2}\theta R^2}{\theta R} = \frac{1}{2}R$

Quand θ=2π (forme circulaire) $\Rightarrow \omega = \pi R^2$ et $\chi = 2\pi R$

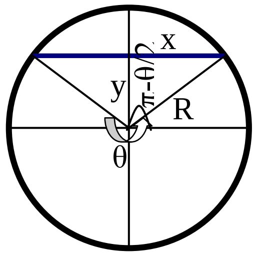


Fig.2-10: canal circulaire

Alors $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{1}{2}R$

2-8 Section liquide la plus avantageuse

Elle est définie comme étant la surface mouillée (ω) qui assure la valeur minimale du périmètre mouillé (χ). On peut dire que la section hydrauliquement la plus avantageuse possède le débit maximal, c'est-à-dire pour avoir un débit maximum pour (ω, I et n) constantes, il faut que le périmètre mouillé (χ) devient minimum donc un rayon hydraulique (R_H) maximum. Les questions qui se posent sont : quelle est la section la plus avantageuse de toutes les sections et quelle est la plus avantageuse (efficace) pour chaque forme (triangulaire, rectangulaire, parabolique et demi-circulaire).

a) cas d'un canal triangulaire

Le périmètre mouillé est égal $\chi = 2h\sqrt{1+m^2}$ pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\frac{d\chi}{dh} = 0$

$\omega = mh^2 \Rightarrow h = \sqrt{\omega/m}$ d'où $\chi = 2\sqrt{\omega/m}\sqrt{1+m^2}$

Calcul de l'écartement du talus m :

$$\frac{d\chi}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{m^2\omega - \omega}{m^2}}{\sqrt{\frac{\omega}{m} + m\omega}} = 0 \Rightarrow m^2\omega - \omega = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1$$

m=cotgθ=1 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ =45°

Le périmètre minimum (χ_{min}) **:** $\chi_{min} = 2h\sqrt{1+(1)^2} = 2\sqrt{2}h$

La section mouillée (ω) : $\omega = mh^2 = 1h^2 = h^2$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h^2}{2\sqrt{2}h} = \frac{h}{2\sqrt{2}}$

La section triangulaire hydrauliquement la plus avantageuse est celle qui a un coefficient d'écartement de talus m=1 ou bien un angle d'inclinaison par rapport à l'horizontal est égal à 45°

b) cas d'un canal rectangulaire

Le périmètre mouillé est égal $\chi = b + 2h$ **,** pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\frac{d\chi}{dh} = 0$; $\omega = bh \Rightarrow b = \frac{\omega}{h} \Rightarrow \chi = \frac{\omega}{h} + 2h$

$$\frac{d\chi}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dh}(\frac{\omega}{h} + 2h) = 0 \Rightarrow \frac{-\omega}{h^2} + 2 = 0 \Rightarrow \omega = 2h^2$$

Le périmètre minimum (χ_{min}) **:** $\chi_{min} = \frac{2h^2}{h} + 2h = 4h$

La section mouillée (ω) : $\omega = 2h^2$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{2h^2}{4h} = \frac{h}{2}$

$$\omega = bh = 2h^2 \Rightarrow b = 2h$$

La section rectangulaire hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) est celle qui a une largeur (b) égale à deux (2) fois la profondeur d'eau (h).

c) cas d'un canal trapézoïdal

Dans ce cas, le périmètre mouillé est donné par la relation suivante : $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$

pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\frac{d\chi}{dh} = 0$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$$

$\omega = mh^2 + bh \Rightarrow b = \frac{\omega}{h} - mh$, En remplaçant cette dernière expression dans la relation qui donne le périmètre mouillé nous obtiendrons : $\chi = \frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}$

Calcul de l'écartement du talus (m) :

Pour ce faire, on met $\frac{d\chi}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{d(\frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}}{dm} = 0 \Rightarrow -h + \frac{2m(2h)}{2\sqrt{1+m^2}} = 0$

$$\frac{-2h\sqrt{1+m^2} + 4mh}{2\sqrt{1+m^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+m^2} = 2m \Rightarrow 1+m^2 = 4m^2 \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m = \cot g\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$$

Calcul de la section mouillée et du périmètre minimal (χ_{min}) en fonction de m et h:

$$\frac{d\chi}{dh}=0\Rightarrow\frac{d(\frac{\omega}{h}-mh+2h\sqrt{1+m^2})}{dh}=0\Rightarrow\frac{-\omega}{h^2}-m+2\sqrt{1+m^2}=0\Rightarrow\omega=-mh^2+2h^2\sqrt{1+m^2}$$

$$\omega=h^2(2\sqrt{1+m^2}-m)$$

En remplaçant la relation de ω obtenue dans la relation du périmètre on obtient la relation du périmètre minimal.

$$\chi_{min}=\frac{\omega}{h}-mh+2h\sqrt{1+m^2}=\frac{h^2\left(2\sqrt{1+m^2}-m\right)}{h}-mh+2h\sqrt{1+m^2}=2h(2\sqrt{1+m^2}-m)$$

$$\chi_{min}=2h\left(2\sqrt{1+m^2}-m\right)$$

Calcul de la largeur du canal (b) :

$$\omega=mh^2+bh\Rightarrow b=\frac{\omega}{h}-mh\Rightarrow b=\frac{h^2}{h}\left(2\sqrt{1+m^2}-m\right)-mh\Rightarrow b=2h(\sqrt{1+m^2}-m)$$

$$b=2h(\sqrt{1+m^2}-m)$$

Calcul du rayon hydraulique maximal (R_{Hmax}) : $R_{Hmax}=\frac{\omega}{\chi_{min}}=\frac{h^2(2\sqrt{1+m^2}-m)}{2h\left(2\sqrt{1+m^2}-m\right)}=\frac{h}{2}$

$$R_{Hmax}=\frac{h}{2}$$

La section trapézoïdale hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) est celle qui a un coefficient d'écartement du talus (m) par rapport à l'horizontal $m=\cot g\theta=1/\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\pi/3=60°$, une largeur du fond (b) $b=2h(\sqrt{1+m^2}-m)$ =1,154h,

Une section mouillée $\omega=1{,}732h^2$, un périmètre mouillé minimum $\chi_{min}=3{,}464h$ et par conséquent un rayon hydraulique maximal $R_{Hmax}=\frac{h}{2}$.

2-9 Conditions pour une vitesse maximale et un débit maximum en écoulement uniforme

En se basant sur la formule de Chezy, qui permet de calculer la vitesse et le débit, on essaye de démontrer les deux conditions, la première condition donne la vitesse maximale et la seconde donne le débit maximum.

2-9-1 Condition pour une vitesse maximale en écoulement uniforme

De la relation de Chezy $V = C\sqrt{R_H I}$ avec $R_H = \frac{\omega}{\chi}$ d'où $V = C\sqrt{\frac{\omega}{\chi} I}$ pour avoir une vitesse maximale il faut que $\frac{dV}{d\omega} = 0$ tout en supposant que C=constante et I=constante.

$$\frac{d}{d\omega}\left(C\sqrt{I}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}\right) = 0 \Rightarrow C\sqrt{I}\,\frac{1}{2\sqrt{\omega/\chi}}\,\frac{\chi - \frac{d\chi}{d\omega}\omega}{\chi^2} = 0 \text{ d'où } \chi d\omega - \omega d\chi = 0$$

$$\chi d\omega - \omega d\chi = 0$$

C'est l'équation qui donne la vitesse maximale en écoulement uniforme.

2-9-2 Condition pour un débit maximum en écoulement uniforme

Pour avoir un débit maximum il faut que : $\frac{dQ}{d\omega} = 0$

$$\frac{d}{d\omega}\left(C\omega\sqrt{R_H I}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(C\sqrt{\omega^3/\chi}\sqrt{I}\right) = 0$$ on suppose que C=constante, I=constante.

$$\frac{dQ}{d\omega} = C\sqrt{I}\,\frac{1}{2\sqrt{\omega^3/\chi}}\,\frac{3\omega^2\chi - d\chi\chi^3/d\omega}{\chi^2} = 0 \text{ d'où } 3\chi\chi d - \omega d\chi = 0$$

$$3\chi d\omega - \omega d\chi = 0$$

Cette dernière équation est celle qui donne le débit maximum en écoulement uniforme.

2-10 Distribution de la vitesse et du débit dans un canal à section circulaire

2-10-1 Cas de la vitesse maximale :

$$\chi d\omega - \omega d\chi = 0$$

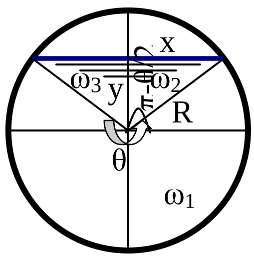


Fig.2-11: canal circulaire

Sin (π-θ/2)=x/R $\Rightarrow x = R\mathrm{Sin}(\pi - \theta/2)$

Cos (π-θ/2)=y/R $\Rightarrow y = R\mathrm{Cos}(\pi - \theta/2)$

Sin (π-θ/2)=sin (π) cos (θ/2) – cos (π) sin (θ/2) =sin (θ/2)

$\Rightarrow x = R\mathrm{Sin}\,\theta/2$

Cos (π-θ/2)=cos (π) cos (θ/2) + sin (π) sin (θ/2) =-cos (θ/2)

$\Rightarrow y = -R\cos\theta/2$

Calcul de la surface du triangle :

$$\omega_2 = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(R\sin\theta/2)(-R\cos\theta/2) = -\frac{1}{2}R^2\sin\theta/2\cos\theta/2$$

$$\sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2 \Rightarrow \sin\theta/2\cos\theta/2 = \frac{1}{2}\sin\theta \Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}R^2\sin\theta = -\frac{1}{4}R^2\sin\theta$$

La surface des deux triangles $\omega_t=\omega_2+\omega_3=2\omega_2=-2\frac{1}{4}R^2\sin\theta$

$$\omega_t = -\frac{1}{2}R^2\sin\theta$$

Calcul de la surface ω_1 : $\omega_1 = \frac{1}{2}R^2\theta$

Calcul de la surface totale $\omega = \omega_1 + \omega_t = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$

$$\omega = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$

$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}R^2(1-\cos\theta) \Rightarrow d\omega = \frac{1}{2}R^2(1-\cos\theta)d\theta$

$$d\omega = \frac{1}{2}R^2(1-\cos\theta)d\theta$$

Calcul du périmètre mouillé

$$\chi = R\theta$$

$$\chi = R\theta \Rightarrow d\chi = Rd\theta$$

$$d\chi = Rd\theta$$

En remplaçant chaque membre dans l'équation $\chi d\omega - \omega d\chi = 0$ on obtient :

$R\theta\frac{1}{2}R^2(1-\cos\theta)d\theta - \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)Rd\theta = 0$

Divisons par $\frac{1}{2}R^3 d\theta$ on aura : $\theta(1-\cos\theta) - (\theta - \sin\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta - \theta\cos\theta = 0$

$$\sin\theta - \theta\cos\theta = 0$$

Pour la résolution de cette équation on peut utiliser la méthode de Newton Raphson. l'angle θ pour lequel la vitesse dans le canal circulaire est maximale est égal à θ≈257°.

2-10-2 Cas du débit maximum :

Par une démarche similaire à celle effectuée pour la vitesse maximale, on remplace dans l'équation qui donne le débit maximum : $3\chi d\omega - \omega d\chi = 0$

$3R\theta\frac{1}{2}R^2(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)Rd\theta = 0$

Divisons par $\frac{1}{2}R^3 d\theta$ on aura : $3\theta(1-\cos\theta) - (\theta - \sin\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta - 3\theta\cos\theta + \sin\theta = 0$

L'équation finale est donnée par l'expression suivante : $2\theta - 3\theta\cos\theta + \sin\theta = 0$

Ici aussi on peut résoudre cette équation par la méthode de Newton Raphson, on obtient la valeur de θ qui donne le débit maximum dans un canal circulaire. θ≈308°

2-11 Conception des canaux

Le canal doit assurer l'approvisionnement planifié en eau et répondre aux conditions de stabilité, en d'autres termes on ne doit pas observer l'effondrement, l'envasement et l'affouillement. Les valeurs limites et recommandées des paramètres, qui déterminent la stabilité des canaux, sont présentées dans les cahiers de charges respectifs et dans les normes de conception conformément à la destination du canal projeté.

2-11-1 Eléments des sections transversales des canaux

Les canaux d'irrigation sont conçus en général en forme trapézoïdale ; les canaux d'assèchement peuvent être trapézoïdaux que paraboliques. Il est recommandé de choisir les valeurs des coefficients d'écartement des talus (m) pour les canaux d'irrigation trapézoïdaux conformément aux données du tableau n°5 et 6 et dans les conditions suivantes si la profondeur de remplissage du canal (h) ne dépasse pas 3m. Si la profondeur (h) est supérieure à 3m, les talus du canal sont calculés conformément aux normes établies pour les digues de terre.

Tableau n°2-5 : coefficients d'écartement des talus (m) des canaux en excavation

Sols	Canaux d'irrigation au remplissage, m			canaux de collection et de rejet
	1	1 à 2	2 à 3	
Galets faiblement cimentés	1,0	1,0	1,0	-
Galets et gravier avec sable	1,25	1,50	1,50	1,00
Argile, limon lourd et moyen	1,00	1,0	1,25	1,00
Limon léger	1,25	1,25	1,50	1,25
Limon sableux	1,50	1,50	1,75	1,50
Sable	1,75	2,00	1,25	1,75

Tableau n°2-6 : coefficients d'écartement des talus (m) des canaux en remblai

Sols	Débits de l'eau dans le canal Q m^3/s							
	>10		10 à 2		2 à 0,5		<0,5	
	intérieur	extérieur	int	ext	int	ext	int	ext
Argile, limon lourd et moyen	1,25	1,00	1,00	1,00	1,00	0,75	1,00	0,75
Limon léger	1,50	1,25	1,25	1,00	1,25	1,00	1,00	1,00
Limon sableux	1,75	1,50	1,50	1,25	1,50	1,25	1,25	1,00
sable	2,25	2,00	2,00	1,75	1,75	1,50	1,50	1,25

2-11-2 Vitesses maximales admissibles ne provoquant pas l'affouillement

Afin d'éviter la destruction du fond et des parois du canal par une action dynamique du courant d'eau, la vitesse de ce dernier ne doit pas dépasser une certaine limite maximale qui dépend :

a) du sol dans lequel passe le canal ou du type de revêtement ;
b) des dimensions de section liquide du canal ;
c) de la teneur des particules d'argile en suspension.

D'après Mirtsukualava la vitesse admissible à l'érosion est donnée par :

a) sol homogène pulvérulent (C=0)

$$\mathrm{v}_E = \log \frac{8{,}8}{d} h \sqrt{\frac{\rho m}{0{,}44 \rho n}\left[g(\rho_s - \rho)d + 2C_{FP}^{N}.K\right]}$$

Avec C_{FP}^{N} : résistance de fatigue à l'arrachement des sols pulvérulents

m : coefficient de condition de travail, il prend en considération l'influence des sédiments à l'état colloïdale sur la capacité érosive du courant.
n : coefficient de pénétration qui tient compte de la variation de la capacité érosive du courant sous l'influence de caractère de fluctuation et d'autre cas de dépassement probable des charges admissible sur la particule
K : coefficient caractérisant la possibilité de l'écart des forces de cohésion et la valeur moyenne k=0,5

$$C_{FP}^{N} = 1{,}72.10^{-4}d^{-1}[Pa] \quad \text{et} \quad [d] = m$$

$$n = \left(\frac{U_{D\max}}{U_D}\right)^2$$

Pour d<0,001m $\quad n = 1 + \dfrac{d}{0{,}00005 + 0{,}3d}$

Pour d>0,001m $\quad$ n=4
h : la profondeur d'eau.

b) sol argileux et limoneux (C≠0)

$$v_E = \log\frac{8{,}8}{d}h\sqrt{\frac{2m}{2{,}5\rho n}\left[g(\rho_s - \rho)d + 1{,}25C_F^N.K\right]}$$

$$v_E = 1{,}25\sqrt{\frac{2m}{2{,}6\rho n}\left[g(\rho_s - \rho)d + 1{,}25C_F^N.K\right]}$$

K : coefficient d'homogénéité des sols cohérent caractérisant la probabilité de l'écoulement des forces de cohésion K=0,5

C_F^N : Résistance de fatigue à l'arrachement des sols cohérents

C_F^N =0,35 C^N Coefficient normatif

$$n = 1 + \frac{d}{0{,}00005 + 0{,}3d}$$

ρ_s : masse volumique du sol.

2-11-3 Vitesse de sédimentation (v_D)

Elle correspond à l'état où la turbidité du courant (la concentration des sédiments dans une unité de volume) $\rho_s = \rho_T$

ρ_T **:** Quantité maximale de sédiments contenant dans une unité de volume d'eau.

D'après ZAMAZINE $\rho_s = (5-6)kg/m^3$

ω: vitesse de chute des particules de sédiments

a) $4.10^{-4} < \omega < 20.10^{-4} \rightarrow \rho_T = 11v\sqrt{\dfrac{v}{\omega}}\sqrt{RI}$

b) $20.10^{-4} < \omega < 80.10^{-4} \rightarrow \rho_T = 0{,}22\left(\dfrac{v}{\omega}\right)^{3/2}\sqrt{RI}$

$$v = v_D \Rightarrow \rho_s = \rho_T$$

2-12 Cas essentiels du calcul hydraulique des canaux

A partir de tous qu'on a vu, on peut conclure que l'écoulement uniforme dans les canaux trapézoïdaux est caractérisé par sept paramètres : Q, V, I, n, b, h, m et dans les canaux paraboliques par six paramètres Q, V, I, n p, h.

Il faut noter que parmi ces paramètres, on connaît, en général, le coefficient d'écartement de talus (m) et le coefficient de rugosité (n). En tenant compte de ce fait, on peut subdiviser les différents problèmes relatifs au calcul hydraulique en quatre types:

a) Problème de premier type : Il consiste à déterminer Q, I et V en connaissant tous les paramètres de la section mouillée.

b) Problème de deuxième type : Il consiste à déterminer l'un des éléments de la section mouillée b ou h pour la section trapézoïdale et p et h pour la section parabolique ainsi que la vitesse moyenne V, sachant que Q, n, m, I sont donnés. Dans ce cas, on utilise une méthode itérative.

c) Problème de troisième type : ce type de problème consiste à déterminer b, h, V pour les canaux trapézoïdaux et p, h, V pour ceux paraboliques.

Pour rendre les problèmes univoques, on utilise les conditions auxiliaires suivantes :

- Canaux trapézoïdaux
  - Le canal doit avoir la section le plus avantageuse ;
  - Le canal doit avoir un β donné
- Canaux paraboliques
  - Le canal doit avoir la section le plus avantageuse avec $\tau_{h,a}$=1,8856 ;
  - Le canal doit avoir le rapport B/h donné.

Problème de quatrième type : Il consiste à trouver les dimensions linéaires de la section ω sachant que Q, V, I, m, n sont connus.

La valeur de V est, en général, choisie conformément aux relations suivantes

$$V \leq V_{affouillement}$$
$$V_{aff}=KQ^{0,1}$$

NB : Les conditions associées à l'écoulement permanent uniforme sont dites normales d'où les termes de la profondeur normale et de la pente normale.

Profondeur normale (h_n) : On appelle profondeur normale, la profondeur d'eau dans un canal en régime uniforme.

2-13 Conclusion

L'écoulement de l'eau dans les canaux naturels et artificiels n'est pas toujours uniforme, mais ce dernier reste la base pour bien comprendre les autres types d'écoulement. Les chapitres suivants traiteront l'écoulement non uniforme dans les canaux généralement prismatiques.

Chapitre II : L'écoulement uniforme dans les canaux prismatiques

Exercice n°1

Quels sont les paramètres de la section la plus avantageuse de toutes les sections des formes géométriques suivantes :

a - canal trapézoïdal
b- canal triangulaire en forme de V
c- canal rectangulaire

a) cas d'un canal trapézoïdal

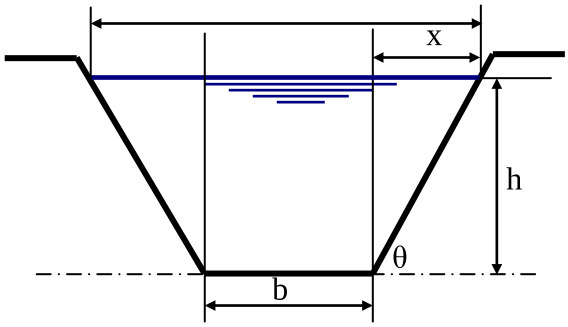


Fig. 1 : Canal trapézoïdal

Dans ce cas, le périmètre mouillé est donné par la relation suivante : $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$

pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\dfrac{d\chi}{dh} = 0$

$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$ **(1)**

$\omega = mh^2 + bh \Rightarrow b = \dfrac{\omega}{h} - mh$, En remplaçant cette dernière expression dans la relation qui donne le périmètre mouillé nous obtiendrons : $\chi = \dfrac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}$

Calcul de l'écartement du talus :

Pour ce faire, on met $\dfrac{d\chi}{dm} = 0 \Rightarrow \dfrac{d(\frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2})}{dm} = 0 \Rightarrow -h + \dfrac{2m(2h)}{2\sqrt{1+m^2}} = 0$

$$\frac{-2h\sqrt{1+m^2} + 4mh}{2\sqrt{1+m^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+m^2} = 2m \Rightarrow 1+m^2 = 4m^2 \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$m = \cot g\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$

Calcul de la section mouillée et du périmètre minimal (χ_{min}) en fonction de m et h:

$$\frac{d\chi}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{d(\frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2})}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{-\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0 \Rightarrow \omega = -mh^2 + 2h^2\sqrt{1+m^2}$$

$$\omega = h^2(2\sqrt{1+m^2} - m)$$

En remplaçant la relation de ω obtenue dans la relation, du périmètre, (1) on obtient la relation du périmètre minimal.

$$\chi_{min} = \frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} = \frac{h^2\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right)}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} = 2h(2\sqrt{1+m^2} - m)$$

$$\chi_{min} = 2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right)$$

Calcul de la largeur du canal (b) :

$$\omega = mh^2 + bh \Rightarrow b = \frac{\omega}{h} - mh \Rightarrow b = \frac{h^2}{h}\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right) - mh \Rightarrow b = 2h(\sqrt{1+m^2} - m)$$

$$b = 2h(\sqrt{1+m^2} - m)$$

Calcul du rayon hydraulique maximal (R_{Hmax}) : $R_{Hmax} = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{h^2(2\sqrt{1+m^2} - m)}{2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right)} = \dfrac{h}{2}$

$$R_{Hmax} = \frac{h}{2}$$

La section trapézoïdale hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) est celle qui a un coefficient d'écartement du talus (m) par rapport à l'horizontal égal à $1/\sqrt{3}$ ($m = \cot g\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$), une largeur du fond (b) $b = 2h(\sqrt{1+m^2} - m)$ =1,154h, une section mouillée $\omega = 1{,}732h^2$, un périmètre mouillé $\chi_{min} = 3{,}464h$ et par conséquent un rayon hydraulique $R_{Hmax} = \dfrac{h}{2}$.

b) cas d'un canal triangulaire en forme de V

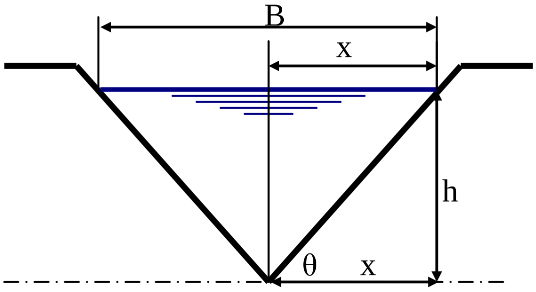


Fig. 2 : canal triangulaire

Le périmètre mouillé est égal $\chi = 2h\sqrt{1+m^2}$ pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que :

$$\frac{d\chi}{dh} = 0 \quad \omega = mh^2 \Rightarrow h = \sqrt{\omega/m} \text{ d'où } \chi = 2\sqrt{\omega/m}\sqrt{1+m^2} = 2\sqrt{\frac{\omega}{m} + \omega m} = 2\sqrt{\frac{\omega + \omega m^2}{m}}$$

Calcul de l'écartement du talus m :

$$\frac{d\chi}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{2(\frac{m^2\omega - \omega}{m^2})}{2\sqrt{\frac{\omega}{m} + m\omega}} = 0 \Rightarrow m^2\omega - \omega = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1 \quad m = \cot g\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Le périmètre minimum (χ_{min}) : $\chi_{min} = 2h\sqrt{1+(1)^2} = 2\sqrt{2}h$

La section mouillée (ω) : $\omega = mh^2 = 1h^2 = h^2$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{h^2}{2\sqrt{2}h} = \dfrac{h}{2\sqrt{2}}$

La section triangulaire hydrauliquement la plus avantageuse est celle qui a un coefficient d'écartement de talus m=1, ou bien un angle d'inclinaison par rapport à l'horizontal égal à 45°

c) Cas d'un canal rectangulaire

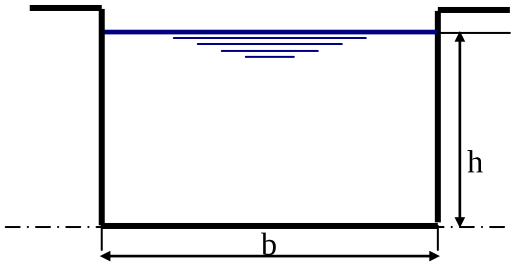


Fig. 3 : canal rectangulaire

Le périmètre mouillé est égal $\chi = b + 2h$, pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\dfrac{d\chi}{dh} = 0$; $\omega = bh \Rightarrow b = \dfrac{\omega}{h} \Rightarrow \chi = \dfrac{\omega}{h} + 2h$

$$\frac{d\chi}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dh}(\frac{\omega}{h} + 2h) = 0 \Rightarrow \frac{-\omega}{h^2} + 2 = 0 \Rightarrow \omega = 2h^2$$

Le périmètre minimum (χ_{min}) **:** $\chi_{min} = \dfrac{2h^2}{h} + 2h = 4h$

La section mouillée (ω) : $\omega = 2h^2$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{2h^2}{4h} = \dfrac{h}{2}$

$\omega = bh = 2h^2 \Rightarrow b = 2h$

La section rectangulaire hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) est celle qui a une largeur (b) égale à deux (2) fois la profondeur d'eau (h).

Exercice n°2

Trouver la section la plus avantageuse (la plus économique) parmi les formes des sections suivantes pour le cas où S_1=1m^2, S_2=2m^{2}et S_3=3m^2.

a- canal demi-circulaire
b- canal trapézoïdal
c- canal triangulaire en forme de V
d- canal rectangulaire

1/ Si on prend une section mouillée de 1m^2

a) canal demi - circulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = \dfrac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{8\omega}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{8}{\pi}} = 1{,}60\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi = \dfrac{\pi d}{2} = \dfrac{\pi x 1{,}60}{2} = 2{,}50\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R = \dfrac{\omega}{\chi} = \dfrac{2\pi\pi^2}{8\pi\pi} = \dfrac{d}{4} = \dfrac{1{,}60}{4} = 0{,}4\,m$

b) Canal trapézoïdal

La section mouillée est donnée par :

$$\omega = h^2(2\sqrt{1+m^2} - m) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = \sqrt{\frac{1}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = 0{,}76\,\text{m}$$

Le périmètre mouillé est donné par :

$$\chi_{min} = 2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right) = 2x0{,}76(2\sqrt{1+m^2} - m) = 2{,}63\,\text{m}$$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_{Hmax} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{0{,}76}{2} = 0{,}38\,\text{m}$

c) Canal triangulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\omega} = 1\text{m}$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 2\sqrt{2}h = 2\sqrt{2}x1 = 2{,}83\,\text{m}$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{h}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}35\,\text{m}$

d) Canal rectangulaire

La section mouillée (ω): $\omega = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} = 0{,}707\text{ m}$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 4h = 4x0{,}707 = 2{,}83\,\text{m}$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{0{,}707}{2} = 0{,}35\text{m}$

2/ Si on prend une section mouillée de 2m²

a) Canal demi - circulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = \dfrac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{8\omega}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{16}{\pi}} = 2{,}26\,\text{m}$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi = \dfrac{\pi d}{2} = \dfrac{\pi x2{,}26}{2} = 3{,}54\,\text{m}$

Le rayon hydraulique est donné par : $R = \dfrac{\omega}{\chi} = \dfrac{2\pi\pi^2}{8\pi\pi} = \dfrac{d}{4} = \dfrac{2{,}26}{4} = 0{,}565\,\text{m}$

b) canal trapézoïdal

La section mouillée est donnée par :

$$\omega = h^2(2\sqrt{1+m^2} - m) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = \sqrt{\frac{2}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = 1{,}07\text{ m}$$

Le périmètre mouillé est donné par :

$$\chi_{min} = 2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right) = 2x1{,}07(2\sqrt{1+m^2} - m) = 3{,}71\,\text{m}$$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_{Hmax} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{1{,}07}{2} = 0{,}535\text{m}$

c) Canal triangulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\omega} = \sqrt{2} = 1{,}41\,\text{m}$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 2\sqrt{2}h = 2\sqrt{2}x\sqrt{2} = 4\,\text{m}$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 0{,}5\,m$

d) Canal rectangulaire

La section mouillée (ω): $\omega = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 4h = 4x1 = 4\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,m$

3/ Si on prend une section mouillé de 3m²

a) Canal demi - circulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{8\omega}{\pi}} = \sqrt{\frac{24}{\pi}} = 2{,}76\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi = \frac{\pi d}{2} = \frac{\pi x 2{,}76}{2} = 4{,}34\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2\pi\pi^2}{8\pi\pi} = \frac{d}{4} = \frac{2{,}76}{4} = 0{,}69\,m$

b) Canal trapézoïdal

La section mouillée est donnée par :

$\omega = h^2(2\sqrt{1+m^2} - m) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = \sqrt{\frac{3}{(2\sqrt{1+m^2} - m)}} = 1{,}31\,m$

Le périmètre mouillé est donné par :

$\chi_{min} = 2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right) = 2x1{,}31(2\sqrt{1+m^2} - 1) = 4{,}53\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_{Hmax} = \frac{1{,}31}{2} = 0{,}655\,m$

c) canal triangulaire

La section mouillée est donnée par : $\omega = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\omega} = \sqrt{3} = 1{,}73\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 2\sqrt{2}h = 2\sqrt{2}x\sqrt{3} = 4{,}90\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0{,}61m$

d) Canal rectangulaire

La section mouillée (ω): $\omega = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}22\,m$

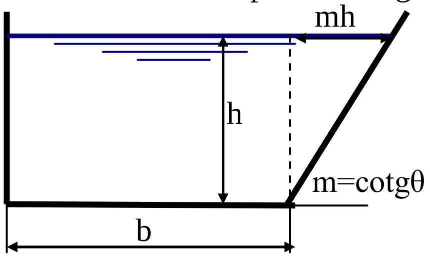
Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 4h = 4x1{,}22 = 4{,}88\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h}{2} = \frac{1{,}22}{2} = 0{,}61m$

Note : nous pouvons dire que :
R_H « section demi – circulaire »> R_H « section trapézoïdal »> R_H « section rectangulaire »= R_H « section triangulaire ».

Exercice n°:3

Pour le canal ayant une section transversale comme représentée par la figure ci-après, on demande de déterminer les paramètres de la section la plus avantageuse de toutes les sections ayant cette forme.



Le périmètre mouillé est donné par la relation suivante : $\chi = h + b + h\sqrt{1+m^2}$ **.**Pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\frac{d\chi}{dh} = 0$

$\chi = b + h(1+\sqrt{1+m^2})$ **(1)**

$\omega = \frac{1}{2}mh^2 + bh \Rightarrow b = \frac{\omega}{h} - \frac{1}{2}mh$, En remplaçant cette dernière expression dans la relation (1) nous obtiendrons : $\chi = (\frac{\omega}{h} - \frac{1}{2}mh) + h(1+\sqrt{1+m^2})$

Calcul de l'écartement du talus :

Pour ce faire, on met $\frac{d\chi}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{d(\frac{\omega}{h} + h(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2})}{dm} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}h + \frac{2mh}{2\sqrt{1+m^2}} = 0$

$$\frac{-2h\sqrt{1+m^2} + 4mh}{4\sqrt{1+m^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+m^2} = 2m \Rightarrow 1+m^2 = 4m^2 \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$m = \text{cotg}\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$

Calcul de la section mouillée et du périmètre minimal (χ_{min}) en fonction de m et h:

$$\frac{d\chi}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{d(\frac{\omega}{h} + h(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2})}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{-\omega}{h^2} + (1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2}) = 0 \Rightarrow \omega = h^2(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2})$$

$$\omega = h^2(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2})$$

En remplaçant la relation de ω obtenue dans la relation du périmètre on obtient la relation du périmètre minimal.

$$\chi_{min} = \frac{\omega}{h} + h(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2}) = \frac{h^2\left(\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{2}m + 1\right)}{h} + h(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2}) = 2h(1 - \frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2})$$

$$\chi_{min} = 2h\left(\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{2}m + 1\right)$$

Calcul de la largeur du canal (b) :

$$\omega = \frac{1}{2}mh^2 + bh \Rightarrow b = \frac{\omega}{h} - \frac{1}{2}mh \Rightarrow b = \frac{h^2}{h}\left(1 - -\frac{1}{2}m + \sqrt{1+m^2}\right) - \frac{1}{2}mh \Rightarrow b = h(\sqrt{1+m^2} - m + 1)$$

$$b = h(\sqrt{1+m^2} - m + 1)$$

Calcul du rayon hydraulique maximal

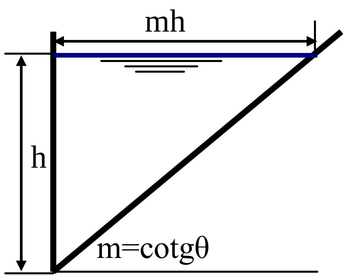
(R_{Hmax}) : $R_{Hmax} = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h^2(\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{2}m + 1)}{2h\left(\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{2}m + 1\right)} = \frac{h}{2}$

$$R_{Hmax} = \frac{h}{2}$$

La section représentée ci-dessus hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) est celle qui a un coefficient d'écartement du talus (m) par rapport à l'horizontal $m = \cot g\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$, une largeur du fond (b) $b = h(\sqrt{1+m^2} - m + 1) = 1{,}577h$, une section mouillée $\omega = 1{,}866h^2$, un périmètre mouillé $\chi_{min} = 3{,}732h$ et par conséquent un rayon hydraulique $R_{Hmax} = \frac{h}{2}$.

Exercice n° :4

Trouver les caractéristiques de la section la plus avantageuse d'un canal triangulaire ayant une paroi verticale, une section mouillée ω, et un périmètre mouillé χ. « Les caractéristiques à déterminer sont : l'écartement du talus m=cotgθ, le périmètre mouillé minimal et le rayon hydraulique ».



Le périmètre mouillé est donné par la relation suivante : $\chi = h + h\sqrt{1+m^2}$ pour avoir un périmètre mouillé minimum, il faut que $\frac{d\chi}{dh} = 0$

$$\chi = h + h\sqrt{1+m^2} = h(1 + \sqrt{1+m^2})$$

$\omega = \frac{1}{2}mh^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\omega}{m}}$, En remplaçant cette dernière expression dans la relation qui donne le périmètre mouillé nous obtiendrons :

$$\chi = h(1 + \sqrt{1+m^2}) = \sqrt{\frac{2\omega}{m}}(1 + \sqrt{1+m^2}) = \sqrt{2\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{m}}\right)$$

Calcul de l'écartement du talus :
Pour ce faire, on met

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow\frac{d[\sqrt{2\omega}(\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{m}})]}{dm}=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{m}}}{(\sqrt{m})^2}+\frac{(\frac{2m\sqrt{m}}{2\sqrt{1+m^2}}-\frac{1\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{m}})}{(\sqrt{m})^2})=0$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{m}}}{(\sqrt{m})^2}+\frac{(\frac{2m\sqrt{m}}{2\sqrt{1+m^2}}-\frac{1\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{m}})}{(\sqrt{m})^2})=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(-\frac{1}{2m\sqrt{m}}+\frac{4m^2-2(1+m^2)}{4m\sqrt{m}\sqrt{1+m^2}}=0$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(-\frac{1}{2m\sqrt{m}}+\frac{4m^2-2(1+m^2)}{4m\sqrt{m}\sqrt{1+m^2}}=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(-\frac{1}{2m\sqrt{m}}+\frac{2m^2-2}{4m\sqrt{m}\sqrt{1+m^2}})=0$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow\sqrt{2\omega}(-\frac{1}{2m\sqrt{m}}+\frac{2m^2-2}{4m\sqrt{m}\sqrt{1+m^2}})=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2\omega}}{2m\sqrt{m}}(-1+\frac{2m^2-2}{2\sqrt{1+m^2}})=0$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2\omega}}{2m\sqrt{m}}(-1+\frac{m^2-1}{\sqrt{1+m^2}})=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2\omega}}{2m\sqrt{m}}(\frac{-\sqrt{1+m^2}+m^2-1}{\sqrt{1+m^2}})=0$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow-\sqrt{1+m^2}+m^2-1=0\Rightarrow\sqrt{1+m^2}=m^2-1\Rightarrow(1+m^2)=(m^2-1)^2$$

$$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow 1+m^2=m^4-2m^2+1\Rightarrow m^4-3m^2=0\Rightarrow m^2(m^2-3)=0$$

$\frac{d\chi}{dm}=0\Rightarrow m^2(m^2-3)=0\Rightarrow m=0\ \text{ou}\ m=\sqrt{3}$. Pour notre cas la valeur de m est toujours supérieure à zéro donc, on opte pour $m=\sqrt{3}$

$m=\cot g\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\pi/6=30°$

Calcul de la section mouillée et du périmètre minimal (χ_{min}) en fonction de m et h:

La section mouillée devient : $\omega=\frac{1}{2}mh^2=\frac{\sqrt{3}}{2}h^2$

En remplaçant la relation de ω obtenue, dans la relation du périmètre, on obtient la relation du périmètre minimal.

$\chi_{min}=h(1+\sqrt{1+m^2})=3h$

Calcul du rayon hydraulique maximal

(R_{Hmax}) : $R_{Hmax}=\frac{\omega}{\chi_{min}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}h^2}{3h}=\frac{h}{2\sqrt{3}}$

$$R_{Hmax}=\frac{h}{2\sqrt{3}}$$

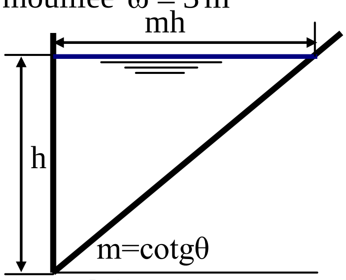
La section hydrauliquement la plus avantageuse (efficace) représentée dans l'exercice n°4 est celle qui a un coefficient d'écartement du talus (m) par rapport à l'horizontal.

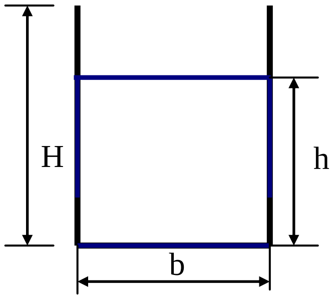
$m = \cot g\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/6 = 30°$, une section mouillée $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$, un périmètre mouillé $\chi_{min} = 3h$ et par conséquent un rayon hydraulique $R_{Hmax} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$.

Exercice n° :5

Quelle est la section la plus avantageuse entre la section triangulaire et la section rectangulaire.

Prendre la section mouillée $\omega = 3\,m^2$





a) Pour le canal triangulaire :

La section mouillée est donnée par : $\omega = \frac{1}{2} mh^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\omega}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2x3}{\sqrt{3}}} = 1{,}86\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = h(1 + \sqrt{1+m^2}) = 3h = 3x1{,}86 = 5{,}58\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_{Hmax} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = 0{,}54\,m$

b) Pour le canal rectangulaire :

La section mouillée (ω): $\omega = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}22\,m$

Le périmètre mouillé est donné par : $\chi_{min} = 4h = 4x1{,}22 = 4{,}88\,m$

Le rayon hydraulique est donné par : $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{h}{2} = \frac{1{,}22}{2} = 0{,}61 m$

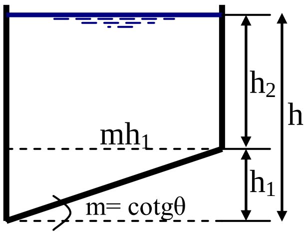
Note : le canal de section mouillée de forme rectangulaire est plus avantageux que celui de section mouillée triangulaire, parce que le périmètre mouillé du canal rectangulaire est inférieur à celui du canal triangulaire (χ « rectangulaire »< χ « triangulaire »).

Exercice n° : 6

Déterminer la section la plus avantageuse de toutes les sections qui ont la forme représentée sur la figure ci-dessous ?

$$\omega = mh_1 h_2 + \frac{1}{2} mh_1^2 = mh_1(h - h_1) + \frac{1}{2} mh_1^2 = mh_1 h - \frac{1}{2} mh_1^2$$

$$\omega = mh_1 h - \frac{1}{2} mh_1^2 \qquad (1)$$



$$\chi = h + h_1\sqrt{1+m^2} + h_2 = h + h_1\sqrt{1+m^2} + (h - h_1)$$

$$\chi = 2h + h_1(\sqrt{1+m^2} - 1) \qquad (2)$$

de l'équation (1) nous aurons $h = \frac{\omega}{mh_1} + \frac{h_1}{2}$ (3)

on substitue l'expression (3) dans l'équation (2) nous aurons :

$$\chi = 2h + h_1(\sqrt{1+m^2} - 1) = 2\left(\frac{\omega}{mh_1} + \frac{h_1}{2}\right) + h_1(\sqrt{1+m^2} - 1) = \frac{2\omega}{mh_1} + h_1\sqrt{1+m^2}$$

$$\chi = \frac{2\omega}{mh_1} + h_1\sqrt{1+m^2} \qquad (4)$$

Pour obtenir la valeur de ω qui donne le plus petit périmètre mouillé, en dérivant χ par rapport à h_1 et en égalant à zéro.

$$\frac{d\chi}{dh_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dh_1}\left(\frac{2\omega}{mh_1} + h_1\sqrt{1+m^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{-2m\omega}{(mh_1)^2} + \sqrt{1+m^2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{(mh_1)^2}{2m}\sqrt{1+m^2}$$

$$\omega = \frac{h_1^2}{2} m\sqrt{1+m^2} \qquad (5)$$

on remplace l'expression (5) dans l'expression (4) on obtient l'expression qui donne la valeur du périmètre mouillé minimal.

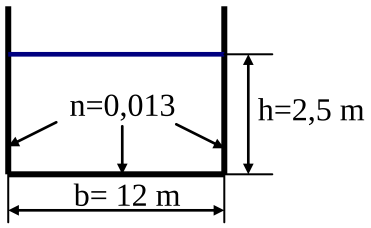
$$\chi_{min} = \frac{2\left(\frac{h_1^2}{2} m\sqrt{1+m^2}\right)}{mh_1} + h_1\sqrt{1+m^2} = h_1\sqrt{1+m^2} + h_1\sqrt{1+m^2} = 2h_1\sqrt{1+m^2}$$

$$\chi_{min} = 2h_1\sqrt{1+m^2} \qquad (6)$$

Calcul du rayon hydraulique maximal : $R_{max} = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{\frac{h_1^2}{2} m\sqrt{1+m^2}}{2h_1\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{mh_1}{4}$

Exercice n° :7

Pour un écoulement dans un canal rectangulaire ouvert, en ciment (n=0,013), dont la largeur est de 12 m et la profondeur de 2,5 m. La pente du canal vaut 0,0028.
Trouver la vitesse et le débit de l'eau ?



Solution

La relation de la vitesseest donnée par la relation de Chezy : $v = C\sqrt{Ri}$

La relation du coefficient de Chezy est donnée par lé relation de Manning **:** $C = \dfrac{1}{n} R_H^{1/6}$

De ces deux relations, on peut écrire $v = \dfrac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 2{,}5x12{,}0 = 30\,m^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh = 12{,}0 + 2x2{,}5 = 17\,m$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{(2{,}5)(12{,}0)}{12{,}0 + 2(2{,}5)} = 1{,}765\,m$

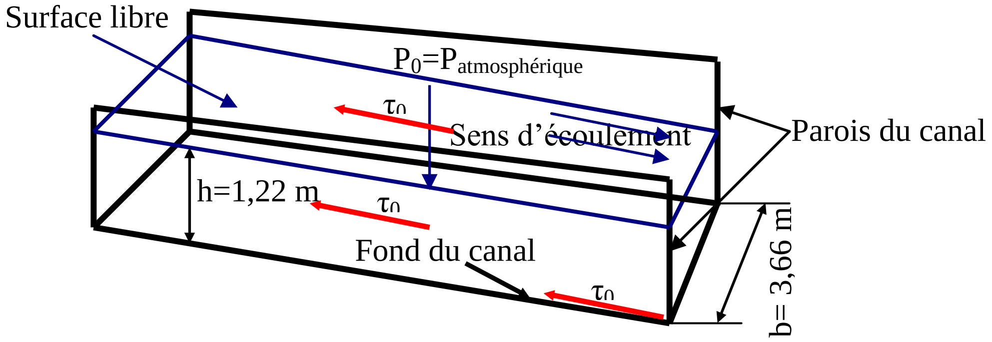
$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \frac{1}{0{,}013}(1{,}765)^{2/3}(0{,}0028)^{1/2} = 5{,}945\,m/s \text{ donc, } v = 5{,}945\,m/s$$

Le débit est donné par l'équation de continuité $Q = \omega v = 30x5{,}945 = 178{,}35 m^3/s$ donc, $Q = 178{,}35 m^3/s$

Exercice n° :8

a) Monter qu'il existe une corrélation entre le facteur Lambda (λ) (coefficient de dary) et le facteur de rugosité (n) ?

b) quelle est la contrainte tangentielle visqueuse moyenne τ_0 qui s'exerce sur les côtés et sur le fond d'un canal rectangulaire de 3,66 m de large, profond de 1,22 m et ayant une pente de 1,60 m/1000 m ?



Solution

a) La relation qui existe entre le coefficient de rugosité λ et le coefficient n est la suivante :

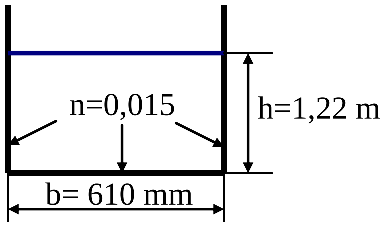
Nous avons démontré que $C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{8gn^2}{R^{1/3}}$

b) calcul de la contrainte tangentielle visqueuse moyenne :

$$\tau_0 = \rho g R i = \frac{\rho g \omega i}{\chi} = \frac{9{,}81x10^3 x(3{,}66x1{,}22)}{(3{,}66 + 2x1{,}22)} (\frac{1{,}60}{1000}) = 11{,}489 \ N/m^2$$

Exercice n° :9

A quel débit doit-on s'attendre dans un canal rectangulaire de 1,22 m de large, revêtu de ciment, ayant une pente de 4m pour 10000 m, si l'eau a 610 mm de profondeur ? On prend n=0,015.



Solution

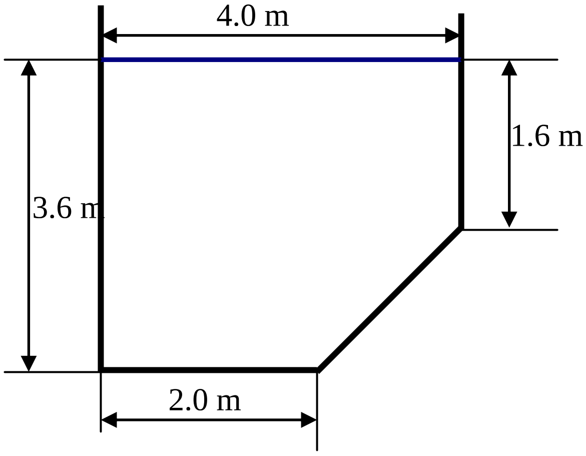
La relation qui donne le débit en écoulement uniforme est :

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = (1{,}22x0{,}61) \frac{1}{0{,}015} (\frac{1{,}22x0{,}61}{1{,}22 + 2x0{,}61})^{2/3} (0{,}0004)^{1/2} = 0{,}45 \, m^3/s$$

Exercice n° :10

Le canal de ciment de la figure suivante doit débiter 30 m^3 d'eau à la seconde. Trouver la dénivellation du fond du canal par kilomètre de longueur ?

On prend n=0,013.



Solution

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = \left(\frac{nQ}{\omega R^{2/3}}\right)^2$$

Calcul de la section : $\omega = (3,6)(2,0) + (2,0)\left(\frac{1,6+3,6}{2}\right) = 12,40\,m^2$

Calcul du périmètre mouillé : $\chi = 3,6 + 2 + 1,6 + \sqrt{2^2 + 2^2} = 10,03\,m$

D'où le rayon hydraulique : $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{12,40}{10,03} = 1,236\,m$

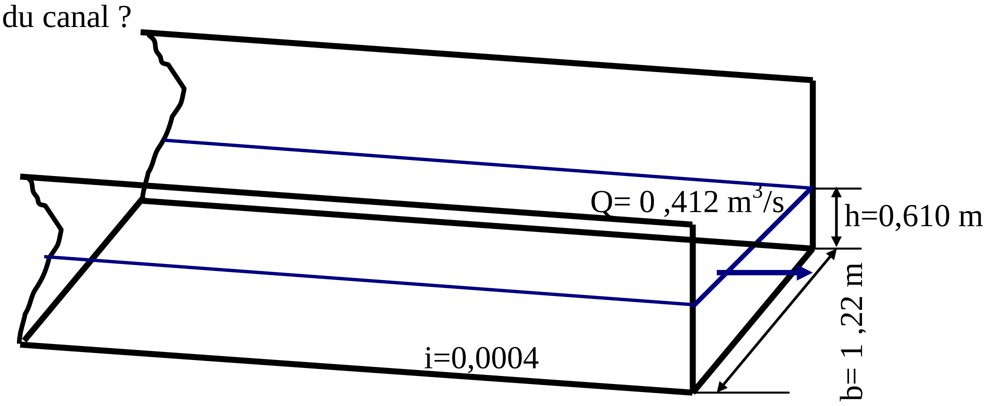
Calcul de la pente du fond du canal

$$i = \left(\frac{nQ}{\omega R^{2/3}}\right)^2 = \left(\frac{(0,013)(30)}{(12,40)(1,236)^{2/3}}\right)^2 = 0,0007457$$

$i = 0,0007457 = 0,746 m/km$.

Exercice n° : 11

dans un laboratoire d'hydraulique, le débit mesuré dans un canal rectangulaire est de 0,412 m^3/s. Les dimensions du canal sont : la largeur du canal est égale à 1,22 m et la profondeur est de 0,610 m. Si la pente du canal était de 0,00040, quel est le coefficient de rugosité pour le revêtement du canal ?



Solution

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow n = (\frac{\omega R^{2/3}i^{1/2}}{Q})$$

$$n = (1{,}22x0{,}61)\frac{(1{,}22x0{,}61)/(1{,}22+2(0{,}61))^{2/3}(0{,}00040)^{1/2}}{0{,}412} = 0{,}7442\frac{(0{,}305)^{2/3}(0{,}00040)^{1/2}}{0{,}412} = 0{,}0163$$

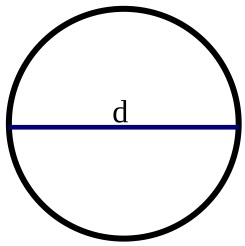
$n = 0{,}0163$ on prend =0,016.

Exercice n° :12

Avec quelle pente doit-on concevoir un tuyau d'égout vitrifié de 600 mm pour que le débit soit de 0,17 m^3/s. on prend n=0,013.

Quand il est à moitié plein ?

Quand il est plein ?



Solution

On prend n=0,013

a) le tuyau est à moitie plein :

Le rayon hydraulique : $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{1}{2}(\pi d^2/4)}{\frac{1}{2}(\pi d)} = \frac{d}{4} = 0{,}15\,\text{m}$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi d^2}{4})\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = (\frac{8nQ}{\pi d^2 R^{2/3}})^2 = (\frac{8(0{,}013)(0{,}17)}{\pi(0{,}6)^2(0{,}15)^{2/3}})^2 = 0{,}00306$$

$$i = (\frac{8(0{,}013)(0{,}17)}{\pi(0{,}6)^2(0{,}15)^{2/3}})^2 = 0{,}00306$$

b) le tuyau est plein :

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = (\frac{\pi d^2}{4})\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = (\frac{4nQ}{\pi d^2 R^{2/3}})^2 = (\frac{4(0{,}013)(0{,}17)}{\pi(0{,}6)^2(0{,}15)^{2/3}})^2 = 0{,}000766$$

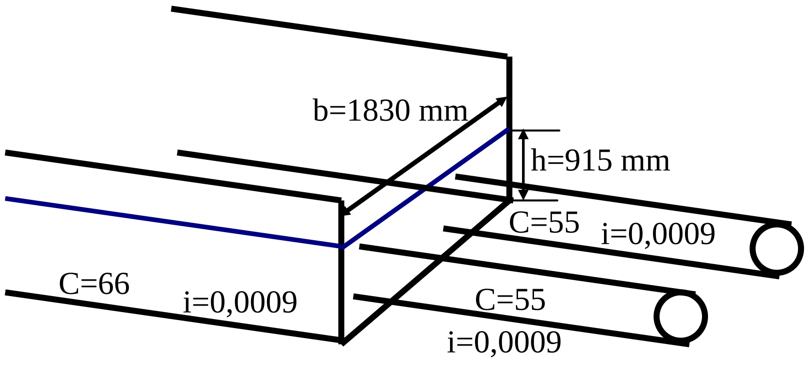
$$i = (\frac{4(0{,}013)(0{,}17)}{\pi(0{,}6)^2(0{,}15)^{2/3}})^2 = 0{,}000766$$

Exercice n° :13

Deux tuyaux de béton (le coefficient de Chezy C=55) transportent le débit provenant d'un canal ouvert ayant pour section un demi carré de 1830mm de large et de 915mm de profondeur (le coefficient de Chezy C=66). La pente des deux structures est de 0,00090.

a) Calculer le diamètre des tuyaux ?

b) Trouver quelle est la profondeur de l'eau dans le canal rectangulaire, après avoir établi le régime, si la pente est 0,00160, en utilisant le coefficient de Chezy C=66.



Solution

$$Q_{canal} = Q_{tuyaux} \Rightarrow \omega_{canal} C\sqrt{Ri} = 2\omega_{tuyaux} C\sqrt{Ri}$$

$$\Rightarrow (1{,}83x0915)(66)\sqrt{\frac{1{,}83x0{,}915}{3{,}66}(0{,}0009)} = 2(\frac{1}{4}\pi d^2)(55)\sqrt{\frac{d}{4}(0{,}0009)} \Rightarrow 2{,}243 = 1{,}296d^{5/2} \Rightarrow d = 1{,}245m$$

Pour une profondeur h, aire ω=1,83h et le rayon hydraulique $R = \frac{1{,}8h}{1{,}83+2h}$ pour le même Q.

$$2{,}243 = (1{,}83h)(66)\sqrt{\frac{1{,}83h}{1{,}83+2h}(0{,}0016)} \Rightarrow 1{,}83h\sqrt{\frac{1{,}83h}{1{,}83+2h}} = 0{,}85 \Rightarrow h^3 - 0{,}236h = 0{,}216$$

En résolvant par la méthode d'approximation successive, de Newton ou celle de Dichotomie nous obtenons h=0,73m.

Exercice n° :14

On pose un tuyau d'égout vitrifié ordinaire avec une pente de 0,00020 pour transporter 2,30 m^3/s quand il est rempli à 90%. On prend n=0,015.
Quelle devra être le diamètre du tuyau ?

Solution

Le canal est rempli à 90% donc y=0,4d.

$$\cos\theta = \frac{y}{d/2} = \frac{0{,}4d}{0{,}5d} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow \theta = 36{,}869^0$$

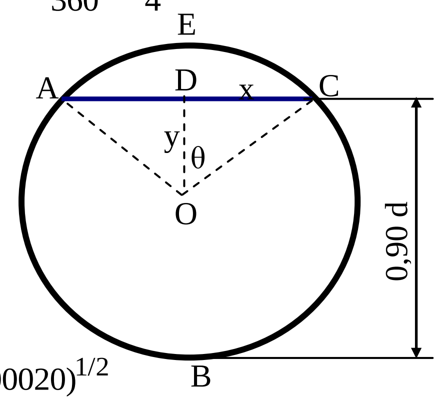
$$\sin\theta = \frac{x}{d/2} = \frac{\sqrt{(0{,}5d)^2 - (0{,}4d)^2}}{0{,}5d} = \frac{\sqrt{(0{,}5)^2 - (0{,}4)^2}\,d}{0{,}5d} = \frac{0{,}3d}{0{,}5d} = 0{,}6 \Rightarrow \theta = 36{,}869^0$$

On calcul le rayon hydraulique : $R = \frac{\omega}{\chi}$

La section mouillée $\omega = \text{cercle} - \text{secteur AOCE} + \text{triangle AOCD}$

La section d'un cercle $\omega = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}(\frac{d}{2})^2\theta = \frac{1}{8}d^2\theta$ avec θ en radian.

$$\text{cercle} = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0{,}785d^2 \;;\; \text{secteur AOCE} = \frac{2\theta}{360}(\frac{\pi d^2}{4}) = \frac{2x36{,}869}{360}\frac{\pi}{4}d^2 = 0{,}161d^2 \;;$$



$$\text{triangle AOC} = 2(\frac{1}{2}xy) = xy = (0{,}3d)(0{,}4d) = 0{,}12d^2$$

$$\omega = 0{,}785d^2 + 0{,}12d^2 - 0{,}164d^2 = 0{,}744d^2$$

Le périmètre mouillé : $\chi = \pi d - \frac{2\theta}{360}\pi d = 2{,}498d$

donc, $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{0{,}744d^2}{2{,}498d} = 0{,}298d$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow 2{,}30 = 0{,}744d^2\frac{1}{0{,}015}(0{,}298d)^{2/3}(0{,}00020)^{1/2}$$

$$2{,}30 = 0{,}3129d^{8/3} \Rightarrow d = (\frac{2{,}30}{0{,}3129})^{3/8} = 2{,}11m$$

Le diamètre du tuyau est $d = 2{,}11m$.

Exercice n° :15

Un tuyau en ciment de diamètre d=600 mm transporte de l'eau sur une pente de 1/400. La profondeur est de 240 mm. On prend n=0,013.

Calculer le débit transporté ?

