

M/531.632

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

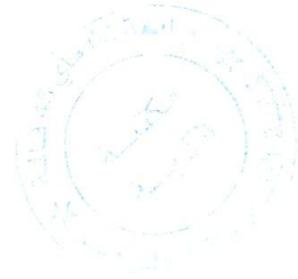


Mémoire de fin d'étude

Présenté par : **ATAMNIA Houssam**

Master

Option : Maintenance Industriel



=====

**ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DE COMPORTEMENT
STATIQUE D'UN PALIER LISSE LUBRIFIE PAR FLUIDE
NON-NEWTONIEN ET PIEZOVISQUEUX**

=====

Sous la Direction de :

Dr. BOUCHERIT Hamid

Année universitaire 2012/2013

REMERCIEMENT

*Nous remercions Dieu de nous avoir accordé des connaissances de la science
et de nous avoir aidé à réaliser ce travail,*

*Au terme de ce modeste travail nous tenons à remercier chaleureusement et
respectivement tous ceux qu'ont contribués de près ou de loin à la réalisation
de ce modeste projet de fin d'étude, à savoir mon encadreur Dr. **BOUCHERIT**
Hamid,*

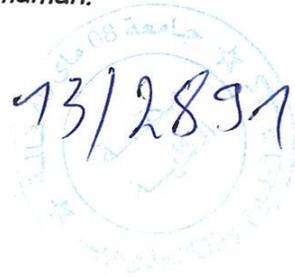
*Je remercie très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu
accepter de faire partie de la commission d'examineur,*

*J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants,
qui m'ont donnée les bases de la science,*

*À toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de
ce modeste travail*

*« At last but not at least », je remercie mes amis généralement et (Farid,
Mahmoud, Taher, Zaki, Bilel, Ala Eddine et Bassem) particulièrement,*

*Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon
affection à ma famille, et en particulier à ma maman.*



SOMMAIRE

- **Introduction Générale**

- **Chapitre un**

Recherche Bibliographie et Problématique

- **Chapitre deux**

Equations de base de la Lubrification hydrodynamique par un Fluide Polaire Piézovisqueux

- **Chapitre trois**

Application : Etude de Comportement Statique d'un Palier lisse lubrifié par Fluide Polaire Piézovisqueux et Barotrope

- **Chapitre quatre**

Etude paramétrique Palier lisse lubrifié par Fluide Polaire Piézovisqueux et Barotrope

- **Conclusion Générale**

- **Annexes**

- **Références bibliographiques**

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

Une partie importante de la recherche est aujourd'hui concentré sur l'économie d'énergie, que ce soit en termes de consommation ou de source d'énergie, l'efficacité est devenue priorité. Il faut donc réduire toujours plus les frottements et diminuer l'usure afin d'améliorer le rendement des machines et minimiser les pertes d'énergie. Ceci nécessite, pour de nombreux mécanismes, de s'intéresser aux problèmes de lubrification et en particulier à la lubrification hydrodynamique.

Au cours des années quarante, l'étude de la lubrification a connu un nouvel essor, soutenu durant les 30 dernières années par l'avènement de moyens de calcul de plus en plus puissants, qui ont permis de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. La lubrification hydrodynamique est la partie la plus importante de la tribologie qui concerne tous les contacts pour lesquels un fluide lubrifiant appelé troisième corps est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif. Les lubrifiants commerciaux de nos jours incorporent une gamme des additifs comprenant des polymères à longues chaînes moléculaires. L'amélioration des performances obtenues des fluides polymériques grâce à l'apport des polymères (additifs) ajoutés aux fluides de base s'accompagne d'une modification du comportement rhéologique des huiles lubrifiantes. La présence des polymères rend le comportement rhéologique des huiles lubrifiantes non newtonien, ainsi leur écoulement ne peut par être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules fluides. Les fluides polymériques sont constitués de longues chaînes macromoléculaires baignées dans un solvant (newtonien), ces chaînes peuvent se lier entre elles, soit temporairement par des forces intermoléculaires, soit de manière permanente par des liaisons chimiques. L'apport de polymères de poids moléculaires élevés dans le lubrifiant modifie la rhéologie des solutions de base newtoniennes, ceci se traduit par l'apparition des effets viscoélastiques, une augmentation de la viscosité et de l'indice de viscosité du lubrifiant. Les fluides polymériques (additivés) sont des fluides viscoélastiques présentant un caractère visqueux dû au solvant et un caractère élastique dû aux polymères (additifs).

Le travail proposé s'intéresse à l'étude théorique et numérique des effets combinés de la présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI), de la variation viscosité-pression (**piézoviscosité**) et de la variation densité-pression (**compressibilité**) sur le comportement statique d'un palier fluide. La présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (polymères) rend le comportement rhéologique du fluide lubrifiant non newtonien (fluide polaire). L'étude de l'écoulement de ce type de fluide est basée sur l'application de la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes qui tient compte de la taille des macromolécules incorporées aux huiles de base d'origine minérale ou synthétique. La loi de Barus et la loi de Dawson et Higginson seront retenus pour tenir compte à la fois des effets de la variation viscosité-pression et de la variation densité-pression dans l'étude paramétrique.

Le mémoire de ce travail proposé sera comportée quatre chapitre :

Dans le premier chapitre, on a présenté une étude bibliographique sur les différentes lois permettant de décrire le comportement rhéologique des huiles lubrifiantes.

Le deuxième chapitre sera réservé à la présentation des équations générales de la lubrification hydrodynamique par fluide polaire piézovisqueux et barotrope (fluide non-newtonien) à partir des lois fondamentales de la mécanique des milieux continue.

Dans le chapitre troisième, on va écrire les différentes expressions qui permettent de calculer les performances statiques d'un palier lisse lubrifié par polaire piézovisqueux et barotrope, tels que la portance hydrodynamique, les forces de frottement, les vitesses moyennes d'écoulement, le débit, etc.

En fin, le quatrième chapitre sera consacré à une étude paramétrique permettant de mettre en évidences l'influence de la longueur des chaines moléculaires des additifs et de la piésoviscosité (variation de la viscosité en fonction de la pression engendrée dans le film) du lubrifiant sur les performances statiques d'un palier lisse de longueur fini.

Chapitre un
Recherche Bibliographie
et Problématique

1. INTRODUCTION

Dans un mécanisme, deux organes en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre sont le siège de forces de frottement. Ce frottement s'accompagne de l'usure des pièces, augmente les efforts qu'elles subissent ce qui oblige à les surdimensionner, dissipe de l'énergie ce qui à pour conséquence d'élever la température des organes et donc d'augmenter l'usure. Le dégagement de la chaleur peut aussi provoquer une amorce de fusion entre les surfaces en contact et aboutir au grippage. La Tribologie est la science qui regroupe tous ces phénomènes. La lubrification est une partie importante de la tribologie. Elle concerne les contacts lubrifiés pour lesquelles un lubrifiant est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif, et de diminuer le frottement et limiter l'usure de contact.

2. TRIBOLOGIE

Le nom **tribologie**, créé en 1966, vient du Grec *Tribein* : frotter, et *logos* : parole, étude ou science ; ainsi la tribologie est l'étude ou la science du frottement. Plus généralement la tribologie regroupe l'étude de la lubrification, du frottement et de l'usure des éléments de machine (frottement et usure se produisent à la surface entre deux solides en contact), Il faut tout d'abord remarquer que le frottement ne présente pas que des aspects négatifs, ainsi la tenue de route d'une automobile dépend directement du frottement entre les pneumatiques et la route. On peut citer aussi le cas des automobiles actuelles pour lesquelles plus du quart de la puissance indiquée du moteur est perdue en frottement dans le moteur et dans la transmission.

La lubrification permet de séparer les surfaces en contact par un film lubrifiant, et donc de diminuer le frottement et limiter l'usure de contact. La figure 1 décrit schématiquement les relations qui existent entre les trois aspects de la tribologie.

