

17/21.796

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Domaine : Sciences et Technologie**  
**Filière : Electrotechnique**  
**Spécialité : Réseaux Electriques**

**Mémoire de fin d'études  
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

---

**Modélisation fractionnaire d'une bobine a noyau de fer et  
simulation par représentation diffusive**

---

Présenté par : batah fouad

Sous la direction de : bouchalkha abd elhafid

Mai 2013

## Remerciement

*Au nom de dieu le clément et miséricordieux le grand merci lui revient pour nous avoir aidé à élaborer ce mémoire.*

13/2960

*En témoignage de notre profond respect et de notre vive reconnaissance à Mr Bouchellkha A.Hafid*

*Qui a accepté de nous prendre en charge et auprès duquel nous avons trouvé chaque jour aide et compréhension et dont la disponibilité et l'indulgence nous ont permis de mener cette étude.*

*Nous tenons à remercier les membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.*

*On remercie tous les enseignants au sein de département pour leur aide qu'ils n'ont cessé de nous apporter durant ces trois dernières années.*

## *Dédicace*

*Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la foi et force de mener ce travail à son terme*

*Je remercie notre encadreur Mr Bouchelkha A. Elhafid pour son aide, ses encouragements.*

*A mamère qui a sacrifié tout sa vie pour nous et a mon père pour son soutien.*

*A mon frère Ramzi*

*Et mes très chères sœurs Chahra et Bessma, Soulafet leur fille Rétadj*

*A toute la promotion du Master 2 réseaux électrique 2013*

# Sommaire

<b>Introduction générale.....</b>	<b>01</b>
<b><u>Chapitre I : Etat de l'art de la modélisation d'ordre fractionnaire</u></b>	
I.1 : Introduction.....	02
I.2 : Domene d'application de la modélisation d'ordre fractionnaire.....	03
I.2.1 : Actionneurs et générateurs électriques : machines synchrones et asynchrones.....	04
I.2.2 : Piles à combustibles de type PEMFC.....	06
I.2.3 : Dispositifs de stockage électrochimique : batteries et supercapacités.....	07
I.3 : Conclusion.....	09
<b><u>Chapitre II : Modèle classique d'une bobine à noyau de fer</u></b>	
II. 1 : Introduction .....	10
II.2. : La bobine à noyau de fer.....	10
II.3 : Comportement de la bobine en approximation linéaire.....	11
II.3.1 : Résistance de l'enroulement.....	11
II.3.2 : Coefficient d'auto induction (inductance).....	11
II.3.3 : Inductance de fuite.....	12
II.3.4 : Mise en équation complète et modèle.....	13
II.4 : Comportement de la bobine linéaire en régime sinusoïdal .....	14
II.4.1 : Mise en place.....	14
II.4.2 : Mise en équation .....	14
II.5 : Comportement non linéaire .....	14
II.5.1 : Influence de la saturation.....	14
II.5.2: Illustration du comportement temporel des différentes grandeurs .....	14
II.6 : Considérations énergétiques dans la bobine à noyau de fer .....	15
II.6.1 : Densité d'énergie.....	18
II. 6.2 : Illustration : expression de l'énergie dans le cas du modèle linéaire.....	19
II.6.3 : Les pertes dans les bobines à noyaux de fer .....	17
II.6.3.1. Pertes par courants de Foucault .....	17
II.5.3.2 : Pertes par hystérésis.....	18
II.6.3.3 : Globalisation des pertes : pertes fer .....	19

II.7 : Schéma équivalent .....	19
--------------------------------	----

### **Chapitre III : Modèle fractionnaire d'une bobine à noyau de fer**

III.1.rappel sur la modélisation fractionnaire.....	20
III.2 : Modélisation dynamiques des matériaux magnétiques.....	23
III.2.1 : Remarque.....	25
III.4 : Conclusion.....	29

### **Chapitre IV: Simulation par représentation diffusive**

IV. 1 : Introduction.....	30
IV. 2 : Modèle diffusif.....	30
IV .2.1 : Principe de base.....	30
IV .2.2 : Approximation en dimensions fines.....	31
IV.2.3. Symbole diffusif du transfert explicite et implicite.....	32
IV.3.Organigramme du simulation.....	33
IV.4 Résultats du simulation.....	34
IV.5 : Conclusion.....	39
<b>Annexe. A.....</b>	<b>40</b>
<b>Annexe. B.....</b>	<b>52</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>58</b>

# *Introduction générale*

La prise en compte des pertes par courants de Foucault dans les circuits magnétiques de machines électriques ou de transformateurs fonctionnant en régime transitoire, permet une meilleure description de leur comportement dynamique.

Ces courants sont régis par des équations aux dérivées partielles, dont la résolution numérique s'effectue classiquement par la méthode des éléments finis qui devient vite très lourde, de par la complexité des géométries rencontrées.

Dans la mesure où l'on vise un modèle comportemental du dispositif vis à vis, par exemple, de la source d'alimentation électrique, et non une description dans l'espace des phénomènes internes, l'approche par opérateur entrée-sortie, de type fonction de transfert, est une autre voie possible. L'objectif de ce mémoire, dont l'intitulé est "**modélisation fractionnaire d'une bobine à noyau de fer et simulation par réalisation diffusive**" est de montrer, à travers l'exemple simple d'une bobine à noyau de fer, comment on peut obtenir une approximation d'admittance non rationnelle correspondant à un opérateur pseudo-différentiel, sous la forme d'un modèle d'état standard de dimension réduite, via le concept de représentation diffusive.

Ce travail est divisé en quatre chapitres :

Après un état de l'art sur la modélisation d'ordre non entier on abordera au deuxième chapitre la modélisation classique d'une bobine à noyau de fer. Le troisième chapitre sera consacré à la modélisation d'ordre non entier (fractionnaire) de la bobine à noyau de fer alors que le quatrième chapitre sera réservée la simulation par représentation diffusive.

# Chapitre 1

## Etat de l'art sur la modélisation d'ordre fractionnaire

### 1. 1 Introduction

Dans les réseaux d'énergie électrique contemporains, on assiste à une diversification considérable des différentes sources d'énergie (pile à combustible, panneaux solaires, éoliens/générateurs). L'énergie produite est ensuite transformée par une grande quantité de composants électriques (transformateurs, convertisseurs, etc.) pour être finalement acheminée aux installations électriques diverses (moteurs, appareils électroménagers, etc.). Le réseau électrique se complexifie par ailleurs avec le recours à de nombreux dispositifs de stockage (batteries, volants d'inertie, etc.) permettant de gérer les intermittences des producteurs d'énergie renouvelable pour maintenir de très bonnes performances.

Pour concevoir et conduire correctement ces réseaux électriques, plus complexes, plus fragiles par rapport aux perturbations dynamiques survenant dans le réseau, il est nécessaire de maîtriser le comportement de chaque équipement constitutif du réseau pour pouvoir anticiper les problèmes de fonctionnement.

Disposer de modèles précis des différents composants électriques est une gageure. Faire en sorte que ces modèles soient d'ordre réduit mais parcimonieux, c'est-à-dire qu'il puisse décrire avec peu de paramètres un réel comportement physique, est également utile pour la conception et la simulation de ces systèmes. Il devient ainsi aujourd'hui primordial d'améliorer ces modèles afin de pouvoir prévoir les différentes interactions entre composants et éventuellement revenir à une étape de conception des réseaux.

Deux classes élémentaires de modèles mathématiques sont à la disposition des concepteurs de réseaux : les modèles de distribution globale (ou modèles équivalents de type circuit) et les modèles de distribution locale (ou modèles de type éléments finis). On utilise tout particulièrement ces derniers modèles pour le calcul précis de distributions spatiales d'induction ou flux magnétique et de couples électromagnétiques. Néanmoins, la programmation et la résolution des modèles par éléments finis exigent du temps ainsi qu'un ordinateur de puissance suffisante.

A côté, les modèles de type circuit permettent de simuler des dispositifs électriques relativement vite, en régimes dynamiques et transitoires, avec une précision suffisante pour la majorité de cas de fonctionnement. Cette classe de modèles nous semble donc plus utile du point de vue de la modélisation du système électro énergétique complet. Améliorer la précision de ces modèles nécessite cependant d'augmenter leur ordre, les systèmes d'ordre fractionnaire (non entier) permettront de conserver une approche simple de modélisation tout en limitant le nombre de paramètres de caractérisation.

Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVIIème siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872).

## **1.2. Domaines d'application de la modélisation d'ordre fractionnaire**

Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XXème siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (Ang. Fractional Order Différentiel).

Aujourd'hui, la modélisation d'ordre fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques, pour la modélisation des conséquences des désastres naturels, elle est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés).

Dans le domaine des sciences de l'ingénieur ces systèmes sont appliqués depuis plusieurs années. Ainsi, A. Oustaloup est l'un des premiers à avoir appliqué ce concept en France avec l'équipe CRONE du LAPS de Bordeaux (Commande Robuste d'Ordre Non

Entier). Ils se sont ainsi intéressés à l'application de la dérivation non entière dans les domaines suivants :

- En automatique à travers la commande CRONE (i.e. un régulateur synthétisé à partir de dérivateurs et d'intégrateurs d'ordre non entier); une tool-box Matlab a ainsi été développée pour permettre l'identification et l'analyse par modèle d'ordre non entier de dispositifs physiques.
- En automobile, la dérivée non entière est utilisée en isolation vibratoire grâce à la suspension CRONE, fondée sur le principe de la commande CRONE de deuxième génération.

Les systèmes d'ordre non entier ont également été utilisés dans d'autres domaines de la physique comme la rhéologie, le génie électrique, l'électrochimie, ....

Dans tous les cas, ces systèmes sont particulièrement adaptés pour modéliser :

- soit des phénomènes physiques de nature diffusive (diffusion de la chaleur, diffusion d'espèces gazeuses, ...),
- soit des phénomènes intervenant sur un support physique de nature fractale (phénomène de houle sur la digue de Venise, interfaces électroniques, ...).

En génie électrique, de nombreux travaux d'application de la dérivation d'ordre non entier ont été menés, pour la modélisation des Actionneurs et générateurs électriques, des piles à combustibles et les dispositifs de stockage électrochimique.

### **1.2.1 Actionneurs et générateurs électriques : machines synchrones et asynchrones.**

Les machines électriques sont des composants omniprésents dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la génération (centrales électriques) ou pour les usages industriels ou domestiques en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus modeste (réseaux embarqués ou îliens)

La modélisation précise et compacte des machines électriques devient donc un objectif essentiel en termes de conception et de simulation des futurs systèmes et réseaux électriques.

La finesse des modèles des générateurs et moteurs, synchrone et asynchrone notamment, est ainsi très importante dans l'étude de la stabilité, de sécurité et de fiabilité des réseaux. Ils doivent désormais tenir compte des effets liés aux harmoniques générés par les dispositifs d'électronique de puissance massivement insérés dans le réseau de manière à le gérer plus efficacement, pour modéliser l'influence de ces harmoniques sur le comportement dynamique des machines (surtout sur le couple électromagnétique) particulièrement intéressante.

Les travaux sur l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire (non entier) pour la modélisation des machines électriques ont été commencés dans les années 90 par le professeur M. Ivanès et N. Retière, plusieurs articles sont apparus, traitant de la méthode, son application et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalents. D'autres travaux ont utilisé la modélisation d'ordre non entière pour modéliser les phénomènes transitoires dans les machines électriques.

L'idée principale consiste à insérer des impédances d'ordre non entier dans les schémas équivalents classiques de machines. Deux approches peuvent ainsi être mentionnées :

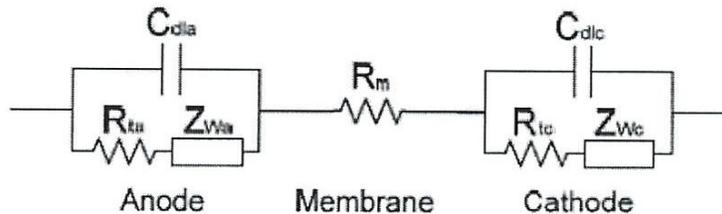
- une modélisation d'ordre non entier, dont l'ordre n'est pas imposé a priori mais résulte soit des caractéristiques géométriques et physiques des constituants de la machine, soit de l'identification.
- des modèles de machine incluant des impédances dont l'ordre est imposé (et égal à  $\frac{1}{2}$ )

Ces approches permettent dans tous les cas de déterminer des schémas équivalents de machines électriques particulièrement précis, compacts (le nombre de paramètres peut-être diminué d'un facteur 2 par rapport aux modèles classiques d'ordre entier) et conservant un sens physique particulièrement utile pour la conception d'un système.

### 1.2.2. Piles à combustibles de type PEMFC

Une pile à combustible de type PEMFC produit l'énergie électrique grâce à l'oxydation sur l'anode d'un combustible (hydrogène) couplée à la réduction sur la cathode d'un oxydant (oxygène). Son principe de fonctionnement repose sur des phénomènes physico-chimiques de nature diffusive (diffusion des espèces gazeuses au niveau des électrodes notamment), ce qui invite à utiliser la modélisation d'ordre fractionnaire à l'instar des machines tournantes.

Parmi les différents modèles à constantes plus ou moins localisées, nous présentons celui qui est le plus à même d'être utilisé dans le cadre d'une application « système », à savoir un modèle sous forme de circuit électrique équivalent (fig. 1.1).



**Fig. 1.1. Schéma équivalent électrique de la pile à combustible**

Le schéma présenté ci-dessus est constitué de trois parties : deux électrodes à gaz et une membrane. La membrane est représentée par une résistance ( $R_m$ ). Les électrodes (anode et cathode) sont décrites comme l'association en parallèle d'une capacité de double couche ( $C_{dla}$  et  $C_{dlc}$ ) et d'une impédance faradique qui est la somme d'une résistance de transfert de charge ( $R_{ta}$  et  $R_{tc}$ ) et d'une impédance de Warburg ( $Z_{wa}$  et  $Z_{wc}$ ). Ces impédances de Warburg modélisent la diffusion des espèces gazeuses (oxygène et hydrogène) au niveau des électrodes.

$$Z_W(\omega) = A_k \cdot \frac{\tanh(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{\sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \dots\dots\dots(1.1)$$

Avec  $\tau_k = \frac{\delta^2}{D_k^{eff}}$  où  $A_k$  est une constante qui dépend de la cinétique électrochimique de la diffusion des espèces dans l'électrode,  $D_k^{eff}$  est un coefficient effectif de diffusion et C est l'épaisseur de l'électrode.

Pour des raisons tout à fait similaires aux machines électriques, l'impédance (1.1) de Warburg est approximée par une impédance (1.2) d'ordre non entier (ici égal à 1/2), faisant apparaître une dépendance en racine carrée de la fréquence.

$$Z_W^{1/2}(\omega) = \frac{A_K}{\sqrt{1 + j\omega \cdot \tau_k}} \dots\dots\dots(1.2)$$

Grâce à cette approximation, le modèle complet de la pile à combustible est compact (décrit avec peu de paramètres) et permet de simuler numériquement le comportement diffusif des gaz au niveau des électrodes avec une grande précision et un nombre de paramètres réduit par rapport aux modèles classiques (réduction d'un facteur deux !).