Solution

Tout d'abord on calcul le débit à plein section c'est-à-dire quand d=0,6m

$$Q_{plein} = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = (\frac{\pi d^2}{4})\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q_{plein} = \frac{\pi(0,6)^2}{4}\frac{1}{0,013}(\frac{0,6}{4})^{2/3}0,0025^{1/2} = 0,307\ m^3/s$$

$$\frac{d}{d_{plein}} = \frac{240}{600} = 0,40 = 40\%$$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = (\frac{\pi d^2}{4})\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{\pi(0,6)^2}{4}\frac{1}{0,013}(\frac{0,6}{4})^{2/3}0,0025^{1/2} = 0,307 m^3/s$$

La section mouillée $\omega = \text{secteur AOCE} - \text{triangle AOCD}$

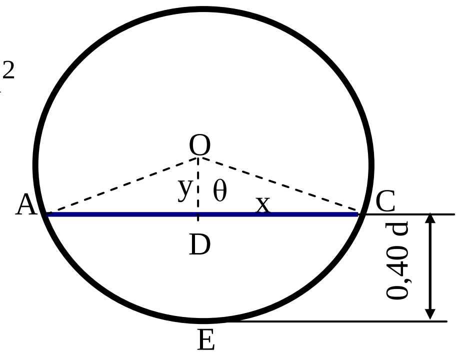
$$\omega = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}(\frac{d}{2})^2\theta = \frac{1}{8}d^2\theta \text{ avec } \theta \text{ en radian.}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{d/2} = \frac{0,1d}{0,5d} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2 \Rightarrow \theta = 78,463^0$$

$$\sin\theta = \frac{x}{d/2} = \frac{\sqrt{(0,5d)^2-(0,1d)^2}}{0,5d} = \frac{d\sqrt{(0,5)^2-(0,1)^2}}{0,5d} = \frac{0,489d}{0,5d} = 0,9797 \Rightarrow \theta = 78,463^0$$

$$\text{secteur AOCE} = \frac{2\theta}{360}(\frac{\pi d^2}{4}) = \frac{2x78,463}{360}\frac{\pi}{4}d^2 = 0,342d^2\ ;$$

$$\text{triangle AOC} = 2(\frac{1}{2}xy) = xy = (0,489d)(0,1d) = 0,04898d^2$$



$$\omega = 0,342d^2 - 0,04898d^2 = 0,2933d^2$$

Le périmètre mouillé : $\chi = \theta R = \theta\frac{d}{2}$ avec θ en radian.

$$\chi = \frac{2\theta}{360}\pi d = \frac{2x78,463}{360}\pi d = 1,369d$$

donc, $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{0,2933d^2}{1,369d} = 0,21417d$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = 0,2933d^2\frac{1}{0,013}(0,21417d)^{2/3}(0,0025)^{1/2}$$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = 0,2933d^{8/3}\frac{1}{0,013}(0,21417)^{2/3}(0,0025)^{1/2} = 0,103m^3/s$$

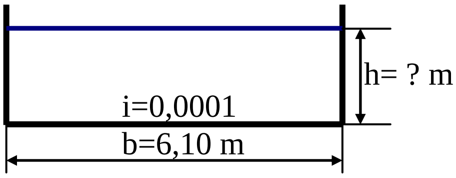
$$\frac{Q}{Q_{plein}} = \frac{0,103}{0,307} = 0,3355 = 33,55\%$$

Le débit transporté par le tuyau représente 33,35 % du débit à pleine section.

Exercice n° :16

Quelle est la profondeur d'eau dans un canal rectangulaire de 6,10 m de large établi sur une pente de 0,00010, débitant 6,80 m^3/s ? On prend n=0,0149.

Solution



$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 6{,}10xh$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{6{,}10h}{6{,}10 + 2h}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 6{,}80 = 6{,}10h \frac{1{,}0}{0{,}0149} \left(\frac{6{,}10h}{6{,}10 + 2h}\right)^{2/3} (0{,}00010)^{1/2} \Rightarrow 6{,}80 = 13{,}67h\left(\frac{h}{6{,}10 + 2h}\right)^{2/3}$$

$$6{,}80 = 13{,}67h\left(\frac{h}{6{,}10 + 2h}\right)^{2/3} \Rightarrow 6{,}80 = 13{,}67 \frac{h^{5/3}}{(6{,}10 + 2h)^{2/3}} \Rightarrow \frac{h^{5/3}}{(6{,}10 + 2h)^{2/3}} = 0{,}5$$

En résolvant cette dernière équation par la méthode de Newton Raphson, nous aurons :

$h = 1{,}6\,m$

Exercice n° :17

Comment doit-on construire un canal rectangulaire pour qu'il transporte 14 m^3/s sur une profondeur de 1,8 m si la pente est de 0,00040 ? On prend n=0,010.

Solution

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = bx1{,}8$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2x1{,}8 = b + 3{,}6$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{bx1{,}8}{b + 3{,}6}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 14 = 1{,}8b \frac{1{,}0}{0{,}010} \left(\frac{1{,}8b}{b + 3{,}6}\right)^{2/3} (0{,}00040)^{1/2} \Rightarrow \frac{b^{5/3}}{(b + 3{,}6)^{2/3}} = 2{,}63$$

$$\frac{b^{5/3}}{(b + 3{,}6)^{2/3}} - 2{,}63 = 0$$

En résolvant cette dernière équation par la méthode de Newton Raphson, nous aurons :

$b = 4{,}02\,m$.

Exercice n° :18

Un canal rectangulaire de largeur b=5 m, de coefficient de rugosité n=0,020 et de pente i=0,04 évacue un débit Q=14 m^3/s.

Calculer la profondeur d'eau dans le canal ?

Solution

Calculer la profondeur d'eau dans le canal :

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 5xh$

Le périmètre mouillé $\chi = 5 + 2xh$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{5h}{5+2h}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 14 = 5h \frac{1{,}0}{0{,}020} \left(\frac{5h}{5+2h}\right)^{2/3} (0{,}04)^{1/2} \Rightarrow 0{,}0958 = \frac{h^{5/3}}{(5+2h)^{2/3}}$$

$$\frac{h^{5/3}}{(5+2h)^{2/3}} - 0{,}0958 = 0$$

En résolvant cette dernière équation par la méthode itérative de Newton Raphson, nous aurons : $h = 0{,}5\,m$

On peut aussi résoudre cet exercice comme suit :

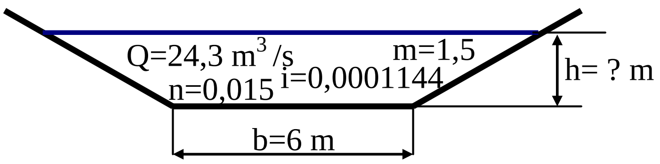
h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}$/s)	Q (m^3/s)
1,000	5,000	7,000	0,714	47,273	39,953
0,500	2,500	6,000	0,417	43,212	13,947
0,501	2,505	6,002	0,417	43,224	13,990

On obtient h=0,501≈0,50 m.

Exercice n° :19

Un canal de section transversale trapézoïdale doit transporter 24,3 m^3/s. si la pente i=0,000144, le coefficient de rugosité n=0,015, la largeur de la base b=6 m et la pente des côtés su canal est 2/3 (tgα=2/3) ou bien m=3/2.

Calculer la profondeur d'eau dans le canal ?



Solution

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est trapézoïdal $\omega = bh + mh^2 = 6h + 1{,}5h^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 6 + 3{,}61xh$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{6h + 1{,}5h^2}{6 + 3{,}61xh}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 24{,}3 = 6h + 1{,}5h^2 \frac{1{,}0}{0{,}015} \left(\frac{6h + 1{,}5h^2}{6 + 3{,}61xh}\right)^{2/3} (0{,}000144)^{1/2}$$

$$\Rightarrow 24{,}3 = 0{,}8(6h + 1{,}5h^2)\left(\frac{6h + 1{,}5h^2}{6 + 3{,}61xh}\right)^{2/3} \Rightarrow \frac{(6h + 1{,}5h^2)^{5/3}}{(6 + 3{,}61xh)^{2/3}} = 30{,}375$$

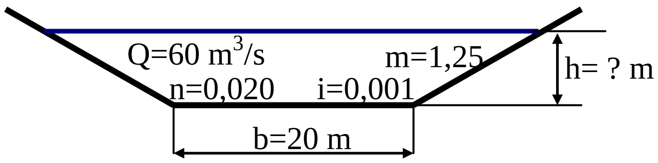
$$\frac{(6h + 1{,}5h^2)^{5/3}}{(6 + 3{,}61xh)^{2/3}} - 30{,}375 = 0$$

En résolvant cette dernière équation par l'une des méthodes itératives « la méthode de Newton Raphson ou par la méthode de Dichotomie », nous aurons : $h = 2{,}4\,\text{m}$.

Exercice n° :20

Un canal trapézoïdal de largeur b=20 m, de coefficient d'écartement du talus m=1,25, de coefficient de rugosité n=0,020 et de pente i=0,001 évacue un débit Q=60 m^3/s.

Calculer la profondeur d'eau dans le canal ?



Solution

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est trapézoïdal $\omega = bh + mh^2 = 20h + 1{,}25h^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 20 + 3{,}20xh$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{20h + 1{,}25h^2}{20 + 3{,}20xh}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 60 = 20h + 1{,}25h^2 \frac{1{,}0}{0{,}020}\left(\frac{20h + 1{,}25h^2}{20 + 3{,}20xh}\right)^{2/3}(0{,}001)^{1/2}$$

$$\Rightarrow 60 = 1{,}58(20h + 1{,}25h^2)\left(\frac{20h + 1{,}25h^2}{20 + 3{,}20xh}\right)^{2/3} \Rightarrow \frac{(20h + 1{,}25h^2)^{5/3}}{(20 + 3{,}20xh)^{2/3}} = 37{,}95$$

$$\frac{(20h + 1{,}25h^2)^{5/3}}{(20 + 3{,}20xh)^{2/3}} - 37{,}95 = 0$$

En résolvant cette dernière équation par l'une des méthodes itératives « la méthode de Newton Raphson ou par la méthode de Dichotomie » ou bien par approximation successives « on fait varier le h jusqu'à où la fonction sera égale à zéro », on obtient la valeur de la profondeur h=1,46 m.

On peut aussi résoudre cet exercice comme suit :

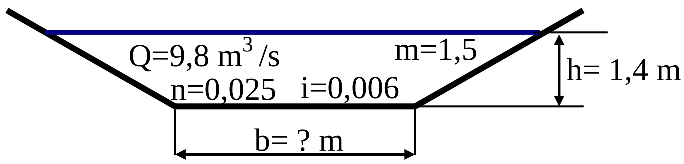
h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	C (m^{0,5}/s)	Q (m^3/s)
0,500	10,313	21,601	0,477	44,203	9,960
1,000	21,250	23,202	0,916	49,273	31,688
1,500	32,813	24,802	1,323	52,388	62,523
1,450	31,628	24,642	1,283	52,124	59,062
1,464	**31,959**	**24,687**	**1,295**	**52,198**	**60,023**

On obtient h=1,464≈1,46 m.

Exercice n° :21

Un canal trapézoïdal de hauteur h=1,4m, coefficient d'écartement du talus m=1,5, de coefficient de rugosité n=0,025 et de pente i=0,006 évacue un débit $Q=9{,}8m^3/s$.

Calculer la largeur de fond (b) du canal ?



Solution

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est trapézoïdal $\omega = bh + mh^2 = bx1{,}4 + 1{,}5(1{,}4)^2 = 1{,}4xb + 2{,}94$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = b + 5{,}048$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{1{,}4b + 2{,}94}{b + 5{,}048}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 9{,}8 = (1{,}4b + 2{,}94)\frac{1{,}0}{0{,}025}\left(\frac{1{,}4b + 2{,}94}{b + 5{,}048}\right)^{2/3}(0{,}006)^{1/2}$$

$$\Rightarrow 9{,}8 = (1{,}4b + 2{,}94)\frac{1{,}0}{0{,}025}\left(\frac{1{,}4b + 2{,}94}{b + 5{,}048}\right)^{2/3}(0{,}006)^{1/2} \Rightarrow \frac{(1{,}4b + 2{,}94)^{5/3}}{(b + 5{,}048)^{2/3}} = 3{,}1629$$

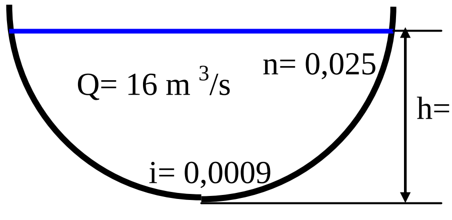
$$\frac{(1{,}4b + 2{,}94)^{5/3}}{(b + 5{,}048)^{2/3}} - 3{,}1629 = 0$$

En résolvant cette dernière équation par l'une des méthodes itératives « la méthode de Newton Raphson ou la méthode de Dichotomie », ou bien par approximation successives, on obtient la valeur de la largeur $b = 0{,}8\,m$.

Exercice n° :22

Un canal parabolique de p=5 m, de coefficient de rugosité n=0,025 et de pente i=0,0009 évacue un débit $Q=16\ m^3/s$.

Calculer la profondeur d'eau dans le canal ?



Solution

Calcul de la profondeur d'eau dans le canal parabolique :

Les données de l'exercice sont :

Le débit $Q=16\ m^3/s$, p=5 m, de coefficient de rugosité n=0,025 et de pente i=0,0009

La section mouillée (ω) : $\omega = \dfrac{2}{3}Bh = \dfrac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right]$

$\tau = h/p$: La profondeur relative

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi}$

$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$

$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$

Pour obtenir la valeur de la profondeur d'eau dans le canal, on fait varier la profondeur h jusqu'à l'obtention de la valeur du débit donné.

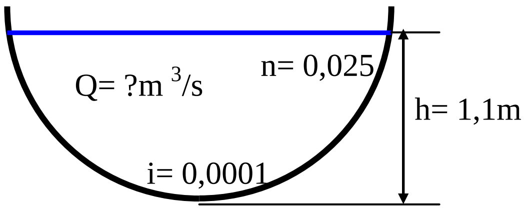
h (m)	ω (m^2)	τ	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}$/s)	Q (m^3/s)
1,000	4,213	0,200	6,724	0,627	37,002	3,702
1,500	7,740	0,300	8,463	0,915	39,410	8,752
2,000	11,917	0,400	10,024	1,189	41,170	16,049

La profondeur d'eau dans le canal est h=2,0m.

Exercice n° :23

Un canal parabolique de p=4m, de rugosité n=0,025 et de pente i=0,0001 et h=1,1m

a) Calculer la vitesse moyenne dans ce canal ?
b) Calculer le débit transporté par ce canal ?



Solution

a) Calculer la vitesse moyenne dans ce canal :

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{2}{3} Bh = \frac{4}{3} h\sqrt{2p}\sqrt{h} = \frac{4}{3}(1,1)^{3/2}(8)^{1/2} = 4,35\,m^2$

$\tau = h/p = 1,1/4 = 0,275$: La profondeur relative

Le périmètre mouillé (χ) :

$\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right] = 4[\sqrt{2x0,275(1+2x0,275)} + \ln(\sqrt{2x0,275} + \sqrt{1+2x0,275})]$

$\chi = 4[\sqrt{2x0,275(1+2x0,275)} + \ln(\sqrt{2x0,275} + \sqrt{1+2x0,275})] = 5,71\,m$

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{4,35}{5,71} = 0,76\,m$

$v = C\sqrt{Ri} = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \frac{1}{0,025}(0,76)^{2/3}(0,0001)^{1/2} = 0,33\,m/s$

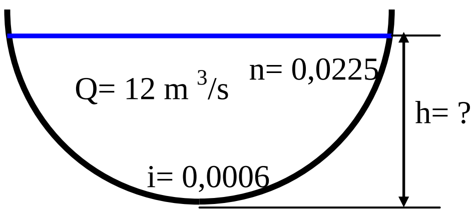
b) Calculer le débit transporté par ce canal ?

$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} = \omega v = 4,35x0,33 = 1,44\,m^3/s$

Exercice n° :24

Un canal parabolique de p=15 m, de coefficient de rugosité n=0,0225 et de pente i=0,0006 évacue un débit Q=12m³/s

Calculer la profondeur d'eau dans le canal ?



Solution

Calcul de la profondeur d'eau dans le canal parabolique :

Les données de l'exercice sont :

Le débit $Q=12m^3/s$, p=15 m, de coefficient de rugosité n=0,0225 et de pente i=0,0006

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{2}{3}Bh = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right]$

$\tau = h/p$: La profondeur relative

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi}$

$C = \frac{1}{n}R^{1/6}$

$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$

Pour obtenir la valeur de la profondeur d'eau dans le canal, on fait varier la profondeur h jusqu'à l'obtention de la valeur du débit donné.

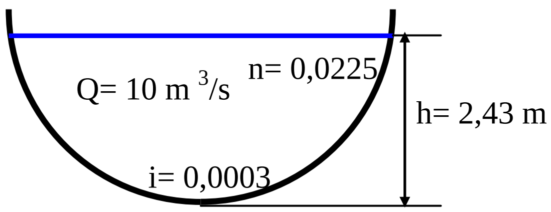
h (m)	ω (m^2)	τ	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}/s$)	Q (m^3/s)
1	7,307	0,067	11,193	0,653	41,395	5,986
1,5	13,423	0,100	13,851	0,969	44,213	14,311
1,4	12,104	0,093	13,354	0,906	43,722	12,341
1,382	11,871	0,092	13,263	0,895	43,630	12,002

La profondeur d'eau dans le canal est h=1,382m.

Exercice n° :25

Un canal parabolique de h=2, 43 m, de coefficient de rugosité n=0,0225 et de pente i=0,0003 évacue un débit $Q=10\ m^3/s$

Calculer le paramètre p de la parabole ?



Solution

Calcul du paramètre p de la parabole :

Les données de l'exercice sont :

Le débit $Q=10\ m^3/s$, h=2,43 m, de coefficient de rugosité n=0,0225 et de pente i=0,0003

La section mouillée (ω) : $\omega = \frac{2}{3}Bh = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Le périmètre mouillé (χ) : $\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right]$

$\tau = h/p$: La profondeur relative

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi}$

$C = \frac{1}{n}R^{1/6}$

$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$

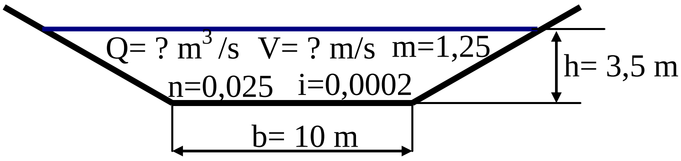
Pour obtenir la valeur du paramètre de la parabole p, on fait varier p jusqu'à l'obtention de la valeur du débit donné.

p (m)	ω (m^2)	τ	χ (m)	R (m)	C (m^{0,5}/s)	Q (m^3/s)
1,000	7,143	2,430	6,868	1,040	44,736	5,644
2,000	10,101	1,215	8,228	1,228	45,990	8,916
2,500	11,294	0,972	8,817	1,281	46,316	10,254
2,400	11,065	1,013	8,703	1,271	46,259	9,997

La valeur du paramètre de la parabole p=2,4m.

Exercice n°26

Déterminer Q et V dans un canal trapézoïdal, si n=0,025, i=0,0002, m=1,25, b=10 m, h=3,5 m.



Solution

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est trapézoïdal $\omega = bh + mh^2 = 10x3,5 + 1,25(3,5)^2 = 50,31\,m^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 10 + 2x3,5\sqrt{1+1,25^2} = 21,21\,m$

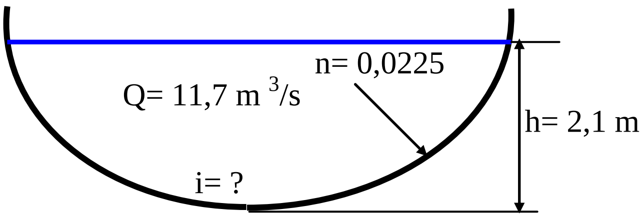
Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{50,31}{21,21} = 2,37\,m$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow Q = (50,31)\frac{1,0}{0,025}(2,37)^{2/3}(0,0002)^{1/2} = 50,59\,m^3/s$$

$$Q = \omega v \Rightarrow v = \frac{Q}{\omega} = \frac{50,59}{50,31} = 1,01\,m/s$$

Exercice n°27

Déterminer la pente « i « et la vitesse moyenne « v » dans un canal parabolique, si h=2,1 m, p=4 m, n=0,0225, Q=11,7 m^3/s.



Solution

Déterminer la pente « i « et la vitesse moyenne « v » dans le canal parabolique, si h=2,1 m, p=4 m, n=0,0225, Q=11,7 m^3/s.

La section mouillée (ω) : $\omega = \dfrac{2}{3}Bh = \dfrac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h} = \dfrac{4}{3}x2,1\sqrt{2x4}\sqrt{2,1} = 11,48\,m^2$

La profondeur relative: $\tau = h/p = 2,1/4 = 0,525$

Le périmètre mouillé (χ) :

$$\chi = p\left[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln\left(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau}\right)\right] = 4\left[\sqrt{2x0{,}525(1+2x0{,}525)} + \ln\left(\sqrt{2x0{,}525} + \sqrt{1+2x0{,}525}\right)\right]$$

$$\chi = 9{,}46\,\text{m}$$

Le rayon hydraulique (R_H) : $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{11{,}48}{9{,}46} = 1{,}21\,\text{m}$

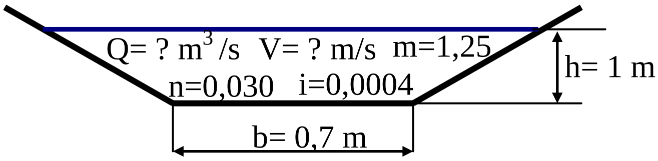
Calcul de la pente du canal i:

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = \left(\frac{nQ}{\omega R^{2/3}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}0225x11{,}7}{11{,}48x1{,}21^{2/3}}\right)^2 = 0{,}00040$$

Calcul de la vitesse moyenne v : $Q = \omega v \Rightarrow v = \frac{Q}{\omega} = \frac{11{,}7}{11{,}48} = 1{,}02\,\text{m/s}$

Exercice n° :28

Déterminer le débit et la vitesse moyenne dans un canal trapézoïdal ayant les caractéristiques suivantes : la largeur du fond b=0,7m, la profondeur d'eau h=1,0m, l'écartement du talus m=1,25, le coefficient de rugosité n=0,030 et la pente i=0,0004.



Solution

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$$

Le canal est trapézoïdal $\omega = bh + mh^2 = 0{,}7x1{,}0 + 1{,}25(1{,}0)^2 = 1{,}95\,\text{m}^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 0{,}7 + 2x1{,}0\sqrt{1+1{,}25^2} = 3{,}90\,\text{m}$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{1{,}95}{3{,}90} = 0{,}50\,\text{m}$

1) calcul du débit :

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = (1{,}95)\frac{1{,}0}{0{,}030}(0{,}50)^{2/3}(0{,}0004)^{1/2} = 0{,}82\,\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0{,}82\,\text{m}^3/\text{s}$$

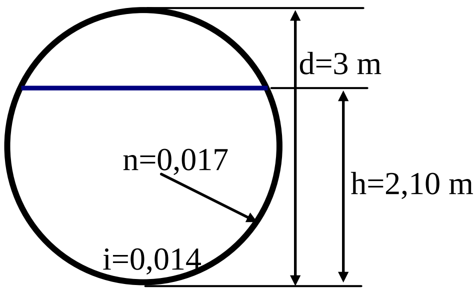
2) calcul de la vitesse moyenne d'écoulement :

$$Q = \omega v \Rightarrow V = \frac{Q}{\omega} = \frac{0{,}82}{1{,}95} = 0{,}42\,\text{m/s}$$

$$V = 0{,}42\,\text{m/s}$$

Exercice n° :29

Déterminer le débit et la vitesse moyenne dans une galerie circulaire ayant les caractéristiques suivantes : le diamètre d=3m, la profondeur d'eau h=2,10m, le coefficient de rugosité n=0,017 et la pente du fond i=0,014.



Solution

a) calcul du débit Q :

La relation du débit est donnée par :

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$

Le canal est rempli à 2,1m donc y =(2,1-d/2) =(2,1-1,5)=0,6=0,2d.

$$\cos\theta = \frac{y}{d/2} = \frac{0{,}2d}{0{,}5d} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4 \Rightarrow \theta = 66{,}42^0$$

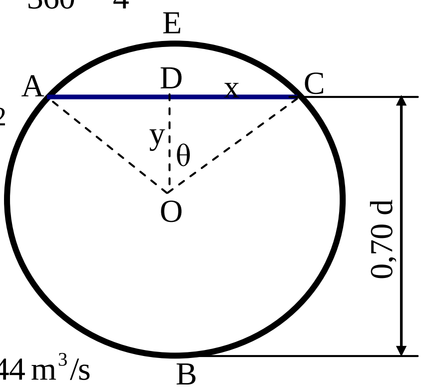
$$\sin\theta = \frac{x}{d/2} = \frac{\sqrt{(0{,}5d)^2 - (0{,}2d)^2}}{0{,}5d} = \frac{d\sqrt{(0{,}5)^2 - (0{,}2)^2}}{0{,}5d} = \frac{0{,}458d}{0{,}5d} = 0{,}916 \Rightarrow \theta = 66{,}42^0$$

On calcul le rayon hydraulique : $R = \frac{\omega}{\chi}$

La section mouillée $\omega = \text{cercle} - \text{secteur AOCE} + \text{triangle AOCD}$

La section d'un cercle $\omega = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}(\frac{d}{2})^2\theta = \frac{1}{8}d^2\theta$ avec θ en radian.

$$\text{cercle} = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0{,}785d^2 \ ; \ \text{secteur AOCE} = \frac{2\theta}{360}(\frac{\pi d^2}{4}) = \frac{2x66{,}42}{360}\frac{\pi}{4}d^2 = 0{,}2898d^2 \ ;$$



$$\text{triangle AOC} = 2(\frac{1}{2}xy) = xy = (0{,}458d)(0{,}2d) = 0{,}0916d^2$$

$$\omega = 0{,}785d^2 + 0{,}0916d^2 - 0{,}2898d^2 = 0{,}5862d^2 = 5{,}28\,m^2$$

Le périmètre mouillé : $\chi = \pi d - \frac{2\theta}{360}\pi d = 1{,}9823d = 5{,}95\,m$

donc, $R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{0{,}5862d^2}{1{,}9823d} = 0{,}2957d = 0{,}89\,m$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = 5{,}28\frac{1}{0{,}017}(0{,}89)^{2/3}(0{,}0014)^{1/2} = 9{,}44\,m^3/s$$

Le débit Q=9,44 m^3/s.

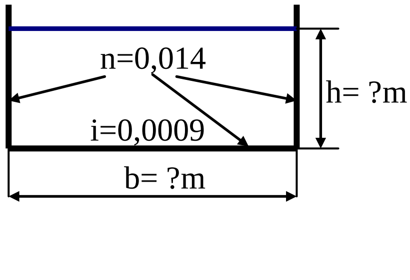
b) Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement :

$$Q = \omega v \Rightarrow v = \frac{Q}{\omega} = \frac{9{,}44}{5{,}28} = 1{,}79\,m/s$$

$v = 1{,}63\,m/s$

Exercice n° :30

Calculer un canal rectangulaire en bois (l'écartement du talus m=0 et le coefficient de rugosité n=0,014) a la section hydrauliquement le plus avantageuse, si le débit transité par ce canal est 1,41 m^3/s et sa pente i=0,0009.



Solution

Le canal a la section hydrauliquement le plus avantageuse donc b=2h

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 2h^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh = 2h + 2h = 4h$

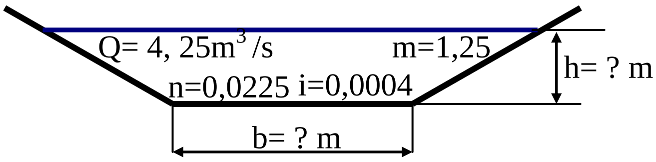
Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{2h^2}{4h} = \frac{h}{2}$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 1{,}41 = 2h^2 \frac{1{,}0}{0{,}014} (\frac{h}{2})^{2/3} (0{,}0009)^{1/2} \Rightarrow h^{8/3} = \frac{2^{2/3} x 0{,}014 x 1{,}4\,1}{2x(0{,}0009)^{1/2}} = 0{,}52$$

$\Rightarrow h = (0{,}52)^{3/8} = 0{,}78\,m$ d'où b=2xh=2x0,78 =1,56 m.

Exercice n° :31

Calculer les dimensions d'un canal trapézoïdal (largeur au fond « b » et la profondeur d'eau « h »), si ce dernier doit transiter un débit Q=4,25m^3/s, le coefficient de rugosité n=0,0225, l'écartement du talus m=1,25, la pente du fond i=0,0004 et la vitesse moyenne V=0,7m/s.



Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

La relation du débit est donnée aussi par : $Q = \omega v$ donc nous pouvons calculer la section du canal $\omega = \frac{Q}{v} = \frac{4{,}25}{0{,}7} = 6{,}07\,m^2$

Le coefficient de Chézy est donné par la relation de Manning : $C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}$ car le rayon hydraulique $R = \frac{\omega}{\chi}$ la relation de la vitesse devient :

$$v = C\sqrt{Ri} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = C\sqrt{R} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = \frac{1}{n} R^{2/3} \Rightarrow R = (\frac{nv}{\sqrt{i}})^{3/2}$$

$$R = (\frac{0{,}0225x0{,}7}{\sqrt{0{,}0004}})^{3/2} = 0{,}6988\,m$$

Nous avons la section mouillée et le rayon hydraulique nous pouvons calculer Le périmètre mouillé $R = \frac{\omega}{\chi} \Rightarrow \chi = \frac{\omega}{R} = \frac{6{,}07}{0{,}6988} = 8{,}688\,m$

Pour le canal à section trapézoïdale :

La section mouillée est donnée par la relation $\omega = bh + mh^2$

Le périmètre mouillé est donné par $\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$

$bh + mh^2 = 6{,}07$ ….. (1)

$b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 8{,}688$ …….(2)

de (2) $\Rightarrow b = 8{,}688 - 2h\sqrt{1 + m^2}$ (3) on substitue dans l'équation (1) on obtient :

$$6{,}07 = (8{,}688 - 2h\sqrt{1+m^2})h + mh \Rightarrow -(2\sqrt{1+m^2} - m)h^2 + 8{,}688h - 6{,}07 = 0$$

On remplace par m=1,25 dans la dernière équation, nous aurons :

$-(2\sqrt{1+1{,}25^2} - 1{,}25)h^2 + 8{,}688h - 6{,}07 = 0 \Rightarrow -1{,}95h^2 + 8{,}688h - 6{,}07 = 0$ c'est une équation de second ordre qui admet comme solution :

$$\Delta = B^2 - 4AC = 8{,}688^2 - 4x(-1{,}95)x(-6{,}07) = 27{,}8229 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5{,}27$$

$$h_1 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-8{,}688-5{,}27}{2x(-1{,}95)} = 3{,}575\,\text{m}$$

$$h_2 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-8{,}688+5{,}27}{2x(-1{,}95)} = 0{,}87\,\text{m}$$

Le choix de l'un des deux (2) dépend grandement du calcul de la largeur au fond b :

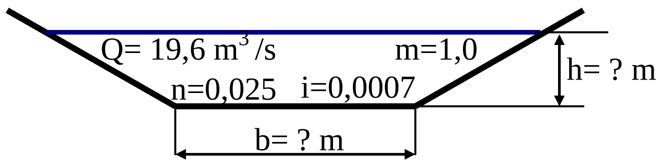
Pour h_1=3,575 m $b_1 = 8{,}688 - 2h_1\sqrt{1+m^2} = 8{,}688 - 2x3{,}575\sqrt{1+1{,}25^2} = -2{,}757\,\text{m}$

Pour h_2=0,87 m $b_2 = 8{,}688 - 2h_2\sqrt{1+m^2} = 8{,}688 - 2x0{,}87\sqrt{1+1{,}25^2} = 5{,}90\,\text{m}$

Donc, on adopte h_2=0,87 m et b_2=5,90 m.

Exercice n° :32

Déterminer les paramètres de la section liquide du canal trapézoïdal, si le débit Q=19,6m^3/s, le coefficient de rugosité est n=0,025, l'écartement du talus m= 1, la pente du fond i=0,0007 et la vitesse moyenne V=1,30m/s.



Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

La relation du débit est donnée aussi par : $Q = \omega v$ donc nous pouvons calculer la section du canal $\omega = \frac{Q}{v} = \frac{19{,}60}{1{,}30} = 15{,}08\,\text{m}^2$

Le coefficient de Chézy est donné par la relation de Manning : $C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}$ car le rayon hydraulique $R = \frac{\omega}{\chi}$ la relation de la vitesse devient :

$$v = C\sqrt{Ri} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = C\sqrt{R} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = \frac{1}{n}R^{1/6}R^{1/2} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{i}} = \frac{1}{n}R^{2/3} \Rightarrow R = (\frac{nv}{\sqrt{i}})^{3/2}$$

$$R = (\frac{0{,}025x1{,}30}{\sqrt{0{,}0007}})^{3/2} = 1{,}36\,\text{m}$$

Nous avons la section mouillée et le rayon hydraulique nous pouvons calculer Le périmètre mouillé $R = \frac{\omega}{\chi} \Rightarrow \chi = \frac{\omega}{R} = \frac{15{,}08}{1{,}36} = 11{,}09\,\text{m}$

Pour le canal à section trapézoïdale :

La section mouillée est donnée par la relation $\omega = bh + mh^2$

Le périmètre mouillé est donné par $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$

$bh + mh^2 = 15{,}08 \ldots..(1)$

$b + 2h\sqrt{1+m^2} = 11{,}09 \ldots\ldots (2)$

de (2) $\Rightarrow b = 11{,}09 - 2h\sqrt{1+m^2}$ (3) on substitue dans l'équation (1) on obtient :

$15{,}08 = (11{,}09 - 2h\sqrt{1+m^2})h + mh \Rightarrow -(2\sqrt{1+m^2} - m)h^2 + 11{,}09h - 15{,}08 = 0$

On remplace par m=1 dans la dernière équation, nous aurons :

$-(2\sqrt{1+1^2} - 1)h^2 + 11{,}09h - 15{,}08 = 0 \Rightarrow -1{,}83h^2 + 11{,}09h - 15{,}08 = 0$ c'est une équation de second ordre qui admet comme solution :

$\Delta = B^2 - 4AC = 11{,}09^2 - 4x(-1{,}83)x(-15{,}08) = 12{,}60 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3{,}55$

$$h_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-11{,}09 - 3{,}55}{2x(-1{,}83)} = 4{,}00\,m$$

$$h_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-11{,}09 + 3{,}55}{2x(-1{,}83)} = 2{,}06\,m$$

Le choix de l'un des deux (2) dépend grandement du calcul de la largeur au fond b :

Pour h_1=4,00 m $b_1 = 11{,}09 - 2h_1\sqrt{1+m^2} = 11{,}09 - 2x4{,}00\sqrt{1+1^2} = -0{,}22\,m$

Pour h_2=2,06 m $b_2 = 11{,}09 - 2h_2\sqrt{1+m^2} = 11{,}09 - 2x2{,}06\sqrt{1+1^2} = 5{,}26\,m$

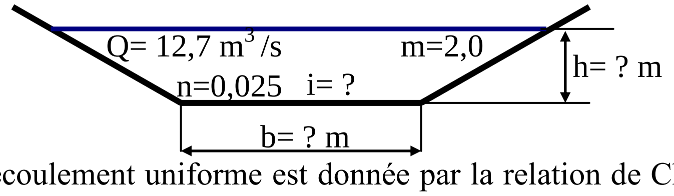
Donc, on adopte h_2=2,06 m et b_2=5,26 m.

Exercice n° :33

Déterminer

a) Quelle doit être la section optimale d'un canal trapézoïdal, le coefficient de rugosité n=0.025, devant transporter 12,7m^3/s. pour éviter l'érosion, la vitesse ne doit pas dépasser 0,91 m/s et les côtés doivent avoir une pente de ½ ?

b) Quelle doit être la pente i du canal ?



Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

La relation du débit est donnée aussi par : $Q = \omega v$ donc nous pouvons calculer la section du canal $\omega = \frac{Q}{v} = \frac{12{,}70}{0{,}91} = 13{,}956\,m^2$

Pour avoir la section le plus avantageuse, dans les canaux trapézoïdal, il faut que : rayon hydraulique $R = \frac{h}{2}$ la relation de la vitesse devient :

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh + mh^2}{b + 2h\sqrt{1+m^2}} = \frac{13{,}956}{b + 2h\sqrt{1+m^2}} \qquad (1)$$

$$R = \frac{h}{2} \qquad (2)$$

de (1)=(2) $\dfrac{13{,}956}{b+2h\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{h}{2} \Rightarrow \dfrac{13{,}956}{b+2h\sqrt{1+2^2}} = \dfrac{h}{2} \Rightarrow \dfrac{13{,}956}{b+4{,}47h} = \dfrac{h}{2}$

$$\frac{13{,}956}{b+4{,}47h} = \frac{h}{2} \qquad (3)$$

$$\omega = bh + mh^2 \Rightarrow 13{,}956 = bh + mh^2 \Rightarrow b = \frac{13{,}956 - mh^2}{h} = \frac{13{,}956 - 2h^2}{h}$$

$$b = \frac{13{,}956 - 2h^2}{h} \qquad (4)$$

a) Calcul de la profondeur d'eau h:

On substitue la valeur de b de l'équation (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$\frac{13{,}956}{\frac{13{,}956-2h^2}{h} + 4{,}47h} = \frac{h}{2} \Rightarrow h\left(\frac{13{,}956-2h^2}{h} + 4{,}47h\right) = 2x13{,}956$$

$$13{,}956 - 2h^2 + 4{,}47h^2 = 27{,}912 \Rightarrow 2{,}47h^2 + 13{,}956 - 27{,}912 \Rightarrow 2{,}47h^2 - 13{,}956 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = 5{,}65 \Rightarrow h = 2{,}38\,\mathrm{m}$$

b) calcul de la largeur au fond b:

$$b = \frac{13{,}956 - 2x2{,}38^2}{2{,}38} = 1{,}10\,\mathrm{m}$$

c) calcul de la pente du canal

$$R = \frac{h}{2} = \frac{2{,}38}{2} = 1{,}19m$$

De la formule de la vitesse en écoulement uniforme donnée la relation de Chézy

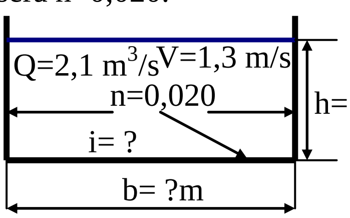
$$v = C\sqrt{Ri} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{v}{C\sqrt{R}} \Rightarrow i = \left(\frac{v}{C\sqrt{R}}\right)^2 = \left(\frac{v}{\frac{1}{n}R^{1/6}\sqrt{R}}\right)^2 = \left(\frac{v}{\frac{1}{n}R^{1/6}R^{1/2}}\right)^2 = \left(\frac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}}\right)^2$$

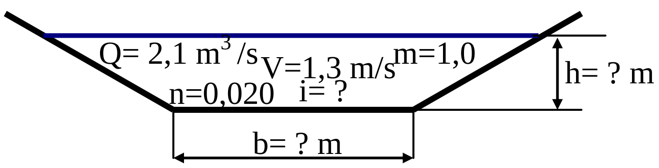
$i == \left(\dfrac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}}\right)^2 = \left(\dfrac{0{,}91}{\frac{1}{0{,}025}1{,}19^{2/3}}\right)^2 = 0{,}00041$ Donc la pente du canal i=0,00041

Exercice n° :34

Un canal ouvert doit supporter un débit Q de $2{,}1m^3/s$ à la vitesse de 1,3m/s. déterminer les dimensions de la section droite du canal ainsi que la pente sachant que la section droite :

a) rectangulaire (profondeur égale à la moitié de la largeur b).
b) semi-circulaire.
c) trapézoïdal (profondeur égale à la largeur de fond et la pente du talus =1/1). On utilisera n=0,020.





Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chézy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

La relation du débit est donnée aussi par : $Q = \omega v$ donc nous pouvons calculer la section du canal $\omega = \frac{Q}{v} = \frac{2{,}10}{1{,}30} = 1{,}615\,m^2$

a) Canal à section rectangulaire :

Le canal a la section hydrauliquement le plus avantageuse donc b=2h

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 2h^2 = 1{,}615 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1{,}615}{2}} = 0{,}90m$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh = 2h + 2h = 4h = 4x0{,}90 = 3{,}6m$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{2h^2}{4h} = \frac{h}{2} = \frac{0{,}90}{2} = 0{,}45m$

b=2xh=2x 0,90 =1,80 m.

$$v = C\sqrt{Ri} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{v}{C\sqrt{R}} \Rightarrow i = (\frac{v}{C\sqrt{R}})^2 = (\frac{v}{\frac{1}{n}R^{1/6}\sqrt{R}})^2 = (\frac{v}{\frac{1}{n}R^{1/6}R^{1/2}})^2 = (\frac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}})^2$$

$i = (\frac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}})^2 = (\frac{1{,}30}{\frac{1}{0{,}020}0{,}45^{2/3}})^2 = 0{,}00196$ Donc la pente du canal i=0,00196.

b) Canal à section semi circulaire :

$$\omega = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\pi d^2) \Rightarrow d = \sqrt{\frac{8\omega}{\pi}} = \sqrt{\frac{8x1{,}615}{\pi}} = 2{,}0279\,m \Rightarrow R = 1{,}014\,m$$

$$\chi = \frac{1}{2}(\pi d) = \frac{1}{2}\pi 2{,}03 = 3{,}19\,m$$

$$R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{\frac{1}{8}\pi d^2}{\frac{1}{2}\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{2{,}03}{4} = 0{,}507\,m$$

$i == (\frac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}})^2 = (\frac{1{,}30}{\frac{1}{0{,}020}0{,}507^{2/3}})^2 = 0{,}00168$ Donc la pente du canal circulaire i=0,00168.

c) canal à section trapézoïdal :

Pour avoir la section le plus avantageuse, dans les canaux trapézoïdal, il faut que : rayon hydraulique $R = \frac{h}{2}$ la relation de la vitesse devient :

Les données de l'exercice nous permettons d'écrire : h=b d'où

$$\omega = bh + mh^2 = (1+m)h^2 = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1{,}615}{2}} = 0{,}90\,m$$

h=b=0,90m

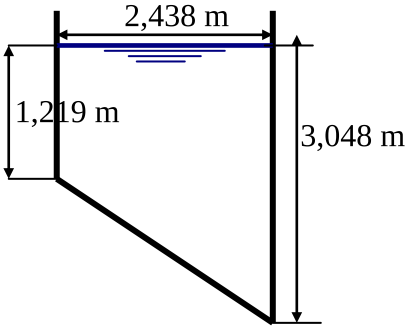
$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = h(1+2\sqrt{1+m^2}) = 3{,}828h = 3{,}828x0{,}90 = 3{,}446\,m$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh + mh^2}{b + 2h\sqrt{1+m^2}} = \frac{1{,}615}{3{,}446} = 0{,}47\ \text{m}$$

$i == (\dfrac{v}{\frac{1}{n}R^{2/3}})^2 = (\dfrac{1{,}30}{\frac{1}{0{,}020}0{,}47^{2/3}})^2 = 0{,}00185$ Donc la pente du canal trapézoïdal i=0,00185.

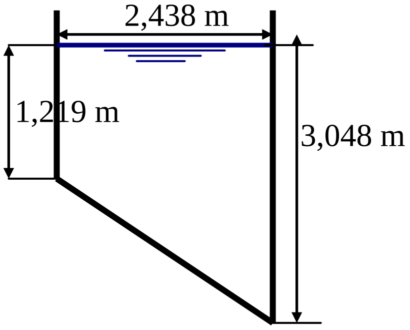
Exercice n° :35

Avec quelle pente doit-on établir le canal représenté dans la figure suivante pour qu'il débite un débit Q=14,80m^3/s. on prend C=55 ?



Solution

Les données de l'exercice sont : le débit Q=14,80m^3/s et le coefficient de Chezy C=55.



La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

$$\omega = \frac{3{,}048 + 1{,}219}{2} 2{,}438 = 5{,}20\ \text{m}^2$$

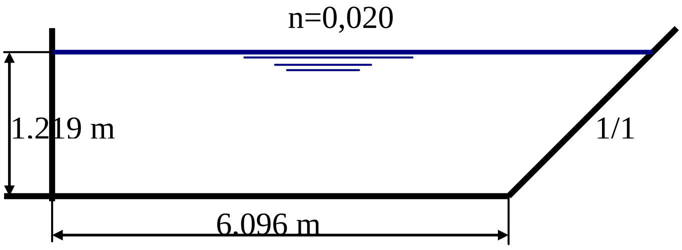
$$\chi = 3{,}048 + 1{,}219 + \sqrt{(3{,}048 - 1{,}219)^2 + 2{,}438^2} = 3{,}048 + 1{,}219 + 3{,}048 = 7{,}315\ \text{m}$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{5{,}20}{7{,}315} = 0{,}71\ \text{m}$$

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} \Rightarrow i = (\frac{Q}{C\omega\sqrt{R}})^2 = (\frac{14{,}80}{55x5{,}20x0{,}71^{1/2}})^2 = 0{,}00377$$

Exercice n° :36

Le canal représenté dans la figure suivante est réalisé avec une pente de 0,00016. À l'approche du talus d'un chemin de fer, le débit doit d'effectuer par deux tuyaux de béton (coefficient de rugosité n=0,012) posés sur une pente de 2,5 m sur 1000 m.
Quelle doit être la taille des tuyaux ?



Solution

$$Q_{canal} = 2Q_{tuyau}$$

$$\omega = \frac{1}{2}mh^2 + bh = \frac{1}{2}1{,}219^2 + 6{,}096x1{,}219 = 8{,}17\,m^2$$

$$\chi = h + b + h\sqrt{1+m^2} = b + h(\sqrt{1+m^2}+1) = b + h(\sqrt{1+1^2}+1) = b + h(\sqrt{2}+1) = 9{,}04\,m$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{8{,}17}{9{,}04} = 0{,}90\,m$$

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0{,}020}(0{,}90)^{1/6} = 49{,}13\,m^{0,5}/s$$

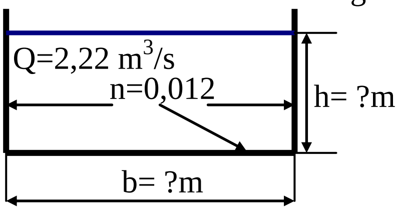
$$Q_{canal} = \omega C\sqrt{Ri} = 8{,}17x49{,}13x\sqrt{0{,}90x0{,}00016} = 4{,}817\,m^3/s$$

$$Q_{canal} = 2Q_{tuyau} \Rightarrow 4{,}817 = 2\frac{\pi d^2}{4}\frac{1}{n}(\frac{d}{4})^{1/6}\sqrt{\frac{d}{4}i} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\frac{d^{8/3}}{4^{2/3}}i^{1/2} = 2{,}60d^{8/3} \Rightarrow d^{8/3} = 1{,}85$$

$d = 1{,}85^{3/8} = 1{,}26\,m$, chaque tuyau doit avoir un diamètre d=1,26m.

Exercice n° :37

Un canal demi carré a un débit de 2,22m^3/s. le canal a 1220m de long et descend de 0,610m sur cette longueur. En utilisant la formule de Manning et n=0,012, calculer ses dimensions.



Solution

Le canal est demi - carré donc h=b/2

Le canal est rectangulaire $\omega = b\frac{b}{2} = \frac{b^2}{2}$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2x\frac{b}{2} = 2b$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{\frac{b^2}{2}}{2b} = \frac{b}{4}$

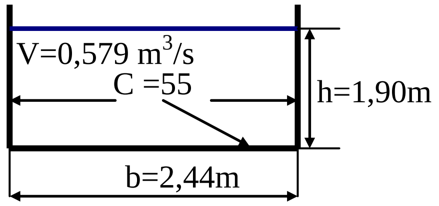
$$Q_{canal} = \omega C\sqrt{Ri} = \frac{b^2}{2}x\frac{1}{n}(\frac{b}{4})^{1/6}x\sqrt{(\frac{b}{4})x(0{,}610/1220)} = \frac{1}{2}\frac{b^{8/3}}{0{,}012x4^{2/3}}\sqrt{(0{,}610/1220)}$$

$$Q_{canal} = 0{,}37b^{8/3} \Rightarrow b = (\frac{Q_{canal}}{0{,}37})^{3/8} = (\frac{2{,}22}{0{,}37})^{3/8} = 1{,}96\,m$$

h=b/2= 1,96/2 =0,98 m.

Exercice n° :38

De l'eau coule sur une profondeur de 1,90m dans un canal rectangulaire de 2,44m de large. La vitesse moyenne est de 0,579 m/s. Quelle est la pente probable du canal si C=55 ?



Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 2{,}44x1{,}90 = 4{,}636\,m^2$

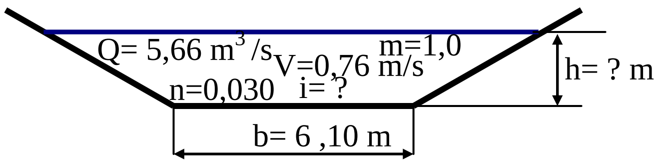
Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh = 2{,}44 + 2x1{,}90 = 6{,}24\,m$

Le rayon hydraulique $R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{4{,}636}{6{,}24} = 0{,}74\,m$

$i = (\frac{v}{C.R^{1/2}})^2 = (\frac{0{,}579}{55x0{,}74^{1/2}})^2 = 0{,}0001497$, La pente probable du canal i=0,0001497.

Exercice n° :39

Un canal découpé dans le roc (n=0,030) a une section trapézoïdale ayant une largeur de fond de 6,10m et une pente de cotés de 1 (tgα=1). La vitesse moyenne permise est de 0,76m/s. quelle pente donnera un débit de 5,66m^3/s ?



Solution

La vitesse moyenne de l'écoulement uniforme est donnée par la relation de Chezy $v = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

La relation du débit est donnée aussi par : $Q = \omega v$ donc nous pouvons calculer la section du canal $\omega = \frac{Q}{v} = \frac{5{,}66}{0{,}76} = 7{,}45\,m^2$

Calcul des paramètres de la section :

$7{,}45 = bh + mh^2 = 6{,}10h + h^2 \Rightarrow h^2 + 6{,}10h - 7{,}45 = 0$ c'est une équation de second ordre qui admet comme solution :

$$\Delta = B^2 - 4AC = 6{,}10^2 - 4x(1)x(-7{,}45) = 67{,}01 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8{,}186$$

$$h_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-6{,}10 - 8{,}186}{2x1} = -7{,}143\,m$$

$$h_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-6{,}10 + 8{,}186}{2x(1)} = 1{,}043\,m$$

on opte pour h=1,043m

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 6,10 + 2x1,043\sqrt{1+1^2} = 9,05\,m$$

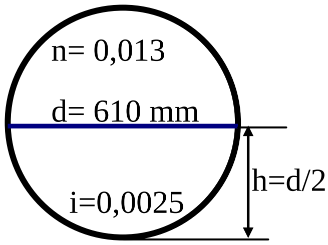
$$R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{7,45}{9,05} = 0,82\,m$$

Calcul de la pente qui donne le débit de 5,66 m^3/s

$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = (\frac{nxQ}{\omega R^{2/3}})^2 = (\frac{0,030x5,66}{7,45x0,82^{2/3}})^2 = 0,000677$. la pente du canal i=0,000677.

Exercice n° :40

Quel est le débit d'eau d'un tuyau d'égout vitrifié neuf de 610mm rempli à moitié et ayant une pente de 0,0025 ? on prend n=0,013.



Solution

Le tuyau d'égout est vitrifié n=0,013.

$$\omega = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\pi d^2) = \frac{1}{8}\pi d^2 = \frac{\pi}{8}d^2 = 0,146\,m^2$$

$$\chi = \frac{1}{2}(\pi d) = \frac{1}{2}\pi(0,610) = 0,958\,m$$

$$R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{\frac{1}{8}\pi d^2}{\frac{1}{2}\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{0,610}{4} = 0,1525\,m$$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = 0,146\frac{1}{0,013}(0,1525)^{2/3}(0,0025)^{1/2} = 0,160\,m^3/s$$

Exercice n°:41

Un canal (n=0,017) a une pente de 0,00040 et a 3048m de long. En admettant que le rayon hydraulique est de 1,463m, quelle correction de la pente doit-on effectuer pour avoir le même débit si le facteur de rugosité passe à 0,020 ?

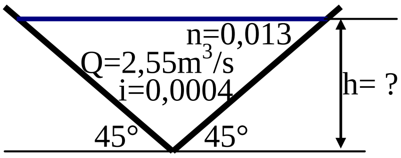
Solution

La rugosité n1=0,017, i1 0,00040, L=3048 m , R=1,463 m, n2=0,020.

$$Q = \omega\frac{1}{n_1}R^{2/3}i_1^{1/2} = \omega\frac{1}{n_2}R^{2/3}i_2^{1/2} \Rightarrow i_2 = (\frac{n_2}{n_1}i_1^{1/2})^2 = (\frac{0,020}{0,017}x0,00040^{1/2})^2 = 0,0005536$$

Exercice n° :42

Quelle sera la profondeur de l'eau dans un canal en V à 90°, n=0,013, réalisé avec une pente de 0,00040 si le débit doit être de 2,55m^3/s ?



Solution

La section mouillée (ω) : $\omega = mh^2 = 1h^2 = h^2$

Le périmètre minimum (χ_{min}) **:** $\chi_{min} = 2h\sqrt{1+(1)^2} = 2\sqrt{2}h$

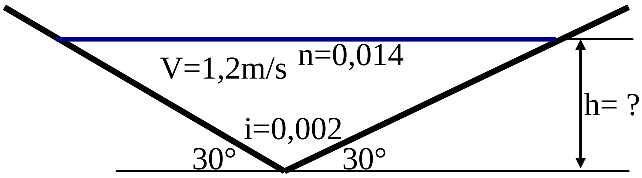
Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{h^2}{2\sqrt{2}h} = \dfrac{h}{2\sqrt{2}}$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = h^2\frac{1}{n}(\frac{h}{2\sqrt{2}})^{2/3}i^{1/2} = \frac{h^{8/3}}{n(2\sqrt{2})^{2/3}}i^{1/2} \Rightarrow h = (\frac{n(2\sqrt{2})^{2/3}Q}{(i)^{1/2}})^{3/8}$$

$$h = (\frac{0{,}013(2\sqrt{2})^{2/3}2{,}55}{(0{,}00040)^{1/2}})^{3/8} = 1{,}57\ \text{m}$$

Exercice n° :43

De l'eau coule dans un caniveau, en acier (n=0,014), en forme de V à 60°, à la vitesse de 1,2m/s. si la pente vaut 0,0020, déterminer la profondeur de l'écoulement ?



Solution

La section mouillée (ω) : $\omega = mh^2 = 0{,}577h^2$

Le périmètre minimum (χ_{min}) **:** $\chi_{min} = 2h\sqrt{1+(0{,}577)^2} = 2{,}31h$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{0{,}577h^2}{2{,}31h} = 0{,}25h$

$$v = \frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} = \frac{1}{n}(0{,}25h)^{2/3}i^{1/2} = \frac{(0{,}25)^{2/3}h^{2/3}}{n}i^{1/2} \Rightarrow h = (\frac{nv}{(0{,}25)^{2/3}(i)^{1/2}})^{3/2}$$

$$h = (\frac{0{,}014x1{,}2}{(0{,}25)^{2/3}(0{,}0020)^{1/2}})^{3/2} = 0{,}921\ \text{m}$$

Exercice n° :44

De l'eau coule sur 0,914 m de profondeur dans un canal rectangulaire de 6,10 m de large, n=0,013, i=0,0144. Quelle serait la profondeur de l'eau pour un même débit avec une pente de 0,00144 ?

Solution

a) calcul du débit :

La section mouillée (ω) : $\omega = bh = 6{,}10x0{,}914 = 5{,}5754\,m^2$

Le périmètre mouillé (χ) **:** $\chi = b + 2h = 6{,}10 + 2x0{,}914 = 7{,}928\,m$

Le rayon hydraulique maximal (R_H) : $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{5{,}5754}{7{,}928} = 0{,}70m$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow Q = 5{,}5754\frac{1}{0{,}013}(0{,}70)^{2/3}(0{,}0144)^{1/2} = 40{,}57\,m^3/s$$

b) calcul de la profondeur d'eau h pour i=0,00144.

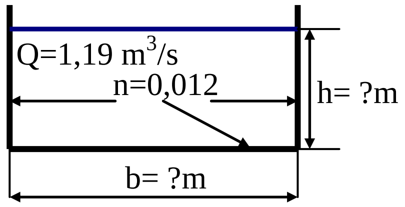
$$\omega 2 = bh_2 = 6{,}10xh_2\ ;\ \chi = b + 2h_2 = 6{,}10 + 2xh_2\ ;\ R_H = \frac{\omega}{\chi_{min}} = \frac{6{,}10h_2}{6{,}10 + 2h_2}\ ;\ Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i_2^{1/2}$$

h_2 (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}/s$)	Q (m^3/s)
1,000	6,100	8,100	0,753	73,372	14,739
2,000	12,200	10,100	1,208	79,383	40,392
2,005	12,231	10,110	1,210	79,403	40,533
2,006	12,237	10,112	1,210	79,407	40,562

La profondeur recherchée est h=2,006m≈2,01m

Exercice n° :45

Un canal débite un débit Q=1,19 m^3/s avec une pente de 0,50 m pour 1000 m. La section est rectangulaire et le coefficient de rugosité n=0,012. Calculer quelles doivent être les meilleures dimensions, c'est-à-dire les dimensions correspondant à un périmètre mouillé minimal.



Solution

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$$

Le canal a la section hydrauliquement le plus avantageuse donc b=2h

Le canal est rectangulaire $\omega = bh = 2h^2$

Le périmètre mouillé $\chi = b + 2xh = 2h + 2h = 4h$

Le rayon hydraulique $R_H = \dfrac{\omega}{\chi_{min}} = \dfrac{2h^2}{4h} = \dfrac{h}{2}$

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow 1{,}19 = 2h^2\frac{1{,}0}{0{,}012}\left(\frac{h}{2}\right)^{2/3}(0{,}0005)^{1/2} \Rightarrow h^{8/3} = \frac{2^{2/3}x0{,}012x1{,}19}{2x(0{,}0005)^{1/2}} = 0{,}507$$

$\Rightarrow h = (0{,}507)^{3/8} = 0{,}775\,m$ d'où b=2xh=2x0,775 =1,55 m.

Exercice n° :46

Un canal ouvert, en ciment (n=0,013), est destiné à transporter 1,5m^3/s d'eau sur une pente égale à 0,00085. Déterminer la où les dimension(s) de la section droite la plus efficace dans le cas

a) d'une section demi-circulaire,
b) d'une section rectangulaire,
c) d'une section triangulaire,
d) d'une section trapézoïdale.