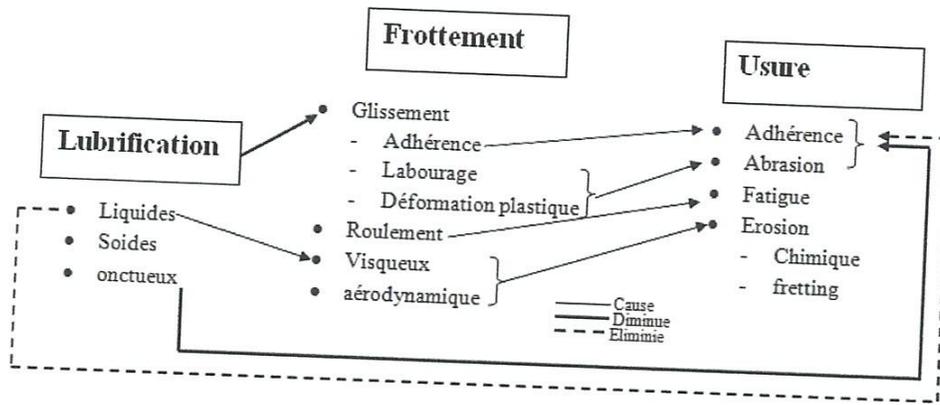


Figure I-1: Schéma décrivant les relations entre le frottement, l'usure et la lubrification

2.1. Frottement

Par définition c'est l'action de deux corps en contact et en mouvement l'un par rapport à l'autre. Les phénomènes de frottement font partis intégrante de notre vie. Ils interviennent dans de nombreuses applications quotidiennes et industrielles telle que la marche, une roue qui roule, un tire-bouchon, un roulement à bille, une chaîne de vélo, une courroie, une vis... Ce frottement peut être utile comme parasite. Il est utile à la marche mais parasite dans le cas des roulements et d'usures de pièces mécaniques.

Le phénomène de frottement n'est pas un phénomène unique. En effet, il existe différentes sortes de frottements :

- Le frottement sec (figure I-2), mis en évidence par Coulomb apparaît lorsque deux surfaces physiquement distinctes sont en contact et peuvent glisser l'une contre l'autre. Ce frottement est dû à l'encastrement des petites irrégularités positives d'une des surfaces dans les irrégularités négatives de l'autre surface.

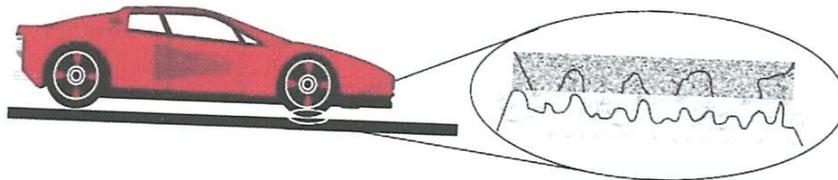


Figure I-2: Frottement secs (vue microscopique de la zone de contact)

- Le frottement visqueux (figure I-3) apparaît lorsqu'un fluide sépare les deux surfaces en contact. Le frottement visqueux est généralement moins important que le

frottement sec. Il est dû à la viscosité du fluide. La viscosité est une notion qui sera abordée plus tard.

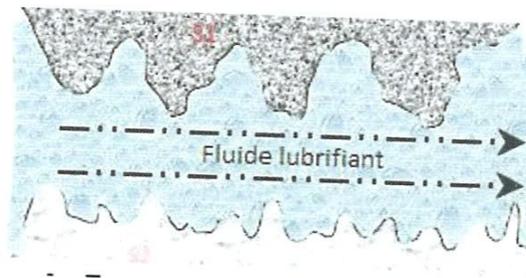


Figure I-3: Frottement visqueux (vue microscopique)

2.2. Usure

L'usure est par définition la perte de matériaux sur la surface de contact entre deux solides en mouvement relatif. Elle est fonction des propriétés du matériau, des conditions ambiantes et d'opération ainsi que de la géométrie des corps en contact. L'usure est un ensemble complexe de phénomènes difficiles à interpréter. L'usure a pour conséquence une émission de débris avec perte de masse, de cote, de forme, le tout s'accompagnant de transformations physiques et chimiques des surfaces.

En ingénierie, on divise l'usure selon les principaux mécanismes qui la génèrent : l'adhérence, l'abrasion, l'érosion, la fatigue et le fretting.

- **Usure par abrasion** : C'est une coupure provoquée par des irrégularités sur la surface (figure I-4). Cette forme de dégradation est généralement combattue, mais aussi utilisée pour l'usinage : des taux d'usure importants sont recherchés et obtenus avec des outils abrasifs en rectification, affûtage, etc. L'abrasion coûte très cher, on lui attribue à peu près le tiers du total des pertes économiques dues à l'usure. Elle concerne de nombreux mécanismes fonctionnant dans des conditions sévères : machines agricoles, matériels de travaux publics, matériel minier. Les surfaces présentent des sillons de profondeur variable, parallèles au déplacement. L'usure est assez constante au cours du temps, le volume des débris croît linéairement avec la charge appliquée et la distance parcourue. La vitesse n'intervient que si l'échauffement modifie les caractéristiques du matériau.

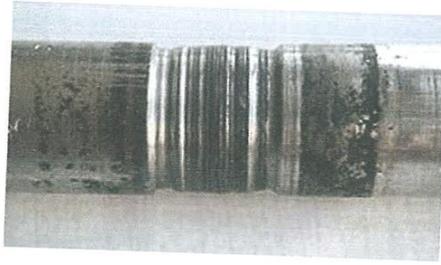


Figure I-4: *Conséquence de l'usure par abrasion*

- **Usure par fatigue** : C'est la rupture du matériau due à des contraintes répétées exercée par des irrégularités sur la surface. L'usure par fatigue est lente et habituellement masquée par l'abrasion ou l'adhésion. Induite par le frottement de roulement ou de roulement avec glissement sous fortes charges répétées, on la rencontre essentiellement dans les engrenages et les roulements dont elle constitue le mode normal de destruction. Une longue phase de vieillissement précède les accidents visibles. Une pièce peut être atteinte irrémédiablement tout en gardant jusqu'au dernier moment une apparence intacte. Il existe cependant un certain nombre de manifestations extérieures qui permettent, dans certains cas, un suivi des pièces en service.

- **Usure par adhérence** : Le matériau d'une pièce est transféré et solidement soudé sur l'autre. Les pièces peuvent être immobilisées par un grippage, dont la forme n'est reconnaissable qu'au début, avant que les surfaces ne soient complètement défigurées. Contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'abrasion, de brusques changements de régime d'usure peuvent résulter de légères modifications des paramètres. Pour des surfaces non lubrifiées, le coefficient de frottement n'est pas multiplié par plus de vingt mais le taux d'usure peut varier d'un facteur un million. Il faut insister sur la solidité des soudures formées par usure adhésive.

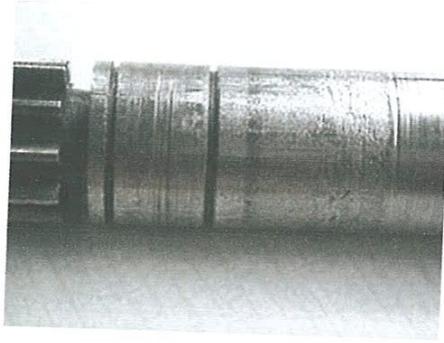


Figure I-5 : *Conséquence de l'usure par adhésion*

2.3. Lubrification

La lubrification est un élément essentiel des sciences technologiques et des applications mécaniques. Elle joue un rôle important partout où des surfaces sont en mouvement relatif les unes par rapport aux autres. Tous les systèmes mécaniques comportent, plus ou moins, des éléments lubrifiés.

Le but de la lubrification est de diminuer les frottements, en réduisant l'usure et en améliorant le rendement (c'est-à-dire que l'on cherche plus de puissance et moins de consommation). C'est la fonction la plus évidente de l'huile. Il résulte de tout ce qui précède concernant les lois du frottement sec et les inconvénients du frottement entre les corps mobiles tel que l'usure ou l'échauffement, qu'il s'avère très nécessaire d'interposer une couche fluide entre les surfaces frottantes permettant de diminuer considérablement la résistance au glissement, donc de protéger contre l'usure adhésive les pièces en contact (figure I-6).

