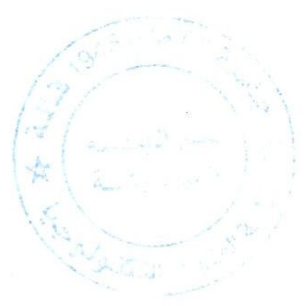


M/531.623

**Université du 8 mai 1945 – Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin D'études**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master**

Option : CPI

Présenté par : Reggam Khaled

=====

***Simulation numérique sous Comsol Multiphysics du  
comportement mécanique d'une structure soumise à  
plusieurs types de chargement***

=====

Sous la Direction de :

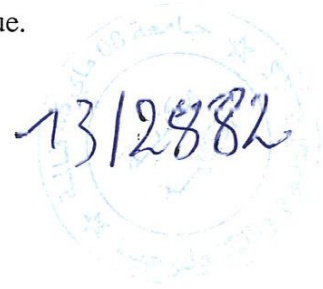
**Dr GHERIB S. & Dr. FRIHI D**

**Année universitaire 2012/2013**

**Résumé :**

Le logiciel comsol, anciennement appelé FEMLab, est un logiciel avancé pour la modélisation et la simulation de phénomènes physiques comme l'électrostatique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux. Ces phénomènes sont décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) résolus par éléments finis. Ce logiciel inclut un éditeur CAO complet ainsi que des solveurs performants qui permettent de traiter des problèmes de taille importante tout en convergent rapidement vers le résultat. L'objectif principal de ce sujet est la simulation numérique sous comsol multiphysique du comportement mécanique d'un élément mécanique. Lors de cette simulation, on essayera d'introduire les trois types d'analyses de base (Statique, fréquences propres, réponse en fréquence et paramétrique) disponibles dans le module de mécanique des structures inclus dans le logiciel.

**Mots clés :** Simulation, Modélisation, Comsol, Comportement mécanique.



# **Sommaire**

## Sommaire

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I : Equations aux dérivées partielles</b>	3
I-1 : Définition	3
I-1-2 : Les champs d'application	3
I-1-3 : Condition aux limites	4
I-2 : Résolution des équations aux dérivées partielles	5
I-2-1 : Méthode de séparation de variables	5
I-2-2 : Méthode de la transformation de laplace	5
I-2-3 : Méthode Numériques	6
<b>Chapitre II : Méthode des éléments finis appliquée à la mécanique des structures</b>	15
II-1: Introduction et historique	15
II-2: Equations de base de l'élasticité linéaire	16
II-2-1: Relations déformations –déplacements	17
II-2-2: Relations contraintes –déplacements	18
II-2-3: Conditions aux limites	18
II-2-4: Cas des contraintes planes	19
II-2-5: Cas des déformations planes	19
II-3: Analyse et visualisation de contraintes	20
II-4: Application de la MEF à un problème d'élasticité linéaire	21
II-5: Etapes de résolution d'un problème	22

<b>Chapitre III : Comsol Multiphysics un outil puissant pour la modélisation</b>	<b>23</b>
III-1 : Introduction	23
III-2 : Code de calcul utilisé	23
III-2-1: Présentation générale de Comsol	23
III-2-2 : Utilisation de Comsol Multiphysics	24
III-2-3 : Etapes du processus de modélisation	25
III-2-4: Description des différents modules de Comsol	26
III-2-5: Module de mécanique des structures	28
III- 3: Application à l'étude d'une poutre sollicitée en flexion	28
III- 3-1: Description du problème	28
III- 3-2: Mise en équations du problème	29
III- 3-3: Résolution du problème sous Comsol	32
III- 3-4: Résolution numérique	38
III- 3-5: Visualisation des résultats	38
<b>Chapitre IV : Modélisation d'une pièce sous différents types de chargement</b>	<b>42</b>
IV-1 : Introduction	42
IV- 2: Démarche d'une analyse par la méthode des éléments finis	42
IV- 3: Description du problème	43
IV- 4 : Géométrie	44
IV- 5 : Modélisation sous COMSOL	46
IV-5-1 : Analyse Statique	46
IV-5-2 : Analyse paramétrique	56
IV-5-3 : Analyse des fréquences propres	62
<b>Conclusion générale</b>	<b>69</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>70</b>

# **Introduction générale**

## Introduction générale

Dans les dernières décennies la modélisation et la simulation sont devenues des outils indispensables pour la conception, l'optimisation et la recherche. Une partie importante de ces tâches est l'étude de l'influence des différents paramètres qui décrivent un modèle d'un phénomène physique donné.

Comsol Multiphysics est un logiciel de modélisation par éléments finis qui est applicable à tous les domaines de l'ingénierie et de la science.

Il comprend des solutions de modélisations adaptées pour la mécanique des structures, génie chimique et électromagnétique. Il facilite la modélisation de tous les phénomènes physiques basés sur les équations aux dérivées partielles, tels que le transfert de chaleur, l'analyse des contraintes, et l'écoulement du fluide.

Les équations du modèle, peuvent être appliquées sous une forme prête à l'emploi, ou peut être introduites librement pour décrire tout type de phénomène physique (linéaire, non-linéaire ou en fonction du temps). Il est utilisé principalement lorsque les calculs manuels ne peuvent être réalisés. C'est souvent le cas lorsque la géométrie ou le processus en question est très complexe. Lors de la résolution des équations aux dérivées partielles qui décrivent un modèle, Comsol applique la méthode des éléments finis (FEM)

Il fonctionne en conjonction avec un maillage adaptatif et le contrôle d'erreur ainsi qu'une variété de solveur numérique.

Comsol Multiphysics est utilisé dans la recherche, le développement et l'enseignement, dans les domaines tels que: Acoustique, Aéronautique, Biosciences, bio-ingénierie, les réactions chimiques, électromagnétique, sciences de l'environnement, la dynamique des fluides, piles à combustible, de la géophysique, de transfert de chaleur, Math / équations aux dérivées partielles appliquées, la mécanique des structures, des phénomènes de transport, propagation des ondes...etc.

L'objectif principal de ce travail est de reprendre la modélisation et simulation numérique sous comsol du comportement mécanique d'une structure soumise à plusieurs types de chargement, (contraintes, déformations). Les conditions aux limites étant constantes dans le temps.

Pour atteindre les objectifs préalablement fixés, nous avons partagé ce travail en quatre chapitres.

Le premier chapitre donnera une définition d'équations aux dérivées partielles et leur résolution par les différentes méthodes (méthodes de séparation des variables, méthodes numériques...etc).

Dans le second chapitre nous rappelons brièvement la Méthode des éléments finis appliquée à la mécanique des structures

Dans le troisième chapitre nous présentons quelques éléments de la résistance des matériaux en grandes déformations, puis nous passons en revue la théorie de poutre en flexion (équation de Bernoulli).

Quant à l'aspect modélisation de l'étude est abordé au quatrième chapitre. Nous présentons les étapes pour la démarche d'une analyse par la méthode des éléments finis. et nous passons un modèle de contrainte plane créé dans le module Génie Mécanique des Structures (SME). Il s'agit notamment de l'analyse statique, ainsi que fréquence propre et l'analyse de la réponse en fréquence.



# Chapitre I

## Equation aux dérivées partielles

### I-1 : Equation aux dérivées partielles :

#### I-1-1 : Définition :

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme (Exemple: les équations de Maxwell). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

La résolution d'un problème aux dérivées partielles (par exemple un système d'équations différentielles du deuxième ordre et à deux dimensions) passe par plusieurs étapes.

La première consiste à déterminer les conditions aux limites du problème à résoudre, ensuite vient l'étape de la résolution qui se fait soit par des méthodes analytiques ou par des méthodes numériques ou bien par des méthodes semi-analytiques. La discrétisation du domaine de définition du problème à résoudre est une étape très importante. De puis les méthodes de linéarisations dans le cas des systèmes non linéaire doivent être prendre en considération lors de la résolution du problème.

#### I-1-2 : Les champs d'application

Voici une petite liste (non exhaustive) des disciplines qui utilisent les EDP comme support mathématique avec un exemple d'équation différentielle partielle dans chaque domaine:

- **La mécanique des fluides** : décrit l'écoulement des fluides (*équations de Navier-Stokes*)
- **La mécanique des structures** : étudie la déformation des matériaux sous contraintes mécaniques (équations de la résistance des matériaux).
- **La thermodynamique** : décrit les transferts de chaleurs (*équation de Fourier*)
- **L'électromagnétisme** : décrit la propagation de la lumière (*équation de Maxwell*)
- **La gravitation** : décrit les champs gravitationnels (*équations de la relativité générale d'Einstein*)

- **La mécanique quantique** : décrit l'évolution de particules non relativistes (*équation de Schrödinger*)
- **La biologie**: décrit l'évolution de populations d'individus (*équation de diffusion et de réaction*) [1].

### I-1-3 : Condition aux limites :

Les conditions aux limites sont les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière. Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du nombre de variables en jeu, et (de manière plus importante) de la nature de l'équation. Les conditions imposées au temps  $t = 0$  sont appelées « conditions initiales ».

Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont utilisées pour les équations différentielles partielles elliptiques.

#### I-1-3-1 : conditions aux limites Dirichlet :

En mathématiques, une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les *valeurs* que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

- Pour une équation différentielle, par exemple :  $y'' + y = 0$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par :

$$y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres donnés.

#### I-1-3-2 : conditions aux limites Neumann :

En mathématiques, une condition aux limites de Neumann (nommée d'après Carl Neumann) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

- Pour une équation différentielle, par exemple :  $y'' + y = 0$

la condition aux limites de Neumann sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par :

$$y'(a) = \alpha \text{ et } y'(b) = \beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres donnés.

Il existe d'autres conditions possibles comme la condition aux limites de Robin, qui est une combinaison des conditions de Dirichlet et Neumann [2].

## I-2 : Résolution des problèmes aux limites :

Dans ce paragraphe, nous exposons quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites décrivant des phénomènes physiques. Ces méthodes se rangent dans l'une des classes indiquées par la figure (I-1)

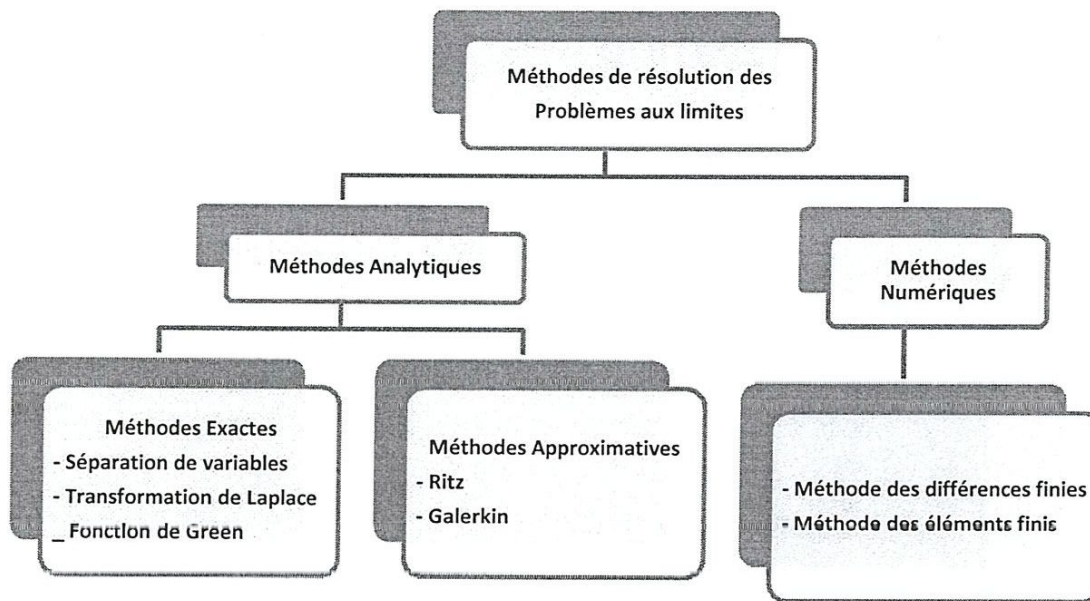


Figure I-1 Méthodes de résolution des problèmes aux limites [3].

### I-2-1 : Méthode de séparation de variables :

Les méthodes de réduction de modèle sont basées sur des techniques de séparation de variables. Il s'agit d'une problématique très ancienne : dès la seconde moitié du XVIIe siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel (les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles,...). En 1797, Sylvestre-François Lacroix publie le "Traité du calcul différentiel et de calcul intégral" qui se veut une synthèse des travaux d'analyse du XVIIIe siècle avec un chapitre consacré à la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre. La méthode de séparation des variables constitue l'une des méthodes de résolution des équations différentielles partielles et ordinaires, lorsque l'algèbre permet de réécrire l'équation, de sorte que chacune des deux variables apparaisse dans un membre distinct de l'équation.

## **I-2-2 : Méthode de la transformation de Laplace**

La méthode de la transformation de Laplace consiste à:

- Transformer un problème aux dérivées partielles ou ordinaires en un problème aux dérivées ordinaires ou en un problème algébrique respectivement, en appliquant l'opérateur de la transformation de Laplace à l'équation différentielle à résoudre.
- Résoudre le problème transformé.
- Appliquer la transformation inverse de Laplace à la solution trouvée dans l'étape précédente pour obtenir la solution du problème initiale. [4]

## **I-2-3 : Méthodes Numériques :**

Les équations différentielles partielles sont généralement très complexes à résoudre ou alors elles possèdent des solutions pour des cas bien particuliers, généralement simples et non exploitables. De plus, ces équations sont le plus souvent non-linéaires car la somme des causes n'induit pas une simple addition des effets et l'analyse des différents phénomènes physiques est rendue complexe.

Dans la majorité des grandes installations industrielles, de nombreux problèmes d'ingénierie nécessitent la résolution de telles équations et l'expérimentation est généralement limitée. La simulation numérique constitue alors le seul moyen d'appréhender ces systèmes pour les étudier, les concevoir et les optimiser

Les méthodes numériques s'intéressent à la recherche de valeurs de la fonction en des endroits particuliers. Autrement dit, on ne cherche pas l'écriture d'une fonction qui vérifie l'équation, mais par quelles valeurs passe la fonction en des abscisses particulières (c'est la méthode des différences finies), ou bien on recherche sur des éléments du domaine étudié l'écriture d'une fonction simple qui approxime au mieux la solution recherchée (c'est la méthode des éléments finis).

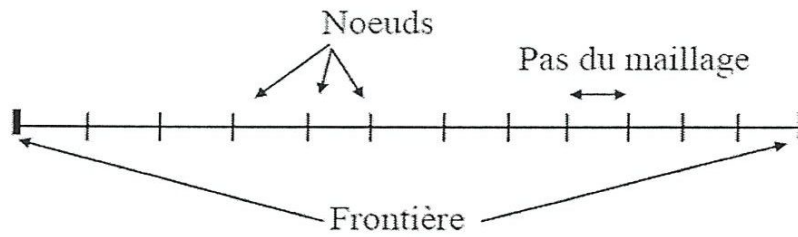
### **I-2-3-1 : Méthode des Différences finies**

#### **a-Principe de la méthode**

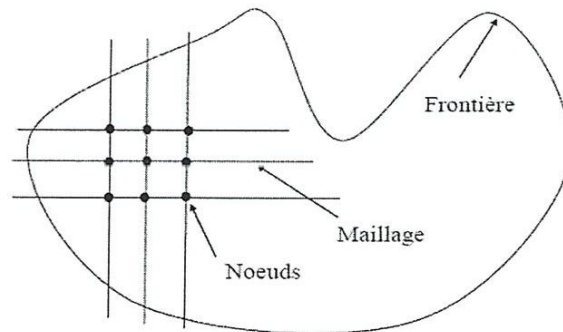
Ce principe se décline en plusieurs étapes.

a) Le domaine étudié est maillé. On parle de discrétisation du domaine.

Exemple de maillage d'un domaine 1D. Ce maillage peut être régulier ou non, c'est-à-dire que le pas du maillage peut être constant ou non



**Figure I-2 :** Exemple de maillage d'un domaine 2D (on n'en a représenté qu'une partie)



**Figure I-3 :** La méthode des différences finies recherche une solution aux nœuds du maillage.

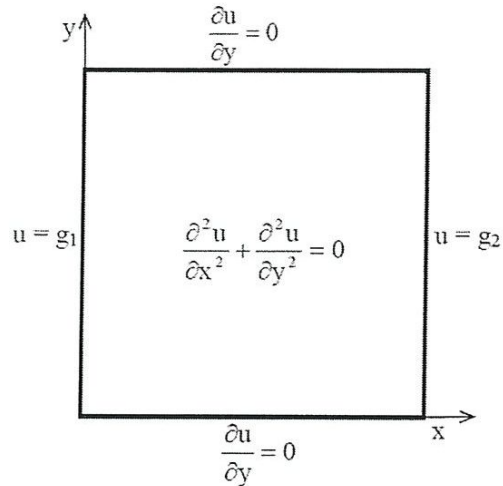
- b) On discrétise également l'EDP, c'est-à-dire qu'on va écrire en chaque nœud une approximation algébrique de l'équation d'origine.
- c) On écrit autant d'équations algébriques qu'il y a de nœuds où on cherche une solution, ce qui conduit à écrire un système d'équations
- d) on résout ce système d'équations

Nous traiterons un exemple simple illustratif de cette méthode.

➤ **Cas d'une EDP elliptique (stationnaire)**

✚ **Cas de conditions de Neumann homogènes**

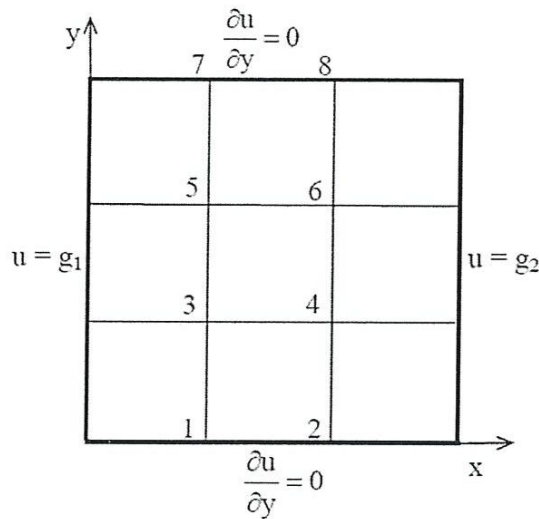
Le problème: un domaine carré, donc 2 dimensions d'espace, où on veut résoudre le problème suivant :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$



Les conditions limites sont de type Dirichlet à droite et à gauche, telles que décrites sur le schéma ci-contre, et de type Neumann homogène (c'est-à-dire nulle) en haut et en bas.

**b – Discrétisation du domaine d'étude**

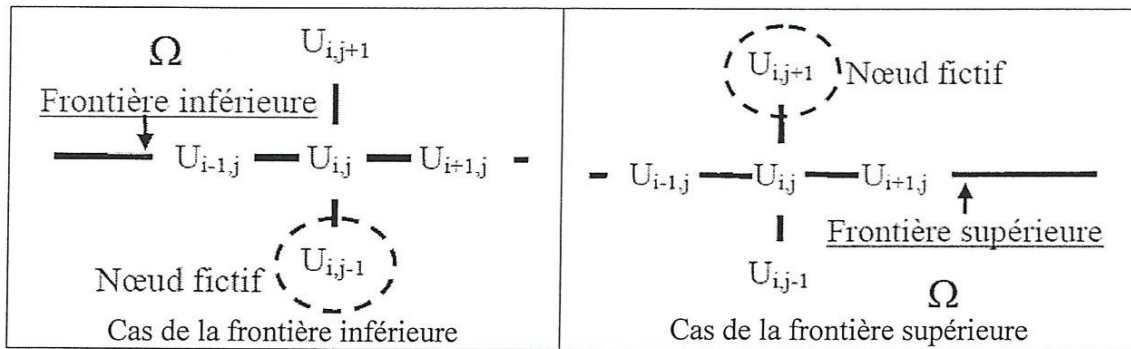
Afin de limiter le nombre d'équations à écrire, on adopte le maillage suivant du dessin de droit. Les nœuds inconnus y sont numérotés de 1 à 8. S'il n'y a pas de problème pour les nœuds internes 3 à 6, on peut légitimement s'interroger sur les nœuds frontières 1, 2 et 7, 8. En effet, la valeur de la dérivée est connue en ces nœuds mais en aucun cas la valeur de la fonction. Ce sont donc bien des nœuds inconnus.



**c – Discrétisation de l'équation**

On a exactement la même équation que précédemment ; elle peut être approximée par l'expression  $U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} = 0$  écrite au nœud inconnu  $U_{i,j}$

Ceci introduit une difficulté aux nœuds frontières puisque cette discrétisation de l'équation introduit à chaque fois un nœud en dehors du domaine d'étude, qu'on appelle « nœud fictif ».



Pour éliminer les nœuds fictifs de la discrétisation, il suffit de prendre en compte la condition de flux sur la frontière en question. Prenons l'exemple du nœud n°1 et nommons le nœud fictif 3'.

- La discrétisation de l'équation au nœud 1 Donne  $g_1 + u_{3'} - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0$
- La discrétisation centrée de la condition de flux au nœud 1 s'écrit:  $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_3 - u_{3'}}{2h} = 0$

Ce qui implique que  $u_{3'} = u_3$

On remplace  $u_{3'}$  dans la discrétisation de l'équation  $g_1 + u_3 - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0$

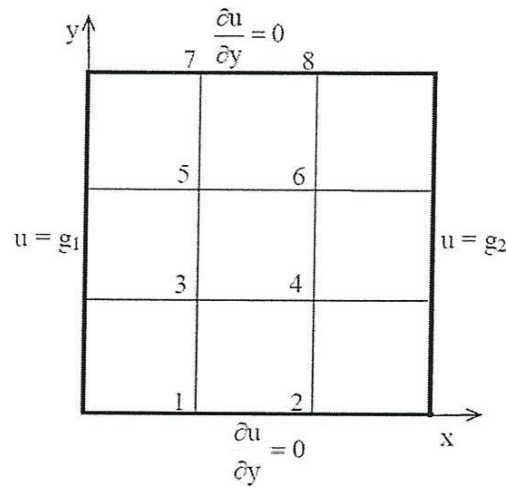
soit  $g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$  Ceci qui permet d'éliminer le nœud fictif de l'équation écrite au nœud 1.