Solution

a) cas d'une section demi - circulaire

La vitesse moyenne d'écoulement est donnée par la relation de Chezy $V = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

Le coefficient de Chezy est donné par la relation de Manning : $C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}$ car le rayon hydraulique $R = \frac{\omega}{\chi}$ la relation qui donne le débit devient :

$$Q = \omega\frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}i} = \frac{\sqrt{i}}{n}\omega\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega\omega^{1/6}\omega^{1/2}}{\chi^{1/6}\chi^{1/2}} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} \Rightarrow \frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$$

$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$ On substitue les relations de $\omega = \frac{\pi d^2}{8}$ et de $\chi = \frac{\pi d}{2}$ dans cette dernière relation, nous obtenons :

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\left(\frac{\pi d^2}{8}\right)^{5/3}}{\left(\frac{\pi d}{2}\right)^{2/3}} = \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{5/3}d^{10/3}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}d^{2/3}} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{5/3}}\frac{Qn}{\sqrt{i}} = d^{8/3} \Rightarrow d = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{5/3}}\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8}$$

$$d = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{5/3}}\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{5/3}}\frac{1{,}5x0{,}013}{\sqrt{0{,}00085}}\right)^{3/8} = 1{,}726 \approx 1{,}73\,m$$

Le diamètre du canal à section demi – circulaire la plus avantageuse est $d = 1{,}73\,m$

b) cas d'une section rectangulaire

Pour avoir la section la plus avantageuse de toutes les sections triangulaires il faut que :

b=2h ; R=h/2 $\omega = 2h^2$ $\chi_{min} = 4h$

Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement $V = C\sqrt{Ri}$

$$\omega = 2h^2 = \frac{Q}{C\sqrt{Ri}} = \frac{Q}{\frac{1}{n}(h/2)^{1/6}\sqrt{(h/2)i}} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{0{,}014}(h/2)^{2/3}\sqrt{0{,}00085}} \Rightarrow 2(h/2)^{2/3}h^2 = \frac{1{,}5}{\frac{\sqrt{0{,}00085}}{0{,}014}}$$

$$\frac{2}{2^{2/3}}h^{8/3} = 0{,}72 \Rightarrow 1{,}26h^{8/3} = 0{,}72 \Rightarrow h^{8/3} = 0{,}57 \Rightarrow h = (0{,}57)^{3/8} \Rightarrow h = 0{,}81m$$

Si n=0,013 on trouve h=0,789m donc b=2 x h=2 x 0,789=1,577m

$\chi_{min} = 4h = 4x0,789 = 3,15m$

c) cas d'une section triangulaire

Pour avoir la section la plus avantageuse, il faut que :

$$\omega = mh^2 = 1h^2 = h^2 \;;\; R_H = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h^2}{2\sqrt{2}h} = \frac{h}{2\sqrt{2}} \;;\; \chi = 2h\sqrt{1+(1)^2} = 2\sqrt{2}h$$

La vitesse moyenne d'écoulement est donnée par la relation de Chezy $V = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

Le coefficient de Chezy est donné par la relation de Manning : $C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}$ car le rayon hydraulique $R = \frac{\omega}{\chi}$ la relation qui donne le débit devient :

$$Q = \omega\frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}i} = \frac{\sqrt{i}}{n}\omega\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega\omega^{1/6}\omega^{1/2}}{\chi^{1/6}\chi^{1/2}} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} \Rightarrow \frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$$

$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$ on substitue les relations de $\omega = h^2$ et de $\chi = 2\sqrt{2}h$ dans cette dernière relation, nous obtenons :

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\left(h^2\right)^{5/3}}{\left(2\sqrt{2}h\right)^{2/3}} = \frac{h^{10/3}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{2/3}h^{2/3}} \Rightarrow \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2/3}Qn}{\sqrt{i}} = h^{8/3} \Rightarrow h = \left(\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2/3}Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8}$$

$$h = \left(\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2/3}Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} = \left(\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2/3}1,5x0,013}{\sqrt{0,00085}}\right)^{3/8} = 1,115\,m$$

$h = 1,115\,m$

Les deux côtés du canal sont égaux et chacune des deux égale à : $\sqrt{2}h = \sqrt{2}x1,115 = 1,577\,m$

d) cas d'une section trapézoïdale

La vitesse moyenne d'écoulement est donnée par la relation de Chezy $V = C\sqrt{Ri}$ qui permet d'écrire la relation du débit $Q = \omega C\sqrt{Ri}$

Le coefficient de Chezy est donné par la relation de Manning : $C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}$ car le rayon hydraulique $R = \frac{\omega}{\chi}$ la relation qui donne le débit devient :

$$Q = \omega\frac{1}{n}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}i} = \frac{\sqrt{i}}{n}\omega\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/6}\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega\omega^{1/6}\omega^{1/2}}{\chi^{1/6}\chi^{1/2}} = \frac{\sqrt{i}}{n}\frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} \Rightarrow \frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$$

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}}$$

Pour avoir la section la plus avantageuse dans un canal à section trapézoïdale il faut que :

$$\omega = h^2(2\sqrt{1+m^2} - m) \;;\chi_{min} = 2h\left(2\sqrt{1+m^2} - m\right); b = 2h(\sqrt{1+m^2} - m) \;; R_{Hmax} = \frac{h}{2} \;;$$

$$m = \cot g\theta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3 = 60°$$

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{\omega^{5/3}}{\chi^{2/3}} = \frac{\left(h^2(2\sqrt{1+m^2}-m)\right)^{5/3}}{\left(2h(2\sqrt{1+m^2}-m)\right)^{2/3}} = \frac{(2\sqrt{1+m^2}-m)^{5/3}}{\left(2(2\sqrt{1+m^2}-m)\right)^{2/3}}\frac{h^{10/3}}{h^{2/3}}$$

$$h^{8/3} = \frac{\left(2(2\sqrt{1+m^2}-m)\right)^{2/3}}{(2\sqrt{1+m^2}-m)^{5/3}}\frac{Qn}{\sqrt{i}} = 2^{2/3}(2\sqrt{1+m^2}-m)^{-1}\frac{Qn}{\sqrt{i}} \Rightarrow h = \left(2^{2/3}(2\sqrt{1+m^2}-m)^{-1}\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8}$$

$$h^{8/3} = 2^{2/3}(2\sqrt{1+0{,}577^2}-0{,}577)^{-1}\left(\frac{1{,}5x0{,}013}{\sqrt{0{,}00085}}\right) = 0{,}61298 \Rightarrow h = 0{,}61298^{3/8} = 0{,}8323\,\text{m}$$

$$h = 0{,}8323\,\text{m}$$

Nous avons la relation de la largeur au fond $b = 2h(\sqrt{1+m^2}-m)$

$\Rightarrow b = 2x0{,}8323(\sqrt{1+0{,}577^2}-0{,}577) = 0{,}961\,\text{m} \Rightarrow b = 0{,}961\,\text{m}$

Les deux (2) côtés du canal sont égaux et chacune des deux est égale à

$h\sqrt{1+m^2} = 0{,}8323\sqrt{1+0{,}577^2} = 0{,}961\,\text{m}$ qui vaut la largeur au fond b.

Exercice n° :47

De l'eau doit couler dans un caniveau rectangulaire à la cadence de 1,42 m^3/s sur une pente égale à 0,0028.

Déterminer les dimensions de la section droite du canal si la largeur vaut deux fois la profondeur. On prendra n=0,017 ?

Calculer les dimensions du canal si la largeur est égale à la profondeur ?

Solution

a) calcul des dimensions du canal quand b=2h :

b=2h ; R=h/2 , $\omega = 2h^2$, $\chi = 4h$

Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement $V = C\sqrt{Ri}$

$$\omega = 2h^2 = \frac{Q}{C\sqrt{Ri}} = \frac{Q}{\frac{1}{n}(h/2)^{1/6}\sqrt{(h/2)i}} = \frac{1{,}42}{\frac{1}{0{,}017}(h/2)^{2/3}\sqrt{0{,}0028}} \Rightarrow 2(h/2)^{2/3}h^2 = \frac{1{,}42}{\frac{\sqrt{0{,}0028}}{0{,}017}}$$

$h^{8/3} = 0{,}362 \Rightarrow h = 0{,}362^{3/8} \Rightarrow h = 0{,}68\,\text{m}$

Si n=0,017 on trouve h=0,68 m donc b=2 x h=2 x 0,68=1,36 m

b) calcul des dimensions quand b=h :

b=h ; R=h/3 , $\omega = h^2$, $\chi = 3h$

Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement $V = C\sqrt{Ri}$

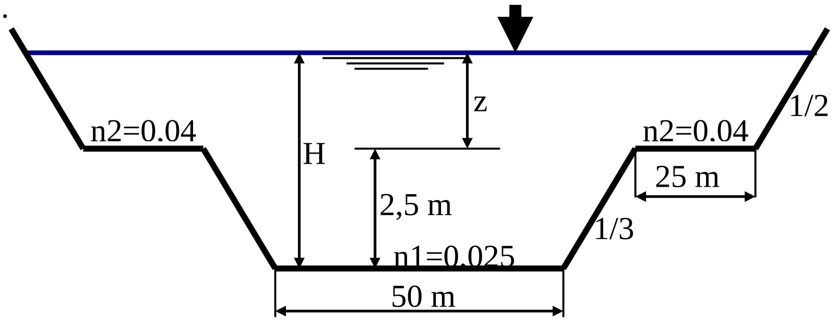
$$\omega = h^2 = \frac{Q}{C\sqrt{Ri}} = \frac{Q}{\frac{1}{n}(h/3)^{1/6}\sqrt{(h/3)i}} = \frac{1{,}42}{\frac{1}{0{,}017}(h/3)^{2/3}\sqrt{0{,}0028}} \Rightarrow (h/3)^{2/3}h^2 = \frac{1{,}42}{\frac{\sqrt{0{,}0028}}{0{,}017}}$$

$h^{8/3} = 0{,}9489 \Rightarrow h = 0{,}9489^{3/8} \Rightarrow h = 0{,}98\,\text{m}$

Si n=0,017 on trouve h=0,98 m donc b= h= 0,98 m.

Exercice n° :48

Calculer la profondeur H dans le canal trapézoïdal pour les conditions suivantes : Q=508,65 m^3/s et i=0,04%.



Solution

Canal trapézoïdal composé

Pour résoudre ce genre de problème, on doit construire un tableau pour faciliter les calculs :

Z	ω1=25*z+z^2	χ1=25+z*5^0,5	R1=w1/x1	C1=(1/0,04)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	26,000	27,236	0,955	24,807	25,207
1,500	**39,750**	**28,354**	**1,402**	**26,448**	**49,791**
2,000	54,000	29,472	1,832	27,655	80,857

Suite du tableau de l'exercice n° :48

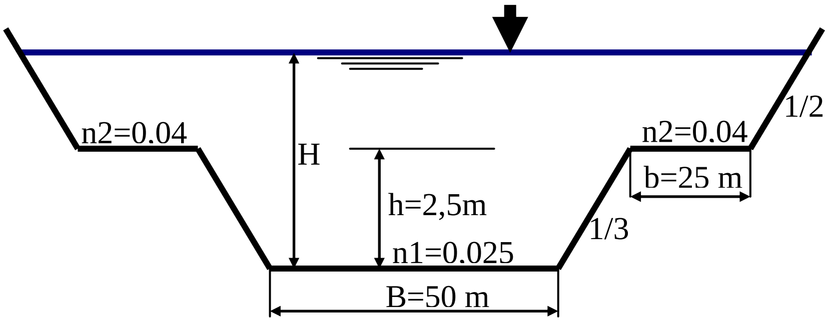
ω2=6*z+143,75	χ2=65,81	R2=w2/x2	C2=(1/0,025)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
143,750	65,810	2,184	45,563	193,601	193,601
208,750	65,810	3,172	48,486	360,528	385,736
241,250	**65,810**	**3,666**	**49,669**	**458,854**	**508,645**
273,750	65,810	4,160	50,727	566,438	647,294

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+1,50=4,00 m.

Exercice n° :49

Calculer le débit qui traverse la conduite à ciel ouvert pour les données suivantes :

m=cotg α
B=50m
b=25m
m1=3.0
m2=2.0
h=2,50m
H=4,00m
i=0, 04%
n1=0,025
n2=0,040



Solution

Pour plus de commodité lors du calcul du débit dans le cas des canaux composés, on construit un tableau comme le suivant :

Z=H-h

Z	ω1=25*z+z^2	χ1=25+z*5^0,5	R1=w1/x1	C1=(1/0,04)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
1,500	39,750	28,354	1,402	26,448	49,791

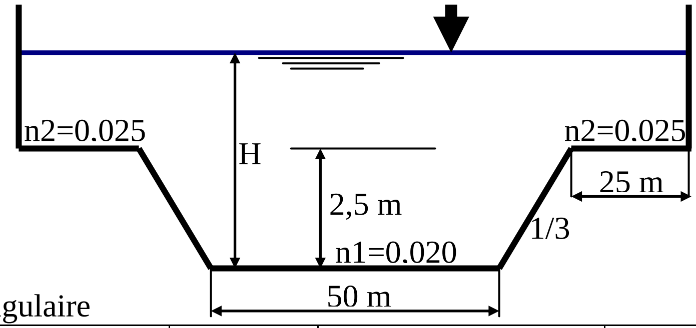
Suite du tableau de l'exercice n° :49

ω2=65*z+143,75	χ2=65,81	R2=w2/x2	C2=(1/0,025)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
241,250	65,810	3,666	49,669	458,854	508,645

Le canal donne un débit Q=508,65 m^3/s.

Exercice n°:50

Calculer la profondeur H dans le canal composé pour les conditions suivantes : $Q=926{,}5 m^3/s$ et i=0,05%.



Solution

Canal trapézoïdal rectangulaire

Z	ω1=25*z	χ1=25+z	R1=w1/x1	C1=(1/0,025)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	25,000	26,000	0,962	39,739	43,567
1,500	37,500	26,500	1,415	42,383	84,553
2,000	**50,000**	**27,000**	**1,852**	**44,326**	**134,880**
2,500	62,500	27,500	2,273	45,865	193,265
3,000	75,000	28,000	2,679	47,139	258,765

Suite du tableau de l'exercice n° :50

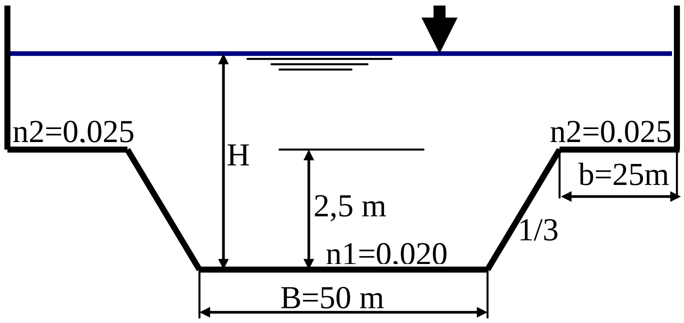
ω2=65*z+143,75	χ2=65,81	R2=w2/x2	C2=(1/0,020)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
143,750	65,810	2,184	56,954	270,566	270,566
208,750	65,810	3,172	60,607	503,854	547,421
241,250	65,810	3,666	62,087	641,268	725,821
273,750	**65,810**	**4,160**	**63,408**	**791,621**	**926,501**
306,250	65,810	4,654	64,605	954,378	1147,643
338,750	65,810	5,147	65,700	1129,083	1387,848

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+2=4,5m.

Exercice n° :51

Calculer le débit qui traverse la conduite à ciel ouvert pour les données suivantes :

m=cotg α
B=50m
b=25m
m1=3.0
h=2,50m
H=4,50m
i=0, 05%
n1=0,020
n2=0,025



Solution

Pour plus de commodité lors du calcul du débit dans le cas des canaux composés, on construit un tableau comme le suivant :

Z=H-h

Z	ω1=25*z	χ1=25+z	R1=w1/x1	C1=(1/0,025)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
2,000	50,000	27,000	1,852	44,326	134,880

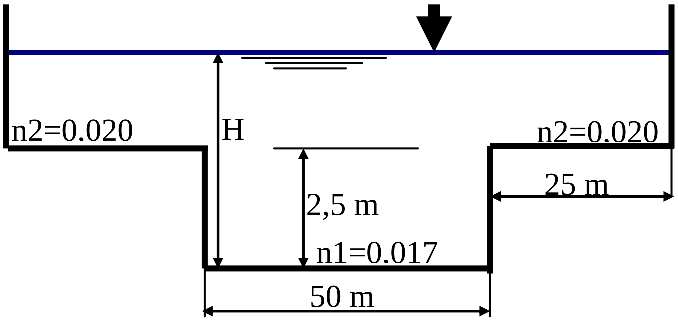
Suite du tableau de l'exercice n° :51

ω2=65*z+143,75	χ2=65,81	R2=w2/x2	C2=(1/0,020)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
273,750	65,810	4,160	63,408	791,621	926,501

Le canal donne un débit $Q=926{,}501 m^3/s$

Exercice n° :52

Calculer la profondeur H dans le canal rectangulaire pour les conditions suivantes : Q=727,77m^3/s et i=0,05%.



Solution

Canal rectangulaire composé

Z	ω1=25*z	χ1=25+z	R1=w1/x1	C1=(1/0,02)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	25,000	26,000	0,962	49,674	54,459
1,500	**37,500**	**26,500**	**1,415**	**52,979**	**105,691**
2,000	50,000	27,000	1,852	55,408	168,601
2,500	62,500	27,500	2,273	57,332	241,581
3,000	75,000	28,000	2,679	58,923	323,456

Suite du tableau de l'exercice n° :52

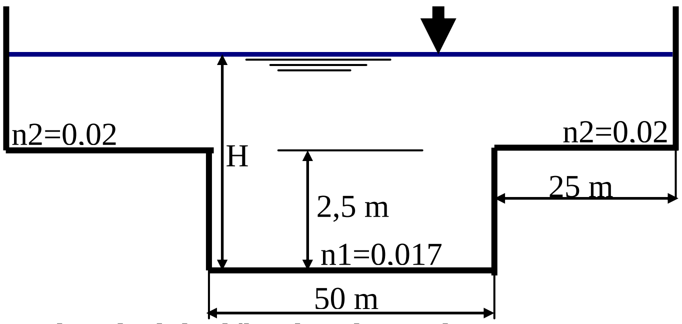
ω2=50*(z+2,5)	χ2=55	R2=w2/x2	C2=(1/0,017)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
125,000	55,000	2,273	67,449	284,213	284,213
175,000	55,000	3,182	71,340	497,956	552,415
200,000	**55,000**	**3,636**	**72,945**	**622,077**	**727,769**
225,000	55,000	4,091	74,391	757,005	925,605
250,000	55,000	4,545	75,709	902,321	1143,902
275,000	55,000	5,000	76,921	1057,667	1381,122

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+1,50=4,00 m.

Exercice n° : 53

Calculer le débit qui traverse la conduite à ciel ouvert pour les données suivantes :

m=cotg α
B=50m
b=25m
h=2,50m
H=4,00m
i=0, 05%
n1=0,017
n2=0,020



Solution

Pour plus de commodité lors du calcul du débit dans le cas des canaux composés, on construit un tableau comme le suivant :

Z=H-h

Z	ω1=25*z	χ1=25+z	R1=w1/x1	C1=(1/0,02)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
1,500	37,500	26,500	1,415	52,979	105,691

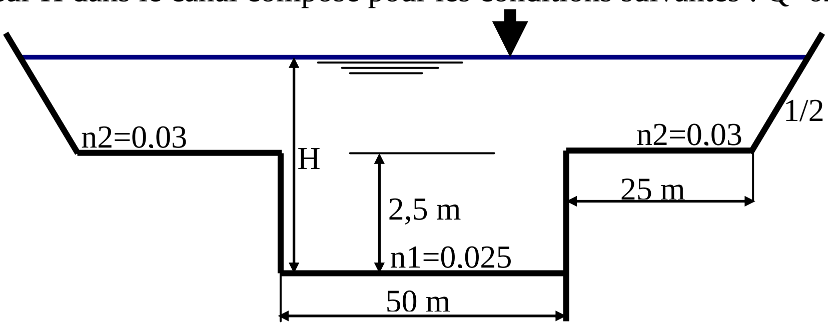
Suite du tableau de l'exercice n° :53

ω2=50*(z+2,5)	χ2=55	R2=w2/x2	C2=(1/0,017)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
200,000	55,000	3,636	72,945	622,077	727,769

Le canal donne un débit Q=727,769 m^3/s.

Exercice n° : 54

Calculer la profondeur H dans le canal composé pour les conditions suivantes : Q=628,96m^3/s et i=0,08%.



Solution

Canal rectangulaire trapézoïdal

Z	ω1=25*z+z^2	χ1=25+z*(5)^0,5	R1=w1/x1	C1=(1/0,03)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	26,000	27,236	0,955	33,076	47,531
1,500	**39,750**	**28,354**	**1,402**	**35,264**	**93,887**
2,000	54,000	29,472	1,832	36,873	152,465
2,500	68,750	30,590	2,247	38,150	222,427
3,000	84,000	31,708	2,649	39,210	303,253

Suite du tableau de l'exercice n° :54

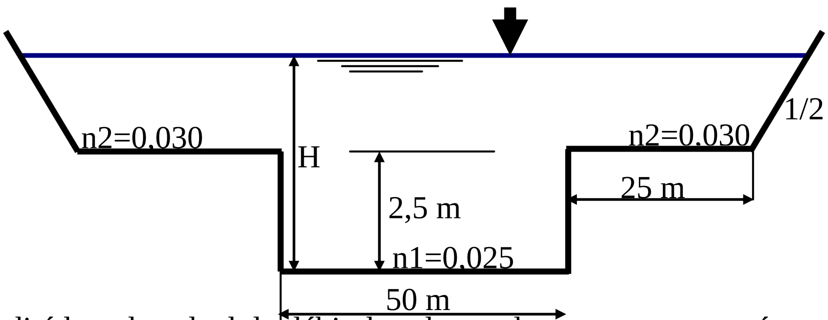
ω2=50*(z+2,5)	χ2=55	R2=w2/x2	C2=(1/0,025)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
125,000	55,000	2,273	45,865	244,463	244,463
175,000	55,000	3,182	48,511	428,312	475,843
200,000	**55,000**	**3,636**	**49,603**	**535,073**	**628,960**
225,000	55,000	4,091	50,586	651,130	803,594
250,000	55,000	4,545	51,482	776,122	998,549
275,000	55,000	5,000	52,306	909,741	1212,994

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+1,50=4,00 m.

Exercice n° :55

Calculer le débit qui traverse la conduite à ciel ouvert pour les données suivantes :

m=cotg α
B=50m
b=25m
m2=2.0
h=2,50m
H=4,00m
i=0, 08%
n1=0,025
n2=0,030



Solution

Pour plus de commodité lors du calcul du débit dans le cas des canaux composés, on construit un tableau comme le suivant :

Z=H-h

Z	ω1=25*z+z^2	χ1=25+z*(5)^0,5	R1=w1/x1	C1=(1/0,03)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
1,500	39,750	28,354	1,402	35,264	93,887

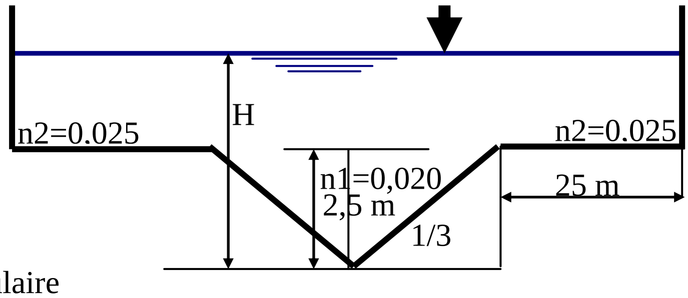
Suite du tableau de l'exercice n° :55

ω2=50*(z+2,5)	χ2=55	R2=w2/x2	C2=(1/0,025)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
200,000	55,000	3,636	49,603	535,073	628,960

Le canal donne un débit Q=628,960 m^3/s.

Exercice n°: 56

Calculer la profondeur H dans le canal composé pour les conditions suivantes : Q=481,34m^3/s et i=0,05%.



Solution

Canal triangulaire rectangulaire

Z	ω1=25*z	χ1=25+z	R1=w1/x1	C1=(1/0,025)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	25,000	26,000	0,962	39,739	43,567
1,500	37,500	26,500	1,415	42,383	84,553
2,000	50,000	27,000	1,852	44,326	134,880
2,500	62,500	27,500	2,273	45,865	193,265
3,200	**80,000**	**28,200**	**2,837**	**47,592**	**286,787**

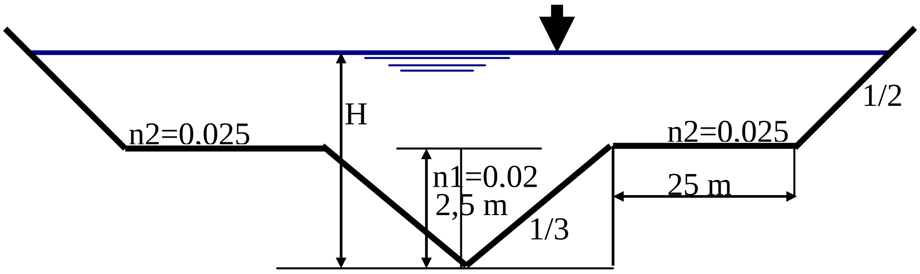
Suite du tableau de l'exercice n° :56

ω2=15*z+18,75	χ2=15,811	R2=w2/x2	C2=(1/0,020)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
18,750	15,811	1,186	51,441	23,486	23,486
33,750	15,811	2,135	56,736	62,556	106,124
41,250	15,811	2,609	58,665	87,402	171,955
48,750	15,811	3,083	60,322	115,462	250,343
56,250	15,811	3,558	61,778	146,561	339,826
66,750	**15,811**	**4,222**	**63,565**	**194,940**	**481,727**

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+3,20=5,70 m.

Exercice n°: 57

Calculer la profondeur H dans le canal composé pour les conditions suivantes : Q=499,087m^3/s et i=0,05%.



Solution

Canal triangulaire trapézoïdal

Z	ω1=25*z+z^2	χ1=25+z*(5)^0,5	R1=w1/x1	C1=(1/0,025)*(r1^1/6)	2Q1=2*w1*c1*(r1*i)^0,5
0,000	0,000	25,000	0,000	0,000	0,000
1,000	26,000	27,236	0,955	39,692	45,092
1,500	39,750	28,354	1,402	42,317	89,069
2,000	54,000	29,472	1,832	44,248	144,641
2,500	68,750	30,590	2,247	45,780	211,013
3,130	**88,047**	**31,999**	**2,752**	**47,350**	**309,273**

Suite du tableau de l'exercice n° :57

ω2=15*z+18,75	χ2=15,811	R2=w2/x2	C2=(1/0,020)(r2^1/6)	Q2=w2*c2*(r2*i)^0,5	Q=2Q1+Q2
18,750	15,811	1,186	51,441	23,486	23,486
33,750	15,811	2,135	56,736	62,556	107,649
41,250	15,811	2,609	58,665	87,402	176,471
48,750	15,811	3,083	60,322	115,462	260,103
56,250	15,811	3,558	61,778	146,561	357,574
65,700	**15,811**	**4,155**	**63,397**	**189,856**	**499,129**

La profondeur d'eau obtenue est H=2,5+Z=2,5+3,13=5,63 m.

CHAPITRE III

L’écoulement critique dans les canaux prismatiques

3-1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'écoulement critique dans les canaux prismatiques, tout en commençant par la présentation de l'énergie spécifique dans les cas des écoulements uniforme et non uniforme et sa variation pour les cas où le débit est constant et l'énergie est constante. Puis nous aborderons la profondeur critique pour différents types de canaux et nous l'achèverons par la présentation de la formule qui permet de calculer la pente critique pour un canal quelconque.

3-2 Energie spécifique

La section transversale du canal ouvert donnée par la figure n°3-1, qui est parcourue par le débit Q à la profondeur de remplissage h.

L'énergie spécifique (par unité de poids « J/N=m ») du courant circulant est définie par le trinôme de l'équation de Bernoulli :

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

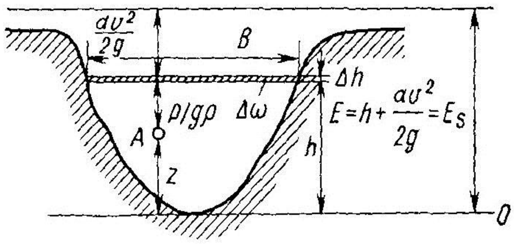


Fig.3-1: Energie spécifique

Passons le plan de lecture à travers le point inférieur de la section transversale et désignons par p la pression manométrique. Alors, pour tout point de la section liquide du courant, on peut écrire :

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} = h \text{ et } E = h + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

avec :

h : profondeur de l'eau (de la surface libre au radier)

$\frac{\alpha v^2}{2g}$: hauteur d'eau due à la vitesse d'écoulement v.

La valeur obtenue de l'énergie spécifique est appelée communément énergie spécifique de la section et est désignée par la lettre Es.

Ainsi $E_S = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$

3-2-1 Dans le cas d'un régime uniforme

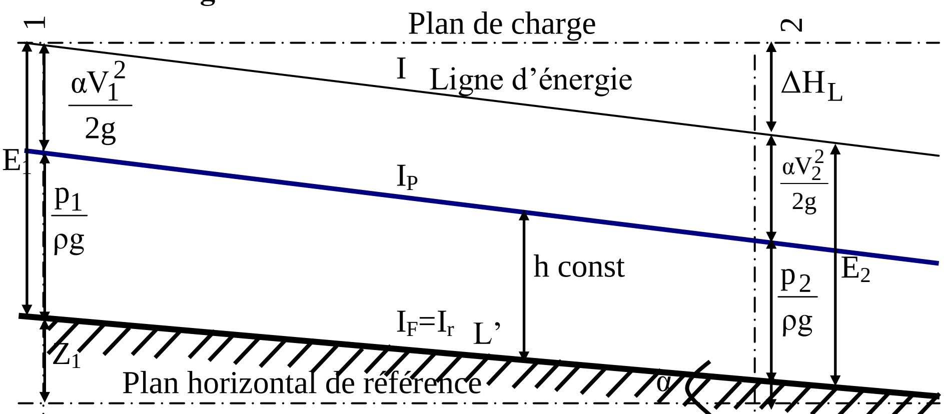


Fig.3-2 : Cas d'un écoulement uniforme

I_r ou I_F : pente du radier (fond) du canal
I : pente hydraulique
$E_1=E_2$ ($v_1=v_2$, $h_1=h_2$, $I=I_F$)
En régime uniforme, l'énergie spécifique est constante, la ligne du plan d'eau en parallèle au fond et la hauteur d'eau correspondante s'appelle profondeur normale ($h_n=h_1=h_2$).

3-2-2 Dans le cas d'un écoulement non uniforme

Dans le cas d'un remous d'abaissement $E_1>E_2$ ($v_1>v_2$ et $h_1>h_2$) la ligne du plan d'eau n'est plus parallèle au radier (fond du canal).

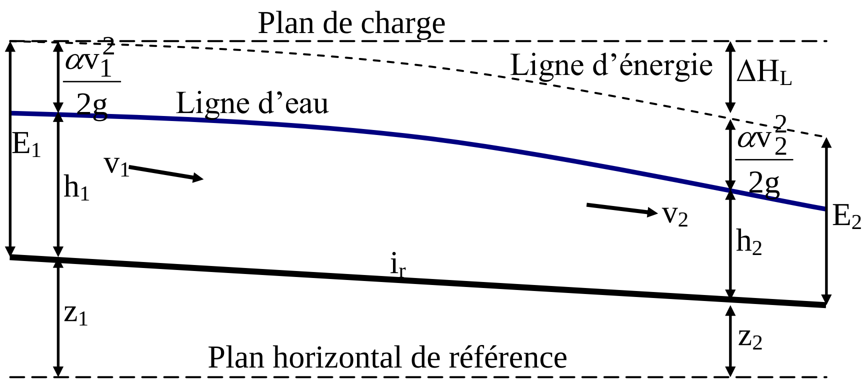


Fig.3-3 :Cas d'un écoulement non uniforme

3-2-3 Variation de l'énergie spécifique

On distingue deux cas :

1er cas : le débit est constant (Q= constant) et la profondeur d'eau variable (h= variable)

$$E_S = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$$

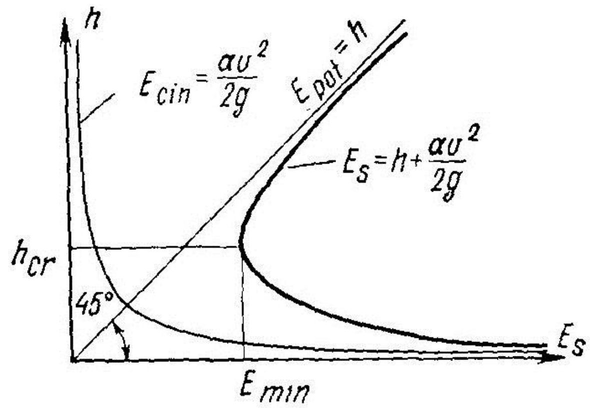


Fig. 3-4: Variation de l'énergie spécifique cas d'un canal à débit constant

$h \to 0 \Rightarrow \omega \to 0$ donc $E_S \to +\infty$

$h \to +\infty \Rightarrow \omega \to +\infty$ donc $E_S \to +\infty$

$h \to +\infty$ donc $E_S \to +\infty \Rightarrow E = h$ asymptote oblique

L'énergie spécifique possède une valeur minimale, donc $\frac{dE_S}{dh} = 0$

$$\frac{dE_S}{dh} = 1 + \frac{\alpha Q^2(-2\omega)}{2g\omega^4}.\frac{d\omega}{dh} \text{ avec } \frac{d\omega}{dh} = B$$

$$\frac{dE_S}{dh} = 1 - \frac{\alpha B Q^2}{g\omega^3} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha B Q^2}{g\omega^3} = 1$$

Cette dernière équation $\frac{\alpha B Q^2}{g\omega^3} = 1$ est l'équation du régime critique $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega^3}{B}$ (3.1)

2ème cas : Energie constant (E=constante) et le débit est variable (Q= variable)

L'énergie spécifique est donnée par la relation : $E_S = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$ pour le coefficient de Coriolis (α=1) nous aurons :

$$Q = \omega\sqrt{g(E_s - h)}$$

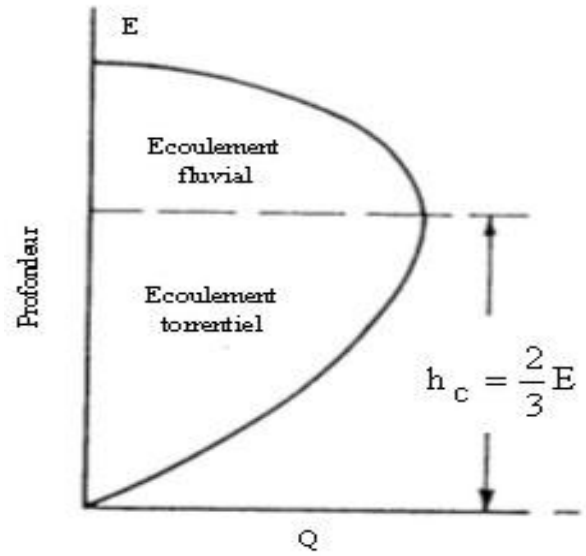


Fig.3-5 : cas d'une énergie constante

$h = E_s \Rightarrow Q = 0$

$h = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow Q = 0$

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{d\omega}{dh}\sqrt{2g(E_s - h)} - \frac{2g\omega}{2\sqrt{2g(E_s - h)}} \text{ avec } \frac{d\omega}{dh} = B$$

$$2Bg(E_s - h) - g\omega = 0 \Rightarrow 2(E_s - h) = \frac{\omega}{B} \text{ avec } \frac{\omega}{B} = h_{moy} \text{ donc } 2(E_s - h) = h_{moy}$$

$$\text{d'où } Q_{max} = \omega\sqrt{2gh_{moy}} \Rightarrow Q^2 = \omega^2 g\frac{\omega}{B} \Rightarrow \frac{Q^2 B}{g\omega^3} = 1$$

$$\frac{Q^2 B}{g\omega^3} = 1$$

3-3 Formules de la profondeur critique (h_{cr}) : la profondeur critique dans un canal est atteinte quand l'énergie spécifique est minimale.

3-3-1 Formules de la profondeur critique, de l'énergie spécifique critique et de la vitesse critique pour un canal quelconque.

Pour une valeur de Q constante, et puisque la surface varie avec la profondeur h,

$$\frac{dE_s}{dh} = 1 + \frac{\alpha Q^2(-2)}{2g\omega^3}.\frac{d\omega}{dh} = 1 - \frac{Q^2 d\omega}{\omega^3 g dh}$$

L'aire $d\omega$ est définie comme étant le produit de la largeur de la surface d'eau B par dh. En reportant dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$\frac{Q^2 B}{\omega_c^3 g} = 1$ ou $\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_c^3}{B}$ (3.2) Cette équation doit être vérifiée pour les conditions de l'écoulement critique. Le membre de droite est fonction de la profondeur h, et, en général il faut faire des approximations successives pour déterminer la valeur de h, qui vérifie l'équation (3.2).

En divisant Q^2 par ω_c^2, ou en fonction de la vitesse moyenne, l'équation (3.2) peut s'écrire

$\frac{v_c^2}{g} = \frac{\omega_c}{B}$ ou $v_c = \sqrt{g\omega_c/B}$

$$v_c = \sqrt{g\omega_c/B} \qquad (3.3)$$

En utilisant la profondeur moyenne h_m égale au quotient de ω par la largeur de la surface B, on peut écrire l'équation (3-2) : $Q = \omega\sqrt{g(\frac{\omega}{B})} = \omega\sqrt{gh_m}$ (3.4)

$$\text{De plus, } v_c = \sqrt{g\omega_c/B} = \sqrt{gh_m} \text{ ou } v_c^2/gh_m = 1 \qquad (3.5)$$

L'énergie spécifique minimale est, en utilisant (3.5), $v_c^2/2g = h_m/2$

$$E_{min} = h_c + v_c^2/2g = h_c + \frac{1}{2}h_m \qquad (3.6)$$

3-3-2 Formules de la profondeur critique, de l'énergie spécifique critique et de la vitesse critique pour un canal à section transversale rectangulaire.

le débit par unité de largeur est donnée par :

$$q = \frac{Q}{B}$$

l'énergie spécifique est :

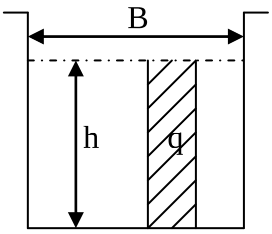


Fig.3-6 : Canal rectangulaire

$$E = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \text{ avec } \omega = Bh$$

$$E = h + \frac{\alpha Q^2}{2g(h^2B^2)} = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

La hauteur moyenne est donné par : $h_m = \frac{\omega}{B} = h$ (la section est rectangulaire)

De l'équation $2(E-h) - h_m = 0 \Rightarrow E_c = \frac{3}{2}h_c$, cette dernière relation c'est l'expression de l'énergie spécifique critique dans un canal rectangulaire.

On remplace $E_c = \frac{3}{2}h_c$ dans l'équation $E_c = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2}$

$$\frac{3}{2}h_c = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} \Rightarrow \frac{1}{2}h_c = \frac{q^2}{2gh_c^2} \Rightarrow \frac{1}{2}h_c^3 = \frac{q^2}{2g} \Rightarrow h_c^3 = \frac{q^2}{g} \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ C'est l'expression de la profondeur critique dans un canal rectangulaire.

Dans un canal rectangulaire le débit $Q = v\omega = vBh = q.B \Rightarrow q = vh$

$$Q = v\omega = vBh = q.B \Rightarrow q = vh \Rightarrow q = v_c h_c$$

$h_c^3 = \frac{q^2}{g} = \frac{v_c^2 h_c^2}{g} \Rightarrow v_c = \sqrt{gh_c}$ C'est l'expression de la vitesse critique dans un canal rectangulaire.

3-3-1 Formule de la profondeur critique pour les canaux à section transversale rectangulaire

Soit la forme rectangulaire représenté ci-après

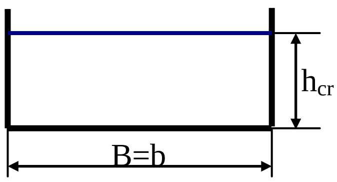


Fig.3.7 : Canal à section transversale rectangulaire

Substituons dans l'équation (3-1) les expressions B_{cr}=b ; $\omega_{cr} = bh_{cr}$ on a :

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \left(\frac{b^3 h_{cr}^3}{b}\right) = b^2 h_{cr}^3 \qquad \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}$$

3-3-2 Formule de la profondeur critique pour les canaux à section transversale trapézoïdale

Pour les canaux à section trapézoïdale, il n'existe pas une solution strictement analytique de l'équation (3-1) du régime critique. On peut utiliser la solution approximative proposée par Agroskine.

Tout d'abord, on trouve les valeurs auxiliaires :

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \text{ et } \sigma_{cr} = \frac{mk}{b}$$

Ensuite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k\left(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0{,}105\sigma_{cr}^2\right).$$

3-3-3 Formule de la profondeur critique pour les canaux à section transversale parabolique

La section mouillée (ω) **:** $\omega = \frac{2}{3}Bh = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

Comme $B = 2\sqrt{2p}\sqrt{h}$ avec p le paramètre de la parabole.

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{64h_{cr}^4\sqrt{h_{cr}}\,2p\sqrt{2p}}{27x2\sqrt{2p}\sqrt{h_{cr}}} = \frac{64h_{cr}^4 p}{27}$$

$$\text{ou } h_{cr} = \sqrt[4]{\frac{\alpha 27Q^2}{64gp}}$$

3-4 Formule de la pente critique : La valeur de la pente i_0 pour laquelle la profondeur normale est égale à la profondeur critique ($h_0=h_{cr}$) s'appelle la pente critique.

On peut déterminer i_{cr} par résolution simultanée des équations :

$$Q = \omega_0 C_0\sqrt{R_0}\sqrt{i_0}$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \left(\frac{\omega^3}{B}\right)_{cr}$$

Quand $h_0=h_{cr}$

$$Q = \omega_{cr}C_{cr}\sqrt{R_{cr}}\sqrt{i_{cr}} \Rightarrow Q^2 = \omega_{cr}^2 C_{cr}^2 R_{cr} i_{cr}$$

En substituant dans l'équation du régime critique, on trouve :

$$\frac{\alpha\omega_{cr}^2 C_{cr}^2 R_{cr} i_{cr}}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B_{cr}} \Rightarrow i_{cr} = \frac{g\omega_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2 R_{cr}} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} \text{ comme } R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}}.$$

$$i_{cr} = \frac{g\omega_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2 R_{cr}} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2}$$

On ne doit pas oublier que la pente critique i_{cr} dépend de Q parce que h_{cr} dépend également de Q. Lorsqu'on fait varier Q, i_{cr} subit également des variations. Outre cela, la pente critique n'est point liée avec la pente naturelle du fond du canal i.

La pente du fond «i» peut être positive, négative ou nulle alors que la pente critique «i_{cr}» est toujours positive.

Quand le débit est voisin du débit critique, la surface devient instable et il s'y forme des vagues. Il n'est pas souhaitable de concevoir des canaux avec des pentes voisines de la pente critique.

3-5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons examiné l'énergie spécifique aux écoulements uniforme et non uniforme et sa variation dans les cas où le débit est constant et variable. Nous avons aussi mis en évidence l'équation du régime critique. Par la suite les formules qui déterminent la profondeur critique dans les canaux artificiels les plus utilisés en pratique ont été notre cible. Finalement, nous avons décrit la relation de la pente critique.

Chapitre III: L'écoulement critique dans les canaux prismatiques à surface libre

Exercice n° :1

Un canal rectangulaire de largeur de b=0,5 m, de pente du fond i=0,01 et de coefficient de rugosité n=0,017. Déterminer :
a) la profondeur normale h_0, si le débit Q=0,46 m^3/s ;
b) le débit fictif Q', si h=1,0 m.
Réponse : a) h_0=0,513 m ;b) Q'=1,04 m^3/s

Solution

a) Calcul de la profondeur normale dans le canal rectangulaire :

h	ω	χ	R= ω/ χ	$C=1/n\ R^{1/6}$	$Q= \omega C\ (Ri)^{1/2}$
0,500	0,250	1,500	0,167	43,637	0,445
0,550	0,275	1,600	0,172	43,862	0,500
0,520	0,260	1,540	0,169	43,731	0,467
0,513	0,257	1,526	0,168	43,699	0,460

La profondeur recherchée est h=0,513 m.
b) calcul du débit fictif Q':
$Q'= \omega C\ (Ri)^{1/2}$
ω= bh=0,5 x 1=0,5 m^2 ; χ=b+2h=0,5+2 x 1=2,5 m ; R=ω/χ=0,5/2,5=0,2 m ; $C\sqrt{R} = 20{,}117$ m/s.
$Q'= \omega C\ (Ri)^{1/2} = 0{,}5 \times 20{,}117 \times 0{,}1 = 1{,}00585\ m^3/s$.

Exercice n ° : 2

Un canal trapézoïdal de largeur b=5 m, de coefficient d'écartement du talus m=1,5, de débit Q=6,6 m^3/s et de coefficient de Coriolis α=1,1.
a) Déterminer la profondeur critique h_{cr}
b) Déterminer $\mathbf{h_{cr}}$ en utilisant le procédé d'Agroskine ?
c) Déterminer I_{cr} si n=0,030 ?
Réponse : a) h_{cr}=0,55 m ; b) h_{cr}=0,547 m ; c) i_{cr}=0,0109.

Solution

a) Calcul de la profondeur critique, hcr, pour le canal trapézoïdal par la méthode itérative :

avant d'arriver au calcul itératif, on calcule : $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1{,}1 \times 6{,}6^2}{9{,}81} = 4{,}9$.

Notre objectif par ce calcul itératif est de trouver la valeur de la profondeur h qui donne ω^3/B égale à la valeur 4,9.

$\omega = bh + mh^2$; $B = b + 2mh$; ω^3 ; ω^3/B.

h (m)	ω (m^2)	B (m)	ω^3	ω^3/B
0,100	0,515	5,300	0,137	0,026
0,200	1,060	5,600	1,191	0,213
0,400	2,240	6,200	11,239	1,813
0,500	2,875	6,500	23,764	3,656
0,550	3,204	6,650	32,883	4,945

La profondeur critique, h_{cr}=0,55 m.
b) calcul de la profondeur critique par la méthode d'Agroskine :
Tout d'abord, on trouve les valeurs auxiliaires :

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1 \times 6{,}6^2}{9{,}81 \times 5^2}} = 0{,}58\ m\ ;\ \sigma_{cr} = \frac{mk}{b} = \frac{1{,}5 \times 0{,}58}{5} = 0{,}174$$

en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k\,(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0{,}105\sigma_{cr}^2) = 0{,}58\,(1 - \frac{0{,}174}{3} + 0{,}105 \text{ x } 0{,}174^2) = 0{,}547 \text{ m} .$$

c) détermine i_{cr}, si n=0,030 :

on trouve :

$$\omega_{cr} = bh_{cr} + mh_{cr}^2 = 5 \text{ x } 0{,}55 + 1{,}5 \text{ x } 0{,}55^2 = 3{,}20 \text{ m}^2 \;\;;$$

$$\chi_{cr} = b + 2h_{cr}\sqrt{1+m^2} = 5 + 2 \text{ x } 0{,}55\sqrt{1+1{,}5^2} = 6{,}98 \text{ m} \;\;;$$

$$R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} = \frac{3{,}20}{6{,}98} = 0{,}46 \text{ m} \;\;;$$

$$B_{cr} = b + 2mh_{cr} = 5 + 2 \text{ x } 1{,}5 \text{ x } 0{,}55 = 6{,}65 \text{ m} \;\;;$$

$$C_{cr} = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0{,}030}0{,}46^{1/6} = 29{,}29 \text{ m}^{0,5}/\text{s} \;\;;$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr} C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } 6{,}98}{1{,}1\text{x } 6{,}65 \text{ x } 29{,}29^2} = 0{,}0109.$$

Exercice n° : 3

De l'eau doit couler dans un caniveau rectangulaire à la cadence de 1,42 m^3/s sur une pente égale à 0,0028.

Déterminer les dimensions de la section droite du canal si la largeur vaut deux fois la profondeur. On prendra n=0,017 ?

Préciser la nature de l'écoulement : fluvial, critique ou torrentiel ?

Réponse : a) h=0,68 m ; b=1,36 m ; b) l'écoulement dans le canal est fluvial.

Solution

a) calcul des dimensions du canal quand b=2h :

b=2h ; R=h/2 , $\omega = 2h^2$; $\chi = 4h$.

Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement $V = C\sqrt{Ri}$

$$\omega = 2h^2 = \frac{Q}{C\sqrt{Ri}} = \frac{Q}{\frac{1}{n}(h/2)^{1/6}\sqrt{(h/2)i}} = \frac{1{,}42}{\frac{1}{0{,}017}(h/2)^{2/3}\sqrt{0{,}0028}} \Rightarrow 2(h/2)^{2/3}h^2 = \frac{1{,}42}{\frac{\sqrt{0{,}0028}}{0{,}017}}$$

$$h^{8/3} = 0{,}362 \Rightarrow h = 0{,}362^{3/8} \Rightarrow h = 0{,}68 \text{ m}$$

Si n=0,017 on trouve h=0,68 m donc b=2 x h=2 x 0,68=1,36 m.

b) détermination de la nature de l'écoulement dans le canal :

- Calcul de la profondeur critique :

$$h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1.0 \text{ x}1{,}42^2}{9{,}81 \text{ x } 1{,}36^2}} = 0{,}48 \text{ m}$$

Nous avons h_0= 0,68 m>h_{cr} = 0,48 m donc l'écoulement dans le canal est fluvial (sous - critique).

Exercice n° : 4

Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal rectangulaire de 3,05 m de large qui s'écoule sur 0,914 m de profondeur avec un débit de 6,23 m^3/s.

Solution

Calcul de l'énergie spécifique, E_S, dans le canal rectangulaire:

L'énergie spécifique, E_s, est donnée par la relation suivante :

$$E_s = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2} = h + \frac{(Q/b)^2}{2gh^2} = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q/b}{h}\right)^2 = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{h}\right)^2$$

calcul du débit spécifique q :

$q = \frac{Q}{B} = \frac{6,23}{3,05} = 2,04\ m^3/s.m$ donc l'énergie spécifique sera :

$$E_s = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{h}\right)^2 = 0,914 + \frac{1}{2 \times 9,81}\left(\frac{2,04}{0,914}\right)^2 = 1,167 \approx 1,17\ m$$

Exercice n° : 5

Calculer l'énergie spécifique que possède l'eau d'un canal trapézoïdal de largeur de base 2,44 m et de pente des cotés égales à 1, si elle s'écoule sur 1,19 m de profondeur au rythme de 8,78 m^3/s.

Solution :

Calcul de la section mouillée du canal :

La pente des cotés tgθ=1→ m=cotgθ=1

$$\omega = bh + mh^2 = 2,44 \times 1,19 + 1 \times 1,19^2 = 4,3197\ m$$

L'énergie spécifique est donnée par la relation :

$$E_s = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2} = 1,19 + \frac{8,78^2}{2 \times 9,81 \times 4,3197^2} = 1,40\ m$$

Exercice n° :6

Un tuyau d'égout de 1,83 m de diamètre transporte 2,28 m^3/s quand h a une profondeur de 1,22 m. Quelle est l'énergie spécifique ?

Solution

L'énergie spécifique est donnée par la relation :

$$E_s = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2}$$

a) calcul de la section mouillée ω :

Le canal est rempli à 1,22m donc y =(1,22-d/2) =(1,22-0,915)=0,305=0,167d.

$$\cos\theta = \frac{y}{d/2} = \frac{0,167d}{0,5d} = \frac{0,167}{0,5} = 0,334 \Rightarrow \theta = 70,49^0$$

$$\sin\theta = \frac{x}{d/2} = \frac{\sqrt{(0,5d)^2 - (0,167d)^2}}{0,5d} = \frac{d\sqrt{(0,5)^2 - (0,167)^2}}{0,5d} = \frac{0,471d}{0,5d} = 0,943 \Rightarrow \theta = 70,49^0$$

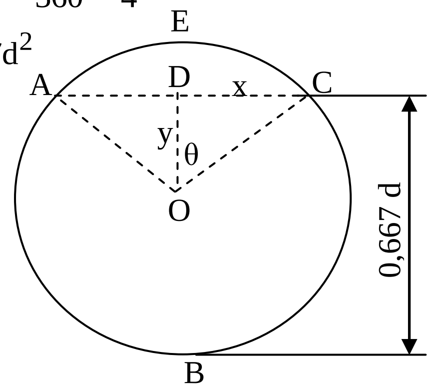
La section mouillée $\omega = \text{cercle} - \text{secteur AOCE} + \text{triangle AOCD}$

La section d'un cercle $\omega = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}(\frac{d}{2})^2\theta = \frac{1}{8}d^2\theta$ avec θ en radian.

$$\text{cercle} = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0{,}785 d^2 \;;\; \text{secteur AOCE} = \frac{2\theta}{360}(\frac{\pi d^2}{4}) = \frac{2x70{,}49}{360}\frac{\pi}{4}d^2 = 0{,}3076 d^2 \;;$$

$$\text{triangle AOC} = 2(\frac{1}{2}xy) = xy = (0{,}471d)(0{,}167d) = 0{,}0787 d^2$$

$$\omega = 0{,}785 d^2 + 0{,}0787 d^2 - 0{,}3076 d^2 = 0{,}556 d^2 = 1{,}86\,m^2$$



Le débit Q=2,28 m^3/s.

b) Calcul de la vitesse moyenne d'écoulement :

$$Q = \omega v \Rightarrow v = \frac{Q}{\omega} = \frac{2{,}28}{1{,}86} = 1{,}22\,m/s$$

$$v = 2{,}24\,m/s$$

$$E_s = h + \frac{v^2}{2g} = 1{,}22 + \frac{1{,}22^2}{2\,x\,9{,}81} = 1{,}296 \approx 1{,}30\,m$$

Exercice n° :7

Sur quelles profondeurs peut s'écouler l'eau pour un débit de 6,23 m^3/s dans l'exercice n° :4 pour une énergie spécifique de 1,52 N.m/N ? Quelle est la profondeur critique ?

Solution

Calcul des profondeurs d'écoulement de l'eau dans le canal rectangulaire:

L'énergie spécifique, E_s, est donnée par la relation suivante :

$$E_s = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^2} \Rightarrow 1{,}52 = h + \frac{(Q/b)^2}{2gh^2} = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q/b}{h})^2 = h + \frac{1}{2g}(\frac{q}{h})^2$$

calcul du débit spécifique q :

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{6{,}23}{3{,}05} = 2{,}043\,m^3/s.m \text{ donc l'énergie spécifique sera :}$$

$$1{,}52 = h + \frac{1}{2g}(\frac{q}{h})^2 = h + \frac{1}{2\,x\,9{,}81}(\frac{2{,}04}{h})^2 = h + \frac{0{,}212}{h^2}$$

$$1{,}52 = h + \frac{0{,}212}{h^2} \Rightarrow 1{,}52 = \frac{h^3 + 0{,}212}{h^2} \Rightarrow 1{,}52h^2 = h^3 + 0{,}212 \Rightarrow h^3 - 1{,}52h^2 + 0{,}212 = 0$$

la résolution de cette dernière équation nous permet d'obtenir h_1=0,455 et h_2=1,42 m.

b) calcul de la profondeur critique ans le canal :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2{,}043^2}{9{,}81}} = 0{,}752\,m.$$

Exercice n° :8

Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s. L'écoulement est-il fluvial (sous - critique) ou torrentiel (sur - critique), pour les profondeurs de 610 mm, 914 mm et 1219 mm ?

Solution :

Détermination du type d'écoulement dans le canal :

Afin de trouver le régime d'écoulement dans le canal on calcul la profondeur critique et on la compare avec celle critique.

Calcul du débit spécifique, q, : $q = \frac{Q}{b} = \frac{7,50}{3,05} = 2,459\,m^3/s.m$

Pour h=610mm : $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2,459^2}{9,81}} = 0,851\,m$ donc h=0,61 m < h_{cr}=0,851 m donc l'écoulement est torrentiel.

Pour h=914 mm : $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2,459^2}{9,81}} = 0,851\,m$ donc h=0,914 m > h_{cr}=0,851 m donc l'écoulement est fluvial.

Pour h=1219 mm : $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2,459^2}{9,81}} = 0,851\,m$ donc h=1,219 m > h_{cr}=0,851 m donc l'écoulement dans le canal rectangulaire est fluvial.

Exercice n° :9

Dans un canal rectangulaire de 3,05 m de large, le débit est de 7,50 m^3/s. quand la vitesse est de 2,44 m/s. Indiquer la nature de l'écoulement ?

Solution :

Calcul de la profondeur normale dans le canal rectangulaire

$$\omega = bh_0 = \frac{Q}{v} = \frac{7,50}{2,44} = 3,07\,m^2$$

$$3,05h = 3,07 \Rightarrow h_0 = \frac{3,07}{3,05} = 1,00\,m$$

Calcul du débit spécifique : $q = \frac{Q}{b} = \frac{7,50}{3,05} = 2,459\,m^3/s.m$

Pour h=1m : $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2,459^2}{9,81}} = 0,851\,m$ donc h_0=1,0 m > h_{cr}=0,851 m donc l'écoulement est fluvial.

Exercice n° :10

Pour une profondeur critique de 0,981 dans un canal rectangulaire de 3,048 m de large, calculer le débit ?

Solution :

$$q = \sqrt{gh_c^3} = \sqrt{9{,}81 \text{ x } 0{,}981^3} = 3{,}043 \, m^3/ \text{ s.m}$$

$$q = \frac{Q}{B} \Rightarrow Q = qB = 3{,}043 \text{ x } 3{,}048 = 9{,}2758 \approx 9{,}28 \, m^3/s \, .$$

Exercice n° :11

Déterminer la pente critique d'un canal rectangulaire de 6,096 m de large, (n=0,012) quand le débit est de 28,0 m^3/s.

Réponse : i_{cr}=0,00207.

Solution

On détermine i_{cr}, si n=0,012 :

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{28{,}00}{6{,}096} = 4{,}59 \, m^3/\text{s.m}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{4{,}59^2}{9{,}81}} = 1{,}29 \text{ m}$$

$$\omega_{cr} = bh_{cr} = 6{,}096 \text{ x } 1{,}29 = 7{,}86 \, m^2 \; ;$$

$$\chi_{cr} = b + 2h_{cr} = 6{,}096 + 2 \text{ x } 1{,}29 = 8{,}676 \text{ m} \; ;$$

$$R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} = \frac{7{,}86}{8{,}676} = 0{,}91 \text{ m} \; ;$$

$$B_{cr} = b = 6{,}096 \text{ m} \; ;$$

$$C_{cr} = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{0{,}012} 0{,}91^{1/6} = 81{,}97 \, m^{0,5}/s \; ;$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr} C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } 8{,}676}{1{,}1\text{x } 6{,}096 \text{ x } 81{,}97^2} = 0{,}00207.$$

Exercice n° :12

Un canal trapézoïdal avec côtés de pente tgθ=1 a un débit de 20,4 m^3/s. Pour une largeur de fond de 4,88 m, calculer la vitesse critique ?