Un problème subsiste cependant pour caractériser les piles à combustible, dans la mesure où le phénomène de diffusion des espèces gazeuses peut être complètement caché par rapport au phénomène de double couche (modélisé par les capacités  $C_{dl}$ ), empêchant dès lors d'identifier avec une grande précision les paramètres du modèle

### 1.2.3. Dispositifs de stockage électrochimique : batteries et supercapacités

Les dispositifs de stockage sont de plus en plus présents dans les réseaux ou systèmes d'énergie dans la mesure où ils peuvent contribuer à une gestion énergétique plus efficace, du point de vue du producteur, du consommateur ou du distributeur.

A ce titre, les batteries électrochimiques (plomb, Ni-Cd, Li-ion ou autres) et les supercapacités ont un potentiel d'utilisation considérable dans un contexte de diversification des sources et d'utilisation d'énergies intermittentes. Mais là encore, il est nécessaire de

bien maîtriser leur fonctionnement dynamique de manière à bien les dimensionner et mettre en place des stratégies de gestion de l'énergie en tenant compte de leur état de charge et de leur vieillissement (BMS : Battery Management System).

Le super-condensateur est un condensateur de très grande capacité par rapport à ses dimensions relativement petites grâce au phénomène de double couche [81]. Il permet ainsi de disposer de densités de puissance beaucoup plus importantes que celles des batteries plus utilisées comme sources d'énergie. Que ce soit pour une batterie ou une super capacité, il est nécessaire de modéliser finement la porosité au niveau des électrodes où diffusent les ions de l'électrolyte. De manière similaire aux machines électriques et piles à combustible, ce phénomène peut là encore être modélisé électriquement par des systèmes d'ordre non entier.

Le modèle classique du super-condensateur est présenté sur la fig. 1.2 ci-dessous.



**Fig. 1.2. Schéma équivalent du super-condensateur**

Il est composé de trois éléments : une résistance interne  $R_i$  (qui modélise l'électrolyte et ses connections), une inductance  $L$  (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe  $Z_p$  modélisant la porosité des électrodes du super-condensateur.

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega\tau})}{C \cdot \sqrt{j\omega\tau}} \dots\dots\dots(1.3)$$

Classiquement, on peut approcher l'impédance  $Z_p$  par un nombre fini de cellules R-C placées en parallèle. Cette approche conduit toutefois à un modèle comportant beaucoup (trop) de paramètres pour une approche Systèmes. On préfère donc une approximation de l'impédance  $Z_p$  par un système d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Cela permet d'obtenir une très bonne cohérence

avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu d'environ 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}}{C_0 \cdot j\omega} \dots\dots\dots(1.4)$$

La modélisation d'ordre non entier permis ainsi de réduire considérablement l'ordre du modèle (nombre de paramètres) et en même temps d'améliorer la précision de sa représentation fréquentielle. Il faut cependant noter que le modèle développé en est linéaire, ce qui veut dire qu'il ne prend pas en compte l'influence de la température ou d'effets de tension. Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre fractionnaire de super capacités non linéaires.

Pour les batteries, des travaux similaires utilisent la modélisation d'ordre non entier pour réduire l'ordre de représentation, mais également pour caractériser le vieillissement de la batterie à partir d'un nombre restreint des paramètres.

### 1.3 Conclusion

Après quelques rappels historiques sur la définition et l'utilisation des systèmes d'ordre non entier, et à partir d'un état de l'art sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier en génie électrique, nous avons montré que la modélisation d'ordre fractionnaire est un outil mathématique très puissant permettant de bien caractériser les phénomènes diffusifs de nature distribuée, dans des dispositifs aussi divers qu'une pile à combustible, un super-condensateur ou une machine électrique. Ces modèles sont ainsi précis et valables sur de grandes plages de fréquences de fonctionnement, tout en gardant un nombre de paramètres limités.

## Chapitre II

### Modèle classique d'une bobine à noyau de fer

#### II. 1 Introduction :

La bobine à noyau de fer constitue indéniablement la structure de base de toutes les machines électriques (transformateurs, machine à courant continu, alternateurs, machines asynchrones, etc....). Il est donc intéressant d'appliquer l'ensemble des acquis en modélisation et identification paramétrique sur cet exemple d'application.

#### II. 2 La bobine à noyau de fer

La bobine à noyau de fer est constituée essentiellement :

- D'un circuit magnétique formé d'un empilement de tôles magnétiques minces isolées entre elles par une couche de vernis
- D'une bobine de  $N$  spires

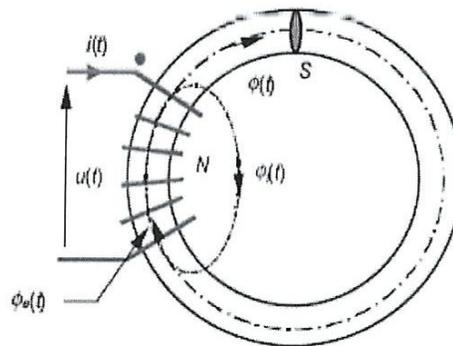


Figure II. 1 : bobine à noyau de fer.

Cet élément est essentiellement alimenté en régime sinusoïdal et la réponse des grandeurs électriques et magnétiques est fortement liée au comportement saturé ou non du matériau.

Dans le cadre de l'approximation linéaire d'Hopkinson : les circuits magnétiques sont parfaits, c'est à dire linéaires ( $\mu$ , constant) et exempts de fuites magnétiques (tout le flux créé par les enroulements apparaît dans le circuit magnétique).

Dans les applications industrielles, l'approximation linéaire n'est plus de mise car l'exploitation des matériaux ne se cantonne pas aux inductions faibles, là où la linéarité est garantie. L'exploration des zones saturées permet de décrire plus justement les phénomènes observés.

### II. 3 Comportement de la bobine en approximation linéaire

Dans cette partie, on analyse chaque phénomène linéaire indépendamment des autres, puis le tout est regroupé pour établir le modèle linéaire de la bobine en approximation linéaire.

#### II. 3.1 Résistance de l'enroulement

La résistance propre du conducteur de l'enroulement de longueur  $l$ , de section  $s$  et constitué d'un matériau de résistivité  $\rho$  est :

$$r = \rho \frac{l}{s} \dots\dots\dots(\text{II.1})$$

#### II. 3.2 Coefficient d'auto-induction (inductance)

Dans la partie linéaire du matériau, la perméabilité relative  $\mu_r$  est constante, donc  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$ . Dans ces conditions, on peut définir la réluctance du circuit magnétique:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r \cdot s} \dots\dots\dots(\text{II.2})$$

La relation d'Hopkins relie le flux dans le circuit magnétique  $\phi$  au courant  $i$  :

$$Ni = \mathfrak{R} \phi \dots\dots\dots(\text{II.3})$$

Le flux total à travers toutes les spires est alors :

$$\phi_T = N\phi = NSB \dots\dots\dots(\text{II.4})$$

En combinant les relations (2.3) et (2.4) et, on obtient :

$$\phi_T = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} i \dots\dots\dots(\text{II.5})$$

Ce coefficient de proportionnalité entre flux et courant est le coefficient d'auto-induction :

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \dots\dots\dots(\text{II.6})$$

### II. 3.3 Inductance de fuite

Toutes les lignes de champ créées par l'enroulement n'apparaissent pas dans le circuit magnétique. Pour des raisons essentiellement de fabrication, certaines d'entre-elles se rebouclent dans l'air proche des spires.

On distingue le flux dans le matériau  $\phi(t)$  du flux de fuite s'en échappant  $\phi_f(t)$  (Figure 1).

Le flux embrassé par l'enroulement s'écrit :

$$\phi_e(t) = \phi(t) + \phi_f(t) \dots\dots\dots(\text{II.7})$$

Par la loi de Faraday, la tension est :

$$u(t) = N \frac{d\phi_e(t)}{dt} = N \frac{d\phi(t)}{dt} + N \frac{d\phi_f(t)}{dt} \dots\dots\dots(\text{II.8})$$

Le premier terme correspond à l'inductance propre de l'enroulement. Le second correspond à une inductance équivalente attachée au milieu de propagation du flux (l'air) parcourue par le courant  $i$ , c'est l'inductance de fuite  $l_f$

La tension peut donc s'écrire :

$$u(t) = N \frac{di(t)}{dt} + l_f \frac{di(t)}{dt} \dots\dots\dots (II.8)$$

### II. 3.4 Mise en équation complète et modèle

La bobine laisse apparaître la résistance de l'enroulement, son inductance propre et l'inductance qui traduit les fuites magnétiques. La mise en équation complète s'effectue en écrivant la tension aux bornes de l'enroulement :

- Contribution de la résistance  $r$ :  $ri(t)$
- Contribution de l'inductance propre :  $L : L \frac{di(t)}{dt}$
- Contribution de l'inductance de fuite:  $l_f : l_f \frac{di(t)}{dt}$

Donc :

$$u(t) = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + l_f \frac{di(t)}{dt} \dots\dots\dots (II.9)$$

De cette relation, on déduit le modèle électrique équivalent de la bobine à noyau de fer en régime linéaire présenté à la Figure II.2.

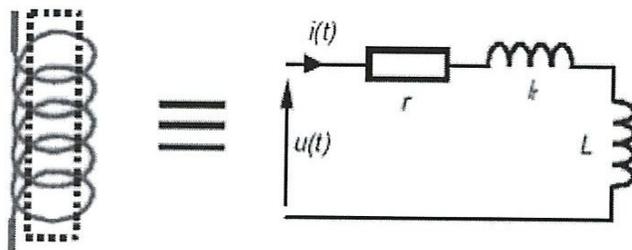


Figure II.2 : modèle électrique linéaire de la bobine.

## II. 4 Comportement non linéaire

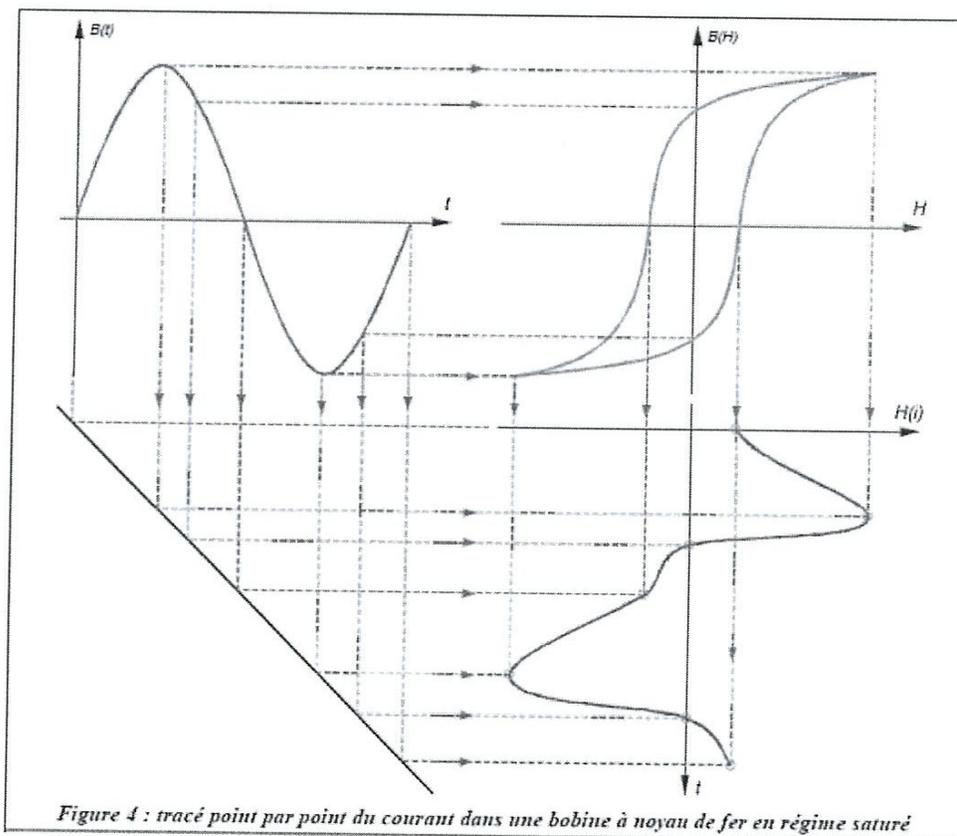
### II. 4.1 Influence de la saturation

Dans les applications industrielles, les grandeurs sinusoïdales tensions et courants ont des amplitudes élevées. Par conséquent, la saturation est vite atteinte. On ne peut plus tenir compte de la linéarité du matériau ( $\mu_r$  n'est pas constant). La réluctance et l'inductance ne peuvent plus être définies.

De plus, le parcours répétitif du cycle d'hystérésis nécessite de tenir compte des influences énergétiques. Cette nouvelle donnée incite à reconsidérer l'étude des circuits magnétiques en régime saturé.

### II. 4.2 Illustration du comportement temporel des différentes grandeurs

Comment passer de la tension au courant si les comportements ne sont pas linéaires ?



Le courant dans la bobine est périodique mais non sinusoïdal. Il est d'autant plus «déformé» que le circuit magnétique est saturé.

La distorsion du signal est marquée par le taux d'harmoniques. Si la déformation est faible, une approximation au premier harmonique est envisageable. On ne travaille alors qu'avec le courant fondamental.

Dans le cas général, il faut envisager l'influence de toutes les harmoniques. Dans ces conditions, on recherche une représentation sinusoïdale du courant qui transporte la même puissance que le courant réel. Cette équivalence est obtenue en travaillant avec la puissance.

## II. 5 Considérations énergétiques dans la bobine à noyau de fer

### II. 5.1 Densité d'énergie

Un élément de volume  $d\tau$  est soumis à un champ d'excitation. Il est alors le siège d'une induction.

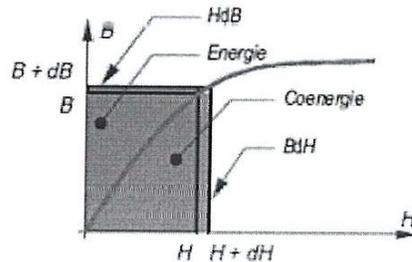
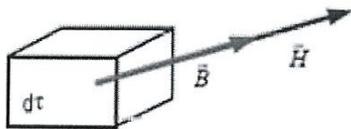


Figure II.4: l'élément de volume étudié.

Figure II.5 : définitions de l'énergie magnétique.

On définit la densité d'énergie.  $\rho_w = \frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$  .....(II.9)

L'énergie magnétique présente dans un volume de matériau  $V_{mat}$  :

$$W = \rho_w V_{mat} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} V_{mat} \dots\dots\dots(II.10)$$

Puisque  $B$  et  $H$  sont colinéaires :  $d\rho_w = d\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = \frac{1}{2} (BdH + HdB)$  .....(II.11)

Pour H constant,  $dH = 0$  donc :  $d\rho_w|_{H=cte} = \frac{1}{2} HdB$  .....(II.12)

De même, pour B constant :  $d\rho_w|_{B=cte} = \frac{1}{2} BdH$  .....(II.13)

Puisque B et H sont quelconques, les deux quantités précédentes sont différentes.

On définit alors :

L'énergie  $W = \int_B d\rho_w|_{H=cte} = \frac{1}{2} \int_B HdB$  .....(II.14)

La coénergie  $W' = \int_H d\rho_w|_{B=cte} = \frac{1}{2} \int_H BdH$  .....(II.15)

Graphiquement, l'énergie est la portion de surface entre la courbe et l'axe de l'induction. La coénergie est portion de surface entre la courbe et l'axe du champ d'excitation. La somme de l'énergie et de la coénergie est le produit B.H

**II.5.2 Illustration : expression de l'énergie dans le cas du modèle linéaire**

Pour les matériaux linéaires, on définit :

la réluctance,  $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$  et l'inductance,  $L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$  .....(II.16)

L'énergie est donnée :

$W = \rho_w V = \frac{1}{2} BHSl = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B^2 Sl = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{S} \phi^2$ , .....(II.17)

Mais aussi  $\phi_T = N\phi = \frac{N^2 i}{\mathfrak{R}} = Li$ , d'où  $W = \frac{1}{2} \mathfrak{R} (\frac{L}{N})^2 i^2$ , donc :  $W = \frac{1}{2} Li^2$

## II. 5.3 Les pertes dans les bobines à noyau de fer

Une bobine à noyau de fer est constituée d'un enroulement et d'un circuit magnétique.