Remarquons que cette discrétisation vérifie simultanément l'équation et la condition limite.

On obtient donc 3 formes différentes de discrétisation selon la position du nœud :

$\begin{array}{c} 1 \quad - \quad -4 \quad - \quad 1 \\   \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\   \\ 1 \quad - \quad -4 \quad - \quad 1 \\   \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\   \\ 1 \quad - \quad -4 \quad - \quad 1 \end{array}$
Nœuds frontière supérieure	Nœuds internes	Nœuds frontière inférieure

### d – Ecriture du système d'équations



nœud 1 :  $g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$

nœud 2 :  $g_2 - 4u_2 + u_1 + 2u_4 = 0$

nœud 3 :  $g_1 - 4u_3 + u_1 + u_4 + u_5 = 0$

nœud 4 :  $g_2 - 4u_4 + u_2 + u_3 + u_6 = 0$

nœud 5 :  $g_1 - 4u_5 + u_3 + u_6 + u_7 = 0$

nœud 6 :  $g_2 - 4u_6 + u_4 + u_5 + u_8 = 0$

nœud 7 :  $g_1 - 4u_7 + 2u_5 + u_8 = 0$

nœud 8 :  $g_2 - 4u_8 + 2u_6 + u_7 = 0$

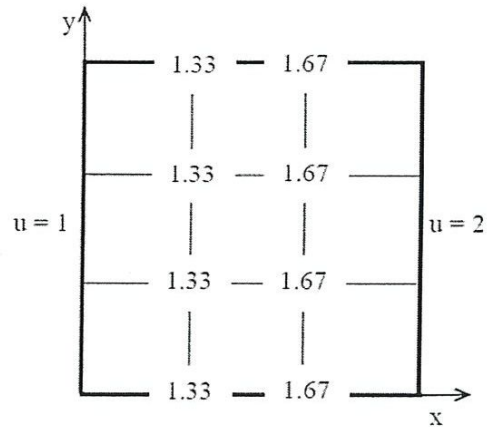
La mise sous forme matricielle donne :

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & & & & & \\ 1 & -4 & & 2 & & & & \\ 1 & & -4 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & -4 & & 1 & & \\ & & 1 & & -4 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & -4 & & 1 \\ & & & & 2 & & -4 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

### e – Résolution du système d'équations

En prenant  $g_1 = 1$  et  $g_2 = 2$  dans un domaine carré de 1 mètre de côté, nous obtenons l'image suivante de la solution :





La solution dans cet exemple est un plan entre les valeurs 1 et 2 selon Ox. Ce qui vérifie parfaitement l'équation à résoudre (toutes les dérivées secondes sont nulles, donc leur sommées nulle) et les dérivées premières en y sont nulles [5].

### I-2-3-2 : Méthode des éléments finis

#### a - Généralités

[Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés. L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances vous seront utiles pour maîtriser les deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :
- Problèmes préliminaires à la phase de calcul ;
- Problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception. Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes

mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique.]

Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que de résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation. Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que ces modèles simples permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en œuvre de la méthode. L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes présentées dans la première du chapitre. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs.

### **b -Principe de la méthode**

La méthode des éléments finis est fondamentalement un cas spécial des formulations intégrales. En effet, chacune des méthodes utilise une base de fonctions comme point de départ pour obtenir une solution approximative.

La grande différence réside dans le choix de la base de fonctions, dans les formulations intégrales ces fonctions de base sont définies sur le domaine tout entier, tandis que la méthode des éléments finis se base sur l'une de ces formulations appliquée à des domaines locaux discrets qui sont habituellement simples, par rapport au domaine global. Ces domaines locaux discrets sont appelés éléments. C'est pourquoi le nom de la méthode.

L'objectif de ce paragraphe est de présenter le principe de base de la méthode des Éléments finis.

### **c -Etapas de base de la méthode des éléments finis**

Le principe de la méthode des éléments finis est d'approximer un problème continu par un problème discret facile à résoudre, en remplaçant le domaine d'étude continu par un nombre d'éléments de forme géométrique simple, sur chacun de ces éléments, la fonction inconnue est approximée par une combinaison linéaire de fonctions simples qui sont généralement des polynômes. En appliquant l'une des formulations intégrales et finalement en résolvant le système d'équations ainsi obtenu, nous obtenons une solution approximative de la

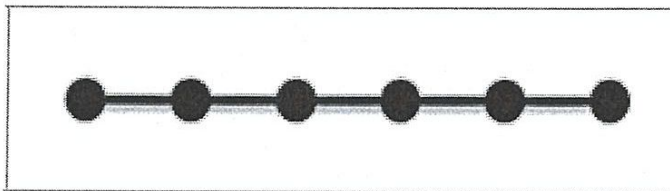
solution exacte du problème aux limites. Donc, la résolution d'un problème aux limites par la méthode des éléments finis est constituée des étapes suivantes :

1. Discrétisation du domaine continue en sous domaines ;
2. Construction de l'approximation nodale ;
3. Calcul des matrices élémentaires correspondant à la formulation intégrale ;
4. Assemblage des matrices élémentaires et prises en compte des conditions aux limites ;
5. Résolution du système d'équations.

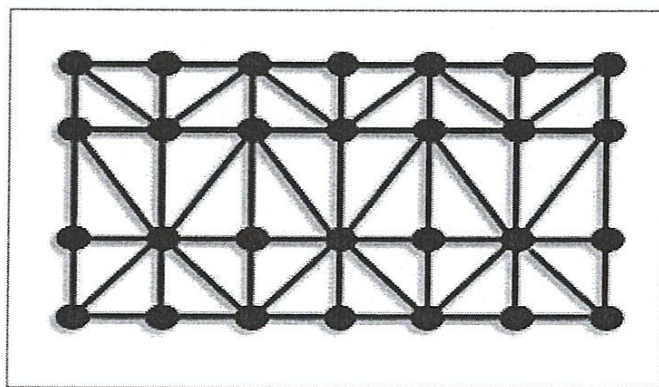
#### **d -Discrétisation du domaine**

La discrétisation du domaine d'étude  $\Omega$  est la première et peut être la plus importante étape dans une analyse par éléments finis parce que la manière selon laquelle le domaine est discrétisé influe sur l'espace mémoire, le temps de calcul et la précision de calcul.

Dans cette étape, le domaine  $\Omega$  tout entier est divisé en un nombre de sous domaines  $\Omega(e)$ , ( $e = 1, 2, 3, \dots, Ne$ ), où  $Ne$  est le nombre de sous domaines, ces domaines sont appelés éléments et pouvant prendre différentes formes, selon que le domaine est unidimensionnel, bidimensionnel, ou tridimensionnel. En plus il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.



**Figure I-4 :** Discrétisation d'un segment de droite [3].



**Figure I-5 :** Discrétisation d'un domaine rectangulaire [3].

### e -Approximation par éléments finis

La seconde étape dans une analyse par éléments finis et qui est aussi d'une grande importance consiste à définir, sur chaque élément fini, des fonctions d'interpolation (de forme),  $\psi_1^{(e)}, \psi_2^{(e)}, \dots, \psi_n^{(e)}$ , telles que :

1. La fonction inconnue  $\phi^{(e)}$  soit approchée par une combinaison linéaire de cette fonction d'interpolation:  $\phi^{(e)} \approx \hat{\phi}^{(e)} = \sum_{t=1}^n \phi^{(e)} \psi_t^{(e)} = \{\phi^{(e)}\}^T \{\psi^{(e)}\} = \{\psi^{(e)}\}^T \{\phi^{(e)}\}$  (II.27)

Où  $n$  est le nombre de nœuds dans un élément,  $\phi_t^{(e)}$  les valeurs de  $\phi$  aux nœuds de l'élément considéré,  $\{\phi^{(e)}\}$  et  $\{\psi^{(e)}\}^T$  sont respectivement des vecteurs colonnes et lignes des  $\psi_t^{(e)}$ . Dans ce cas, (I.10) est dite approximation nodale.

2. La fonction  $\hat{\phi}^{(e)}$  prend, aux nœuds de l'élément, les mêmes valeurs que la fonction inconnue  $\phi^{(e)}$  et qu'on appelle valeurs nodales.

3. Les fonctions  $\hat{\phi}^{(e)}$  doivent être continues sur les éléments correspondant.

4. Les fonctions  $\hat{\phi}^{(e)}$  doivent satisfaire des conditions de continuités sur les frontières entre éléments.

La fonction  $\hat{\phi}^{(e)}$  ainsi construite est appelée fonction d'approximation

### f-Résolution du système d'équations

Comme nous avons vu, la modélisation d'un problème par les méthodes numériques est basée sur la résolution du système matriciel non- linéaire. Pour le résoudre, nous allons lui appliquer une méthode itérative (par exemple la méthode de Newton-Raphson).

La méthode itérative est appliquée jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, condition réalisée lorsque la quantité rajoutée au potentiel de l'itération précédente est inférieure à une certaine valeur. La valeur de cette dernière constitue le critère d'arrêt de la méthode [3].

**Chapitre II**  
**Méthode des éléments finis**  
**appliquée**  
**à la mécanique**  
**des structures**

## Chapitre II

### Méthode des éléments finis appliquée à la mécanique des structures

#### II-1: Introduction et historique

La méthode des déplacements est historiquement plus récente que la méthode des forces. En fait, il a fallu attendre 1920 pour voir apparaître l'idée d'étudier des assemblages de poutres en prenant comme inconnues les déplacements comme inconnues principales. Il est certain que, dans sa phase initiale, le développement de la méthode a été freiné par la taille des systèmes d'équations linéaires pouvant être résolus manuellement. Une technique de relaxation développée par Cross (1932) permit toutefois d'appliquer la méthode à des cas relativement complexes et s'imposa pendant plus de 25 ans comme la méthode principale d'analyse structurale. L'avenue des ordinateurs dans les années 1960 permit le traitement de problèmes jusqu'alors inabordables.

La formulation matricielle de la méthode du déplacement est en fait l'ancêtre de la méthode des éléments finis. Il est difficile de dire quand et où les éléments finis ont été découverts, bien qu'il soit clair que des papiers importants aient été publiés dans les années 1940 (Courant). C'est dans le milieu des années 1950 que les premières publications de base sur la mécanique structurale sont apparues. En particulier, il faut mentionner la série célèbre d'articles par Argyris et Kelsey dans la période 1954-55 (qui a été republiée plus tard sous la forme d'un livre) ainsi que le fameux (Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures) par Turner, Clough, Martin et Topp.

Les éléments finis sont utilisés aujourd'hui dans la plupart des domaines de l'ingénierie, depuis les calculs du rayonnement électromagnétique des antennes jusqu'aux l'interaction fluides structures entre la mer et un voilier. C'est dans le cadre de la mécanique des structures que la méthode des éléments finis a été découverte et, encore aujourd'hui, c'est dans ce domaine qu'elle est la plus utilisée et où la quantité de travaux de recherche est la plus importante [11].

## II-2: Equations de base de l'élasticité linéaire

Pour un problème de mécanique en élasticité, le principe des travaux virtuels s'écrit en un point  $M$  d'un domaine  $\Omega$  chargé par des efforts volumiques et des efforts  $F \rightarrow$  sur une partie du bord  $\partial\Omega$ . Pour le champ de déplacement  $u$ . La structure étudiée est discrétisée en ensemble d'éléments : le maillage. Chaque élément possède  $n$  nœuds. La résolution du problème se base sur l'interpolation du champ de déplacement de chaque élément suivant la forme :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \\ w(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \dots & \varphi_{1(3n)} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \dots & \varphi_{2(3n)} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \dots & \varphi_{3(3n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \cdot \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = [\varphi][u] \quad (\text{II-1})$$

Les fonctions  $\varphi_{ij}$  sont les fonctions de forme. Le tenseur de déformations s'obtient par les équations de la cinématique pour s'écrire sous la forme :

$$[\varepsilon(\vec{u}(M))] = [\delta][u] \quad (\text{II-2})$$

où  $[\delta]$  désigne la matrice des dérivées des fonctions de forme. Enfin, le tenseur des contraintes s'obtient grâce à la loi de comportement sous la forme :

$$[\sigma] = [E][\delta][u] \quad (\text{II-3})$$

Pour un matériau élastique isotrope de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ ,

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

Finalement, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\left( \int_{\Omega} [f_{int}] [\varphi] dV + \int_{\partial\Omega} [f_{int}] [\varphi] dS \right) [u] - [u]^t \left( \int_{\Omega} [\delta]^t [E] [\delta] dV \right) [u] = 0 \quad (\text{II-5})$$

En considérant que ce principe doit être vérifié pour tout  $[u]$  et en introduisant la matrice de raideur :

$$K = \int_{\Omega} [\delta]^t [E] [\delta] dV \quad (\text{II-6})$$

et le vecteur des efforts :

$$F = \int_{\Omega} [f_{int}] [\varphi] dV + \int_{\partial\Omega} [f_{int}] [\varphi] dS \quad (\text{II-7})$$

Le principe des travaux virtuels se réduit au système :

$$KU = F \quad (\text{II-8})$$

### II-2-1: Relations déformations –déplacements :

La seule déformation à considérer est la courbure autour de l'axe y. Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{II-9})$$

La contrainte  $\sigma$  et le moment  $m_z$  dus à la flexion dans le plan ( $\tilde{xy}$ ) sont :



$$\sigma = -Ey \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{II-10})$$

$$m_z = -EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{II-11})$$

Si  $E$  est le module de Young du matériau et  $I_z$  est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $z$ .

Compte tenu des expressions (2.38) et (2.40), on a :

$$m_z = -\frac{EI_z}{l^2} [(6 - 12N_1)L(2N_2 - 4N_1)(6 - 12N_2)L(4N_2 - 2N_1)] \bar{U}^e \quad (\text{II-12})$$

Les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$  correspondant au moment interne dans la poutre sont reliées par la relation :

$$\sigma = D\{\varepsilon\} = DB\bar{U}^e \quad (\text{II-13})$$

Dans ce cas particulier, la matrice  $D$  contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion  $EI_z$ . La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est donc :

$$B = \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} X \quad \frac{4}{L} - \frac{6X}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12X}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6X}{L^2} \right] \quad (\text{II-14})$$

### II-2-2: Relations contraintes –déplacements :

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes  $\sigma$  sont des fonctions linéaires des déformations. Elles sont exprimées par l'expression :  $\{\sigma\} = D\{\varepsilon\}$  où  $D$  est la matrice d'élasticité. [7]

### II-2-3: Conditions aux limites :

Pour résoudre les EDP, il est nécessaire de définir un certain nombre de conditions aux limites cohérentes.

A chaque frontière de domaine est associé un segment orienté. Il est possible de donner des valeurs de condition aux limites pour chacun de ces segments. Les options seront différentes suivant qu'il s'agisse ou non d'une frontière intérieure au système. Les frontières sont orientées, les normales aux frontières ne seront pas nécessairement des normales extérieures. [8]

#### II-2-4: Cas des contraintes planes :

C'est le cas de certaines plaques soumises à des forces parallèles à leur plan moyen. Les contraintes et les déformations sont indépendantes de  $x_3$ .

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$\bar{\sigma}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} \quad (\text{II-15})$$

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$\bar{\varepsilon}(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} \quad (\text{II-16})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (\text{II-17})$$

Avec :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad (\text{II-18})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad (\text{II-19})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (\text{II-20})$$

#### II-2-5: Cas des déformations planes :

C'est le cas de certains solides cylindriques d'axe  $X^{\rightarrow 3}$ , longs et soumis à des forces de surface et de volume perpendiculaire à  $X^{\rightarrow 3}$ . Ces forces sont indépendantes de la coordonnée  $X^{\rightarrow 3}$

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$\bar{\sigma}(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} \quad (\text{II-21})$$

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$\bar{\sigma}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} \quad (\text{II-22})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{II-23})$$

Avec :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \quad (\text{II-24})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \quad (\text{II-25})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (\text{II-26})$$

[9]

### II-3: Analyse et visualisation de contraintes :

➤ Visualisation des contraintes Von Mises :

Les contraintes Von Mises permettent de visualiser des modèles de champ de contrainte Von Mises représentant une quantité de champ scalaire obtenue à partir de la densité d'énergie de la distorsion du volume et utilisés pour mesurer l'état de contrainte. Les objets Contraintes Von Mises appartiennent aux jeux d'objets Solution statique. La densité d'énergie de distorsion du volume est souvent utilisée conjointement à la limite élastique du matériau pour contrôler l'intégrité structurelle de la pièce conformément au critère Von Mises.

Pour obtenir une conception de structure correcte, la valeur maximale des contraintes Von Mises doit être inférieure à cette valeur de rendement.

➤ Visualisation des contraintes principales :

Les symboles de contrainte principale permettent de visualiser des modèles de champ de contrainte principale représentant une quantité de champ tensoriel utilisée pour mesurer l'état

de contrainte et pour déterminer le chemin de charge sur une pièce. Les objets Contrainte Symbole Tenseur Ppal appartiennent aux jeux d'objets Solution statique. À chaque point, le tenseur de contrainte principale donne les directions en fonction desquelles la pièce est en état de tension ou compression pure (aucun composant de contrainte tangentielle sur les plans correspondants) [10].

#### II-4: Application de la MEF à un problème d'élasticité linéaire :

On désire maintenant trouver les équations d'équilibre du flambement à l'aide du principe des travaux virtuels. On considère une poutre chargée à l'aide de deux efforts normaux opposés d'amplitude  $P$ . L'effort normal dans la barre vaudra donc :

$$N = EA \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right) = P \quad (\text{II-27})$$

Soit un champ de déplacements virtuels caractérisés par un déplacement axial  $v_x(x)$  et un déplacement vertical  $v_y(x)$ . A partir de son état d'équilibre caractérisé par les déplacements  $u_x$  et  $u_y$ , nous déplaçons la structure pour qu'elle atteigne l'état de déplacements  $u_x + v_x$  et  $u_y + v_y$ .

Les déformations virtuelles qui caractérisent ce déplacement virtuel sont

$$\epsilon_{xx}(v_x, v_y) = -y \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (\text{II-28})$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} dx + \int_0^L (-P) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx \\ = -P(v_x(L) - v_x(0)) \forall v_x, v_y \end{aligned} \quad (\text{II-29})$$

L'équation suivante est une identité

$$\int_0^L (-P) \frac{\partial v_x}{\partial x} dx = -P(v_x(L) - v_x(0)) \forall v_x \quad (\text{II-30})$$

tandis que l'équation en  $v_y$  nous donne l'équilibre en flexion

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} dx = P \int_0^L \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \quad \forall v_y \quad (\text{II-31})$$

A partir des travaux virtuels, on peut retrouver les équations locales des poutres en flambement, appelées aussi équations d'Euler. [11]

## **II-5: Etapes de résolution d'un problème :**

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments) - Génération de la table de connectivité entre les éléments
3. Définition du modèle associé à la structure
4. Choix des paramètres du modèle (deux pour un matériau élastique isotrope)
5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité
7. Prise en compte des conditions aux limites
8. Prise en compte du chargement
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes) [6]

## **Chapitre III**

# **Comsol Multiphysics un outil puissant pour la modélisation**

## **Chapitre III**

### **Comsol un outil puissant pour la modélisation**

#### **III-1: Introduction**

Les systèmes deviennent complexes avec les développements technologiques, et les méthodes d'études basées sur les solutions analytiques simples ne suffisent plus pour les concevoir. Grâce à l'évolution de l'informatique et des méthodes numériques, on tend de plus en plus vers une meilleure solution proche des phénomènes réels.

Comsol multiphysics est un environnement de simulation et de modélisation de presque toutes les physiques. Son point fort : le couplage entre différents phénomènes. Des modules optionnels offrent des interfaces spécialisés en acoustique, génie chimique, géophysique, électromagnétique, transfert de chaleur et mécanique de structure, ainsi qu'avec les outils de CAO.

L'objectif principal de ce sujet est la simulation numérique sous comsol du comportement mécanique d'une structure soumise à plusieurs types de chargement.

#### **III-2: Code de calcul utilisé**

##### **III-2-1: Présentation générale de Comsol**

COMSOL a été créée en 1986 à Stockholm en Suède et n'a cessé de grandir pour compter aujourd'hui des bureaux au Danemark, en Finlande, Norvège, Allemagne, France, au Royaume-Uni et deux aux Etats-Unis. Il s'agit d'un programme informatique qui permet de modéliser et de simuler. Il est plus récent qu'Ansys, Nastron et Abaqus. S'intègre bien avec Matlab (utilise la même syntaxe que Matlab).

Le logiciel Comsol, anciennement appelé FEMLab - qui signifie Finité Eléments Modeling Laboratory- est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles par éléments finis. Sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques, comme l'électrostatique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux.

Développé initialement comme une toolbox de Matlab, il dispose aujourd'hui de son propre environnement graphique permettant à la fois le dessin des géométries et

l'affichage de résultats en post-traitement. Sa spécificité est également de permettre de coupler différentes EDP, de manière à décrire des phénomènes multiphysiques, particuliers. Il est ainsi possible d'obtenir la déformation d'une membrane due à la pression dans un liquide par exemple. Ou encore l'élévation de température dans un conducteur due au passage d'un courant électrique.

Des fonctions avancées permettent d'entrer manuellement des EDP spécifiques. De plus, les données du logiciel sont accessibles depuis Matlab, ce qui permet la réalisation de scripts [12].

### III-2-2: Utilisation de comsol multiphysics

Comsol utilise des techniques de résolution numérique très avancées pour la modélisation, la simulation et la visualisation des applications de tous les champs de la physique, de la technologie, et des mathématiques appliquées. Il est applicable dans tous les domaines de la science et de l'ingénierie. Un pré conditionneur multi grille optimise les routines de calcul, entraînant une réduction du temps de calcul et de la mémoire nécessaire. Combiné avec la technologie 64-bit, COMSOL traite des problèmes de plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté. Par exemple, le calcul du champ électrique d'un réflecteur radar réclame 20 millions de degrés de liberté.

Dans le domaine de la mécanique, le code COMSOL est un outil puissant devenu partie intégrante des méthodes de conception. Il permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire en statique et dynamique, des problèmes non linéaires (élasto-viscoplasticité, hyper élasticité)... ; etc.