Solution

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1\text{x } 20{,}4^2}{9{,}81 \text{ x } 4{,}88^2}} = 1{,}21 \text{ m} \; ; \; \sigma_{cr} = \frac{mk}{b} = \frac{1 \text{ x } 1{,}21}{4{,}88} = 0{,}248$$

en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k\,(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0{,}105\sigma_{cr}^2) = 1{,}21\,(1 - \frac{0{,}248}{3} + 0{,}105 \text{ x } 0{,}248^2) = 1{,}12 \text{ m} \, .$$

$$\omega_{cr} = bh_{cr} + mh_{cr}^2 = 4{,}88 \text{ x } 1{,}12 + 1 \text{ x}1{,}12^2 = 6{,}72 \, m^2 \; ;$$

$$v_c = \frac{Q}{\omega_{cr}} = \frac{20{,}4}{6{,}72} = 3{,}04 \text{ m/s} \, .$$

Exercice n° :13

Un canal rectangulaire, n=0,016, est construit sur une pente de 0,0064 et transporte 17 m^3/s. Pour que les conditions soient celles de l'écoulement critique, quelle doit être la largeur ?

Réponse : b=2,57 m

Solution

Calcul des paramètres géométriques du canal en fonction de la profondeur critique :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} \; ; \omega_{cr} = bh_{cr} = b \text{ x } \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = b \text{ x } (\frac{(Q/b)^2}{g})^{1/3} = b \text{ x } \frac{(Q/b)^{2/3}}{g^{1/3}} = b \text{ x } \frac{Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} = \frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}} \; ;$$

$$\omega_{cr} = \frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}} = \frac{b^{1/3}17^{2/3}}{9{,}81^{1/3}} = 3{,}09b^{1/3}$$

$$\chi_{cr} = b + 2h_{cr} = b + 2 \text{ x } \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = b + 2 \text{ x } \frac{(Q/b)^{2/3}}{g^{1/3}} = b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} \; ;$$

$$\chi_{cr} = b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} = b + \frac{2 \text{ x } 17^{2/3}}{b^{2/3}9{,}81^{1/3}} = b + \frac{2 \text{ x } 17^{2/3}}{b^{2/3}9{,}81^{1/3}} = b + \frac{6{,}177}{b^{2/3}} = \frac{b^{5/3} + 6{,}177}{b^{2/3}}$$

$$R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} = \frac{\frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}}}{b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}}} = \frac{3{,}09b^{1/3}}{b + \frac{6{,}177}{b^{2/3}}} = \frac{3{,}09b^{1/3}}{\frac{b^{5/3} + 6{,}177}{b^{2/3}}} = \frac{3{,}09b^{1/3}b^{2/3}}{b^{5/3} + 6{,}177} = \frac{3{,}09b}{b^{5/3} + 6{,}177} \; ;$$

$$B_{cr} = b \; ;$$

$$C_{cr} = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0{,}016}(\frac{3{,}09b}{b^{5/3} + 6{,}177})^{1/6} \; ;$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (\frac{b^{5/3} + 6{,}177}{b^{2/3}})}{b\text{x } (\frac{1}{0{,}016}(\frac{3{,}09b}{b^{5/3} + 6{,}177})^{1/6})^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3} + 6{,}177)(b^{5/3} + 6{,}177)^{2/6}}{3906{,}25 \text{ x b x } b^{2/3}(3{,}09b)^{2/6}}$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3} + 6{,}177)(b^{5/3} + 6{,}177)^{2/6}}{3906{,}25 \text{ x } b^{5/3}(3{,}09b)^{2/6}} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3} + 6{,}177)^{8/6}}{5689{,}571 \text{ x } b^{36/18}}$$

$$i_{cr} = \frac{0{,}0017242 \text{ x } (b^{5/3} + 6{,}177)^{4/3}}{b^2} \Rightarrow 0{,}0064 = \frac{0{,}0017242 \text{ x } (b^{5/3} + 6{,}177)^{4/3}}{b^2}$$

$$\Rightarrow 3{,}71185b^2 = (b^{5/3} + 6{,}177)^{4/3}$$

La résolution de cette dernière équation nous permet d'obtenir b=2,57 m.

Autre méthode

On peut aussi obtenir la solution de la manière suivante :

On construit un tableau qui nous permet de calculer h_{cr} par approximations successives, tout en variant la largeur b, puis nous calculons le débit Q afin de comparer le débit calculé au débit donné (Q=17 m^3/s) pour obtenir la valeur de la largeur, b, correspondante au régime critique. Les différentes formules utilisées dans ce calcul sont les suivantes :

$h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}}$; $\omega_{cr} = bh_{cr}$; $\chi_{cr} = b + 2h_{cr}$; $R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}}$; $C_{cr} = \frac{1}{n}R_{cr}^{1/6}$; $v_{cr} = C_{cr}\sqrt{R_{cr}i}$;

$Q = \omega_{cr}v_{cr}$.

b (m)	hcr (m)	ωcr (m^2)	χcr (m)	R_{HC} (m)	Ccr ($m^{0,5}/s$)	v (m/s)	Q (m^3/s)
1,000	3,088	3,088	7,177	0,430	54,306	2,850	8,802
2,570	**1,646**	**4,230**	**5,862**	**0,722**	**59,193**	**4,023**	**17,018**
2,600	1,633	4,247	5,867	0,724	59,223	4,031	17,119

Nous avons obtenu une largeur b=2,57 m.

Exercice n° : 14

Un canal rectangulaire (n=0,014) de 3,0 m de largeur transporte de l'eau à la cadence de 13,4 m^3/s. Déterminer la profondeur critique, la vitesse et la pente du canal ?

Reponses: h_{cr}=1,267 m; v_{cr}=3, 52 m/s; i=0, 0040.

Solution

a) calcul de la profondeur critique h_{cr} :

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{13,40}{3,00} = 4,47\ m^3/s.m$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{4,47^2}{9,81}} = 1,267\ m$$

$$h_c = 1,267\ m$$

b) calcul de la vitesse critique :

$$\omega_{cr} = bh_{cr} = 3,00\ x\ 1,267 = 3,80\ m^2$$

$v_c = \frac{Q}{\omega_{cr}} = \frac{13,40}{3,80} = 3,525\ m/s$ on peut aussi obtenir la vitesse critique à partir de la formule de la profondeur critique.

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g} = \frac{v_c^2 h_c^2}{g} \Rightarrow v_c = \sqrt{gh_c} = \sqrt{9,81\ x\ 1,267} = 3,52\ m/s$$

$$v_c = 3,52\ m/s$$

c) calcul de la pente critique :

$\chi_{cr} = b + 2h_{cr} = 3,00 + 2\ x\ 1,267 = 5,534\ m$;

$R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} = \frac{3,80}{5,534} = 0,687\ m$;

$B_{cr} = b = 3,00\ m$;

$C_{cr} = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0,014}0,687^{1/6} = 67,096\ m^{0,5}/s \Rightarrow C_{cr}^2 = 4501,90\ m/s^2$;

$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} = \frac{9,81\ x\ 5,534}{1x\ 3,00\ x\ 67,096^2} = 0,0040.$ $\qquad i_{cr} = 0,0040.$

Exercice n° :15

Un canal rectangulaire (n=0,012) de 3,05 m de large réalisé sur une pente de 0,0049, débite 13,6 m^3/s. Le canal doit être rétréci pour avoir un écoulement critique. Quelle est la largeur de la partie rétrécie, en négligeant les pertes dues à la réduction progressive de la largeur ?

Solution

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} \; ; \omega_{cr} = bh_{cr} = b \text{ x } \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = b \text{ x } (\frac{(Q/b)^2}{g})^{1/3} = b \text{ x } \frac{(Q/b)^{2/3}}{g^{1/3}} = b \text{ x } \frac{Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} = \frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}} \; ;$$

$$\omega_{cr} = \frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}} = \frac{b^{1/3}13{,}6^{2/3}}{9{,}81^{1/3}} = 2{,}66b^{1/3}$$

$$\chi_{cr} = b + 2h_{cr} = b + 2 \text{ x } \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = b + 2 \text{ x } \frac{(Q/b)^{2/3}}{g^{1/3}} = b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} \; ;$$

$$\chi_{cr} = b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}} = b + \frac{2 \text{ x } 13{,}6^{2/3}}{b^{2/3}9{,}81^{1/3}} = b + \frac{2 \text{ x } 17^{2/3}}{b^{2/3}9{,}81^{1/3}} = b + \frac{5{,}32}{b^{2/3}} = \frac{b^{5/3}+5{,}32}{b^{2/3}}$$

$$R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} = \frac{\frac{b^{1/3}Q^{2/3}}{g^{1/3}}}{b + \frac{2Q^{2/3}}{b^{2/3}g^{1/3}}} = \frac{2{,}66b^{1/3}}{b + \frac{5{,}32}{b^{2/3}}} = \frac{2{,}66b^{1/3}}{\frac{b^{5/3}+5{,}32}{b^{2/3}}} = \frac{2{,}66b^{1/3}b^{2/3}}{b^{5/3}+5{,}32} = \frac{2{,}66b}{b^{5/3}+5{,}32} \; ;$$

$$B_{cr} = b \; ;$$

$$C_{cr} = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0{,}012}(\frac{2{,}66b}{b^{5/3}+5{,}31})^{1/6} \; ;$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (\frac{b^{5/3}+5{,}32}{b^{2/3}})}{b\text{x } (\frac{1}{0{,}012}(\frac{2{,}66b}{b^{5/3}+5{,}32})^{1/6})^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3}+5{,}32)(b^{5/3}+5{,}32)^{2/6}}{6944{,}44 \text{ x b x } b^{2/3}(2{,}66b)^{2/6}}$$

$$i_{cr} = \frac{g\chi_{cr}}{\alpha B_{cr}C_{cr}^2} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3}+5{,}32)(b^{5/3}+5{,}32)^{2/6}}{6944{,}44 \text{ x } b^{5/3}(2{,}66b)^{2/6}} = \frac{9{,}81 \text{ x } (b^{5/3}+5{,}32)^{8/6}}{9621{,}98 \text{ x } b^{36/18}}$$

$$i_{cr} = \frac{0{,}00101\text{x } (b^{5/3}+5{,}32)^{4/3}}{b^2} \Rightarrow 0{,}0049 = \frac{0{,}00101 \text{ x } (b^{5/3}+5{,}32)^{4/3}}{b^2}$$

$$\Rightarrow 4{,}81b^2 = (b^{5/3}+5{,}32)^{4/3}$$

La résolution de cette dernière équation nous permet d'obtenir b=1,836 m.

Nous pouvons aussi résoudre ce problème par approximations successives :

b (m)	hcr (m)	ωcr (m^2)	χcr (m)	R_c (m)	Ccr ($m^{0,5}/s$)	v (m/s)	Q (m^3/s)
1,000	2,662	2,662	6,323	0,421	72,142	3,276	8,720
2,000	1,677	3,353	5,353	0,626	77,083	4,271	14,321
1,836	**1,775**	**3,259**	**5,386**	**0,605**	**76,640**	**4,173**	**13,600**

La largeur de la partie rétrécie du canal b=1,836 m.

Exercice n° :16

Un canal rectangulaire de rugosité n=0,012 est établi avec une pente de 0,0036 et transporte 16,4 m^3/s. Pour avoir les conditions de l'écoulement critique quelle doit être la largeur b ?

Réponse : b=1,54 m.

Solution :

On résout ce problème par approximations successives, tout en variant la largeur b pour calculer h_{cr}, puis nous calculons le débit Q afin de comparer le débit calculé au débit donné (Q=16,4 m^3/s) pour obtenir la valeur de la largeur, b, correspondante au régime critique. Les différentes formules utilisées dans ce calcul sont les suivantes :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} \;;\; \omega_{cr} = bh_{cr} \;;\; \chi_{cr} = b + 2h_{cr} \;;\; R_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{\chi_{cr}} \;;\; C_{cr} = \frac{1}{n}R_{cr}^{1/6} \;; v_{cr} = C_{cr}\sqrt{R_{cr} i} \;;$$

$Q = \omega_{cr} v_{cr}$.

Les données sont : n=0,012 ; i=0,0036 ; Q=16,4 m^3/s.

b (m)	hcr (m)	ωcr (m^2)	χcr (m)	R_c (m)	Ccr ($m^{0,5}/s$)	v (m/s)	Q (m^3/s)
1,000	3,015	3,015	7,031	0,429	72,367	2,844	8,574
2,540	**1,620**	**4,114**	**5,780**	**0,712**	**78,744**	**3,986**	**16,400**
2,600	1,595	4,146	5,789	0,716	78,824	4,002	16,595

Nous avons obtenu une largeur b=2,54 m.

Exercice n° :17

Un canal rectangulaire transporte 6,0 m^3/s. calculer la profondeur critique h_{cr} et la vitesse critique v_{cr} lorsque : a) la largeur vaut 4 m b) lorsqu'elle vaut 3m. c) pour quelle pente obtient-on la vitesse critique dans la question a) si n=0,020 ?

Réponse : a) h_{cr}=0,612 m, v_{cr}=2,45 m/s ;b) h_{cr}=0,742 m, v_{cr}=2,70 m/s ; c) i=0,00600.

Solution

$$\text{a) } h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(6,0/4)^2}{9,81}} = 0,612\,\text{m} \;;\; v_{cr} = \sqrt{gh_{cr}} = \sqrt{9,81 \text{ x } 0,612} = 2,45\,\text{m/s}.$$

$$\text{b) } h_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(6,0/3)^2}{9,81}} = 0,742\,\text{m} \;;\; v_{cr} = \sqrt{gh_{cr}} = \sqrt{9,81 \text{ x } 0,742} = 2,70\,\text{m/s}.$$

$$\text{c) } v_{cr} = \frac{1}{n}R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 2,45 = \frac{1}{0,020}\left(\frac{4\text{x}0,612}{4 + 2\text{x}0,612}\right)^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow i = 0,00600.$$

Exercice n° : 18

Un canal trapézoïdal dont la pente des cotés est de ½ (m=cotgθ=2) doit avoir un débit de 16,7 m^3/s. Pour une largeur de fond de 3,6 m, calculer :

a) la profondeur critique ?

b) la vitesse critique ?

Solution

a) calcul de la profondeur critique :

- calcul de la section mouillée du canal :

$$\omega_{cr} = bh_{cr} + mh_{cr}^2 = 3{,}6 \text{ x } h_{cr} + 2 \text{ x } h_{cr}^2$$

- La largeur de la surface libre : $B = b + mh_{cr} = 3{,}6 + 4h_{cr}$

De l'expression qui donne la profondeur critique pour un canal quelconque nous pouvons écrire : $\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B} \Rightarrow \frac{16{,}7^2}{9{,}81} = \frac{(3{,}6h_{cr} + 2h_{cr}^2)^3}{(3{,}6 + 4h_{cr})} \Rightarrow 28{,}43 = \frac{(3{,}6h_{cr} + 2h_{cr}^2)^3}{(3{,}6 + 4h_{cr})}$

En résolvant cette équation par approximations successives, on obtient h_{cr}=1,06 m

Tableau des approximations successives.

hcr (m)	ω (m^2)	B (m)	ω^3/B (m^2)
1,00	5,60	7,60	23,11
1,10	6,38	8,00	32,46
1,06	6,06	7,84	28,43

b) calcul de a vitesse critique :

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{g\omega_{cr}}{B}} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(3{,}6 \text{ x } 1{,}06 + 2 \text{ x } 1{,}06^2)}{(3{,}6 + 4 \text{ x } 1{,}06)}} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(3{,}82 + 2{,}25)}{7{,}84}} = 2{,}76 \text{ m/s} .$$

Exercice n° : 19

Un canal en forme de trapèze a une largeur de fond b=6,096 m, des côtés de pente tgθ=1, et l'eau y a une profondeur de 914 mm. Pour n=0,015 et un débit de 10,19 m^3/s, calculer :

a) la pente normale ;
b) la pente critique et la profondeur critique pour Q=10,19 m^3/s ;
c) la pente critique pour la profondeur normale de 914 mm.

Reponses: a) i=0,000852 ; b) h_{cr}=0,64 m, i_{cr}=0,0028 ; c) i_{cr}=0,00225.

Solution

a) calcul de la pente normale :

$$Q = \omega\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow 10{,}19 = 6{,}407\frac{1}{0{,}015}\left(\frac{6{,}407}{6{,}096 + 1{,}828\sqrt{2}}\right)^{2/3}i^{1/2} \Rightarrow i = 0{,}000852 .$$

b) calcul de la pente critique et la profondeur critique pour Q=10,19 m^3/s :

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{10{,}19}{6{,}096h + h^2} \text{ et } v_{cr} = \sqrt{\frac{g\omega_{cr}}{B}} = \sqrt{\frac{9{,}81(6{,}096h_{cr} + h_{cr}^2)}{6{,}096 + 2h_{cr}}}$$

Nous savons que lors l'écoulement critique h=h_{cr}, donc, en égalant les termes relatifs à la vitesse nous obtenons :

$\frac{10{,}19}{6{,}096h_{cr} + hc_{cr}^2} = \sqrt{\frac{9{,}81(6{,}096h_{cr} + h_{cr}^2)}{6{,}096 + 2h_{cr}}}$ en élevant au carré et en simplifiant, nous obtenons :

$$(\frac{10{,}19}{6{,}096h_{cr}+h_{cr}^2})^2=(\sqrt{\frac{9{,}81h_{cr}(6{,}096+h_{cr})}{6{,}096+2h_{cr}}})^2 \Rightarrow 10{,}58=\frac{(6{,}096h_{cr}+h_{cr}^2)^3}{6{,}096+2h_{cr}}$$

En résolvant cette dernière équation par approximations successives comme il est indiqué dans le tableau suivant :

hcr (m)	ω (m^2)	B (m)	ω^3/B (m^2)
0,500	3,298	7,096	5,055
0,600	4,018	7,296	8,888
0,635	**4,274**	**7,366**	**10,601**

Nous obtenons la profondeur critique h_{cr}=0,635 m ≈ 0,64 m.

On calcule la pente critique i_{cr} en utilisant la formule de Manning :

$$Q=\omega_{cr}\frac{1}{n}R_{cr}^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 10{,}19=(6{,}096(0{,}64)+(0{,}64)^2)\frac{1}{0{,}015}(\frac{6{,}096(0{,}64)+(0{,}64)^2}{6{,}096+2(0{,}64\sqrt{2})})^{2/3}i_{cr}^{1/2}$$

$$i_{cr}=0{,}0028$$

c) calcul de la pente critique pour la profondeur normale de 914 mm

$$v_{cr}=\sqrt{\frac{g\omega}{B}}=\sqrt{\frac{9{,}81(6{,}096h+h^2)}{6{,}096+2h}}=\sqrt{\frac{9{,}81(6{,}096 \text{ x } 0{,}941+0{,}941^2)}{6{,}096+2 \text{ x } 0{,}941}}=2{,}82 \text{ m/s}$$

En reportant ces valeurs dans la formule de la vitesse donnée par Manning, on obtient :

$$v=\frac{1}{n}R_{cr}^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 2{,}82=\frac{1}{0{,}015}(\frac{6{,}096(0{,}941)+(0{,}941)^2}{6{,}096+2(0{,}941\sqrt{2})})^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow i_{cr}=0{,}00225$$

$$i_{cr}=0{,}00225.$$

Exercice n° :20

Un canal rectangulaire de 9 m de m large, de 1,00 m de profondeur a un débit de 7,6 m^3/s.

Quelle est l'énergie spécifique ? b) l'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ?
Réponse : a) E=1,04 m ; b) h_{cr}=0,417 m.

Solution

a) Calcul de l'énergie spécifique :

$$E=h+\frac{\alpha v^2}{2g}=h+(\frac{\alpha}{2g})(\frac{Q}{\omega})^2=1{,}00+(\frac{1}{19{,}62})(\frac{7{,}6}{9x1})^2=1{,}04 \text{ m}.$$

b) calcul de la profondeur critique :

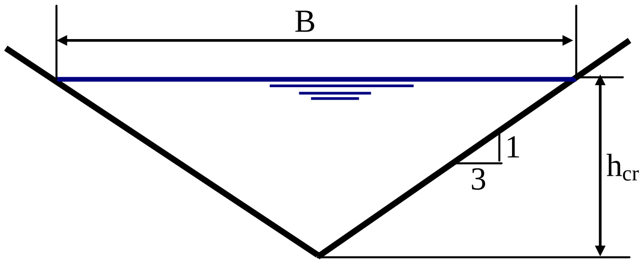
$$h_{cr}=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{(7{,}6/9)^2}{9{,}81}}=0{,}417 \text{ m}.$$

L'écoulement dans le canal est fluvial puisque la profondeur de l'eau dépasse la profondeur critique.

Exercice n° :21

Un canal triangulaire de coefficient de rugosité n=0,012 doit transporter de l'eau à la cadence de 10 m^3 par seconde. Trouver la profondeur, la vitesse et la pente critiques du canal ?

Reponses: a) h_{cr}=1,178 m; v_{cr}=2,402 m/s; i_{cr}=0,0018052.



Solution

a) calcul de la profondeur critique :

À partir de l'équation qui donne la profondeur critique pour un canal quelconque $\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B}$,

d'où :

$$\omega_{cr} = 2(\frac{h_{cr}}{2}(\cot g\theta\,(h_{cr})) = 2(\frac{h_{cr}}{2}(mh_{cr})) = 2(\frac{h_{cr}}{2}(3h_{cr})) = 3h_{cr}^2 \;;\; B = 2\cot g\theta co_{cr}) = 2mh_{cr}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B} \Rightarrow \frac{10^2}{9{,}81} = \frac{(3h_{cr}^2)^3}{(6h_{cr})} \Rightarrow \frac{10^2}{9{,}81} = \frac{27}{6}h_{cr}^5 \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[5]{\frac{600}{9{,}81x27}} = 1{,}178\,\text{m}$$

b) calcul de la vitesse critique :

$$v_{cr} = Q/\omega_{cr} = 10/3h_{cr}^2 = 10/(3x1{,}178^2) = 2{,}402\,\text{m/s}$$

c) calcul de la pente critique :

$$v = \frac{1}{n}R_{cr}^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 2{,}402 = \frac{1}{0{,}012}(\frac{3h_{cr}^2}{2h_{cr}\sqrt{1+m^2}})^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 2{,}402 = \frac{1}{0{,}012}(\frac{3x1{,}178^2}{2\,x\,1{,}178\sqrt{1+3^2}})^{2/3}i_{cr}^{1/2}$$

$$\Rightarrow 2{,}402 = \frac{1}{0{,}012}(\frac{4{,}163}{2{,}356\sqrt{10}})^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 2{,}402 = 56{,}534i_{cr}^{1/2} \Rightarrow i_{cr} = (\frac{2{,}402}{56{,}534})^2 = 0{,}001805$$

$$i_{cr} = 0{,}001805$$

Exercice n° : 22

Un canal trapézoïdal a pour largeur de fond de 6 m et pour pente des côtés 1/2. Quand l'eau a 1,00 m de profondeur, le débit est de 10 m^3/s.

a) Quelle est l'énergie spécifique ? b) l'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ?
Réponse : a) E=1,08 m ; b) l'écoulement est fluvial.
Solution
a) calcul l'énergie spécifique :
La section mouillée d'un canal de forme trapézoïdale $\omega = bh + mh^2 = 6\,x\,1 + 2\,x\,1^2 = 8\,m^2$

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + (\frac{\alpha}{2g})(\frac{Q}{\omega})^2 = 1{,}00 + (\frac{1}{19{,}62})(\frac{10}{9x1})^2 = 1{,}08\,m$$

b) type d'écoulement dans le canal :
Pour trouver le type d'écoulement dans le canal, on doit calculer la profondeur critique h_{cr}, tout en utilisant l'équation de la profondeur critique pour un canal quelconque.

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B} \Rightarrow \frac{10^2}{9{,}81} = \frac{(bh_{cr} + mh_{cr}^2)^3}{(b + 2mh_{cr})} \Rightarrow \frac{10^2}{9{,}81} = \frac{(6h_{cr} + 2h_{cr}^2)^3}{(6 + 4h_{cr})} \Rightarrow 10{,}19 = \frac{(6h_{cr} + 2h_{cr}^2)^3}{(6 + 4h_{cr})}$$

En résolvant cette dernière par approximations successives, comme il est indiqué dans le tableau suivant :

hcr (m)	ω (m^2)	B (m)	ω^3/B (m^2)
0,500	3,500	8,000	5,359
0,600	4,320	8,400	9,598
0,610	4,404	8,440	10,122

La profondeur critique obtenue est h_{cr}=0,610 m.
La profondeur normale, h_0=1,00m, est supérieure à la profondeur critique, h_{cr}=0,610 m, alors l'écoulement dans le canal est fluvial.

Exercice n° :23

Le débit d'un canal rectangulaire de coefficient de rugosité n=0,012, de 4,6 m de large est de 11,3 m^3/s quand la pente est de 1m sur 100 m. L'écoulement est-il torrentiel ou fluvial ?

Réponse : l'écoulement est torrentiel.

Solution
1) recherchons quelles sont les conditions critiques pour le canal

$$q_{max} = 11{,}3/4{,}6 = \sqrt{gh_{cr}^3} \text{ d'où } h_{cr} = 0{,}850\,m$$

2) on peut trouver quelle est la pente critique pour la profondeur critique obtenue

$$Q = \omega_{cr}\frac{1}{n}R_{cr}^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow 11{,}3 = (4{,}6\,x\,0{,}850)\frac{1}{0{,}012}(\frac{4{,}6\,x\,0{,}850}{4{,}6 + 2(0{,}850)})^{2/3}i_{cr}^{1/2} \Rightarrow i_{cr} = 0{,}0023.$$

$$i_{cr} = 0{,}0023$$

Puisque la pente donnée, i=0,01, dépasse la pente critique, i_{cr}=0,0023, l'écoulement est torrentiel.

Exercice n° :24

Un canal rectangulaire de 3 m de large, transporte 11,3 m^3/s.

a) Dresser le tableau de la profondeur d'eau en fonction de l'énergie spécifique pour des profondeurs allant de 0,3 m à 2,4 m ?
b) Déterminer l'énergie spécifique minimale ?
c) Quel est le type de l'écoulement quand la profondeur est de 0,6 m et de 2,4 m ?

Pour C=55, quelles sont les pentes nécessaires pour avoir des profondeurs considérées en c) ?

Solution

L'énergie spécifique est donnée par la relation suivante :

$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + (\frac{\alpha}{2g})(\frac{Q}{\omega})^2$ pour notre cas l'énergie spécifique a comme relation :

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + (\frac{\alpha}{2g})(\frac{Q}{\omega})^2 = h + (\frac{1}{19,62})(\frac{11,30}{3x\,h})^2 \Rightarrow E = h + \frac{0,723}{h^2}$$

h (m)	E (N.m/N)
0,30	8,33
0,60	2,61
0,90	1,79
1,20	1,70
1,50	1,82
1,80	2,02
2,10	2,26
2,40	2,53

b) La valeur minimale de l'énergie spécifique E se trouve entre 1,79 et 1,70 m.

En se servant de l'équation de la profondeur critique $h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(11,3/3)^2}{9,81}} = 1,13\,m$

Alors $E_{min} = E_c = \frac{3}{2}h_c = \frac{3}{2}(1,13) = 1,69\,m.$

c) - Quand la profondeur h=0,6 m qui est inférieure à la profondeur critique, h_{cr}=1,13 m l'écoulement est torrentiel.

- Quand la profondeur h=2,4 m qui est supérieure à la profondeur critique, h_{cr}=1,13 m l'écoulement est fluvial.

d) $Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$

Pour h=0,6 m, $\omega = 0,6\,x\,3 = 1,8\,m^2$, $\chi = 2\,x\,0,6 + 3 = 4,2\,m$ et $R = \frac{1,8}{4,2} = 0,429\,m$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 11,3 = 1,8\,x\,55\sqrt{0,429i} \Rightarrow i = (\frac{11,3}{1,8\,x\,55})^2 \frac{1}{0,429} = 0,03036$$

Pour h=2,40 m, $\omega = 2,40\,x\,3 = 7,2\,m^2$, $\chi = 2\,x\,2,4 + 3 = 7,8\,m$ et $R = \frac{7,2}{7,8} = 0,923\,m$

$$Q = \omega \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \Rightarrow 11,3 = 7,2\,x\,55\sqrt{0,923i} \Rightarrow i = (\frac{11,3}{7,20\,x\,55})^2 \frac{1}{0,923} = 0,000882$$

Exercice n° :25

Pour une énergie spécifique constante de 2,00 N.m/N, quel sera le débit maximal d'un canal rectangulaire de 3,00 m de large ?

Solution

La profondeur critique $h_c = \frac{2}{3}E_c = \frac{2}{23}(2{,}00) = 1{,}33\,\text{m}$.

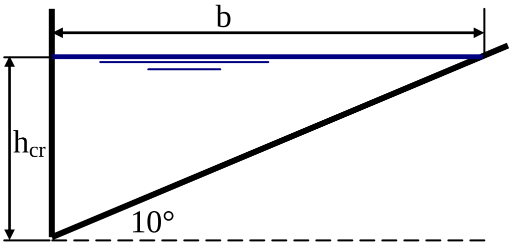
La vitesse critique $v_{cr} = \sqrt{gh_{cr}} = \sqrt{9{,}81\,\text{x}\,1{,}33} = 3{,}61\,\text{m/s}$.

Le débit maximum $Q = \omega v = (3{,}00\,\text{x}\,1{,}33)\,\text{x}\,3{,}61 = 14{,}40\,\text{m}^3/\text{s}$.

En appliquant $q_{max} = \sqrt{gh_{cr}^3} \Rightarrow Q = bq_{max} = 3\sqrt{9{,}81\text{x}1{,}33^3} = 14{,}4\text{m/s}$.

Exercice n° :26

Le canal triangulaire de la figure ci-dessous est de coefficient de rugosité n=0,013 débite 38,5 m^3/s d'eau. Trouver la profondeur, la vitesse et la pente critiques du canal ?



Solution

De l'équation de la profondeur critique : $\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B}$

$B = h_{cr}\tan 80° = 5{,}671h_{cr}$, $\omega_{cr} = h_{cr}B/2 = h_{cr}(5{,}671h_{cr})/2 = 2{,}836h_{cr}^2$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega_{cr}^3}{B} \Rightarrow \frac{38{,}5^2}{9{,}81} = \frac{2{,}836h_{cr}^2}{5{,}671h_{cr}} \Rightarrow h_{cr} = 2{,}065\,\text{m}$$

$v_{cr} = Q/\omega = 38{,}5/(2{,}836)(2{,}065)^2 = 3{,}184\,\text{m/s}$.

$R_{cr} = \omega/\chi = (2{,}836)(2{,}065)^2/((2{,}065) + (2{,}065/\cos 80°)) = 0{,}8665\,\text{m}$

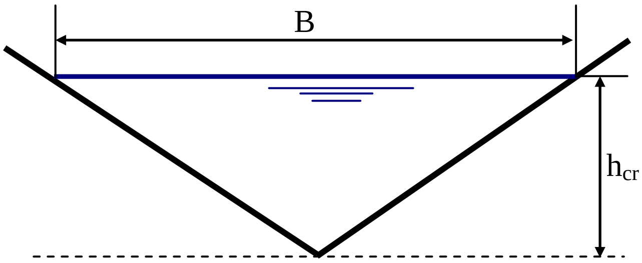
$$i_{cr} = \left(\frac{(0{,}013)(3{,}184)}{(1{,}00)(0{,}8665)^{2/3}}\right)^2 = 0{,}00207$$

$i_{cr} = 0{,}00207$

Exercice n° :27

Montrer que la profondeur critique d'un canal triangulaire est $2v^2_c/g$.

Solution



La relation qui donne la profondeur critique pour un canal quelconque est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\omega^3_{cr}}{B}$$

Pour une forme triangulaire, la section critique est donnée par $\omega_{cr} = 2(\frac{1}{2}mh^2_{cr})$

La largeur à la surface libre est donnée par $B = 2mh_{cr}$

On remplace ces deux expressions dans l'expression de la profondeur critique nous aurons :

$$\frac{Q^2}{g\omega^2_{cr}} = \frac{\omega_{cr}}{B} \Rightarrow \frac{Q^2}{\omega^2_{cr}} = \frac{gmh^2_{cr}}{2mh_{cr}} \Rightarrow \frac{Q^2}{\omega^2_{cr}} = \frac{gh_{cr}}{2} \Rightarrow v^2_{cr} = \frac{gh_{cr}}{2} \Rightarrow h_{cr} = \frac{2v^2_{cr}}{g}$$

Exercice n° : 28

Montrer que la profondeur critique d'un canal triangulaire peut s'exprimer comme étant les 4/5 de l'énergie spécifique minimale ?

Solution

L'énergie spécifique d'un canal de forme triangulaire est donnée par la relation suivante :

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{\omega})^2 = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{mh^2})^2 = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q^2}{m^2h^4})$$

Calcul de l'énergie spécifique minimale :

Pour ce faire, on dérive l'expression de l'énergie spécifique par rapport à la profondeur :

$$E = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q^2}{m^2h^4}) \Rightarrow \frac{dE}{dh} = \frac{d}{dh}(h + \frac{1}{2g}(\frac{Q^2}{m^2h^4}) = 1 + \frac{1}{2gm^2}(\frac{-4h^3Q^2}{h^8}) = (1 - \frac{4}{2gm^2}\frac{Q^2}{h^5})$$

Pour trouver la valeur minimale de l'énergie spécifique on met :

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow (1 - \frac{4}{2gm^2}\frac{Q^2}{h^5}) = 0 \Rightarrow Q^2 = \frac{1}{2}gm^2h^5$$

On remplace la relation du débit obtenue dans l'expression de l'énergie spécifique, nous aurons : $E_{min} = h + \frac{1}{2g}\frac{gh^5m^2}{2(mh^2)^2} \Rightarrow E = h + \frac{1}{4}h = \frac{5}{4}h \Rightarrow h = \frac{4}{5}E_{min}$

et quand E est minimale $h=h_{cr}$

$$h_{cr} = \frac{4}{5}E_{min}$$

Exercice n° :29

Montrer que la profondeur critique, h_{cr}, d'un canal parabolique est égale à ¾ de l'énergie spécifique minimale si les dimensions du canal sont h_c pour la profondeur et B pour la largeur de la surface d'eau.

Solution

Pour un canal de forme de parabolique

La largeur de la surface du canal $B = 2\sqrt{2p}\sqrt{h}$ B

La surface de l'aire de la section $\omega = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h} \Rightarrow \omega^2 = \frac{16}{9}h^2 2ph$

La relation de la profondeur critique devient :

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega^3}{B} = \frac{(\frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h})^3}{2\sqrt{2p}\sqrt{h}} = \frac{64}{27}h_{cr}^4 p \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[4]{\frac{\alpha 27Q^2}{64gp}} \qquad (1)$$

L'énergie spécifique

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{\omega})^2 = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{\frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}})^2 \qquad (2)$$

de (1) nous pouvons tirer Q comme suit : $64gph_{cr}^4 = 27\alpha 7^{\ 2} \Rightarrow Q^2 = \frac{64gph_{cr}^4}{27\alpha}$

$$Q = \sqrt{\frac{64gp}{27\alpha}}h_{cr}^2 \qquad (3)$$

$$E_{min} = h_{cr} + \frac{1}{2g}(\frac{\frac{64gph_{cr}^4}{27\alpha}}{\frac{16}{9}h^2 2ph_{vr}}) = h_{cr} + \frac{1}{2g}\frac{64}{27}\frac{9}{16}\frac{gph_{cr}^4}{h_{cr}^2 2ph_{cr}} = h_{cr} + \frac{1}{3}h_{cr} = \frac{4}{3}h_{cr}$$

$E_{min} = \frac{4}{3}h_{cr} \Rightarrow h_{cr} = \frac{3}{4}E_{min}$ ce qui est demandée.

Exercice n° :30

Pour un canal rectangulaire, montrer que le débit q par mètre de large vaut 1,704 $E^{3/2}_{min}$?

Solution

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q^2}{\omega^2}) = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q^2}{(bh)^2}) = h + \frac{1}{2g}(\frac{Q}{bh})^2 = h + \frac{1}{2g}(\frac{q}{h})^2 = h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2}$$

$$\frac{dE}{dh} = \frac{d}{dh}(h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2}) = 1 - \frac{q^2}{gh^3}$$

Pour avoir l'énergie minimale on doit mettre $\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{q^2}{gh^3} = 0 \Rightarrow q^2 = gh^3$ puis on remplace la relation du débit dans l'expression de l'énergie spécifique nous aurons l'expression de l'énergie minimale :

$$E_{min} = h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2} = h + \frac{1}{2g}\frac{gh^3}{h^2} = h + \frac{h}{2} = \frac{3}{2}h$$

Nous avons la relation de la profondeur $h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ d'où $E_{min} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}})$

$$E_{min} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}) \Rightarrow q^2 = g(\frac{2}{3})^3 E_{min} \Rightarrow q = \sqrt{g}(\frac{2}{3})^{3/2} E^{3/2}_{min} \text{ d'où}$$

$$q = 1{,}70489 E^{3/2}_{min}$$

Exercice n° :31

Pour un canal triangulaire, montrer que le débit $Q = 0{,}6338 \frac{B}{h} E^{5/2}_{min}$.

Solution

De l'exercice n° :28 nous avons démontré pour un canal de forme triangulaire que le débit

$$Q^2 = \frac{1}{2} gm^2 h^5 \text{ d'où } h = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{gm^2}} \Rightarrow \frac{4}{5}E_{min} = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{gm^2}} \Rightarrow (\frac{4}{5}E_{min})^5 = \frac{2Q^2}{gm^2}$$

$$(\frac{4}{5}E_{min})^5 = \frac{2Q^2}{gm^2} \Rightarrow Q^2 = \frac{gm^2}{2}(\frac{4}{5})^5 E^5_{min} \Rightarrow Q = m\sqrt{\frac{g}{2}}(\frac{4}{5})^{5/2} E^{5/2}_{min}$$

Nous avons aussi $B/h = 2m \Rightarrow m = 2B/h$

$$Q = m\sqrt{\frac{g}{2}}(\frac{4}{5})^{5/2} E^{5/2}_{min} = \frac{2B}{h}\sqrt{\frac{g}{2}}(\frac{4}{5})^{5/2} E^{5/2}_{min} = 2\sqrt{\frac{g}{2}}(\frac{4}{5})^{5/2}\frac{B}{h} E^{5/2}_{min} = 0{,}6338\frac{B}{h} E^{5/2}_{min}$$

$$Q = 0{,}6338\frac{B}{h} E^{5/2}_{min}$$

Exercice n° :32

Pour un canal parabolique, montrer que le débit Q=1,1068b' $E^{3/2}_{min}$.

Solution

La profondeur critique pour un canal ayant une forme parabolique est donnée par la relation obtenue dans l'exercice n° 29.

$h_{cr} = \sqrt[4]{\dfrac{\alpha 27Q^2}{64gp}}$ et nous avons aussi $B = 2\sqrt{h}\sqrt{2p} \Rightarrow p = B^2/8h$

d'où $h_{cr}^4 = \dfrac{\alpha 27Q^2 8h_{cr}}{64gB^2} \Rightarrow h_{cr}^3 = \dfrac{\alpha 27Q^2}{8gB^2} \Rightarrow Q^2 = \dfrac{8gB^2}{\alpha 27}h_{cr}^3$

et nous avons $h_{cr} = \dfrac{3}{4}E_{min}$ d'où $Q^2 = \dfrac{8gB^2}{\alpha 27}(\dfrac{3}{4}E_{min})^3 \Rightarrow Q = (\dfrac{3}{4})^{3/2}(\dfrac{8g}{\alpha 27})^{1/2}BE_{min}^{3/2}$

$Q = (\dfrac{3}{4})^{3/2}(\dfrac{8g}{\alpha 27})^{1/2}BE_{min}^{3/2} = 1{,}10736BE_{min}^{3/2}$ ce qui est demandé dans l'exercice.

CHAPITRE IV

L'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques

4-1 Introduction

L'écoulement graduellement varié est un phénomène hydraulique qui se manifeste au niveau des ouvrages hydrauliques à savoir : les barrages, les vannes, les canaux etc.

L'étude de ce genre d'écoulement dans les canaux prismatiques s'avère d'une très grande utilité afin de le mettre en évidence pour entamer d'autres problèmes qui sont étroitement liés à ce type d'écoulement.

Nous allons commencer ce travail par une représentation physique et mathématique de cet écoulement, tout en tenant compte des différentes pentes du canal.

En régime uniforme, les caractéristiques géométriques et hydrauliques à savoir : la pente, la profondeur d'eau, la section, la rugosité et le débit sont constants. Nous avons dis que l'écoulement permanent peut être uniforme ou non uniforme et nous avons mentionné aussi que l'écoulement permanent non uniforme est scindé aussi en deux types d'écoulement qui sont :

- L'écoulement graduellement (progressivement) varié
- L'écoulement rapidement (brusquement) varié.

Dans ce qui suit, nous traiterons l'écoulement graduellement varié.

4-2 Définition de l'E.G.V : on dit qu'un écoulement est graduellement varié lorsque les caractéristiques hydrauliques à savoir : la profondeur d'eau et la vitesse moyenne ainsi que les autres paramètres ne changent que très lentement d'une section à une autre.

Exemple : la présence d'une singularité (rétrécissement, élargissement discontinuité du seuil …) dans un canal provoque une modification de la surface libre. L'écoulement dans ce cas, n'est plus uniforme mais varié.

4-3 Modélisations physique et mathématique de l'E.G.V

4-3-1 Energie spécifique

La section transversale du canal ouvert donnée par la figure n°1, qui est parcourue par le débit Q à la profondeur de remplissage h.

L'énergie spécifique (par unité de poids) du courant circulant est définie par le trinôme de l'équation de Bernoulli :

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

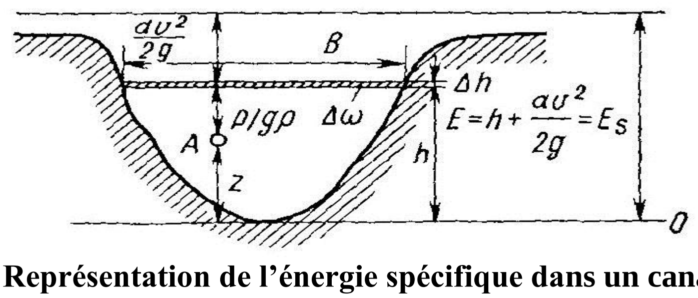


Fig. 4-1 : Représentation de l'énergie spécifique dans un canal naturel

Passons le plan de lecture à travers le point inférieur de la section transversale et désignons par p la pression manométrique. Alors, pour tout point de la section liquide du courant, on peut écrire :

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} = h \text{ et } E = h + \frac{\alpha v^2}{2g}$$

avec :

h : profondeur de l'eau (de la surface libre au radier)

$\frac{\alpha v^2}{2g}$: hauteur d'eau due à la vitesse d'écoulement v.

La valeur obtenue de l'énergie spécifique est appelée communément énergie spécifique de la section et est désignée par la lettre Es.

Ainsi $E_s = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$

4-3-2 Equation fondamentale de l'écoulement graduellement varié

Pour les petits angles θ, sinθ=a/dx=tgθ=i d'où a=i dx

Posons v_1=v et v_2=v+dv.

Etablissons l'équation de Bernoulli entre les sections (1-1) et (2-2) par rapport au plan de référence

$$h + idx + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + dh + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\alpha(v+dv)^2}{2g} + dH \qquad (4.1)$$

$(v + dv) = v^2 + 2vdv + dv^2$ en négligeant donc les valeurs d'ordre supérieurs (dv^2=0).

On considère que le travail dans l'écoulement uniforme et non uniforme est le même.

$$I = \frac{dH}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R_H} \Rightarrow dH = \frac{v^2}{C^2 R_H} dx$$

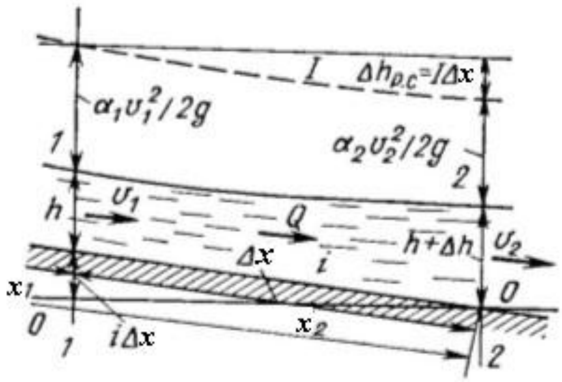


Fig.4.2:Présentation graphique de l'équation d'énergie en écoulement graduellement varié

de l'équation (4-1)$\Rightarrow idx = dh + \frac{\alpha 2vdv}{2g} + \frac{v^2}{C^2R}dx$ posons R_H=R et divisons par dx on obtient :

$$\Rightarrow i = \frac{dh}{dx} + \frac{\alpha v}{g}\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{C^2R}$$

La vitesse moyenne $v = \frac{Q}{\omega} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{d(Q\omega^{-1})}{dx} = -Q\omega^{-2}\frac{d\omega}{dx}$

$$\Rightarrow i = \frac{dh}{dx} - \frac{\alpha Q}{g\omega}\frac{Q}{\omega^2}\frac{d\omega}{dx} + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}$$

Pour un canal non prismatique $\omega = f(h, b) \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial h}\frac{dh}{dx} + \frac{\partial\omega}{db}\frac{db}{dx}$

h : hauteur de remplissage

b : dimension caractéristique transversale pour la forme donnée.

$$i = \frac{dh}{dx} - \frac{\alpha Q}{g\omega}\frac{Q}{\omega^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial h}\frac{dh}{dx} + \frac{\partial\omega}{db}\frac{db}{dx}\right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}$$

$$i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{db}\frac{db}{dx} = \frac{dh}{dx}\left(1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{\partial h}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{db}\frac{db}{dx}}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{\partial h}\right)}$$

Nous avons $\partial\omega = B\partial h$ d'où $\Rightarrow \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{db}\frac{db}{dx}}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}\right)}$ (4.2)

Cette dernière équation est l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varie dans un canal découvert.

Pour un canal prismatique la variation de la largeur le long de la longueur est nulle $\dfrac{db}{dx} = 0$, on remplace dans l'équation (4.2) on obtient : $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}\right)}$ (4.3)

L'équation (4.3), c'est l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques.

4-4 Types d'écoulement et étude de la forme de la surface libre dans les canaux prismatiques

Examinons l'équation générale de l'écoulement graduellement varié dans un canal prismatique :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}\right)}$$

posons $K_0 = \dfrac{Q}{\sqrt{i}}$, $K = \omega C\sqrt{R}$ et $P_c = \dfrac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R i}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}\right)} = \frac{i\left(1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2\right)}{(1 - P_c)}$$

Il est évident que la valeur positive du rapport dh/dx correspond à la courbe de remous et celle négative à la courbe de décrue.

Le signe du rapport dh/dx est défini par les signes du numérateur et du dénominateur du deuxième membre de l'équation précédente.

4-4-1 Types d'écoulement et cas de formation des courbes de la surface libre du courant ayant la pente du fond positive.

Les différents cas de formation des courbes de la surface libre du courant sont déterminés par le rapport des profondeurs normale et critique. Lorsque la forme de la section transversale du canal est donnée et le débit Q est également donné, il y a trois cas de rapports des profondeurs normale et critique.

1er cas : la profondeur normale est supérieure à celle critique, autrement dit $h_0>h_{cr}$ ou $i<i_{cr}$. Le courant est fluvial à l'écoulement uniforme (Fig.4-3)

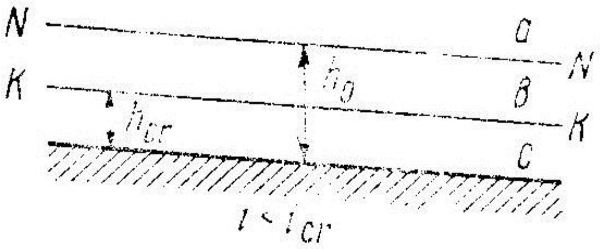


Fig. 4-3

2ème cas : la profondeur normale est égale à celle critique, autrement dit $h_0=h_{cr}$ ou $i=i_{cr}$. Le courant est critique à l'écoulement uniforme (Fig.4-4).

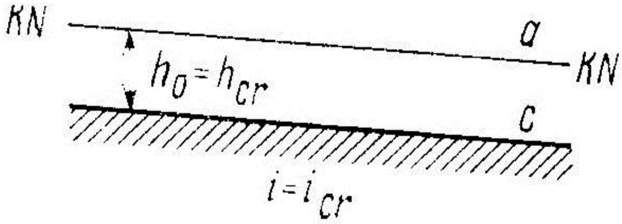


Fig.4-4

3ème cas : la profondeur normale est inférieure à celle critique, autrement dit $h_0<h_{cr}$ ou $i>i_{cr}$. Le courant est torrentiel à l'écoulement uniforme (Fig.4-5).

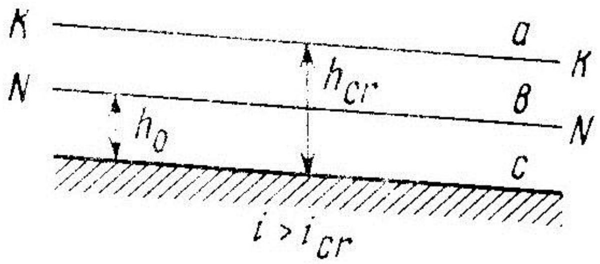


Fig.4-5

$K_0 = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0}$

$K = \omega C \sqrt{R}$

De l'équation générale de l'écoulement graduellement varié nous pouvons tirer les écoulements suivants :

$\frac{dh}{dx} = 0$ Écoulement uniforme

$P_c > 1$ Écoulement torrentiel

$P_c < 1$ Écoulement fluvial

$P_c = 1$ Écoulement critique

* si $P_c \to 1$, $\frac{dh}{dx} \to \infty$ il existe deux (2) cas

1er cas : accroissement brusque (le ressaut hydraulique).
2ème cas : décroissement (chute) brusque (c'est le cas du cascade).
C'est-à-dire il y a un brusque changement de la profondeur sur un court tronçon.
* Si $\frac{dh}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} < 0$ on assiste à un écoulement graduellement retardé et par conséquent nous avons un remous d'exhaussement.
* Si $\frac{dh}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} > 0$ on assiste à un écoulement graduellement accéléré et par conséquent nous avons un remous d'abaissement.
De cet éclaircissement sur l'écoulement à surface libre et pour un débit Q donné, nous pouvons distinguer les écoulements suivants :
a) Écoulement fluvial $h_0 > h_{cr}$ et $i < i_{cr}$;
b) Ecoulement torrentiel $h_0 <$ hcr et $i > i_{cr}$;
c) Ecoulement critique $h_0 = h_{cr}$ et $i = i_{cr}$.

NB : N'oublier pas que $P_c = \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = \frac{\alpha v^2 B}{g\omega} = \frac{\alpha v^2}{gh_{moy}} = F_r^2$ comme la profondeur moyenne $h_{moy} = \frac{\omega}{B}$. Donc le paramètre cinétique est analogue au carré du nombre de Froude ($P_c = F_r^2$). Le paramètre cinétique $P_c = \frac{2}{2}\frac{\alpha v^2}{gh_{moy}}$, également, il est aussi le rapport du double de l'énergie cinétique spécifique du courant à l'énergie potentielle spécifique exprimée par h_{moy}.

4-4-2 Forme de la surface libre de l'écoulement non uniforme dans un canal prismatique pour i>0

Il existe trois (3) cas :
1er cas : si la pente est inférieure à la pente critique, $i<i_{cr}$ et $h>h_{cr}$, également c'est un écoulement fluvial, sur la figure 4-6, nous représentons les différentes courbes susceptibles d'apparaître.

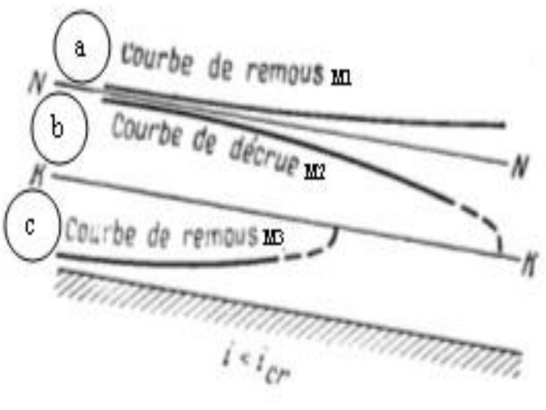


Fig.4-6 : Les différentes courbes de types M

La zone a : au- dessus des deux (2) lignes (normale et critique) ;
- La zone b : entre les deux (2) lignes normale et critique ;
- La zone c : au dessous des deux (2) lignes normale et critique.

2ème cas : si la pente i est supérieure à la pente critique $i>i_{cr}$ et $h<h_{cr}$, également l'écoulement est torrentiel et la forme de la surface libre prend les formes représentées sur la figure 4-7.

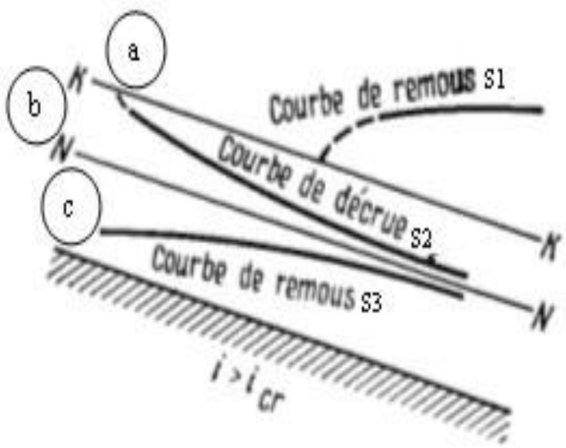


Fig.4-7 : Les différentes courbes de types S

3[ème] cas : si la pente est égale à la pente critique, $i=i_{cr}$, et $h=h_{cr}$, également l'écoulement est critique et la forme de la surface libre prend les deux formes représentées sur la figure 4-8.

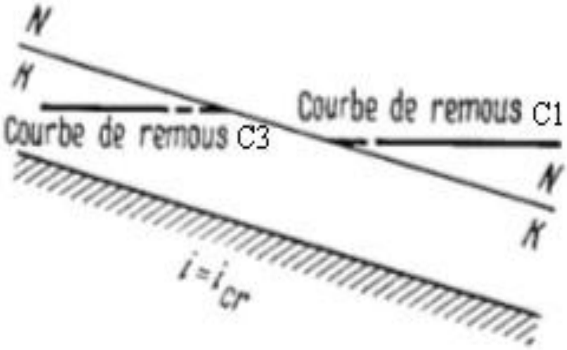


Fig.4-8: Les différentes courbes de types C

La classification des courbes de remous et de décrue s'organise autour de la pente i et de i_{cr}, et on distingue cinq (5) cas

Pour i>0 $i<i_{cr}$ canal à faible pente et la courbe est de type M

$i>i_{cr}$ canal à forte pente et la courbe est de type S

$i=i_{cr}$ canal à pente critique et la courbe est de type C

Pour i=0 canal à pente nulle ou horizontal et la courbe est de type H

Pour i<0 canal à contre pente et la courbe est de type A

1[er] cas : cas des canaux à faible pente $i<i_{cr}$, courbe de type M :

Pour la zone a : $h>h_0>h_{cr}$ branche M1

$h>h_0 \rightarrow K>K_0 \rightarrow K_0/K<1 \rightarrow$ numérateur >0

$h>h_{cr} \rightarrow P_C<1 \rightarrow$ dénominateur >0

$$\frac{dh}{dx}=\frac{+}{+}>0$$

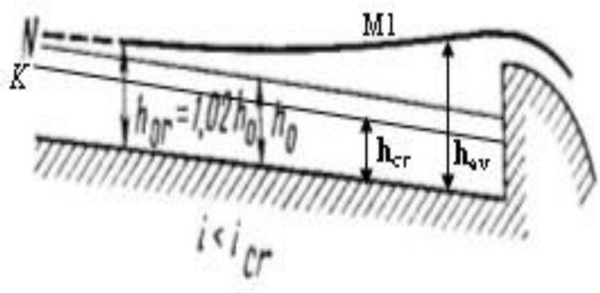
Lorsque $h \rightarrow h_0,\ K \rightarrow K_0 \rightarrow \frac{dh}{dx}=0$ l'écoulement est uniforme

Lorsque $h\uparrow \rightarrow K>>K_0 \rightarrow K_0/K \rightarrow 0 \rightarrow 1-K_0/K \rightarrow 1$

$P_C \rightarrow 0 \rightarrow 1-P_C \rightarrow 1$

$$\frac{dh}{dx} \rightarrow i$$

Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe M1 d'apparaître.



$h_{amont} \approx (1{,}01 \div 1{,}03)h_0$

Pour la zone b : $h_0>h> h_{cr}$ c'est la branche M2

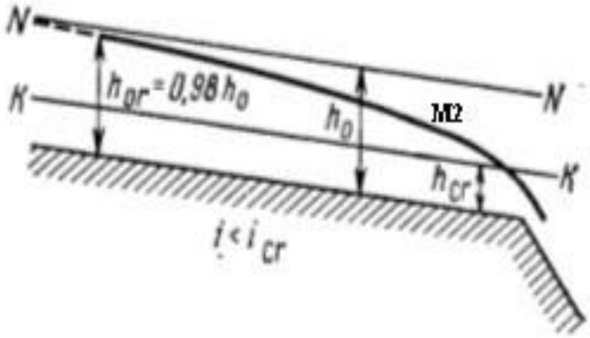
$h<h_0 \rightarrow K<K_0 \rightarrow K_0/K>1 \rightarrow$ numérateur <0

$h>h_{cr} \rightarrow P_C<1 \rightarrow$ dénominateur >0

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-}{+} < 0$$

En amont $h \rightarrow h_0 \rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow 0$ et l'écoulement est uniforme.

Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe M2 d'apparaître.