Lorsqu'elle est parcourue par un courant alternatif, deux phénomènes secondaires apparaissent et engendrent des pertes d'énergie dans le circuit magnétique.

Ces pertes, appelées pertes fer, correspondent à :

- des pertes par hystérésis,
- des pertes par courants de Foucault : ces courants sont induits par la variation du flux dans les tôles magnétiques.

### II. 5.3.1 Pertes par courants de Foucault

Les matériaux ferromagnétiques ont souvent des propriétés conductrices pour le courant électrique : en présence d'un flux variable, la FEM induite crée les courants de Foucault qui circulent dans le matériau. L'effet Joule dissipe l'énergie sous forme de chaleur, ce sont les pertes par courants de Foucault.

Les pertes par courants de Foucault sont de la forme :

$$P_{CF} = k \frac{B_M^2 f^2}{\rho} \dots\dots\dots (II.18)$$

Parmi les moyens de réduction de ces pertes on cite :

- Utilisation d'un matériau plus résistif : fer avec addition de silicium, ferrite.
- Augmentation de la résistance au passage des courants : circuit magnétique composé de tôles (feuilletage) isolées entre elles par oxydation surfacique.

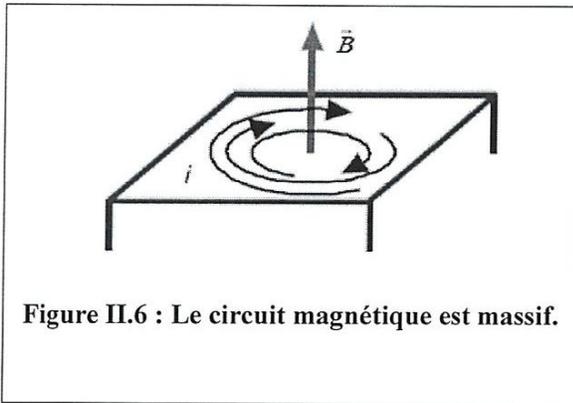


Figure II.6 : Le circuit magnétique est massif.

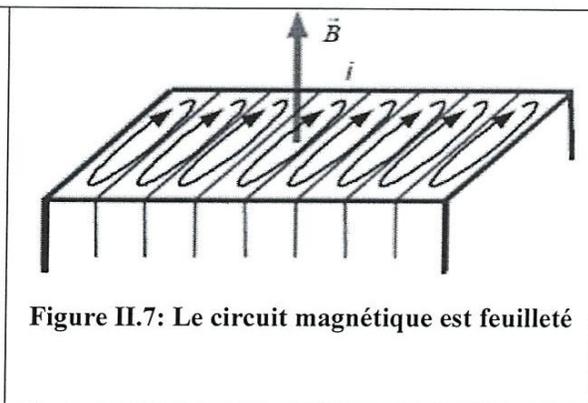


Figure II.7: Le circuit magnétique est feuilleté

### II. 5.3.2 Pertes par hystérésis

Sous l'effet des champs d'induction et d'excitation, les forces de Laplace créent des contraintes internes au matériau qui mettent en mouvement les domaines de Weiss. Leur frottement les uns contre les autres favorise l'échauffement du matériau : ce sont les pertes par hystérésis. Ces pertes proviennent de la différence entre l'énergie emmagasinée durant la croissance de  $H$  et celle restituée lors de la décroissance. Pour un parcours complet du cycle, l'énergie est proportionnelle à son aire ( $A_H$ ) et au volume du matériau ( $V$ ). Ces pertes sont d'autant plus importantes que le nombre de cycles par seconde est élevé. Une tension évoluant à la fréquence  $f$ , crée des grandeurs magnétiques évoluant à cette fréquence. Les pertes s'expriment par :

$$P_H = A_H \cdot V \cdot f$$

$\begin{matrix} \text{W} & & & & \text{Hz} \\ \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \\ \text{W/m}^3 & & & & \text{m}^3 \end{matrix}$

### Estimation expérimentale des pertes par hystérésis

Dans la pratique, seule une évaluation approchée est possible. On dispose de deux modèles :

Modèle exponentiel de Steinmetz :

$$A_H = \eta B_M^\gamma \text{ avec } \eta = \text{cte et } 1,6 \leq \gamma \leq 2.$$

Modèle quadratique de Richter :

$$\boxed{A_H = aB_M + bB_M^2} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ constants. Pour } B_M > 1T, A_H \approx bB_M^2.$$

En règle générale, ces pertes sont globalisées :

$$P_H = k_H \cdot f \cdot B_M^2 \dots\dots\dots(\text{II.19})$$

Où  $k_H$  est la constante d'hystérésis.

### Moyens de réduction des pertes

Puisque les pertes sont directement conditionnées par l'aire du cycle d'hystérésis, il faut les réduire en utilisant, par exemple, des matériaux ferromagnétiques doux.

### II. 5.3.3 Globalisation des pertes : perte fer

Les pertes fer constituent l'ensemble des pertes dans le matériau :

$$P_{fer} = P_F + P_H \approx k_F \cdot f^2 \cdot B_M^2 + k_H \cdot f \cdot B_M^2 \dots\dots\dots(\text{II.20})$$

On remarquera que les deux types de pertes sont proportionnels au carré de l'induction maximale. Pour la fréquence, les pertes par hystérésis sont proportionnelles et celles par courants de Foucault dépendent du carré. Cette distinction permet d'effectuer des méthodes de séparation des pertes.

### II. 6 Schéma équivalent :

Dans le cas où les pertes fer ne peuvent être négligées, elles peuvent être approximativement regroupées dans un dipôle linéaire unique en parallèle avec l'inductance magnétisante afin de traduire leur proportionnalité au carrée de la tension d'alimentation. La figure (II.8) représente le schéma électrique équivalent de la bobine à noyau de fer.

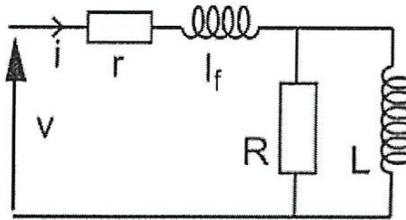


Figure (II.8) Schéma équivalent de la bobine

Si on néglige les fuites magnétiques, la bobine est correctement représentée par le circuit électrique équivalent de la figure suivante :

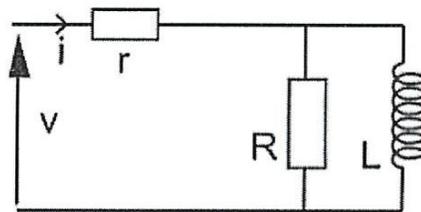


Figure (II.9) schéma équivalent de la bobine sans fuite magnétiques

A partir des équations électriques de ce circuit, on peut facilement écrire le transfert entre le courant  $i(t)$  et la tension  $u(t)$  en utilisant la transformée de Laplace :

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{R + Ls}{rR + (r + R)Ls} \dots\dots\dots(II.21)$$

Lorsque les pertes fer et fuites magnétiques sont négligeables, la bobine est correctement représentée par un circuit électrique équivalent R L.

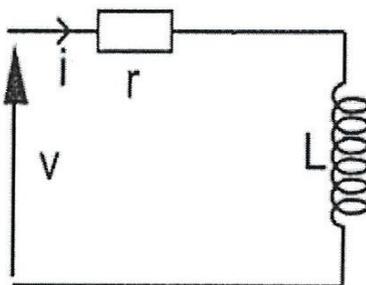


Figure (II.9) schéma équivalent de la bobine pour des pertes fer et des fuites magnétiques négligeables

## **II.7 Conclusion :**

Il est important de signaler qu'une telle modélisation est correcte à la condition bien sûr que l'excitation du système reste mono fréquentielle. Si la fréquence du signal d'entrée venait à varier, il faudrait reprendre la modélisation des pertes fer.

Dans la littérature, on retrouve souvent des formulations empiriques (représentation de Rayleigh, formule de Steinmetz, etc.). Malheureusement, ces formules sont uniquement valables pour certaines applications. L'utilisation des modèles réseaux-échelles pour modéliser ces pertes peut aussi être envisagée

Cependant, c'est sans doute la représentation de ces phénomènes, dits de diffusion, par des modèles d'ordre fractionnaire qui devrait apporter une solution satisfaisante

## Chapitre III

### Modèle d'ordre fractionnaire d'une bobine à noyau de fer

#### III. 1 Rappels sur la modélisation d'ordre fractionnaire

D'après la définition de Grünwald-Letnikov on peut définir la dérivée d'ordre  $\alpha$  ( $\alpha \in R$ ) par la relation :

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(t - i \cdot h) \right] \dots\dots\dots(III.1)$$

Où:  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}$  et  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  est la fonction Gamma (utilisée quand appartient à l'ensemble des réels).

Dans le cas particulier d'une fonction  $f(t)$  causale (nulle pour  $t < 0$ ), on a :

$f(t - k \cdot h) = 0$  pour  $t - h \cdot k < 0$  et  $t = m \cdot h$ , donc lorsque  $k < m$ , alors la somme de  $k = 0$  à  $k = \infty$  se réduit à la somme étendue de  $k = 0$  à  $k = m$ .

On peut donc écrire :

$$D^{(\alpha)} f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(t - i \cdot h) \right] \dots\dots\dots(II.2)$$

On peut ainsi constater que la dérivation non entière d'une fonction prend en compte l'intégralité du passé de cette fonction. C'est grâce à cette propriété que les systèmes d'ordre non entier présenteront un caractère parcimonieux.

On peut différencier deux classes de systèmes d'ordre non entier : les systèmes à caractère explicite et ceux à caractère implicite.

Dans le premier cas, l'opérateur  $D^\alpha$  porte directement sur la fonction  $f$ , alors que, dans le deuxième cas, cet opérateur porte sur le produit de  $f$  par une exponentielle décroissante.

Un système décrit par une entrée  $e(t)$  et une sortie  $y(t)$  à caractère explicite est caractérisé par l'équation :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha y(t) + y(t) = e(t) \quad (III.3)$$

Sa fonction de transfert  $H_{\text{exp}}(s)$  peut donc s'écrire sous la forme :

$$H_{\text{exp}}(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{1}{1 + (\tau.s)^\alpha} \dots\dots\dots (III.4)$$

Où s est l'opérateur de Laplace.

Quand le système est de caractère implicite, l'équation différentielle qui le décrit devient :

$$\tau^\alpha . D^\alpha [y(t).e^{t/\tau}] = e(t).e^{t/\tau} \dots\dots\dots(III.5)$$

Sa fonction de transfert  $H_{\text{imp}}(s)$  peut donc s'écrire sous la forme :

$$H_{\text{imp}}(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{1}{(1 + \tau.s)^\alpha} \dots\dots\dots(III.6)$$

Les systèmes d'ordre un demi caractérisés par les équations (I.6) et (I.8) peuvent être représentés facilement dans le domaine fréquentiel par les fonctions de transfert :

$$H_{\text{imp}}^{1/2} = \frac{1}{(1 + \omega / \omega_0)^{1/2}} \dots\dots\dots (III.7)$$

$$H_{\text{exp}}^{1/2} = \frac{1}{(1 + \omega / \omega_0)^{1/2}} \dots\dots\dots(III.8)$$

Où  $\omega_0$  est la pulsation de coupure du système.

### III .2 Modélisation dynamique des matériaux magnétiques

La plupart des matériaux magnétiques utilisés en génie électrique sont des métaux (fer, cobalt, etc.) et donc de bons conducteurs électriques. Lors de l'application d'une induction variable, ils deviennent le siège de courants induits. Ces courants vont s'opposer au flux d'induction magnétique qui leurs a donné naissance (Loi de Lenz). C'est-à-dire qu'ils vont s'opposer à la pénétration du flux dans le matériau, repoussant les lignes de champ de l'induction magnétique sur les bords du noyau magnétique : c'est l'effet de peau dans les matériaux magnétiques, par analogie avec l'effet de peau dans les conducteurs.

Les pertes par effet Joule produites par ces courants induits ou courants de Foucault (eddy currents pour les Anglo-saxons) sont une autre conséquence.

Considérons un problème couramment abordé: celui d'une plaque mince d'un matériau ferromagnétique conducteur (figure III.1). Le matériau magnétique mis en jeu dans cet exemple ne subit que de faibles variations de champ magnétique. On se restreint donc ici au cadre de processus réversibles de déplacement des parois et de faibles amplitudes (pas de non-linéarité).

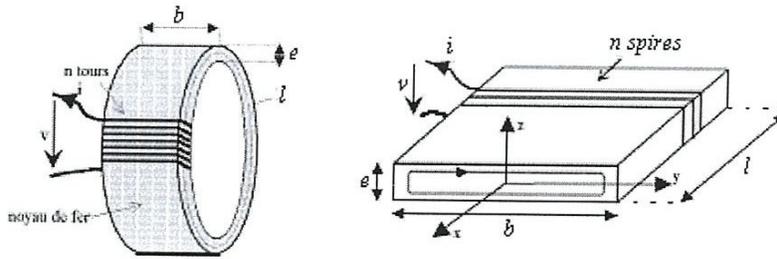


Figure III.1: Bobine à noyau de fer

Les équations de Maxwell dans la matière s'écrivent :

$$\text{Maxwell-Faraday : } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \dots\dots\dots(\text{III.9})$$

$$\text{Maxwell-Gauss : } \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{Maxwell-Thomson : } \text{div } \vec{B} = 0$$

On suppose le noyau de fer homogène, isotrope et linéaire, tel que la perméabilité  $\mu$  et la conductivité  $\sigma$  sont constantes et définies en tout point du matériau par :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu \vec{H}, \mu = \mu_r \mu_0 \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}. \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E}. \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{III.10})$$

En se plaçant dans le cadre ARQP (Approximation en Régime Quasi-Permanent) avec

$\varepsilon\omega \ll \sigma$  dans le domaine fréquentiel, les courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\partial t$  sont négligeables, et l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \dots\dots\dots(\text{III.11})$$

**III .2.1 Remarque :** L'hypothèse imposant un cadre quasi stationnaire négligeant la propagation, est une condition nécessaire à l'utilisation de la représentation diffusive. Physiquement, cela revient à privilégier, lorsque cela est légitime, le phénomène de diffusion par rapport à celui de propagation.

On applique l'opérateur rotationnel aux deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{J}, \dots\dots\dots(\text{III.12})$$

$$\text{grad} \text{div} \frac{\vec{B}}{\mu} - \Delta \frac{\vec{B}}{\mu} = \text{rot}(\sigma \vec{E}), \dots\dots\dots(\text{III.13})$$

En utilisant Maxwell-Faraday à partir de (3.8), et sachant que le matériau est supposé isotrope, on obtient l'équation de diffusion

$$\frac{1}{\mu} \Delta \vec{B} = \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \dots\dots\dots(\text{III.13})$$

Que l'on peut réécrire :

$$\Delta \vec{B} - \mu\sigma \partial t \vec{B} = \vec{0}. \dots\dots\dots(\text{III.14})$$

On va maintenant rappeler, à titre d'illustration, la répartition de l'induction dans la section de la plaque de fer (le noyau magnétique). On suppose  $a \gg b$ , ce qui permet de négliger les effets de bords. On néglige aussi les fuites magnétiques à l'extérieur du noyau.