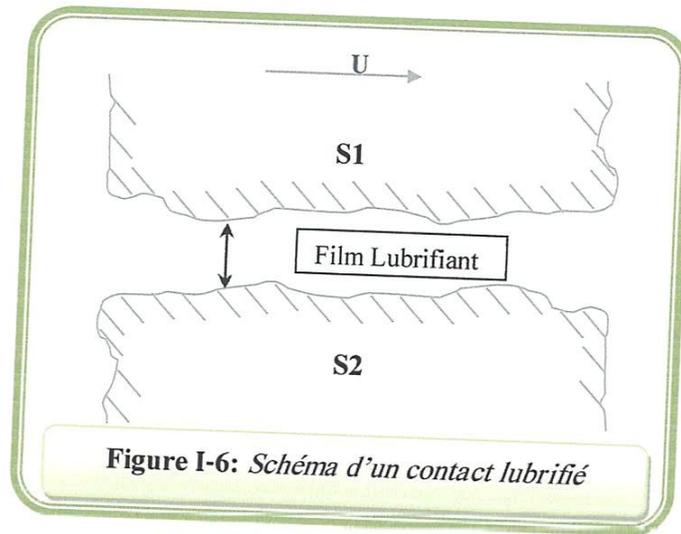


Figure I-6: Schéma d'un contact lubrifié

2.3 1 Les régimes de lubrification

Les différents régimes de lubrification ont été présents pour la première fois par Richard Stribek en 1902 qui a mesuré l'évolution du coefficient de frottement en fonction des paramètres contrôlant la lubrification et les épaisseurs de film lubrifiant : la charge appliquée (qui définit la pression de contact), la vitesse de glissement et la viscosité du lubrifiant. Dans une représentation logarithmique, cette courbe se divise en trois zones distinctes qui révèlent trois principaux régimes de lubrification, caractérisés par l'épaisseur relative du film de lubrifiant par rapport à la rugosité des surfaces : régime mixte (onctueux), régime limite (sec) et régime hydrodynamique ou élastohydrodynamique.

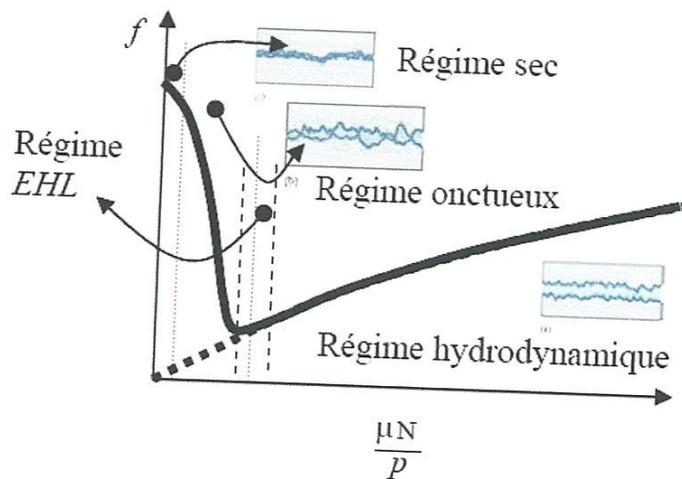


Figure I-7: Courbe de Stribeck

Avec : μ est la viscosité du film lubrifiant, N est la vitesse rotation ou déplacement de l'arbre, P est le rapport de la charge appliquée sur le palier rapportée à la surface projet,

3. Lubrifiants

Les lubrifiants sont des matériaux qui sont toujours présents dans les contacts entre deux solides, ce sont soit des solides, soit semi-solides, soit des liquides, ou des gaz. Par leurs écoulements, ils contrôlent le frottement, les usures et les contacts entre les deux solides où ils sont interposés, opposant une faible résistance au cisaillement.

3.1. Fonctions essentielles des lubrifiants

- Réduire les pertes d'énergie mécanique des machines dues au frottement direct des organes, en substituant le frottement direct des organes par le frottement interne plus faible des lubrifiants interposés
- Réduire l'usure des organes frottant en les séparant totalement par un film lubrifiant partout où cela est possible, et en interposant dans les zones de contact inévitable, un film d'un matériau, dont la résistance au cisaillement est plus faible que celle des corps constituant les surfaces frottant.
- Protéger les organes frottant contre la corrosion, par exemple :
 - Lutte contre la rouille lors de l'arrêt des machines interposées dans une atmosphère humide (turbine à vapeur, matériels de chantier,...) ;
 - Lutte contre les contaminants acides provenant de la combustion des fuels riches en soufre dans les moteurs Diesel

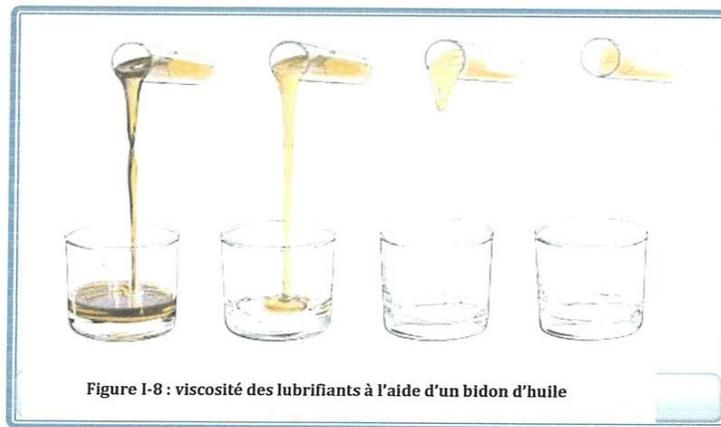
Ce sont généralement des produits d'addition qui jouent ce rôle dans les lubrifiants: Sulfonates de métaux alcalino-terreux (calcium, baryum) composés phénoliques à réserve alcaline oléo soluble, etc.

- Evacuer la chaleur, par exemple :
 - Dans les moteurs thermiques, l'huile peut enlever jusqu'à 4% de la chaleur produite par la combustion ;
 - Dans la coupe des métaux, le rôle du refroidissement de l'outil peut devenir primordial pour le lubrifiant qui pourra être une émulsion d'huile dans l'eau (l'eau possède une capacité thermique quintuple de celle de l'huile minérale).

capacité de charge et l'épaisseur du film d'huile. La viscosité est véritablement une mesure de l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification par film complet sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température.

3.2.5. La viscosité

La viscosité est la propriété la plus importante du lubrifiant. Selon la norme NFT60-100 de novembre 1959, " la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'opposent ses molécules a une force tendant a les déplacer par glissement dans son sein". Ainsi, la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à tout glissement interne de ses molécules les unes sur les autres. Autrefois, la viscosité s'appelait coefficient de frottement interne.



Pour visualiser le cisaillement effectué dans un film fluide, il faut imaginer que le film se compose de plusieurs couches (pellicules) semblables à une plate-forme de cartes. La couche liquide en contact avec la plaque mobile s'accroche à sa surface et toutes les deux se déplacent à la même vitesse U . De même, la couche liquide en contact avec la deuxième surface fixe est stationnaire. Entre ces deux surfaces les différentes couches dans l'intervalle se déplacent à des vitesses directement proportionnelles à leur distance de la surface fixe. Par exemple, à une distance y de la surface fixe la vitesse de la couche de fluide est u , et devient $u + du$ à la distance $y + dy$.

Dans le système **C.G.S** (*Ancien système d'unités dont les unités fondamentales sont le centimètre, le gramme, la seconde*) l'unité de viscosité dynamique est le poise (**Po**). Ces unités étant généralement trop grandes pour les fluides couramment employés tels que les huiles lubrifiantes, on utilise souvent le milli Pascal-seconde (**mPa.s**) ou le centi-poise (**cPo**) qui correspond sensiblement à la viscosité de l'eau à 20°C. L'unité de viscosité cinématique dans le système **S.I**, le tableau I-1 résume les données relatives aux unités de viscosité.

Tableau I-1: Unités de viscosité

Viscosité	Dimension	C.G.S	S.I	Correspondance
μ (dynamique)	$M L^{-1} T^{-1}$	Poise (Po) = g/cm.s	Pascal-seconde Pa.s = kg/m.s ou Poiseuille	1Po = 10 ² mPa.S
ν (cinématique)	$L^2 T^{-1}$	Stokes (St) = cm ² /s	M ² /s	1cSt = 1mm ² /s

4. LOIS RHEOLOGIQUES DES FLUIDES LUBRIFIANTS

Pour identifier le comportement du fluide et le mouvement des éléments d'un fluide les uns par rapport aux autres, on se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus qui exprime la loi de comportement, c'est à dire la relation entre les champs de contraintes appliquées et de déformations sous forme tensorielle. De nombreuses lois de comportement donnant la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement ont été proposées pour décrire les comportements rhéologiques couramment observés expérimentalement.