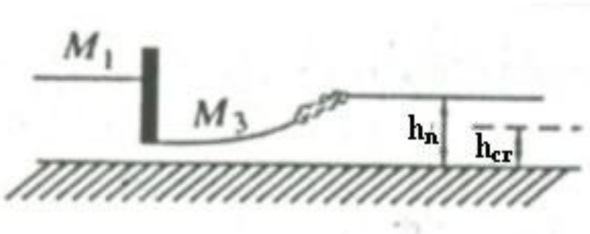


Pour la zone c : $h< h_{cr}<h_0$ c'est la branche M3

$h<h_0 \rightarrow K<K_0 \rightarrow K_0/K>1 \rightarrow$ numérateur <0

$h<h_{cr} \rightarrow P_C>1 \rightarrow$ dénominateur <0

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-}{-} > 0$$



2^er cas : cas des canaux à forte pente $i>i_{cr}$, courbe de type S :

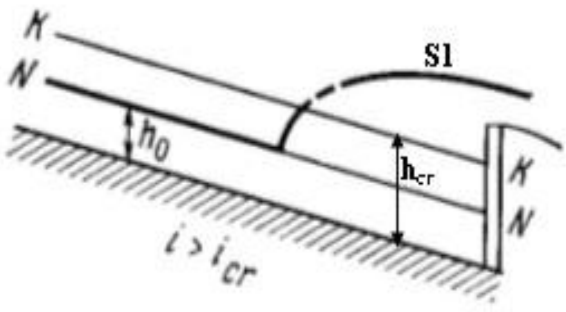
Pour la zone a : $h> h_{cr}>h_0$ branche S1

$h>h_0 \rightarrow K>K_0 \rightarrow K_0/K<1 \rightarrow$ numérateur >0

$h>h_{cr} \rightarrow P_C<1 \rightarrow$ dénominateur >0

$$\frac{dh}{dx} = \frac{+}{+} > 0$$

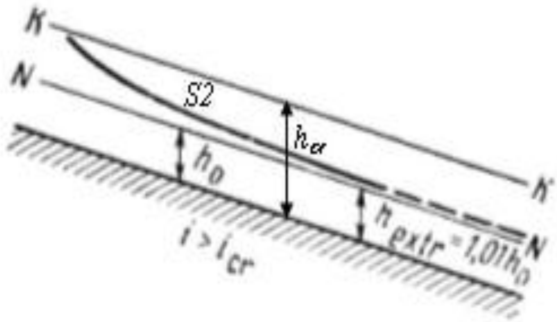
Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe S1 d'apparaître.



La courbe de remous S1 apparaît à la construction d'un obstacle dans le courant torrentiel.
Pour la zone b : $h_0 < h < h_{cr}$ c'est la branche S2
$h > h_0 \rightarrow K > K_0 \rightarrow K_0/K < 1 \rightarrow$ numérateur >0
$h < h_{cr} \rightarrow P_C > 1 \rightarrow$ dénominateur <1 ou bien $(1-P_C<0)$

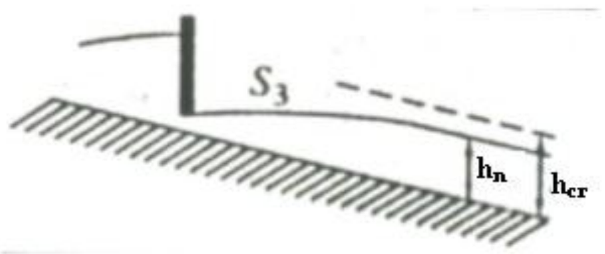
$$\frac{dh}{dx} = \frac{+}{-} < 0$$

Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe S2 d'apparaître.



Pour la zone c : $h < h_{cr} < h_0$ c'est la branche S3
$h < h_0 \rightarrow K < K_0 \rightarrow K_0/K > 1 \rightarrow$ numérateur <0
$h < h_{cr} \rightarrow P_C > 1 \rightarrow$ dénominateur <0

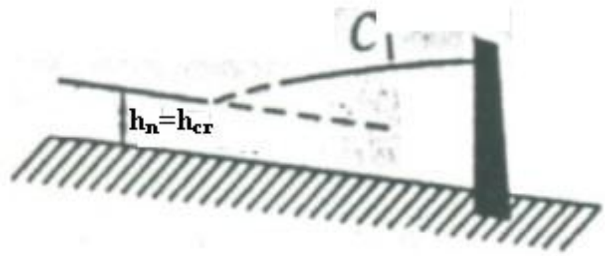
$$\frac{dh}{dx} = \frac{-}{-} > 0$$



3ème cas : cas de canaux à pente critique $i=i_{cr}$, et $h=h_{cr}$
Pour la zone a : $h > h_{cr} = h_0$ branche C1
$h > h_0 \rightarrow K > K_0 \rightarrow K_0/K < 1 \rightarrow$ numérateur >0
$h > h_{cr} \rightarrow P_C < 1 \rightarrow$ dénominateur >0

$$\frac{dh}{dx} = \frac{+}{+} > 0$$

Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe C_1 d'apparaître.

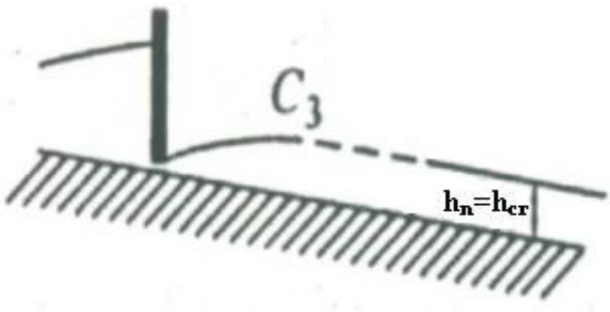


i=i$_{cr}$>0

Pour la zone c : h< h_{cr} =h_0 branche C3
h<h_0 → K<K_0→K_0/K>1→numérateur <0
h<h_{cr}→P_C >1→dénominateur <0

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-}{-} > 0$$

Sur la figure suivante, nous représentons un cas qui permet à la courbe C3 d'apparaître.



i=i$_{cr}$>0

4-4-3 Forme de la surface libre de l'écoulement dans les canaux prismatiques à contre pente i<0

Pour une pente positive l'écoulement se produit lorsque le travail de la force de gravité dans le sens de l'écoulement est égal au travail dû à la force de frottement.

Sur un tronçon où la pente est négative ou nulle (i≤0) la projection de la force de gravité sur la direction du mouvement est négative ou nulle ≤0.

Ainsi sur ce tronçon le régime uniforme est impossible et la définition de la profondeur normale dans les canaux à pente négative ou nulle est impossible.

L'énergie spécifique de la section H_S diminuera dans le sens de l'écoulement, le courant peut passer dans ce tronçon à pente nulle ou négative en régime fluvial ou torrentiel vue que le régime critique est impossible dans un canal à pente négative.

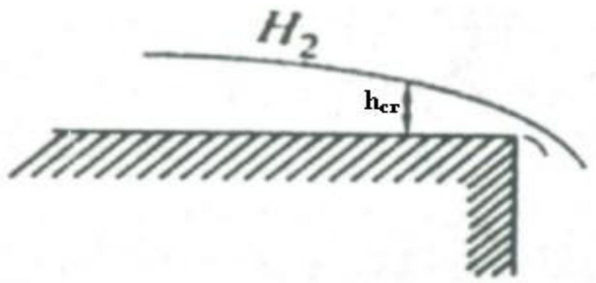
Donc, on distinguera deux zones : la zone b et la zone c.

Zone b : le courant passe dans le tronçon à pente négative ou nulle en régime fluvial. Pour h>h_{cr} la diminution de H_S correspond à la diminution de h.

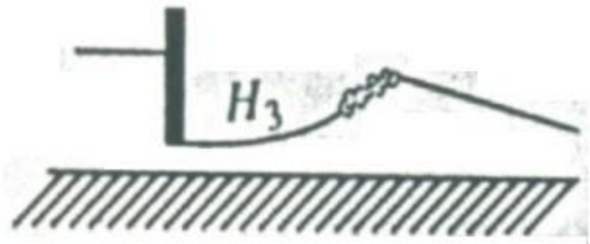
Zone c : le régime torrentiel est correspond à h<h_{cr} et la diminution de H_S est possible pour un accroissement de h.

En pratique :

a)La courbe H_2 se manifeste dans le cas d'une chute brusque et la courbe H_3 se manifeste dans le cas de l'écoulement à grande vitesse dans un canal horizontal.

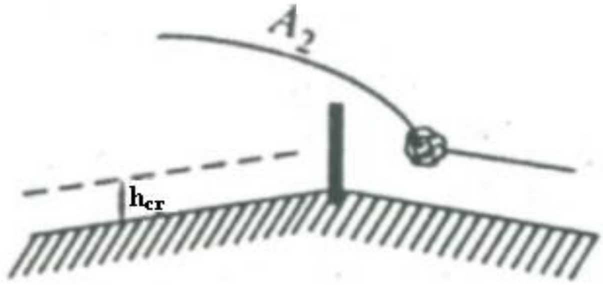


i=0

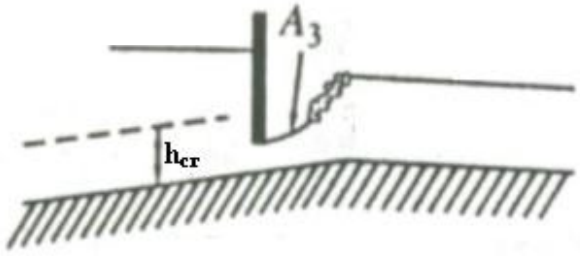


i=0

b) La courbe A2 est observée dans le cas d'un changement brusque de pente et la courbe A3 est également observée dans le cas où l'ouverture de la vanne est inférieure à la profondeur critique (h_{cr}).



i<0



i<0

4-5 Solution de l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié

Pour obtenir l'équation de calcul de l'écoulement graduellement varié, l'équation (4-3) doit être soumise à l'intégration.

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{(1-\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3})}\Rightarrow dx=\frac{(1-\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3})}{i-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}dh\text{ , on pose }f(h)=\frac{(1-\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3})}{i-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}\Rightarrow dx=f(h)dh$$

Posons $\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}=P_C$ le paramètre cinétique ou le paramètre de cinéticité et $K=\omega C\sqrt{R}$ la débitance (le débit pour une pente égale à l'unité), nous aurons

$$f(h)=\frac{(1-P_C)}{i(1-\dfrac{Q^2}{iK^2})}\Rightarrow dx=\frac{1-P_C}{i(1-\dfrac{Q^2}{iK^2})}dh\Rightarrow idx=\frac{1-P_C}{(1-\dfrac{Q^2}{iK^2})}dh$$

$$idx=\frac{1-P_C}{(1-\dfrac{Q^2}{iK^2})}dh\text{ …………………………(4.4)}$$

avec $Q=\omega_0C_0\sqrt{R_0}\sqrt{i}$ est le débit en régime uniforme

$Q'=\omega C\sqrt{R}\sqrt{i}$ débit fictif pour h, C, R, ω, K correspondent en régime non uniforme mais dans les conditions uniformes et la surface libre à une pente égale à la pente du fond (I=i).

$P_C=\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}=\dfrac{\alpha K_0^2iB}{g\omega^3}=\dfrac{\alpha K_0^2iB}{g\omega^2R\chi}$ multiplions le numérateur et le dénominateur par C^2.alors

$$P_C=\frac{\alpha iBC^2K_0^2}{g\chi\omega^2RC^2}=\frac{\alpha iBC^2}{g\chi}\frac{K_0^2}{K^2}=j\left(\frac{K_0}{K}\right)^2,$$

avec $j=\dfrac{\alpha iBC^2}{g\chi}$

En substituant l'expression transformée de P_{Cin} dans l'équation (4.4), on obtient :

$idx=\dfrac{[1-j(\dfrac{K_0}{K})]}{[1-(\dfrac{K_0}{K})^2]}dh$ ..……. (4.5) pour réaliser l'intégration de cette équation, les grandeurs j et K_0/K doivent être exprimées sous la forme des fonctions analytiques explicites de h. Mais ceci n'est possible que pour les canaux de forme la plus simple. Pourtant, même en ce cas, la fonction f(h) est tellement complexe qu'il s'avère impossible de résoudre l'équation (4.5) d'une façon analytique. C'est pourquoi on va introduire la supposition principale, de tous les procédés proposés pour intégrer cette équation, qui considère que *j* varie très peu sur le tronçon soumis à l'intégration et en se basant sur le procédé de Pavlovski pour intégrer cette équation [1].

$j_1=\dfrac{\alpha_1iB_1C_1^2}{g\chi_1};\ j_2=\dfrac{\alpha_1iB_2C_2^2}{g\chi_2}$ on adopte pour le tronçon x $j=j_{moy}=\dfrac{j_1+j_2}{2}=\text{constante}$

Introduisons les désignations :

$K/K_0=z$; $K_1/K_0=z_1$; $K_2/K_0=z_2$

Admettons qu'entre les variables h et z il existe une liaison de type h=az, où
$a = \frac{h_2 - h_1}{z_2 - z_1}$ ou sous la différentielle dh=adz
donc l'équation (4-5) s'écrit :

$$dx = \frac{a}{i}\frac{1 - j_{moy}\frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{z^2}}dz = \frac{a}{i}\frac{z^2 - j_{moy}}{z^2 - 1}dz$$

$$dx = \frac{a}{i}\left[\frac{z^2 - 1 + 1 - j_{moy}}{z^2 - 1}\right]dz = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1 - j_{moy}}{1 - z^2}\right]dz$$

$$dx = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1 - j_{moy}}{1 - z^2}\right]dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

4-5-1 Pour une pente positive (i>0), l'équation (4.4) devient :

$$idx = \frac{1 - P_C}{1 - (\frac{Q}{Q'})^2}dh \text{ avec } Q' = \omega C\sqrt{R}\sqrt{i}$$

$$dx = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1 - j_{moy}}{1 - z^2}\right]dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

L'intégration de l'équation (4.6) dans les limites du tronçon donne :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1 - j_{moy}}{1 - z^2}\right]dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{i}\left[dz - (1 - j_{moy})\frac{dz}{1 - z^2}\right]$$

d'où
si z_1 et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1 + z_2}{1 - z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z_1}{1 - z_1}\right] \ldots\ldots\ldots (4.7)$$

si z_1 et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2 + 1}{z_2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (4.8)$$

4-5-2 Pour une pente négative (i<0), l'équation (4.4) devient :

$$|i|dx = -\frac{1 - P_C}{1 + (\frac{Q}{Q'})^2}dh \text{ avec } Q' = \omega C\sqrt{R}\sqrt{|i|}$$

$$dx = \frac{a}{|i|}\left[-\frac{1 - j_{moy}(\frac{K_0}{K})^2}{1 + (\frac{K_0}{K})^2}\right]dz = \frac{a}{|i|}\left[-\frac{1 - j_{moy}\frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^2}}\right]dz = \frac{a}{|i|}\left[-\frac{z^2 - j_{moy}}{z^2 + 1}\right]dz = \frac{a}{|i|}\left[-\frac{z^2 + 1 - 1 - j_{moy}}{z^2 + 1}\right]dz$$

$$dx = \frac{a}{|i|}\left[-1 + \frac{1 + j_{moy}}{z^2 + 1}\right]dz = \frac{a}{|i|}\left[-dz + (1 + j_{moy})\frac{dz}{z^2 + 1}\right]$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{|i|}\left[-dz+(1+j_{moy})\frac{dz}{z^2+1}\right] = \frac{a}{|i|}\left[-(z_2-z_1)+(1+j_{moy})(\mathrm{arctg}(z_2)-\mathrm{arctg}(z_1))\right]$$

$$x_2-x_1 = x = \frac{a}{|i|}\left[-(z_2-z_1)+(1+j_{moy})(\mathrm{arctg}(z_2)-\mathrm{arctg}(z_1))\right] \text{........ (4.8)}$$

4-5-3 Pour une pente nulle (i=0):

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{(1-\dfrac{\alpha Q^2B}{g\omega^3})} = \frac{0-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}{(1-P_C)} \Rightarrow dx = \frac{(1-P_C)}{-\dfrac{Q^2}{\omega^2C^2R}}dh = \frac{(1-P_C)}{-\dfrac{Q^2}{K^2}}dh$$

On multiplie les deux partie par i' qui est une valeur arbitraire positive (i'>0), on obtient : $i'dx = \dfrac{(1-P_C)}{-\dfrac{Q^2}{K^2}}i'dh = \dfrac{(1-P_C)}{-\dfrac{Q^2}{i'K^2}}dh$

On pose $Q' = \sqrt{i'}K = \omega C\sqrt{Ri'}$ on obtient : $i'dx = \dfrac{(1-P_C)}{-(\dfrac{Q}{Q'})^2}dh$

$$dx = \frac{a}{i'}\left[\frac{1-j_{moy}(\dfrac{K_0}{K})^2}{-(\dfrac{K_0}{K})^2}\right]dz = \frac{a}{i'}\left[\frac{1-j_{moy}\dfrac{1}{z^2}}{-\dfrac{1}{z^2}}\right]dz = \frac{a}{i'}\left[j_{moy}-z^2\right]dz$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{z_1}^{z_2}\frac{a}{i'}\left[j_{moy}-z^2\right]dz = \frac{a}{i'}\left[j_{moy}(z_2-z_1)-\frac{1}{3}(z_2^3-z_1^3)\right]$$

$$x_2-x_1 = x = \frac{a}{i'}\left[j_{moy}(z_2-z_1)-\frac{1}{3}(z_2^3-z_1^3)\right] \text{..................... (4.9)}$$

Les équations (4.7), (4.8) et (4.9) nous permettent de calculer la longueur de la courbe de remous ou de décrue pour l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques.

4-6 Calcul des courbes de remous et de décrue dans les canaux prismatiques

Les équations (4.7), (4.8) et (4.9) permettent de résoudre les différents problèmes sur le calcul des courbes de remous et de décrue dans les canaux prismatiques

Il faut dire que pou le calcul on doit avoir : le débit d'eau Q, les paramètres de la section transversale du canal (b, m), la pente longitudinale du fond du canal et la rugosité n.

Il existe trois principaux problèmes relatifs à l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques qui sont :
Problème du premier type : on donne les profondeurs h_1 et h_2 à l'origine et à l'extrémité du tronçon. Déterminer la longueur du tronçon x.
Problème du deuxième type : la profondeur h_2 d'extrémité du tronçon et la longueur x du tronçon sont données. Déterminer la profondeur h_1 à l'origine.
Problème du troisième type : la profondeur d'origine h_1 et la longueur du tronçon x sont données. Déterminer la profondeur h_2 d'extrémité.

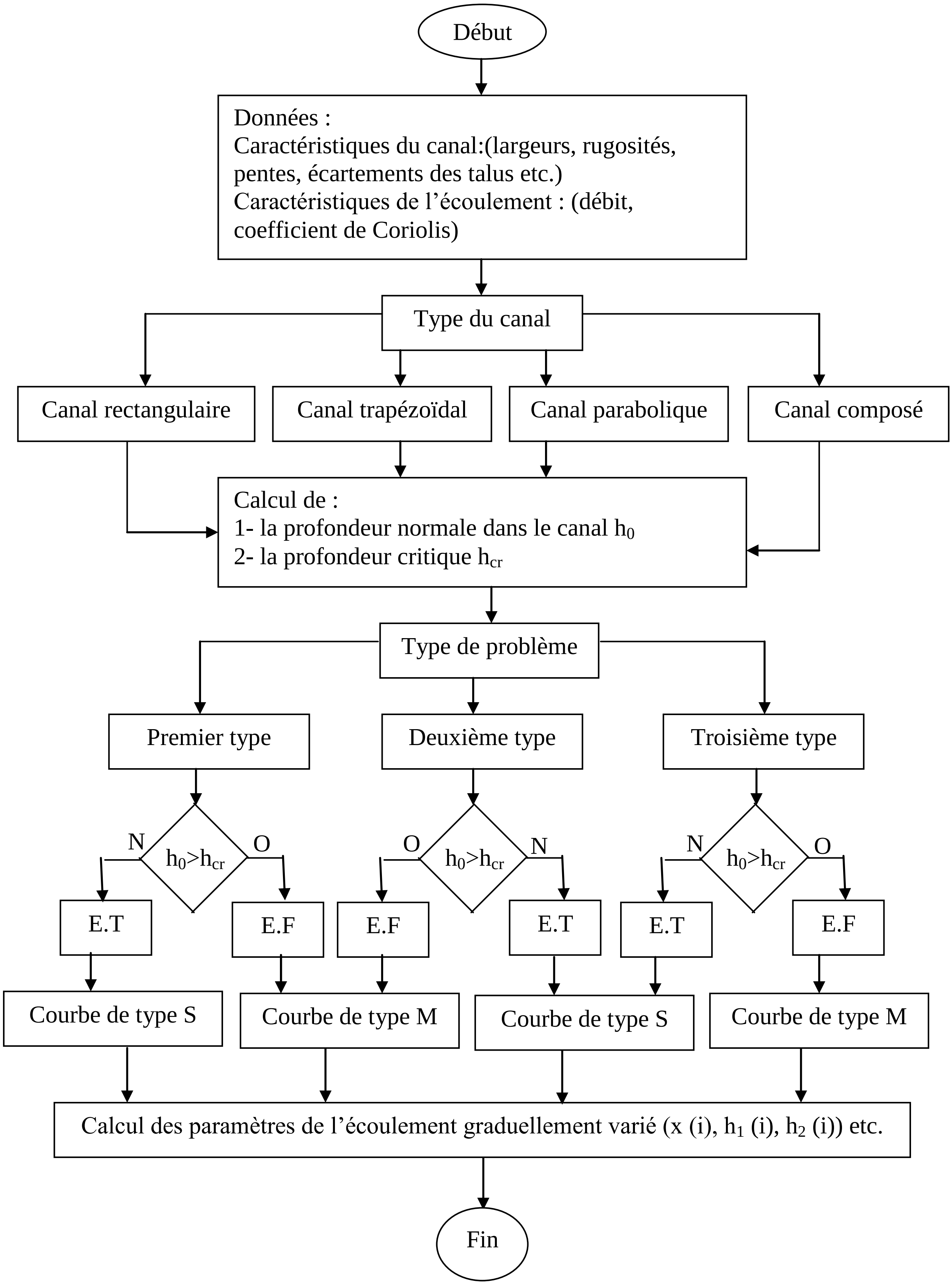
4-7 Modélisation numérique

Dans notre travail, nous avons opté pour le procédé développé par Pavlovski pour résoudre l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié. L'objectif de cette modélisation est de résoudre les trois principaux types de problèmes relatifs à l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques.

Les équations utilisées pour ce calcul sont obtenues par intégration de l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié dans les canaux prismatiques.
Les calculs du problème donné s'effectuent selon l'organigramme suivant :

4-8 Conclusion

Dans cette partie des écoulements, l'équation différentielle de l'écoulement graduellement varié a été démontrée et résolue par le procédé de Pavlovski d'une part et d'autre part les formes de la surface libre dans les canaux prismatiques aux pentes positive, nulle et négative ont été représentées et pour clore ce chapitre, le calcul des courbes de remous et de décrues ainsi que la modélisation de cet écoulement ont été la dernière étape de notre travaille.


Début
Données :
Caractéristiques du canal:(largeurs, rugosités, pentes, écartements des talus etc.)
Caractéristiques de l'écoulement : (débit, coefficient de Coriolis)
Type du canal
Canal rectangulaire
Canal trapézoïdal
Canal parabolique
Canal composé
Calcul de :
1- la profondeur normale dans le canal h_0
2- la profondeur critique h_{cr}
Type de problème
Premier type
Deuxième type
Troisième type
N
$h_0>h_{cr}$
O
O
$h_0>h_{cr}$
N
N
$h_0>h_{cr}$
O
E.T
E.F
E.F
E.T
E.T
E.F
Courbe de type S
Courbe de type M
Courbe de type S
Courbe de type M
Calcul des paramètres de l'écoulement graduellement varié (x (i), h_1 (i), h_2 (i)) etc.
Fin

Chapitre IV: L'écoulement graduellement (progressivement) varié

Exercice n° :1

Etablir une formule donnant une relation entre la longueur, l'énergie et la pente dans les problèmes d'écoulement non uniforme ?

Solution

En appliquant l'équation de l'énergie, entre les sections 1 et 2 dans la direction du courant avec, un niveau de référence inférieur au fond du canal, nous obtenons :

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+\Delta h_L$$

La pente de la ligne de charge i est $\frac{\Delta h_L}{L}$: alors $\Delta h_L = iL$. La pente du fond du canal i_0 est $(z_1-z_2)/L$;

$$(z_1-z_2)=i_0L$$

$$z_1+h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=z_2+h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+\Delta h_L \Rightarrow (z_1-z_2)+(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})=iL$$

$$(z_1-z_2)+(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})=iL \Rightarrow i_0L+(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})=iL$$

On résout, en général, cette expression en L pour des études de canaux ouverts. Ainsi,

$$i_0L+(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})=iL \Rightarrow (i-i_0)L=(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})$$

$$(i-i_0)L=(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g}) \Rightarrow L=\frac{(h_1-h_2)+(\frac{\alpha v_1^2}{2g}-\frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i-i_0)}=\frac{(h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g})-(h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i-i_0)}$$

donc $L=\frac{E_1-E_2}{(i-i_0)}$.

Exercice n° :2

Un canal trapézoïdal de largeur b=20 m, de coefficient d'écartement du talus m=1,25, le coefficient de rugosité n=0,020 de pente i=0,001évacue un débit Q=60 m^3/s. Le canal comporte une vanne qui provoque l'élévation du niveau en amont jusqu'à la profondeur de 2,0 m.

a) Déterminer la distance jusqu'à la section du canal dont la profondeur sera égale à 1,7m ?

b) Réaliser le calcul de la courbe de remous et la construire ?

Solution

a) détermination de la distance jusqu'à la profondeur h=1,7m

1- Calcul de la profondeur normale, h_0,

Nous avons effectué le calcul de la profondeur normale dans le canal par le biais d'un programme que nous avons élaboré.

La valeur de h_0 obtenue est : h_0=1,4599=1,46 m

2- Calcul de la profondeur critique, h_{cr},

Ensuite, en calculant la profondeur critique à l'aide de la formule d'Agroskine

$$k=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}=\sqrt[3]{\frac{1{,}1\ x\ 60^2}{9{,}81\ x\ 20^2}}=0{,}972\ m\ \ ;\ \sigma_{cr}=\frac{mk}{b}=\frac{1{,}25\ x\ 0{,}972}{20}=0{,}06$$

en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k\,(1-\frac{\sigma_{cr}}{3}+0{,}105\sigma_{cr}^2) = 0{,}972\,(1-\frac{0{,}06}{3}+0{,}105 \text{ x } 0{,}06^2) = 0{,}95 \text{ m}.$$

La comparaison des valeurs trouvées de h_0, h_{cr} et de la profondeur donnée 2,0 m près de l'ouvrage indique que le problème traite la courbe de remous M_1.

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs h_1=2 m et h_2=1,7 m a été effectué par un programme et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :

Les équations utilisées sont :

si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

sections	h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	B (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K
1-1	1,7	37,61	25,44	1,478	24,25	53,366	2440,52
2-2	2,0	45	26,40	1,70	25	54,647	3210,36

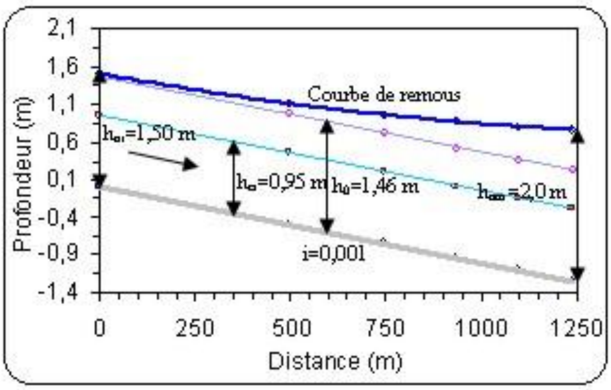
Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
1,286	1,039	0,277	0,282	0,729	490,81
1,692	0,679	0,288			

2- pour réaliser la courbe de remous, on doit incrémenter la différence de profondeur entre la profondeur normale obtenue h_0=1,5 et celle h= 2 m en cinq (5) incréments, les résultats de calcul obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

sections	h_1 (m)	h_2 (m)	x (m)	distance cumulée (m)
1	1,5	1,6	493,74	493,74
2	1,6	1,7	250,10	743,84
3	1,7	1,8	188,52	932,36
4	1,8	1,9	160,16	1092,52
5	1,9	2,0	144,02	1236,58

Sur la figure ci-après, nous représentons l'allure de la courbe de remous obtenue.



Exercice n° :3

Calculer la longueur de la courbe de la surface libre dans un canal parabolique si sa section finale a la profondeur critique. Le canal ne comporte pas d'ouvrages. Les données du canal : le débit Q=8,37 m^3/s, le paramètre de la parabole P=4,7 m, le coefficient de rugosité n=0,025 et la pente du fond i=0,0009.

Solution

Comme il est expliqué précédemment en calcul la profondeur normale, on trouve:
h_0= 1,50 m. a l'aide de la formule de la profondeur critique pour les canaux paraboliques, on détermine la profondeur critique :

$$h_{cr} = \sqrt[4]{\frac{27\alpha 7^2}{64gp}} = \sqrt[4]{\frac{27x18,37^2}{64x9,81x4,7}} = 0,895\,\text{m}$$

Des valeurs obtenues des profondeurs h_0 et h_{cr}, nous remarquons que $h_0>h_{cr}$, ce qui indique un écoulement fluvial dans le canal. Les données de l'exercice montre, également, que la section finale a la profondeur critique ce qui implique que la courbe se situe entre h_0 et h_{cr}, et par conséquent c'est une courbe de décrue et de type M2.

Pour déterminer la distance qui sépare les deux profondeurs, on prend $h_{or}=h_1=0{,}98h_0=0{,}98x1{,}5=1{,}47$ m et $h_2=h_{cr}=0{,}895$ m.

Les équations utilisées pour le calcul de la longueur de la courbe de décrue sont :

si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1 $x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

Les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :

sections	h (m)	B (m)	ω (m^2)	τ	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}/s$)	K
1-1	1,47	7,4	7,25	0,31	8,17	0,89	39,1	268
2-2	0,895	5,8	3,46	0,19	6,12	0,57	31,3	81,7

Suite au tableau précédent

<table>
<tr><td>Z</td><td>F</td><td>J</td><td>J_{moy}</td><td>a</td><td>x (m)</td></tr>
<tr><td>0,96</td><td>1,945</td><td>0,13</td><td rowspan="2">0,11</td><td rowspan="2">0,88</td><td rowspan="2">785</td></tr>
<tr><td>0,29</td><td>0,298</td><td>0,09</td></tr>
</table>

Exercice n° :4

Déterminer la longueur de la courbe de remous dans un canal rectangulaire horizontal aux données suivantes : le débit Q=30 m^3/s, la largeur b=10 m, le coefficient de rugosité n=0,020, la profondeur initiale h_1=0,5 m et la profondeur finale h_2=0,8 m.

Solution

On trouve la profondeur critique :

$$h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,0\,x\,30^2}{9,81\,x\,20^2}} = 0,97\text{ m}$$

Comme les deux profondeurs données sont inférieures à h_{cr} , les conditions sont réelles (nous avons la courbe de remous).

Prenons une valeur positive arbitraire de la pente i_0. Par exemple, i_0=0,0001. Alors :

$K_0 = Q/\sqrt{i_0} = 30,0/\sqrt{0,0001} = 3000\,m^3/s.$

L'équation de calcul de la distance entre les deux profondeurs est la suivante :

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i'}\left[j_{moy}(z_2 - z_1) - \frac{1}{3}\left(z_2^3 - z_1^3\right)\right]$$

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs h_1=0,5 m et h_2=0,8 m a été effectué par un programme et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :

h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K (m^3/s)	z	z^3
0,5	5,0	11	0,45	43,84	147,79	0,049265	0,0001196
0,8	8,0	11,6	0,69	47,00	312,23	0,104078	0,0011274

Suite au tableau précédent

j	j_{moy}	a	x (m)
0,017813	0,018611	5,47311	37,45
0,019499			

Exercice n° :5

Un canal trapézoïdal a un coefficient d'écartement du talus m=1,5, une pente du fond i=0,00015, un coefficient de rugosité n=0,017, une largeur b=6 m, évacue un débit Q=85 m^3/s. on a en amont de la chute la profondeur de 3,6 m.

Déterminer le type de la courbe de la surface libre et sa longueur générale ?

Solution

Tout d'abord, on doit calculer les profondeurs, normale, h_0, et critique, h_{cr}, en utilisant le programme que nous avons élaboré, tout en se basant sur leurs formules :

La profondeur normale obtenue est h_0=4,69685650 ≈4,70 m ;

La profondeur critique obtenue est h_{cr}=2,24589801 ≈2,25m.

h_0 est supérieure à h_{cr} alors l'écoulement dans le canal est fluvial est la courbe est de type M.

La profondeur en amont de la chute est h_{or}=3,6 m se trouve entre les deux autres profondeurs $h_{cr} < h_{or} < h_0$

Alors la courbe c'est une courbe de décrue de type M2.

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs h_1=3,6 m et h_2=2,25 m a été effectué par un programme spécifique et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :

Les formules de calcul de la longueur de la courbe sont :

si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

sections	h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	B (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K
1-1	3,6	41,04	18,98	2,16	16,80	66,89	3036,76
2-2	2,25	21,09	14,11	1,49	12,75	62,90	1622,08

Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
0,58	0,6649	0,0606	0,0576	3,88	1404,94
0,23	0,2381	0,0546			

Exercice n° :6

Dans un canal trapézoïdal à caractéristiques suivantes : la profondeur normale h_0=1,75, la largueur b=10 m, le coefficient d'écartement m=1,5, la pente du fond i=0,0007 et le coefficient de rugosité n=0,030 près de la digue se forme un remous de 2 m.
Déterminer la distance entre le barrage et la section dans laquelle le remous constitue 0,01 m ?

Solution

Tout d'abord, on doit calculer la profondeur critique,h_{cr} :

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1 \times 23{,}85^2}{9{,}81 \times 10^2}} = 0{,}83\,\text{m} \;;\; \sigma_{cr} = \frac{mk}{b} = \frac{1{,}25 \times 0{,}83}{10} = 0{,}125$$

en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr} = k\,(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0{,}105\sigma_{cr}^2) = 0{,}83\,(1 - \frac{0{,}125}{3} + 0{,}105 \times 0{,}125^2) = 0{,}80\,\text{m}$$

La profondeur critique obtenue est h_{cr}=0,80 m.
h_0 est supérieure à h_{cr} alors l'écoulement dans le canal est fluvial est la courbe est de type M.
Les profondeur h_1=1,75+0,01=1,76 m et h_2=2,0 m sont supérieures à h_0=1,75 m >h_{cr}=0,80 m. donc la courbe est de type M1.
Le calcul de la distance, x, entre les deux profondeurs h_1=1,76 m et h_2=2,0 m a été effectué par un programme élaboré pour ce cas là, et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :
Les formules de calcul de la longueur de la courbe sont :
si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}\left(1 - j_{moy}\right)\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}\left(1 - j_{moy}\right)\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

sections	h (m)	ω (m²)	χ (m)	R (m)	B (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K
1-1	1,76	22,25	16,35	1,36	15,28	35,09	910,70
2-2	2,0	26	17,21	1,51	16,00	35,71	1141,03

Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
1,01	2,65	0,0821	0,08335	0,9395	2283,05
1,27	1,07	0,0845			

Exercice n° :7

La profondeur normale d'un canal trapézoïdal h_0=4m. La profondeur d'extrémité du canal h_{ext}=3 m. Déterminer la profondeur d'origine h_{or} dans le canal à la distance de 6000 m de l'extrémité, si la largeur b=10 m, le coefficient de rugosité n=0,025, le coefficient d'écartement du talus m=1,5 et la pente du fond i=0,0003.

Solution

C'est un problème du deuxième type et pour le résoudre, on doit tracer la courbe donnant la variation de la profondeur d'eau en fonction de la distance x.
L'ensemble du résultat on été obtenu par un le programme général de l'écoulement graduellement varié.
Le débit Q=93,65 m^3/s
La profondeur critique, h_{cr} :

$$k=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}=\sqrt[3]{\frac{1{,}1\,x\,93{,}65^2}{9{,}81\,x\,10^2}}=2{,}075\,m\ ;\ \sigma_{cr}=\frac{mk}{b}=\frac{1{,}5\,x\,2{,}075}{10}=0{,}3113$$

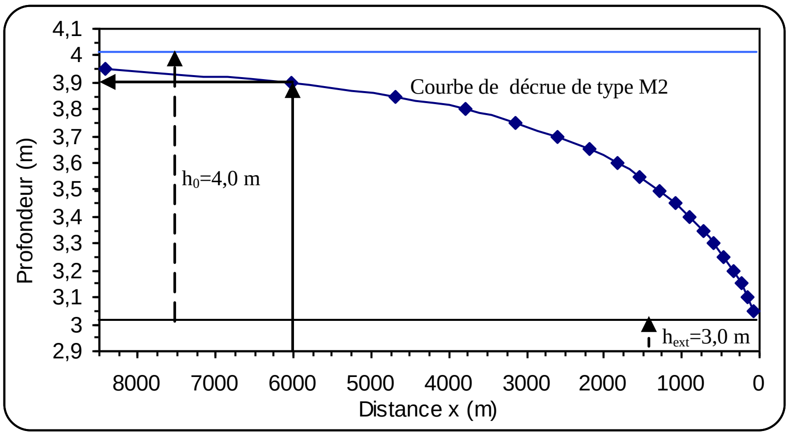
en suite, on détermine h_{cr} comme :

$$h_{cr}=k\,(1-\frac{\sigma_{cr}}{3}+0{,}105\sigma_{cr}^2)=2{,}075\,(1-\frac{0{,}3113}{3}+0{,}105\,x\,0{,}3113^2)=1{,}88\,m$$

h_0=4 m > h_{cr}=1,88 m c'est un écoulement fluvial et la courbe est de type M.
La profondeur d'extrémité, h_{ext}=3,00 m donc la profondeur à l'origine est comprise entre h_{ext} et h_0 et dans ce cas la courbe est de type M_2, donc c'est une courbe de décrue.
La construction de la courbe est basée sur les informations de h et x représentées dans le tableau ci-dessous et qui sont obtenues par le programme de l'écoulement graduellement varié que nous avons élaboré.

Profondeur h_{or} (m)	Distance x (m)
3,05	72,491
3,1	153,358
3,15	243,721
3,2	344,904
3,25	458,492
3,3	586,403
3,35	730,989
3,4	895,173
3,45	1082,652
3,5	1298,196
3,55	1548,105
3,6	1840,932
3,65	2188,709
3,7	2609,105
3,75	3129,611
3,8	3796,418
3,85	4696,429
3,9	6025,430
3,95	8410,483

Sur la figure suivante, nous représentons la courbe de décrue obtenue.



à l'aide de la courbe construit, on détermine la profondeur à l'origine, h_{or}, à la distance x=6000 m. Elle est égale à environ 3,9 m.

Exercice n° :8

Déterminer la profondeur à l'extrémité d'un canal rectangulaire long de 10 m et large de b=5m aux données suivantes : Q=14 m^3/s, le coefficient de rugosité n=0,020, la pente du fond i=0,04 sachant que la profondeur à l'origine du canal est critique.

Solution

La profondeur à l'origine est critique c'est-à-dire $h_{or}=h_{cr}$, ce qui nous reste est de déterminer la profondeur d'extrémité h_{ext}.

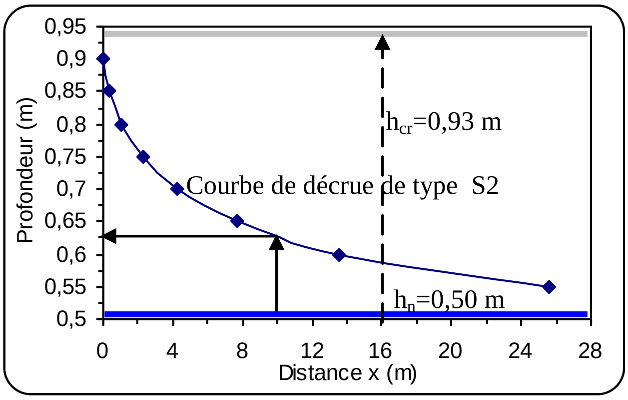
Pour résoudre ce genre de problème qui est du troisième type de l'écoulement graduellement varié, on construit la courbe h=fx) puis on détermine à l'aide de cette courbe la profondeur d'extrémité h_{ext}.

Le calcul des profondeurs normale et critique a donné : h_n=0,50 m et h_{cr}=0,93 m.

Les résultats de calcul, à l'aide du programme élaboré, de l'écoulement graduellement varié nous ont permis de dresser le tableau suivant :

La profondeur (m)	Distance partielle (m)	Distance x (m)
0,9	0,039	0,039
0,85	0,2984	0,3374
0,8	0,68167	1,01907
0,75	1,2247	2,24377
0,7	2,0388	4,28257
0,65	3,3668	7,64937
0,6	5,8604	13,50977
0,55	12,129	25,63877

La première valeur de la distance partielle qui correspond à h=0,9 m est obtenue en prenant h_{ext}=0,93 m et h_{or}=0,90 m.



Après lecture sur la courbe, la profondeur d'extrémité obtenue est h_{ext}=0,62 m.

Exercice n° :9

Déterminer la longueur x de la courbe de décrue dans un canal trapézoïdal sur le tronçon entre les profondeurs h_1=1,5 m et h_2=1,0 m si la largeur b=8 m, de coefficient d'écartement du talus m=1,0, le coefficient de rugosité n=0,014 la pente du fond i=0,0004 et le débit Q=24 m^3/s.

Solution

Tout d'abord, on doit calculer les profondeurs, normale, h_0, et critique, h_{cr}, en utilisant le programme que nous avons élaboré, tout en se basant sur leurs formules :

La profondeur normale obtenue est h_0=1,557 m ;

La profondeur critique obtenue est h_{cr}=0,93 m.

h_0 est supérieure à h_{cr} alors l'écoulement dans le canal est fluvial est la courbe est de type M.

Les profondeurs en amont h_1=1,50 m et en aval se trouvent entre les profondeurs normale et critique $h_{cr}<h_2<h1<h_0$. Alors c'est une courbe de décrue de type M2.

Le calcul de la distance entre les deux profondeurs h_1=1,50 m et h_2=1,0 m a été effectué par un programme spécialement élaboré pour ce genre de problèmes. Les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :
Les formules de calcul de la longueur de la courbe sont :
si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

sections	h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	B (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K
1-1	1,5	14,25	12,24	1,16	11,00	73,26	1126,28
2-2	1,0	9,00	10,83	0,83	10,00	69,26	568,28

Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
0,94	1,73	0,197	0,1886	1,075	1391,82
0,47	0,51	0,181			

Exercice n° :10

Déterminer la longueur x de la courbe de décrue dans un canal trapézoïdal si h_1=1,05 m et h_2=1,53 m, le débit Q=10 m^3/s, la largeur b=10m, le coefficient d'écartement du talus m=2,0, le coefficient de rugosité n=0,0225 et la pente du fond i=0,00044.

Solution

Tout d'abord, on doit calculer les profondeurs normale, h_0, et critique,h_{cr} :
Les résultats sont obtenus par un programme élaboré spécialement pour résoudre les problèmes de l'écoulement graduellement varié.
h_0=1 m.

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1\,x\,10^2}{9{,}81\,x\,10^2}} = 0{,}467\text{ m} \;;\; \sigma_{cr} = \frac{mk}{b} = \frac{1{,}25\text{ x }0{,}467}{10} = 0{,}093$$

en suite, on calcul h_{cr} par la relation suivante :

$$h_{cr} = k\,(1 - \frac{\sigma_{cr}}{3} + 0{,}105\sigma_{cr}^2) = 0{,}467\,(1 - \frac{0{,}093}{3} + 0{,}105\text{ x }0{,}093^2) = 0{,}453\,\text{m}$$

La profondeur critique obtenue est h_{cr}=0,453 m.
h_0 est supérieure à h_{cr} alors l'écoulement dans le canal est fluvial est la courbe est de type M.
Les profondeurs h_1=1,05 m et h_2=1,53 m sont supérieures à h_0=1,00 m >h_{cr}=0,453 m. donc la courbe est de type M1.
Le calcul de la distance, x, entre les deux profondeurs h_1=1,76 m et h_2=2,0 m a été effectué par un programme élaboré pour ce cas là, et les résultats de calcul sont représentés dans le tableau suivant :
Les formules de calcul de la longueur de la courbe sont :
si $z_1$et z_2 sont inférieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_2}{1-z_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z_1}{1-z_1}\right]$$

si $z_1$et z_2 sont supérieurs à 1

$$x_2 - x_1 = x = \frac{a}{i}(z_2 - z_1) - \frac{a}{i}(1 - j_{moy})\left[\frac{1}{2}\ln\frac{z_2+1}{z_2-1} - \frac{1}{2}\ln\frac{z_1+1}{z_1-1}\right]$$

sections	h (m)	ω (m^2)	χ (m)	R (m)	B (m)	C ($m^{0,5}$/s)	K
1-1	1,05	12,70	14,70	0,86	14,20	43,38	512,445
2-2	1,53	19,98	16,84	1,19	16,12	45,73	995,267

Suite au tableau précédent

Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
1,0749	1,66	0,08155	0,08566	0,474	2212,67
2,0877	0,52	0,08977			

Exercice n° :11

Un canal rectangulaire de 1829 m de long, de 18,3 m de large et profond de 3,05 m transporte 51,0 m^3/s d'eau (C=41,4). Le nettoyage du canal porte C à 55,2 si la profondeur à l'extrémité amont est toujours de 3,05 m, trouver la profondeur à l'autre extrémité pour le même débit (utilisant 1 seul tronçon).

Solution

Calcul de la pente du canal i avant le nettoyage du canal :

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} \Rightarrow i = \frac{1}{R}\left(\frac{Q}{\omega C}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{3{,}05x18{,}3}{18{,}3+2x3{,}05}\right)}\left(\frac{51}{3{,}05x18{,}3x41{,}4}\right)^2 = 0{,}0002129$$

Calcul de la pente du canal i après le nettoyage et la pente critique :

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} \Rightarrow i = \frac{1}{R}\left(\frac{Q}{\omega C}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{3{,}05x18{,}3}{18{,}3+2x3{,}05}\right)}\left(\frac{51}{3{,}05x18{,}3x55{,}2}\right)^2 = 0{,}0001198$$

i_{cr}=0,0045

On remarque que la pente i du radier du canal est inférieure à celle critique, i=0,0001198 < i_{cr}=0,0045, donc l'écoulement est fluvial.

Calcul des profondeurs normale et critique

h_0=1,73 m et h_{cr}=0,925 m, et du fait que $h_0>h_{cr}$ l'écoulement est fluvial et la courbe est de type M.

on a aussi h_{ext} amont supérieure à $h_0>h_{cr}$, alors la courbe est de type M1.

$$L = \frac{\left(h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}\right)-\left(h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}\right)}{(i-i_0)} \Rightarrow L = \frac{\left(3{,}05+\frac{1x(51/(18{,}3x3{,}05))^2}{19{,}62}\right)-\left(h_2+\frac{1x(51/(18{,}3xh_2))^2}{19{,}62}\right)}{(i-i_0)}$$

i : est la pente en écoulement graduellement varié

$\omega_1 = bh_1 = 18{,}3x3{,}05 = 55{,}815\,m^2$; $\chi_1 = b+2h_1 = 18{,}3+2x3{,}05 = 24{,}4\,m$;

$R_1 = \omega_1/\chi_1 = 55{,}815/24{,}4 = 2{,}2875\,m$

$\omega_2 = 18{,}3h_2$; $\chi_2 = b+2h_2 = 18{,}3+2xh_2$; $R_2 = \omega_2/\chi_2 = 18{,}3h_2/(18{,}3+2xh_2)$

$R_m = \frac{R_1+R2}{2} = \frac{2{,}2875+18{,}3h_2/(18{,}3+2xh_2)}{2}$, alors pour un écoulement non uniforme et Avec

$\omega_m = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \frac{55{,}815+18{,}3h_2}{2}$

On prend une valeur quelconque de i et on calcul les valeurs du débit et des vitesses.

$$Q=\omega_m C R_m^{1/2} i^{1/2} \Rightarrow i=\frac{1}{R_m}\left(\frac{Q}{\omega_m C}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{2{,}2875+18{,}3h_2/(18{,}3+2xh_2)}{2}\right)}\left(\frac{Q}{\frac{55{,}815+18{,}3h_2}{2}C}\right)^2$$

i_0 : est la pente du fond du canal

$$L=\frac{(h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g})-(h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i-i_0)} \Rightarrow L=\frac{(3{,}05+\frac{1x(51/(18{,}3x3{,}05))^2}{19{,}62})-(h_2+\frac{1x(51/(18{,}3xh_2))^2}{19{,}62})}{\left(\left(\frac{Q}{\frac{55{,}815+18{,}3h_2}{2}C\left(\frac{2{,}2875+18{,}3h_2/(18{,}3+2xh_2)}{2}\right)^{1/2}}\right)^2-i_0\right)}$$

$$1829=\frac{(3{,}0925)-(h_2+0{,}3958/h_2^2)}{\left(\left(\frac{51}{\frac{55{,}815+18{,}3h_2}{2}x55{,}2x\left(\frac{2{,}2875+18{,}3h_2/(18{,}3+2xh_2)}{2}\right)^{1/2}}\right)^2-0{,}0001198\right)}$$

On résout cette équation par approximations successives, on obtient la valeur de la profondeur en aval h_2.

Exercice n° :12

Un canal rectangulaire de 10,0 m de largeur est construit sur une pente de 0,0028. La profondeur de l'écoulement dans une section est de 1,5 m, tandis que dans une autre à 500 m en aval elle est de 1,80 m. Déterminer le débit probable si n=0,026 ?

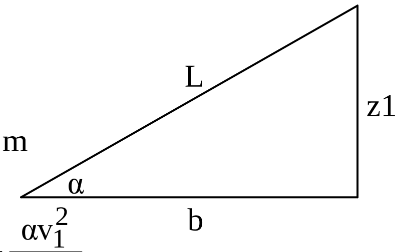
Solution

En utilisant la section 2 comme niveau de référence,

Energie au niveau de la section 1 : $E_1=z_1+h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=\frac{610}{1000}+1{,}5+\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}$

Calcul de z1 : $tg\alpha=\frac{z1}{b}=0{,}0028 \Rightarrow \alpha=0{,}16^{\circ}$

$\sin\alpha=\frac{z1}{L} \Rightarrow z1=Lx\sin\alpha=500x0{,}0028=1{,}40\,m$



$$E_1=z_1+h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=1{,}40+1{,}5+\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}=2{,}90+\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}$$

L'énergie en 2 : $E_2=z_2+h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}=0+1{,}80+\frac{\alpha v_2^2}{19{,}62}=1{,}80+\frac{\alpha v_2^2}{19{,}62}$

La pente hydraulique en écoulement graduellement varié, i :

Au niveau de la section 1 :

$\omega_1=bh_1=10x1{,}5=15\,m^2$; $\chi_1=b+2h_1=10+2x1{,}5=13\,m$;

$R_1=\omega_1/\chi_1=15/13=1{,}15\,m$

Au niveau de la section 2 :

$\omega_2=bh_2=10x1{,}8=18\,m^2$; $\chi_2=b+2h_2=10+2x1{,}8=13{,}6\,m$;

$R_2=\omega_2/\chi_2=18/13{,}6=1{,}32\,m$

Ainsi, le rayon hydraulique moyen et la section moyenne entre les deux sections sont : et $R_m = \frac{R_1 + R2}{2} = \frac{1,15+1,32}{2} = 1,235\,m$, alors pour un écoulement non uniforme et Avec

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{15+18}{2} = 16,5\,m^2$$

On prend une valeur quelconque de i et on calcul les valeurs du débit et des vitesses.

$$Q = \omega_m \frac{R_m^{2/3} i^{1/2}}{n}$$

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} \text{ et } v_2 = \frac{Q}{\omega_2}$$

Puis on recalcule la pente hydraulique i

$$i = \frac{perte\,de\,charge}{L} = \frac{(2,90-1,80)+(\frac{\alpha v_1^2}{19,62} - \frac{\alpha v_2^2}{19,62})}{500}$$

Si la valeur de i obtenue est égale à celle prise en stop l'opération, si non on prendra une autre valeur de i et on ferra la même chose jusqu'à l'obtention d'une valeur de i égale à la pente hydraulique choisie et dans ce cas le débit utilisé pour le calcul des vitesses au niveau des sections 1 et 2 est celui recherché.
La valeur du débit obtenue est Q=44,1 m^3/s.

Exercice n° :13

Dans un canal rectangulaire de 3,66 m de large, C = 55,2 ; i=0,0225, le débit est de 14,15 m^3/s. la pente du canal passe à 0,00250. À quelle distance du point de changement de pente la profondeur est-elle de 0,838m, (utiliser un seul tronçon) ? Rép. x=31,7 m.

Solution

Calcul de la profondeur normale dans le canal

En se basant sur la méthode itérative en calculant la profondeur normale dans le canal.

Les résultats de la méthode sont représentés dans le tableau suivant :

h (m)	ω (m^2)	ω x C	$R^{0,5}$($m^{0,5}$)	Q (m^3/s)
0,1	0,366	20,2032	0,30792638	0,93316472
0,5	1,83	101,016	0,62666088	9,49541637
1	3,66	202,032	0,80414122	24,369339
0,67	**2,4522**	**135,36144**	**0,70031422**	**14,2193311**

La profondeur normale h_0=0,67m.

$$h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,0 \text{ x } 14,15^2}{9,81 \text{ x } 3,66^2}} = 1,15\,m$$

$h_{cr} > h_0$ alors l'écoulement est torrentiel,

Pour i=0,00250, la profondeur normale h_0 est obtenue comme suit :

h (m)	ω (m^2)	ω x C	$R^{0,5}$($m^{0,5}$)	Q (m^3/s)
0,5	1,83	101,016	0,62666088	3,16513879
1	3,66	202,032	0,80414122	8,123113
1,5	5,49	303,048	0,90792308	13,7572137
1,534	5,61444	309,917088	0,91350353	14,1555177

Après le passage de la pente à 0,00250, la profondeur normale h_0=1,534 m >h_{cr}=1,15 m et l'écoulement est fluvial.

Au niveau de la section 1 :

$$\omega_1 = bh_1 = 3{,}66x1{,}53 = 5{,}60\,m^2\,;\chi_1 = b + 2h_1 = 3{,}66 + 2x1{,}53 = 6{,}72\,m;$$

$$R_1 = \omega_1/\chi_1 = 5{,}60/6{,}72 = 0{,}83\,m$$

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{14{,}15}{5{,}60} = 2{,}526\,m/s$$

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6} \Rightarrow n = \frac{1}{C}R^{1/6} = \frac{1}{55{,}2}(0{,}57)^{1/6} = 0{,}01650$$

Au niveau de la section 2 :

$$\omega_2 = bh_2 = 3{,}66x0{,}838 = 3{,}067\,m^2\,;\chi_2 = b + 2h_2 = 3{,}66 + 2x0{,}838 = 5{,}336\,m;$$

$$R_2 = \omega_2/\chi_2 = 3{,}067/5{,}336 = 0{,}57\,m$$

$$v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{14{,}15}{3{,}067} = 4{,}61\,m/s$$

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6} \Rightarrow n = \frac{1}{C}R^{1/6} = \frac{1}{55{,}2}(0{,}57)^{1/6} = 0{,}01650$$

Ainsi, le rayon hydraulique moyen et la section moyenne entre les deux sections sont : et

$R_m = \frac{R_1 + R2}{2} = \frac{0{,}83 + 0{,}57}{2} = 0{,}70\,m$, alors pour un écoulement non uniforme et Avec

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{5{,}60 + 3{,}067}{2} = 4{,}33\,m^2$$

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2{,}526 + 4{,}61}{2} = 3{,}568 \approx 3{,}57\,m/s$$

$$L = \frac{(h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g}) - (h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i - i_0)} = \frac{(1{,}53 + \frac{2{,}526^2}{19{,}62})\text{ - }(0{,}838 + \frac{4{,}61^2}{19{,}62})}{(0{,}0225\text{ - }(\frac{n.v_m}{(R_m)^{2/3}})^2)} = \frac{(1{,}53\text{ - }0{,}838) + (0{,}325 - 1{,}083)}{(0{,}0225 - (\frac{0{,}01650x3{,}568}{0{,}70^{2/3}})^2)}$$

$L = \frac{(1{,}53\text{ - }0{,}838) + (0{,}325 - 1{,}083)}{(0{,}0225 - 0{,}00558)} = \frac{(1{,}53\text{ - }0{,}838) + (0{,}325 - 1{,}083)}{0{,}0169} =$ à continuer

Exercice n° :14

Un canal rectangulaire (n=0,013) a 1,83 m de large et transporte 1,87 m^3/s d'eau. En une certaine section F, la profondeur est de 0,975 m. Si la pente du lit du canal est constante et égale à 0,000400, calculer à quelle distance de F la profondeur est de 0,823 m (employer un tronçon).

Solution

Supposons que a profondeur en question se trouve en amont de F

Calcul des paramètres des sections liquides et les vitesses d'écoulement au niveau des deux sections

Au niveau de la section 1 :

$\omega_1 = bh_1 = 1{,}83.0{,}823 = 1{,}506\,m^2$; $\chi_1 = b + 2h_1 = 1{,}83 + 2.0{,}823 = 3{,}476\,m$;

$R_1 = \omega_1/\chi_1 = 1{,}506/3{,}476 = 0{,}433\,m$

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{1{,}87}{1{,}056} = 1{,}24\,m/s$$

Au niveau de la section F :

$\omega_F = bh_1 = 1{,}83.0{,}975 = 1{,}784\,m^2$; $\chi_F = b + 2h_F = 1{,}83 + 2.0{,}975 = 3{,}78\,m$;

$R_F = \omega_F/\chi_F = 1{,}784/3{,}78 = 0{,}472\,m$

$$v_F = \frac{Q}{\omega_F} = \frac{1{,}87}{1{,}784} = 1{,}05\,m/s$$

Ainsi, la vitesse moyenne et le rayon hydraulique moyen des deux sections sont : $v_m = \frac{v_1 + v_F}{2} = \frac{1{,}24 + 1{,}05}{2} = 1{,}145\,m/s$ et $R_m = \frac{R_1 + R_F}{2} = \frac{0{,}433 + 0{,}472}{2} = 0{,}4525\,m$, alors pour un écoulement non uniforme et Avec $i = (\frac{n.v_m}{(R_m)^{2/3}})^2$.

$$L = \frac{(h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g}) - (h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i - i_0)} = \frac{(0{,}823 + \frac{1{,}506^2}{19{,}62}) - (0{,}975 + \frac{1{,}145^2}{19{,}62})}{((\frac{0{,}013.1{,}145}{(0{,}4525)^{2/3}})^2 - 0{,}0004)} = 547\,m$$

Exercice n° :15

Un canal rectangulaire, de 12,2 m de large transporte 25,47 m^3/s d'eau. La pente du canal est de 0,00283. À la section 1, la profondeur est de 1,37 m et à la section 2, 92 m plus bas, la profondeur est de 1,52 m.

Quel est le facteur de rugosité n ?