L'induction est uniforme suivant  $x$  et  $y$ , et orientée suivant  $x$  :  $\vec{B} = B(t, z)\vec{x}$ . On peut réduire l'équation (3.10) à une équation à une seule dimension. La variation de l'induction  $B$  ne dépend que de  $z$  :

$$\frac{\partial^2 B(t, z)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial B(t, z)}{\partial t} = 0, \dots\dots\dots(\text{III.15})$$

En utilisant la transformation de Laplace, on obtient :

$$\frac{\partial^2 B(s, z)}{\partial z^2} - \mu\sigma p B(s, z) = 0, \dots\dots\dots (III.16)$$

Dont la solution générale est (équation du 2nd degré à coefficients constants) :

$$B(s, z) = \alpha(s)e^{z\sqrt{\mu\sigma p}} + \beta(s)e^{-z\sqrt{\mu\sigma p}}. \dots\dots\dots (III.17)$$

En supposant que l'induction est uniforme sur le pourtour du noyau, on pose les conditions aux limites de Dirichlet telles que  $B\left(s, \frac{b}{2}\right) = B\left(s, -\frac{b}{2}\right) = B_0(s)$  cela permet de calculer les constantes  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  (constantes vis à vis de  $z$ ), ce qui donne :

$$B(s, z) = B_0(s) \frac{\cosh\left(z\sqrt{\mu\sigma s}\right)}{\cosh\left(\frac{b}{2}\sqrt{\mu\sigma s}\right)}. \dots\dots\dots (III.18)$$

En régime sinusoïdal établi  $s = j\omega$  on peut introduire la notion d'épaisseur d'effet de peau  $\delta$  qui dépend de la fréquence :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \dots\dots\dots (III.19)$$

L'équation (3.14) devient :

$$B(s, z) = B_0(s) \frac{\cosh\left(z\sqrt{\frac{2j}{\delta}}\right)}{\cosh\left(\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2j}{\delta}}\right)}. \dots\dots\dots (III.20)$$

Pour observer le comportement dynamique de la bobine au sein d'un circuit électrique, on se ramène aux variables électriques (tension et courant). Pour cela, calculons le flux d'induction à travers la section du tore :

$$\phi(s) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}, \dots\dots\dots (III.21)$$

$$= a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B(s, z) dz, \text{ L'induction étant constante suivant } y \dots\dots\dots(\text{III.22})$$

$$= aB_0(s) \frac{1}{\cosh\left(\frac{b}{2}\sqrt{\mu\sigma s}\right)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cosh(z\sqrt{\mu\sigma s}) dz, \dots\dots\dots(\text{III.23})$$

$$= 2aB_0(s) \frac{\tanh\left(\frac{b}{2}\sqrt{\mu\sigma s}\right)}{\sqrt{\mu\sigma s}}. \dots\dots\dots(\text{III.24})$$

$B_0(p)$ , qui correspond à l'induction maximale dans le tore (induction sur les bords,

$z = -\frac{b}{2}$  et  $z = \frac{b}{2}$  se calcule en employant le théorème d'Ampère (hypothèse d'un solénoïde d'une longueur infinie,  $a \ll l_n$ ).

$$\oint H_0(s) dl = ni(s), \dots\dots\dots(\text{III.25})$$

d'où avec  $B_0 = \mu H_0$

$$B_0(s) = \mu \frac{n}{l_n} i(s), \dots\dots\dots(\text{III.26})$$

Avec  $i(p)$  qui est le courant dans le bobinage.

En injectant  $B_0(s)$  dans la relation (III.24), on peut exprimer le flux total embrassé par le bobinage de  $n$  spires :

$$\phi_T = n\phi(s), \dots\dots\dots(\text{III.27})$$

$$= 2\alpha\mu \frac{n^2}{l_n} i(s) \frac{\tanh\left(\frac{b}{2}\sqrt{\mu\sigma s}\right)}{\sqrt{\mu\sigma s}}, \dots\dots\dots(\text{III.28})$$

$$= L_0 \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} i(p), \text{ Avec } L_0 = n^2 \mu \frac{\alpha b}{l_n} \text{ et } \omega_0 = \frac{4}{b^2 \mu \sigma} \dots \dots \dots \text{(III.29)}$$

Remarque 10 L'inductance  $L_0$  correspond à l'inductance aux basses fréquences car :

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \rightarrow 1, \dots \dots \dots \text{(III.30)}$$

Et l'on retrouve alors la définition du coefficient d'auto-inductance en régime continu :

$\phi_T = L_0 i$ . Par contre l'utilisation du terme inductance pour  $L(s)$  (3.27) est un peu abusif car le flux total induit  $\phi_T$  n'est pas uniquement dû au courant  $i$  dans le bobinage, mais inclut aussi les courants de Foucault.

$$L(s) = L_0 \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \dots \dots \dots \text{(III.31)}$$

La détermination de l'admittance à partir du flux totalisé est fondée sur l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale en convention récepteur :

$$u(s) = s \phi_T(s) \dots \dots \dots \text{(III.32)}$$

$$= L_0 \omega_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right) \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} i(s), \dots \dots \dots \text{(III.33)}$$

L'impédance et l'admittance symbolique sont données par :

$$Z(s) = L_0 \omega_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right) \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} \dots\dots\dots(III.35)$$

Et

$$Y(s) = \frac{1}{L_0 \omega_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_0}}\right) \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \dots\dots\dots(III.36)$$

### III.3 Conclusion

A ce stade, si l'écriture symbolique de Laplace des modèles fractionnaire est très synthétique, et sa représentation dans le domaine fréquentiel semble ainsi tout à fait appropriée et simple pour manipuler les systèmes d'ordre non entier et modéliser les composants de réseaux avec cet outil mathématique.

La simulation dans le domaine temporel pose néanmoins certains problèmes dans la mesure où la propriété de compacité disparaît ; des outils de simulation numériques doivent alors être développés spécifiquement pour calculer la réponse d'un système ou réseau électrique modélisé par des systèmes d'ordre non entier. L'un de ces outils est la représentation diffusives qui fera l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre IV

### Simulation par représentation diffusive

#### IV. 1 Introduction

Dans ce chapitre, une simulation des comportements fréquentielle et temporelle de la bobine à noyau de fer par la représentation diffusive est effectuée à l'aide de «MATLAB »

#### IV. 2 Modèle Diffusif

##### IV. 2.1. Principe de base

La représentation diffusive permet d'exprimer un transfert non rationnel  $H(p)$  sous la forme d'un système dynamique linéaire entrée-sortie défini par :

$$H(p) = \int_0^{\infty} \frac{\eta(\xi)}{p + \xi} d\xi \dots\dots\dots (IV.1)$$

L'idée originale de la représentation diffusive est d'introduire une réalisation dynamique du système sous la forme d'une représentation d'état classique (mais de dimension infinie), appelée réalisation diffusive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} &= -\xi \psi(\xi, t) + u(t) \\ y(t) &= \int_0^{\infty} \eta(\xi) \psi(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad \xi > 0, \psi(\xi, 0) = 0 \dots\dots\dots (IV.2)$$

Le système ainsi défini se prête bien à l'approximation en dimension finie et conduit à des simulations numériques dans le domaine temporel à la fois simples, stables, précises et peu coûteuses en calcul (car diagonale) pour les opérateurs non standards.

Le symbole diffusif  $\eta(\xi)$  est obtenu par transformation de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  associée à l'opérateur  $H(p)$ . La représentation diffusive est donc une utilisation "à contre sens" de la transformée de Laplace:

$$\eta(\xi) \xrightarrow{L} h(t) \xrightarrow{L} H(p) \dots\dots\dots (IV.3)$$

Les symboles associés aux différents modèles sont représentés sur le Tableau A9 en annexe A. Le symbole diffusif  $\eta(\xi)$  peut être aussi identifié soit à partir de la réponse temporelle ou fréquentielle.

#### IV. 2.2. Approximation en dimensions finies

On présente quelques éléments concernant l'approximation numérique, c'est-à-dire la réalisation d'état approchée en dimension finie de l'opérateur non rationnel  $H(\frac{d}{dt})$

Soit  $\{\xi_k\}_{k=1:N}$  une discrétisation de  $\xi$ . La plage ainsi couverte est fixée par les valeurs extrêmes  $\xi_1$  et  $\xi_N$ . Cette plage dépendra de la dynamique de l'opérateur que l'on souhaite approcher par une réalisation d'état de dimension N. On choisira souvent  $\xi_N$  en progression géométrique :

$$\xi_{k+1} = r \xi_k \dots\dots\dots(IV.4)$$

$$r = N^{-1} \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_N}} \dots\dots\dots(IV.5)$$

Ce choix permet couvrir une plage étendue avec peu de points et d'affecter la même importance à chaque décade couverte.

On considère des fonctions d'interpolation  $\Lambda_k(\xi)$ , choisie en fonction des propriétés désirées, notamment de régularité. On choisira ici la fonction d'interpolation linéaire :

$$\Lambda_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq \xi_{k-1} \text{ ou } \xi \geq \xi_{k+1} \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & \text{si } \xi_{k-1} < \xi < \xi_k \\ \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} & \text{si } \xi_k < \xi < \xi_{k+1} \end{cases} \dots\dots\dots (IV.6)$$

Au plan numérique, cette représentation d'état peut être approchée avec précision par discrétisation de la variable fréquentielle  $\xi$  conduisant par quadrature à une réalisation d'ordre fini N.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k(t)}{\partial t} &= -\xi_k \psi_k(t) + u(t) \\ \tilde{y}(t) &= \sum_{k=1}^N C_k \psi_k(t) \end{aligned} \quad k = 1 : N, \psi_k(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (IV.7)$$

Ou sous forme symbolique:

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p + \xi_k} \dots\dots\dots (IV.8)$$

Si le symbole diffusif  $\eta$  est une fonction continue :  $C_k = \eta(\xi_k) \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi$

Ou, dans le cas général :  $C_k = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) \Lambda_k(\xi) d\xi$

Après calculs élémentaires on trouve :

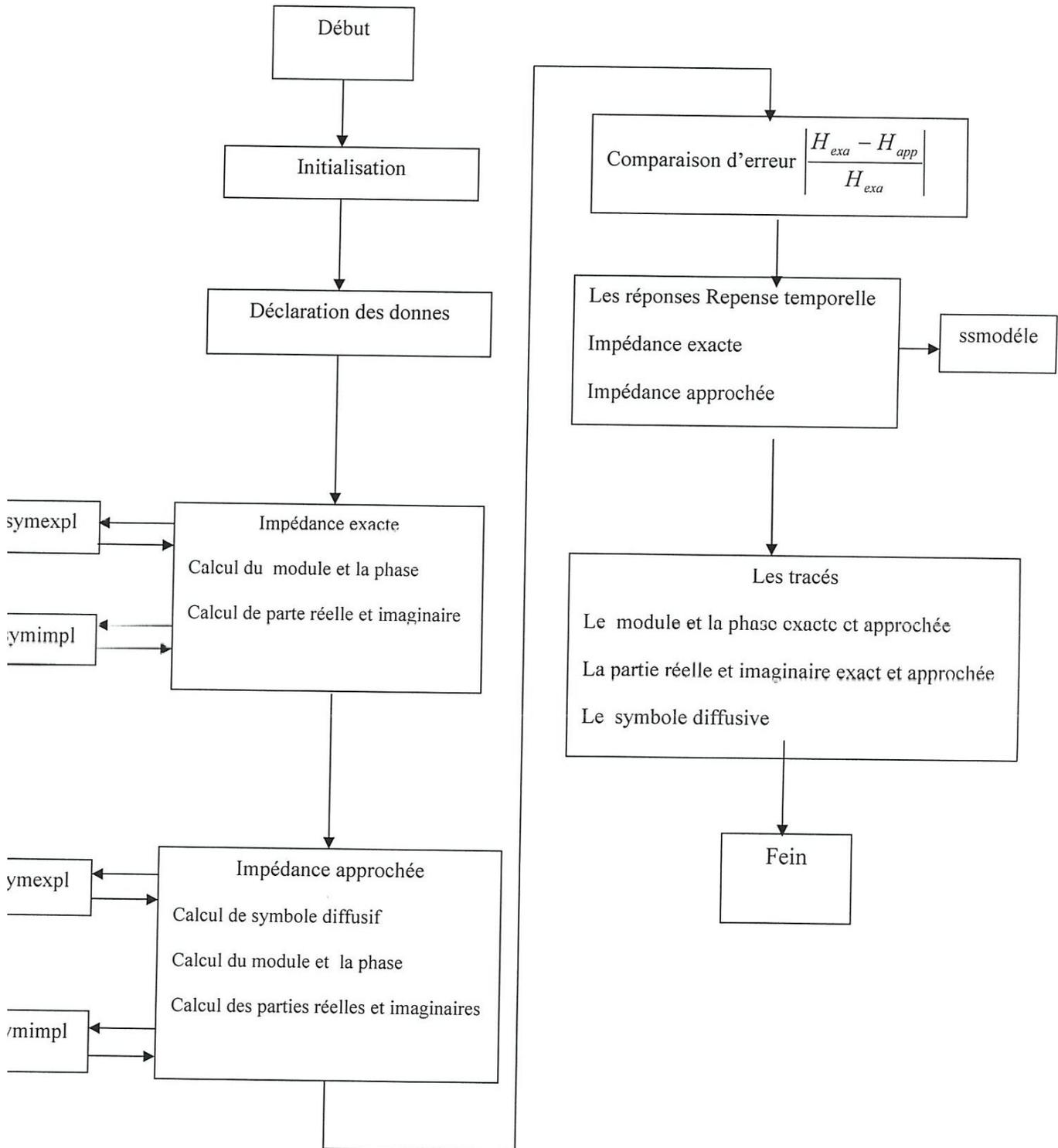
$$C_k = \eta(\xi_k) \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2} \dots\dots\dots (IV.9)$$

Une bonne approximation du symbole diffusif nécessite une plage de  $\xi_k$  suffisamment large et un échantillonnage permettant de prendre en compte les variations brutales de  $\eta$ .

### IV.2.3. Symbole diffusif du transfert explicite et implicite

	Transfert	Symbole diffusif	limitations
Transfert explicite	$\frac{1}{1 + (\tau p)^\alpha}$	$\frac{\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}}{\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\alpha + 2 \cos(\alpha\pi) + \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\alpha}$	$0 \leq \alpha \leq 1$
Transfert implicite	$\frac{1}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha}$	$\eta(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{\xi_0^\alpha}{\xi^\alpha}$	$\xi > \xi_0$ $0 \leq \alpha \leq 1$

### IV.3 Organigramme de simulation



#### IV.4 Résultat de simulation

Le diagramme de Bode est une représentation de la réponse fréquentielle d'un système décrit par une fonction de transfert  $H(s)$ . Le Gain en [dB] et la Phase en [deg] sont définis

$$\text{par : } \text{Gain} = 20 \log |H(s)| \quad \text{et} \quad \text{Phase} = \frac{180}{\pi} \cdot \arctan(H(s)) \quad (\text{IV.10})$$

Sur la figure (IV.1) sont représentés les modules et les phases des modèles explicites (exacte en rouge et approchée en bleu). Alors que sur la figure (IV.2) sont représentés les modules et les phases des modèles implicites (exacte en rouge et approchée en bleu).