4.1. Fluide newtonien

Les modèles rhéologiques donnent les relations entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement dans le fluide. Lorsque le fluide est dit newtonien, la relation est linéaire. Dans le cas contraire, le fluide est dit non newtonien. Le comportement le

plus simple est obtenu pour les fluides newtoniens, donner par la relation suivante [1]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu_0 D_{ij} \quad (I-3)$$

Dans cette expression :

δ_{ij} : Symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

D_{ij} : Tenseur des taux de déformation, $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

x_i, t : Composantes d'espace et du temps

u_i : Composante de la vitesse d'écoulement

μ_0 : Coefficient de Navier ou viscosité dynamique

p : Pression

σ_{ij} : Tenseur des contraintes symétrique ($\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$)

τ_{ij} : Contrainte tangentielle visqueuse ou contrainte de cisaillement.

1.3. *Fluide non newtoniens*

Depuis longtemps les fluides non-newtoniens tels que les graisses et l'huile lourde, sont utilisés comme lubrifiant dans un nombre considérable de systèmes mécaniques. Pour la plupart des applications, ces fluides jouent un rôle dans la création du film supportant la charge dans des contacts comme les roulements, les engrenages. Les fluides non-newtoniens comprennent une très large gamme de produits de différents types, et leur développement technologique s'accompagne de recherche importante dans le domaine chimique afin d'améliorer les caractéristiques tribologiques des lubrifiants pour des conditions réelles de fonctionnement de plus en plus sévères. L'utilisation très répandue de ces produits nécessite des études sur leurs lois de comportement rhéologique dans ces conditions. De nombreux travaux, tant expérimentaux que théoriques, montrent la diversité et la complexité de ces lois pour les fluides non-newtoniens. Les lois de comportement des fluides non-newtoniens tels que les graisses sont caractérisées par la composition multi phase du milieu à savoir une phase liquide et une phase solide. Chacune des phases fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité, plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif,... etc. La prise en

compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non-linéaires des fluides non-newtoniens.

4.2.1. Fluides visqueux non-linéaires

De nombreux travaux expérimentaux, dont les plus anciens remontent à 1925, on montre que même pour les fluides monophasiques, par exemple l'huile lourde ou l'huile contenant des additifs, le comportement rhéologique n'était pas linéaire. C'est pourquoi, des études approfondies sur les fluides visqueux ont été réalisées dans le but de donner plus de renseignements sur leur comportement. La première loi visqueuse non-linéaire, qui a été proposée par Oswald en 1925, est la loi en puissance suivante [2]:

$$\tau = \mu(\dot{\gamma})^n \quad (I-4)$$

L'exposant n est très significatif du comportement de ce modèle. L'écoulement devient visqueux linéaire ou newtonien pour une valeur de n égale à 1. Toute valeur de n autre que 1 signifie un comportement visqueux non-linéaire.

Le fluide est dit rhé-fluidifiant pour des valeurs de n inférieures à un ($n < 1$) et rhé-épaississant pour des valeurs de n supérieures à un ($n > 1$).

Quelques autres modèles de fluides visqueux non-linéaires sont formulés comme suit:

- Modèle de Prandtl :

$$\tau = A \sin^{-1} \left(\frac{\dot{\gamma}}{B} \right) \quad (I-5)$$

- Modèle de Power-Fyring :

$$\tau = A \dot{\gamma} + B \sinh^{-1} (D \dot{\gamma}) \quad (I-6)$$

-Modèle de Williamson:

$$\tau = \left(\frac{A}{B + \dot{\gamma}} + \mu_{\infty} \right) \dot{\gamma} \quad (I-7)$$

-Modèle de Reiner-Philippoff :

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau(1 + A\tau^2)}{1 + BA\tau^2} \quad (I-8)$$

Où A , B et D sont des constantes caractéristiques des différents modèles. La quantité μ_{∞} correspond à la viscosité prise aux vitesses de déformation infinies.

Il existe d'autres modèles plus sophistiqués que la loi de puissance pour décrire le comportement de la viscosité en fonction du cisaillement [3,4], pour prendre en

compte ces plateaux newtoniens de viscosité à cisaillements nul et infini. Par exemple, le modèle de Carreau-Yassuda, de Cross ou d'Ellis tiennent compte des plateaux de la viscosité à cisaillements nul et infini [5] :

- Modèle de Carreau-Yassuda :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = (1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^b)^{(n-1)/b} \quad (I-9)$$

- Modèle de Cross :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \frac{1}{1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^n} \quad (I-10)$$

- Modèle d'Ellis :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \frac{1}{1 + (\lambda_1 \sigma)^n} \quad (I-11)$$

Ou α , λ_2 et n sont des constantes, λ_1 est un temps caractéristique de relaxation, σ est la contrainte, μ_0 et μ_{∞} sont respectivement la viscosité à cisaillement nul et infini.

4.2.2. Fluides viscoélastiques

Par des expériences avec des contacts très chargés et à faible glissement relatif des surfaces, plusieurs auteurs ont montré que la viscosité apparente de quelques produits lubrifiants est une fonction de la vitesse d'entraînement. Ce phénomène sous-entend un comportement qui dépend d'un facteur de temps de passage du lubrifiant dans la zone de contact. Ceci les conduit à envisager un comportement viscoélastique des fluides. Le premier modèle bien connu de l'état rhéologique des fluides viscoélastiques est celui dit de Maxwell, qui est représenté par une relation linéaire [6]:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} \quad (I-12)$$

Le fluide est donc caractérisé par une viscosité dynamique (μ) et de plus par un module de cisaillement (G).

Toujours pour les fluides de type viscoélastique, Tevaarweek et Johnson donnent d'autres modèles :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau_0}{\tau_e \mu} \tau \sinh\left(\frac{\tau_e}{\tau_0}\right) \quad (I-13)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau_0}{\tau_e \mu} \tau \tanh\left(\frac{\tau_e}{\tau_0}\right) \quad (I-14)$$

Il est à noter que l'apparition du module de cisaillement G dans les modèles de lois de comportement des fluides viscoélastiques signifie la variation simultanée de la configuration et du volume de la structure du fluide.

4.2.3. Fluides viscoplastiques

En lubrification, on utilise communément des fluides non newtoniens qui sont constitués de différentes phases de matériau, comme par exemple, les graisses, ce sont presque tous des liquides épaissis par un matériau solide finement dispersé dans le liquide. Plusieurs études ont montré que l'état rhéologique de la phase solide joue un rôle important dans la description du comportement des fluides de ce type. Le caractère plastique de ces fluides est nettement mis en évidence, aussi bien par des études théoriques que par des observations expérimentales des écoulements. L'observation la plus simple de l'écoulement d'un fluide viscoplastique est réalisée par la mesure des vitesses des particules de graisse, qui s'écoulent entre deux parois fixes (fig. I-10). Le profil de vitesse mesuré a montré l'existence d'un noyau de fluide «Cor zone» au centre de l'écoulement, dans lequel le gradient de vitesse est nul. On en déduit que, dans la zone centrale, le fluide s'écoule comme un noyau solide qui n'est pas cisailé.

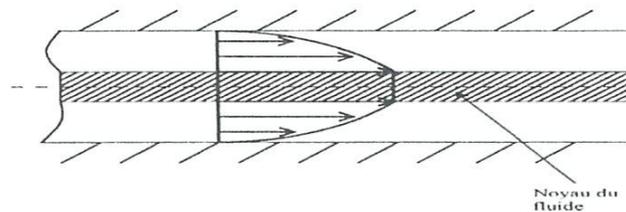


Figure I-10: Profil des vitesses de la graisse dans une conduite

Théoriquement, l'interprétation du passage d'un état solide (éventuellement élastique) à un état d'écoulement pour un milieu continu implique l'existence d'un seuil de cisaillement (τ_0), qui sera dépendant d'une quantité physique propre au milieu considéré. Cette valeur caractérise le critère bien connu de Huber-Von Mises de l'écoulement plastique. En utilisant ce critère, Bingham a établi la première loi de comportement des fluides viscoplastiques [7]:

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} \quad (I-15)$$

Cette loi montre que le fluide est toujours à l'état de repos si la contrainte de cisaillement maximale dans la direction de cisaillement pur est inférieure à (τ_0) . C'est-à-dire que le fluide a une certaine rigidité pour résister à un torseur d'actions extérieures tant que celui-ci n'atteint pas un certain niveau. Si la contrainte de cisaillement dépasse la valeur de (τ_0) . La structure du fluide est complètement modifiée et le milieu prend alors un comportement de type newtonien, quand la contrainte de cisaillement redevient inférieure à (τ_0) , la structure reprend son état initial. Bien que cette loi de comportement, dite de Bingham, soit établie théoriquement, de nombreuses expériences ont montré qu'elle est applicable pour une gamme très large de produits lubrifiants. Ainsi, elle reste toujours la plus utilisée pour les lubrifiants viscoplastiques.