Solution

Au niveau de la section 1 :

$\omega_1 = bh_1 = 12{,}2.1{,}37 = 16{,}71\,m^2$; $\chi_1 = b + 2h_1 = 12{,}2 + 2.1{,}37 = 14{,}94\,m$; $R_1 = \omega_1/\chi_1 = 16{,}71/14{,}94 = 1{,}118\,m$

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{25{,}47}{16{,}71} = 1{,}52\,m/s$$

Au niveau de la section 2 :

$\omega_2 = bh_2 = 12{,}2.1{,}52 = 18{,}54\,m^2$; $\chi_2 = b + 2h_2 = 12{,}2 + 2.1{,}52 = 15{,}24\,m$; $R_2 = \omega_2/\chi_2 = 18{,}54/15{,}24 = 1{,}217\,m$

$$v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{25{,}47}{18{,}54} = 1{,}37\,m/s$$

Ainsi, la vitesse moyenne et le rayon hydraulique moyen des deux sections sont : $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1{,}37 + 1{,}52}{2} = 1{,}445\,m/s$ et $R_m = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{1{,}217 + 1{,}118}{2} = 1{,}168\,m$, alors pour un écoulement non uniforme et avec $i = (\frac{n.v_m}{(R_m)^{2/3}})^2$.

$$L=\frac{(h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g})-(h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i-i_0)}\Rightarrow 92=\frac{(1{,}37+\frac{1{,}37^2}{19{,}62})-(1{,}52+\frac{1{,}52^2}{19{,}62})}{((\frac{n.1{,}445}{(1{,}168)^{2/3}})^2-0{,}0004)}\Rightarrow n=0{,}0291.$$

Exercice n° : 16

Un canal rectangulaire de 6,1 m de large a une pente de 1 m par 1000 m. La profondeur à la section 1 est de 2,59 m et à la section 2, 610 m plus bas, elle est de 3,13 m. Si n=0,011, calculer le débit probable.

Solution

Supposons que le niveau de référence passe par le fond de la section 2,

L'énergie en 1 : $E_1=z_1+h_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=\frac{610}{1000}+2{,}59+\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}$

L'énergie en 2 : $E_2=z_2+h_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}=0+3{,}13+\frac{\alpha v_2^2}{19{,}62}$

La chute de la courbe de l'énergie $=E_1-E_2$. Puisque cette valeur est inconnue, on va faire une hypothèse sur la pente de la courbe de l'énergie :

La pente hydraulique $i=\frac{\text{perte de charge}}{L}=\frac{(3{,}20-3{,}13)+(\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}-\frac{\alpha v_2^2}{19{,}62})}{610}$ (1)

Au niveau de la section 1 :

$\omega_1=bh_1=6{,}1.2{,}59=15{,}8\,m^2$; $\chi_1=b+2h_1=6{,}1+2.2{,}59=11{,}28\,m$; $R_1=\omega_1/\chi_1=15{,}8/11{,}28=1{,}40\,m$

Au niveau de la section 2 :

$\omega_2=bh_2=6{,}1.3{,}13=19{,}09\,m^2$; $\chi_2=b+2h_2=6{,}1+2.3{,}13=19{,}09\,m$; $R_2=\omega_2/\chi_2=19{,}09/12{,}36=1{,}54\,m$

Ainsi, $\omega_m=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\frac{15{,}8+19{,}09}{2}=17{,}445\,m^2$ et $R_m=\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{1{,}40+1{,}54}{2}=1{,}47\,m$.

On résout ce problème par approximation selon les étapes suivantes :

1- on pend une valeur quelconque de i

2- on calcule le débit $Q=\omega_m\frac{R_m^{2/3}i^{1/2}}{n}$

3- on calcule les vitesses

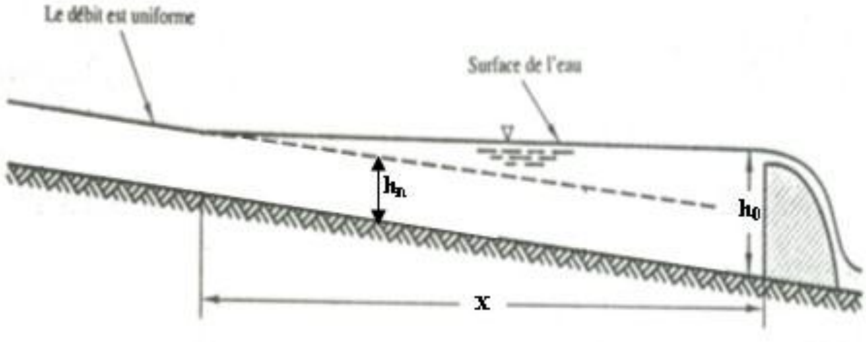
$$v_1=\frac{Q}{\omega_1}\text{ et } v_2=\frac{Q}{\omega_2}$$

4- on recalcule le gradient hydraulique i, s'il est égal à la valeur supposée en stop l'approximation si non on prend une autre valeur de i et on répète l'opération.

$$i=\frac{\text{perte de charge}}{L}=\frac{(3{,}20-3{,}13)+(\frac{\alpha v_1^2}{19{,}62}-\frac{\alpha v_2^2}{19{,}62})}{610}$$

Exercice n° :17

De l'eau coule à une profondeur normale dans un canal rectangulaire en ciment ayant une largeur de 1,20 m. Cette eau rencontre un obstacle (comme le montre la figure….) obligeant le niveau d'eau à s'élever au-dessus de la profondeur normale, à l'endroit de l'obstruction et à une certaine distance en amont. Le débit est de 126 m^3/s et la pente de 0,86 x 10^{-3}. Si la profondeur, juste au niveau de l'obstacle, (h_0), est égale à 4,55 m, à quelle distance x de l'obstacle la profondeur de l'eau en amont est-elle redevenue normale ?



Solution

La profondeur critique est donnée par la relation :

$$h_{cr} = \sqrt[3]{(Q/B)^2/g} = \sqrt[3]{(126/12)^2/9{,}81} = 2{,}24\,\text{m}$$

Calcul de la profondeur normale :

$$v = Q/\omega = (1/n)R^{2/3}i^{1/2}$$

$$126/(12xh) = (1/0{,}013)\left(\frac{12xh}{(12+2xh)}\right)^{2/3}(0{,}00086)^{1/2}$$

$$(2{,}256)\left(\frac{12xh}{(12+2xh)}\right)^{2/3} - \frac{10{,}5}{h} = 0$$

Résolvons cette équation par la méthode d'approximations successives, comme il est montré dans le tableau suivant:

h	(2,556(12h/(12h+2h))^(2/3))-(10,5/h)
0,500	-19,653
1,000	-8,464
1,500	-4,452
2,000	-2,294
2,500	-0,906
3,000	0,081
2,900	-0,093
2,950	-0,005

Le tableau fournit h_n=2,95 m

La profondeur normale h_n=2,95 m est supérieure à la profondeur critique h_{cr}=2,24 m. Alors l'écoulement est fluvial.

Le problème consiste à déterminer la longueur x pour laquelle la profondeur d'eau est égale 4,55 m. Pour le faire, à partir de h=2,95 m, on prend un intervalle de 0,10 m puis on calcule les distances entre les différentes sections.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus :

Tronçon	h (m)	K	Z	F	J	J_{moy}	a	x (m)
1	2,95	4290,36	0,9885	3,617	0,4365	0,4356	2,03	2430,74
	3,05	4502,00	1,0478	1,8786	0,43489			
2	3,05	4502,00	1,0478	1,8786	0,43489	0,4340	2,0076	571,93
	3,15	4716,02	1,0976	1,5336	0,43319			
3	3,15	4716,02	1,0976	1,5336	0,43319	0,4323	1,9865	273,37
	3,25	4932,30	1,14796	1,3376	0,4314			
4	3,25	4932,30	1,14796	1,3376	0,4314	0,4305	1,9666	293,38
	3,35	5150,77	1,1988	1,2016	0,4296			
5	3,35	5150,77	1,1988	1,2016	0,4296	0,4286	1,9480	249,97
	3,45	5371,34	1,25	1,098	0,4277			
6	3,45	5371,34	1,25	1,098	0,4277	0,4267	1,93	222,72
	3,55	5593,93	1,3020	1,0156	0,4258			
7	3,55	5593,93	1,3020	1,0156	0,4258	0,4248	1,9135	204,06
	3,65	5818,46	1,3542	0,9470	0,4238			
8	3,65	5818,46	1,3542	0,9470	0,4238	0,4228	1,8977	190,50
	3,75	6044,88	1,4069	0,8888	0,4218			
9	3,75	6044,88	1,4069	0,8888	0,4218	0,4208	1,8826	180,22
	3,85	6273,10	1,46	0,8383	0,4198			
10	3,85	6273,10	1,46	0,8383	0,4198	0,4187	1,8683	172,18
	3,95	6503,07	1,5136	0,7941	0,4177			
11	3,95	6503,07	1,5136	0,7941	0,4177	0,4167	1,8547	165,72
	4,05	6734,72	1,5675	0,7547	0,4157			
12	4,05	6734,72	1,5675	0,7547	0,4157	0,4146	1,8418	160,44
	4,15	6968	1,6218	0,7195	0,6136			
13	4,15	6968	1,6218	0,7195	0,6136	0,4125	1,295	156,04
	4,25	7202,85	1,6764	0,6877	0,4114			
14	4,25	7202,85	1,6764	0,6877	0,4114	0,4104	1,8177	152,32
	4,35	7439,22	1,7314	0,6588	0,4093			
15	4,35	7439,22	1,7314	0,6588	0,4093	0,4082	1,8065	149,15
	4,45	7677,05	1,7868	0,6323	0,4072			
16	4,45	7677,05	1,7868	0,6323	0,4072	0,4061	1,7958	146,41
	4,55	7916,31	1,8425	0,6080	0,4050			

La somme des valeurs des distances entre les intervalles donne la distance recherchée.

Donc, $x = \sum x = 5719{,}41\,\text{m}$

CHAPITRE V

L'écoulement rapidement varié

« Ressaut Hydraulique »

5-1 Introduction

L'écoulement rapidement varié se manifeste lorsque le paramètre cinétique P_c=1 où la variation de la profondeur le long de l'écoulement donnée par l'équation de l'écoulement graduellement varié tend vers l'infini (∞).

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i[1-(\frac{K_0}{K})^2]}{(1-P_c)} \qquad (4\text{-}3)$$

Donc, les caractéristiques hydrauliques changent brusquement d'une section à une autre sur un petit tronçon, autrement dit la fonction h=f(x) subit la rupture de la continuité.

Si le courant passe de l'écoulement fluvial, Fr<1, à l'écoulement torrentiel, Fr>1, il apparaît un phénomène d'une brusque diminution de la profondeur, comme par exemple : le chute brusque (cascade).

Si le courant passe de l'écoulement torrentiel, Fr>1, à l'écoulement fluvial, Fr<1, il apparaît un accroissement rapide de la profondeur, ce qu'on appelle le ressaut hydraulique.
Donc, dans ce chapitre on s'intéresse seulement à l'étude du ressaut hydraulique.

5-2 Définition du ressaut hydraulique

a) **Définition n° :1 :** Le ressaut hydraulique est défini comme l'augmentation brusque de la hauteur d'eau sur une très courte distance.
b) **Définition n° :2 :** le ressaut hydraulique est le passage d'un écoulement torrentiel, (c'est-à-dire le nombre de Froude F_r>1), en amont à un écoulement fluvial, (c'est-à-dire le nombre de Froude F_r<1), en aval.

Le phénomène du ressaut hydraulique est observé dans plusieurs ouvrages hydrotechniques, en particulier dans les biefs en aval des déversoirs, les vannes etc.

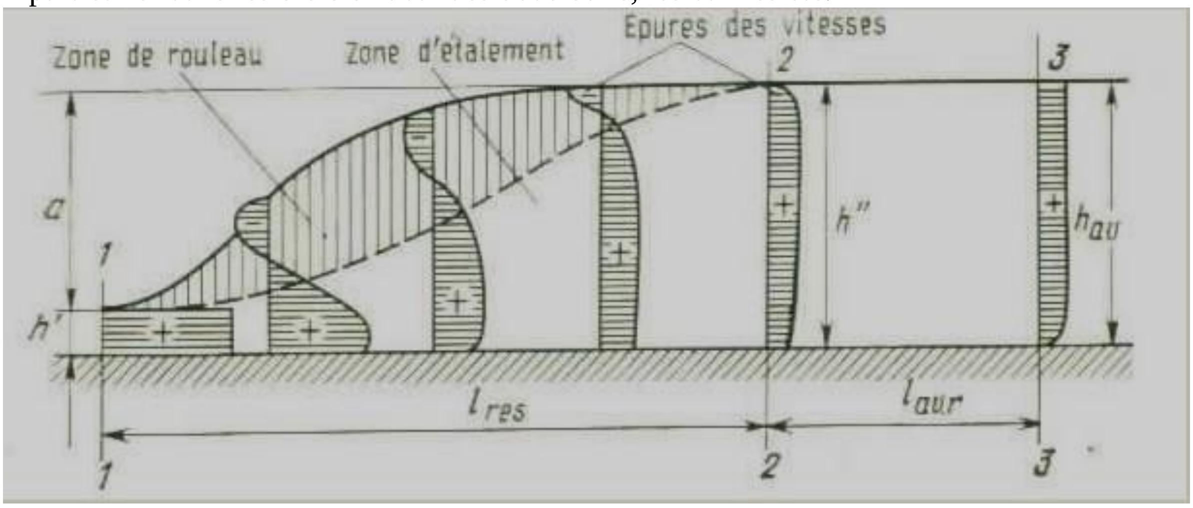


Fig. 5-1 : Ressaut hydraulique

Dans la zone d'étalement, le courant n'est pas graduellement varié et la répartition de la pression dans les sections liquides diffère de celle hydrostatique. Les épures de répartition en verticale des vitesses à l'intérieur du ressaut sont conventionnellement représentées sur la figure 4-1.
On prend la section (1-1) où la répartition des vitesses correspondant à l'écoulement graduellement varié (régime torrentiel) et la section (2-2) où elle se termine l'accroissement des profondeurs (régime fluvial).
- Les profondeurs dans les sections (1-1) et (2-2) limitent le ressaut sont désignées par h' et h'' et s'appellent profondeurs conjuguées.

- La hauteur $a = h'' - h'$ est appelée hauteur du ressaut.
- La distance entre les sections (1-1) et (2-2) est appelée longueur du ressaut.
- L'épure des vitesses se transforme en épure de l'écoulement uniforme et les pulsations s'amortissent jusqu'aux valeurs correspondant à cet écoulement sur la longueur d'une zone en aval du ressaut $L_{av.r}$.

5-3 Les différents types de ressaut

On distingue différentes formes du ressaut dépendant de l'exhaussement plus ou moins important de la surface d'eau et par conséquent on peut distinguer les types suivants :

5-3-1 Ressaut parfait

Ce ressaut s'observe dans le lit à pente uniforme et à rugosité ordinaire. Le ressaut parfait à une hauteur $a = (h'' - h') > h'$. Dans la structure de ce ressaut, on distingue clairement les zones d'étalement et superficielle.

5-3-2 Ressaut ondulé ou ressaut ondé

Ce ressaut à hauteur a<h' n'a pas de rouleau superficiel et le ressaut se présente sous la forme d'une série d'ondes. Progressivement amorties.

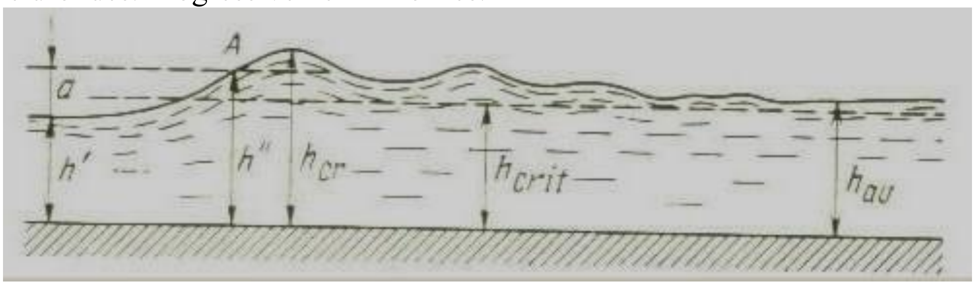


Fig. 5-2 : Ressaut ondulé

5-3-3 Ressaut à remous

Ce type de ressaut surgit dans un lit qui comporte une paroi ou un gradin qui influe sur le ressaut. Le ressaut à remous a une zone superficielle développée. Il est caractérisé par l'étranglement du ressaut en longueur et la variation du sens de mouvement du jet de transit. Un tel ressaut est observé dans un bassin de dissipation ou devant un contre - barrage.

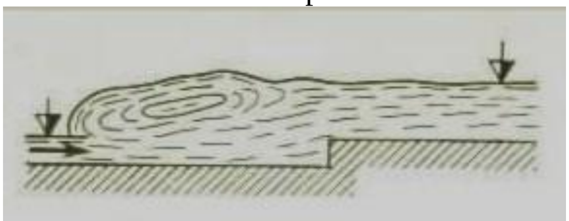


Fig. 5-3 : Ressaut à remous

5-3-4 Ressaut noyé

Ce type de ressaut surgit, par exemple, en écoulement par-dessous de la vanne à ressaut noyé et a une zone superficielle développée.

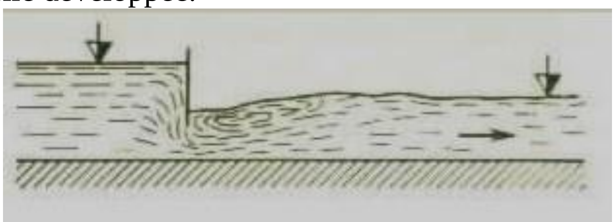


Fig. 5-4 : Ressaut noyé

5-3-5 Ressaut superficiel

Ce type de ressaut a un rouleau de fond développé. Ce ressaut est caractérisé par une répartition particulière des vitesses en section différente de celle du ressaut parfait.

Le ressaut superficiel est observé lorsque la nappe s'écoule d'un barrage muni d'un gradin spécial.

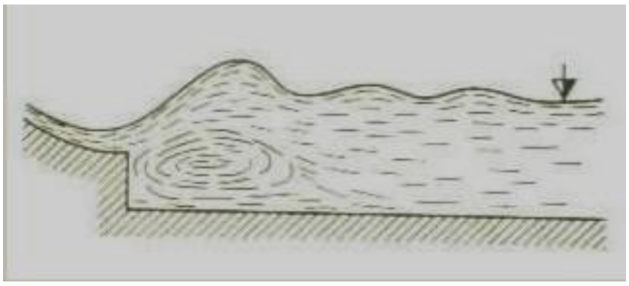


Fig. 5-5 : Ressaut superficiel

5-4 Equation fondamentale du ressaut parfait

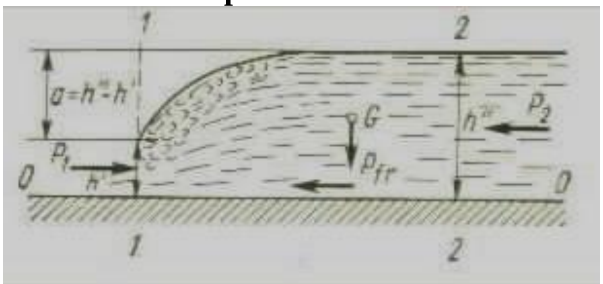


Fig. 5-6 : Ressaut parfait

- Il se manifeste par une brusque surélévation sur une très courte distance
- Il occupe une position fixe, onde stationnaire
- Dans un canal si l'écoulement est permanent, il est accompagné de mouvement très turbulent avec des installations à la surface ondulation et entraînement d'air.
- Il provoque une dissipation importante de l'énergie mécanique $\Delta H_{res} = H_1 - H_2$
- Les profondeurs h_2 et h_1 sont appelées profondeurs conjuguées, elles encadrent un ressaut, la hauteur d'un ressaut est donnée par la différence entre ces profondeurs conjuguées. $a = h'' - h'$

La théorie de ressaut a pour objet la détermination des relations entre les profondeurs conjuguées h_2 et h_1 dans un canal et un débit donné.

L'équation d'énergie ne sera pas d'une grande aide pour établir cette relation, la perte de charge est très importante et de plus on ne l'a connue pas, par contre l'équation de la quantité de mouvement sera très intéressante.

On considère un canal trapézoïdal avec ω_1 et ω_2 situe de part et d'autre du ressaut est suffisamment éloigné, puis on peut considérer la pression hydrostatique mais en toute fois assez rapproche pour pouvoir négliger l'effet de frottement, $\vec{F}_f = \vec{0}$,.

L'équation de la quantité de mouvement permet encore que la quantité de mouvement sortant à travers la surface d'un volume fluide est équivalente à la somme des forces extérieures qui lui appliquées.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta m\vec{v} = \sum \vec{F}_{ext}\Delta t$$

Examinons un ressaut parfait dans un lit prismatique à section transversale de forme donnée en le limitant par les sections 1-1 à la profondeur h_1 et 2-2 à la profondeur h_2.

Le régime est permanent donc Δt=cst.

La pente est assez faible α≈0

Donc, la projection du poids, G, sur la direction du mouvement, OO, est nulle, donc Gsinα=0

La variation de la quantité de mouvement par unité de temps est égale à la somme des forces extérieures

$\sum \vec{F}_{ext} = \Delta m\vec{v}$

$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{G} + \vec{F}_f = \Delta m\vec{\gamma}$

Nous allons projeter la quantité de mouvement et toutes les forces sur la direction du mouvement O-O.

$\sum F_{ext/x} = F_{p1} - F_{p2} + G\sin\alpha + F_f = F_{p1} - F_{p2}$

$\Delta m\vec{v}/x = \rho\alpha'_2 v_2^2 \omega_2 - \rho\alpha'_1 v_1^2 \omega_1$

En tenant compte de l'équation de continuité, $Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2$, la dernière équation s'écrit :

$\Delta m\vec{v}/x = \rho\alpha'_2 v_2^2 \omega_2 - \rho\alpha'_1 v_1^2 \omega_1 = \rho Q(\alpha'_2 v_2 - \alpha'_1 v_1)$

où α'_1 et α'_2 sont les coefficients de Boussinesq respectivement dans les sections 1-1 et 2-2 ; ω_1 et ω_2 , les aires respectivement dans les sections liquides 1-1 et 2-2 ; Q, le débit ; v_1 et v_2, les vitesses moyennes dans les sections liquides 1-1 et 2-2.

Donc, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$F_{p1} - F_{p2} = \rho Q(\alpha'_2 v_2 - \alpha'_1 v_1) \qquad (5.1)$$

α' est le coefficient de la quantité de mouvement ou coefficient Boussinesq

C'est le rapport entre la quantité de mouvement ponctuelle et celle moyenne.

$\alpha' = \dfrac{QM}{QM_v} = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{u}{v}\right)^2 d\omega$

$\alpha' = 1 + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 d\omega$, il est pris quantitativement $\alpha' = 1{,}02$ à $1{,}03$.

Les forces des pressions hydrostatiques aux sections 1-1 et 2-2 sont données par les relations suivantes :

$F_{p1} = \rho g h'_{cg} \omega_1$

$F_{p2} = \rho g h''_{cg} \omega_2$

où h'_{cg} et h''_{cg} sont les profondeurs d'immersion sous le niveau du liquide des centre de gravité des aires ω_1 et ω_2 des sections liquides.

Substituons les valeurs de $F_{p1} = \rho g h'_{cg} \omega_1$ et $F_{p2} = \rho g h''_{cg} \omega_2$ dans l'équation (5.1) nous aurons :

$\rho g h'_{cg} \omega_1 - \rho g h''_{cg} \omega_2 = \rho Q(\alpha'_2 v_2 - \alpha'_1 v_1)$; en adoptant $\alpha'_1 \approx \alpha'_2 \approx \alpha'$

$\rho g h'_{cg} \omega_1 - \rho g h''_{cg} \omega_2 = \rho Q(\alpha' v_2 - \alpha' v_1)$

$$h'_{cg}\omega_1 + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega_1} = h''_{cg}\omega_2 + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega_2} \qquad (5.2)$$

Cette dernière équation est appelée équation fondamentale du ressaut parfait. Cette équation permet de déterminer une profondeur conjuguée du ressaut lorsqu'on connaît l'autre profondeur. Dans les calculs pratiques, on peut admettre que le coefficient de Bousinesq est $\alpha' \approx 1{,}02 \approx 1$.

La fonction $F(h) = h'_{cg}\omega + \dfrac{\alpha' Q^2}{g\omega}$ s'appelle impulsion totale ou bien fonction du ressaut.

5-5 Fonction du ressaut et calcul des profondeurs conjuguées

Afin de mettre un éclaircissement sur la relation qui existe entre l'une des deux profondeurs conjuguées et le débit et l'autre profondeur, on prend, comme exemple, le cas d'un canal rectangulaire de largeur B et de profondeur h.

$\omega = hB$; $h_{cg} = \dfrac{h}{2}$; $q = \dfrac{Q}{B}$.

La fonction du ressaut devient : $F(h) = h'_{cg}\omega + \dfrac{\alpha' Q^2}{g\omega} = \dfrac{h}{2}Bh + \dfrac{\alpha' q^2 B^2}{ghB} = \dfrac{Bh^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2 B}{gh}$

$F(h) = \dfrac{Bh^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2 B}{gh}$ posons $F = \dfrac{F(h)}{B} = \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2}{gh}$, si F_1=F_2 le ressaut existe.

- Si le débit, Q, et l'une des profondeurs du ressaut h' sont connus, on peut déterminer l'autre profondeur h''.

On prend, par exemple, B=1m (canal rectangulaire)

On détermine $\begin{cases} F_1 = \dfrac{h'^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2}{gh'} \\ F_2 = \dfrac{h''^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2}{gh''} \end{cases}$

Le ressaut existe si $F_1 = F_2 \Rightarrow \dfrac{h'^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2}{gh'} = \dfrac{h''^2}{2} + \dfrac{\alpha' q^2}{gh''} \Rightarrow h'^2 - h''^2 = \dfrac{2\alpha' q^2}{g}\left(\dfrac{1}{h''} - \dfrac{1}{h'}\right)$

$\Rightarrow (h' - h'')(h' + h'') = \dfrac{2\alpha' q^2}{g}\dfrac{(h' - h'')}{h' h''} \Rightarrow (h' + h'') = \dfrac{2\alpha' q^2}{gh' h''}$

$$(h' + h'') = \frac{2\alpha' q^2}{gh' h''} \qquad (5.3)$$

On peut écrire l'équation (4-3) sous la forme suivante : $h''^2 + h'' h' - \dfrac{2\alpha' q^2}{gh'} = 0$ c'est une équation de second ordre ; la résolution de cette dernière équation se fait comme suit :

$\Delta = B^2 - 4AC = h'^2 + \dfrac{8\alpha' q^2}{gh'}$

$$h''_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-h' \pm \sqrt{h'^2 + \dfrac{8\alpha' q^2}{gh'}}}{2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h'}{2}\right)^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}}$$

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h'}{2}\right)^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} \qquad (5.4)$$

Dans le cas d'un régime critique $\dfrac{Q^2 B}{g\omega^3} = 1$ et pour un canal rectangulaire la profondeur critique est donnée par la relation : $h^3_{cr} = \dfrac{q^2}{g}$

Donc, dans certains cas on donne la profondeur critique, h_{cr}, au lieu du débit Q.

5-6 Les profondeurs conjuguées et le nombre de Froude

Pour trouver la relation qui relie les profondeurs conjuguées et le nombre de Froude, on écrit :

$$q = \frac{Q}{B} = v_1 h' = v_2 h'' \text{ car } Q = v_1 h' B = v_2 h'' B \text{ donc, } q^2 = v_1^2 h'^2 = v_2^2 h''^2$$

la deuxième profondeur conjuguée est donnée par la relation

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha'(v_1 h')^2}{gh'}} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' v_1^2 h'}{g}}$$

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{\frac{h'^2}{4} + \frac{2\alpha' v_1^2 h'}{g}} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 (1 + \frac{8\alpha' v_1^2}{gh'})} = \frac{-h'}{2} \pm \frac{h'}{2}\sqrt{1 + \frac{8\alpha' v_1^2}{gh'}}$$

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 (1 + \frac{8\alpha' v_1^2}{gh'})} \Rightarrow h''_{1,2} = h'(\frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8\alpha' v_1^2}{gh'}})$$

Le nombre de Froude, $F_r = \frac{v_1}{\sqrt{gh}} \Rightarrow F_r^2 = \frac{v_1^2}{gh}$ d'où $h''_{1,2} = h'(\frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2})$

$$\begin{cases} h''_1 = h'(\frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} - \frac{1}{2}) = \frac{h'}{2}(\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} - 1) \\ h''_2 = h'(-\frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} - \frac{1}{2}) = -\frac{h'}{2}(\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} + 1) \end{cases}$$ on peut écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{h''}{h'} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} - 1) \\ \frac{h''}{h'} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\alpha' F_r^2} + 1) \end{cases}$$ Ces équations s'appellent équations de Belanger

Pour un ressaut hydraulique dans un canal à fond incliné, la force de pesanteur ne doit pas être négligée et dans ce cas le rapport des profondeurs conjuguées est donné par la relation :

$$\frac{h''}{h'} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8\alpha' \chi_{Rh} F_r^2} - 1)$$

$\chi_{Rh} = 10^{0,027}\alpha^{\circ}$ α en degré

χ_{Rh} : Coefficient empirique de Rajaratnam

La fonction du ressaut se conserve de part et d'autre du ressaut, on trace la variation de cette fonction (sa courbe) pour un débit donné on fait varie h.

L'analyse de la fonction du ressaut $F(h) = h'_{cg}\omega + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega}$

$$h \to 0, \text{on obteint } \frac{\alpha' Q^2}{g\omega} \to 0, h_{cg}\omega \to \infty \text{ et } F(h) \to \infty$$

$$\text{à } h \to 0, \text{on obteint } \frac{\alpha' Q^2}{g\omega} \to 0, h_{cg}\omega \to \infty \text{ et } F(h) \to \infty$$

On constate que la fonction du ressaut F(h) croît tant à la diminution qu'a l'augmentation des profondeurs. Donc, à une certaine profondeur h, la fonction du ressaut F(h) doit avoir un minimum.

$$F(h) = h'_{cg}\omega + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega}$$

Pour trouver la valeur minimale de la fonction du ressaut F(h), on met la dérivé F'(h) égale à zéro puis en remplaçant la valeur obtenue de la profondeur, h, dans la fonction du ressaut.

$$\frac{d}{dh}(h'_{cg}\omega + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega}) = 0 \Rightarrow (\omega + \frac{d\omega}{dh}h'_{cg}) - \frac{\alpha' Q^2}{g\omega^2}\frac{d\omega}{dh} = 0$$

Nous avons que $\frac{d\omega}{dh}$=B d'où : $(\omega + Bh'_{cg}) - \frac{\alpha' Q^2}{g\omega^2}B = 0 \Rightarrow h'_{cg} = \frac{\alpha' Q^2}{g\omega^2} - \frac{\omega}{B}$ on substitue la valeur de $h'_{cg} = \frac{\alpha' Q^2}{g\omega^2} - \frac{\omega}{B}$ dans la fonction du ressaut, nous obtenons la valeur minimale de la fonction du ressaut:

$$F(h) = h'_{cg}\omega + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega} = (\frac{\alpha' Q^2}{g\omega^2} - \frac{\omega}{B})\omega + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega} = \frac{\alpha' Q^2}{g\omega} - \frac{\omega^2}{B} + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega}$$

$$F(h) = \frac{2\alpha' Q^2}{g\omega} - \frac{\omega^2}{B} \Rightarrow \frac{2\alpha' Q^2 B}{g\omega^3} - 1$$

Nous avons prouvé qu'au minimum de la fonction du ressaut F(h)

$$\frac{2\alpha' Q^2}{g\omega^3} = 1 \qquad (5.5)$$

En comparant l'équation (4-5) avec l'équation de l'écoulement critique, on voit qu'elles sont absolument identique sous condition que $2\alpha' = \alpha$.

Ainsi, on peut faire la conclusion que la fonction du ressaut F(h) à un minimum à la profondeur critique h_{cr}, c'est-à-dire au moment où le paramètre cinétique P_{cin}=1.

La fonction du ressaut peut être représentée graphiquement.

5-7 Pertes d'énergie dans le ressaut

Le ressaut hydraulique provoque une importante dissipation de l'énergie mécanique ou bien de l'énergie spécifique du courant ; pour définir les pertes de charge, on doit examiner le courant dans un canal prismatique à pente du fond i=0. On établit l'équation de Bernoulli pour les sections 1-1 et 2-2 par rapport au plan de comparaison oo coïncidant avec le fond du canal.

$$h' + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = h'' + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{p.c}$$

Où $h_{p.c}$ sont les pertes de charge dans le ressaut entre les sections 1-1 et 2-2 ; $\alpha_1$et α_2 sont les coefficients de Coriolis.

$$h_{p.c} = (h' - h'') + (\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g})$$

La dernière formule permet de déterminer les pertes d'énergie dans le ressaut dans un lit prismatique de forme arbitraire de la section transversale, si on connaît h', h'', $v_1 = Q/\omega_1$, $v_2 = Q/\omega_2$, $\alpha_1$et α_2.

- Pour un lit rectangulaire $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$q = \frac{Q}{B}$ et $\omega = Bh$

$$h_{p.c} = (h' - h'') + (\frac{\alpha Q^2}{2g\omega_1^2} - \frac{\alpha Q^2}{2g\omega_2^2}) = (h' - h'') + (\frac{\alpha Q^2}{2gh'^2B^2} - \frac{\alpha Q^2}{2gh''^2B^2})$$

$$h_{p.c} = (h' - h'') + \frac{\alpha q^2}{2g}(\frac{1}{h'^2} - \frac{1}{h''^2}) \qquad (5.6)$$

De l'équation (5-3) $\Rightarrow \frac{q^2}{2g} = \frac{(h' + h'')h'h''}{4\alpha'}$

$$h_{p.c} = (h' - h'') + \frac{\alpha(h' + h'')h'h''}{4\alpha'}(\frac{1}{h'^2} - \frac{1}{h''^2}) = (h' - h'') + \frac{\alpha}{4\alpha'}\frac{(h'' - h')(h'' + h')(h' + h'')}{h'h''}$$

$$h_{p.c} = (h' - h'') + \frac{\alpha}{4\alpha'}\frac{(h'' - h')(h'' + h')(h' + h'')}{h'h''}$$

$$h_{p.c} = (h' - h'') + \frac{\alpha}{4\alpha'}\frac{(h'' - h')(h'' + h')(h' + h'')}{h'h''} = (h'' - h')(\frac{\alpha}{4\alpha'}\frac{(h'' + h')(h' + h'')}{h'h''} - 1)$$

$h_{p.c} = (h'' - h')(\frac{\alpha}{4\alpha'}\frac{(h'' + h')(h' + h'')}{h'h''} - 1)$ si $\alpha = \alpha'$ on aura :

$h_{p.c} = (h'' - h')(\frac{1}{4}\frac{(h''^2 - 2h'h'' + h'^2)}{h'h''}) = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''}$ donc :

$$h_{p.c} = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''} \qquad (5.7)$$

5-8 Rendement du ressaut

On définit le rendement comme le ratio de l'énergie potentielle reçue à l'énergie cinétique perdue, donc :

$$\eta = \frac{(h'' - h')}{\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}} = \frac{4h'h''}{(h' + h'')^2} \qquad (5.8)$$

Pour une forte différence de niveau, η est faible ; pour une faible différence η s'approche de l'unité.

5-9 Longueur du ressaut

Pour le calcul du bief d'aval des ouvrages hydrotechniques, on doit connaître non seulement les profondeurs conjuguées du ressaut parfait, mais également sa longueur $L_{res.}$

La longueur du ressaut c'est la distance qui sépare les deux (2) sections.

Le problème de détermination de la longueur du ressaut parfait n'est pas encore résolu théoriquement. L'étude de la longueur du ressaut a été plutôt expérimentale.

La longueur du ressaut, L_{res}, dans un canal rectangulaire peut être déterminée à l'aide des formules suivantes :

Formule de Pavlovski : $L_{res} = 2{,}5(1{,}9h'' - h')$ (5.9)

Formule de Tchertoussov : $L_{res} = 10{,}3h'(\sqrt{P'_{cin}} - 1)^{0{,}81}$ (5.10)

Formule de Pikalov : $L_{res} = 4h^{'}\sqrt{1+2P^{'}_{cin}}$ (5.11)

Formule d'Aîvasian : $L_{res} = (3 + \frac{19}{\sqrt{P^{'}_{cin}}} - \frac{30}{\sqrt{P^{'}_{cin}}})(h^{''} - h^{'})$ $5 < \frac{L_{res}}{h^{''} - h^{'}} < 7$ (5.12)

$L_{res} \approx 6{,}1h^{''}$ (5.13) Pour $4{,}5 < Fr1 < 13$ en dehors de cette gamme la longueur du ressaut se sera très petite.

- Les formules (5.9) et (5.11) peuvent être appliquées pour $P^{'}_{cin} > 10$
- La formule (5.12) est juste à $3 < P^{'}_{cin} < 400$

Outre la longueur du ressaut, il faut connaître la longueur de ***lazone aval du ressaut*** $L_{av.r}$ pour une conception rationnelle du bief d'aval des ouvrages hydrotechniques et la fixation du lit dans la zone transitoire où le courant torrentiel devient fluvial.
Pour déterminer $L_{av.r}$**M. Tchertoussov** propose la formule approximative suivante :

$$L_{av.r} = (2{,}5 \div 3)L_{res} \qquad (5.14)$$

Lorsqu'un régime passe du type torrentiel, Fr1>1, au type fluvial, Fr2<1, il se forme toujours un ressaut. Pour déterminer la position du ressaut, il faut tracer la ligne d'eau en amont est celle en aval. Le ressaut se placera au droit, où se trouve la section, dont les profondeurs sont conjuguées, $h^{'}$ et $h^{''}$ et liées par la relation de l'équation (5.4) $h^{''}_{1,2} = \frac{-h^{'}}{2} \pm \sqrt{(\frac{h^{'}}{2})^2 + \frac{2\alpha^{'} q^2}{gh^{'}}}$

Prenons le cas où l'emplacement du ressaut est contrôlé par la situation hydraulique aval. Si l'on fait monter le niveau aval, le ressaut se déplacera vers l'amont, si l'on fait baisser le niveau aval, il se déplacera vers l'aval.

5-10 Ressaut ondulé

Les études démontrent qu'à $P^{'}_{cin} < 3$ ou à $P^{''}_{cin} > 0{,}375$ le ressaut hydraulique ne comporte un rouleau superficiel bien prononcé. Dans ce cas, la hauteur du ressaut $a < h^{'}$; le ressaut se présente sous la forme d'une série d'ondes progressivement amorties et s'appelle ressaut ondulé ou ressaut - onde.

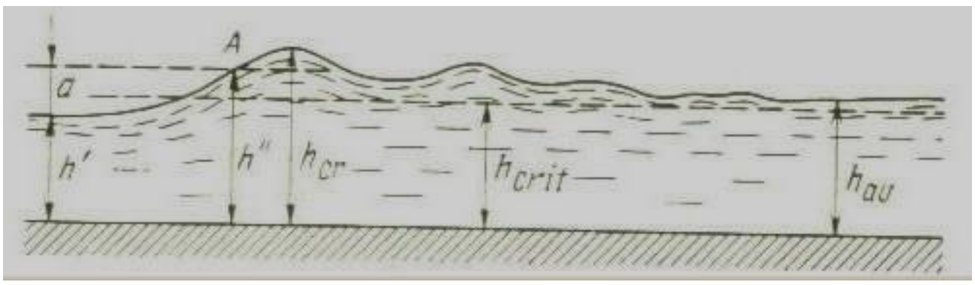


Fig.5-6 : Ressaut ondulé

Aux hauteurs relativement faibles du ressaut $a < h^{'}$ la résultante des forces de la pression hydrodynamique (P_1-P_2) devient comparable avec la force de frottement extérieure P_{fr} et c'est pourquoi il est impossible de négliger cette force à l'établissement de l'équation de la quantité de mouvement. Par suite, l'équation $\frac{h^{''}}{h^{'}} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8\alpha^{'}F_r^2} - 1)$ (5.15)

A l'établissement de laquelle la force P_{fr} n'a pas été prise en compte, n'est pas fortement applicable pour déterminer des profondeurs conjuguées du ressaut ondulé.

Pour les calculs pratiques ont doit connaître la profondeur maximale sous la crête $h_{crê}$ de la première demi - onde.

Les études ont démontré que cette profondeur dépasse de 16% celle h'' calculée à l'aide de la formule précédente, c'est-à-dire $h_{crê} = 1{,}16h''$

On en tenant compte de la première équation de Belanger ou bien de l'équation (5.15), on obtient :

$$h_{crê} = 0{,}58h'[\sqrt{1+8F_r^2} - 1] \qquad (5.16)$$

Cette dernière formule est juste à $1{,}5<F_r<3$.

A la variation de P'_{cin} dans la gamme $1 < P'_{cin} < 1{,}5$, le ressaut ondulé peut être examiné en tant qu'onde de déplacement arrêtée à faible hauteur $a = h'' - h'$

En substituant dans l'équation (5-2) la valeur de $h' = h'' - a$ et de

$P'_{cin} = \dfrac{\alpha' Q^2}{gb^2}\dfrac{1}{(h')^3} = \dfrac{\alpha' v_1^2}{g(h''-a)}$ on obtient à $\alpha' = 1$

$$h'' = 0{,}5(h''-a)[\sqrt{1+8\frac{v_1^2}{g(h''-a)}} - 1] \qquad (5.17)$$

À la hauteur a de l'onde, très faible par rapport à h'', nous avons :

$$h'' = 0{,}5h''[\sqrt{1+8\frac{v_1^2}{gh''}} - 1] \qquad (5.18)$$

d'où, il découle

$v_1 = \sqrt{gh''}$ $\qquad v_1^2/ah'' = h''/h' = P'_{cin}$

Par conséquent $h'' = h'P'_{cin}$ $\qquad$ (5.19)

Comme dans un lit rectangulaire les profondeurs conjuguées et les paramètres cinétiques sont liés par la relation suivante :

$P'_{cin}/P''_{cin} = (h''/h')^3$ en remplaçant $P'_{cin} = h''/h'$ dans cette dernière relation on obtient :

$$h' = h''\sqrt{P''_{cin}} \quad (5.20)$$

Les formules (4.18) et (4.19) sont à appliquer au calcul des profondeurs conjuguées du ressaut ondulé à $P'_{cin} < 1{,}5$.

Pour déterminer la longueur du ressaut ondulé en première approximation, on peut conseiller l'utilisation de la formule empirique de G. Dmitriev

$$L_{res} = 10{,}6h'(P'_{cin} - 1) \qquad (5.21)$$

5-11 Transitions

- Une transition, qui est le bref passage d'un écoulement uniforme à un autre, représente le cas général d'un écoulement rapidement varié sur une très courte distance dans un canal non prismatique où la section est variable. L'écoulement ne traverse pas forcément une section où la profondeur est critique.
- On rencontre des transitions si la section du canal change brusquement :
    1- verticalement : comme décrochement d'un seuil positif ou négatif,
    2- horizontalement : comme élargissement ou rétrécissement de la larguer de la section,
    3- verticalement et horizontalement ensemble.
- Une transition peut servir à déterminer le point de contrôle qui est à l'origine d'un écoulement graduellement varié et permet donc de calculer la surface d'eau.

Si la transition est courte, suffisamment progressive et raisonnablement profilée, la perte de charge, $h_{p.c}$, qui en résulte peut souvent être négligée.

5-11 Conclusion

Par le biais de ce chapitre qui traite le ressaut hydraulique, nous avons donné un aperçu sur celui-ci, quelques types de ressaut, l'équation fondamentale du ressaut parfait, la relation de calcul de l'une des profondeurs conjuguées en connaissant l'autre profondeur et leurs relations avec le nombre de Froude, puis nous nous sommes s'étalait sur la perte d'énergie dans le ressaut et son rendement, par la suite nous avons donné quelques relations qui nous permettent de calculer la longueur du ressaut et la longueur en aval du ressaut et enfin nous avons terminé en examinant le cas du ressaut ondulé et la transition.

En général, nous avons mettre en évidence, dans ce petit bref chapitre, le cas du ressaut classique. La question à poser est la suivante : quelles seront les relations démontrées précédemment si le ressaut n'est pas classique à titre d'exemple s'il y a une singularité comme une marche négative ou positive.

Chapitre V: L'écoulement rapidement varié (ressaut hydraulique)

Exercice n° :1

Un canal rectangulaire, de 6,1 m de large, transporte 11,3 m^3/s d'eau et les déverse sur un tablier de 6,1 m de large sans pente avec une vitesse moyenne de 6,1 m/s.
a) Quelle est la hauteur du ressaut ?
b) Quelle est l'énergie absorbée (perdue) par le ressaut ?

Solution

a- Calcul de la hauteur du ressaut :

La vitesse moyenne d'écoulement au niveau de la première section $v_1 = 6{,}1\,m/s$,

Le débit spécifique q=11,3/6,1=1,85 $m^3/s/m$ de large et $h_1^{'} = q/v_1 = 1{,}85/6{,}1 = 0{,}303\,m$. Alors

$$h_{1,2}^{''} = \frac{-h^{'}}{2} \pm \sqrt{(\frac{h^{'}}{2})^2 + \frac{2\alpha^{'}q^2}{gh^{'}}}$$

$$h_1^{''} = \frac{-h^{'}}{2} + \sqrt{(\frac{h^{'}}{2})^2 + \frac{2\alpha^{'}q^2}{gh^{'}}} = -\frac{0{,}303}{2} - \sqrt{(\frac{0{,}303}{2})^2 + \frac{2x1{,}85^2}{9{,}81x0{,}303}} = -1{,}676\,m$$

La valeur négative étant superflue.

$$h_2^{''} = \frac{-h^{'}}{2} + \sqrt{(\frac{h^{'}}{2})^2 + \frac{2\alpha^{'}q^2}{gh^{'}}} = -\frac{0{,}303}{2} + \sqrt{(\frac{0{,}303}{2})^2 + \frac{2x1{,}85^2}{9{,}81x0{,}303}} = 1{,}37\,m$$

La deuxième profondeur du ressaut est $h^{''} = 1{,}37\,m$.

Et la hauteur du ressaut est $a = h_2^{''} - h_1^{'} = 1{,}37 - 0{,}303 = 1{,}07\,m$.

Notons que : $h_{cr}^3 = \frac{q^2}{g} \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(1{,}85)^2/9{,}81} = 0{,}70\,m$.

Calcul du nombre de Froude au niveau des deux profondeurs du ressaut

Au niveau de la première profondeur :

$$F_{r1} = \frac{v_1}{\sqrt{gh^{'}}} = \frac{6{,}1}{\sqrt{9{,}81x0{,}303}} = 3{,}54$$

Au niveau de la deuxième profondeur :

Calcul de la vitesse v_2 : $v_2 = \frac{Q}{bh^{''}} = \frac{11{,}3}{6{,}1x1{,}37} = 1{,}35\,m/s$

$$F_{r2} = \frac{v_2}{\sqrt{gh^{''}}} = \frac{1{,}35}{\sqrt{9{,}81x1{,}37}} = 0{,}37$$

Ainsi l'écoulement à la première profondeur 0,303 est torrentiel, $F_r>1$, alors que à la deuxième profondeur est fluvial $F_r<1$.

b- Calcul de l'énergie absorbée (perdue) par le ressaut

Avant le ressaut : $E_1 = h^{'} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = 0{,}303 + \frac{6{,}1^2}{19{,}62} = 2{,}20$ N.m/N

Après le ressaut : $E_2 = h^{''} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} = 1{,}37 + \frac{1{,}35^2}{19{,}62} = 1{,}46$ N.m/N

L'énergie perdue par seconde : $\Delta E = \rho g Q H = 1000x9{,}81x11{,}3x(2{,}20 - 1{,}46) = 82031{,}22\ W$
$\Delta E = 82{,}03\ kW.$

Exercice n° :2

Un canal rectangulaire de 4,88 m de large a un débit de 5,43 m^3/s. La profondeur de l'eau en aval du ressaut est de 1,28 m.
a) Quelle est la profondeur en amont ?
b) Quelle est la perte de charge ?

Solution

a) Calcul de la profondeur en amont du ressaut :

De l'équation (4-3) du chapitre IV, $(h^{'} + h^{''}) = \dfrac{2\alpha^{'} q^2}{g h^{'} h^{''}}$, et pour $\alpha^{'} = 1$, on peut écrire :

$$q^2/g = \frac{1}{2} h^{'} h^{''}(h^{'} + h^{''})$$

$$q^2/g = \frac{1}{2} h^{'} h^{''}(h^{'} + h^{''}) \Rightarrow (5{,}43/4{,}88)^2/9{,}81 = \frac{1}{2}1{,}28h^{'}(h^{'} + 1{,}28) \Rightarrow 0{,}126 = 0{,}64h^{'}(h^{'} + 1{,}28)$$

$$0{,}20 = h^{'2} + 1{,}28h^{'} \Rightarrow h^{'2} + 1{,}28h^{'} - 0{,}19720 = 0$$

$$h^{'}_1 = \frac{-1{,}28 - 1{,}5579}{2} = -1{,}4189\ m$$

$$h^{'}_2 = \frac{-1{,}28 + 1{,}5579}{2} = 0{,}1389\ m$$

On prend $h^{'}_2 = 0{,}1389\ m$

b) Calcul de la perte de charge dans le ressaut :

Avant le ressaut : $E_1 = h^{'} + \dfrac{\alpha v_1^2}{2g} = 0{,}1389 + \dfrac{(5{,}43/(4{,}88x0{,}1389))^2}{19{,}62} = 3{,}4097\ m$

Après le ressaut : $E_2 = h^{''} + \dfrac{\alpha v_2^2}{2g} = 1{,}28 + \dfrac{(5{,}43/(4{,}88x1{,}28))^2}{19{,}62} = 1{,}3185\ m$

La perte de charge =3,4097-1,3185=2,091m.

Exercice n° :3

De l'eau s'écoule d'un déversoir en ciment dans un canal rectangulaire de 9,0 m de largeur à travers un ressaut. Les profondeurs, avant et après le ressaut, sont respectivement de 1,55m et de 3,08 m. Trouver le débit du canal ?

Solution

Calcul du débit, Q, du canal :

De l'équation (4-3) du chapitre IV, $(h^{'} + h^{''}) = \dfrac{2\alpha^{'} q^2}{g h^{'} h^{''}}$, et pour $\alpha^{'} = 1$, on peut calculer le débit spécifique : :

$$q^2 = \frac{g}{2} h^{'} h^{''}(h^{'} + h^{''}) = \frac{9{,}81}{2}(1{,}55x3{,}08)(1{,}55 + 3{,}08) = 108{,}418 \Rightarrow q = 10{,}41\ m^3/(s.m).$$

Le débit du canal Q=q x b=10,41x 9= 93,69 m^3/s.

Exercice n° :4

Après être passé par le déversoir de béton du barrage, un débit de 254,7 m^3/s se déversent sur un tablier de béton (n=0,013). La vitesse de l'eau à la base du déversoir est de 12,8m/s et la largeur du tablier est de 54,86m. Les conditions d'écoulement vont produire un ressaut, la profondeur du canal en aval du tablier étant de 3,05 m. Pour que le ressaut s'effectue sur le tablier,

a) Quelle doit être sa longueur ?

b) Quelle est l'énergie perdue du pied du déversoir au côté aval du ressaut ?

Solution

a) Calcul de la longueur du tablier :

Calculons tout d'abord la profondeur en amont du ressaut :

$$q^2/g = \frac{1}{2}h'h''(h' + h'')$$

$$q^2/g = \frac{1}{2}h'h''(h' + h'') \Rightarrow (254,7/54,86)^2/9,81 = \frac{1}{2}3,05h'(h' + 3,05) \Rightarrow 1,4408 = h'(h' + 3,05)$$

$$0,20 = h'^2 + 1,28h' \Rightarrow h'^2 + 3,05h' - 1,4408 = 0$$

$$h'_1 = \frac{-3,05 - 3,881}{2} = -3,4655\,\text{m}$$

$$h'_2 = \frac{-3,05 + 3,881}{2} = 0,4157\,\text{m}$$

On prend $h'_2 = 0,4157$ m

Calcul de h_1 : $h_1=q/v_1$= (254,7/54,86)/12,8=0,363 m.

Calculons la longueur entre h_1 =0,363 m et $h'_2 = 0,4157$ m sur laquelle s'effectue l'écoulement retardé.

Pour ce faire, on doit calculer la vitesse et le rayon hydraulique moyens entre les deux sections.

v_1=12,8 m/s, $v_1^2/2g = 12,8^2/19,62 = 8,35\,\text{m}$, R_1=(54,86x0,363)/55,59=0,3578 m

$v_2 = q/h'_2 = 4,64/0,4157 = 11,16\,\text{m/s}$, $v_2^2/2g = 11,16^2/19,62 = 6,35\,\text{m}$

R_2= (54,86 x 0,4157)/55,69=0,409 m

Alors, v_m= (12,8+11,16)/2=11,98 m/s, R_m=0,38 m

$$L_{h1\text{-}h'_2} = \frac{(h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g}) - (h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g})}{(i - i_0)} = \frac{(0,363 + 8,35) - (0,4157 + 6,35)}{(\frac{0,013x11,98}{0,38^{2/3}})^2 - 0)} = \frac{8,713 - 6,7657}{0,088} = \frac{1,9473}{0,088} = 22,10\,\text{m}$$

La longueur du ressaut L_R de $h'_2 = 0,4157$ m et $h''_2 = 3,05$ m est comprise entre $4,3h''_2$ et $5,2h''_2$ m. prenant la valeur habituelle de $5,2h''_2$

L_R=5,0x3,05=15,25 m.

D'où la longueur totale $h_1 - h'_2 - h''_2 = 22,10 + 15,25 = 37,35\,\text{m}$

b- calcul de la perte d'énergie

Au niveau de h_1 : $E_1 = h1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = 0,363 + 8,35 = 8,713\,\text{m}$

Au niveau de h''_2 près le ressaut : $E_2 = h''_2 + \frac{\alpha v_3^2}{2g} = 3{,}05 + \frac{(1{,}52)^2}{19{,}62} = 3{,}167\ \text{m}$

L'énergie perdue = $\rho g Q H = \frac{9810}{1000}(254{,}7)(8{,}713 - 3{,}167) = 13857\ \text{kw}$

Exercice n° :5

De l'eau coule (Q=20,0 m^3/s) dans un canal rectangulaire ayant une largeur de 4,0 m ; l'eau descend d'une pente abrupte vers une pente douce créant un ressaut. La profondeur en amont est de 1,20 m. Déterminer :

a) la profondeur du courant en aval ;

b) la perte d'énergie (en hauteur de charge) dans le ressaut ;

c) les vitesses en amont et en aval ?

Solution

a) Calcul de la deuxième profondeur du ressaut h'' :

Le débit spécifique q=Q/b=20/4=5 m^3/s/m de large. Alors

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}}$$

$$h''_1 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{1{,}20}{2} - \sqrt{(\frac{1{,}20}{2})^2 + \frac{2x5^2}{9{,}81x1{,}20}} = -2{,}746\ \text{m}$$

La valeur négative étant superflu, on ne l'accepte pas.

$$h''_2 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{1{,}20}{2} + \sqrt{(\frac{1{,}20}{2})^2 + \frac{2x5^2}{9{,}81x1{,}20}} = 1{,}546\ \text{m}$$

La deuxième profondeur du ressaut est $h'' = 1{,}546\ \text{m}$.

b) Calcul de la perte d'énergie (en hauteur de charge) dans le ressaut :

De l'équation (4-7), on écrit :

$$h_{p.c} = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''} = \frac{(1{,}546 - 1{,}20)^3}{4x1{,}20x1{,}5\,46} = 0{,}00558\ \text{m d'eau}$$

c) Calcul les vitesses en amont et en aval du ressaut :

En amont du ressaut : $v_1 = \frac{q}{h_1} = \frac{5}{1{,}20} = 4{,}17$ m/s

En aval du ressaut : $v_1 = \frac{q}{h_2} = \frac{5}{1{,}546} = 3{,}23\ \text{m/s}$

Exercice n° : 6

Déterminer la hauteur a du ressaut dans un canal rectangulaire à b=3 m, Q=5,25 m^3/s et h'=0,55 m.

Solution

La hauteur du ressaut est donnée par la relation suivante :

$$a = h'' - h'$$

Calcul de la deuxième profondeur du ressaut h'' :

Le débit spécifique q=Q/b=5,25/3=1,75 $m^3/s/m$ de large. Alors

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}}$$

$$h''_1 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{0,55}{2} - \sqrt{(\frac{0,55}{2})^2 + \frac{2x1,75^2}{9,81x0,55}} = -1,375\,m$$

La valeur négative étant superflue.

$$h''_2 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{0,55}{2} + \sqrt{(\frac{0,55}{2})^2 + \frac{2x1,75^2}{9,81x0,55}} = 0,825\,m$$

La deuxième profondeur du ressaut est $h'' = 0,825\,m$.

Et la hauteur du ressaut est $a = h''_2 - h'_1 = 0,825 - 0,55 = 0,275\,m$.

Ou bien par la méthode suivante :

$$q^2/g = \frac{1}{2} h' h''(h' + h'') \Rightarrow (5,25/3)^2/9,81 = \frac{1}{2} 0,55h''(h'' + 0,55) \Rightarrow 1,13520 = h''(h'' + 0,55)$$

$$h''^2 + 0,55h'' - 1,13520 = 0$$

$$h'_1 = \frac{-0,55 - 2,20}{2} = -1,375\,m$$

$$h'_2 = \frac{-0,55 + 2,20}{2} = 0,825\,m$$

$$a = h''_2 - h'_1 = 0,825 - 0,55 = 0,275\,m$$

Exercice n° : 7

a)Trouver $h^{'}$ dans un canal trapézoïdal à Q= 22 m^3/s, m=1,0, b=5 m, $h^{''}=1{,}5\,m$.

b) Trouver h" pour h'=0,6 m, q=Q/b=4 m^3/(s.m), m=0.