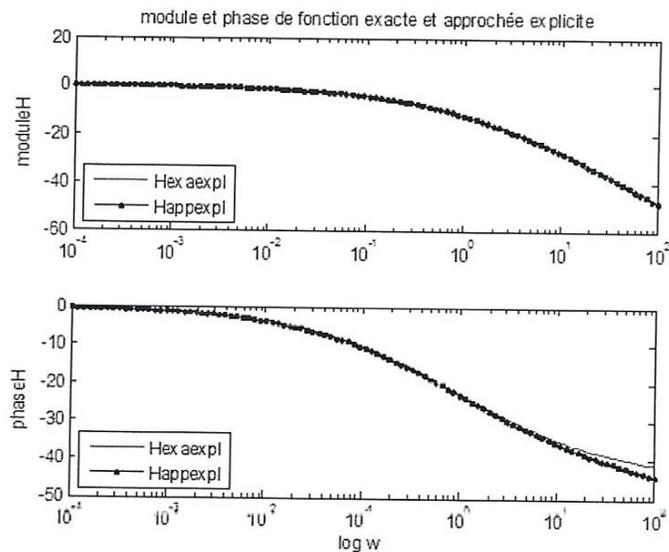


Figure (IV.1) module et phase du modèle explicite (exacte et approchée)

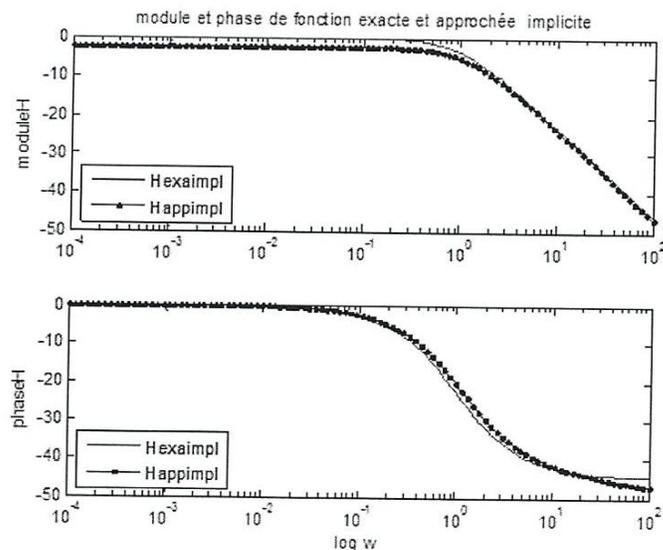


Figure (IV.2) module et phase du modèle implicite (exacte et approché)

Sur la figure (IV.3) sont représentés les modules et les phases des modèles exacts (explicite et implicite), alors que sur la figure (IV.4) sont représentés les modules et les phases des modèles approchés (explicite et implicite).

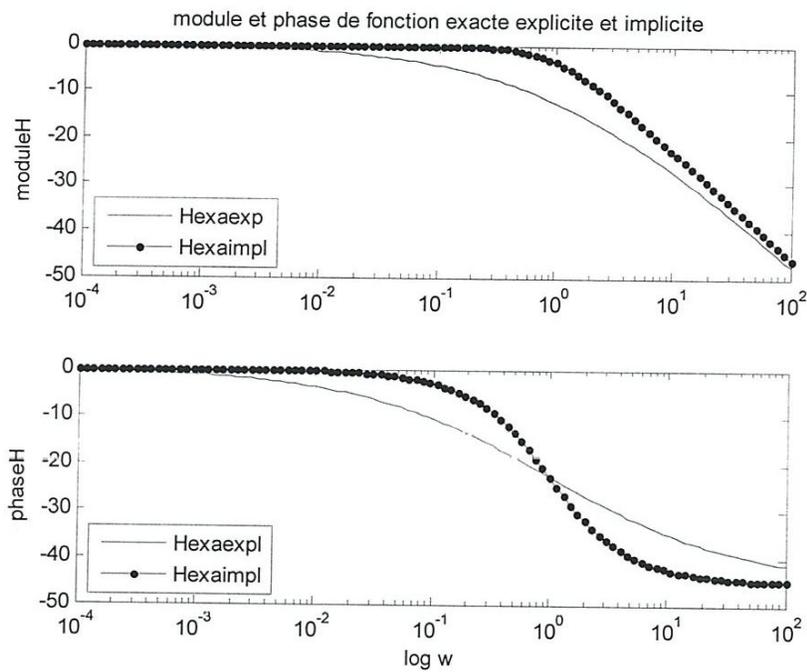


Figure (IV.3) module et phase des modèles exacts (explicite et implicite)

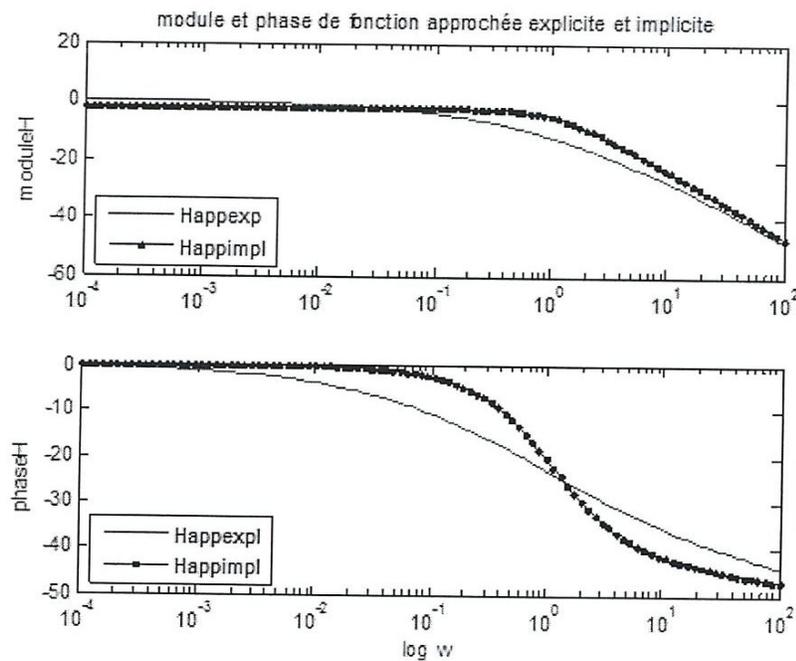


Figure (IV.4) module et phase des modèles approchés (explicite et implicite)

Sur la figure (IV.5) sont représentés les partie réelles et imaginaires des modèles explicites (exacte en rouge et approchée en bleu). Alors que sur la figure (IV.6) sont représentés les partie réelles et imaginaires des modèles implicites (exacte en rouge et approchée en bleu).

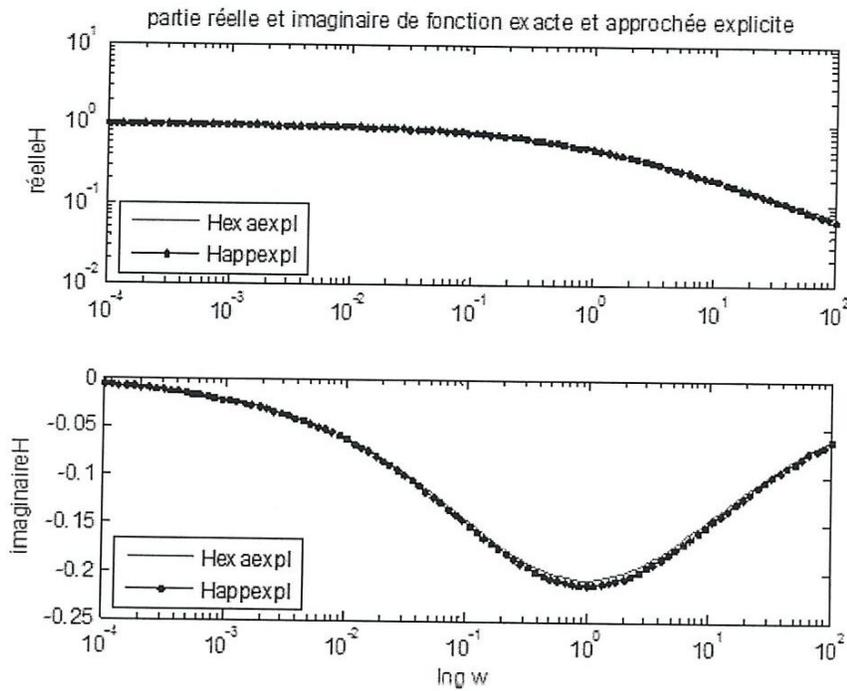
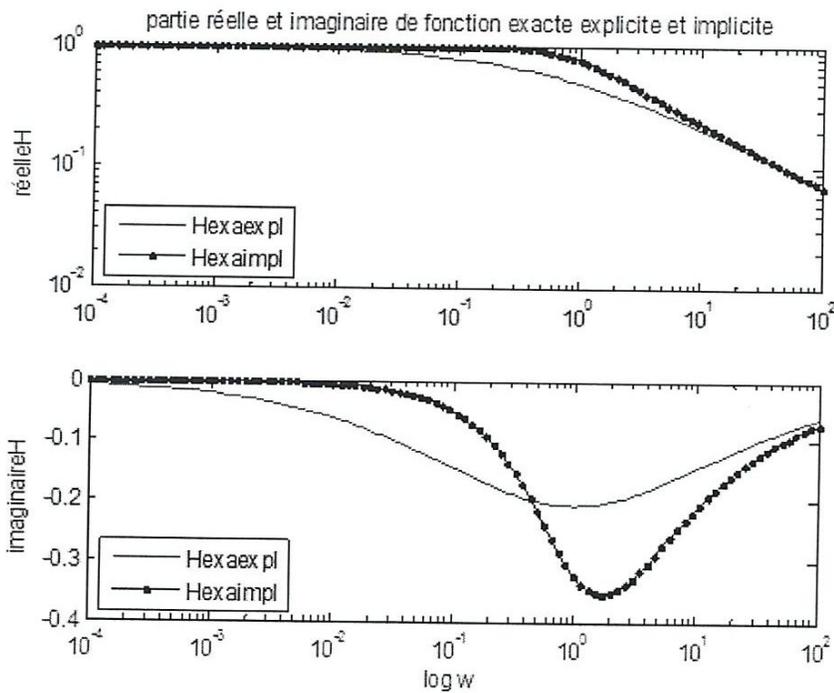


Figure (IV.5) partie réelle et imaginaire des modèles explicites (exacte et approché)



Figure(4.6) partie réelle et imaginaire des modèles implicites (exacte et approché)

Sur la figure (IV.7) sont représentés les parties réelles et imaginaires des modèles exacts (explicite et implicite), alors que sur la figure (IV.8) sont représentés les parties réelles et imaginaires des modèles approchés (explicite et implicite).

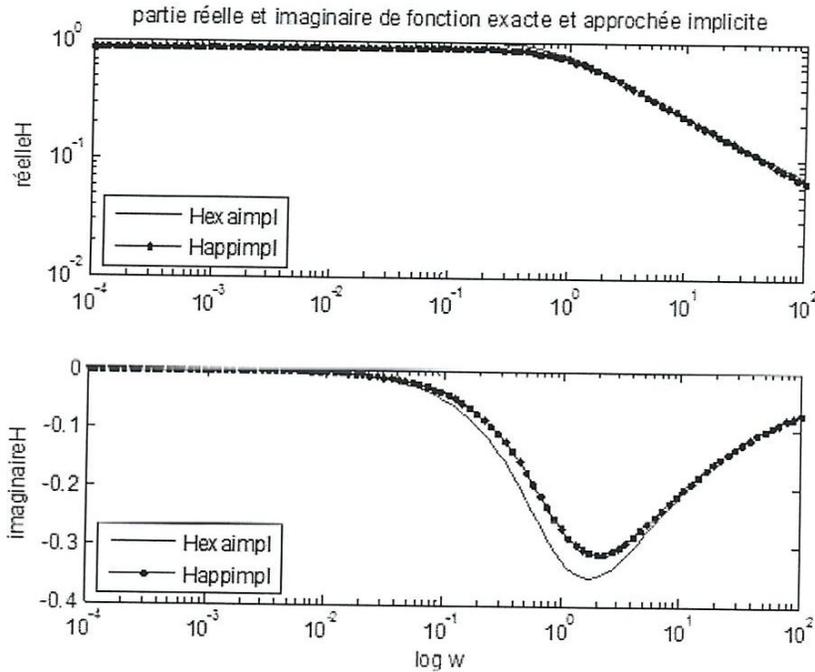


Figure (IV.7) parties réelles et imaginaires des modèles exacts (explicite et implicite)

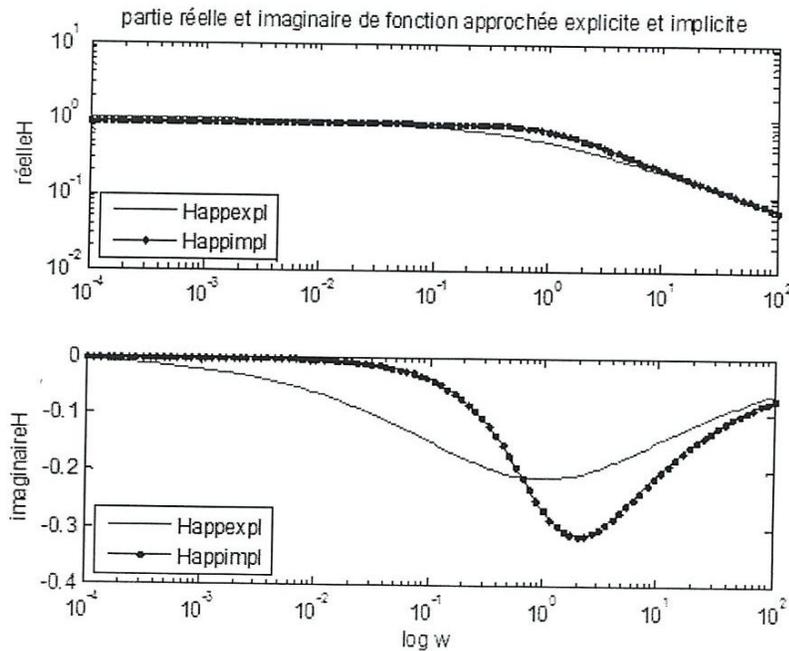
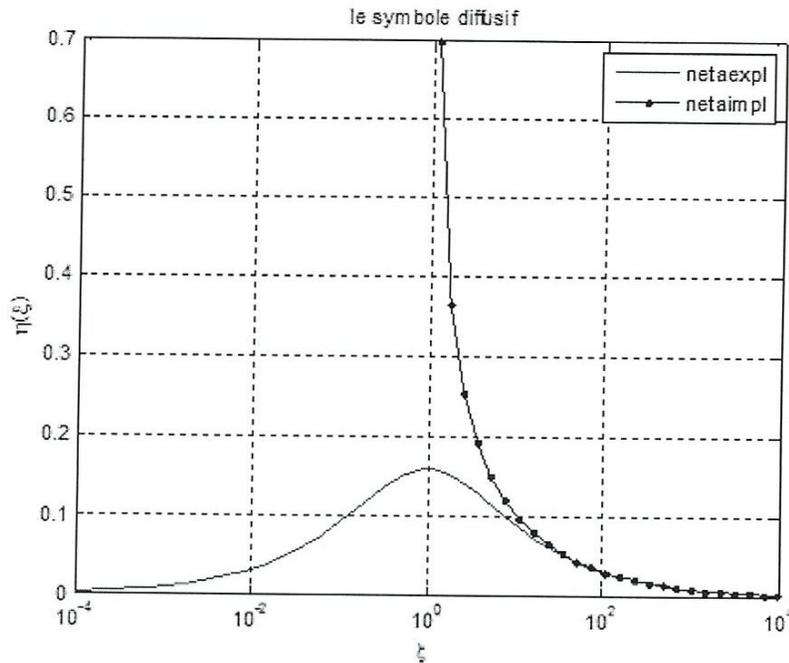


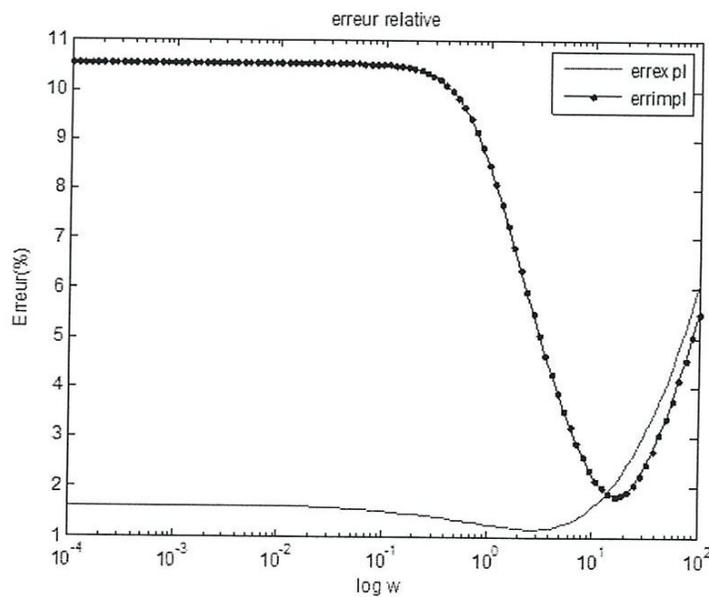
Figure (IV.8) partie réelle et imaginaire des approchés ( explicite et implicite)

Sur la figure (IV.9) sont représentées les symboles diffusif associé au modèle explicite (en rouge) et implicite( en bleu).