Plus tard, Herschel et Bulkley ont réalisé des études expérimentales de l'écoulement des graisses aux gradients de vitesse élevés. Leurs résultats conduisent à la proposition de la relation théologique suivante :

$$\tau = \tau_0 + \mu(\dot{\gamma})^n \quad (I-16)$$

En 1955, Eyring et al ont étudié les propriétés rhéologiques des graisses à base de bentonite et particulièrement sur l'effet régressif de ces fluides. Les auteurs montrent l'existence de la relaxation dès qu'on exerce une petite déformation à vitesse constante, même à l'état où la contrainte de cisaillement maximale est inférieure à (τ_0) . Eyring et al proposent donc, pour justifier leurs résultats expérimentaux, qu'on serait en présence d'un comportement du type non-newtonien dans un premier temps (ayant la destruction de la structure) et, dès que la destruction du réseau moléculaire apparaît, du type newtonien. Cette loi de comportement est représentée par l'expérience de la viscosité plastique :

$$\eta = \sum \frac{x_1 \beta_1}{\alpha_1} \frac{\sinh^{-1}(\beta_1 \dot{\gamma})}{\beta_1 \dot{\gamma}} \quad (I-17)$$

où : x_1 , α_1 et β_1 sont des paramètres théoriques de l'écoulement. Ce modèle est dit le Ree-Eyring.

Powell et Eyring utilisent cette loi pour modéliser le comportement des graisses en faisant intervenir les deux types d'écoulement, newtonien et non-newtonien :

$$\tau = \mu_\infty \dot{\gamma} + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{\sinh(\beta \dot{\gamma})}{\beta} \quad (I-18)$$

Où : μ_0 et μ_∞ sont respectivement la viscosité initial et finale du matériau, et β une autre constante du modèle.

Nous avons rappelé quelques lois de comportement des fluides viscoplastiques les plus utilisés dans les applications générales ou celles adaptées à des conditions de fonctionnement extrêmes pour les fluides de ce type. D'autres modèles sont éventuellement utilisés pour simuler le comportement des fluides viscoplastiques :

-Modèle de SISKU :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} + K\dot{\gamma}^n \quad (I-19)$$

Une forme équivalente donnant l'expression de la viscosité apparente est préférable pour ce modèle :

$$\mu_{app} = a + b\dot{\gamma}^{n-1} \quad (I-20)$$

- Modèle de Bauer :

$$\tau = \tau_0 + a\dot{\gamma} + b\dot{\gamma}^n \quad (I-21)$$

- Modèle de Winer :

$$\tau = -\frac{\tau_0}{\mu} \ln \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right| \quad (I-22)$$

En absence du caractère élastique, les modèles ci-dessus présentent les lois de comportement des fluides de type dit rigide viscoplastique et sont représentés graphiquement sur la figure ci-dessous :

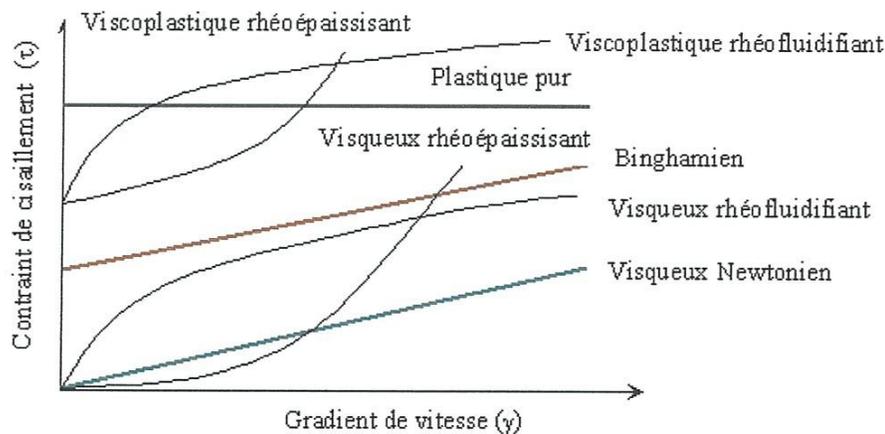


Figure I-11 : Rhéogramme de comportement d'un fluide de Bingham.

4.2.4. Fluides polaires

La quasi-totalité des huiles utilisées pour le graissage des machines tournantes contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs de longues chaînes moléculaires (polymères), utilisés dans le but d'améliorer les performances des huiles lubrifiantes, entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles (fluide non newtonien). D'après la théorie Milieux Continus de Vijay Kumar Stokes (Micro Continuum Theory) [8], la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}e_{ijk} M_{rk,r} \quad (I-23)$$

Avec : $M_{ij} = \frac{1}{3}M_{nn}\delta_{ij} + 4\eta K_{ij}$

σ_{ij} : Tenseur des contraintes non symétrique

M_{rk} : tenseur des couples de contraintes

e_{ijk} : tenseur de permutation d'ordre trois

K_{ij} : tenseur du taux de rotation

μ : Coefficient de viscosité dont la dimension est $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$

η : Constante physique due à la présence des couples de contraintes ou additifs de viscosité (VI) dans le fluide, dont la dimension est $[\eta] = MLT^{-1}$.

4.4.4. Synthèse bibliographiée sur la lubrification par fluide polaire

L'étude de l'influence du paramètre du couple de contraintes (fluide polaire) sur les performances statiques et dynamiques linéaires ou non linéaires des paliers fluides a fait l'objet de plusieurs travaux tant théoriques qu'expérimentaux. Au cours la dernière décennie, les principaux travaux effectués sont tout d'abord ceux de Won-Hsion en 2005, et al [9] présentent dans un travail théorique une étude du comportement dynamique linéaire d'un palier long lubrifié par fluide à couples de contraintes, basé sur la théorie dynamique linéaire. Par comparaison au fluide newtonien, le fluide à couples de contraintes permet d'améliorer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement même pour des valeurs modérées de l'excentricité relative de fonctionnement. La même année, M. Lahmar [10] a trouvé à travers une analyse élastohydrodynamique (EHD) d'un palier multi-couches lubrifié

par fluide à couples de contraintes, que la présence des additifs (polymères) dans le lubrifiant pour des grandes valeurs de l'excentricité relative statique conduit à une augmentation du pic de pression dans le film lubrifiant, de la capacité de charge du palier et la plage de stabilité, à une diminution de l'angle de calage statique et du nombre de frottement. En 2006, N.B. Naduvinamani et A. Siddangouda [11] s'intéressent à l'analyse des effets combinés du paramètre du couple de contraintes et de la rugosité de surface sur les performances statiques d'une butée poreuse à patins rectangulaires à coin d'huile fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique. Les résultats numériques prouvent que la présence des couples de contraintes dans le film lubrifiant augmente la capacité de charge et diminue le coefficient de frottement d'une butée poreuse rugueuse comparativement à une butée poreuse lisse. Cai-Wan Chang-Jian et Chao-Kuang Chen [12], en 2007 présentent une analyse théorique du comportement dynamique d'un rotor flexible supporté par deux paliers courts hydrodynamiques lubrifiés par un fluide à couples de contraintes. Les résultats numériques obtenus montrent que l'ajout des additifs de longues chaînes moléculaires dans le film lubrifiant permet de diminuer largement les amplitudes de vibration et d'augmenter la stabilité du système rotor-paliers. En 2008, Cheng-Ying et Cai-Wan Chang-Jian [13] présentent une étude théorique du comportement dynamique non linéaire d'un rotor flexible supporté par des paliers fluides lubrifiés par fluide à couples de contraintes fonctionnant en régime turbulent. Ces auteurs montrent que l'existence des additifs de longues chaînes moléculaires dans le lubrifiant améliore de façon significative la stabilité du système rotor-paliers même si l'écoulement du lubrifiant est turbulent. Dans la même année, H. Boucherit et al [14], présentent une étude théorique et numérique du comportement statique, dynamique linéaire et non linéaire d'un palier compliant (déformable) lubrifié par fluide à couples de contraintes (fluide polaire) en considérant le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier. Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent :

- une augmentation importante de la portance hydrodynamique et du pic de pression statique dans le film lubrifiant surtout dans le cas du palier mésaligné ;
- la puissance dissipée dans le film, l'angle de calage et le débit de fuite diminuent avec le paramètre du couple de contraintes pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique ;

- la plage de stabilité augmente sensiblement avec le paramètre du couple de contraintes surtout dans le cas d'un palier mésaligné même pour des faibles valeurs de l'excentricité relative. En conséquence, le palier lubrifié par fluide à couples de contraintes peu chargé est plus stable qu'un même palier lubrifié par un fluide non additivé (newtonien) ;
- les huiles contenant des additifs entraînent une diminution considérable du déplacement du centre de l'arbre dans le palier et une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film.