Solution

a) Calcul de la deuxième profondeur du ressaut $h^{''}$:

L'équation fondamentale du ressaut parfait est la suivante :

$$h^{'}_{cg}\omega_1 + \frac{\alpha^{'}Q^2}{g\omega_1} = h^{''}_{cg}\omega_2 + \frac{\alpha^{'}Q^2}{g\omega_2}$$

La première fonction du ressaut : $F_1 = h^{'}_{cg}\omega_1 + \frac{\alpha^{'}Q^2}{g\omega_1}$

Pour un canal trapézoïdal le centre de gravité est donné par l'expression suivante :

$$h^{'}_{cg} = \frac{h^{'}}{3}\frac{(B+2b)}{(B+b)} = \frac{h^{'}}{3}\frac{(b+2mh^{'}+2b)}{(b+2mh^{'}+b)} = \frac{h^{'}}{3}\frac{(3b+2mh^{'})}{(2b+2mh^{'})}$$

$$\omega_1 = bh^{'} + mh^{'2}$$

$$h^{''}_{cg} = \frac{h^{''}}{3}\frac{(B+2b)}{(B+b)} = \frac{h^{''}}{3}\frac{(b+2mh^{''}+2b)}{(b+2mh^{''}+b)} = \frac{h^{''}}{3}\frac{(3b+2mh^{''})}{(2b+2mh^{''})} == \frac{1{,}5}{3}\frac{(3x5+2x1x1{,}5)}{(2x5+2x1x1{,}5)} = 0{,}6923\,m$$

$$\omega_2 = bh^{''} + mh^{''2} = 5x1{,}5 + 1x1{,}5^2 = 9{,}75\,m^2$$

Pour que le ressaut existe, il faut que $F_1=F_2$

$$\frac{h^{'}}{3}\frac{(3b+2mh^{'})}{(2b+2mh^{'})}(bh^{'}+mh^{'2}) + \frac{\alpha^{'}Q^2}{g(bh^{'}+mh^{'2})} = \frac{h^{''}}{3}\frac{(3b+2mh^{''})}{(2b+2mh^{''})}(bh^{''}+mh^{''2}) + \frac{\alpha^{'}Q^2}{g(bh^{''}+mh^{''2})}$$

$$F_1 = \frac{h^{'}}{3}\frac{(3x5+2x1xh^{'})}{(2x5+2x1xh^{'})}(5h^{'}+1xh^{'2}) + \frac{1x22^2}{9{,}81x(5xh^{'}+1xh^{'2})}$$

$$F_2 = \frac{1{,}5}{3}\frac{(3x5+2x1x1{,}5)}{(2x5+2x1x1{,}5)}(5x1{,}5+1x1{,}5^2) + \frac{1x22^2}{9{,}81(5x1{,}5+1x1{,}5^2)}$$

$$\frac{h^{'}}{3}\frac{(15+2h^{'})}{(10+2h^{'})}(5h^{'}+h^{'2}) + \frac{484}{9{,}81(5h^{'}+h^{'2})} = 11{,}81$$

Pour obtenir la solution de cette équation, on doit tracer la courbe de la fonction F_1 du ressaut on fait varier la profondeur conjuguée $h^{'}$ jusqu à l'obtention de F_1=11,81. Comme il découle de cette courbe, deux valeurs de la profondeur, pour la même valeur de F_1=11,81. La plus petite valeur parmi ces deux est la profondeur conjuguée recherchée.

Certaines valeurs de F_1 pour différentes valeurs de $h^{'}$ sont représentés dans le tableau suivant :

h'	h'/3	((15+2h')/(10+2h'))(5h'+h'^2))	(Q^2/(9,81(5h'+h'^2)	F1
0,5000	0,167	4,000	17,941	18,608
0,6000	0,200	4,860	14,684	15,656
0,7000	0,233	5,740	12,365	13,705
0,8000	0,267	6,640	10,633	12,404
0,8652	**0,288**	**7,238**	**9,722**	**11,810**
0,9000	0,300	7,560	9,291	11,559
1,0000	0,333	8,500	8,223	11,056
1,1000	0,367	9,460	7,353	10,821
1,2000	0,400	10,440	6,631	10,807
1,3000	0,433	11,440	6,024	10,981
1,4000	0,467	12,460	5,506	11,321
1,5000	**0,500**	**13,500**	**5,060**	**11,810**
1,6000	0,533	14,560	4,672	12,437
1,7000	0,567	15,640	4,332	13,194
1,8000	0,600	16,740	4,031	14,075
1,9000	0,633	17,860	3,763	15,075
2,0000	0,667	19,000	3,524	16,191

La courbe de la fonction du ressaut est représentée sur la figure ci-après :

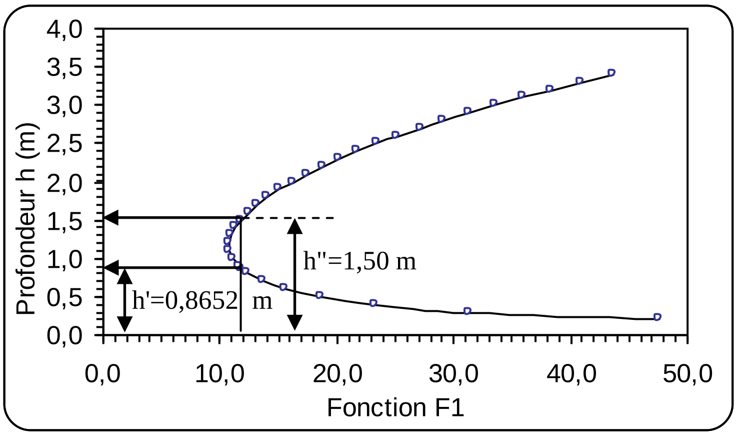


Fig. 5-1: Fonction du ressaut F_1

La première profondeur conjuguée est $h^{'} = 0{,}8652\,\text{m}$

b) Calcul de la deuxième profondeur $h^{''}$:

La deuxième profondeur du ressaut est donnée par la relation :

$$h_2^{''} = \frac{-h^{'}}{2} + \sqrt{(\frac{h^{'}}{2})^2 + \frac{2\alpha^{'} q^2}{gh^{'}}} = -\frac{0{,}60}{2} + \sqrt{(\frac{0{,}60}{2})^2 + \frac{2x4^2}{9{,}81x0{,}60}} = 2{,}05\,\text{m}$$

Exercice n° : 8

a) Déterminer h'' dans un canal parabolique, si Q= 6,2 m^3/s, p=2,6 m, h'=0,28 m.

b) Déterminer les pertes de l'énergie spécifique $h_{p.c}$ dans le ressaut, si Q= 50 m^3/s, b=10m, m=0, h'=0,7 m.

Solution

a) Détermination de la deuxième profondeur conjuguée :

L'équation fondamentale du ressaut parfait est la suivante :

$$h'_{cg}\omega_1 + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega_1} = h''_{cg}\omega_2 + \frac{\alpha' Q^2}{g\omega_2}$$

b) Détermination de l'énergie spécifique $h_{p.c}$ dans le ressaut :

La perte de l'énergie spécifique est donnée par la relation(4-7) :

$$h_{p.c} = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''}$$

Ce qui inconnu dans cette expression est la deuxième profondeur h'' :

$$h''_2 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{0,70}{2} + \sqrt{(\frac{0,70}{2})^2 + \frac{2x3,6^2}{9,81x0,70}} = 1,717\ \text{m d'où :}$$

$$h_{p.c} = \frac{(h'' - h')^3}{4h'h''} = \frac{(1,717 - 0,7)^3}{4x1,717x0,7} = 0,21\ \text{m d'eau}.$$

Exercice n° :9

Dans un canal rectangulaire large de b=10 m qui évacue un débit Q=50 m^3/s il surgit un ressaut.

a) Déterminer la deuxième profondeur conjuguée h'' si la première profondeur conjuguée $h' = 0,50\ \text{m}$?

b)Déterminer la hauteur du ressaut ?

Solution

a) Calcul de la deuxième profondeur du ressaut h'' :

Le débit spécifique q=Q/b=50/10=5 m^3/s/m de large. Alors

$$h''_{1,2} = \frac{-h'}{2} \pm \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}}$$

$$h''_1 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{0,50}{2} - \sqrt{(\frac{0,50}{2})^2 + \frac{2x1,1x5^2}{9,81x0,50}} = -3,6079\ \text{m}$$

La valeur négative étant superflu, on ne l'accepte pas.

$$h''_2 = \frac{-h'}{2} + \sqrt{(\frac{h'}{2})^2 + \frac{2\alpha' q^2}{gh'}} = -\frac{0,50}{2} + \sqrt{(\frac{0,50}{2})^2 + \frac{2x1,1x5^2}{9,81x0,50}} = 3,1079\ \text{m}$$

La deuxième profondeur du ressaut est $h'' = 3,1079\ \text{m}$.

b) Calcul de la hauteur du ressaut a :

La hauteur du ressaut est $a = h''_2 - h'_1 = 3,1079 - 0,50 = 2,6079\ \text{m}$.

CHAPITRE VI

Écoulement par-dessus des déversoirs

6-1 Définition d'un déversoir

Un déversoir est défini comme étant un obstacle au-dessus duquel déverse l'eau. La figure (6.1) représente un déversoir rectangulaire.

P_1 : la hauteur de la pelle en amont du déversoir
H : la charge hydraulique au-dessus du déversoir
B : la largeur du déversoir

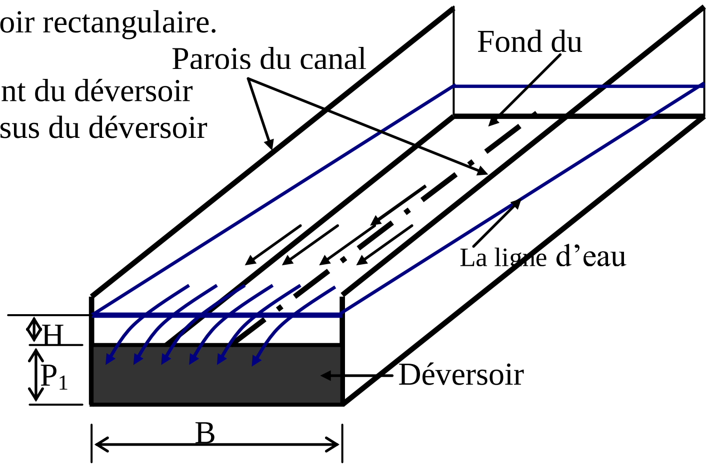


Fig. (6.1): Déversoir rectangulaire en mince paroi placé dans un canal rectangulaire

6-2 Classification des déversoirs

La classification des déversoirs est basée sur leurs caractéristiques : profil et dimensions de la section transversale de la paroi de déversoir, forme de l'échancrure de déversoir, profil et disposition du déversoir en plan, conditions amont du courant, conditions du raccordement de la nappe avec le bief d'aval, etc.

6-2-1 En fonction de la forme et des dimensions de la section transversale de la paroi

a) déversoirs en mince paroi ; l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la charge (S<0,5H).

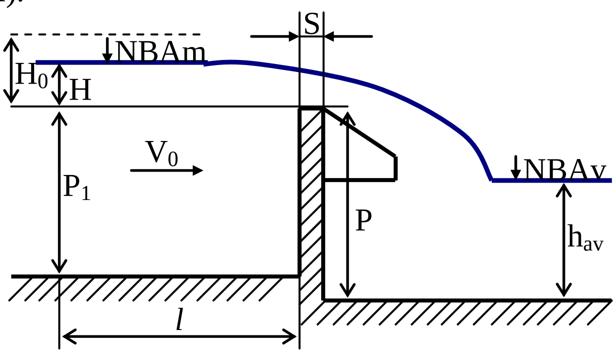


Fig. (6.2) : Déversoir en mince paroi

b) déversoirs à seuil épais : l'épaisseur de la face horizontale de la paroi du déversoir est comprise entre 2H et 10H (2H <S<10H).

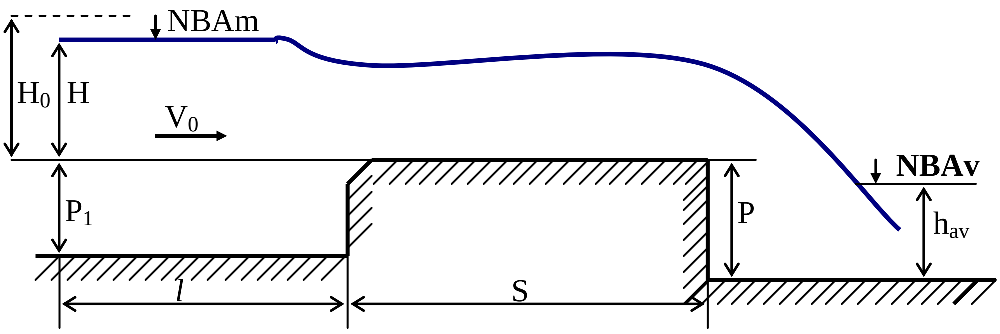


Fig. (6.3): Déversoir à seuil épais

c) Déversoirs à seuil normale : l'épaisseur de la paroi en haut est comprise entre 0,5H et 2H (0,5H<S<2H).

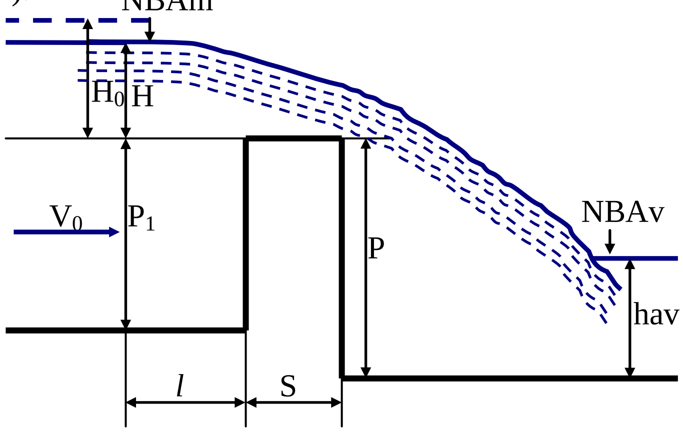
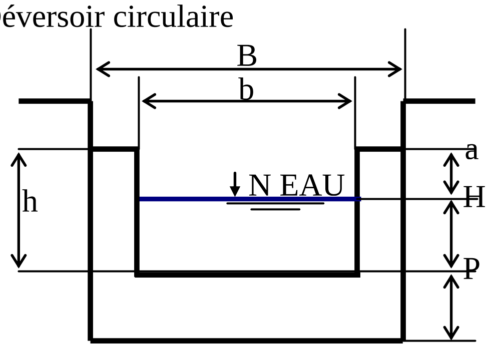


Fig. (6.4): Déversoir à seuil épais

6-2-2 En fonction de la forme de l'échancrure

a) Déversoir rectangulaire
b) Déversoir trapézoïdal
c) Déversoir triangulaire
d) Déversoir circulaire



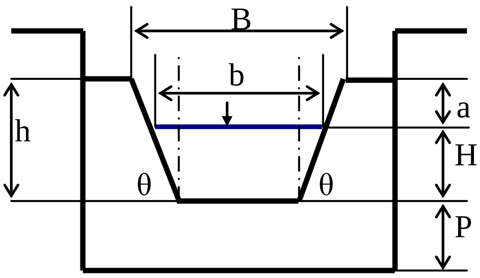
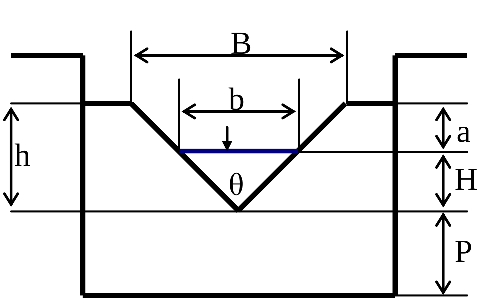


Fig. (6.5) : déversoir rectangulaire **Fig. (6.6): déversoir trapézoïdal**



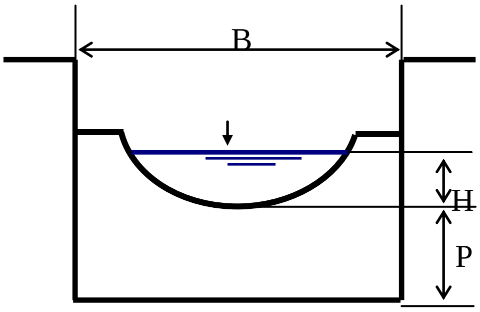
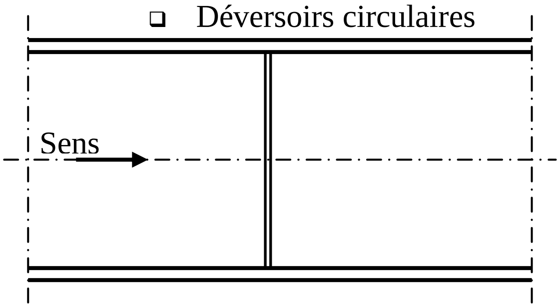


Fig. (6.7) : déversoir triangulaire **Fig. (6.8) : déversoir circulaire**

6-2-3 En fonction du profil en plan

a) Déversoirs rectilignes
   - Déversoirs droits
   - Déversoirs obliques
   - Déversoirs latéraux

b) Déversoirs non rectilignes
   - Déversoirs polygonaux
   - Déversoirs curvilignes
   - Déversoirs circulaires



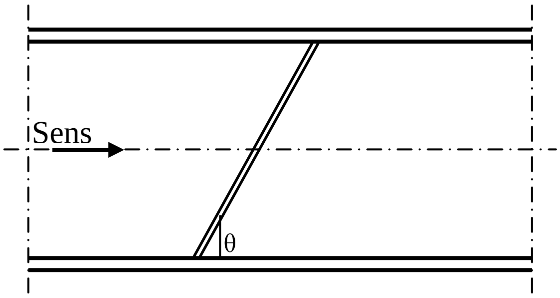
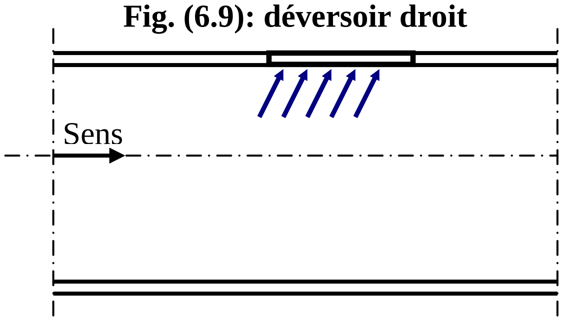


Fig. (6.9): déversoir droit **Fig. (6.10): déversoir oblique**



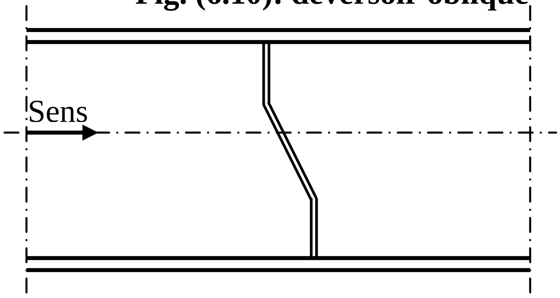
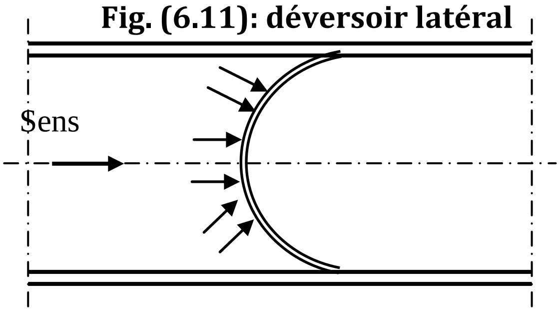


Fig. (6.11): déversoir latéral **Fig. (6.12): déversoir polygonal**



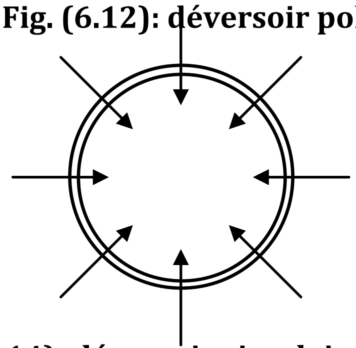


Fig. (6.13): déversoir curviligne **Fig. (6.14): déversoir circulaire**

6-2-4 En fonction des conditions amont de l'écoulement

Il existe deux types : Le déversoir sans contraction, la largeur du canal d'amener est égale à celle du déversoir (B=b), et le déversoir avec contraction latérale (b<B). La figure (6.15) montre les deux déversoirs.

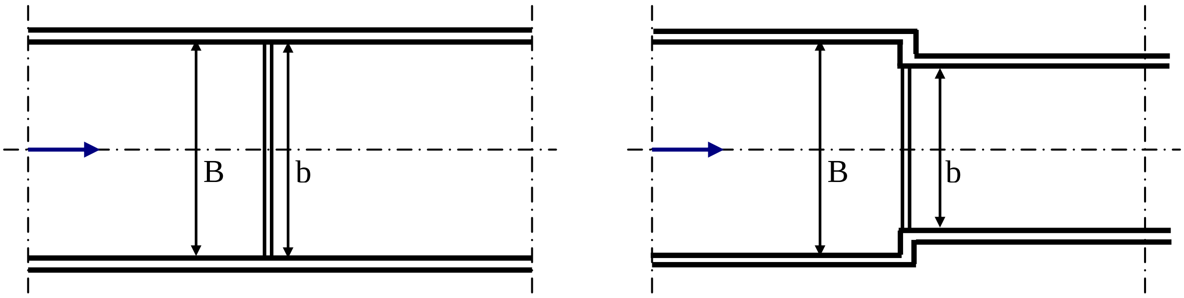


Fig. (6.15) : déversoir avec et sans contraction

La contraction latérale d'un déversoir entraîne une diminution du débit.

6-2-5 En fonction du raccordement de la nappe libre avec le bief aval

Dans ce critère de classement, il existe également deux types : les déversoirs dénoyés, lorsque le niveau du bief aval n'influe pas sur le débit, Q, et/ ou la charge, H, du déversoir et ceux noyés lorsque la modification du niveau du bief aval entraîne le changement de H ou Q. la figure (6.16) montre clairement la différence entre les deux types.

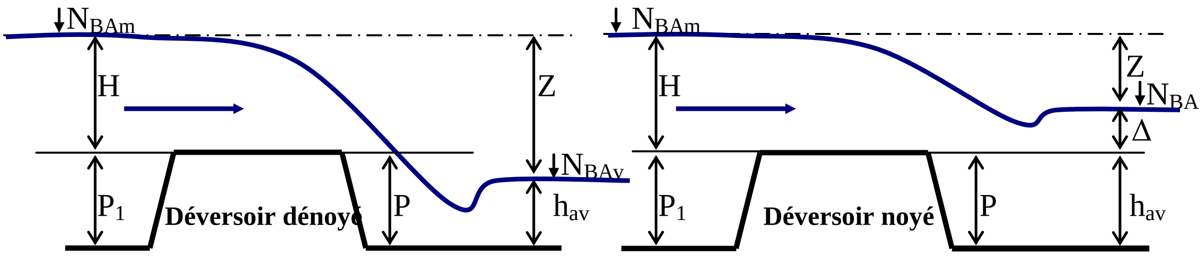


Fig. (6.16) : Schémas approximatifs des deux déversoirs dénoyé et noyé

6-3 Equation générale des déversoirs

L'équation générale des déversoirs peut être obtenue par deux méthodes, la première est obtenue par l'analyse dimensionnelle et la seconde est acquise par l'intégration.

6-3-1 Equation obtenue par l'analyse des dimensions

Cette méthode est basée sur le lien reliant tous les facteurs à savoir : La largeur du déversoir, la charge en amont et en aval du déversoir, la vitesse d'approche V_0 et l'accélération de la pesanteur g.

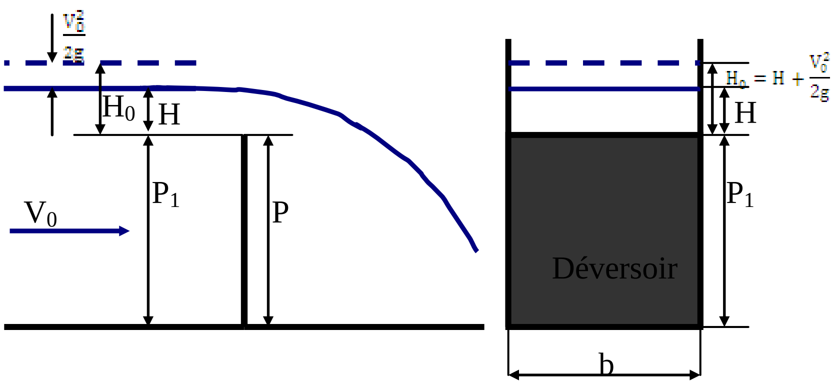


Fig. (6.17): Les paramètres d'un déversoir rectangulaire dénoyé en mince paroi

Le débit d'un déversoir est en fonction de la largeur du déversoir b, la charge en amont du déversoir, la vitesse d'approche V_0 et l'accélération de la pesanteur g.

$Q = f(b, H, V_0, g)$

$$H_0 = H + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$Q = f(b, H_0, V_0, g)$$

On peut écrire cette fonction sous la forme suivante :

$$Q = Cb^x H_0^y g^z$$

Où c : est un coefficient sans dimension qui tient compte des particularités constructives du déversoir ;

x, y, z sont des exposants inconnus qui définissent le rôle de chaque facteur.

Le débit est directement proportionnel à la largeur b alors x=1.

L'unité du débit en analyse dimensionnelle est $(L^3/T) = (L)^1 (L)^y (L/(T)^2)^z$ alors $3=x+y+z= 3 \Rightarrow 1+y+z=3$ et $2z=-1$ d'où z=0,5 et y=1,5.

$Q = CbH_0^{3/2}g^{1/2}$ Multiplions et divisons le second membre par $\sqrt{2}$, nous aurons :

$$Q = Cb\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}H_0^{3/2}g^{1/2} = \frac{Cb}{\sqrt{2}}\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Posons $\frac{c}{\sqrt{2}} = m$, on obtient :

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} \qquad (6.1)$$

6-3-2 Equation obtenue par intégrale

6-3-2-1 Cas d'un déversoir à mince paroi rectangulaire dénoyé

Considérons que l'ouverture rectangulaire de la figure (6.18) s'étend sur toute la largeur b du canal. Quand la surface du liquide atteint le même niveau représenté en pointillé l'application du théorème de Bernoulli entre la section A et une bande élémentaire de hauteur dy dans le jet donne, pour des conditions idéales,

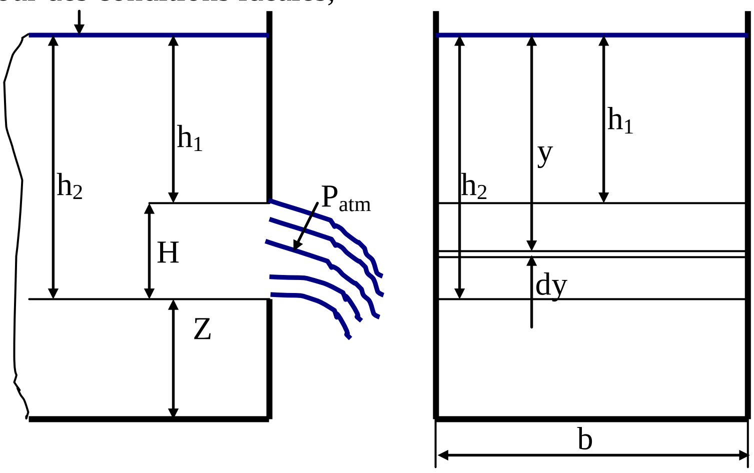


Fig. (6.18): déversoir rectangulaire dénoyé en mince paroi

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_j + \frac{P_j}{\rho g} + \frac{V_j^2}{2g} + \sum \Delta H_{(A-jet)}$$

Où V_A : représente la vitesse moyenne des particules s'approchant de l'ouverture ;

$P_A = P_{jet} = P_{atm}$;

Ainsi la vitesse idéale du jet est obtenue pour $\sum \Delta H_{(A-jet)} = 0$

$$V_{jet} = \sqrt{2g\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)}$$

Le débit idéal dQ est donné à partir de l'équation de continuité par la relation :

$$dQ = dAV_{jet} = bdyV_{jet} = b\sqrt{2g}\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$

$$Q_{Idéal} = \int dQ = \int_{h1}^{h2} b\sqrt{2g}\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{1/2} dy = b\sqrt{2g}\int_{h1}^{h2}\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$

Un déversoir existe si h_1=0, écrivons H au lieu de h_2

$$Q_{Idéal} = b\sqrt{2g}\int_{0}^{H}\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{1/2} dy = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left(y + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2} \Rightarrow Q_{Idéal}$$

$$= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Le débit réel Q est égal au produit du débit idéal par un coefficient C. alors

$$Q = CQ_{Idéal} = \frac{2}{3}Cb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Posonsm $= \frac{2}{3}C$

$\mathbf{Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2}\right]}$ (6.2)

Pour un déversoir rectangulaire entièrement contracté, les conditions des extrémités provoquent une réduction du débit.

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[(H_0)^{3/2} - \left(\frac{V_A^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Avec $H_0 = H + \frac{V_A^2}{2g}$

V_A : la vitesse d'approche en amont du déversoir, dans la plupart des ouvrages, V_A=V_0

m : le coefficient de débit du déversoir

$\frac{V_0^2}{2g}$: la hauteur d'eau due à l'énergie cinétique crée par la vitesse d'approche V_0.

Négligeons$\frac{V_0^2}{2g}$, le débit devient :

$\mathbf{Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]}$ (6.1)

Nous pouvons aussi écrire le débit sous la forme

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Ou

$\mathbf{Q = m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2}}$ (6.3)

Où m_0 peut être calculé par l'une des formules suivantes :

a) Formule de Bazin : $m_0 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{H}{H+P_1})^2\right)$ (6.4)

b) Formule de Rehbock : $m_0 = 0{,}403 + 0{,}053\frac{H}{P_1} + \frac{0{,}0007}{H}$ (6.5)

Dans les membres $\frac{0{,}0027}{H}$ et $\frac{0{,}0007}{H}$ qui tiennent compte de la tension superficielle.

Dans les limites b=0,2 à 2 m, P_1=0,24 à 1,13 m, H=0,05 à 1,24 m, les formules de Bazin et de Rehbok sont vérifiées expérimentalement et leur erreur de détermination de débit ne dépasse pas 1%.

c)Formule de Tchougaev : $m_0 = 0{,}402 + 0{,}054\frac{H}{P_1}$ (6.6)

La formule de Tchougaev est recommandée pour $P_1 \geq 0{,}5H$ et $H \geq 0{,}1m$.

Si le déversoir est incliné comme il est représenté sur la figure (6.19), on introduit dans la formule de débit $\mathbf{Q = m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2}}$un coefficient de correction k_1 dont la valeur est déterminée en fonction de l'inclinaison de la paroi. Le tableau (6.1) donne cette valeur:

Tableau (6.1) : Coefficient de correction du débit d'un déversoir incliné

Inclinaison de la paroi	Rapport a/P_1									
	0	1/3	2/3	1	2	4	5	6	7	8
Vers le bief d'aval	1	1,05	1,09	1,11	1,14	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06
Vers le bief d'amont	1	0,96	0,93	0,91	-	-	-	-	-	-

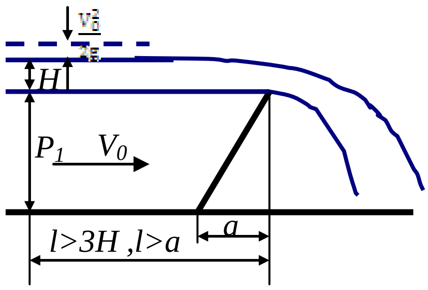


Fig. (6.19) : déversoir incliné en mince paroi

6.3.2.2 Déversoir rectangulaire noyé en mince paroi

Le déversoir est considéré comme noyé si les conditions suivantes sont remplies :

a) Le niveau du bief aval est plus haut que le seuil du déversoir $\Delta = h_{av} - p > 0$;
b) Dans le bief aval, tout près du déversoir on observe un courant fluvial ; à la section transversale rectangulaire du bief aval avec largeur égale à celle du déversoir l'inégalité (z/p<(z/p)cr).

La valeur critique de la chute relative (z/p)cr est déterminée à l'aide de la courbe(z/p)cr=f(H/p) représentée sur la figure (6.20).

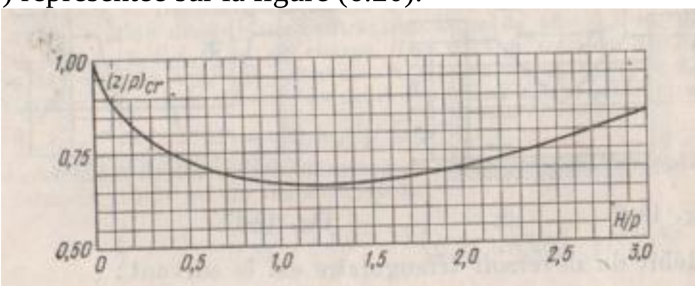


Fig. (6.20) :L'abaque de la chute relative $(z/p)_{cr}$ en fonction du rapport H/P

Le débit du déversoir noyé en mince paroi est donné par la formule suivante où ce paramètre est pris en compte par le coefficient σ_n.

$Q = \sigma_n m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2}$ (6.7)

Ou

$$Q = \sigma_n m b\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Le coefficient σ_n est donné par la relation empirique de Bazin :

$\sigma_n = 1{,}05(1 + 0{,}2\frac{\Delta}{p})\sqrt[3]{\frac{z}{H}}$ (6.8)

Pour les conditions : 0,15≤H/p<0,25, 0≤Δ/p≤0,3, les valeurs de σ_n sont à multiplier par 0,96.

6.3.2.3 Déversoir rectangulaire contracté en mince paroi

Lorsque le déversoir est contracté (Fig.6.21) c'est-à-dire la largeur du déversoir est inférieure à celle du canal (b<B), la nappe à l'entrée au déversoir subit une contraction latérale ce qui diminue le débit par rapport à un déversoir sans contraction, le débit dans ce cas-là est donné par la relation :

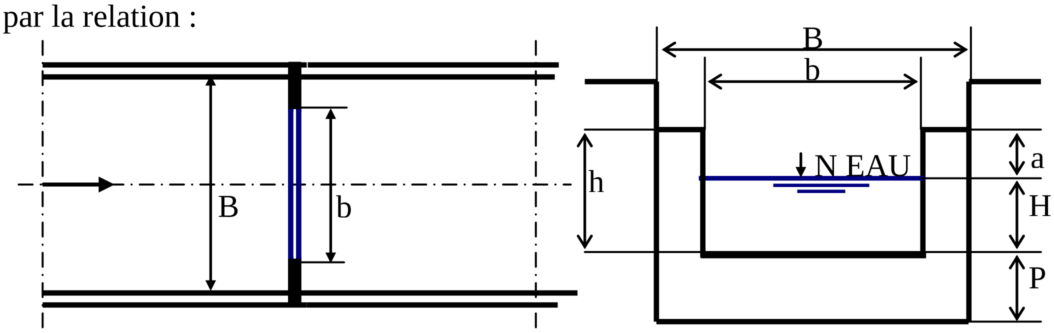


Fig. (6.21) : déversoir contracté en mince paroi

$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2}$ (6.9)

Où le coefficient de débit du déversoir m_c, qui est inférieur à m_0, est donné par la relation empirique d'Hégly :

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03\frac{B-b}{B}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{b}{B})^2(\frac{H}{H+P_1})^2\right) \quad (6.10)$$

6-3-2-4 Déversoir triangulaire en mince paroi dénoyé

Le schéma représenté sur la figure (6.22) donne une idée sur le déversoir triangulaire dénoyé sans contraction latéral.

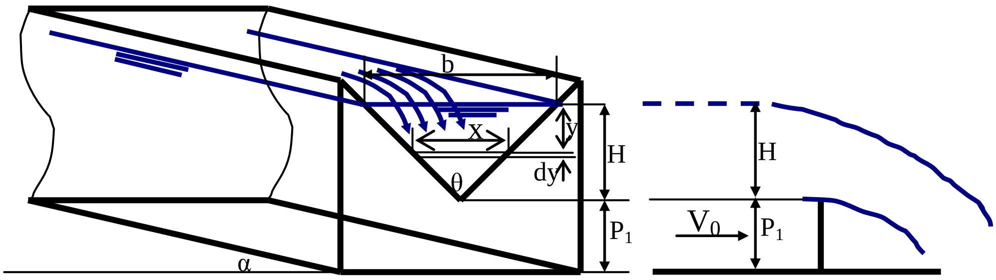


Fig. (6.22) : Déversoir triangulaire dénoyé sans contraction latérale

Comme il démontré au déversoir rectangulaire la vitesse du jet est donnée par la relation

$$V_{jet} = \sqrt{2g\left(y + \frac{V_0^2}{2g}\right)}$$

Le débit idéal dQ est donné à partir de l'équation de continuité par la relation :

$$dQ = dAV_{jet} = xdyV_{jet} = x\sqrt{2g}\left(y + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{H} = \frac{\frac{x}{2}}{(H-y)} \Rightarrow x = (H-y)\frac{b}{H} \text{et } b = 2Htg\frac{\theta}{2} \Rightarrow x = 2(H-y)tg\frac{\theta}{2}$$

$$dQ = 2(H-y)tg\frac{\theta}{2}\sqrt{2g}\left(y + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$

$$Q_{Idéal} = \int dQ = \int_{h1}^{h2} 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}(H-y)\left(y+\frac{V_0^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$
$$= 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}\int_{h1}^{h2}(H-y)\left(y+\frac{V_0^2}{2g}\right)^{1/2} dy$$

Supposons que le rapport $\frac{V_0^2}{2g}$ est négligeable le débit idéal devient :

$$Q_{Idéal} = 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}\int_{h1}^{h2}(H-y)(y)^{1/2}dy = 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}\int_{0}^{H}\left(Hy^{1/2}-y^{3/2}\right)dy$$

$$Q_{Idéal} = 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}(\left[\frac{2}{3}Hy^{3/2}\right]_0^H - \frac{2}{5}\left[y^{\frac{5}{2}}\right]_0^H) = 2\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}(\frac{2}{3}H^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}) = \frac{8}{15}\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}H^{\frac{5}{2}}$$

Le débit réel Q=C.Q_{Ideal}

$$\mathbf{Q = \frac{8}{15}C\sqrt{2g}tg\frac{\theta}{2}H^{\frac{5}{2}}}$$

Posons$m_{tr} = \frac{8}{15}C$ on obtient :

$Q = m_{tr}tg\frac{\theta}{2}\sqrt{2g}H^{\frac{5}{2}}$ (6.11)

Pour un déversoir de type **Thomson θ**=90° ⇒$m_{tr}tg\frac{\theta}{2} = 0{,}316$

$Q = 1{,}14H^{\frac{5}{2}}$ (6.12)

Cette dernière est applicable pour 0,05≤H≤0,25 m, p≥0,2 m et V_0≤0,5 m/s.

6-3-2-5 Déversoir trapézoïdale en mince paroi

Pour un déversoir a une forme de l'échancrure trapézoïdale (Fig.6.23) le débit passant par-dessus est donné par la relation :

$$Q = m_{trpz}b\sqrt{2g}H^{3/2} \qquad (6.13)$$

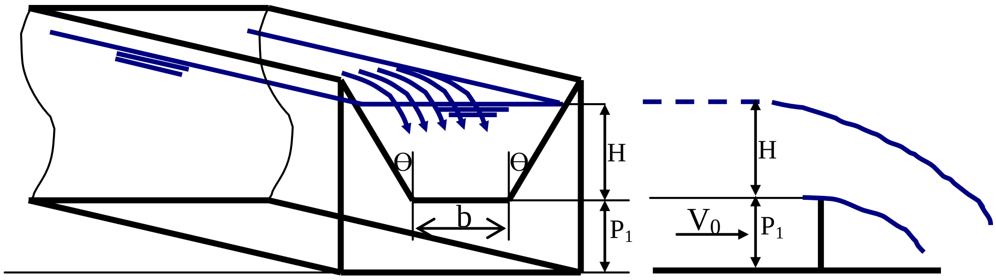


Fig. (6.23) : Déversoir trapézoïdal dénoyé sans contraction latérale

Pour un angle θ de fruit du talus égal à 14° ⇒ tg θ =0,24932800 selon l'expérience de **Cipollet** le coefficient de débit m_{trpz} =0,42.

$$Q = 1{,}86bH^{3/2} \qquad (6.14)$$

Cette dernière relation est applicable pour b≥ 3H et V_0≤0,5 m/s.

Pour θ =45° ⇒ tg θ =1 selon l'expérience d'**Ivanov** pourV_0≤0,6 m/s.

$Q = 1{,}86(\frac{b+H}{b+0{,}25H})bH^{3/2}$ (6.15)

6-3-2-6 Déversoir parabolique en mince paroi

Le débit du déversoir de forme de l'échancrure parabolique est le suivant :

$$Q = m_{parab} b\sqrt{2g}\sqrt{P_0}H^2$$

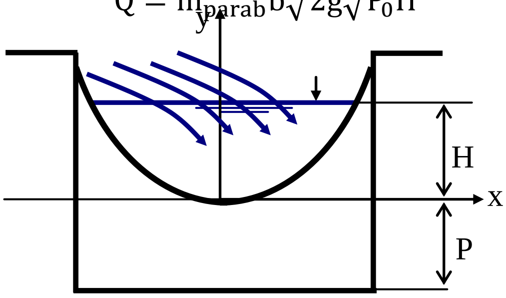


Fig. (6.24) : déversoir parabolique dénoyé sans contraction latérale

P_0 : est le coefficient directeur de la parabole.

$$x^2 = 2P_0 y$$

Selon les expériences de **Grive** : $0{,}03<H<0{,}6$ m et $0{,}0025<P_0<0{,}05$ m le coefficient de débit du déversoir

$m_{parab}=0{,}625$

$$Q = 0{,}625 b\sqrt{2g}\sqrt{P_0}H^2$$

Posons $M = 0{,}625\sqrt{P_0}\sqrt{2g} = 2{,}76840\sqrt{P_0}$

$$Q = MH^2 \qquad (6.16)$$

6-4 Déversoir dénoyé à large seuil (crête épaisse)

La figure (6.25) élucide un déversoir à crête épaisse à travers lequel l'eau diverse.

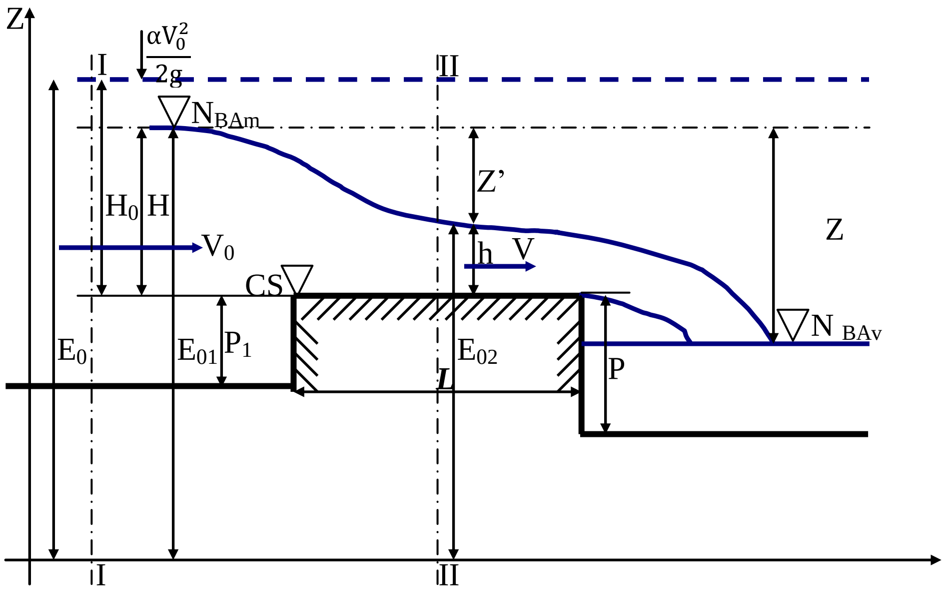


Fig. (6.25) : Déversoir à large seuil

L'écoulement sur les seuils s'effectue sans variation de la profondeur h qui est inférieure à la charge H. Deux problèmes essentiels sont à examiner :

1) Détermination de la profondeur d'eau, h, sur le seuil.
2) Détermination du coefficient de débit m.

La théorie des déversoirs à large seuil est exposée en 1[er] par Bélanger à la moitié du 19 cycle, il est parti de l'hypothèse de débit maximum.

Le principe de Bélanger qui consiste à dire que la profondeur h sur le seuil, pour n'importe quelle charge H, est fixée pour laquelle passe le débit maximum par le déversoir.
Cette hypothèse ne doit pas en principe appelée l'objection et permet de résoudre simplement le problème relatif à la profondeur d'eau sur le seuil du déversoir.

$$Q = f(h) \text{et} \frac{dQ}{dh} = 0$$

En appliquant l'équation de Bernoulli dans les sections en amont du déversoir et sur le seuil on obtient :

$$H + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = h + \frac{\alpha V^2}{2g} + \sum \xi \frac{V^2}{2g}$$

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} \Rightarrow H_0 = h + \frac{\alpha V^2}{2g} + \sum \xi \frac{V^2}{2g} \Rightarrow H_0 - h = (\alpha + \sum \xi)\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V^2 = \frac{2g(H_0 - h)}{(\alpha + \sum \xi)}$$

$$V = \frac{\sqrt{2g(H_0 - h)}}{\sqrt{(\alpha + \sum \xi)}}$$

Posons $\varphi = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + \sum \xi)}}$ appelant le coefficient de vitesse, nous aurons :

$$V = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h)}$$

Si la section liquide sur le seuil est rectangulaire $\omega = bh$ le débit sera :

$$Q = \varphi bh \sqrt{2g(H_0 - h)}$$

Dans le cas général, la profondeur h sur le seuil est inconnue, d'après Belanger h est obtenue en mettant $\frac{dQ}{dh} = 0$ qui correspond à un débit maximum.

$$\frac{dQ}{dh} = \varphi b \sqrt{2g}\left[\sqrt{(H_0 - h)} - \frac{h}{2\sqrt{(H_0 - h)}}\right] = 0 \Rightarrow \sqrt{(H_0 - h)} - \frac{h}{2\sqrt{(H_0 - h)}} = 0$$

$$\Rightarrow 2(H_0 - h) - h = 0$$

$$2H_0 - 3h = 0 \Rightarrow \frac{h}{H_0} = \frac{2}{3}$$

Selon la théorie de **Belanger** le rapport $\frac{h}{H_0} = \text{constante} = \frac{2}{3}$

L'expérience a montré que le plus souvent la profondeur h sur le seuil est réellement approximativement égale à $\frac{2}{3}H_0$, **mais pas toujours**.

Le débit passant au-dessus d'un déversoir rectangulaire à seuil épais est donné par l'équation de continuité :

$$Q = \varphi bh\sqrt{2g(H_0 - h)} = \varphi b \frac{2}{3} H_0 \sqrt{2g(H_0 - \frac{2}{3}H_0)} = \varphi b \frac{2H_0}{3\sqrt{3}} \sqrt{2gH_0} = \varphi b \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}} {H_0}^{3/2}$$

$$Q = \varphi \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}} b{H_0}^{3/2}$$

Posons $m = \frac{2\varphi}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849\varphi$

$Q = m\sqrt{2g}b{H_0}^{3/2}$ (6.17)

La précision est apportée par la théorie de **Bakhmétev** basée sur l'hypothèse de l'énergie spécifique de la section c'est-à-dire la profondeur sur le seuil correspond au minimum de l'énergie spécifique de la section $h=h_{cr.}$

L'énergie par unité de poids est donnée par la relation :

$$E = z + h + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

Le débit Q est donné par l'équation de continuité par la relation :

$$Q = V.\omega$$

Pour une section rectangulaire ω=b.h ce qui permet d'écrire :

$$Q = V.bh \Rightarrow V = \frac{Q}{bh} \Rightarrow V^2 = \frac{Q^2}{b^2h^2}$$

$$E = z + h + \alpha\frac{Q^2}{2gb^2h^2}$$

L'énergie minimale est obtenue en dérivant E par rapport à h.

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dh}\left(z + h + \alpha\frac{Q^2}{2gb^2h^2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2h2gb^2\alpha Q^2}{(2gb^2h^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4hgb^2\alpha Q^2}{4g^2b^4h^4} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2h^3} = 0$$

La profondeur d'eau qui donne l'énergie minimale s'appelle la profondeur critique.

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2h_{cr}^3} = 0 \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}$$

On pose :

$$q = \frac{Q}{b} \Rightarrow h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$$

$$Q = b.h.V \Rightarrow q = \frac{Q}{b} = h.V \text{ et } Q = b.h_{cr}.V_{cr} \Rightarrow q = \frac{Q}{b} = h_{cr}.V_{cr} \Rightarrow h_{cr} = \frac{q}{V_{cr}}$$

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2h_{cr}^3} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha V_{cr}^2}{gh_{cr}} = 0 \Rightarrow h_{cr} = \frac{\alpha V_{cr}^2}{g} \Rightarrow \frac{h_{cr}}{2} = \frac{\alpha V_{cr}^2}{2g}$$

$$H_0 = h_{cr} + \frac{\alpha V_{cr}^2}{2g} + \sum\xi\frac{V_{cr}^2}{2g} \Rightarrow H_0 = h_{cr} + \frac{h_{cr}}{2} + \sum\xi\frac{h_{cr}}{2\alpha} \Rightarrow H_0 = h_{cr}(\frac{3}{2} + \frac{\sum\xi}{2\alpha})$$

$$H_0 = \frac{h_{cr}}{2\alpha}\left(3\alpha + \sum\xi\right) \Rightarrow 2\alpha H_0 = h_{cr}\left(3\alpha + \sum\xi\right)$$

Posons $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha+\sum\xi}} \Rightarrow \varphi^2 = \frac{1}{\alpha+\sum\xi} \Rightarrow \frac{1}{\varphi^2} = \alpha + \sum\xi$

$$2\alpha H_0 = h_{cr}\left(3\alpha + \sum\xi\right) = h_{cr}\left(2\alpha + \alpha + \sum\xi\right) = h_{cr}\left(2\alpha + \frac{1}{\varphi^2}\right)$$

$$2\alpha H_0 = h_{cr}\left(2\alpha + \frac{1}{\varphi^2}\right) \Rightarrow h_{cr} = \frac{2\alpha\varphi^2}{(1 + 2\alpha\varphi^2)}H_0$$

Si la résistance à l'écoulement n'existe pas c'est-à-dire $\sum\xi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ dans ce cas-là la profondeur critique $h_{cr} = \frac{2}{3}H_0$et les résultats des deux théories de **Bakhmétev** et de **Bélanger** se coïncides. Toutefois les résultats de **Bakhmétev** sont plus exacts puisque ils tiennent compte des conditions réelles de l'écoulement.

En introduisant$h_{cr} = K.H_0$ on pourra écrire :

$$K.H_0 = \frac{2\alpha\varphi^2}{(1 + 2\alpha\varphi^2)}H_0 \Rightarrow K = \frac{2\alpha\varphi^2}{(1 + 2\alpha\varphi^2)}$$

Donc

$$Q = \omega.V = bh_{cr}\varphi\sqrt{2g(H_0 - h_{cr})} = bK.H_0\varphi\sqrt{2g(H_0 - K.H_0)} = bK.H_0\varphi\sqrt{2gH_0(1-K)}$$

$$Q = \varphi K\sqrt{(1-K)}b\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Le débit de ce type de déversoir dépend des résistances à l'entrée du seuil, posons

$\varphi K\sqrt{(1-K)} = m$ on obtient :

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} \qquad (6.18)$$

S'il n'existe pas de résistance c'est-à-dire φ=1, $K = \frac{2}{3} \Rightarrow m = 0{,}3849$

Cette dernière valeur du coefficient de débit à seuil épais représente la plus grande valeur de m. En pratique m=0,32÷0,3849.

6-5 Déversoir dénoyé à large seuil avec contraction latérale

La figure (6.26) illustre un déversoir à seuil épais avec contraction latérale.

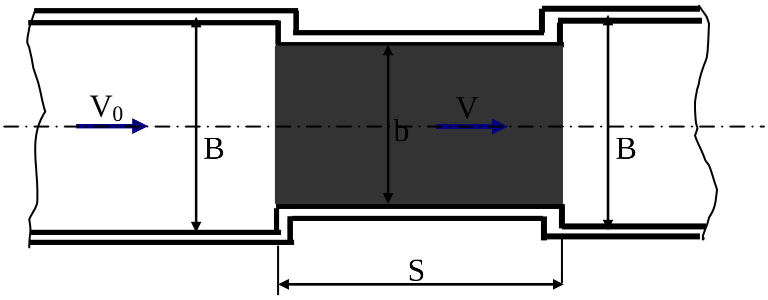


Fig. (6.26) : Déversoir à large seuil avec contraction latérale

Lors du calcul de débit d'un déversoir contracté (b/B<1) on distingue deux cas :

a) P_1=0, le coefficient de débit (m) est déterminé en fonction de la forme de l'entrée et de la largeur relative de l'orifice du déversoir H/b≤2.

b) P_1=0 et B>b, la valeur de m trouvée dans le tableau précédent est à multiplier par le coefficient de la contraction latérale calculé d'après les relations empiriques de V. Smyslov :

Entrée non arrondie

$$m = 0{,}30 + 0{,}08\frac{bH}{\Omega_{b.a}} \quad (6\text{-}19)$$

$\Omega_{b.a}$: l'aire de la section liquide dans le bief amont du déversoir.

Entrée avec cônes

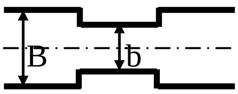
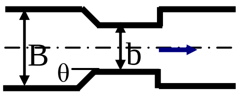
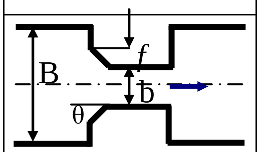
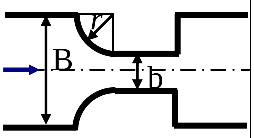
$$m = 0{,}30 + \frac{0{,}08}{1+2\text{cotg}\alpha\frac{H}{b}} \qquad (6\text{-}20)$$

α : l'angle d'écartement du talus du cône.

Entrée arrondi en plan raccordée d'après le tube d'évasement ; m=0,35 à 0,36

Le tableau suivant donne le coefficient de débit pour les déversoirs à seuil épais pour P_1 = 0 et H/b≤2

Tableau (6.2) : les coefficients de débit pour les déversoirs à seuils épais

Forme de l'entrée en plan		b/B						
		1,0	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0
		0,385	0,367	0,355	0,340	0,330	0,324	0,320
	Cotgθ = 0,5 1,0 – 3,0	 0,385 0,385	 0,373 0,375	 0,365 0,369	 0,356 0,361	 0,350 0,356	 0,346 0,352	 0,343 0,350
	f/b 0,05 ≥ 0,2	 0,385 0,385	 0,371 0,375	 0,362 0,368	 0,350 0,360	 0,343 0,355	 0,338 0,351	 0,345 0,349
	r/b 0,05 0,20 ≥0,50	 0,385 0,385 0,385	 0,371 0,375 0,378	 0,362 0,368 0,373	 0,350 0,360 0,368	 0,343 0,355 0,364	 0,338 0,351 0,362	 0,345 0,349 0,360

6-6 Déversoir noyé à large seuil (crête épaisse)

La figure (6.27) élucide le déversoir noyé à large seuil.

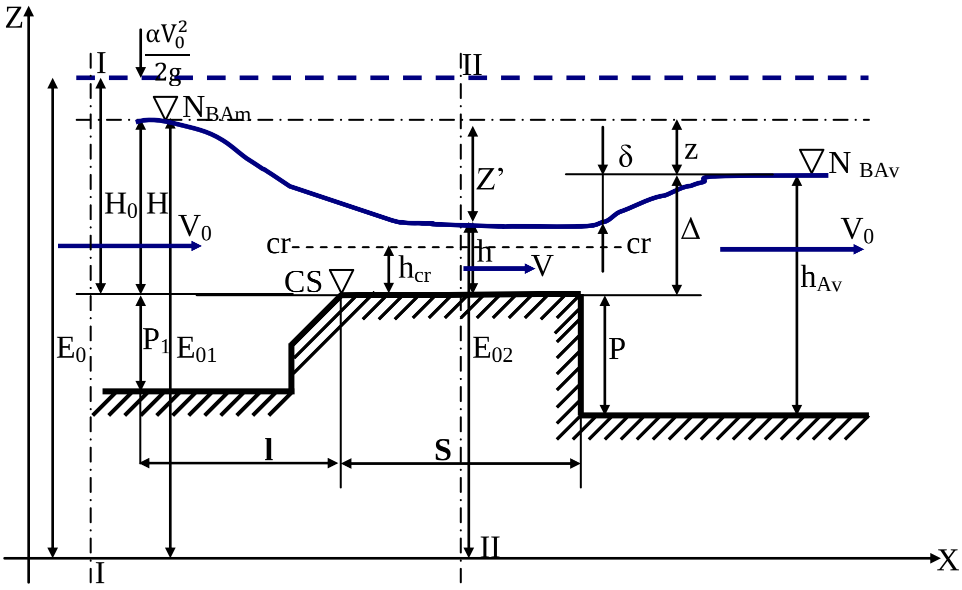


Fig. (6.27) : Déversoir noyé à crête épaisse

Le déversoir à large seuil est considéré comme noyé si le niveau d'eau du bief aval influe sur le débit.

La surélévation du niveau du bief aval au-dessus du seuil du déversoir n'influe pas sur l'écoulement jusqu'à une certaine limite. La valeur critique Δ/H_0=(hav-P) / H_0=k_2 dont le dépassement rend le déversoir noyé, dépend du coefficient de débit du déversoir et du degré d'élargissement du courant à la sortie du bief aval.

En première approximation, on peut considérer que le déversoir devient noyé à l'entrée progressive si Δ/H_0>0,75 et à l'entrée non progressive si Δ/H_0>0,85.

Le tableau (6.3) donne les valeurs du coefficient de vitesse pour les déversoirs à seuil épais dénoyé φ et noyéφ_n déterminées en fonction de m d'après D. Koumine. Les valeurs de k_2 sont calculées pour la condition Δ=h.

Tableau (6.3) : les coefficients de vitesse pour les déversoirs à seuils épais noyés et dénoyés

Paramètre	m				
	0,30	0,32	0,34	0,36	0,385
φ	0,94	0 ,96	0,97	0,98	1
φ_n	0,76; 0,78 ($h/H_0 < 0,85$)	0,84	0,90	0,96	1
k_2	-	0,88	0,84	0,81	0,67

La perte de charge est due aux pertes à l'entrée et à la transformation d'une partie de l'énergie cinétique en énergie potentielle à la diminution de la vitesse en aval du déversoir.

Ce phénomène est pris lors du calcul du débit par le coefficient σ_n en fonction d'une grandeur relative Δ/H_0 et de l'élargissement relatif du courant dans le bief aval.

$$\upsilon = \frac{b\Delta}{\Omega_{av}}$$

Tableau (6.4) : Le coefficient σ_n pour un déversoir à seuil épais

Δ/H_0	υ								
	1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0
0,75	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,78	0,97	1	1	1	1	1	1	1	0,97
0,80	0,95	1	1	1	1	1	1	1	0,95
0,82	0,92	0,99	1	1	1	1	1	0,99	0,92
0,84	0,89	0,97	0,99	1	1	1	0,99	0,97	0,89
0,86	0,85	0,94	0,96	0,99	1	0,99	0,96	0,94	0,85
0,88	0,81	0,90	0,93	0,97	0,96	0,97	0,93	0,90	0,81
0,90	0,75	0,84	0,88	0,92	0,91	0,92	0,88	0,84	0,75
0,92	0,69	0,78	0,82	0,85	0,84	0,85	0,82	0,78	0,69
0,94	0,61	0,70	0,73	0,76	0,75	0,76	0,73	0,70	0,61
0,96	0,51	0,59	0,62	0,65	0,64	0,65	0,62	0,59	0,51
0,98	0,36	0,44	0,46	0,49	0,48	0,49	0,46	0,44	0,36

6-7Déversoirs à seuil normal

Un déversoir est considéré comme un déversoir à seuil normal lorsque l'épaisseur de la paroi (S) en haut est comprise entre 0,5H et 2H (0,5H<S<2H).

6-7-1 Déversoir rectangulaire droit dénoyé à seuil normal curviligne

La figure (6.27) donne une vision générale sur le déversoir à seuil normal curviligne de type Creager-Ofitsérov.