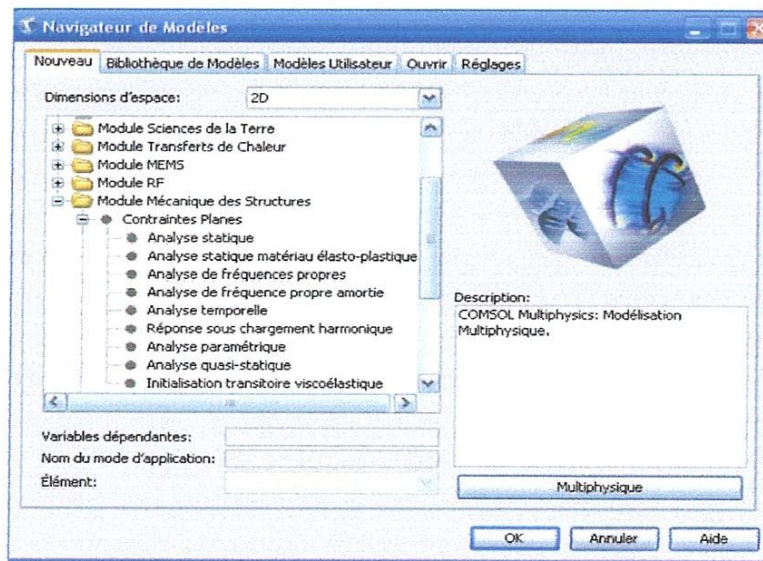
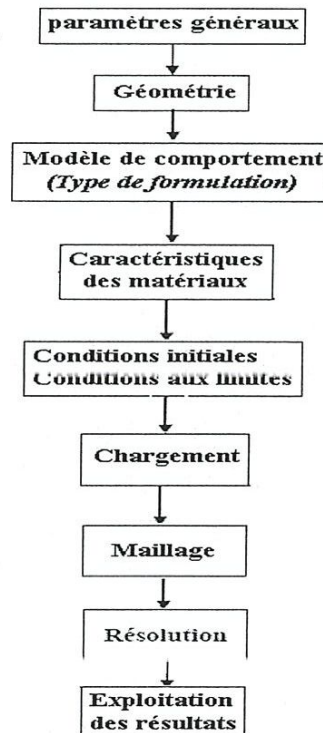


Figure III-1: Fenêtre principale de Comsol



### III-2-3: Etapes du processus de modélisation

Comsol multiphysics permet de traiter de nombreux problèmes couplés grâce à sa banque intégrée d'équations physiques très variées (électrothermique, thermo fluidique, ... etc.) décrits par les équations aux dérivées partielles. Cette approche autorise une simulation numérique au plus près des systèmes réel



**Figure III-2:** Organigramme général pour la résolution d'un problème avec Comsol Multiphysique [13]

Le logiciel Comsol Multiphysiques possède un environnement de programmation (Comsol Script) dans lequel il est possible de modifier le maillage et les équations du problème. Ce logiciel possède de nombreux systèmes de résolution dits «solveurs», pouvant être linéaires ou non, paramétriques ou encore dépendants du temps. En effet, les différentes étapes proposées par cet outil [14] sont:

1- La Construction de la géométrie: la première étape est d'extruder une géométrie 2D vers une géométrie 3D,

2- Le Maillage de la géométrie: Le maillage des domaines est automatique. Il est possible de le raffiner globalement ou de manière localisée,

3- Définition de la physique: définition des constantes et des expressions,

4- Définition des propriétés des matériaux: une bibliothèque de matériaux est à

disposition dans Comsol Mutiphysics,

5- Les conditions aux limites: on impose des conditions sur certaines frontières,

6- Exploitation des résultats post-traitement: Lorsque le programme est convergé vers une solution, il bascule automatiquement vers la fenêtre de post-processing, qui permet d'analyser les résultats Lors de la conception, il permet d'asseoir le bien-fondé des concepts retenus pour s'assurer d'un dimensionnement correct, aussi bien dans les situations normales que perturbées; il aide à trouver les solutions en cas de défaillance. Ainsi, avec les nouvelles techniques de maillage structuré, l'utilisateur choisit des éléments quadrilatère, hexaèdre ou prisme pour optimiser la discrétisation d'une géométrie donnée.

### **III-2-4: Description des différents modules de Comsol**

#### **➤ 1. Module AC / DC**

Le module AC / DC prépare le terrain pour la modélisation de la performance des condensateurs, inductances, des moteurs et micro capteurs. Bien que ces dispositifs sont principalement caractérisés par électromagnétisme, ils sont également affectés par d'autres types de physique. Les effets thermiques, pour exemple, peut modifier les propriétés électriques des matériaux, tout en électromécanique déformations et vibrations dans les générateurs doivent être pleinement compris au cours d'une conception processus. Les capacités de l'électrostatique AC / DC Module portée, magnétostatique, et électromagnétiques quasi-statique avec raccords illimité vers d'autres physique.

#### **➤ 2. Module de transfert de chaleur**

Problèmes impliquant toute combinaison de conduction, la convection et le rayonnement sont résolu facilement avec le module de transfert de chaleur. Il trouve une vaste utilisation dans des systèmes qui impliquer la production et la circulation de la chaleur dans n'importe quelle forme. Une variété de modélisation spécialisé interfaces sont disponibles pour différentes formulations et des applications telles que surface de surface rayonnement, flux non isotherme, le transfert de chaleur dans les structures en couches minces et coquilles, et le transfert de chaleur dans les tissus biologiques.

#### **➤ 3. Module MEMS**

Le module MEMS aborde les questions de conception qui se posent dans le micro-monde. Les modèles de phénomènes physiques dans les actionneurs et capteurs micro fluidiques et en plus petit des dispositifs piézoélectriques. La plupart des applications MEMS sont multiphysique

par leur nature même et comprennent généralement l'électromagnétique structurelle, thermique structurelle, fluide-structure (FSI), ou interactions électromagnétiques fluide. À cette fin, le module MEMS fournit des équations et des paramètres optimisés pour la modélisation simple et couplée physique.

#### ➤ *4. Module RF*

Modélisation en RF, micro-ondes et optiques ingénierie nécessite la résolution de l'échelle du dispositif de transmission, tout en capturant les effets de plusieurs ordres de grandeur. Le Module RF nous offre les outils nécessaires pour relever ce défi, y compris les couches parfaitement adaptées et les meilleurs solveurs disponibles.

#### ➤ *5. Module Mécanique des Structures*

Ce module est spécialisé dans l'analyse des composants et sous-systèmes où il est nécessaire d'évaluer les déformations de la structure. Il contient également une application spéciale modes pour la modélisation des coquillages, des poutres et des plaques.

#### ➤ *6. COMSOL Import Module CAD*

Le module d'importation CAO simplifie grandement le passage de dessins géométriques créé avec les outils de CAO spécialisés dans l'environnement de simulation COMSOL Multiphysics et de ses modules.

#### ➤ *7. COMSOL Script*

Toutes les capacités de modélisation multiphysique COMSOL sont disponibles via Script COMSOL. Il nous permet d'interagir avec des modèles à travers un utilisateur graphique d'interface interactif, le bureau COMSOL, pour à peu près n'importe quel objet de l'analyse que nous pouvons penser. COMSOL Script comprend plus de 600 commandes de haut niveau pour l'analyse des données et visualisation. Il suffit de sauvegarder un modèle multiphysique COMSOL comme un M-file modèle, puis étendre notre simulation et d'analyse [15].

### **III-2-5: Module de mécanique des structures**

#### **III-2-5-1: Description**

Permet des analyses classiques de contraintes-déformations avec des possibilités multiphysiques étendues. Comprend des modèles de matériaux non-linéaires, de grande

déformation, de plasticité et des possibilités de contact. Comporte des modes d'applications spécialisés pour les poutres, les treillis, les coques et les plaques [16].

### III-2-5-2: Types de problèmes qu'on peut résoudre avec ce module

- **Effets Piézo-électriques** : Modes d'application piézoélectriques 2D.
- **Interaction Acoustique-Structure** : Combinaison d'acoustique et de mécanique pour la modélisation de l'interaction acoustique-structure.
- **Interaction Thermique-Electrique-Mécanique** : Combinaisons prédéfinis de modes d'application et de couplages pour les interactions thermique-électrique-mécanique.
- **Interaction Fluide-Structure** : Combinaisons prédéfinies de modes d'application et couplages pour l'interaction fluide-structure (FSI).
- **Couplage Mécanique-Thermique** : Modes d'application et couplages prédéfinis pour le couplage thermomécanique.

### III- 3: Application à l'étude d'une poutre sollicitée en flexion

#### III- 3-1: Description du problème

Nous illustrons la méthode des éléments finis à la résolution d'un problème de résistance des matériaux classique, une poutre encastrée sollicitée en flexion.

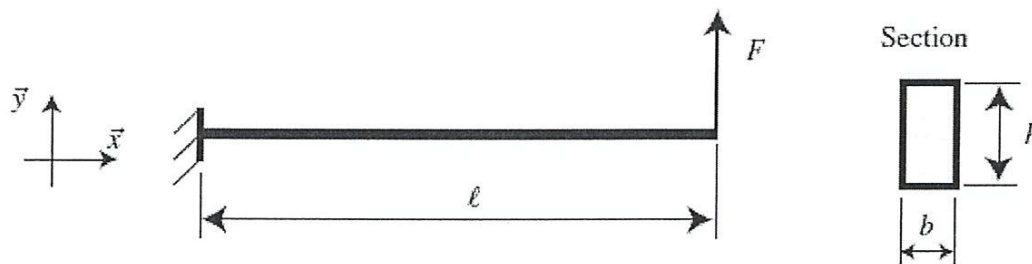


Figure III-3: poutre cantilever en flexion

Le matériau est un acier de module d'élasticité  $E = 200 \text{ GPa}$ . La section de la poutre est rectangulaire, de largeur  $b = 2 \text{ cm}$  et de hauteur  $h = 4 \text{ cm}$ . Sa longueur est  $\ell = 1 \text{ m}$ . est qu'on dépasse la limite élastique le chargement est un effort ponctuel  $F = 1 \text{ kN}$ , appliqué à l'extrémité droite de la poutre. Pour ce problème de flexion simple, nous utilisons une discrétisation éléments finis de type poutre d'Euler-Bernoulli. Nous comparerons la déformée de la solution calculée avec celle de la solution exacte qui s'écrit :

$$v(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (\text{III-1})$$

### III-3-2: Mise en équations du problème

L'élément utilisé pour la résolution du problème est un élément poutre à deux nœuds, comportant deux degrés de liberté par nœud, un déplacement vertical et une rotation.

#### a) Fonctions de forme

Pour un problème de poutre en flexion, dont la déformée est un polynôme de degré trois, on propose la fonction d'interpolation suivante :

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (\text{III-2})$$

Les constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont obtenues en fonction de la valeur des degrés de liberté aux nœuds 1 et 2, soient  $v_1$ ,  $\theta_1$  et  $v_2$ ,  $\theta_2$  :

$$v(0) = v_1 \quad v'(0) = \theta_1 \quad (\text{III-3})$$

$$v(l) = v_2 \quad v'(l) = \theta_2 \quad (\text{III-4})$$

Ces quatre conditions permettent d'écrire le système de quatre équations à quatre inconnues, permettant de calculer les constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  :

$$a_0 = v_1 \quad a_1 = \theta_1 \quad (\text{III-5})$$

$$a_0 + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 = v_2 \quad (\text{III-6})$$

$$a_1 + 2a_2l + 3a_3l^2 = \theta_2 \quad (\text{III-7})$$

Soit :

$$a_0 = v_1 \quad a_1 = \theta_1 \quad (\text{III-8})$$

$$a_2 = 3 \frac{v_2 - v_1}{l^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l} \quad a_3 = 2 \frac{v_1 - v_2}{l^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} \quad (\text{III-9})$$

La fonction d'interpolation s'écrit finalement :

$$v(x) = v_1 + \theta_1 x + \left( 3 \frac{v_2 - v_1}{l^2} - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l} \right) x^2 + \left( 2 \frac{v_1 - v_2}{l^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} \right) x^3 \quad (\text{III-10})$$

$$= \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) v_1 + \left( x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_1 + \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) v_2 + \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_2 \quad (\text{III-11})$$

Sous forme matricielle, nous voyons apparaître les fonctions de formes  $\varphi$ :

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [\varphi][u] \quad (\text{III-12})$$

Le calcul de la déformation repose sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$[\varepsilon] = \varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} y \quad (\text{III-13})$$

et l'écriture sous forme matricielle donne :

$$[\varepsilon] = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} - \frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

La relation de comportement est réduite à :

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] = E[\varepsilon] \quad (\text{III-15})$$

### b) Construction de la matrice de raideur locale

Les termes de la matrice de raideur locale se calculent à partir de l'expression

$$K = \int_{\Omega} [\delta]^t [E] [\delta] dV = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III-16})$$

(Sym)

Les différents termes étant :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right)^2 dx dy dz \\
 &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} \right) dx = EI \left[ \frac{36x}{l^4} - \frac{72x^2}{l^5} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{48x^3}{l^6} \right]_0^l = \frac{12EI}{l^3}
 \end{aligned}$$

(III-17)

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \left( -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) dx dy dz \\
 &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{24}{l^3} - \frac{84x}{l^4} + \frac{72x^2}{l^5} \right) dx = EI \left[ \frac{24x}{l^3} - \frac{42x^2}{l^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{24x^3}{l^5} \right]_0^l = \frac{6EI}{l^2}
 \end{aligned}$$

(III-18)

$$K_{13} = -K_{11} = \frac{12EI}{l^3} \quad \text{(III-19)}$$

$$\begin{aligned}
 K_{14} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \left( -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) dx dy dz \\
 &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{12}{l^3} - \frac{60x}{l^4} + \frac{72x^2}{l^5} \right) dx = EI \left[ \frac{12x}{l^3} - \frac{30x^2}{l^4} + \frac{24x^3}{l^5} \right]_0^l = \frac{6EI}{l^2}
 \end{aligned}$$

(III-20)

$$\begin{aligned}
 K_{22} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)^2 dx dy dz = E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{16}{l^2} - \frac{48x}{l^3} + \frac{36x^2}{l^4} \right) dx \\
 &= EI \left[ \frac{16x}{l^2} - \frac{30x^2}{l^3} + \frac{24x^3}{l^4} \right]_0^l = \frac{4EI}{l}
 \end{aligned}$$

(III-21)

$$K_{23} = -K_{12} = \frac{6EI}{l^2} \quad \text{(III-22)}$$

$$\begin{aligned}
 K_{24} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)^2 \left( -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) dx dy dz \\
 &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{8}{l^2} - \frac{36x}{l^3} + \frac{36x^2}{l^4} \right) dx = EI \left[ \frac{8x}{l^2} - \frac{18x^2}{l^3} + \frac{12x^3}{l^4} \right]_0^l \\
 &= \frac{2EI}{l}
 \end{aligned}
 \tag{III-23}$$

$$K_{33} = -K_{11} = \frac{12EI}{l^3} \tag{III-24}$$

$$K_{34} = -K_{14} = -\frac{6EI}{l^2} \tag{III-25}$$

$$\begin{aligned}
 K_{44} &= E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 \left( -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)^2 dx dy dz = E \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy dz \int_0^l \left( \frac{4}{l^2} - \frac{24x}{l^3} + \frac{36x^2}{l^4} \right) dx \\
 &= EI \left[ \frac{4x}{l^2} - \frac{12x^2}{l^3} + \frac{12x^3}{l^4} \right]_0^l = \frac{4EI}{l}
 \end{aligned}
 \tag{III-26}$$

La matrice de raideur pour l'élément poutre est :

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & -12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} & -6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \\ -12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^3} & -6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^3} & -6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} & -6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix}
 \tag{III-27} [6].$$

### III-3-3: Résolution du problème sous Consol

#### a) Choix du modèle de Consol:

Sélectionnez le module de mécanique des Structures > contraintes planes > Analyse statique.



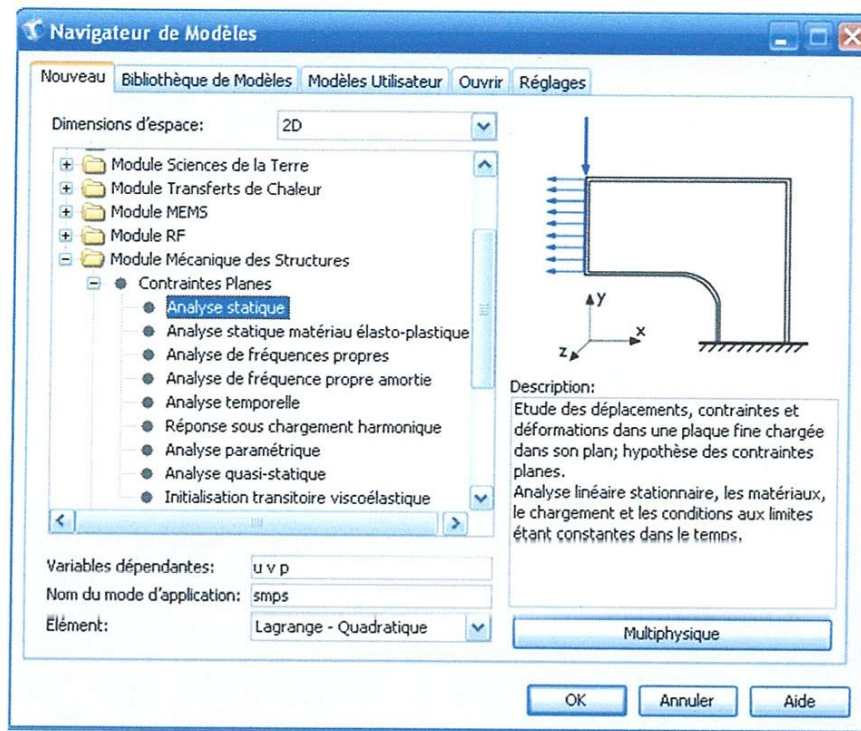


Figure III-4: Fenêtre principale de module mécanique des structures

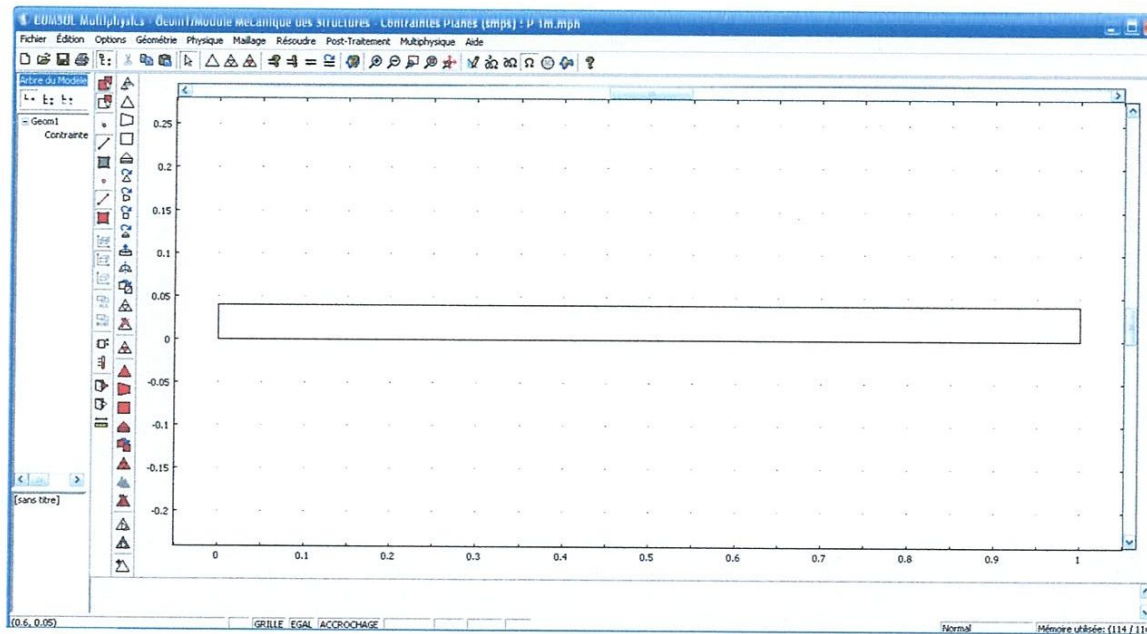
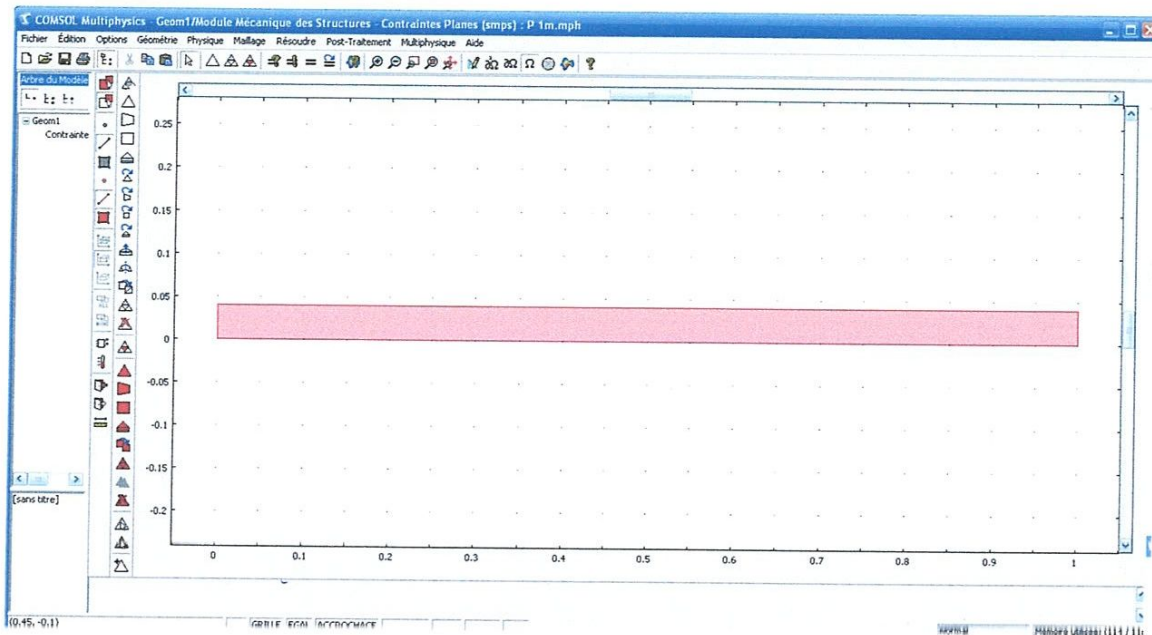


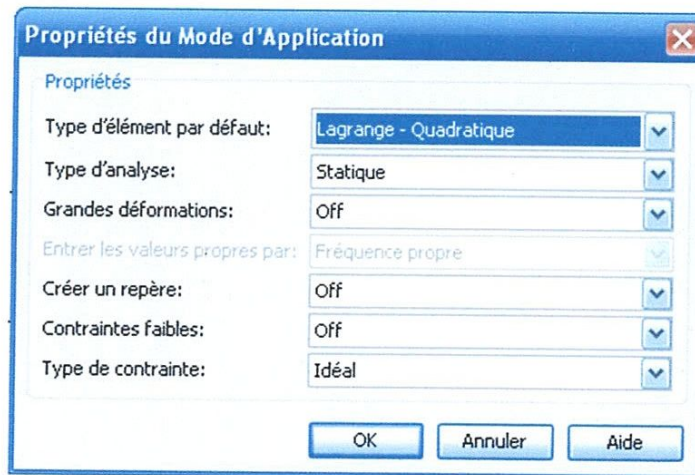
Figure III-5: Géométrie sur Comsol



**Figure III-6: Géométrie (solide) sur Comsol**

**b) Réglages physique :**

Propriétés du mode d'application pour vérifier que le type d'analyse définie est une analyse statique.