Récemment, H. Boucherit et al [15], ont présenté une étude comparative des lois rhéologiques de fluides lubrifiants en lubrification hydrodynamique. Les résultats numériques montrent que l'existence des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) permet d'augmenter le pic pression hydrodynamique dans le film lubrifiant.

Tous ces travaux ont été réalisés dans le cas d'un fluide polaire isovisqueux et incompressible en régime isotherme.

5. PROBLEMATIQUE

Le travail proposé s'intéresse à l'étude théorique et numérique des effets combinés de la présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI), de la variation viscosité-pression (*piezoviscosité*) et de la variation densité-pression (*compressibilité*) sur le comportement statique d'un palier fluide. La présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (polymères) rend le comportement rhéologique du fluide lubrifiant non newtonien (fluide polaire). L'étude de l'écoulement de ce type de fluide est basée sur l'application de la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes qui tient compte de la taille des macromolécules incorporées aux huiles de base d'origine minérale ou synthétique. La loi de Barus et la loi de Dawson et Higginson seront retenus pour tenir compte à la fois des effets de la variation viscosité-pression et de la variation densité-pression dans l'étude paramétrique.

6. CONCLUSION

La première partie de ce chapitre a été consacrée à une étude succincte sur la tribologie, qui regroupe l'étude de la lubrification, du frottement et de l'usure des éléments de machine (frottement et usure se produisent à la surface entre deux solides en contact), tandis que la deuxième partie a été réservée à une étude

bibliographique sur les lubrifiants et les différentes lois de comportement rhéologique permettant de décrire le comportement des huiles lubrifiantes.

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la lubrification hydrodynamique par fluide polaire (présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI)) piezovisqueux (variation viscosité-pression) et barotrope (variation densité-pression).

Chapitre deux

Equations de base de la Lubrification hydrodynamique par un Fluide Polaire Piézovisqueux

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on va présenter les équations de base de l'écoulement d'un fluide polaire piézovisqueux (variation de la viscosité en fonction de la pression) et barotrope (variation de la densité en fonction de la pression).

On rappelle les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus basées sur la théorie de V. K. Stokes, à savoir la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement et les lois constitutives du fluide. L'utilisation de l'hypothèse d'un écoulement en film mince permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide. Pour caractériser l'effet piézovisqueux ou la variation viscosité-pression et densité-pression (effet de compressibilité), on utilise les relations de Barus et de Dowson et Higginson qui sont les plus utilisés en régime isotherme. Pour ce type d'écoulement le comportement du film fluide peut être décrit par une équation aux dérivées partielles de deuxième ordre appelée équation de Reynolds modifiée. La solution de cette équation permettra de déterminer le champ de pression dans le film fluide, la connaissance de champs de pression dans le film permet de déterminer toutes les caractéristiques de contact lubrifié.

2. EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique ou hydrostatique permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques de contact, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à des fluides non newtoniens.

Les équations qui décrivent le comportement d'un fluide polaire piézovisqueux et barotrope sont établies à partir :

- des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus (lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement)
- les lois de variations : $\rho = \rho(p)$, $\mu = \mu(p)$.
- le régime d'écoulement isotherme en tous points du fluide ($T = \text{cte}$ en tous points du fluide).

2.1. Equation de continuité (la loi de la conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-1})$$

Avec :

ρ : Densité de fluide ou la masse volumique de fluide

u_i : Composante de la vitesse d'écoulement

x_i : Composantes d'espace

Pour un régime permanent, l'équation (II-1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-2})$$

Avec : $i=1,2,3$.

2.2. Equations constitutives

L'amélioration des performances obtenues des fluides polymériques (additivés) grâce à l'apport des polymères ajoutés aux fluides de bases accompagnée d'une modification du comportement rhéologique des lubrifiants. Une relation linéaire entre les taux de déformations et les contraintes ne suffit plus à décrire le comportement de lubrifiant. Son comportement est dénommé d'une manière générale non newtonienne.

Les liquides polymériques sont constitués de longues chaînes macromoléculaires baignées dans un solvant. Ces chaînes peuvent se lier entre elles, soit temporairement par des forces intermoléculaires, soit de manière permanente par des liaisons chimiques. Si les chaînes sont très longues, des enchevêtrements sont possibles.

La quasi-totalité des huiles utilisées pour la lubrification des machines tournantes contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs de longues chaînes moléculaires (polymères), utilisés dans le but d'améliorer les performances des huiles lubrifiantes, entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles (fluide non newtonien). D'après la théorie Milieux Continus de Vijay Kumar Stokes (Micro Continuum Theory) [8], la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}e_{ijk} M_{rk,r} \quad (\text{II-3})$$

Avec : $M_{ij} = \frac{1}{3}M_{nn}\delta_{ij} + 4\eta K_{ij}$

σ_{ij} : tenseur des contraintes non symétrique

p : pression statique

μ : coefficient de viscosité dont la dimension est $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$

η : constante physique due à la présence des couples de contraintes ou additifs de viscosité (VI) dans le fluide, dont la dimension est $[\eta] = MLT^{-1}$.

M_{rk} : tenseur des couples de contraintes

e_{ijk} : tenseur de permutation d'ordre trois

δ_{ij} : symbole de Kronecker

K_{ij} : tenseur du taux de rotation

2.3. Equation de mouvement pour un fluide polaire piezovisqueux (Equations de NAVIER-STOKES)

En régime permanent et pour un fluide polaire l'équation de mouvement sous la forme vectorielles donne comme suite (annexe A) :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{b} + \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} \ell + \nabla(\mu \vec{\nabla} \vec{v}) - \eta \nabla^4 \vec{v} \quad (II-4)$$

Avec :

ρb_i : force de volume

$\rho \ell_i$: couple de volume

Lorsque les forces de volume et les couples de volume sont négligeables, l'équation (II-4) devient :

$$\rho u_j \frac{du_i}{dx_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right) - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_r^2 \partial x_s^2} \quad (II-5)$$

Avec: $i, j, r, s = 1, 2, 3$.

μ : viscosité varie en fonction de la pression $\mu = \mu(p)$

2.3.1. Expression des équations de Navier pour un écoulement en film mince visqueux et conditions aux limites sur les vitesses

En mécanique des films minces visqueux (figure II-1), la dimension suivant l'épaisseur du film ($0, \vec{x}_2$) est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur du contact. Ce qui permet de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation (II-5). Pour cela, on pose:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \tilde{t} = \frac{t \cdot V}{L}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r}, \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \tilde{u}_2 = \frac{u_2 \cdot L}{V \cdot h}, \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{V},$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r}, \tilde{\ell} = \frac{\ell}{C}, \tilde{h} = \frac{h}{C}$$

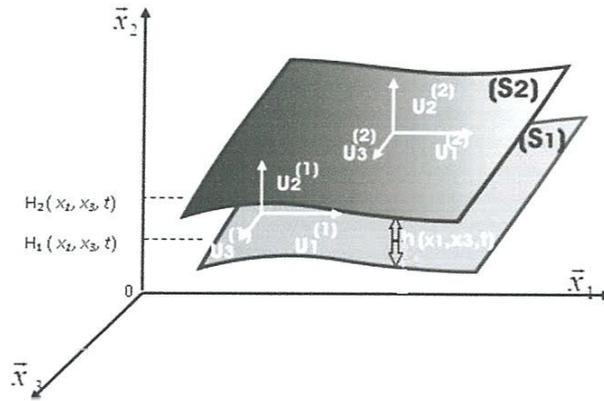


Fig. II-1 : Schéma d'un écoulement en film mince ($h / L \ll 1$)

Dans ces expressions :

L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0, \vec{x}_1)$ et $(0, \vec{x}_3)$

h et $\frac{V \cdot h}{L}$ sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristique suivant l'épaisseur du film $(0, \vec{x}_2)$

$\frac{L}{V}$ est définit l'ordre de grandeur du temps

μ , ρ sont la viscosité dynamique et la masse volumique exprimée à la température T .