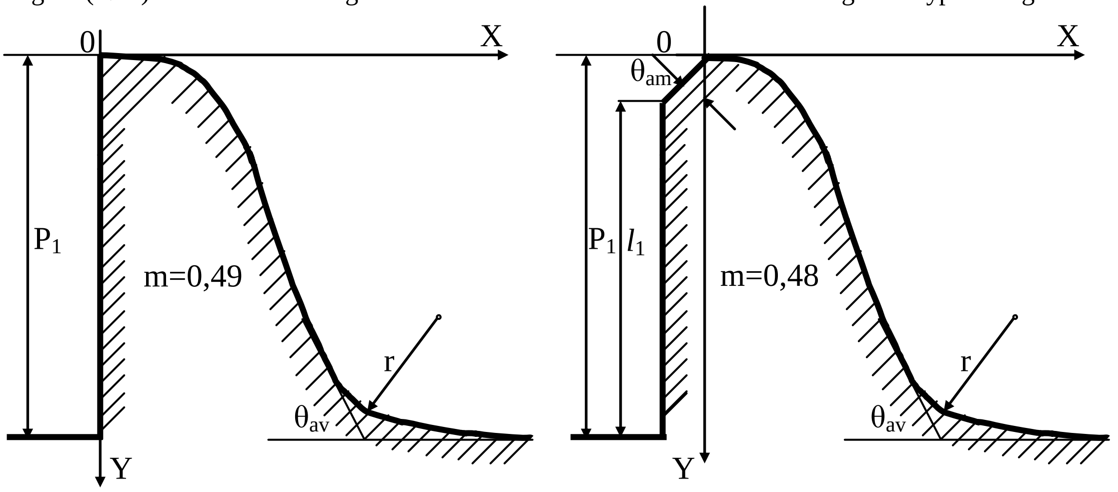


Fig. (6.28) : Déversoir à seuil normal de type Creager-Ofitsérov

Le débit de ce déversoir est donné par la relation démontrée précédemment : $Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$

Le coefficient de débit pour un déversoir sans vide au profil Creager-Ofitsérov, sous la charge de conception, est pris approximativement :

- m = 0,49 si la tête est arrondie.
- m = 0,48 si la tête est biseautée.

Si la charge en amont diffère de celle de profil H_{pr}, le coefficient de débit change et il est donné par :

$$m = m_{rep}\sigma_f\sigma_H$$

Où m_{rep} est le coefficient représentatif de débit du déversoir construit d'après les coordonnées de Creager-Ofitsérov ;

Pour $H_0 / P_1 \leq 6{,}5$ et $H_0 > 0{,}1$ m

$$m_{rep} = 0{,}50 - 0{,}012\frac{H_0}{P_1}$$

σ_f est le coefficient de forme qui tient compte de la forme de la tête du déversoir ;

σ_H est le coefficient de rendement de la charge qui tient compte de la variation de la charge par rapport à celle de profil.

Tableau (6.5): Coefficient de forme σ_f pour un déversoir dénoyé au profil Creager – Ofitsérov

θ_{am}	θ_{av}	$\frac{l_1}{P_1}$				
		0	0,3	0,6	0,9	1,0
15°	15°	0,880	0,878	0,855	0,850	0,933
	30°	0,910	0,908	0,985	0,880	0,974
	60°	0,927	0,925	0,902	0,895	1,000
45°	15°	0,915	0,915	0,911	0,919	0,933
	30°	0,953	0,950	0,950	0,956	0,974
	60°	0,974	0,974	0,970	0,978	1,000
75°	15°	0,930	0,930	0,930	0,930	0,933
	30°	0,972	0,972	0,972	0,972	0,974
	60°	0,998	0,998	0,998	0,999	1,000
90	15°	0,933	-	-	-	0,933
	30°	0,974	-	-	-	0,974
	60°	1,000	-	-	-	1,000

Tableau (6.5): Coefficient de rendement de la charge σ_H pour un déversoir dénoyé au profil Creager–Ofitsérov

$\frac{H}{H_{pr}}$	θ_{am}					
	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,897	0,886	0,875	0,864	0,853	0,842
0,4	0,934	0,928	0,921	0,914	0,907	0,900
0,6	0,961	0,957	0,953	0,949	0,945	0,940
0,8	0,982	0,980	0,978	0,977	0,975	0,973
1,2	1,016	1,017	1,019	1,020	1,022	1,024
1,4	1,029	1,032	1,036	1,039	1,042	1,045
1,6	1,042	1,048	1,051	1,055	1,060	1,064
1,8	1,054	1,059	1,065	1,071	1,076	1,082
2,0	1,64	1,071	1,078	1,085	1,092	1,099

Une arête horizontale sur la crête du déversoir, comme il est indiqué sur la Fig. (6.29), réduit son débit. Le coefficient de débit en cas où l'on rend la crête plus large, pour que l'entrée soit arrondie un peu et la face amont reste verticale, est donné par la relation de A. Bérézinski :

$$m = 0{,}36 + 0{,}1\frac{2{,}5 - \frac{S}{H}}{1 + 2\frac{S}{H}}$$

Les limites d'application de cette formule sont : $0,3 < S/H < 2$ et $P_1/H > 0,5$.

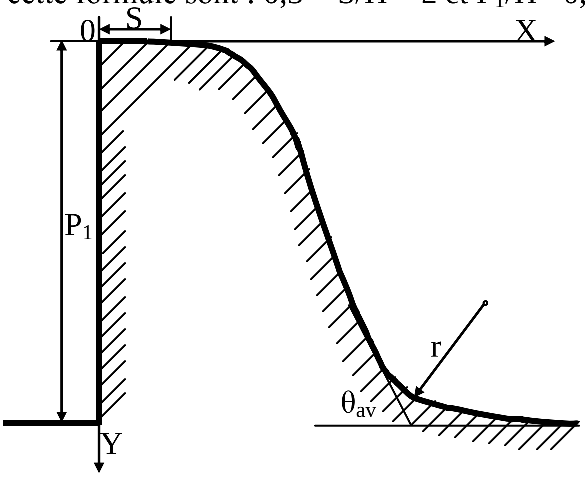


Fig. (6.29) : Déversoir à seuil normal avec une arête horizontale sur la crête

6-7-2 Déversoir rectangulaire droit noyé à seuil normal

Le déversoir à seuil normal est considéré comme noyé si les deux conditions suivantes sont simultanément remplies :

1) Le niveau de l'eau dans le bief aval est supérieur à la crête du déversoir ;
2) L'écoulement en aval du déversoir est fluvial.

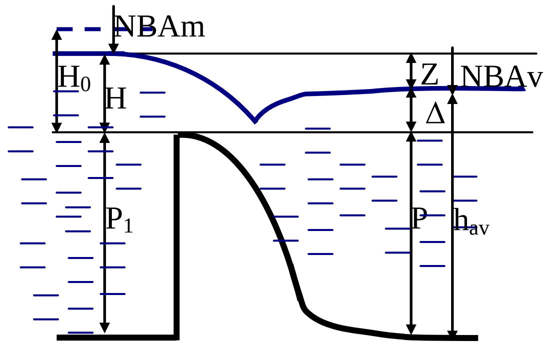


Fig. (6.30) : Déversoir rectangulaire noyé à seuil normal

Le déversoir est noyé si $(Z/P)=(H+P-h_{av})/P<(Z/P)_{cr}$. La valeur de (Z/P) critique est déterminée en fonction du rapport (H/P) et m sur l'abaque, donné par la figure (6.31) conçu avec des données expérimentales.

$$Q = \sigma_n m b\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Les valerurs de σ_n sont déterminées pour le profil de Creager-Ofitsérov selon le tableau suivant :

Δ/H_0	0	0,20	0, 30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0
σ_n	1	0,996	0,99	0,98	0,97	0,93	0,89	0,85	0,80	0,70	0,59	0,41	0

Avec $\Delta=h_{av}-P$

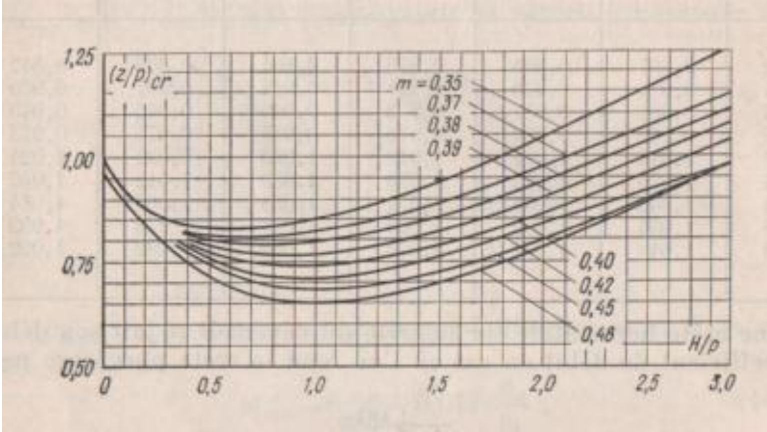


Fig.(6.31): L'abaque $(z/p)_{cr}$ en fonction du rapport (H/P) cas d'un canal à seuil normal

6-7-3 Déversoir rectangulaire à seuil normal contracté

La contraction est générée quand la largeur, b, du déversoir est inférieure à la largeur du canal d'amenée B, ce qui diminue la largeur et par conséquent le débit du déversoir. Le débit réel du déversoir doit être multiplié par un coefficient de contraction latérale ε.

$$Q = \varepsilon m b\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

L'étranglement du courant est dû à la présence des piles dans le déversoir qui divisent son front en plusieurs portées. Zamarine a pris en considération dans sa formule l'influence des piles sur l'écoulement.

$$\varepsilon = 1 - a\frac{H_0}{b + H_0}$$

Où b est la largeur d'une portée entre deux piles.
a : est un coefficient qui est en fonction de la forme des piles, plus les piles sont avancées vers le bief amont par rapport à la face amont du déversoir, plus le coefficient a décroît.

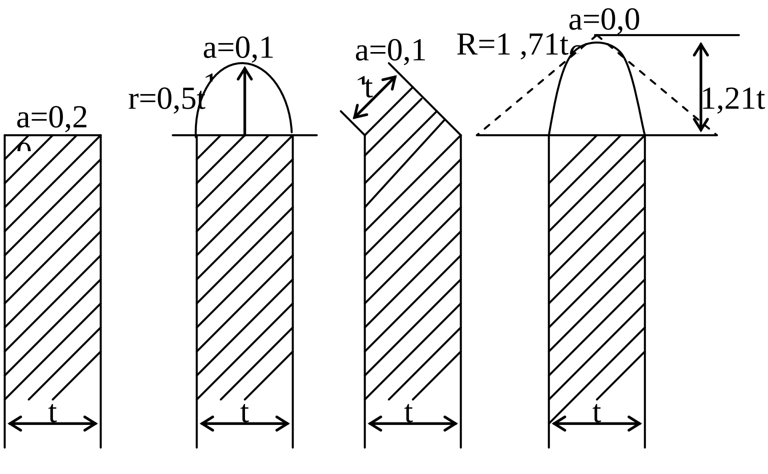


Fig.(6.32) : Forme des abutements et des piles

6-7-4 Coefficient de débit des déversoirs à seuil normal rectilignes

Le coefficient de débit, m, des déversoirs est déterminé par les formules suivantes :
Pour les déversoirs rectangulaires H ≤ P1 ≤ 4H

$$m = 0{,}42(0{,}7 + 0{,}185\frac{H}{S})$$

pour le profil à une arête d'éntrée arrondie ou biseauté avec H ≤ P1 ≤ 4H

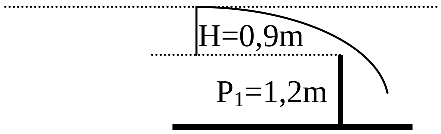
$$m = 0{,}44(0{,}7 + 0{,}185\frac{H}{S})$$

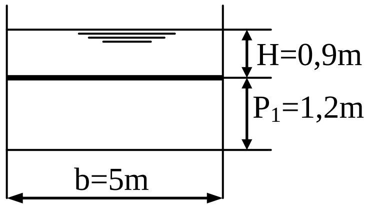
Le coefficent de débit d'une paroi de déversement de profil trapézoïdal en fonction du rapport H /S, de la hauteur de la paroi et de l'inclinaison des faces amont et aval est dans les limites de m = 0,32 à 0,44.

Chapitre VI: L'écoulement par-dessus des déversoirs (exercices & solutions)

Exercice n°1

Déterminer le débit d'eau s'écoulant par-dessus d'un déversoir de forme rectangulaire dénoyé sans contraction de 5 m de large et de P1=P=1,2 m de haut, sous une hauteur de charge de 0,9 m. la valeur du coefficient de débit du déversoir m=0,43. Tenir compte de la vitesse d'approche V_0.





Solution

a) Sans tenir compte de la vitesse d'approche V_0

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}$$

$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}(0{,}9)^{3/2} = 8{,}1311454\ m^3/s$$

b) Avec tenir compte de la vitesse d'approche V_0

$$V_{01} = \frac{Q}{\omega} = \frac{8{,}1311454}{2{,}1x5} = 0{,}7743948\ m/s$$

$$\frac{\alpha V_{01}^2}{2g} = \frac{1x(0{,}7743948)^2}{19{,}62} = 0{,}03056510\ m$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_{01}^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_{01}^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}\left[(0{,}9 + 0{,}03056510)^{3/2} - (0{,}03056510)^{3/2}\right] = 8{,}49796865752m^3/s$$

$$V_{02} = \frac{Q}{\omega} = \frac{8{,}49796865752}{2{,}1x5} = 0{,}809330\ m/s$$

$$\frac{\alpha V_{02}^2}{2g} = \frac{1x(0{,}809330)^2}{19{,}62} = 0{,}0333850975m$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_{02}^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_{02}^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}\left[(0{,}9 + 0{,}0333850975)^{3/2} - (0{,}0333850975)^{3/2}\right] = 8{,}5296552m^3/s$$

$$V_{03} = \frac{Q}{\omega} = \frac{8{,}5296552}{2{,}1x5} = 0{,}812348\ m/s$$

$$\frac{\alpha V_{03}^2}{2g} = \frac{1x(0{,}812348)^2}{19{,}62} = 0{,}0336345m$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_{03}^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_{03}^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}\left[(0{,}9 + 0{,}0336345)^{3/2} - (0{,}0336345)^{3/2}\right] = 8{,}53244546\ m^3/s$$

$$V_{04} = \frac{Q}{\omega} = \frac{8{,}53244546}{2{,}1x5} = 0{,}8126138536\ m/s$$

$$\frac{\alpha V_{04}^2}{2g} = \frac{1x(0{,}8126138536)^2}{19{,}62} = 0{,}03365654\ m$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_{04}^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_{04}^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}\left[(0{,}9 + 0{,}03365654\ )^{3/2} - (0{,}03365654\ )^{3/2}\right] = 8{,}532692\ m^3/s$$

$$V_{05} = \frac{Q}{\omega} = \frac{8{,}532692}{2{,}1x5} = 0{,}81263730\ m/s$$

$$\frac{\alpha V_{05}^2}{2g} = \frac{1x(0{,}8126138536)^2}{19{,}62} = 0{,}03365848\ m$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_{05}^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_{05}^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

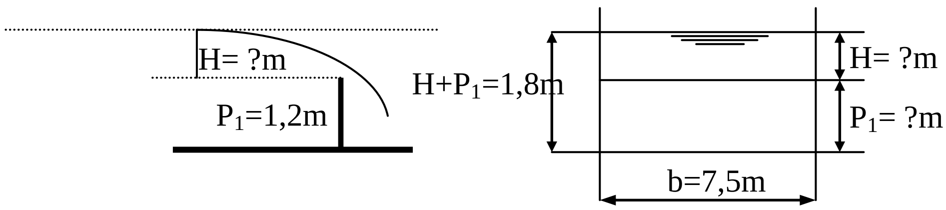
$$Q = 0{,}43x5x\sqrt{19{,}62}\left[(0{,}9 + 0{,}03365848\ )^{3/2} - (0{,}03365848\ )^{3/2}\right] = 8{,}5327134\ m^3/s$$

$$\Delta Q = Q_5 - Q_4 = 8{,}5327134 - 8{,}532692 = 0{,}0000214\ m^3/s$$

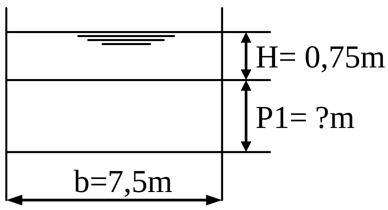
Exercice n°2

Un déversoir de forme rectangulaire sans contraction, de 7,5 m de large, est destiné à débiter 10 m^3/s dans un canal.

Le coefficient de débit du déversoir m =0,42, a) Quelle doit être la hauteur P1 du déversoir (Précision 0,01m), si l'eau qui se trouve derrière a une profondeur qui ne dépasse pas 1,8 m ?



b) Quelle doit être la hauteur P1 du déversoir (Précision 0,01m), si H=0,75 m en tenant compte de la vitesse d'approche V_0 ?



Solution

a) La vitesse d'approche V_0 :

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{1{,}8x7{,}5} = 0{,}74\ m/s$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$10 = 0{,}42x7{,}5x\sqrt{19{,}62}\left[\left(H + \frac{(0{,}74)^2}{19{,}62}\right)^{3/2} - \left(\frac{(0{,}74)^2}{19{,}62}\right)^{3/2}\right]$$

$$0{,}71670 = \left[(H + 0{,}02791)^{3/2} - (0{,}02791)^{3/2}\right] \Rightarrow 0{,}71670 = \left[(H + 0{,}02791)^{3/2} - 0{,}004663\right]$$

$$0{,}721363 = \left[(H + 0{,}02791)^{3/2}\right] \Rightarrow H + 0{,}02791 = (0{,}721363)^{2/3} \Rightarrow H = (0{,}721363)^{2/3} - 0{,}02791$$

$$H = 0{,}776\ m$$

$$P_1 = 1{,}8 - 0{,}776 = 1{,}024\ m$$

La hauteur du déversoir est P_1=1,024 m.

b) Calcul de P_1 si la profondeur H=0,75 m en tenant compte de la vitesse d'approche V_0.

$$V_0 = \frac{Q}{(P_1 + H)b} = \frac{10}{(P_1 + H)x7{,}5} \Rightarrow V_0^2 = \frac{100}{56{,}25(P_1 + 0{,}75)^2}$$

$$Q = 0{,}42x7{,}5\sqrt{19{,}62}\left[\left(0{,}75 + \frac{100}{56{,}25(P_1 + 0{,}75)^2x19{,}62}\right)^{3/2} - \left(\frac{100}{56{,}25(P_1 + 0{,}75)^2x19{,}62}\right)^{3/2}\right]$$

$$10 = 13{,}953\left[\left(0{,}75 + \frac{100}{1103{,}625(P_1 + 0{,}75)^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{100}{1103{,}625(P_1 + 0{,}75)^2}\right)^{3/2}\right]$$

$$0{,}716692 = \left[\left(0{,}75 + \frac{100}{1103{,}625(P_1 + 0{,}75)^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{0{,}027275185}{(P_1 + 0{,}75)^3}\right)\right]$$

$$\left(0{,}75 + \frac{100}{1103{,}625(P_1 + 0{,}75)^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{0{,}027275185}{(P_1 + 0{,}75)^3}\right) - 0{,}716692 = 0$$

Après résolutionde cette équation, par l'une des méthodes numériques, on obtient la valeur P_1 appellée la hauteur de la pelle en amont du déversoir.

P1 (m)	0,1	0,40	0,45	0,46	0,45466
F(P1)	0,0579612418	0,0058989159	0,0004746422	-0,0005375994	0,0000000908

La valeur de P1 =0,45466 m.

Pour vérifier le resultat, on suit le cheminement suivant :

La vitesse d'approche V_0a comme valeur :

$$V_0 = \frac{Q}{(P_1 + H)b} = \frac{10}{(0{,}45466\ + 0{,}75)x7{,}5} = 1{,}10699\ m/s$$

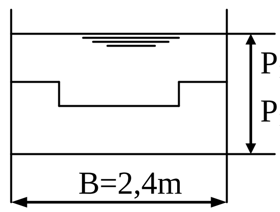
Le débit :

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = 0{,}42x7{,}5x\sqrt{19{,}62}\left[\left(0{,}75 + \frac{(1{,}10699)^{\ 2}}{19{,}62}\right)^{3/2} - \left(\frac{(1{,}10699)^{\ 2}}{19{,}62}\right)^{3/2}\right] = 10{,}00\ m^3/s$$

Exercice n°3

Un déversoir contracté, de 1,2 m de haut, doit être établi sur un canal de 2,4 m de large. Le débit maximum par-dessus du déversoir est de 1,62 m^3/s quand la profonduer totale derrière le déversoir est de 2,1 m. Quelle largeur du déversoir doit-on établir ?



Solution

a) La vitesse d'approche V_0 :

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{1{,}62}{2{,}1x2{,}4} = 0{,}321\ m/s$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0{,}321)^{\ 2}}{19{,}62} = 0{,}00527\ m$$

La hauteur due à l'énergie cinétique est très petite, on peut le considérer comme négligeable .

La profondeur H au-dessus du déversoir est égale à 2,1-1,2=0,9 m.

Calcul de m_0 à l'aidede la formule de Bazin :

$$m_0 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{H}{H + P_1})^2\right) = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}9}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{0{,}9}{2{,}1})^2\right) = 0{,}45$$

Le debit est donné par la relation d'un déversoir contracté

$$Q = m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2} \Rightarrow b = \frac{Q}{m_0\sqrt{2g}H^{3/2}} = \frac{1{,}62}{0{,}45\sqrt{19{,}62}(0{,}9)^{3/2}} = 0{,}95\ \mathrm{m}$$

Comme b<B le déversoir travaille dans les conditions de la contraction latérale est par conséquent le débit est donné par :

$$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

Calcul du coefficient de débit du déversoir m_0 par la relation empirique d'Hégly :
Utilisons b=0,95 comme une valeur de démarrage pour calculer la première valeur de m_C.

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03\frac{B-b}{B}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{b}{B})^2(\frac{H}{H + P_1})^2\right)$$

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}9} - 0{,}03\frac{2{,}4-0{,}95}{2{,}4}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{0{,}95}{2{,}4})^2(\frac{0{,}9}{2{,}1})^2\right) = 0{,}43$$

$$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2} \Rightarrow b = \frac{Q}{m_c\sqrt{2g}H^{3/2}} = \frac{1{,}62}{0{,}43\sqrt{19{,}62}(0{,}9)^{3/2}} = 0{,}996 \approx 1\ \mathrm{m}$$

Recalculons m_c par la nouvelle valeur de b

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}9} - 0{,}03\frac{2{,}4-0{,}996}{2{,}4}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{0{,}996}{2{,}4})^2(\frac{0{,}9}{2{,}1})^2\right) = 0{,}397$$

$$b = \frac{Q}{m_c\sqrt{2g}H^{3/2}} = \frac{1{,}62}{0{,}397\sqrt{19{,}62}(0{,}9)^{3/2}} = 1{,}07897 \approx 1{,}08\mathrm{m}$$

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}9} - 0{,}03\frac{2{,}4-1{,}08}{2{,}4}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{1{,}08}{2{,}4})^2(\frac{0{,}9}{2{,}1})^2\right) = 0{,}3995$$

$$b = \frac{Q}{m_c\sqrt{2g}H^{3/2}} = \frac{1{,}62}{0{,}3995\sqrt{19{,}62}(0{,}9)^{3/2}} = 1{,}072 \approx 1{,}07\mathrm{m}$$

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}9} - 0{,}03\frac{2{,}4-1{,}07}{2{,}4}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{1{,}07}{2{,}4})^2(\frac{0{,}9}{2{,}1})^2\right) = 0{,}3992$$

La dernière valeur de $m_c$est très proche de la précedente. Alors, on opte pour b=1,07 m.

Exercice n°4

Le flot provenant d'un orifice à bord mince de 15 cm de diamètre, sous une charge de 3,0 m s'écoule dans le canal d'un déversoir et par-dessus un déversoir contracté. Le canal a 1,8 m de large et, pour le déversoir , P1=1,50 m et b=0,30 m.Calculer la profondeur d'eau dans le canal si μ=0,60 et m=0,415 ?

Solution

Le débit de l'orifice est donné par la relation :

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}60\mathrm{x}\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{19{,}62\mathrm{x}3} = 0{,}08135\ \mathrm{m^3/s}$$

$$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2} \Rightarrow H = (\frac{Q}{m_c b\sqrt{2g}})^{2/3}$$

$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03\frac{B-b}{B}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{b}{B})^2(\frac{H}{H + P_1})^2\right)$$

$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03\frac{1{,}8-0{,}3}{1{,}8}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{0{,}3}{1{,}8})^2(\frac{H}{H+1{,}5})^2\right) = (0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2)$

$$H = \left(\frac{Q}{(0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2)b\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$H = \left(\frac{0{,}08135}{(0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2)x0{,}3x\sqrt{19{,}62}}\right)^{2/3}$$

$$H = \left(\frac{0{,}06124}{(0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2)}\right)^{2/3} \Rightarrow H^{3/2} = \frac{0{,}06124}{(0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2)}$$

$$H^{\frac{3}{2}}(0{,}38 + \frac{0{,}0027}{H})(1 + 0{,}01528(\frac{H}{H+1{,}5})^2) = 0{,}06124$$

$$\mathbf{H^{\frac{3}{2}}\left(0{,}38 + 0{,}0058064\frac{H^2}{(H+1{,}5)^2} + \frac{0{,}0027}{H} + 0{,}000041256\frac{H}{(H+1{,}5)^2}\right) - 0{,}06124 = 0}$$

Utilisons, une méthode numérique pour résoudre cette équation .

H (m)	0,1	0,2	0,3	0,29	0,291	**0,2915**
F(H)	-0,0483687617	-0,0260368466	0,0027063526	-0,0004171053	-0,0001071157	**0,0000480764**

La solution obtenue est H= **0,2915 m**
La profondeur d'eau dans le canal est $h=H+P_1=0{,}2915+1{,}5=1{,}7915$ m

Exercice n°5
Le débit d'eau qui passe par-dessus d'un déversoir triangulaire de 45° est de 0,020 m^3/s. Pour c=0,58 calculer la charge du éversoir ?
Réponse : H=0,2623m
Solution

$$Q = \frac{8}{15}C\sqrt{2g}\text{tg}\frac{\theta}{2}H^{\frac{5}{2}} \Rightarrow H = \left(\frac{15Q}{8C\sqrt{2g}\text{tg}\frac{\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{15x0{,}020}{8x0{,}58x\sqrt{19{,}62}\text{tg}\frac{45}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 0{,}26230 \text{ m}$$

Exercice n°6
Quelle est la largeur du déversoir de forme trapézoidale qu'il faut construire pour que la charge soit de 0,47 m pour un débit de 3,45 m^3/s ?
Réponse : b=5,7565 m
Solution

$$Q = 1{,}86bH^{3/2} \Rightarrow b = \frac{Q}{1{,}86H^{3/2}} = \frac{3{,}45}{1{,}86(0{,}47)^{3/2}} = 5{,}7565 \text{ m}$$

Exercice n°7
Un canal rectangulaire de 15 m de long et de 3 m de large, alimente un déversoir sans contraction avec une charge de 0,3 m. Si on coupe l'alimentation du canal, au bout de combien de temps la hauteur de charge du déversoir sera-t-elle de 0,1m ? utiliser un coefficient de débit du déversoir m=0,41.
Réponse : t=22,078s

Solution

$$dV_1 = mb\sqrt{2g}h^{3/2}dt = dV_2 = -\Omega dh$$

$$mb\sqrt{2g}h^{3/2}dt = -\Omega dh \Rightarrow dt = \frac{-\Omega}{mb\sqrt{2g}h^{3/2}}dh \Rightarrow dt = \frac{-\Omega}{mb\sqrt{2g}}h^{-\frac{3}{2}}dh$$

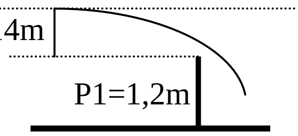
$$t = \int dt = -\frac{\Omega}{mb\sqrt{2g}}\int_{h1}^{h2} h^{-\frac{3}{2}}dh = -\frac{-2\Omega}{mb\sqrt{2g}}\left[h^{-\frac{1}{2}}\right]_{h1}^{h2} \Rightarrow t = \frac{2\Omega}{mb\sqrt{2g}}(h_2^{-\frac{1}{2}} - h_1^{-\frac{1}{2}})$$

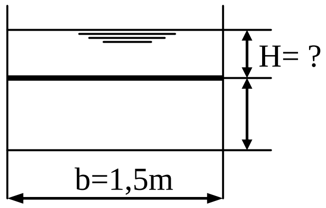
$$t = \frac{2\Omega}{0{,}41x3\sqrt{19{,}62}}(0{,}1^{-\frac{1}{2}} - 0{,}3^{-\frac{1}{2}}) = 22{,}078\ \text{Secondes}$$

Exercice n°8

Quelle doit être la profondeur de l'eau à 1,5 m d'un déversoir sans contraction rectangulaire de 1,50 m de large et de 1, 2 m de haut si le débit de l'eau qui passe par-dessus est de 0,27 m^3/s ?

Réponse : H=1,114m





Solution

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Francis a donné le débit du déversoir par la formule :

$$Q = 1{,}84b\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Si la vitesse d'approche est négligeable la formule du débit devient :

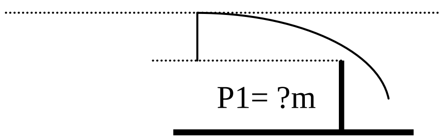
$$Q = 1{,}84bH^{3/2} \Rightarrow H^{3/2} = \frac{Q}{1{,}84b} \Rightarrow H = (\frac{Q}{1{,}84b})^{2/3}$$

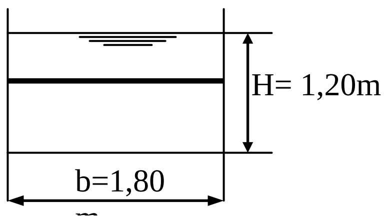
$$H = (\frac{0{,}27}{1{,}84x1{,}5})^{2/3} = 0{,}2123\ m$$

$$h = H + P_1 = 0{,}2123 + 1{,}2 = 1{,}4123\ m$$

Exercice n°9

Un débit de 0,85 m^3/s se produit dans un canal de 1,2 m de profondeur et 1,8 m de large. Calculer la hauteur à laquelle il faut placer la crête d'un déversoir à crête aigué, sans contraction, pour que l'eau ne déborde pas sur les côtés du canal, (m=0,415).**Réponse** : P1=0,80m





Solution

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{bh} = \frac{0{,}85}{1{,}2x1{,}8} = 0{,}3935\ m/s$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0{,}3935)^2}{19{,}62} = 0{,}0078928 \text{ m}$$

$$\mathbf{0},85 = 0{,}415x1{,}8\sqrt{19{,}62}\left[(H + 0{,}0078928)^{3/2} - (0{,}0078928)^{3/2}\right] \Rightarrow 0{,}25759 = \left[(H + 0{,}0078928)^{3/2}\right]$$

$$(H + 0{,}0078928) = 0{,}4048 \Rightarrow H = 0{,}39695 \approx 0{,}40 \text{ m}$$

$$P_1 = 1{,}2 - H = 1{,}2 - 0{,}4 = 0{,}80 \text{ m}$$

Exercice n°10

Un débit de 10,5 m^3/s passe dans un déversoir sans contraction de 4,8 m de large. La profondeur totale en amont du déversoir ne doit pas dépasser 2,40 m. Calculer la hauteur à laquelle on doit placer la crête pour permettre ce débit (m=0,415).

Réponse : P_1=1,326m

Solution

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{bh} = \frac{10{,}5}{4{,}8x2{,}4} = 0{,}911458 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0{,}911458)^2}{19{,}62} = 0{,}04234 \text{ m}$$

$$\mathbf{10},5 = 0{,}415x4{,}8\sqrt{19{,}62}\left[(H + 0{,}04234)^{3/2} - (0{,}04234)^{3/2}\right] \Rightarrow 1{,}1987 = \left[(H + 0{,}04234)^{3/2}\right]$$

$$(H + 0{,}04234) = 1{,}12844 \Rightarrow H = 1{,}086 \text{ m}$$

$$P_1 = 2{,}4 - H = 2{,}4 - 1{,}086 = 1{,}314 \text{ m}$$

Exercice n°11

Un déversoir sans contraction (de coefficient de débit m=0,415) sous une charge de 10 cm alimente un réservoir muni d'un orifice de 7,5 cm de diamètre. Le déversoir qui a 60 cm de large et 0,80 m de haut, est placé sur un canal rectangulaire. La perte de charge à travers l'orifice est de 0,60 m et le coefficient de contraction ε=0,65. Calculer la hauteur de charge à laquelle va monter l'eau dans le réservoir et le coefficient de vitesse φ de l'orifice ?

Réponse : h=8,06845 m; φ=0,96

Solution

Calcul du débit deversé par le déversoir :

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

Première méthode

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{bh} = \frac{Q}{0{,}6x0{,}9} \Rightarrow V_0^2 = \frac{Q^2}{0{,}2916}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{Q^2}{0{,}2916x19{,}62} = \frac{Q^2}{0{,}2916x19{,}62} = \frac{Q^2}{5{,}721192}$$

$$\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} = \left(\frac{Q^2}{0{,}2916x2g}\right)^{3/2} = \frac{Q^3}{13{,}6845}$$

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(0{,}1 + \frac{Q^2}{5{,}721192}\right)^{3/2} - \frac{Q^3}{13{,}6845}\right]$$
$$= 0{,}415x0{,}6\sqrt{19{,}62}\left[\left(0{,}1 + \frac{Q^2}{5{,}721192}\right)^{3/2} - \frac{Q^3}{13{,}6845}\right]$$
$$\frac{Q}{1{,}1029} + \frac{Q^3}{13{,}6845} = \left(0{,}1 + \frac{Q^2}{5{,}721192}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3}{15{,}093}$$
$$= \left(0{,}1 + \frac{Q^2}{5{,}721192}\right)^{3/2}$$
$$\left(\frac{13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3}{15{,}093}\right)^{2/3} = \frac{0{,}5721192 + Q^2}{5{,}721192} \Rightarrow \frac{(13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3)^{2/3}}{6{,}1073}$$
$$= \frac{0{,}5721192 + Q^2}{5{,}721192}$$
$$(13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3)^{2/3} = 1{,}06749(0{,}5721192 + Q^2)$$
$$(13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3)^{2/3} = 0{,}6107 + 1{,}06749Q^2$$
$$\mathbf{(13{,}6845Q + 1{,}1029Q^3)^{2/3} - 0{,}6107 + 1{,}06749Q^2 = 0}$$

La résolution de cette dernière équation par l'une des méthodes numériques, on prend comme valeur de démarrage Q_0=0,03487778 m^3 /s.

i	0	1	2	3	4	5
Q	0,03487778	0,03493172	0,0348000	0,0347600	0,0347610	**0,0347611**
f	0,0013736073	0,002003140	0,00045777	-0,00001270	-0,00000094362	**0,0000002327853401**

Deuxième méthode

Supposons que la vitesse d'approche en premier lieu est négligeable, calculons le premier débit par la formule :

$$Q_1 = mb\sqrt{2g}H^{3/2} = 0{,}415x0{,}6x\sqrt{19{,}62}(0{,}6)^{3/2} = 0{,}03487778\ m^3/s$$

Par la suite introduisons la vitesse d'approche.

$$V_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{bh} = \frac{0{,}03487778}{0{,}6x0{,}9} = 0{,}06458848\ m/s$$
$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0{,}06458848)^{\ 2}}{19{,}62} = 0{,}000212623456790\ m$$
$$Q_2 = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$
$$Q_2 = 0{,}415x0{,}6x\sqrt{19{,}62}\left[\left(0{,}1 + \frac{0{,}06458848}{19{,}62}\right)^{3/2} - \left(\frac{0{,}06458848}{19{,}62}\right)^{3/2}\right]$$
$$= 0{,}03498566\ m^3/s$$
$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = 0{,}03498566 - 0{,}03487778 = 0{,}00010788\ m^3/s$$

La variation de débit est très petite, on peut négliger l'influence de la vitesse d'approche V_0.
La vitesse réelle est donnée par :

$$V_r = \varphi\sqrt{2gH}$$

De l'équation de continuité :

$$V_r = \frac{Q}{\omega\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{0{,}0347611}{0{,}65\frac{\pi(0{,}075)^2}{4}} = 12{,}1050\ m/s$$

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{(12{,}1050\ )^2}{19{,}62} = 7{,}46845\ m$$
$$H_r = H + hp = 7{,}46845 + 0{,}60 = 8{,}06845\ m$$
$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{19{,}62x8{,}06845} = 12{,}58185\ m/s$$
$$\varphi = \frac{V_r}{V} = \frac{12{,}1050}{12{,}58185} = 0{,}9621$$
$$Q = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gH} = 0{,}65x0{,}9621\frac{\pi(0{,}075)^2}{4}\sqrt{19{,}62x8{,}06845} = 0{,}03476086\ m^3/s$$

Exercice n°12
Un déversoir contracté de 1,2 m de large est placé sur un canal rectangulaire de 2,70 m de large. La hauteur de la crête du déversoir est de 1,1 m et la hauteur de charge de 37,5 cm. Calculer le débit Q ?
Réponse : Q=0,486 m^3/s

Solution
Le déversoir est contracté b<B
$$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2}$$
Où le coefficient de débit dudéversoir m_c, qui inférieur à m_0, est donné par la relation empirique d'Hégly :
$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03\frac{B-b}{B}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{b}{B})^2(\frac{H}{H+P_1})^2\right)$$
$$m_c = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}375} - 0{,}03\frac{2{,}7-1{,}2}{2{,}7}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{1{,}2}{2{,}7})^2(\frac{0{,}375}{0{,}375+1{,}1})^2\right) = 0{,}39831$$
$$Q = m_c b\sqrt{2g}H^{3/2} = 0{,}39831x1{,}2x\sqrt{19{,}62}x(0{,}375)^{\frac{3}{2}} = 0{,}486\ \ m^3/s$$

Exercice n°13
Un déversoir sans contraction est situé à l'extrémité d'un réservoir carrée de 3,0 m de côté. Si la hauteur de charge initiale appliquée au déversoir est de 60 cm, combien faudra-t-il de temps pour que les 3,6 m^3 d'eau quittent le réservoir ? m=0,415
Réponse : t= 3,08 m^3/s
Solution

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$
$$Qdt = Volume \Rightarrow mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]dt = V$$
Si la vitesse d'approche est négligeable le débit Q a comme relation la suivante :
$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2} = 0{,}415x3x\sqrt{19{,}62}(0{,}6)^{3/2} = 2{,}56298\ m^3/s$$
$$t = \frac{2\Omega}{mb\sqrt{2g}}(h_2^{-\frac{1}{2}} - h_1^{-\frac{1}{2}})$$
h_1=0,6 et h_2= 0,6-(3,6 /ω)=0,6-(3,6 /9)=0,2 m
$$t = \frac{2x9}{0{,}415x3\sqrt{19{,}62}}(0{,}2^{-\frac{1}{2}} - 0{,}6^{-\frac{1}{2}}) = 3{,}08\ \text{Secondes}$$

Exercice n°14

Un canal rectangulaire de 18 m de long par 3 m de large, se vide par-dessus un déversoir sans contraction de 3 m de large sous une charge de 30 cm. Si l'alimentation est brusquement coupée, quelle sera la charge appliquée au déversoir au bout de 36 secondes ? m=0,415

Réponse : h=0,074m

Solution

$$t = \frac{2\Omega}{mb\sqrt{2g}}(h_2^{-\frac{1}{2}} - h_1^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow (h_2^{-\frac{1}{2}} - h_1^{-\frac{1}{2}}) = \frac{mb\sqrt{2g}}{2\Omega} t \Rightarrow h_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{mb\sqrt{2g}}{2\Omega} t + h_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$(h_2^{-\frac{1}{2}})^{-2} = h_2 = (\frac{mb\sqrt{2g}}{2\Omega} t + h_1^{-\frac{1}{2}})^{-2} = \left(\frac{0{,}415x3\sqrt{19{,}62}}{2x3x18} x36 + 0{,}3^{-0{,}5}\right)^{-2} = 0{,}07449 \text{ m}$$

Exercice n°15

Determiner le débit d'un déversoir rectangulaire droit en mince paroi à crête droite sans contraction large de b=0,8 m, de hauteur de seuil P=P1=0,4 m et de charge H=0,25 m. La profondeur de l'eau en aval du déversoir :

a) hav1=0,35 m
b) hav2=0,6 m

Solution

La formule générale du débit du déversoir sans contraction est donnée par la relation :

$$Q = \sigma_n m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

Le coefficient de débit du déversoir est déterminé par la formule de Bazin :

$$m_0 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{H}{H + P_1})^2\right)$$

$$= \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{0{,}25}\right)\left(1 + 0{,}55(\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}4})^2\right) = 0{,}45$$

a) P=0,4>hav1=0,35 m, le déversoir est dénoyé et par conséquent **σ**n=1

$$Q = \sigma_n m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2} = 1x0{,}45x0{,}8\sqrt{19{,}62}(0{,}25)^{3/2} = 0{,}199325 \approx 200 \text{ l/s}$$

b) P=0,4<hav1=0,6 m, le déversoir est noyé et par conséquent **σ**n≠1

$$\boldsymbol{\sigma}_n = 1{,}05(1 + 0{,}2\frac{hav - P}{P})x\sqrt[3]{\frac{P + H - hav}{H}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\frac{0{,}6 - 0{,}4}{0{,}4}\right)x\sqrt[3]{\frac{0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}6}{0{,}25}} = 0{,}675$$

$$Q = \sigma_n m_0 b\sqrt{2g}H^{3/2} = 0{,}675x0{,}45x0{,}8\sqrt{19{,}62}(0{,}25)^{3/2} = 0{,}13454445 \approx 135 \text{ l/s}$$

Exercice n°16

Determiner la largeur d'un déversoir rectangulaire droit en mince paroi à crête droite sans contraction. Si le débit Q=520 l/s,la hauteur de seuil P=P1=0,4 m, H=0,35 m, la largeur du canal d'amenée B=2,4 m,la profondeur de l'eau en aval du déversoir hav=0,3m.

Solution

P=0,4 >hav=0,3 et le déversoir est dénoyé

Supposons en premier cas que le déversoir est contracté, on détermine m_0à l'aide de la formule de Bazin :

$$m_0=\left(0{,}405+\frac{0{,}0027}{H}\right)\left(1+0{,}55\left(\frac{H}{H+P_1}\right)^2\right)$$
$$=\left(0{,}405+\frac{0{,}0027}{0{,}35}\right)\left(1+0{,}55\left(\frac{0{,}35}{0{,}35+0{,}4}\right)^2\right)=0{,}46$$
$$Q=m_0b\sqrt{2g}H^{3/2}\Rightarrow b=\frac{Q}{m_0\sqrt{2g}H^{3/2}}=\frac{0{,}52}{0{,}46\sqrt{19{,}62}(0{,}35)^{3/2}}=1{,}23\ \mathrm{m}$$

$b<B$, le déversoir travaille dans les conditions de la contraction latérale et le calcul de m_c ou lieu de m_0 s'avère nécessaire.

$$m_c=\left(0{,}405+\frac{0{,}0027}{H}-0{,}03\frac{B-b}{B}\right)\left(1+0{,}55\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{H}{H+P_1}\right)^2\right)$$
$$m_c=\left(0{,}405+\frac{0{,}0027}{0{,}35}-0{,}03\frac{2{,}4-1{,}23}{2{,}4}\right)\left(1+0{,}55\left(\frac{1{,}23}{2{,}4}\right)^2\left(\frac{0{,}35}{0{,}35+0{,}4}\right)^2\right)=0{,}412$$
$$Q=m_cb\sqrt{2g}H^{3/2}\Rightarrow b=\frac{Q}{m_c\sqrt{2g}H^{3/2}}=\frac{0{,}52}{0{,}412\sqrt{19{,}62}(0{,}35)^{3/2}}=1{,}37\ \mathrm{m}$$

On recalcule de nouveau le coefficient m_c on obtient une valeur est égale à 0,415 qui proche de la précédente m_c = 0,412 et dans ce cas-là on accepte b=1,37 m.

Exercice n°17

Determiner le débit du déversoir à seuil épais si la largeur du déversoir est égale à la largeur du canal d'amenée b=B=5 m, la hauteur du seuil P=1 m, la profondeur de l'eau en amont h_{am} =2,60 m. L'entrée est arrondie à r /H =0,2. La profondeur en aval h_{av}=2,5 m.

Solution

$$Q=\sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

La vitesse d'approche V_0 est inconnue, donc le problème est résolu par l'une des méthodes itératives.

$H_0 \approx H = h_{av} - P$ = 2,6 - 1,0 = 1,6 m.

m=0,37

$$Q=1\mathrm{x}0{,}37\mathrm{x}5\mathrm{x}\sqrt{19{,}62}(1{,}6)^{3/2}=16{,}6\ \mathrm{m^3/s}$$

Alors la vitesse d'approche V0 devient :

$$V_0=\frac{Q}{B\ h_{am}}=\frac{16{,}6}{5\mathrm{x}2{,}6}=1{,}27\ \mathrm{m/s}$$
$$\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}=\frac{1\mathrm{x}(1{,}27)^2}{19{,}62}=0{,}083\ \mathrm{m}$$

La hauteur H_0 sera :

$$H_0=H+\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}=1{,}6+0{,}083=1{,}683\ \mathrm{m}$$

Vérifions, si le déversoir est noyé :

Δ=h_{av}-P =2,5-1=1,5 m

$$\frac{\Delta}{H_0}=\frac{1{,}5}{1{,}683}=0{,}89$$

Δ/H_0=0,89 > k2=0,75, le déversoir est noyé, ce qui conduit au calcul du coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$.

$$\upsilon=\frac{b\Delta}{\Omega_{av}}=\frac{5\mathrm{x}1{,}5}{5\mathrm{x}2{,}5}=0{,}60$$

si$\boldsymbol{\upsilon}$ = 0,60 et **Δ**/H_0= 0,89, on détermine à l'aide du tableau du coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$ sa valeur $\boldsymbol{\sigma}_n$= 0,945. Alors le débit en deuxième approximation :

$$Q=\sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}=0{,}945\mathrm{x}0{,}37\mathrm{x}5\sqrt{19{,}62}\mathrm{x}(1{,}683)^{3/2}=16{,}9\ \mathrm{m^3/s}$$

$$V_0 = \frac{Q}{B\ h_{am}} = \frac{16{,}9}{5x2{,}6} = 1{,}30\ m/s$$

$$\frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = \frac{1x(1{,}30)^{\ 2}}{19{,}62} = 0{,}086\ m$$

La hauteur H_0 sera :

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 1{,}6 + 0{,}086 = 1{,}686\ m$$

$$\frac{\Delta}{H_0} = \frac{1{,}5}{1{,}686} = 0{,}89$$

$\boldsymbol{\sigma}_n$= 0,945

En troisième approximation

$$Q = \sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} = 0{,}945x0{,}37x5\sqrt{19{,}62}x(1{,}686)^{3/2} = 16{,}95\ m^3/s$$

On prend Q = 16, 90 m^3/ s.

Exercice n°18

Determiner la largeur du régulateur de débit sans seuil si le débit du canal Q = 20 m^3 /s, la largeur de la section trapézoïdale du canal d'amenée $b_{c\ amn}$ = 8,0 m, le coefficient des talus m_t=1,5, la profondeur de l'eau dans le canal en aval de l'écluse h_{av} = 2 m. La forme de l'entrée en plan est rectangulaire. La cote de la surface libre en amont de l'entrée est de 0,2 m plus haut que le niveau d'eau dans le canal.

Solution

Le régulateur de débit fonctionne comme un déversoir à large seuil à une hauteur de la pelle en aval du déversoir P=0. La charge en amont du déversoir H = h_{av} + 0,2 = 2,2 m.

La vitesse d'approche au déversoir :

$$V_0 = \frac{Q}{\Omega_{am}} = \frac{Q}{(b_{cam} + m_t H)H} = \frac{20}{(8 + 1{,}5x2{,}2)2{,}2} = 0{,}8045\ m/s$$

La hauteur d'eau due à l'énergie cinétique

$$\frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = \frac{1x(0{,}8045)^{\ 2}}{19{,}62} = 0{,}032988\ m$$

La hauteur H_0 sera :

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 2{,}2 + 0{,}032988\ = 2{,}232988\ m$$

$$\frac{\Delta}{H_0} = \frac{h_{av} - P}{H_0} = \frac{2}{2{,}232988} = 0{,}89566 \approx 0{,}9$$

La plus grande valeur de k2 = 0,88, $\boldsymbol{\Delta}/H_0$> k2 est le déversoir est noyé.

$$Q = \sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} \Rightarrow \sigma_n mb = \frac{Q}{\sqrt{2g}H_0^{3/2}} = \frac{20}{\sqrt{19{,}62}x(2{,}232988)^{3/2}} = 1{,}35\ m$$

Les coefficients $\boldsymbol{\sigma}_n$ et m dépendent de la largeur b du déversoir.

b / B	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	**0,4**	**0,3**	0,2	0,1	0
m	0,385	0,367	0,355	0,3475	0,340	0, 335	**0,330**	**0,327**	0,324	0, 322	0, 320
k2	0,67	0,7708	0,83	0,835	0,84	0,85	**0,86**	0,866	0,872	0,876	0,88
b	11, 3	10,17	9,04	7,91	6,78	5,65	**4,52**	3,39	2,26	1,13	0
$\boldsymbol{\upsilon}$	1,027	0,9245	0,821	0,7190	0,616	0,5136	**0,4109**	0,308	0,205	0,1027	0
$\boldsymbol{\sigma}_n$	0,75	0,79	0,83	0,87	0,90	0,91	**0,92**	0,88	0,84	0,795	0,75
$\boldsymbol{\sigma}_n$mb	3,26	2,95	2,66	2,39	2,074	1,72	**1,37**	0,976	0,615	0,289	0

Prenons la valeur maximale du rapport b/B = 1 qui donne la plus grande valeur de m = 0,385et du tableau de k2 on tire la valeur de k2 = 0,67. Pour la largeur moyenne de la section trapézoïdale du canal b_{canmoy}=11, 3 m, alors b = 1x11,3 =11,3 m.

Pour déterminer $\boldsymbol{\sigma}_n$on calcule au préalable :

$$\upsilon = \frac{b\Delta}{\Omega_{av}} = \frac{6{,}78x2}{(8 + 1{,}5x2)2} = 0{,}61636 \approx 0{,}62$$

Pour $\boldsymbol{\upsilon}$ = 0,62 et $\boldsymbol{\Delta}/H_0$= 0,9, on détermine à l'aide du tableau du coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$ sa valeur $\boldsymbol{\sigma}_n$= 0,91.

$\boldsymbol{\sigma}_n mb$ = 0,91 x 0,385 x 11,3 =3,958955m ≠ 1,35 m.

On doit diminuer le rapport b/B, prenons un rapport de b/B = 0,6 on peut trouver m = 0,34 et du tableau de k2 on tire la valeur de k2 = 0,84. Pour la largeur moyenne de la section trapézoïdale du canal b_{canmoy}=11, 3 m, alors b = 0,6 B =6,78 m.

Pour déterminer $\boldsymbol{\sigma}_n$on calcule au préalable :

$$\upsilon = \frac{b\Delta}{\Omega_{av}} = \frac{6{,}78x2}{(8 + 1{,}5x2)2} = 0{,}61636 \approx 0{,}62$$

Pour$\boldsymbol{\upsilon}$ = 0,62 et $\boldsymbol{\Delta}/H_0$= 0,9, on détermine à l'aide du tableau du coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$ sa valeur $\boldsymbol{\sigma}_n$= 0,91.

$\boldsymbol{\sigma}_n mb$ = 0,91x0,34 x 6,8 =2,1 m ≠ 1,35 m.

On reprend le calcul en prenant d'autre valeur de b/B. On s'arrête quand $\boldsymbol{\sigma}_n mb$ = 1,37 m ce qui est constaté dans le tableau du calcul en gras, d'où la valeur de b = 4,52 m.

Exercice n°19

Determiner la cote de la surface libre en amont du barrage de déversement à seuil normal réalisé d'après les cordonnées de Creager-Ofitsérov avec un débit Q = 300 m^3 /s. La cote du fond est 10 m, la cote de la crête du déversoir est 20 m. Le barrage comporte quatre portées large b = 10 m chacune. La forme des piles en plan est demi-circulaire. La cote du niveau du bief d'aval est de 15 m. La largeur du canal en amontdu barrage B = 45 m.

Solution

Du fait que le niveau du bief aval h_{av} est inférieur à la crête du barrage alors le déversoir n'est pas noyé.

$$Q = \varepsilon mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

On peut obtenir la valeur de H_0 sans tenir compte de la contraction latérale (ε = 1) à parir de la relation
précédente et en prenant m=0,49 (la tête du déversoir est arrondie).

Q_1=Q /n = 300/4=75 m^3 /s et b=10 m.

$$H_0 = (\frac{Q}{\varepsilon mb\sqrt{2g}})^{3/2} = (\frac{75}{1x0{,}49x10x\sqrt{19{,}62}})^{2/3} = 2{,}28565 \approx 2{,}29 \text{ m}$$

La forme des piles est demi-circulaire d'où a=0,11.

Et par la suite en détermine le coefficient de contraction à l'aide de la formule :

$$\varepsilon = 1 - a\frac{H_0}{b + H_0} = 1 - 0{,}11\frac{2{,}29}{10 + 2{,}29} = 0{,}98$$

Compte tenu de la contraction latérale :

$$H_0 = (\frac{Q}{\varepsilon mb\sqrt{2g}})^{3/2} = (\frac{75}{0{,}98x0{,}49x10x\sqrt{19{,}62}})^{2/3} = 2{,}3166 \approx 2{,}32 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 1 - a\frac{H_0}{b + H_0} = 1 - 0{,}11\frac{2{,}32}{10 + 2{,}32} = 0{,}98$$

La vitesse d'approche en première approximation :

$$V_0 = \frac{Q}{B(H + P)} \approx \frac{Q}{B(H_0 + P)} = \frac{75}{45(2{,}32 + 10)} = 0{,}135 \text{ m/s}$$

La charge sans tenir compte de la vitesse d'approche est egale à:

$$H = H_0 - \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 2{,}32 - \frac{1x0{,}135^2}{2x9{,}81} = 2{,}32 - 0{,}001 \approx 2{,}32 \text{ m}$$

La précision de V_0 n'a pas de sens. Donc, H=2,32 m et la cote du niveau du bief d'amont est de :
20 + 2,32 = 22,32 m.

Exercice n°20

Un barrage de déversement a une portée dont le profil est réalisé conformément aux coordonnées de Greager-Ofitsérov pour H_{pr}=1,7 m a une hauteur p= 5 m et une largeur b=B=20 m.

Déterminer le débit du barrage à la charge en amont H = 1,1 m et à la profondeur du courant en aval du déversoir h_{av} = 5,2 m.

Solution

Le déversoir ne travaille pas dans les conditions de la contraction, mais le niveau du bief d'aval est supérieur à celui de la pelle d'aval ce qui permet de dire que le déversoir peut être noyé.

Le débit du déversoir est donné par la formule

$$Q = \sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

Le coefficient de débit m du déversoir est déterminé à l'aide de la formule :

$$m = m_{rep}\sigma_f\sigma_H$$

où

$$m_{rep} = 0{,}50 - 0{,}012\frac{H_0}{P_1} = 0{,}50 - 0{,}012\frac{1{,}1}{5} = 0{,}497$$

Le coefficient de forme $\boldsymbol{\sigma}_f$ pour le profil arrondi estégal à 0,974 conformément au tableau de $\boldsymbol{\sigma}_f$ représenté dans le cours et $\boldsymbol{\Theta}_{av}$= 30°, le coefficient du rendement de la charge $\boldsymbol{\sigma}_H$ à H/H_{pr}=1,1/1,7 = 0,65 est égal à 0,963 conformément au tableau de $\boldsymbol{\sigma}_H$.

$$m = 0{,}497x0{,}974x0{,}963 = 0{,}466$$

Pour vérifier si le déversoir est noyé, on calcul $\frac{z}{P} = \frac{H+P-h_{av}}{P} = \frac{1{,}1+5-5{,}2}{5} = \frac{0{,}9}{5} = 0{,}18$

D'après la figure $(z/p)_{cr}$ =f(H/P) à m = 0,466 et H/P = 1,1/5 = 0,22, la valeur de $(z/p)_{cr}$= 0,82.

Du fait que $z/P < (z/p)_{cr}$, le déversoir est noyé. Pour calculer le coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$on calcule le rapport :

$$\frac{\Delta}{H_0} \approx \frac{\Delta}{H} = \frac{h_{av} - P}{H} = \frac{5{,}2 - 5}{1{,}1} = 0{,}18$$

Du tableau de $\boldsymbol{\sigma}_n$ en fonction de $\boldsymbol{\Delta}/H_0$, le coefficient $\boldsymbol{\sigma}_n$=0,996.

Sans tenir compte de la vitesse d'approche

$$Q = \sigma_n mb\sqrt{2g}H^{3/2} = 0{,}996x0{,}466x20x\sqrt{19{,}62}x(1{,}1)^{3/2} = 47{,}44\ m^3/s$$

Influence de la vitesse d'approche V_0, la première approximation :

$$V_0 = \frac{Q}{B(H+P)} = \frac{47{,}5}{20(1.1+5)} = 0{,}39\ m/s$$

$$\frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = \frac{1x0{,}39^2}{2x9{,}81} = 0{,}008\ m$$

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 1{,}1 + 0{,}008 = 1{,}108\ m$$

$$Q = \sigma_n mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} = 0{,}996x0{,}466x20x\sqrt{19{,}62}x(1{,}108)^{3/2} = 47{,}955\ m^3/s$$

La deuxième approximation :

$$V_0 = \frac{Q}{B(H+P)} = \frac{47{,}955}{20(1.1+5)} = 0{,}3930 \approx 0{,}39\ m/s$$

La vitesse n'a pas une influence remarquable sur le débit, on peut opter un Q = 47,96 m^3/s.

Références bibliographiques

[1] A.DUPONT , Hydraulique urbaine, Ouvrages de transport, d'élévation et de distribution des eaux, Tome II, Edition Eyrolles, 384 pages.

[2] M. Carlier, « Hydraulique générale et appliquée » édition Eyrolles, 1972, 582 pages.

[3] Marc Satin, Béchir Selmi, Guide technique de l'assainissement 2ème édition, 671 pages.

[4] N. Kréménestki, D. Schtérenlht, V. Alychev, L. Yakovléva, Hydraulique, Editions Mir Moscou, 325 pages.

[5] PD Smith, Basic Hydraulics, 156 pages.

[6] RANALD V.GILES, mécaniques des fluides et hydraulique, cours et problèmes Série Schaum, 475 pages.

[7] REMINI. B, Hydraulique applique, édition 2005, 144 pages.

[8] Walter Hans Graf, Hydraulique fluviale, 625 pages.