**Figure (IV.9) Symboles diffusifs associés aux modèles explicite et implicite**

Sur la figure (IV.10) sont représentées l'erreur relative entre les modèles exactes et approchés explicite et implicite. On constate dans les deux cas de figure une erreur inférieure à 11% sur la plage de fréquences choisie.



**Figure (IV.10) erreur relative entre modèles exactes et approchés (explicite et implicite)**

Sur la figure (IV.11) sont représentées les réponses temporelles des modèles explicite et implicite (approchés).

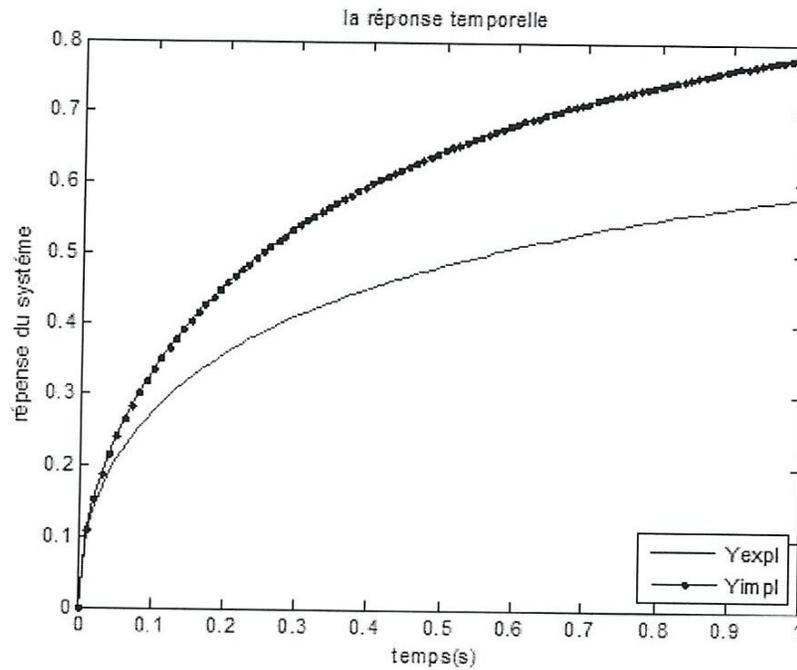


Figure (IV.11) la réponse temporelle de fonction explicite et implicite

#### IV.5 Conclusion

La représentation diffusive permet une réalisation dynamique adaptée au traitement dans les temps des phénomènes non standard existants dans les matériaux magnétiques en génie électrique. Nous avons développé ici la mise en œuvre de ce formalisme dans le cas d'une bobine à noyau de fer. Et c'est ce qui nous a permis de simuler le comportement temporel des modèles sous formes implicite et celui explicite.

## Annexe A

### Représentation diffuse

#### A.1 Introduction

Les opérateurs pseudo-différentiels sont des représentations temps/fréquence qui généralisent les opérateurs différentiels, à coefficients constants et leurs notions de fonction de transfert, à une classe beaucoup plus grand d'opérateurs regroupant notamment les opérateurs intégrodifférentiels fractionnaire.

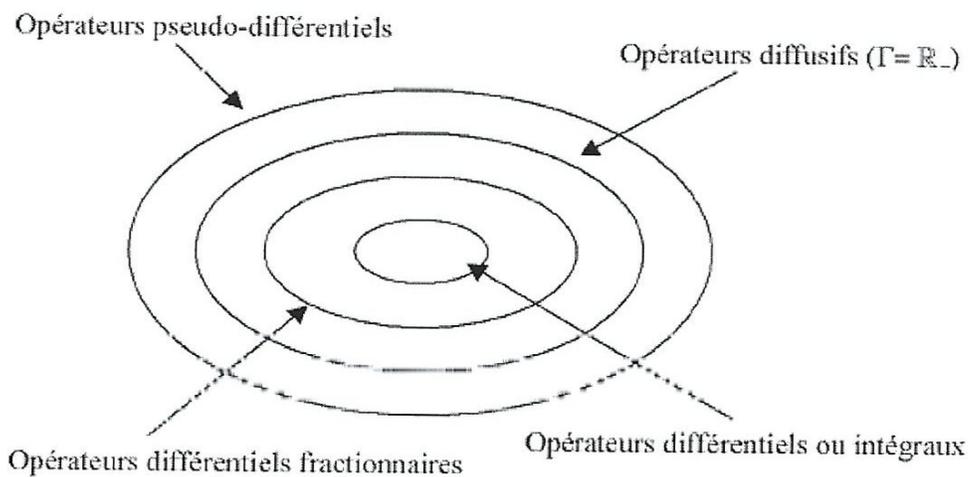


Figure A.1: Différentes classes d'opérateurs.

#### A.2 Définition

La représentation diffuse permet la réalisation dynamique locale en temps d'une classe très étendue d'opérateurs pseudo-différentiels en présence des facilités d'approximation numérique qu'on peut définir par :

$$H(t, jw) = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(t, \xi)}{iw - \xi} d\xi \quad ; w \in \mathbb{R} \quad , t \leq 0$$

Le symbole  $\eta(t, \xi)$  de l'opération  $H\left(t, \frac{d}{dt}\right)$  lorsqu'il existe, caractérise entièrement l'opérateur et doit être considéré dans le contexte de la représentation diffuse comme le

symbole utilisable ce qui se justifie par le résultat qui fournit une réalisation d'état de l'opérateur.

L'intérêt de la représentation diffusible est d'un par de fournir un moyen simple pour approcher numériquement des opérateurs non standard intervenant fréquemment en physique, d'autre part et surtout d'exprimer l'opérateur de façon équivalent mais locale en temps, ce qui permet d'utiliser certains outils puissants de l'analyse.

### A.3 Exemple fondamental

L'exemple qui suit est significatif du principe de la représentation diffusible et définit un point de départ pour la présentation plus générale qui suit.

On considère le système entrée-sortie de type équation de la chaleur monodimensionnelle (dénommée également équation de diffusion, d'où provient en fait le terme "représentation diffusible") avec une entrée  $u(t)$  ponctuelle en  $x = 0$  et une mesure (sortie)  $y(t)$  en ce même point :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t, x) &= \partial_x^2 \varphi(t, x) + 2u(t)\delta(x), \quad x \in R \\ y(t) &= \varphi(t, 0) \end{aligned}$$

Soit, par transformation de Fourier par rapport à la variable spatiale  $x$  :

$$\partial_t \varphi(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \varphi(t, \xi) + 2u(t), \quad \xi \in R$$

$$\int_R \varphi(t, \xi) d\xi,$$

Pour une condition initiale nulle  $\varphi(0, x) = 0$ , par explicitation de  $\varphi$  au moyen de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, on obtient classiquement:  $y = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * u$  encore, en utilisant la notation standard des intégrateurs fractionnaires :

$$y = I^{1/2} u = \partial_t^{-1/2} u$$

D'autre part, par explicitation directe la sortie  $y$  s'exprime également :

$$y(t) = \left( \int_R e^{-4\pi^2 \xi^2 t} d\xi \right) * u$$

Cette réalisation entrée-sortie non rationnelle repose sur l'introduction d'une variable d'état  $\varphi$  ou  $\hat{\varphi}$  en dimension infinie. Une approximation finie-dimensionnelle convergente de l'équation sera alors associée à un transfert rationnel approchant  $p^{-1/2}$

Des transferts plus généraux seraient réalisables de même, en faisant intervenir dans

La deuxième équation une distribution  $T(\xi)$ , sous la forme:  $y(t) = \int_R T(\xi)\varphi(t, \xi)d\xi$ .

La représentation de  $y(t)$  comme moyenne pondérée d'une famille de sorties de systèmes à fonctions de transfert rationnelles s'explique plus simplement au moyen de la transformation de Laplace, comme il sera montré plus loin.

#### A.4 Histoire d'une fonction de t

On utilise dans la suite la notation commode :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

La définition ci-dessous joue un rôle fondamental dans la théorie générale de la représentation diffusive, en permettant de "geler le présent"  $t$  après introduction de l'histoire, représentée par la variable temporelle  $s$  :

**A.4.1 Définition 1** La fonction  $u(t, \cdot)$  définie sur  $R_s$  par :

$$\begin{aligned} u(t, s) & \text{ si } s < t \\ u(t, s) & = 0 \end{aligned}$$

Est appelée histoire de  $u$  à l'instant  $t$ .

L'histoire d'une fonction  $u$  (causale) est donc une fonction de deux variables temporelles: le temps "courant"  $t$  qui représente le temps de l'évolution et le "passé"  $s$  qui à chaque instant  $t$  augmente. L'intérêt de considérer cette fonction apparaît dans l'expression d'un opérateur de convolution, qui s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t h(s)u(t-s)ds = \int_0^{+\infty} h(s)u(t, s) = \langle h, u(t, \cdot) \rangle_s$$

Dans cette formulation, en effet, la variable  $s \in R^+$  permet d'exprimer  $y$  à partir d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indépendant de  $t$  (les bornes de l'intégrale ne dépendent pas de  $t$ ).

Cette expression peut alors être transformée de manière à déboucher sur une réalisation d'état, c'est-à-dire une équation différentielle du premier ordre en  $t$  : c'est l'objet de la suite.

#### A.5 Principes généraux

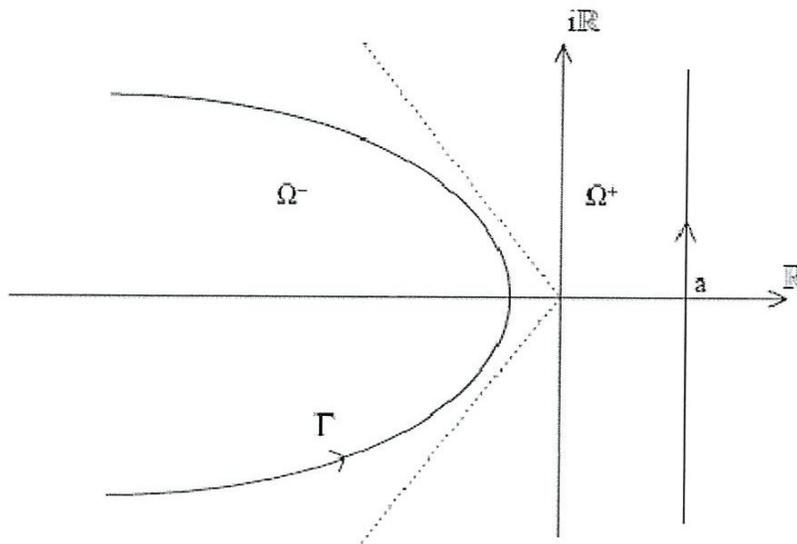
Le résultat qui suit, basé sur la fonction histoire sous-tend toute l'approche. Il exprime en quoi la causalité conduit naturellement à une formulation différentielle.

**A.5.1 Théorème 1** Pour toute fonction  $u$  définie sur  $R^+$  et pour tout  $p \in \mathbb{C}$  où cette quantité est définie,  $\phi(t, p) := (u(t, \cdot))(-p)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t \phi - p\phi = u, \phi(0, p) = 0$$

### A.5.2 Représentation diffusive générale

On introduit une courbe fermée (éventuellement à l'infini)  $\Gamma \subset C^-$  paramétrée par une fonction continue, dérivable presque partout  $\gamma : R \rightarrow C^-$ . La courbe  $\Gamma$  sépare  $C$  en deux



domaines ouverts disjoints  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ ,  $\Omega^+ \supset C^{*+}$  (voir Figure 1.2).

Figure 1.2: Contour défini pour les  $\Gamma$  représentations.

On note  $\mathcal{L}_\gamma$  l'opérateur défini à partir  $\mathcal{L}$  de  $L$  par restriction à  $-\Gamma$ , c'est-à-dire

$$(\mathcal{L}_\gamma)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} f(s) ds, \xi \in R,$$

dont l'opérateur "dual"  $\mathcal{L}_\gamma^*$ , défini par l'identité:  $(\mathcal{L}_\gamma)(\xi)g(\xi)d\xi = f(s)(\mathcal{L}_\gamma^*g)(s)ds$ , s'exprime

$$(\mathcal{L}_\gamma^*g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} g(\xi) d\xi, s > 0$$

**A.5.3 Théorème 2** Pour  $u$  causale  $\psi = \mathcal{E}_\gamma u$  est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t \psi = \gamma(\xi) \psi + u, \quad \xi \in R, \quad \psi(0, \cdot) = 0.$$

Avec  $\mathcal{L}_\gamma * \eta = h$  est vérifié le résultat ci-après, au centre de l'approche par représentation diffusive :

**Corollaire 1** L'opérateur défini par la fonction de transfert  $H$  et noté symboliquement  $H(d/dt)$  Est réalisé par :

$$H(d/dt)u(t) = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \eta(t, \cdot) \psi(t, \cdot) \rangle_{\xi};$$

De plus, lorsque  $\eta$  est une fonction continue,  $\eta(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{2j\pi} H(\gamma(\xi))$ .

Par conséquent  $\eta$  est défini par  $\mathcal{L}_\gamma * \eta = h$  L'expression de  $\eta$  se détermine ensuite par identification.