μ_r, ρ_r sont la viscosité dynamique et la masse volumique de référence.

En régime de lubrification hydrodynamique, V est la vitesse caractéristique d'une des parois du contact. Compte tenu de ces changements de variables, l'équation (II-5) (annexe B).

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \right) - \eta \frac{\partial^4 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

Avec : $i = 1$ et 3 .

En revenant aux variables dimensionnées, dans le cas où les forces de volume et les couples de volume sont négligeables, pour un écoulement film mince visqueux les équations de mouvement (II-7) d'un fluide polaire piézo-visqueux sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_2^4} & \text{pour } i = 1,3 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

La deuxième équation du système montre que la pression dans le film est indépendante de l'axe x_2 , ($p=p(x_1, x_3)$).

Ce sont les équations de Navier écrites dans le cadre de la théorie de lubrification.

Ces équations auxquelles s'ajoute l'équation de la conservation de la masse (II-1) et les conditions aux limites et après intégration, permettent formellement de connaître le champ de vitesses u_1 et u_3 ($u_2 \ll u_1$ et u_3 ; écoulement bidimensionnel dans la direction (o, \bar{x}_1) (o, \bar{x}_3)), la pression et les contraintes de cisaillement dans le film.

On a utilisé jusqu'à ici la notation x_i pour les variables d'espace et u_i pour les composantes de la vitesse d'écoulement du fluide. Il sera plus pratique d'utiliser les nouvelles notations (x, y, z) et (u, v, w) pour les mêmes éléments, les équations du mouvement (II-7) pour un régime d'écoulement isotherme ($T = \text{cts}$) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

2.4. Détermination de champs des vitesses

Lorsque la vitesse de paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisées se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on pose que : $h_1 = 0$ et $h_2 = h(x, z, t)$

Définition des hypothèses et des conditions aux limites sur les vitesses :

- surface du contact lisse
- le fluide adhère parfaitement aux parois (vitesse de glissement négligeable)
- on suppose que la paroi inférieure (S_1) est plane et confondue avec le plan (x_1, o, x_3) du référentiel
- la vitesse en tous points de la surface (S_1) est tangente à cette surface.

Pour un écoulement bidimensionnel (2D) en film mince visqueux (figure II.2) les équations de mouvement (équations de Navier) (II.8) d'un fluide polaire piézovisqueux ($\mu=f(p)$) en régime isotherme ($\mu=f(T)=\text{cts}$ et $\eta=f(T)=\text{cts}$) s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (\text{II.9.a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9.b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (\text{II.9.c})$$

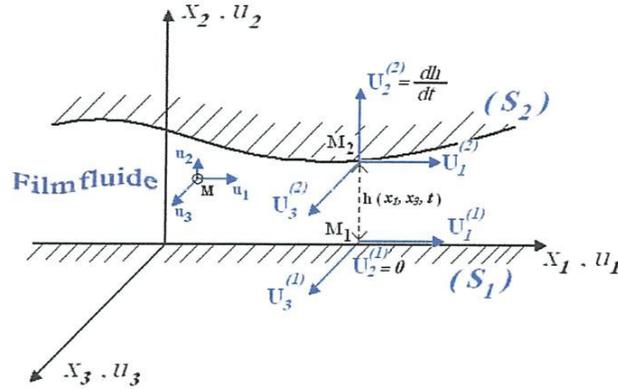


Fig. II.2 : Géométrie et cinématique d'un contact hydrodynamique

Pour caractériser l'effet piézovisqueux ou la variation viscosité-pression et densité-pression (effet de compressibilité), on utilise les relations de Barus [17] et de Dowson et Higginson [18] qui sont les plus utilisés en régime isotherme (Annexe C) :

$$\begin{cases} \mu(p) = \mu_0 \cdot e^{\alpha p} \\ \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,58 \times 10^{-9} p}{1 + 1,68 \times 10^{-9} p} \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

Où, μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité dynamique et la densité du fluide à la pression atmosphérique et α est le coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile lubrifiant, en général pour les huiles minérales compris entre 5 et 40 GPa⁻¹ [17].

La pression dans le film est indépendante de l'axe y, ($p=p(x, z)$), c.-à-d. :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

Dans ce cas le système des équations (II-9-a) et (II-9-c) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (\text{II} - 11. a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (\text{II} - 11. b)$$

Pour déterminer la première composante de vecteur vitesse on peut écrire l'équation (II-11.a) sous la forme suivante :

$$\eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II-12})$$

C'est une équation linéaire d'ordre quatre à coefficients constants, sa solution générale (U) est la somme de la solution homogène (u_h) plus la solution particulière (u_p).

a) Solution homogène

Par changement de variable, on suppose que : $t = \frac{\partial u}{\partial y}$

L'équation (II-12) devient : $\eta \cdot t^4 - \mu \cdot t^2 = 0$

Avec la relation de Barus (II-10) et on le met dans l'équation précédente, on obtient :

$$\eta \cdot t^4 - \mu_0 \cdot e^{\alpha p} \cdot t^2 = 0 \quad (\text{II-13})$$

On divise l'équation (II-13) par $(\mu_0 \cdot e^{\alpha p})$, on trouve :

$$\frac{\eta}{\mu_0} \cdot e^{-\alpha p} \cdot t^4 + t^2 = 0 \quad (\text{II-14})$$

- Ses racines sont : $t = 0$ (Racine double)

$$t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\eta} \cdot e^{\alpha p}} \quad (\text{Racine simple})$$

$$t = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\eta} \cdot e^{\alpha p}} \quad (\text{Racine simple})$$

Alors, la solution générale de l'équation (II-14) est :

$$u_h = A_0 + A_1 \cdot y + C_1 \cdot e^{\sqrt{(\mu_0/\eta) \cdot e^{\alpha p}} \cdot y} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{(\mu_0/\eta) \cdot e^{\alpha p}} \cdot y} \quad (\text{II-15})$$

Avec, A_0 , A_1 , C_0 et C_1 appartient de \mathfrak{R} .

On a : $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu_0}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\eta}} = \frac{1}{\ell}$, et on le remplace dans l'équation (II-15), on trouve :

$$u_h(y) = A_0 + A_1 \cdot y + C_1 \cdot e^{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell} \quad (\text{C'est la solution homogène})$$

b) Solution particulière

On suppose, un polynôme d'ordre deux comme suite :

$$u_p = a.y^2 + b.y + c \quad (\text{II-16})$$

Donc : $\frac{\partial u_p}{\partial y} = 2.a.y + b$, $\frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = 2.a$ et $\frac{\partial^4 u_p}{\partial y^4} = 0$

En remplaçant, u par u_p dans l'équation (II-12), on obtient :

$$\eta.(0) - \mu(2.a) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Donc : $a = \frac{1}{2.\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$

avec, $\mu = \mu_0 . e^{\alpha p}$

alors, $a = \frac{1}{2.\mu_0 . e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x}$

Et comme, il n'y a aucune condition sur les coefficients b et c , on choisit de prendre $b = c = 0$, et on remplace ces constantes dans le polynôme (II-16) :

$$u_p = \frac{1}{2.\mu_0 . e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} . y^2$$

A la fin la solution générale de l'équation (II-12) est la somme de la solution homogène (u_h) plus la solution particulière (u_p) :

$$u = u_h + u_p = A_0 + A_1.y + \frac{1}{2.\mu_0 . e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} . y^2 + C_1 . e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + C_2 . e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell}$$

D'où :

$$u(y) = A_0 + A_1.y + \frac{1}{2.\mu_0 . e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} . y^2 + B_1 \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell) + B_2 . \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell) \quad (\text{II-17})$$

Avec : A_0, A_1, B_0 et B_1 sont des constantes dans \Re .