**Figure III-7: Fenêtre de propriétés du mode d'application**

**C) Choix du Matériau :**

En mode sous-domaine nous spécifions les propriétés des matériaux. Les propriétés du matériau sont choisies dans la bibliothèque de matériaux :

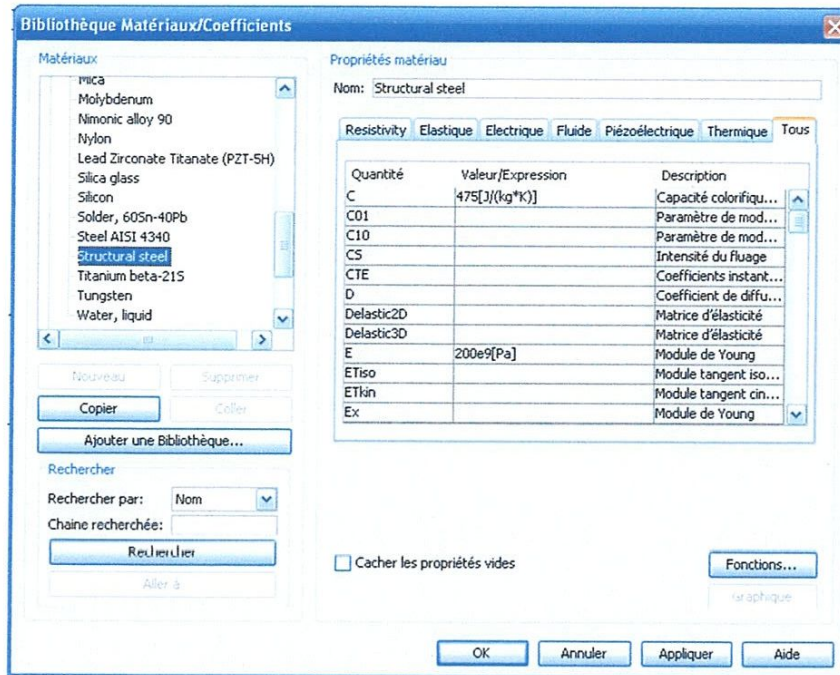


Figure III-8: Fenêtre de bibliothèque matériaux/coefficients

#### d) Propriétés Physiques :

- Acier structural
- Module d'Young :  $E=2.10^{11}$  [Pa]
- Coefficient de Poisson :  $\nu=0.33$
- Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha=12.3.10^{-6}$ [1/K]
- Densité :  $\rho=7850$  [Kg /m<sup>3</sup>]
- Epaisseur :  $2.10^{-2}$

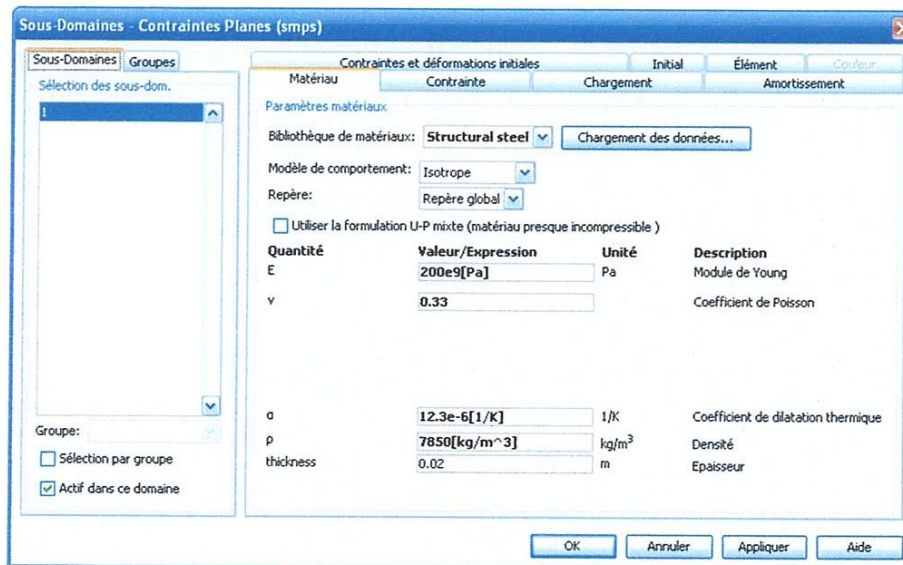


Figure III-9: Fenêtre de sous- Domaines – Contraintes planes (smps)

e) Les Conditions aux limites :

➤ **Contrainte :**

La limite 1 (Coté gauche) doit être fixe (encasturé)

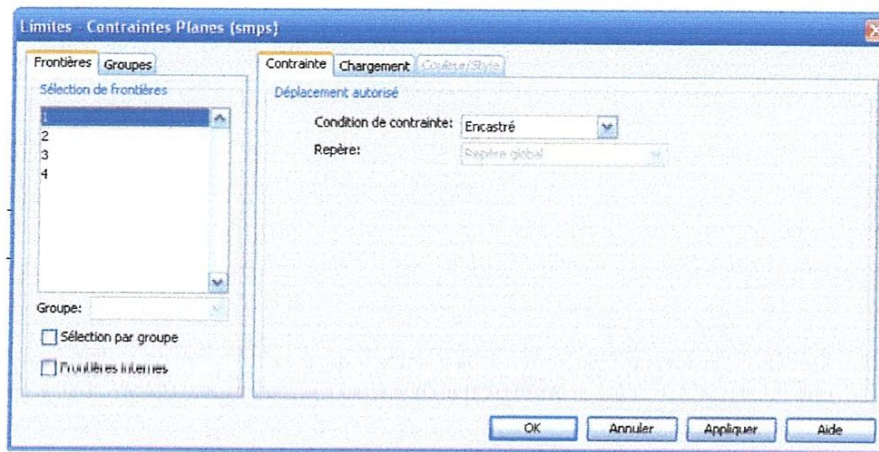


Figure III-10: Fenêtre de limite (contrainte)

➤ **Chargement :**

La limite 4 libre sur laquelle on applique une charge de 1Kn (soit 50000N/m) sur la partie interne du coté droit de la pièce.

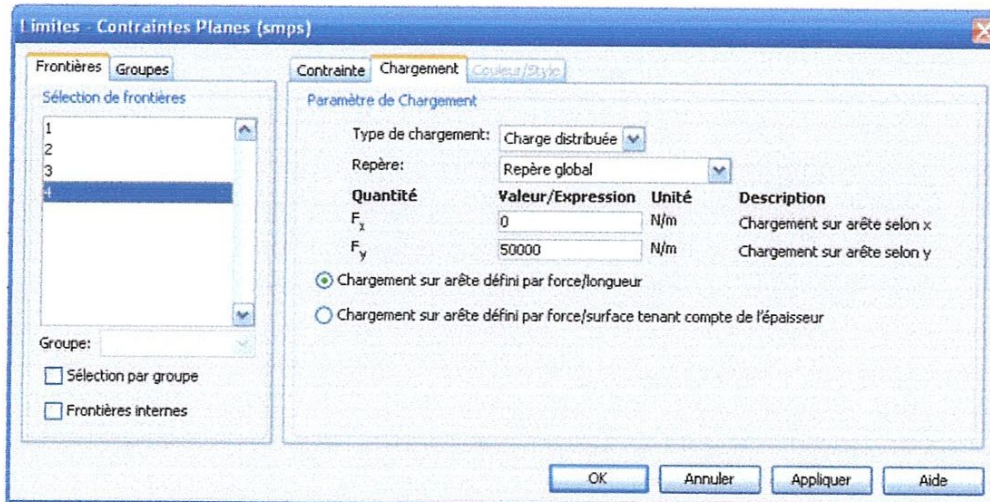
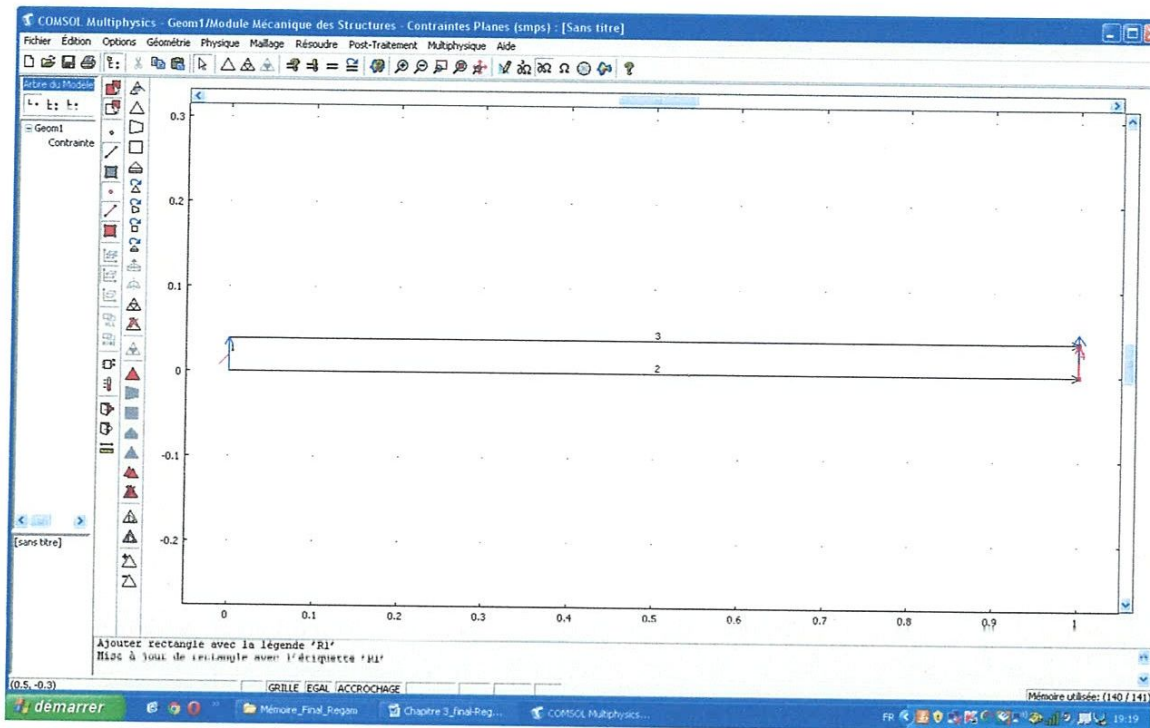


Figure III-11: Fenêtre de limite (chargement)



**Figure III-12:** Introduction des contraintes (conditions aux limites) sur le modèle

#### f) Choix du maillage :

Dans tout calcul par la méthode des éléments finis le maillage est un problème délicat. Bien que le coût du calcul augmente parallèlement avec le nombre d'élément, le maillage ne saurait être trop grossier car la précision des résultats est directement fonction de la dimension des éléments. La finesse du maillage dépend également, pour une bonne part, de la formulation utilisée, permettant d'assurer aux mieux la continuité des déplacements, pentes et courbures aux frontières de l'élément et permet d'obtenir des résultats plus précis .

Comsol multiphysics propose plusieurs types de maillage de différentes finesse, de l'extrêmement fin à l'extrêmement grossier. Il suffit de modifier les paramètres pour l'améliorer. Le maillage peut être affiné, selon la complexité de la géométrie du problème, sur un sous domaine, une frontière ou autour d'un point particulier.

Une des spécificités de la modélisation à éléments finis est que plus le nombre d'élément croît plus le résultat obtenu s'approche d'une solution juste. Cependant le temps de calcul nécessaire augmente considérablement avec le nombre d'éléments.

Le maillage utilisé pour discrétiser la géométrie étudiée est de type Lagrangien et les mailles sont de forme triangulaire. Il comporte 76 éléments (maillage grossier) avec 386 degrés de libertés.

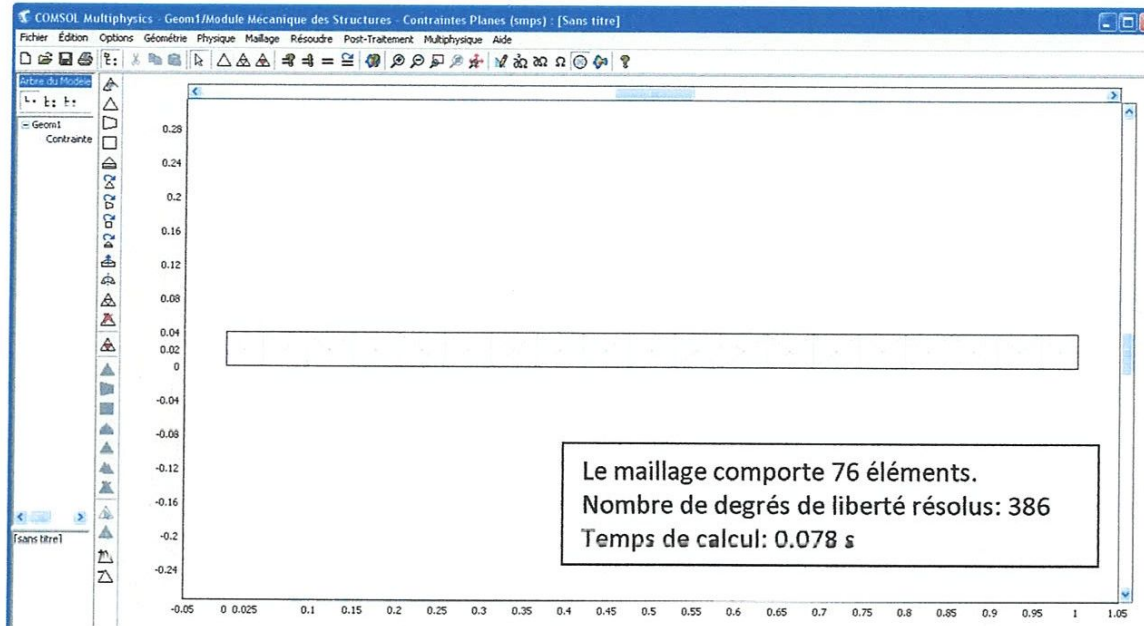


Figure III-13: maillage de la géométrie

### III- 3-4: Résolution numérique

On peut choisir le type de solveur à utiliser grâce à l'option de sélection automatique du solveur dans la boîte de dialogue des paramètres du solveur. Cette option est activée par défaut, il n'est pas nécessaire de modifier les paramètres du solveur parce le solveur stationnaire est celui associé au type d'analyse statique.

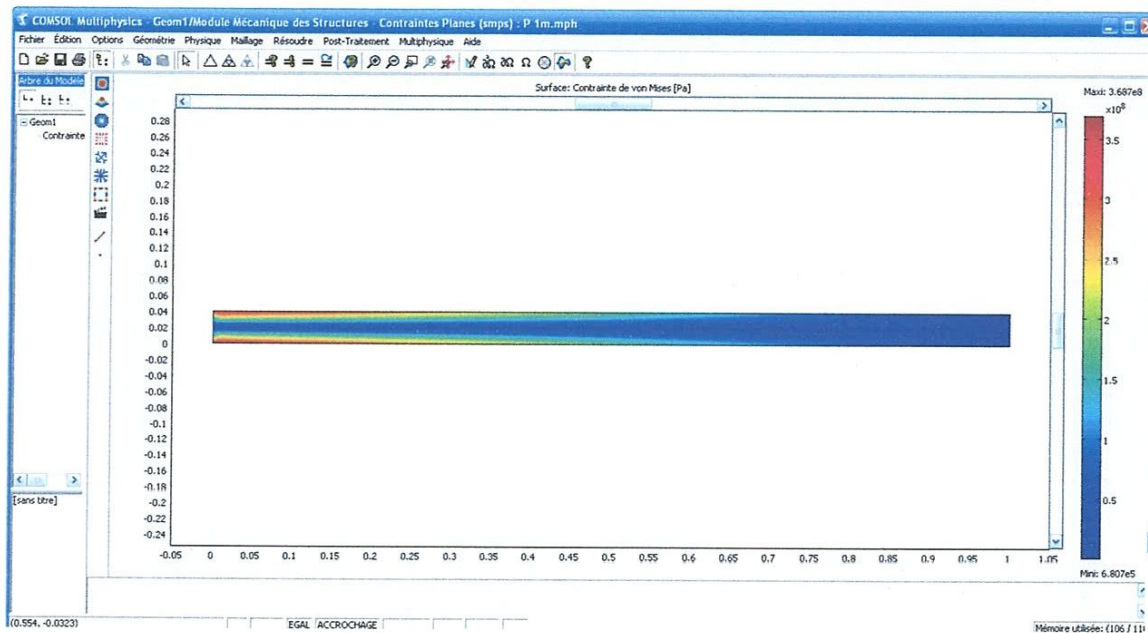
Pour calculer la solution, soit cliquer sur le bouton Résoudre le problème (=) sur la barre d'outils principale ou sélectionnez résoudre le problème à partir du menu résoudre.

### III- 3-5: Visualisation des résultats

En mode de post-traitement, vous pouvez, par exemple, ajouter des types de représentation supplémentaires et définir des paramètres pour ces dernières. Les services de post-traitement peuvent visualiser n'importe quelle expression contenant, par exemple, les variables de solutions, leurs dérivés, et l'espace des coordonnées. Beaucoup d'expressions fréquemment.

Le post traitement nous offre beaucoup de possibilité de représentation des différents résultats calculés et sous beaucoup de formes.

A titre d'exemple la figure suivante représente l'état de contraintes de Von Mises en mode surface et montre bien la différence de niveau de contrainte depuis l'encastrement jusqu'à la partie libre de la poutre.



**Figure III-14:** Contraintes de Von Mises en mode surface

Parmi les grandes capacités qu'offre Comsol à ses utilisateurs, c'est qu'il permet des représentations en n'importe quel point et suivant n'importe quelle section (ligne).

Par exemple pour mettre en évidence la concentration de contrainte ainsi que la symétrie de celle-ci le long de la hauteur de la poutre, nous représentons sur la figure III-15 l'évolution de la contrainte de Von Mises qui montre bien une forte concentration de cette dernière tout en montrant sa symétrie vis-à-vis la fibre neutre de la poutre.

La figure III-16 montre l'écran de saisi des coordonnées pour la représentation graphique de la contrainte de Von Mises.