**Propriété 1**  $\eta(\xi)$  est solution (au sens des distributions) de l'équation intégrale linéaire

$$H(t, jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)}{jw - \gamma(\xi)} d\xi, w \in R, t > 0$$

Par ailleurs, au sens des distributions,

$$\eta(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(\xi)}{2j\pi} H(P)$$

En résumé on obtient :

$$\begin{aligned} \langle h, u \rangle_s &= \langle \eta, \psi \rangle_\xi \\ &\uparrow \\ h &= \mathcal{L}_\gamma * \eta, \psi = \mathcal{E}_\gamma u \end{aligned}$$

### A.6 Remarques importantes

D'un point de vue purement formel, les expressions  $\langle h, u \rangle_s$  et  $\langle \eta, \psi \rangle_\xi$ , exprimant toutes deux le résultat de l'opérateur convolutif défini par  $h$  sur une fonction  $u$  à l'instant  $t$ , peuvent sembler de complexité équivalente : ce sont des opérateurs linéaires intégraux à noyaux respectivement  $h$  et  $\eta$ , appliqués à des fonctions définies sur  $R$ , respectivement  $u$  et  $\psi$ ; de plus, le calcul de  $\langle \eta, \xi \rangle_\xi$  nécessite au préalable la résolution d'une équation différentielle, alors que  $u$  est défini par une expression statique.

### A.7 Réalisations diffusives

La courbe  $\Gamma$  étant fixée, la correspondance  $y = H\left(\frac{d}{dt}\right)u = h * u$  peut alors être réalisée par divers systèmes dynamiques entrée-sortie (voir ci-après), qui constituent une classe appelée de manière générique  $\gamma$ -réalisation. Les avantages respectifs de chacune des réalisations particulières sont à considérer en fonction du contexte.

$$\partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u.$$

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \psi d\xi$$

est la plus simple, notamment pour la construction d'approximation. A noter qu'une même équation d'état permet de construire (par sortie vectorielle) plusieurs opérateurs  $H(d/dt)$  en parallèle, ce qui présente un avantage dans le cas de problèmes présentant cette particularité. A noter également que le  $\gamma$ -symbole  $\eta(\xi)$  apparaît linéairement :

$y = \langle \eta, \xi \rangle = K_u \eta$  : Ceci est utile dans certains problèmes comme l'identification et la poursuite optimales, abordés dans ce mémoire.

$$\partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u \eta$$

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi d\xi.$$

Dans ce cas, les approches de type énergie sont particulièrement facilitées par le fait que (1.18) est de la forme abstraite :

$$\partial_t X = AX + Bu, A \leq 0.$$

$$y = B^* X;$$

Enfin la formulation étendue permet d'unifier dans un même cadre, celui des réalisations étendues "par dérivation" [Mon98], les opérateurs de nature viscoélastique à comportement haute fréquence de type intégrateur et dérivateur, de symboles  $H(p)_{|p|^\alpha \rightarrow +\infty}$

$$Kp^\alpha, \alpha < 1.$$

La réalisation étendue (par dérivation) est définie par :

$$\partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u.$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \partial_t \psi d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) \gamma(\xi) \psi + u d\xi.$$

Fait apparaître une transmission directe entre l'entrée et la sortie.

Si  $y = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \psi d\xi$  réalise l'opérateur  $H(d/dt)$ , alors  $z = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) (\gamma(\xi)\psi + u) d\xi$  réalise

$d/dt H(d/dt)$ , de fonction de transfert  $K(p) = pH(p)$ . Il est possible au moyen de réalisations étendues d'accéder sous le formalisme de la représentation diffusive aux opérateurs dont le gain à haute fréquence est asymptotiquement constant, voire croissant moins vite que le dérivateur, par exemple de symbole  $p^\alpha, \alpha < 1$ .

A noter que dans le cas où le gain à haute fréquence est constant, la sortie  $z$  peut

s'exprimer de manière séparée:  $z = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) \gamma(\xi) \psi(t, \xi) d\xi + ku$ , avec  $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) d\xi$ .

Des opérateurs d'ordre supérieur peuvent également être ainsi réalisés par composition avec

$d^n / dt^n$  (La réalisation d'état obtenue n'étant alors évidemment plus un système propre).

Le choix d'une forme particulière de réalisation diffusive dépend de la nature du problème.

### A.8 Représentation diffusive restreinte au cas $\Gamma = \mathbb{R}^-$

Pour les problèmes étudiés dans ce mémoire, le cas  $\gamma(\xi) = -|\xi|$  s'avère suffisant, du fait que les dynamiques rencontrées, de nature apériodique, ne nécessitent pas la prise en compte de comportements oscillants que permet la représentation diffusive par un contour  $\gamma$  plus général.

#### A.8.1 Réalisation diffusive et expressions du symbole diffusif

Par symétrie, l'ensemble  $\Gamma$  peut être réduit à  $\mathbb{R}^-$  et il est alors possible de définir le  $\gamma$ -symbole  $\eta$  sur  $\mathbb{R}^+$  seulement. Il est dénommé symbole diffusif simple ou bien symbole diffusif (aucune confusion n'étant à craindre dans la présente étude).

On considère donc le système entrée-sortie, avec  $\eta$  distribution définie sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\begin{aligned} \partial_T \psi(t, \xi) &= -\xi \psi(t, \xi) + u, \xi \in \mathbb{R}^+ . \\ y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) \psi(t, \xi) d\xi . \end{aligned}$$

La sortie  $y$  s'écrit formellement :

$$y(t) = \langle \eta, e^{-\xi t} * (t) \rangle = \int_0^t \left( \int_0^{+\infty} \eta(\xi) e^{-\xi(t-s)} d\xi \right) u(s) ds = \eta * u,$$

C'est-à-dire comme celle d'un système de réponse impulsionnelle  $h = \mathcal{E} \xi \eta$  et donc de fonction de transfert, en général non rationnelle.

Cette expression de la réponse impulsionnelle apparaît ainsi comme une utilisation à contre-emploi de la transformation de Laplace, dans laquelle  $t$  joue le rôle de la variable

Laplace, Le système entrée-sortie stable, déduit de la définition de  $\psi$ , est une réalisation d'état (de dimension infinie) de l'opérateur de convolution  $u \rightarrow y$  de transfert  $H(p)$  et le symbole diffusif est la distribution causale :

$$\eta = \mathcal{E}^{-1} h.$$

Par transformation de Laplace, le symbole  $\eta$  est en outre solution de l'équation intégrale, utile pour le traitement fréquentiel :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(\xi)}{p + \xi} d\xi .$$

#### A.8.2 Hypothèses fondamentales et calcul direct du symbole $\eta$

On considère un opérateur de symbole  $H(p)$ .

**A.5.3 Théorème 3** Sous les hypothèses suivantes :

1.  $H(p)$  est analytique  $C - R_-$ ,
2. les traces de  $H(p)$  sur  $(R \rightarrow +j0)$  et  $(R \rightarrow -j0)$  sont des fonctions localement intégrables (au sens de Lebesgue),
3.  $H(p) \rightarrow 0$  quand  $|p| = p_n \rightarrow +\infty$ , uniformément par rapport à  $\arg \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ ,
4. avec  $c_r$  cercle de centre 0 et de rayon  $r$ ,  $\int_{c_r} e^{pt} H(p) dp \rightarrow 0$  pour tout  $t > 0$ ,
5. le symbole diffusif de  $H(d/dt)$  existe; il est donné par :

$$\eta(\xi) = \left( \frac{1}{2j\pi} \right) [H(-\xi - j0) - H(-\xi + j0)], \xi > 0.$$

Et par changement de variable, on trouve :

$$\forall t > 0, h(t) = \left( \frac{1}{2j\pi} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt} H(p) dp = \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} \eta(\xi) d\xi = (L\eta)(t) \right)$$

$$(h * u)(t) = \eta(\xi) \left[ \int_0^t e^{-\xi s} u(t-s) ds \right] d\xi = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) \psi(\xi, t) d\xi.$$

Expression dans laquelle  $\psi$  est clairement solution de:  $(\partial \psi / \partial t) = -\xi \psi + u, \psi(\xi, 0) = 0$ .

Par utilisation du contour de Bromwich-Wagner et grâce à l'analyticité de  $H$  sur  $C - R_-$ , la transformée de Laplace inverse de  $H$  conduit alors à:

$$\frac{1}{2j\pi} \int_{a-\infty}^{a+\infty} e^{pt} H(p) + \frac{1}{2j\pi} \int_{-\infty}^0 e^{pt} H(p+j0) dp + \frac{1}{2j\pi} \int_0^{+\infty} e^{pt} H(p-j0) dp = 0.$$

Et on obtient par changement de variable adéquat :

$$h(t) = \left( \frac{1}{2j\pi} \right) \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} [H(-\xi - j0) - H(-\xi + j0)] d\xi = (L\{(1/2j\pi)[H(-\xi - j0) - H(-\xi + j0)]\})(t).$$

Le résultat (1.25) se déduit alors de (1.28), (1.26) et de l'injectivité de la transformation de Laplace.

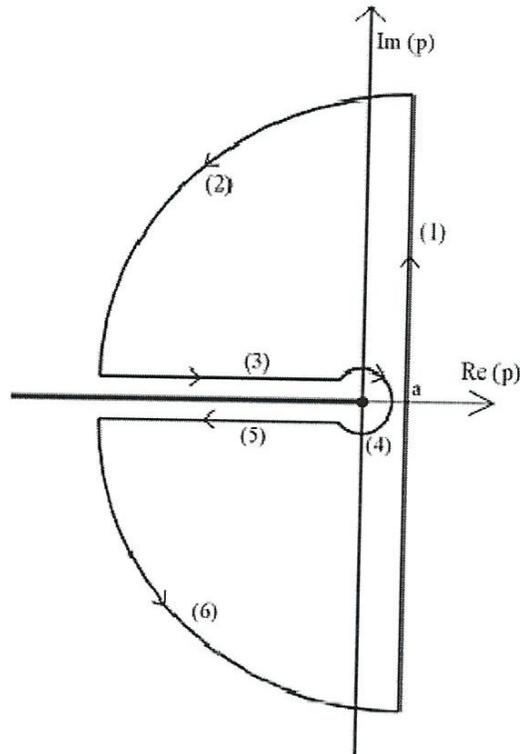


Figure A.3: Contour de Bromwich-Wagner.

Exemple 1 Opérateurs d'intégration d'ordre continu :

$$H(p) = p^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1.$$

Alors :

$$\eta(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2j\pi} \left[ \frac{1}{(-\xi - j\varepsilon)^\alpha} - \frac{1}{(-\xi + j\varepsilon)^\alpha} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2j\pi} \left[ \xi^{-\alpha} e^{j\alpha(-\pi-\theta)} - \xi^{-\alpha} e^{j\alpha(\pi-\theta)} \right]$$

$$= \frac{\xi^{-\alpha}}{\pi} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin(\alpha\pi + \alpha\theta) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \xi^{-\alpha}$$

## A.1 Table de symboles diffusifs

Conditions	symbole ( $p = \partial_t$ )	symbole diffusif (pulsation $\xi$ )	réponse impulsionnelle: (temps $t$ )
$\mathcal{L}\eta$ locale <sup>†</sup> intégrable	$H = \mathcal{L}h$	$\eta = \mathcal{L}^{-1}h$	$h$
$\mathcal{L}(\xi\eta)$ locale <sup>†</sup> intégrable	$p H(p)$	$-\xi\eta$	$\frac{d}{dt}h$
$0 < \text{Re}(\alpha) < 1$	$p^{-\alpha}$	$\eta_\alpha(\xi) := \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{\xi^\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$
$0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ $n \in \mathbb{N}$	$p^{-(\alpha+n)}$	$-\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \text{pf} \frac{1}{\xi^{\alpha+n}}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} t^{\alpha+n-1}$
$0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ $a > 0$	$p^{-\alpha} H(p)$ $H(p+a)$	$\eta_\alpha \# \eta$ $\eta(\xi - a)$	$I^\alpha h$ $e^{-at} h(t)$
-	$p^{-1}$	$\delta$	$1$
-	$p^{-1} H(p)$	$\delta \# \eta$	$\int_0^t h(\tau) d\tau$
$a, b \geq 0$	$(p+a)^{-1} (p+b)^{-1}$	$\frac{1}{b-a} \delta_a + \frac{1}{a-b} \delta_b$	$e^{-at} * e^{-bt}$
$a \geq 0, n \in \mathbb{N}$	$(p+a)^{-(n+1)}$	$\delta_a^{(n+1)} = \delta_a^{(n)}$	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$
$0 < \text{Re}(\alpha) < 1,$ $a > 0$ $k = \int \text{vp} \frac{\mu_\alpha d\xi}{\alpha - \xi}$	$p^{-\alpha} (p+a)^{-1}$	$\eta_\alpha(\xi) \text{vp} \frac{1}{(\alpha - \xi)} + k \delta_a$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-at}$
$0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ $a > 0,$	$p^{1-\alpha} (p+a)^{-1}$	$-\eta_\alpha(\xi) \text{vp} \frac{\xi}{(\alpha - \xi)} - k a \delta_a$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-at} \right)$
-	$-p^{-1} (\gamma + \ln(p))$	$-\text{pf} \frac{1}{\xi}$	$\ln(t)$
$0 < \Re(\alpha) < 1$ $a > 0,$	$(p^\alpha + a)^{-1}$	$\frac{\sin(\pi\alpha)\xi^\alpha/\pi}{\xi^{2\alpha} + 2u \cos(\alpha\pi)\xi^\alpha + u^2}$	
$a > 0$	$e^{ap} \text{Ei}(ap)$	$e^{-a\xi}$	$\frac{1}{t+u}$
$a > 0$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{\cos(a\sqrt{\xi})}{\pi\sqrt{\xi}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$

### A.10 Approximations

On présente quelques éléments concernant l'approximation numérique, c'est-à-dire la réalisation d'état approchée en dimension finie de l'opérateur non rationnel  $H(\frac{d}{dt})$

Soit  $\{\xi_k\}_{k=1:K}$  une discrétisation de  $\xi$ . La plage ainsi couverte est fixée par les valeurs extrêmes  $\xi_1$  et  $\xi_K$ . Cette plage dépendra de la dynamique de l'opérateur que l'on souhaite approcher par une réalisation d'état de dimension K. On choisira souvent  $\xi_K$  en progression géométrique:  $\xi_{k+1} = r\xi_k$  de façon à couvrir une plage étendue avec peu de points.