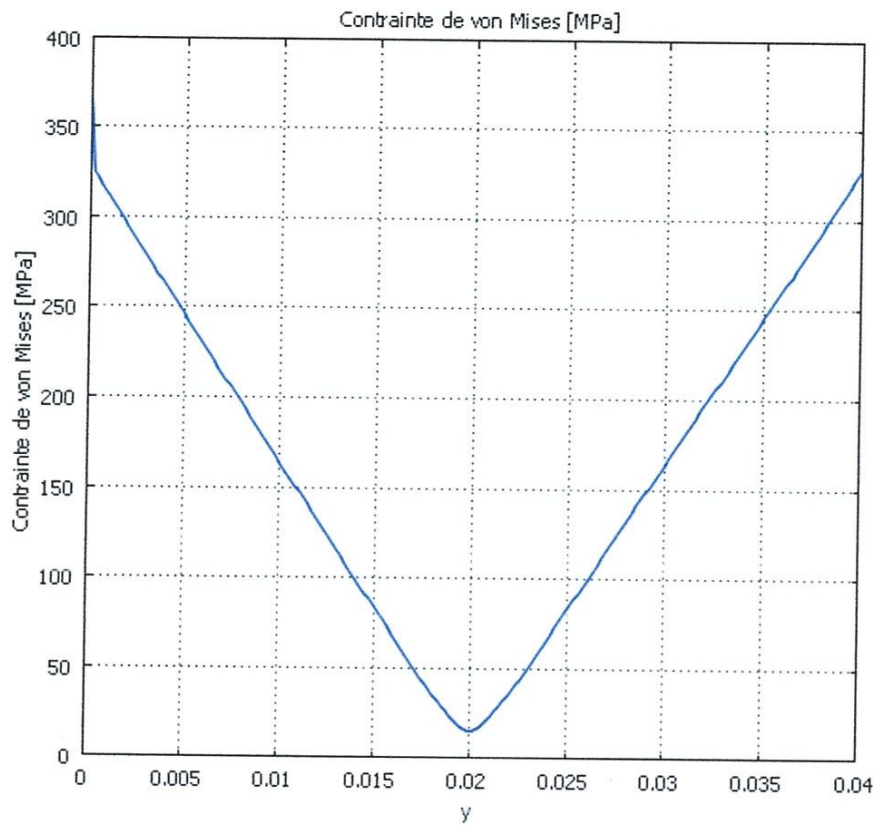


Figure III-15 : Contrainte de Von Mises le long de la hauteur de la poutre

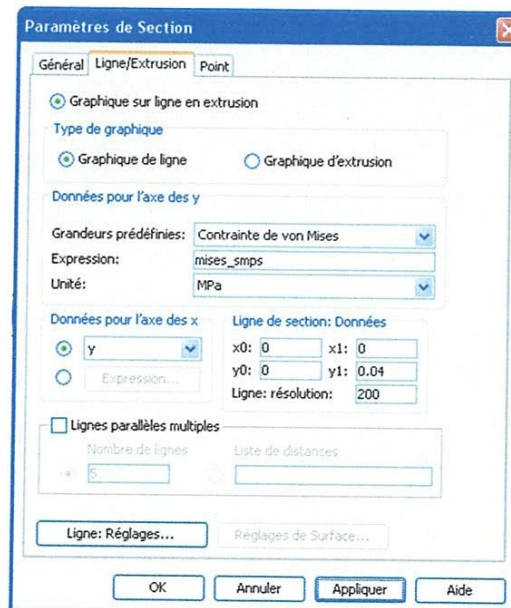
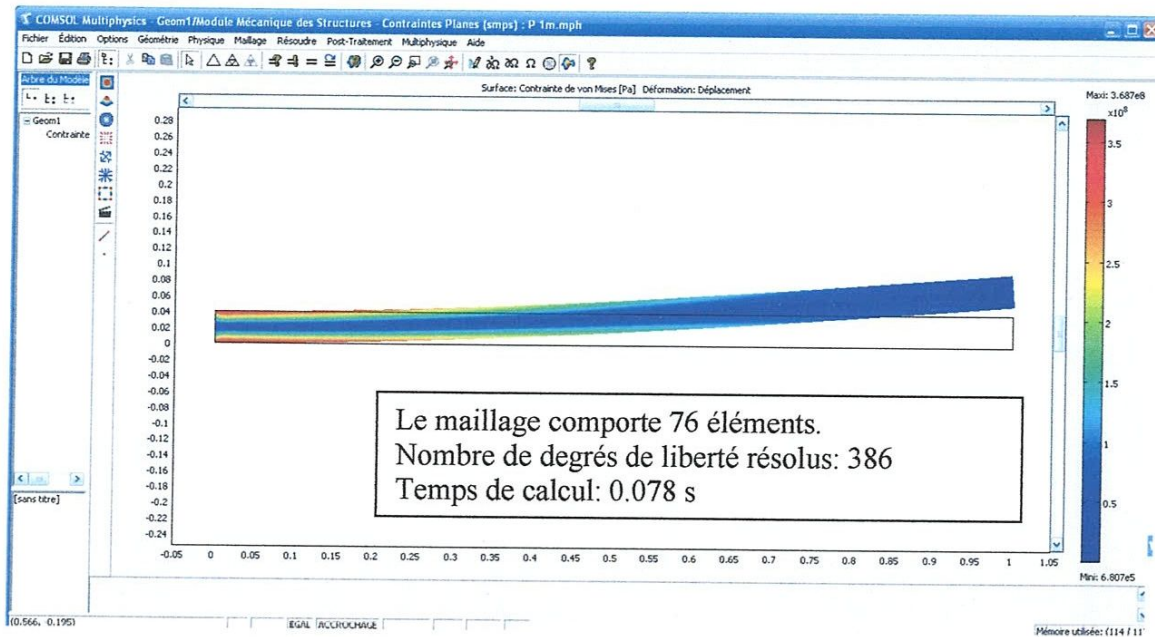


Figure III-16 : Coordonnées relatives à la représentation graphique de la contrainte de Von Mises





**Figure III-17:** Représentation graphique de la déformée de la poutre suite au chargement.

La figure III-17 représente la poutre en état de déformation (bien sur avec un coefficient d'échelle 1.664916) et la contrainte de Von Mises.

Ainsi, ce que nous pouvons conclure suite à cette petite modélisation, c'est que Comsol nous donne la possibilité, en simple clics, de résoudre des problèmes de tout genre et gouvernés par équations différentielles aux dérivées partielles en un temps très réduit (soit 0.078 s)

# **Chapitre IV**

## **Modélisation d'une pièce sous différents types de chargement**

## Chapitre IV

### Modélisation d'une pièce sous différents types de chargement

#### IV-1 : Introduction

Dans le présent chapitre, nous sommes penchés à la modélisation d'une structure qui pourra être un élément mécanique utilisé dans la conception des systèmes largement utilisé au quotidien tel que les extracteurs de roulements. L'utilisation du logiciel Comsol Multiphysics donne la possibilité d'étudier le comportement des pièces mécanique sous différents types de chargement. Dans ce travail, nous avons choisis trois types d'analyses que nous allons présenter ici : l'analyse statique, l'analyse paramétrique et l'analyse fréquentielle (fréquence propre).

#### IV-2: Démarche d'une analyse par la méthode des éléments finis

Quel que soit le logiciel utilisé, une modélisation utilisant la méthode des éléments finis se décompose de façon assez commune en trois étapes (figure IV-1):

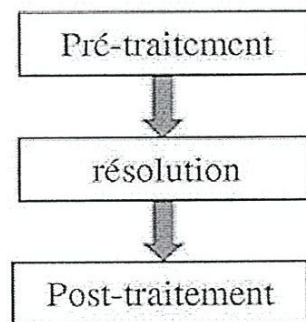


Figure IV-1: Organigramme des différentes étapes de calcul par la MEF

##### a- Le prétraitement

Le prétraitement a pour fonction de lire les données. Ces données peuvent être classé :

1. Créer le modèle géométrique,
2. Créer le maillage: définir les nœuds et les éléments,
3. Entrer les paramètres physiques,
4. Imposer les conditions aux limites.

##### b- Résolution

La phase de résolution (solution) consiste à définir le choix du type (stationnaire ou

transitoire) et des options d'analyse d'autre part. Une fois ceci est réalisé, cette phase offre les fonctions suivantes:

1. Calcul des matrices et vecteurs élémentaires,
2. Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires,
3. Prendre en compte les conditions aux limites,
4. Résoudre le système d'équations.

La résolution est dans la majorité des cas gérée par des opérateurs. Elle peut être linéaire (élasticité, thermique stationnaire,) ou non linéaire (plasticité, viscoélasticité, hyper-élasticité, thermique transitoire).

### **c- Post-traitement**

Cette phase permet la visualisation des résultats sous forme graphique ou tabulaire. Elle permet d'extraire les informations désirées et de les traiter indépendamment.

Lorsque le programme a convergé vers une solution, il bascule automatiquement vers la fenêtre de post-traitement, qui permet d'analyser les résultats.

Il est possible de les visualiser sous forme de remplissage de couleur, de lignes de courant, de champ de flèches, etc...

La résolution des problèmes mécaniques donne quant à elle la valeur du déplacement aux nœuds de la géométrie. Il convient alors d'exploiter ce déplacement pour déduire les autres résultats attendus (déformations, contraintes,..). [13]

### **IV-3: Description du problème**

L'objectif de ce travail est de simuler numériquement le comportement d'un élément mécanique soumis à différents types de chargements en utilisant le module de mécanique de structure de Comsol Multiphasique.

Le module mécanique des structures permet des analyses classiques de contraintes-déformations avec des possibilités multiphasiques étendues. Comprend des modèles de matériaux non-linéaires, de grandes déformations, de plasticité et des possibilités de contact. Comporte des modes d'applications spécialisés pour les poutres, les treillis, les coques et les plaques.

Dans ce même module on peut également étudier le comportement mécanique des structures épaisses pour lesquelles il n'y a pas de déformation dans la direction or du plan (hypothèses de déformations planes).

L'élément mécanique étudié est assimilé à une plaque mince chargée dans son plan (hypothèses de contraintes planes) pour laquelle on détermine les déplacements, les contraintes et les déformations.

Cet exemple introduit également trois types d'analyses de base valables dans le module de mécanique des structures :

- Analyse statique,
- Réponse fréquentiel,
- Analyse paramétrique,

#### IV-4: Géométrie

L'élément mécanique de l'étude est coupé à partir d'une plaque en acier de 4 mm, l'épaisseur est négligeable devant les autres dimensions dans le plan x, y. cela permet de négliger les contraintes en dehors du plan.

Pour les trois types d'analyses (statique, fréquentiel et paramétrique), on applique une charge mécanique à l'extrémité droite inférieure de la structure. Pour toutes les analyses qu'on va réaliser, la structure est encastree sur son coté gauche.

La géométrie est dessinée à l'aide du logiciel de dessin « Autocad » puis importer dans comsol Multiphysique.

Nous avons dessiné d'abord les lignes avec les coordonnées comme le montre le tableau 1.

➤ Coordonnées des lignes :

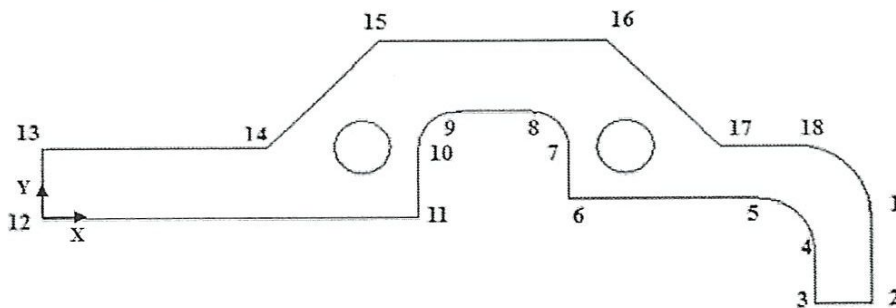


Figure IV-2: Dessin des lignes

Ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0.22	0.22	0.205	0.205	0.19	0.14	0.14	0.13	0.11
Y	0	-0.025	-0.025	-0.01	0.005	0.005	0.02	0.03	0.03

Ligne	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X	0.1	0.1	0	0	0.06	0.0895	0.1509	0.18	0.2
Y	0.02	0	0	0.02	0.02	0.05	0.05	0.02	0.02

Tableaux 1 : les coordonnées pour les lignes

Puis nous avons dessiné les arcs et les cercles (tableau 2).

➤ Points des arcs et cercles:

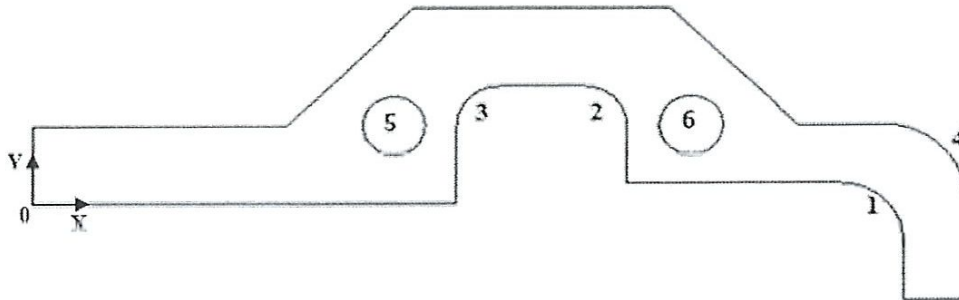
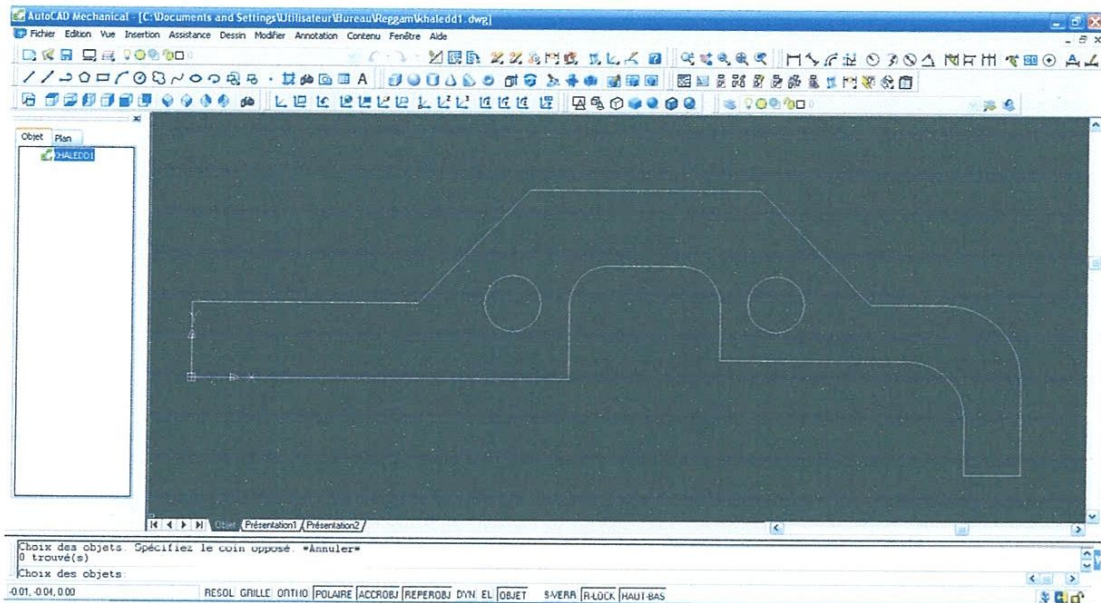


Figure IV-3: Dessin des Arcs et cercles

Arc		1	2	3	4	5	6
Point de départ	X	0.205	0.14	0.11	0.2		
	Y	-0.01	0.02	0.03	0.02		
centre	X	<b>0.19</b>	<b>0.13</b>	<b>0.1</b>	<b>0.2</b>		
	Y	<b>-0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.02</b>	<b>0</b>		
Point l'extrémité	X	0.19	0.13	0.1	0.22		
	Y	0.005	0.03	0.02	0		
Cercle	X					0.085	0.155
	Y					0.02	0.02

Tableaux 2 : les coordonnées pour les arcs



**Figure IV-4:** la géométrie sur AutoCAD

#### **IV-5: Modélisation sous Comsol**

La pièce mécanique sujet de notre modélisation sous Comsol multiphysics a fait l'objet de trois types d'analyses à savoir l'analyse statique, l'analyse paramétrique et en fin l'analyse fréquentielle (fréquence propre).

##### **IV-5-1: Analyse Statique**

###### **IV-5-1-1: Description**

Une analyse linéaire stationnaire n'a pas une dépendance implicite ou explicite du temps. Cette situation correspond à un état stationnaire d'une analyse transitoire avec les propriétés des matériaux, le chargement et les conditions aux limites étant constantes dans le temps.

L'objectif d'une telle analyse est de :

- Trouver le niveau maximal de contraintes et le comparer à la résistance pratique du matériau.
- Trouver la déflexion statique au point d'application de la charge et la comparer au cas de l'analyse transitoire.

###### **IV-5-1-2: Modélisation de la géométrie**

Au lieu de dessiner la géométrie directement dans l'interface utilisateur, nous pouvons importer un fichier DXF.

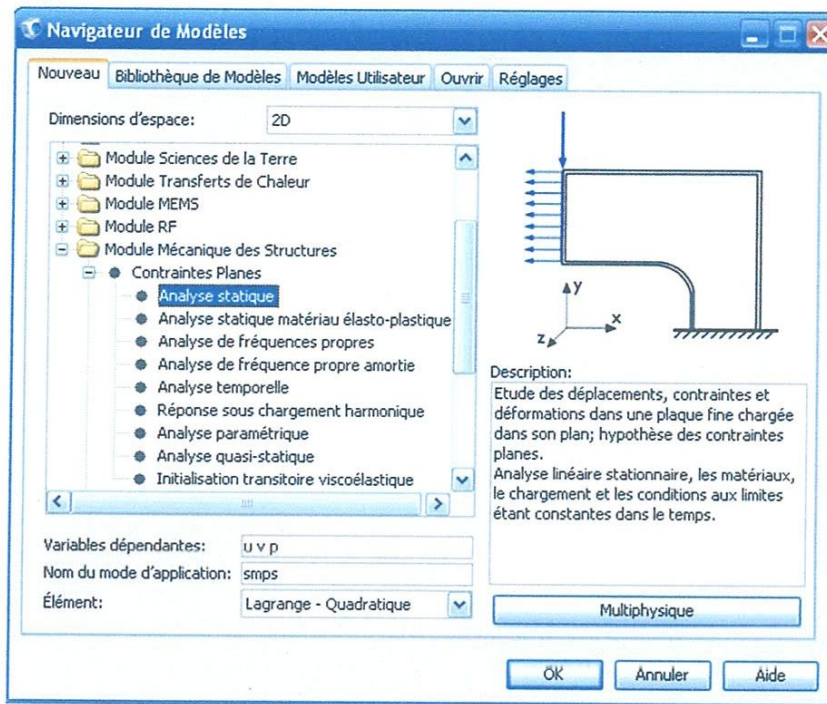


Figure IV-5: Fenêtre principale du module mécanique des structures

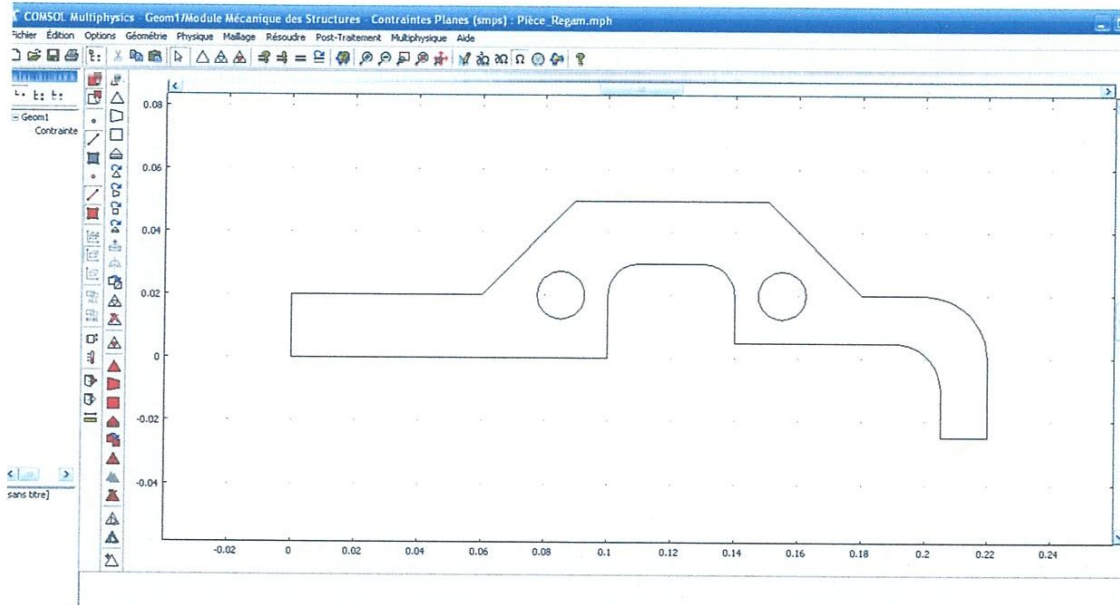


Figure IV-6: Géométrie après importation dans Comsol Multiphysics

### IV-5-1-3: Réglages physique

#### a- Propriétés du mode d'application

- ✓ Choisir l'analyse statique comme type d'analyse :



Dans le menu physique, sélectionnez propriétés pour ouvrir la boîte de dialogue des propriétés du mode d'application pour vérifier que le type d'analyse définie est une analyse statique.

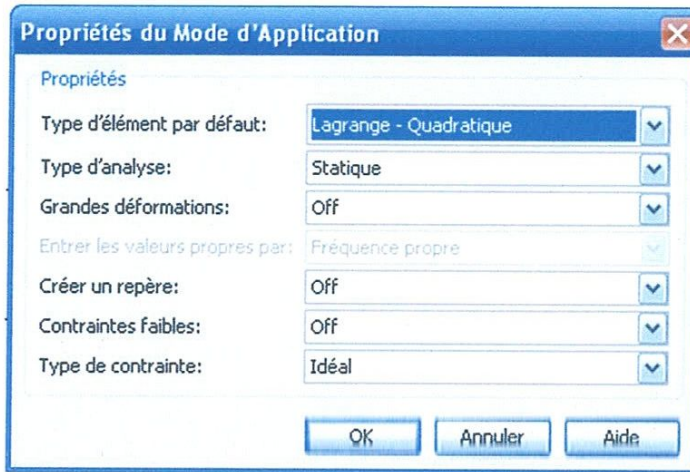


Figure IV-7: Fenêtre de propriétés du mode d'application

### b- Propriétés physique

En mode sous-domaine vous spécifiez les propriétés des matériaux. Les propriétés du matériau sont choisies dans la bibliothèque de matériaux ou introduites explicitement en entrant la valeur ou l'expression correspondant. Cet exemple utilise la bibliothèque de matériaux. Les propriétés du matériau obtenues à partir de la bibliothèque sont :

- Acier structural
- Module d'Young :  $E=2.10^{11}$  [Pa]
- Coefficient de Poisson :  $\nu=0.33$
- Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha=12.3.10^{-6}$ [1/K]
- Densité :  $\rho=7850$  [Kg /m<sup>3</sup>]
- Epaisseur :  $4.10^{-3}$

Dans cette fenêtre, on ajoute le matériau à la géométrie, une entrée que vous pouvez voir dans le cadre de la liste des matériaux (figure IV-8).

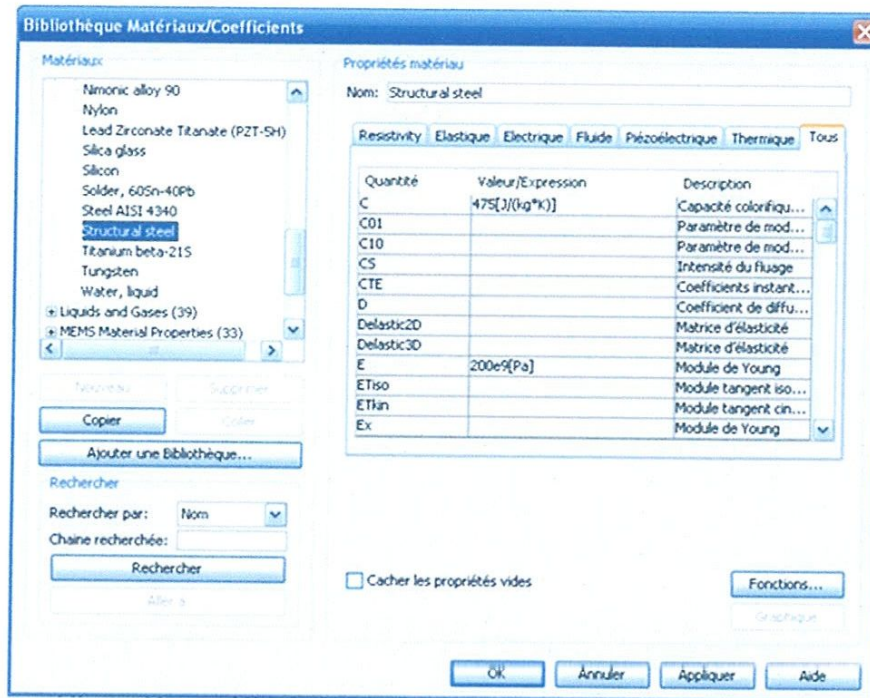


Figure IV-8: Fenêtre de bibliothèque matériaux/coefficients

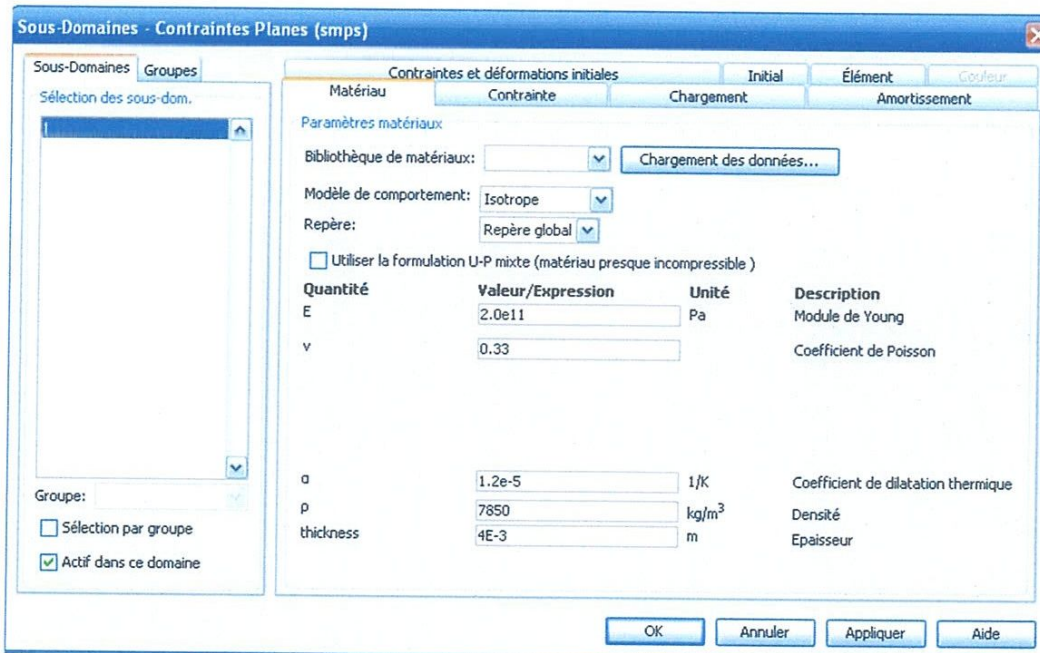


Figure IV-9: Propriétés du matériau du sous domaine

### c- Conditions aux limites

La force statique totale appliquée sur le bord 12 à l'extrémité inférieure droite est de 900 N. Il en résulte une force de 60 kN/m répartie le long du bord, qui est de 15 mm de long. Le bord gauche est fixé dans les deux sens.

➤ **La contrainte :**

La limite 1 (Coté gauche) doit être fixée (encastéré)

➤ **Le chargement :**

La limite 12 libre et la charge appliquée est de 900 N sur la partie interne du coté droit de la pièce.

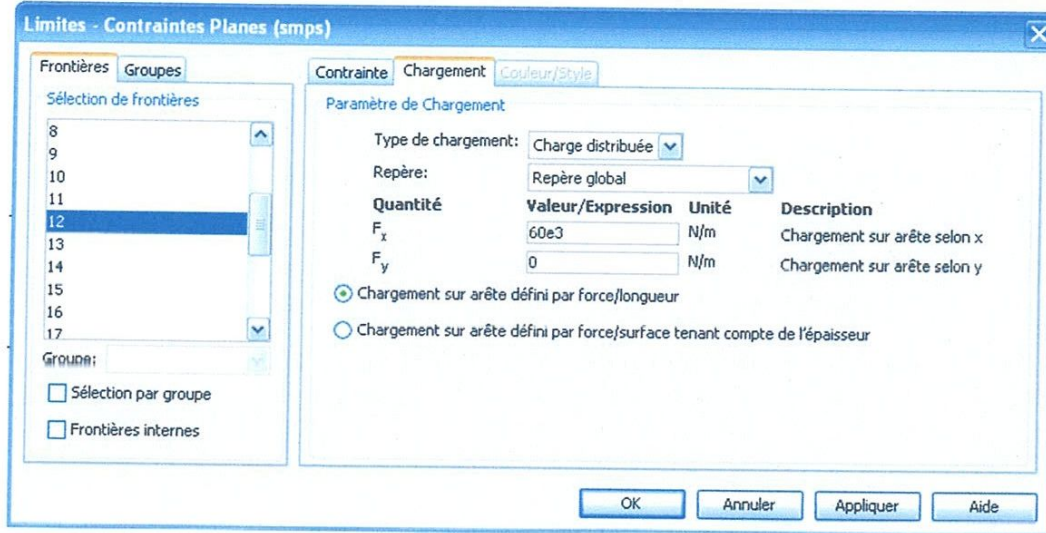


Figure IV-10: Fenêtre de limite (le chargement)

#### IV-5-1-4: Génération du maillage

La boîte de dialogue des paramètres du maillage libre, qui se trouve dans le menu Maillage, donne accès à un certain nombre de paramètres qui contrôlent la densité et la taille de la maille.

- ✓ Utilisez les paramètres de maillage par défaut.
- ✓ Sélectionnez Paramètres de maillage libre à partir du menu Maillage.

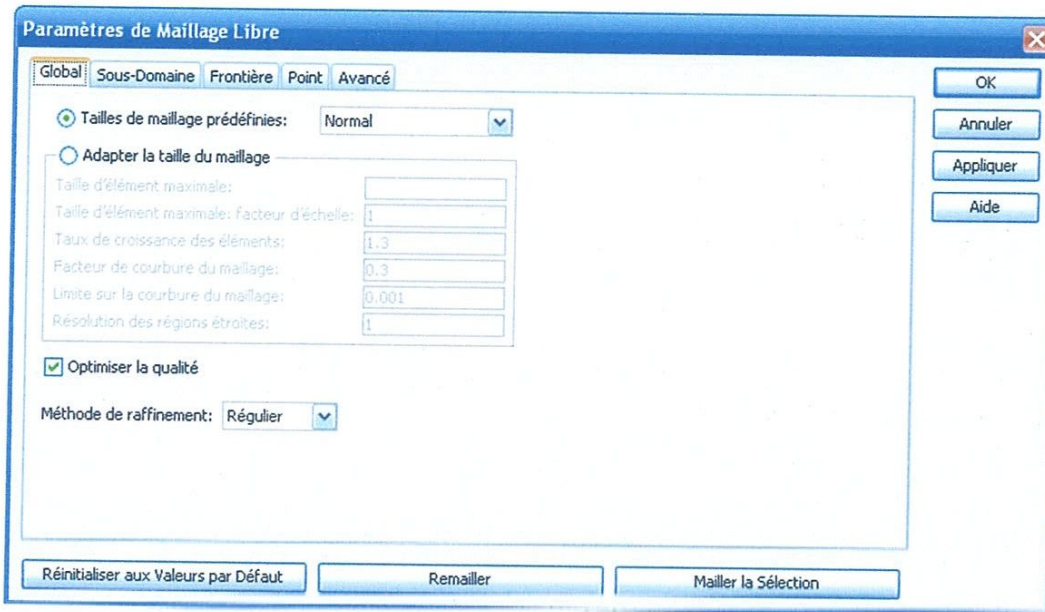


Figure IV-11: Fenêtre des paramètres de maillage.

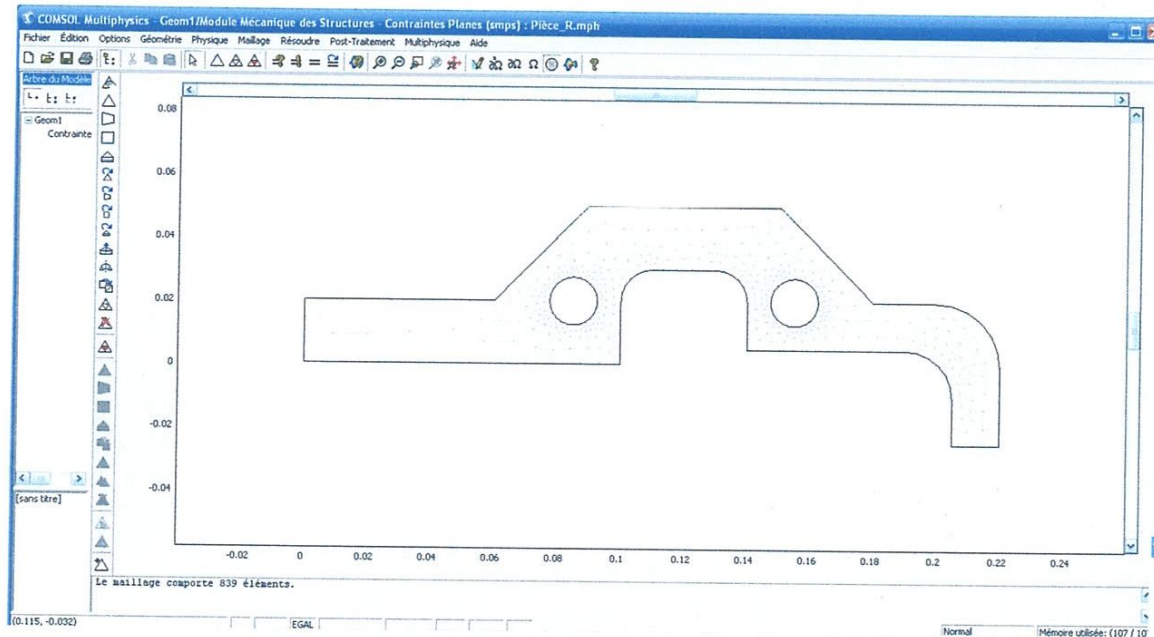


Figure IV-12: maillage de la géométrie

#### IV-5-1-5: Calcul de la Solution

On peut choisir le type de solveur à utiliser grâce à l'option de sélection automatique du solveur dans la boîte de dialogue des paramètres du solveur. Cette option est activée par défaut, il n'est pas nécessaire de modifier les paramètres du solveur parce le solveur stationnaire est celui associé au type d'analyse statique.

Pour calculer la solution, soit cliquer sur le bouton Résoudre le problème (=) sur la barre d'outils principale ou sélectionnez résoudre le problème à partir du menu résoudre.

#### IV-5-1-6: Post-traitement et visualisation

En mode de post-traitement, vous pouvez, par exemple, ajouter des types de représentation supplémentaires et définir des paramètres pour ces dernières. Les services de post-traitement peuvent visualiser n'importe quelle expression contenant, par exemple, les variables de solutions, leurs dérivés, et l'espace des coordonnées. Beaucoup d'expressions fréquemment utilisés sont prédéfinis comme variables de post-traitement, et ils sont disponibles directement à partir de listes dans la boîte de dialogue Paramètres de la visualisation.

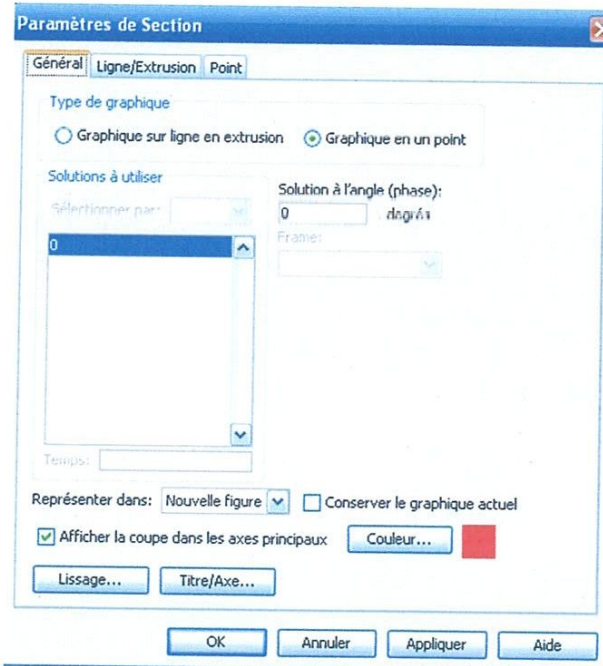


Figure IV-13: Fenêtre de paramètres de section

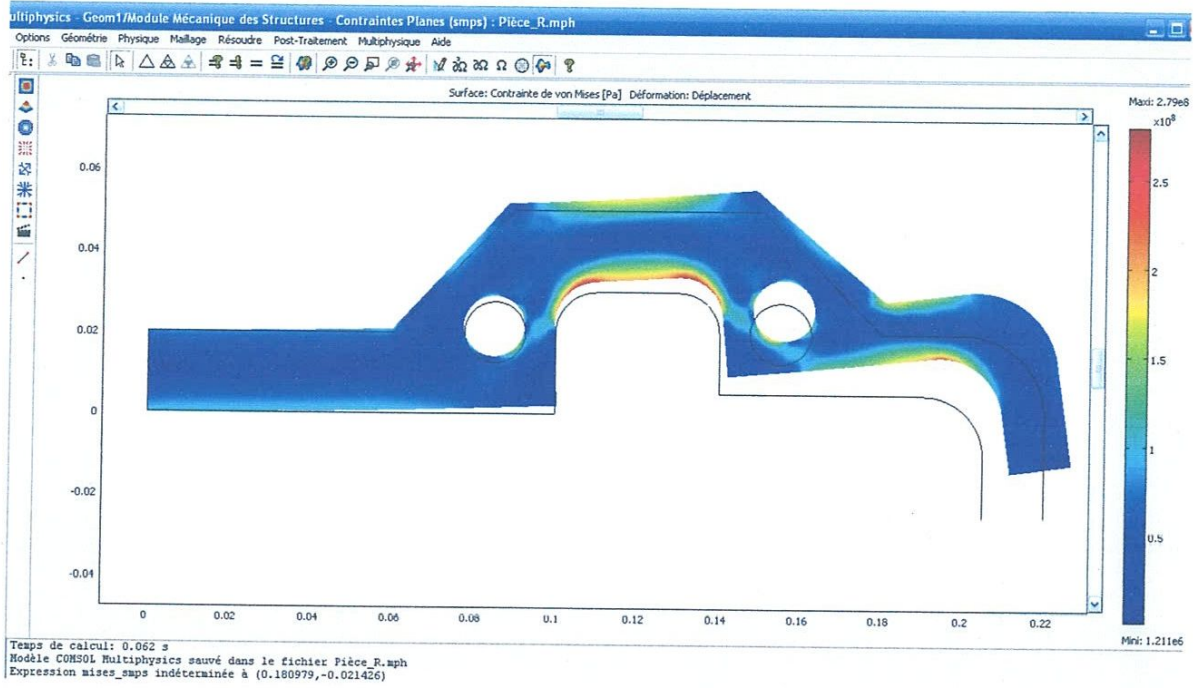


Figure IV-14: Contraintes de Von Mises avec la déformée de la pièce.

#### IV-5-1-7: Résultats et discussions

##### a- Contrainte Von Mises

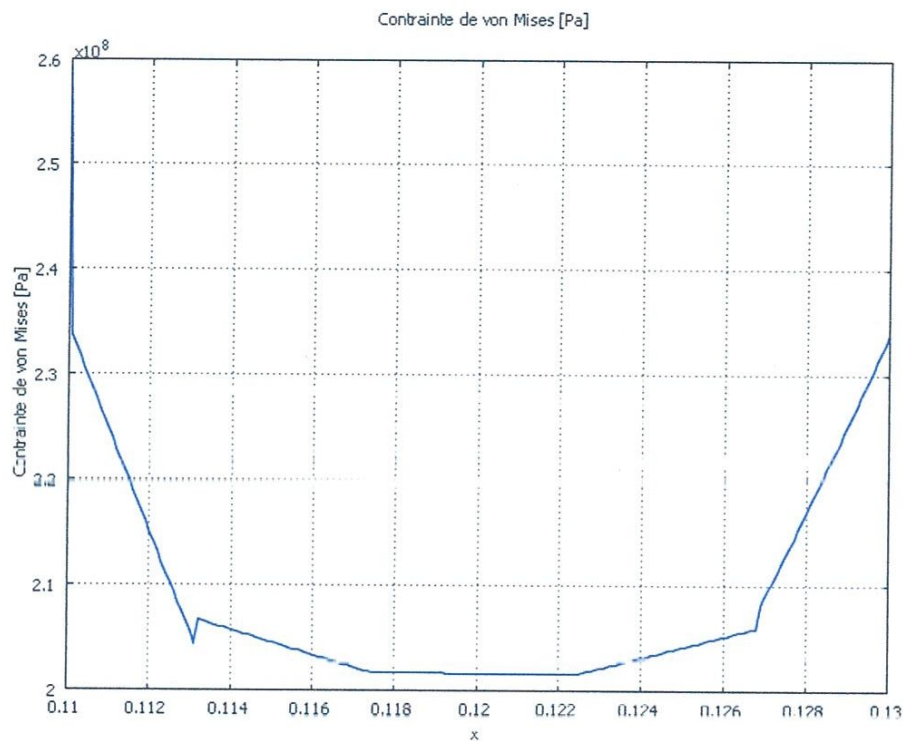
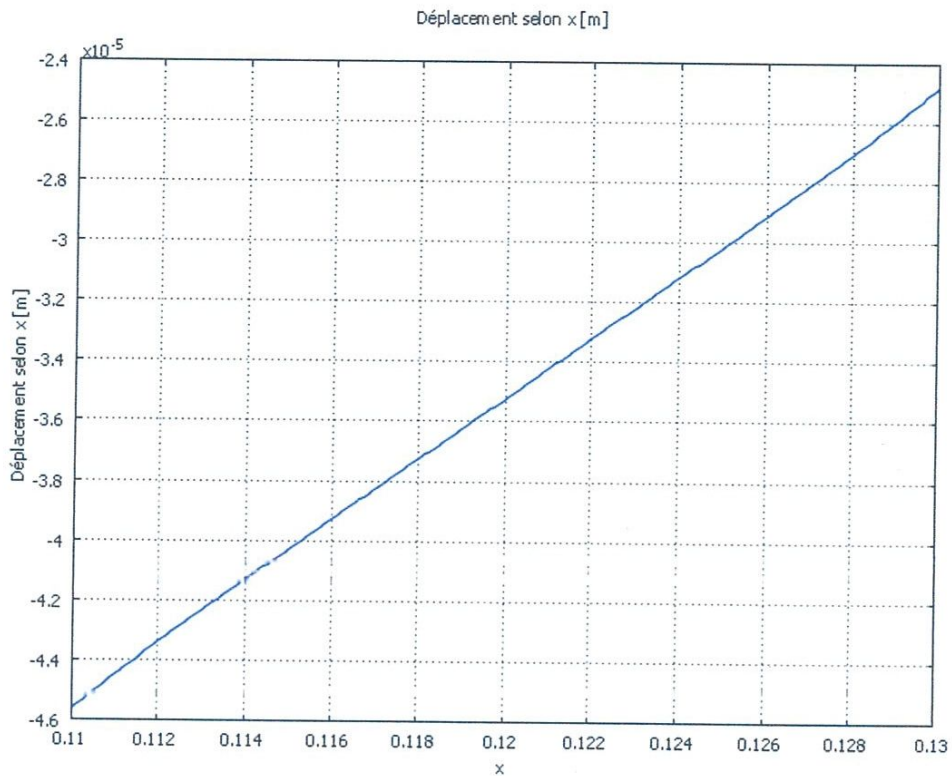


Figure IV-15: La figure montre la contrainte Von Mises selon x

La figure suivante montre la contrainte de Von Mises [Pa] sur une partie spécifique de la pièce à les coordonnées de cette partie (0.11, 0.03) à (0.13, 0.03) où il est arrivé de la contrainte Von Mises jusque à la valeur maximale  $2.55 \times 10^8$  [m] au point (0.11, 0.03) et au même moment diminution la contrainte Von Mises à la valeur  $2.34 \times 10^8$  et a continué de diminuer à la valeur de  $2.05 \times 10^8$  au point (0.113, 0.03), pour régler la valeur de  $2.02 \times 10^8$  dans la zone entre le point (0.117, 0.03) au point (0.123, 0.03), puis augmenter progressivement jusqu'à la valeur de  $2.34 \times 10^8$  au point (0.13, 0.03).

#### IV-5-1-7-2: Déplacement selon x



**Figure 17:** montre le déplacement selon x [m]

La figure suivante montre le déplacement selon x [m] sur une partie spécifique de la pièce à les coordonnées de cette partie (0.11, 0.03) à (0.13, 0.03) où il est arrivé de la déformation jusque à la valeur minimale  $-4.6 \times 10^{-5}$  [m] au point (0.11, 0.03) et augmente progressivement jusqu'à la valeur maximale  $-2.5 \times 10^{-5}$  [m] au point (0.13, 0.03) de la direction de l'axe x.



## IV-6: Analyse Paramétrique

### IV-6-1: Description

Il s'agit de résoudre le problème statique en fonction d'un paramètre. Il est possible de définir librement le nom du paramètre et ce qu'il est peut affecter; il peut être une propriété du matériau, un paramètre de charge, ou quelque chose d'autre. Le but de cette partie d'étude est de trouver la réponse statique en fonction de la direction de la force. La force est appliquée au même bord que dans l'analyse statique.