Ce choix permet d'affecter la même importance à chaque décade couverte.

$$\text{Avec : } r = N-1 \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_N}}$$

On considère des fonctions d'interpolation  $\Lambda_k(\xi)$ , choisie en fonction des propriétés désirées, notamment de régularité. On choisira ici la fonction d'interpolation linéaire

$$\Lambda_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq \xi_{k-1} \text{ ou } \xi \geq \xi_{k+1} \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & \text{si } \xi_{k-1} < \xi < \xi_k \\ \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} & \text{si } \xi_k < \xi < \xi_{k+1} \end{cases}$$

Les réalisations diffusives approchées de l'équation s'expriment alors :

$$\frac{d\psi_k}{dt} = -\xi_k \psi_k(t) + u(t), \psi_K(0) = 0, k = 1 : N$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k \psi_k(t)$$

Si le symbole diffusif  $\eta$  est une fonction continue :  $\eta_k = \eta(\xi_k) \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\xi) d\xi$

Ou, dans le cas général :  $\eta_k = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) \Lambda_k(\xi) d\xi$

Expression qui nécessite en général un calcul par voie numérique

Après calculs élémentaires:  $\eta_k = \eta(\xi_k) \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2}$

La détermination du symbole  $\eta$  est très facile en utilisant la relation qui lie le symbole à la réponse impulsionnelle. Il suffit de se reporter aux tables de transformations de Laplace présentées par exemple dans [Mon05], la réalisation diffusive d'un opérateur se traduit donc comme la transformée de Laplace inverse de la réponse impulsion elle en regard de la variable  $\xi$ ,

## Annexe B : Programme MATLAB

Fichier Script : mainfrac.m

```

%-----
%initialisation
%-----
clc, clear all, close all
% déclaration des données
A=1;
tau=1;
xi0=1/tau;
alfa=0.5;
%-----
% discrétisation de xi
%-----
N=50;
xi=zeros(1,N);
xi(1)=1e-4;
xi(N)=1e+4;
r=(xi(N)./xi(1))^(1./(N-1));

for k=1:N;
xi(k+1)=xi(k).*r;
end

% discrétisation de w
w=logspace(-4,2,100);
%-----
%discrétisation du temps
%-----
tinit=0;
tfin=1;
pas=0.01;
t=tinit:pas:tfin;

%-----
% fonction de transfert exacte forme explicite
%-----

Hexaexpl=A./(1+(1i*w/xi0).^alfa);      % fonction
modHexaexpl=20*log(abs(Hexaexpl));    % module en décibels
phHexaexpl=180*angle(Hexaexpl)/pi;   % calcul de phase en degrés
reelHexaexpl=real(Hexaexpl);         % calcul de la partie réelle
imagHexaexpl=imag(Hexaexpl);        % calcul de la partie imaginaire

%-----
% fonction de transfert exacte forme implicite
%-----
Hexaimpl=A./((1+(1i*w/xi0)).^alfa);  % fonction
modHexaimpl=20*log(abs(Hexaimpl));   % module en décibels
phHexaimpl=180*angle(Hexaimpl)/pi;  % calcul de phase en degrés
reelHexaimpl=real(Hexaimpl);        % calcul de la partie réelle
imagHexaimpl=imag(Hexaimpl);        % calcul de la partie imaginaire
%-----
% calcul fonction approchée forme explicite
%-----
% symbole diffusive
[Ckexpl,netaexpl]=symexpl(xi,xi0,alfa,N,r);

```

```

% Fonction approchée
K=length(xi)-1;
Happexpl=0;
for k=1:K-1
    Happexpl= Happexpl + A*Ckexpl(k)./(1i*w+xi(k));
end

modHappexpl=20*log(abs(Happexpl)); % module de fonction approchée
phHappexpl=180*angle(Happexpl)/pi; % phase de fonction approchée
reelHappexpl=real(Happexpl); % réelle de fonction approchée
imagHappexpl=imag(Happexpl); % imaginaire de fonction approchée
%-----
% réponse temporelle
%-----
psi_0=0;
Yexpl=0;
U=1;
for k=1:N
    param=[xi(k) U];
    [t,psi_k]=ode45('ssmodel',t,psi_0,[],param);
    Yexpl = Yexpl + Ckexpl(k)*psi_k;
end

%-----
% calcul fonction approchée forme implicite
%-----
k1=find(xi>xi0, 1 );
% symbole diffusive
[CKimpl,netaimpl]-symimpl(xi,xi0,alfa,N,r);

% Fonction approchée
K=length(xi)-1;
Happimpl=0;
for k=k1:K-1
    Happimpl= Happimpl + A*Ckimpl(k)./(1i*w+xi(k));
end

modHappimpl=20*log(abs(Happimpl)); % module de fonction approchée
phHappimpl=180*angle(Happimpl)/pi; % phase de fonction approchée
reelHappimpl=real(Happimpl); % réelle de fonction approchée
imagHappimpl=imag(Happimpl); % imaginaire de fonction approchée
%-----
% réponse temporelle
%-----
psi_0=0;
Yimpl=0;
U=1;
for k=k1:N
    param=[xi(k) U];
    [t,psi_k]=ode45 ('ssmodel',t,psi_0,[], param);
    Yimpl = Yimpl + CKimpl(k)*psi_k;
end

%-----
% calcul d'erreur
%-----
errexpl=abs((Hexaexpl-Happexpl)./(Hexaexpl))*100;
errimpl=abs((Hexaimpl-Happimpl)./(Hexaimpl))*100;

```

```

%-----
% Tracés
%-----
% tracé module et phase de fonction exacte et approchée explicite
figure(1), subplot(2,1,1); semilogx(w, modHexaexpl, 'r-', w, modHappexpl, 'b.-')
    ylabel('moduleH')
    legend('Hexaexpl', 'Happexpl', 3)
    title('module et phase de fonction exacte et approchée explicite')

figure(1), subplot(2,1,2); semilogx(w, phHexaexpl, 'r-', w, phHappexpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('phaseH')
    legend('Hexaexpl', 'Happexpl', 3)

    % tracé module et phase de fonction exacte et approchée implicite
figure(2), subplot(2,1,1); semilogx(w, modHexaimpl, 'r-', w, modHappimpl, 'b.-')
    ylabel('moduleH')
    legend('Hexaimpl', 'Happimpl', 3)
    title('module et phase de fonction exacte et approchée implicite')

figure(2), subplot(2,1,2); semilogx(w, phHexaimpl, 'r-', w, phHappimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('phaseH')
    legend('Hexaimpl', 'Happimpl', 3)

% tracé module et phase de fonction exacte explicite et implicite
figure(3), subplot(2,1,1); semilogx(w, modHexaexpl, 'r-', w, modHexaimpl, 'b.-')
    ylabel('moduleH')
    legend('Hexaexpl', 'Hexaimpl', 3)
    title('module et phase de fonction exacte explicite et implicite')

figure(3), subplot(2,1,2); semilogx(w, phHexaexpl, 'r-', w, phHexaimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('phaseH')
    legend('Hexaexpl', 'Hexaimpl', 3)

% tracé module et phase de fonction approchée explicite et implicite
figure(4), subplot(2,1,1); semilogx(w, modHappexpl, 'r-', w, modHappimpl, 'b.-')
    ylabel('moduleH')
    legend('Happexpl', 'Happimpl', 3)
    title('module et phase de fonction approchée explicite et implicite')

figure(4), subplot(2,1,2); semilogx(w, phHappexpl, 'r-', w, phHappimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('phaseH')
    legend('Happexpl', 'Happimpl', 3)

%tracés du symbole diffusif
k1=find(xi>xi0, 1);
figure(5), semilogx(xi(1:N), netaexpl, 'r', xi(k1:N), netaimpl(k1:N), 'b.-')
    %axis([xi(1) xi(N) 0 .1])
    xlabel('\xi')
    ylabel(['\eta(', '\xi)'])
    title('le symbole diffusif')
    legend('netaexpl', 'netaimpl')
    grid

```

```

% tracé des parties réelles et imaginaires modèle explicite (exacte et approchée)
figure(6), subplot(2,1,1); loglog(w, reelHexaexpl, 'r-', w, reelHappexpl, 'b.-')
    ylabel('réelleH')
    legend('Hexaexpl', 'Happexpl', 3)
    title('partie réelle et imaginaire de fonction exacte et approchée
explicite ')

figure(6), subplot(2,1,2); semilogx(w, imagHexaexpl, 'r-', w, imagHappexpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('imaginaireH')
    legend('Hexaexpl', 'Happexpl', 3)

% tracé des parties réelles et imaginaires de modèle implicite(exacte et approchée)
figure(7), subplot(2,1,1); loglog(w, reelHexaimpl, 'r-', w, reelHappimpl, 'b.-')
    ylabel('réelleH')
    legend('Hexaimpl', 'Happimpl', 3)
    title('partie réelle et imaginaire de fonction exacte et approchée
implicite')

figure(7), subplot(2,1,2); semilogx(w, imagHexaimpl, 'r-', w, imagHappimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('imaginaireH')
    legend('Hexaimpl', 'Happimpl', 3)

% tracé des parties réelles et imaginaires de fonction exacte explicite et
implicite
figure(8), subplot(2,1,1); loglog(w, reelHexaexpl, 'r-', w, reelHexaimpl, 'b.-')
    ylabel('réelleH')
    legend('Hexaexpl', 'Hexaimpl', 3)
    title('partie réelle et imaginaire de fonction exacte explicite et
implicite')

figure(8), subplot(2,1,2); semilogx(w, imagHexaexpl, 'r-', w, imagHexaimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('imaginaireH')
    legend('Hexaexpl', 'Hexaimpl', 3)

% tracé des parties réelles et imaginaires de fonction approchée explicite et
implicite
figure(9), subplot(2,1,1); loglog(w, reelHappexpl, 'r-', w, reelHappimpl, 'b.-')
    ylabel('réelleH')
    legend('Happexpl', 'Happimpl', 3)
    title('partie réelle et imaginaire de fonction approchée explicite et
implicite')

figure(9), subplot(2,1,2); semilogx(w, imagHappexpl, 'r-', w, imagHappimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('imaginaireH')
    legend('Happexpl', 'Happimpl', 3)

%tracé de la réponse temporelle
figure(10), plot(t, Yexpl, 'r', t, Yimpl, 'b.-')
    xlabel('temps(s)')
    ylabel('réponse du système')
    title('la réponse temporelle')
    legend('Yexpl', 'Yimpl', 4)

%tracé erreur
figure(11), semilogx(w, erreexpl, 'r', w, errimpl, 'b.-')
    xlabel('log w')
    ylabel('Erreur(%)')
    title('erreur relative')
    legend('erreexpl', 'errimpl')

```

```

%-----
Fichier fonction : psiprime.m
%-----

```

```
function psiprime=psiprime(t,psi,options,param)
```

```

%-----
n=length(param);
xi=param(1,n-1);
u=param(n);
psiprime=-xi*psi+u;
%-----

```

```

%-----
fichier fonction : symexpl.m
%-----

```

```
function [Ck,neta]=symexpl(xi,xi0,alfa,N,r)
```

```

%-----
for k=1:N
    num1=sin(alfa*pi)/pi;
    den1=(xi0/xi(k))^alfa + 2*cos(alfa*pi)*(xi(k)/xi0)^alfa;
    neta(k)=num1/den1;
    if k==1
        Ck(k)=neta(k).*(xi(k+1)-xi(k))/r)/2;
    else
        Ck(k)=neta(k).*(xi(k+1)-xi(k-1))/2;
    end
end
%-----

```

```

%-----
%-----

```

```

%-----
fichier fonction : symimpl.m
%-----

```

```
function [Ck,neta]=symimpl(xi,xi0,alfa,N,r)
```

```

k1=find(xi>xi0, 1 )
for k=k1:N
    num1=sin(alfa*pi)*(xi0^alfa);
    den1=pi*(xi(k)-xi0)^alfa;
    neta(k)=num1/den1;
    if k==1
        Ck(k)=neta(k).*(xi(k+1)-xi(k))/r)/2;
    else
        Ck(k)=neta(k).*(xi(k+1)-xi(k-1))/2;
    end
end
en

```

## Conclusion générale

Les travaux développés durant cette étude ont illustré l'intérêt en modalisation fractionnaire, simulation dans le domaine du génie électrique, des formulations dynamiques issues d'approches générales par représentations d'état dans des espaces de dimension infinie, essentiellement la représentation diffuse, dédiées aux opérateurs intégraux non rationnels de nature pseudo-différentielle.

Les études effectuées au cours de ce travail pourraient, de ce point de vue, servir de base à de nouvelles études multidisciplinaires intéressant le domaine du génie électrique, voire d'autres domaines où les modèles sont relativement similaires.

## Bibliographie

- [1] Saint-Jean B. Electro technique et machines électriques. Eyrolles/Lidéc Inc. 1976.
- [2] Ségurier Guy et Nottet Francis. Electrotechnique industrielle. Tec et doc (Lavoisier). 1982.
- [3] Caponnetto R., Dongola G., Fortunat., Grazianis S., Strazzaris S., AFractional Model for IPMC Actuators, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC2008, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.
- [4] Craiem D. O., Armentano R. L., Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model, 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS'06, pp. 1098-1101, August 30 2006-September 3 2006.
- [5] Ionescu C. M., DeKeyser R., Time Domain Validation of a Fractional Order Model for Human Respiratory System, The 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, MELCON2008, pp. 89-95, Ajaccio, 5-7 May 2008, States of America, 1986
- [6] Krause P. C., Analysis of Electric Machinery, McGraw-Hill Book Company, United.
- [7] Liu J. G., Xu M. Y., Study on the Viscoelasticity of Cancellous Bone Based on Higher-Order Fractional Models, The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering, ICBBE2008, pp. 1733-1736, 16-18 May 2008.
- [8] Martinez R., Bolea Y., Grau A., Martinez H., Fractional DC/DC converter in solar power electrical generation systems, IEEE Conference on Emerging Technologies & Factor Automation, ETFA2009, pp. 1-6, 22-25 September 2009.
- [9] N'Doyel I., Zasadzinski M., Radhy N.-E., Bouaziza A., Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties, 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.
- [10] Oustaloup A., L'acommande CRONE, Hermès science publications, Paris, 1991. [9]
- Oustaloup A., L'adétermination monentière, Hermès, Paris, 1995.
- [11] Racewicz S., Riud D., Retière N., Chrzan P. J., Nonlinear half-order modeling of synchronous machine, IEMDC2009, pp. 778-783, Miami, Florida, 3-6 May 2009.

- [12] Ronkowski M., Circuit-oriented model of electrical machines for simulation of converter systems, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektryka*, nr 78, Gdańsk 1995.
- [13] Rossi C., Casadei D., Pilati A., Marano M., Wound Rotor Salient Pole Synchronous Machine Drive for Electric Traction, Conference Record of the 2006 IEEE Industry Applications Conference, 41st IAS Annual Meeting, Volume 3, pp. 1235-1241, Tampa (Florida), 8-12 October 2006.
- [14] W. Deschand R. K. Miller. Exponential stabilization of Volterra integral equations with singular kernels. *J. of Integral Equations and Applications*, 1(3), pp. 397-433, 1988.
- [15] D. Matignon and G. Montseny, editors. *Fractional Differential Systems : models, methods and applications*, volume 5 of *ESAIM: Proceedings*, URL : <http://www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.5/>, December 1998. SMAI.
- [16] J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Semi-linear diffusive representations for non-linear fractional differential systems. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1*, volume 258 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 73-82. Springer, 2001.
- [17] G. Dauphin, D. Heleschewitz, and D. Matignon. Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, page 10, Perpignan, France, June 2000. MTNS. (invited session).
- [18] D. Heleschewitz. *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*. PhD thesis, ENST, December 2000.
- [19] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Diffusive representation for pseudo-differentially damped non-linear systems. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2*, volume 259 of *Lecture Notes in Control and Inform.*.
- [20] P. Bidan, T. Lebey, G. Montseny, C. Neascu, "Modèle pseudodifférentiel d'une bobine à noyau de fer et simulation par réalisation diffusive. Application aux bobinages d'une machine tournante", *Revue Internationale de Génie Electrique*, Vol. 5 n°3-4, 2002
- [21] L. Laudebat "modélisation et identification sous représentation diffusive de comportements dynamiques non rationnels en génie électrique", Thèse de doctorat de l'Université Toulouse III, décembre 2003.
- [22] L. Laudebat, "Approche des phénomènes de relaxation diélectrique par réalisation diffusive", 6<sup>ième</sup> Conférence des jeunes chercheurs en génie électrique, Saint-Nazaire, 5-6 Juin 2003.