#### ➤ Définition du modèle

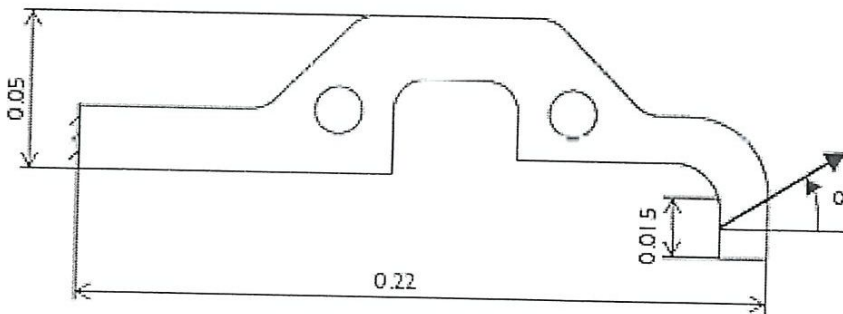


Figure IV-18: Géométrie avec chargement

#### ➤ La charge

Ce modèle utilise une charge statique sur le même bord et avec la même amplitude maximale que dans le modèle statique. La force est libre d'agir dans n'importe quelle direction (en fonction de alpha ( $\alpha$ )).

#### ➤ Modèle Navigateur

L'analyse paramétrique est choisie à partir des paramètres du solveur.

### IV-6-2: Modélisation géométrique

Même chose que dans l'analyse statique.

### IV-6-3: Réglages physique

#### IV-6-3-1: Propriétés du mode d'application

Procéder au changement du type d'analyse à l'analyse paramétrique.

### IV-6-3-2: Propriétés physique

Les propriétés du matériau sont les mêmes que dans l'analyse statique.

### IV-6-3-3: Conditions aux limites

Ce modèle utilise le même ordre de grandeur que pour l'analyse statique, mais la direction  $\alpha$  est ajoutée en tant que paramètre de variable.

La force est divisée en deux composantes suivant x et y et en fonction du paramètre  $\alpha$  qui varie de 0 à 360:

$$F_x = 60 \cdot 10^3 \cos(\alpha)$$

$$F_y = 60 \cdot 10^3 \sin(\alpha)$$

Définition des conditions aux limites comme suit :

➤ **Contrainte :**

La limite 1 (Coté gauche) doit être fixée (encastré)

➤ **Chargement :**

La limite 12 libre est soumise à une charge appliquée de  $60e^3 * \cos(\alpha * \frac{\pi}{180})$  Nm suivant la direction x et  $60e^3 * \sin(\alpha * \frac{\pi}{180})$  Nm suivant la direction y sur la partie interne du coté droit de la pièce.

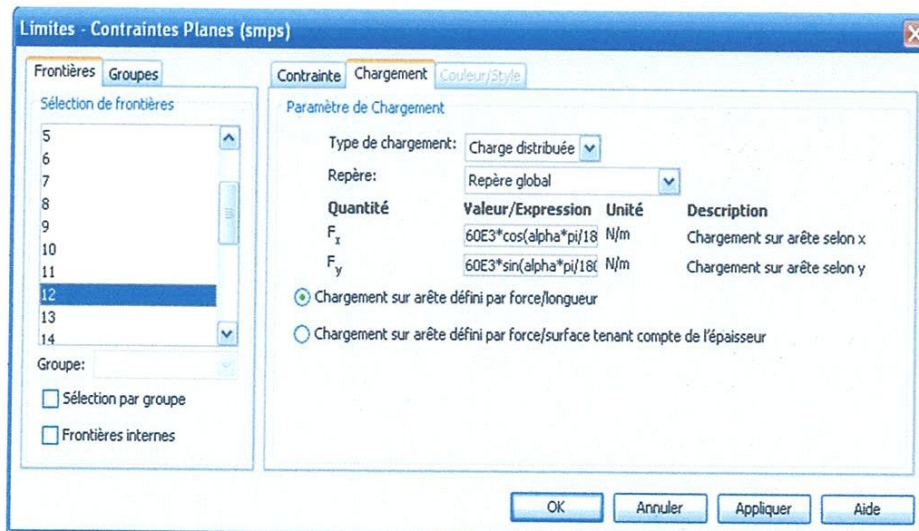


Figure IV-19: Introduction des conditions aux limites (Chargement)

#### IV-6-4: Génération du maillage

Le maillage est procédé de la même manière que dans l'analyse statique.

#### IV-6-5: Calcul de la Solution

Le type d'analyse du solveur à utiliser est détecté automatiquement grâce à l'option du solveur de sélection automatique dans la boîte de dialogue « Paramètres du solveur ». Cette option est activée par défaut, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de modifier les paramètres du solveur. Le solveur paramétrique est celui qui est associé avec le type d'analyse paramétrique.

Dans la boîte de dialogue ci-dessous nous introduisons :

- 1 : Le nom du paramètre à utiliser « alpha »
- 2 : la valeur initiale, le pas et la valeur maximale du paramètre.

Dans notre cas la valeur d'alpha varier de 0 à 360 par pas de 10°. Pour cela nous écrivons la syntaxe suivante : 0:10:360

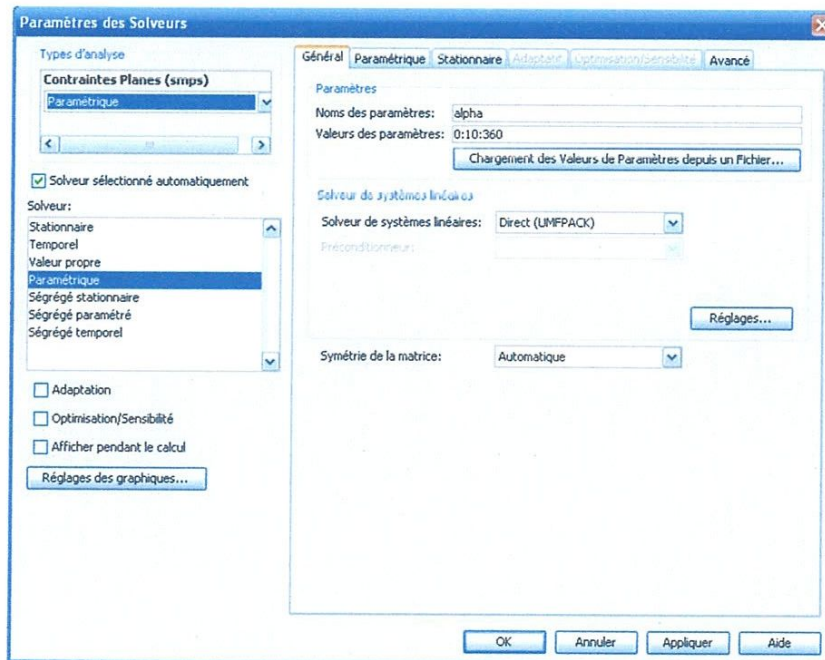


Figure IV-20: Fenêtre des paramètres du solveur

Après le maillage nous exécutons la résolution du problème en cliquons sur le bouton Solve (=)

#### IV-6-6: Post-traitement et visualisation

Pour voir la solution pour toutes les directions de la force (en fonction de alpha), il suffit d'ouvrir la boîte de dialogue Paramètres de graphiques dans le menu principal relatif au post-traitement, puis sélectionnez dans la liste des valeurs de paramètres les résultats voulus. Le tracé par défaut affiche la contrainte de Von Mises pour la dernière direction de l'angle alpha dans la liste qui est 360.

Pour une vue plus quantitative de l'évolution de l'angle de déplacement, tracer le déplacement X à l'angle inférieur gauche comme une fonction de la direction de la force.

#### IV-6-7: Résultats et discussions

##### IV 6 7-1: Le déplacement selon $\alpha$

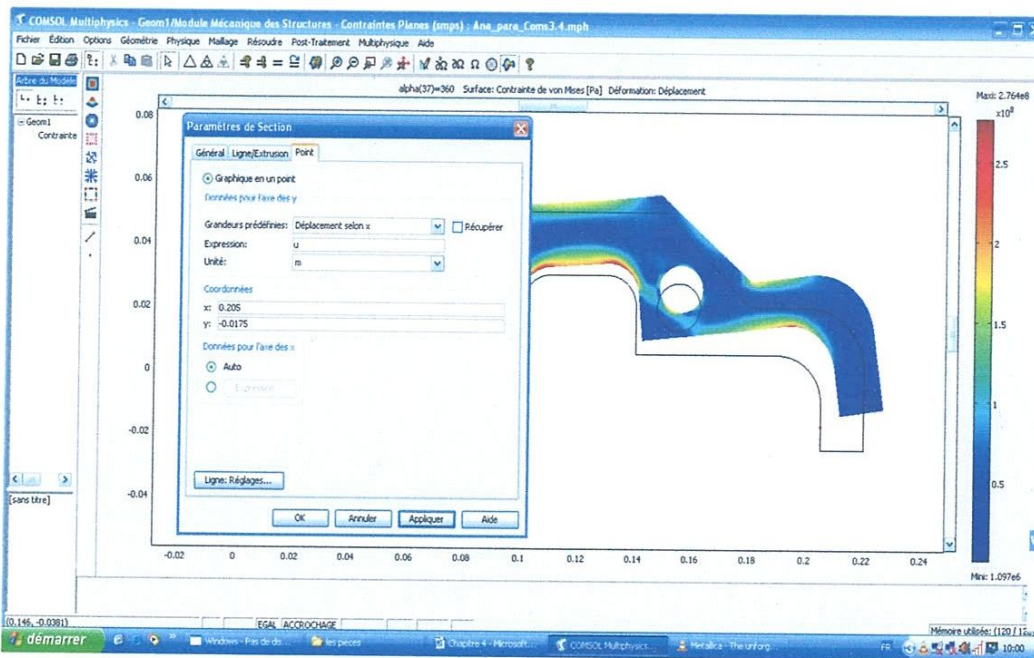


Figure IV-21: Déplacement de la pièce correspondant à  $\alpha=360^\circ$

La figure IV-22 montre clairement que le déplacement suit la même loi que la charge puisque ses valeurs varient sinusoidalement en débutant par une valeur minimale de  $0.7 \times 10^{-3}$  m (seule  $F_x$  qui agit) pour  $\alpha$  égale à 0 pour atteindre une valeur maximale de  $1.5 \times 10^{-3}$  m puis le déplacement diminue progressivement pour atteindre la valeur de  $-1.5 \times 10^{-3}$  m. en suite il remonte jusqu'à la valeur minimale  $0.7 \times 10^{-3}$  m correspondant à  $\alpha 360^\circ$ .

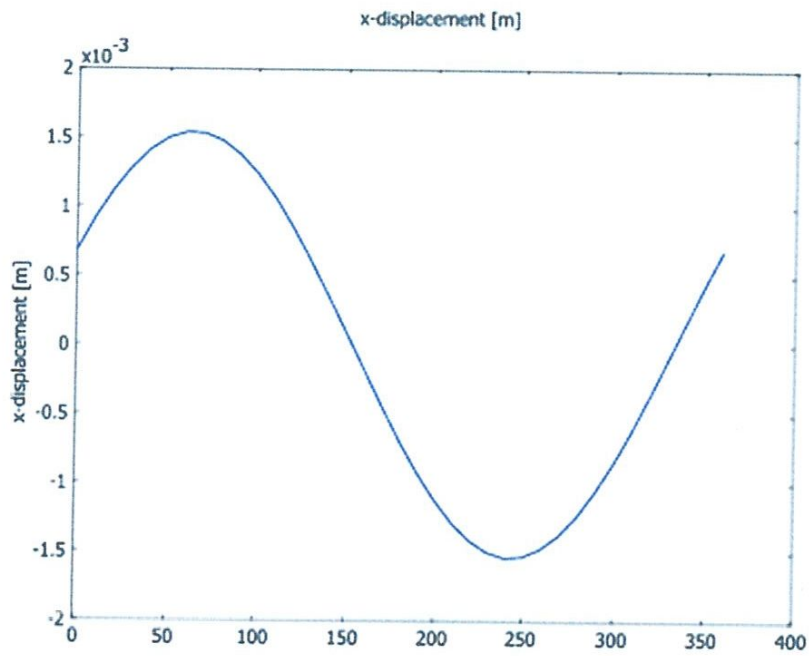


Figure IV-22: Déplacement suivant x en fonction de la valeur ( $\alpha$ )

#### IV-6-7-2: Contrainte Von Mises

➤ La contrainte Von Mises

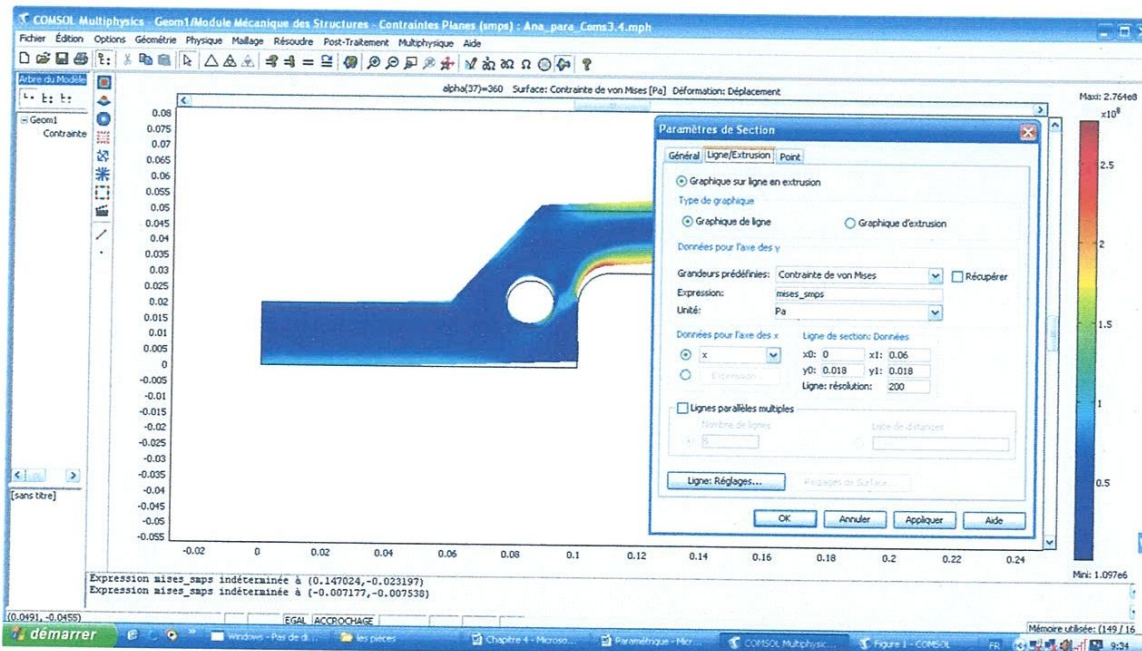
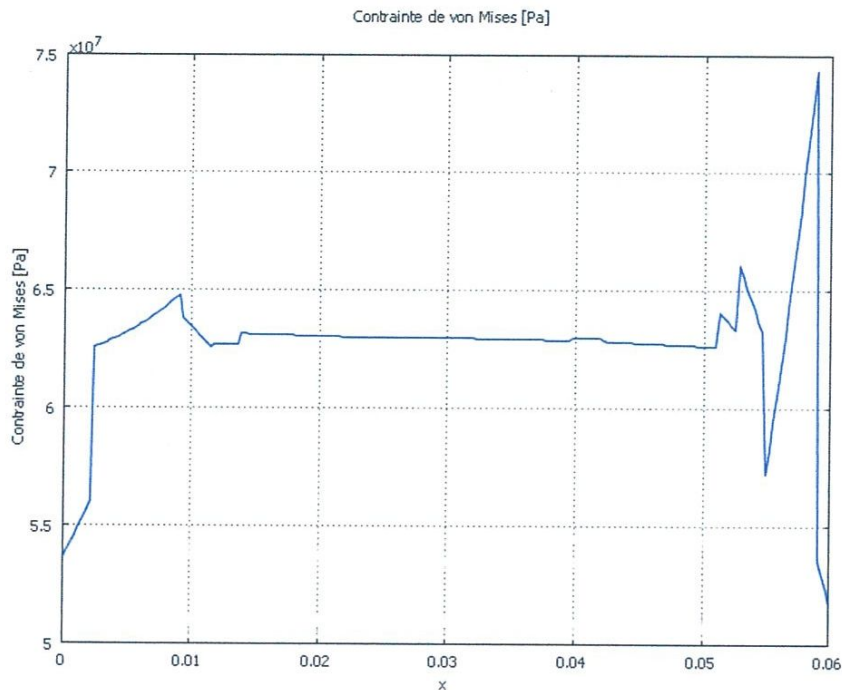


Figure IV-23: Champs de Contrainte Von Mises pour  $\alpha=360^\circ$



**Figure IV-24:** Evolution de la Contrainte Von Mises suivant x ( $\alpha = 360^\circ$ )

Les figures IV-23 et IV-24 montrent respectivement le champ de contrainte de Von Mises ainsi que l'évolution de celle-ci suivant la ligne de section commençant par le point (0,0.002) jusqu'au point (0.06, 0.002) et cela une valeur de  $\alpha$  de  $360^\circ$  (ligne rouge sur la figure IV-23). Ainsi, il est très facile de bien visualiser le gradient de contraintes de Von Mises à travers la figure IV-23 à tout moment, comme il est possible également de montrer l'évolution de cette dernière le long de la pièce pour n'importe quelle valeur de  $\alpha$  dans n'importe quelle position (il suffit tout simplement d'entrer les coordonnées).

Cette simulation nous permet également de visualiser l'évolution de n'importe quel paramètres et ceci en utilisant l'outil vidéo pour l'ensemble des valeurs de  $\alpha$ .

## **IV-7: Analyse des fréquences propres**

### **IV-7-1: Description**

Une analyse de la fréquence propre estime les fréquences propres non amortis et les modes de déformation d'un modèle. Parfois elle nous donne la vibration libre d'une structure. Les fréquences propres  $f$  dans le domaine de la mécanique des structures sont liées aux valeurs propres  $\lambda$  obtenues par les solveurs de Comsol Multiphysics par la relation :  $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ .

Vous pouvez choisir de travailler avec des fréquences propres ou de travailler avec des valeurs propres en fonction de vos préférences. Fréquences propres sont l'option par défaut pour tous les modes d'application dans le module Mécanique des Structures. Le but de l'analyse de la fréquence propre suivante consiste à trouver les six fréquences propres les plus bas et les modes correspondants.

### **IV-7-2: Définition du modèle**

La géométrie, le matériau, les charges et les contraintes sont les mêmes que pour l'analyse statique, voir la description donnée précédemment pour plus de détails.

L'analyse de la fréquence propre est décrite comme si elle était faite après l'analyse statique décrite précédemment, et le mode d'application de contraintes planes est déjà sélectionné.

### **IV-7-3: Modélisation de la géométrie**

Cela a déjà été fait dans l'analyse statique.

### **IV-7-4: Réglage physique**

Ce modèle utilise le même matériau, les charges et les contraintes que l'analyse statique.

Mais dans ce cas il faut remplacer l'analyse statique par l'analyse des fréquences propres

- Changer le type d'analyse à l'analyse de fréquence propre:
- Sélectionnez Propriétés dans le menu Physiques pour ouvrir la boîte de dialogue des propriétés du mode d'application.

La liste de type d'analyse définit quelle est l'analyse à réaliser et quelle est l'équation à résoudre.

- Sélectionnez fréquence propre de la liste de type d'analyse.

### **IV-7-5: Génération de maillage**

Ce modèle utilise le même maillage, donc il n'y a pas de différence par rapport à l'analyse statique.

#### IV-7-6: Calcul de la Solution

Le contrôle de type du solveur à utiliser est réalisé grâce à l'option de sélection automatique du solveur dans la boîte de dialogue des paramètres du solveur. Cette option est activée par défaut, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de modifier les paramètres du solveur. Le solveur de fréquences propres est celui associé à ce type d'analyse. Le nombre de fréquences propres à calculer est contrôlé à partir de la page général. Utilisez les paramètres par défaut pour les six fréquences propres les plus bas.

- Sélectionnez Paramètres dans le menu Résoudre pour ouvrir la boîte de dialogue Paramètres du solveur.

Le solveur valeurs propres est déjà sélectionné par l'option de sélection automatique du solveur. Le nombre de fréquences propres à calculer est contrôlé à partir de la page Général. Utilisez les paramètres par défaut pour résoudre pour les six fréquences propres les plus bas.

- Cliquez sur OK pour fermer la boîte de dialogue Paramètres du solveur.
- Pour calculer la solution, soit cliquer sur le bouton Résoudre le problème (=) sur la barre d'outils principale ou sélectionnez résoudre le problème à partir du menu résoudre.

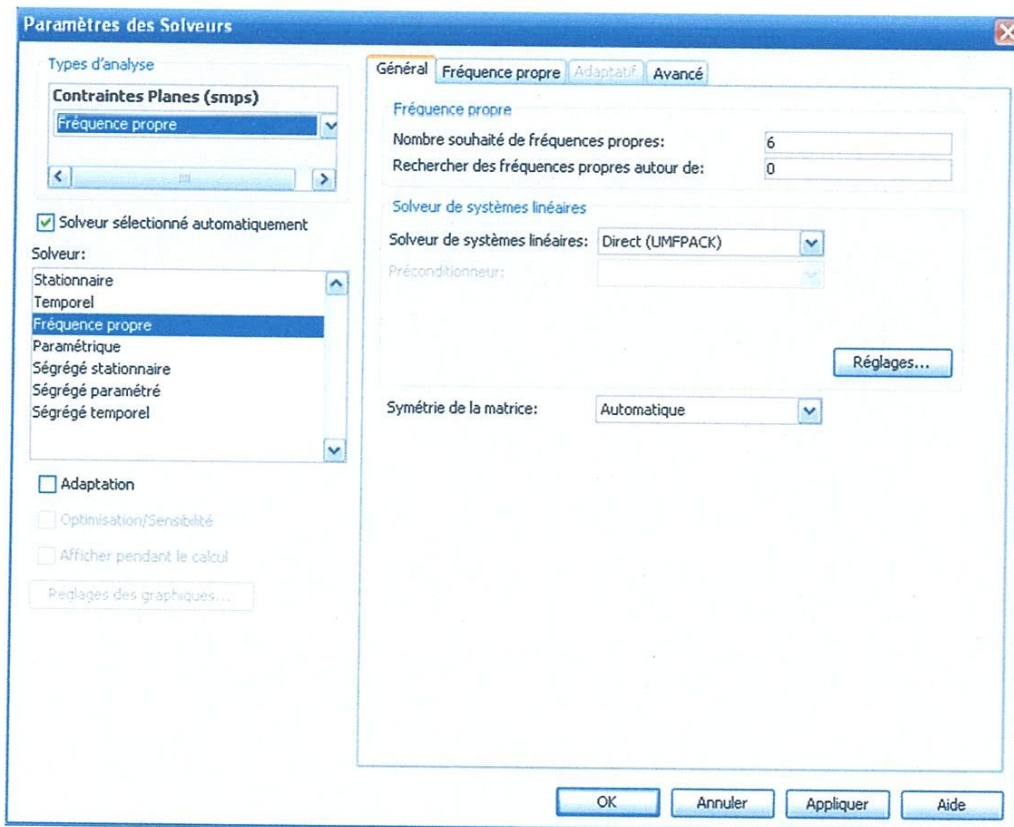


Figure IV-25: Paramètres du solveur de la fréquence propre.



#### IV-7-6: Post-traitement et visualisation

Vous pouvez sélectionner la fréquence propre à utiliser à partir d'une liste sur la page général de la boîte de dialogue qui permet la représentation des paramètres.. La figure qui apparaisse par défaut indique le mode propre correspondant à la plus faible fréquence propre. Les modes propres sont mises à l'échelle (normalisée) de sorte que la taille des déformations doit être comparée seulement à un seul mode propre et non aux différents modes.

- Choisissez Paramètres du tracé dans le menu de post-traitement.
- Sélectionner la case de la déformée sur la page Général.
- Sélectionnez la seconde fréquence propre de la liste des fréquences propres.
- Aller à la page de la surface et sélectionnez déplacement totale de la liste des quantités prédéfinies.
- Cliquez sur OK pour fermer la boîte de dialogue Paramètres de graphique pour observer la forme du mode de la deuxième fréquence propre.

Les six premières fréquences propres sont:

numéro de fréquence propre	fréquence
$f_1$	300.67 Hz
$f_2$	1346.42 Hz
$f_3$	3456.12 Hz
$f_4$	4405.38 Hz
$f_5$	8410.73 Hz
$f_6$	11 kHz

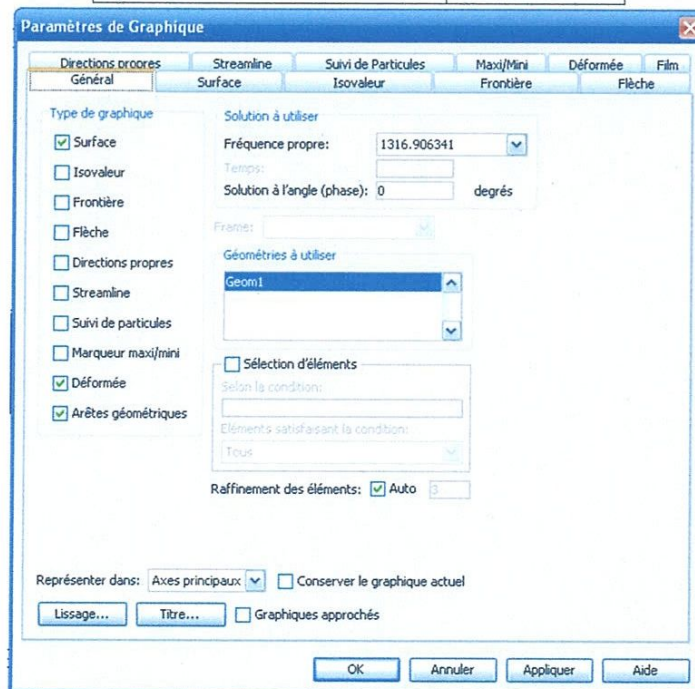


Figure IV-26: Paramètres de graphique de la fréquence propre.

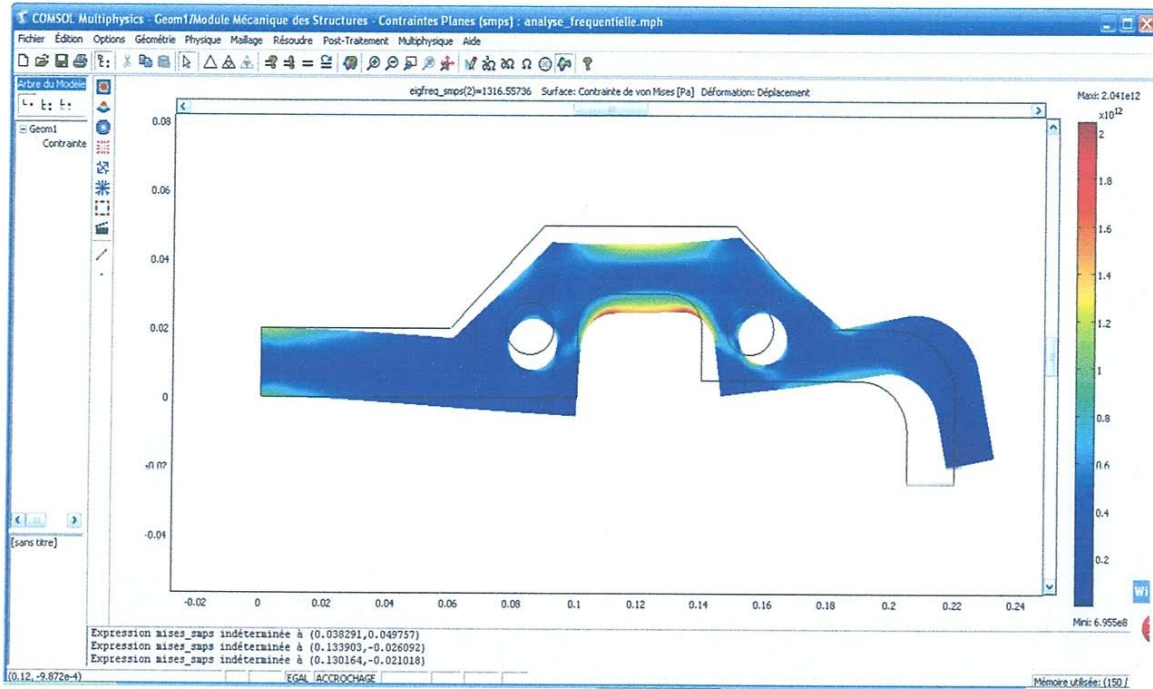


Figure IV-27: Etat de la pièce lorsque la valeur de  $f = 1336$  Hz

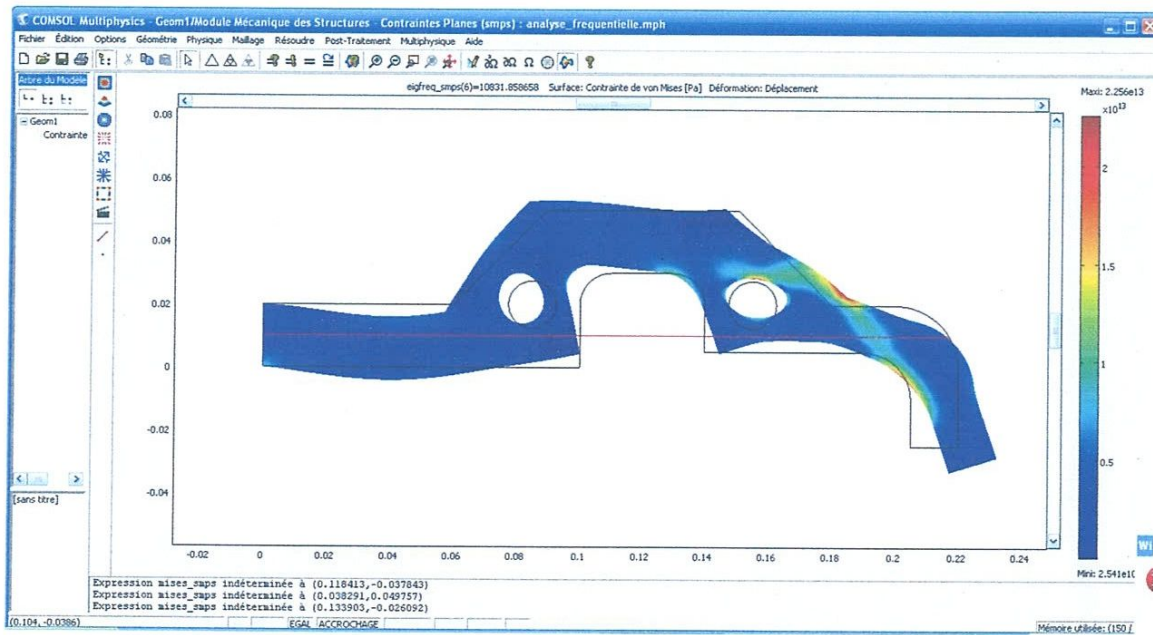


Figure IV-28 Etat de la pièce lorsque la valeur de  $f = 11$  kHz

#### IV-7-7: Résultats et discussions

##### ➤ Déplacement selon x

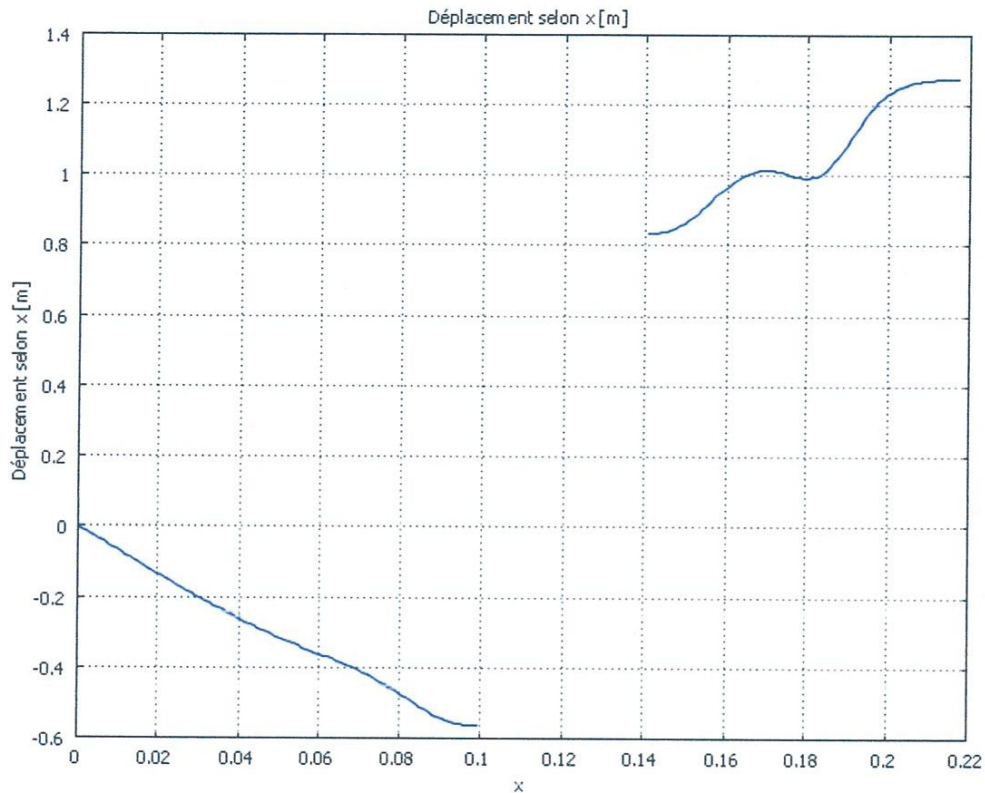


Figure IV-29: Courbe du déplacement selon  $x$  lorsque la valeur de  $f = 11$  KHz

La figure ci dessus montre l'effet de la fréquence propre sur les deux parties de la pièce. Dans la première partie, la valeur du déplacement est égale à 0 au point 0, puis le déplacement diminue progressivement jusqu'à une valeur égale à -0.6 au point 0,1. Le déplacement de la deuxième partie de la pièce sera plus important et prend une valeur égale à 0,82 au point 0.14 puis elle augmente pour atteindre un déplacement égal à 1 dans le champ du point 0.16 à 0,18, puis continuer à augmenter jusqu'à une valeur maximale de 1,3 au point à 0,22.

➤ La contrainte de Von mises

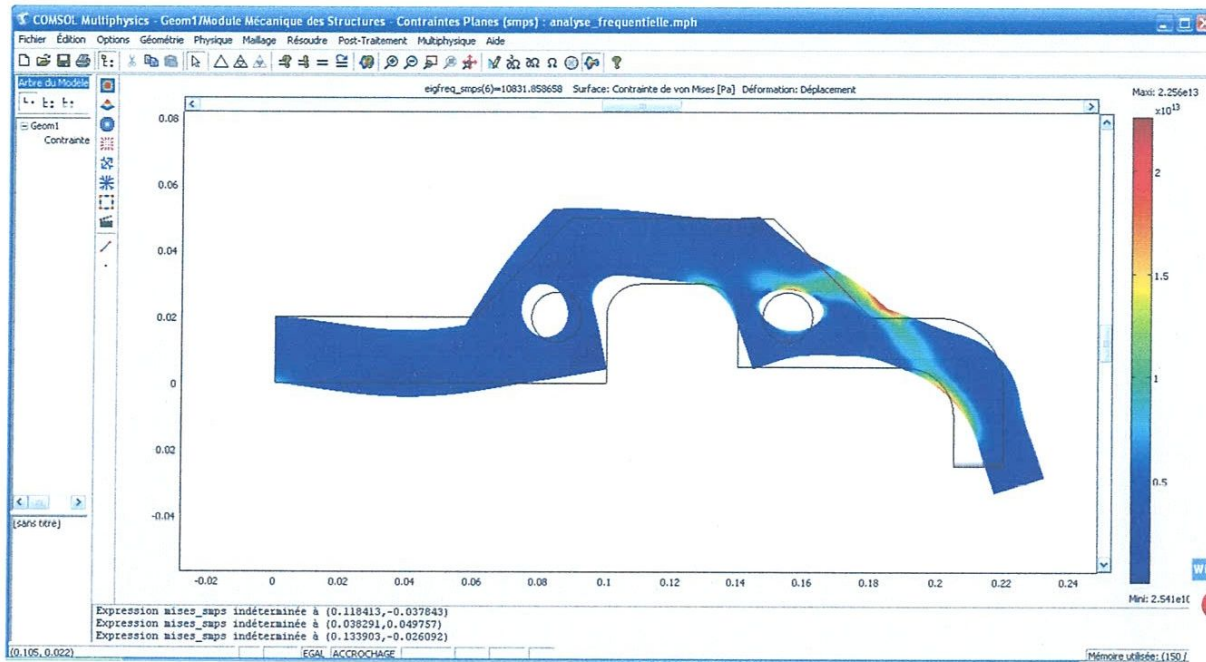


Figure IV-30: Contrainte Von mises (fréquence  $f = 11$  KHz)

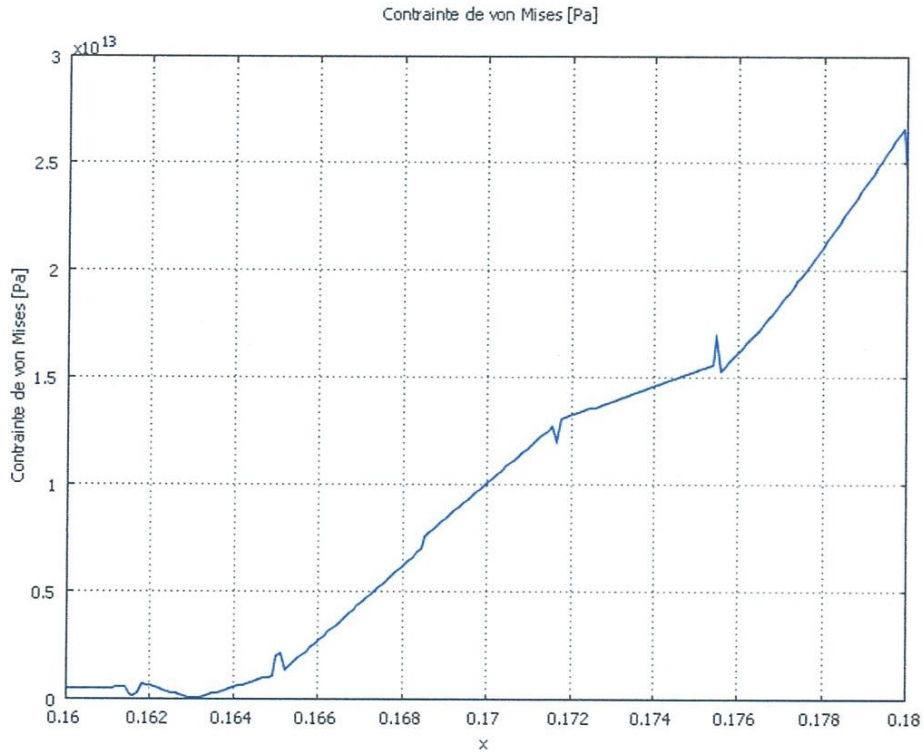


Figure IV-31: courbe montre la contrainte Von mises (fréquence  $f = 11$  KHz)

La figure IV-31 montre l'effet de la contrainte de Von mises sur une partie particulière de la pièce, les coordonnées de cette partie sont (0.16, 0.04) et (0.18, 0.02). la valeur de contrainte est égale à  $0,1 \times 10^{13}$  [Pa] dans la zone située entre les deux points de 0,16 et 0,164, puis cette contrainte augmente progressivement jusqu'à une valeur égale à  $1,3 \times 10^{13}$  [Pa] au point à 0,172 et puis elle continue à augmenter jusqu'à la valeur de  $1,7 \times 10^{13}$  [Pa] au point 0.175, puis a diminué légèrement pour augmenter de nouveau jusqu'à ce quelle atteint une valeur maximal de  $2,7 \times 10^{13}$  [Pa] au point 0,18, puis diminuer légèrement à  $2,5 \times 10^{13}$  au même point.

# **Conclusion**

## **générale**

## Conclusion générale

Les codes de calcul sont des outils puissants au service de l'industrie et de la recherche. Ils sont devenus partie intégrante des méthodes de conception. Il est remarquable de noter de rôle fédérateur que joue cette discipline à travers diversité des sciences et techniques et des acteurs en présence : industriels, exploitants, chercheurs, théoriciens, expérimentateurs. Le calcul scientifique autorise une réelle synergie dirigée vers la résolution d'un problème concert d'intérêt commun et situé à l'intersection de plusieurs points d'intérêt : besoin de résultats de l'industriel, besoin de savoir théoriciens, besoin d'avancer des chercheurs. Le lien qu'il assure entre monde réel et théories est absolument essentiel. Il est à la fois source de progrès technique et économique.

Ce travail avait pour objectif principal de simuler numériquement le comportement d'un élément mécanique soumis à différents types de chargements en utilisant le module de mécanique de la structure de Comsol Multiphysique.

Le module mécanique des structures permet des analyses classiques de contraintes-déformations avec des possibilités multi-physiques étendues. Comprend des modèles de matériaux non-linéaires, de grande déformation, de plasticité et des possibilités de contact. Comporte des modes d'applications spécialisés pour les poutres, les treillis, les coques et les plaques. Dans ce même module on peut également étudier le comportement mécanique des structures épaisses pour lesquelles il n'y a pas de déformation dans la direction or du plan (hypothèses de déformations planes).

L'élément mécanique étudié est assimilé à une plaque mince chargée dans son plan (hypothèses de contraintes planes) pour laquelle on détermine les déplacements, les contraintes et les déformations.

La pièce mécanique sujet de notre modélisation sous Comsol multiphysics a fait l'objet de trois types d'analyses à savoir l'analyse statique, l'analyse paramétrique et en fin l'analyse fréquentielle (fréquence propre).

Les résultats ainsi trouvés par cette modélisation montrent bien la concentration de contraintes sous forme de gradient dans les représentations surfaciques de la contrainte de Von mises par exemple.

La modélisation réalisée nous permet de suivre facilement des différentes propriétés mécaniques qu'on veut déterminer dans n'importe qu'elle position de la structure.

# Références



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Cours: Equations aux Dérivées Partielles Méthodes des Différences Finies *A. Taik*  
[http : laurent.risser.free.fr/THESEcoursM11\\_2006.pdf](http://laurent.risser.free.fr/THESEcoursM11_2006.pdf)
- [2] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition\\_aux\\_limites\\_de\\_Dirichlet](http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_aux_limites_de_Dirichlet)  
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition\\_aux\\_limites\\_de\\_Neumann](http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_aux_limites_de_Neumann)
- [3] Mémoire : vue de l'obtention du diplôme de Magister en Electronique.Technologie des semi-conducteurs et dispositifs photovoltaïques : par Kouras Sid-Ali
- [4] l'École nationale supérieure des mines de Paris Spécialité « Mécanique » présentée et soutenue publiquement par Sophie CARTEIL le 25 novembre 2011
- [5] Introduction aux équations aux dérivées partielles et leurs résolutions numériques  
FN CRES [http :foad-2i.edu.org/index.php?option](http://foad-2i.edu.org/index.php?option)
- [6] Mécaniques des structures Résistance des matériaux : Arnaud Delaplace Fabrice GatuingtFrédéric Ragueneau
- [7] Analyse linéaire des structures formées de poutres.Formulation aux éléments finis
- [8] MECA-H-501 – Composants microtechniques cadcam département
- [9] Résistance Des MatériauxModule Elasticité Plane
- [10] Générative Structural Analysis (GPS et EST)
- [11] Mécanique des Structures Jean-FrancoisRemacle
- [12] A.BENMEDDOUR, « Etude et simulations numériques des contraintes thermomécaniques dans le silicium photovoltaïque », Thèse de doctorat en génie Mécanique, Université, Mentouri, Constantine, 2010.
- [13] A., BENATI, « Etude de comportement mécanique en traction des élastomères chargés »  
Mémoire de master, Université de Guelma 2012
- [14] K. BELLAG, «Calcul du facteur de concentration de contraintes dans les jonctions tubulaires soudées soumises à des chargements combinés », Mémoire de Magister, Université Mentouri Constantine, 2012
- [15] COMSOL MULTIPHYSICS 3.3 (<http://www.comsol.com/>)
- [16] Minicourse on FEMLAB R. Bird, W. Stewart and E. Lightfoot,  
*7UDQVSRUW\_3KHQRPHQD'*, John Wiley & Sons, New York, 1960.