et : $B_1 = C_1 + C_2$ et $B_2 = C_1 - C_2$

Où : $C_1 . e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + C_2 . e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} = B_1 . \left(\frac{e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell}}{2} \right) + B_2 . \left(\frac{e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} - e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell}}{2} \right)$

$$C_1 . e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + C_2 . e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} = \frac{B_1}{2} . e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + \frac{B_1}{2} . e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + \frac{B_2}{2} . e^{\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell} + \frac{B_2}{2} . e^{-\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell}$$

Avec : $\begin{cases} B_1 + B_2 = 2C_1 \\ B_1 - B_2 = 2C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1 = C_1 + C_2 \\ B_2 = C_1 - C_2 \end{cases}$

Pour l'équation (II-11-b), on trouve la solution générale de la même manière :

$$w(y) = A'_0 + A'_1.y + \frac{1}{2.\mu_0 . e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} . y^2 + B'_1 . \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell) + B'_2 . \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}}.y/\ell)$$

Donc, les solutions générales des vitesses d'écoulement d'une particule fluide polaire piézovisqueux sont :

$$u(y) = A_0 + A_1 \cdot y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^2 + B_1 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) + B_2 \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \quad (\text{II-18})$$

$$w(y) = A'_0 + A'_1 \cdot y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot y^2 + B'_1 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) + B'_2 \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \quad (\text{II-19})$$

2.4.1. Conditions aux limites

Pour un fluide polaire dans le cas d'un palier développé, les conditions limites à satisfaire sont [8] :

a) sur la surface de coussinet ($y=0$) :

$$u(x, 0, z) = U_1 = 0, \quad w(x, 0, z) = W_1 = 0 \quad (\text{II-20-a})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \quad (\text{II-20-b})$$

c) sur la surface de l'arbre ($y=h$) :

$$u(x, h, z) = U_2, \quad w(x, h, z) = W_2 = 0 \quad (\text{II-20-c})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = 0 \quad (\text{II-20-d})$$

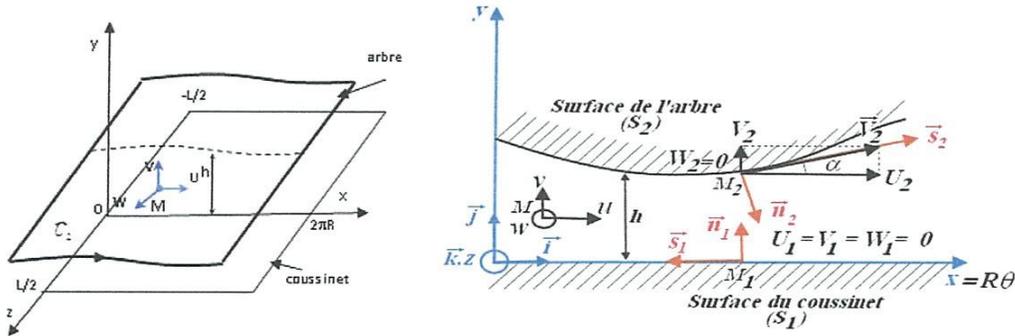


Fig. II-3: palier développé

2.4.2. Calcul les valeurs des constantes : $A_0, A_1, B_1, B_2, A'_0, A'_1, B'_1$ et B'_2

La condition (II-20-c) est due non glissement entre le fluide et les parois de contacts et les conditions (II-20-b, II-20-d) sont dues l'absence des couples de contraintes au niveau des parois.

Pour $y=0$, l'équation (II-18) devient :

$$u(0) = A_0 + A_1 \cdot (0) + \frac{1}{2\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (0)^2 + B_1 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot 0/\ell) + B_2 \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot 0/\ell) \quad (\text{II-21})$$

$u(x, 0, z) = u_1 = 0$, donc, de l'équation II-21, on trouve que : $A_0 + B_1 = 0$

alors :
$$A_0 = -B_1 \quad (\text{II-22})$$

on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A_1 + \frac{1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y + B_1 \frac{\sqrt{e^{\alpha p}}}{\ell} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) + B_2 \frac{\sqrt{e^{\alpha p}}}{\ell} \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell)$$

et,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \frac{e^{\alpha p}}{\ell^2} \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) + B_2 \frac{e^{\alpha p}}{\ell^2} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) \quad (\text{II-23})$$

En remplaçant, $y=0$, dans équation (II-23), on trouve que :

$$0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \frac{e^{\alpha p}}{\ell^2} \Rightarrow B_1 \frac{e^{\alpha p}}{\ell^2} = \frac{-1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$B_1 = -\frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Avec : $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$

et à partir de l'équation (II-22) : $A_0 = -B_1 = \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x}$

En mettant, A_0 et B_1 dans l'équation (II-18), on obtient :

$$u(y) = \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \cdot y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^2 - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) + B_2 \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) \quad (\text{II-24})$$

En remplaçant, A_0 et B_1 dans l'équation (II-23), on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) + B_2 \frac{e^{\alpha p}}{\ell^2} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y/\ell) \quad (\text{II-25})$$

- Pour, $y=h$, en remplaçant dans l'équation (II-25), on obtient :

$$B_2 = \frac{\ell^2 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h/\ell)}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h/\ell)} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h/\ell)} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Avec : $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=h} = 0$

En remplaçant la valeur de B_2 dans l'équation (II-24) :

$$u(y) = \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \cdot y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^2 - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) + \frac{\ell^2 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II-26})$$

Pour, $y=h$, on a : $u(x, h, z) = U_2$

Alors, l'équation (II-26) devient :

$$U_2 = \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + A_1 \cdot h + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot h^2 - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell) + \frac{\ell^2 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell) \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{Donc : } U_2 = A_1 \cdot h + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot h^2 \Rightarrow A_1 = \frac{U_2}{h} - \frac{h}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

En remplaçant A_1 dans l'équation (II-26), on trouve :

$$u(y) = \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_2}{h} y - \frac{h}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^2 - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) + \frac{\ell^2 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\ell^2}{\mu_0 \cdot e^{2\alpha p} \cdot \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) \frac{\partial p}{\partial x}$$

d'où :

$$u(y) = \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} (2\ell^2 - (hy - y^2) \cdot e^{\alpha p}) + \frac{U_2}{h} y + \frac{\ell^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[-2 \cdot \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell) + \frac{2 \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)}{\text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) - \frac{2 \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell)}{\text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \right]$$

Alors :

$$u(y) = \frac{U_2}{h} y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 + \frac{\text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)}{\text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) - \text{ch}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell) - \frac{\text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y / \ell)}{\text{sh}(\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h / \ell)} \right) \right]$$

A la fin, on trouve :

$$u(y) = \frac{U_2}{h} y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right]$$

De la même manière pour W :

$$w(y) = \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right]$$

Donc, les composante de vecteur vitesse de l'écoulement d'une particule fluide polaire piésovisqueux dans le cas d'un palier développé s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(y) = \frac{U_2}{h} y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right] \\ w(y) = \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II - 27. a)} \\ \text{(II - 27. b)} \end{array}$$

$\ell = \sqrt{\eta/\mu}$ est le paramètre des couples de contraintes représente physiquement la longueur de la chaîne moléculaire des additifs, dont la dimension est $[\ell]=L$.

3. DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS MODIFIEE POUR UN FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE

Les hypothèses utilisées dans cette étude sont :

- le fluide piézovisqueux ($\mu=f(p)$) et barotrope ($\rho=f(p)$)
- les forces de volumes sont négligeables
- Le régime est isotherme, c.-à-d., la température est constante en tout point du film.

Dans ce cas l'équation de continuité (II-1) pour un régime permanent, est :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad \text{(II-28)}$$

Avec, $i=1,2,3$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad \text{(II-29)}$$

L'intégration de cette équation à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] dy = 0 \quad \text{(II-30)}$$

Où : $h=h(x, z, t)$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \text{(II-31)}$$

D'après l'équation (II-9) et la relation (II-10), on a : $p = f(x, z)$, $\rho = f(p)$ et $\mu = f(p)$

Alors, $\mu = f(x, z)$ et $\rho = f(x, z)$.

On suppose que :

$$I_1 = \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right] dy \quad \text{(II-32)}$$

$$I_3 = \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] dy \quad (\text{II-33})$$

$$I_2 = \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] dy = \rho \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy = \rho [V]_0^h = \rho V_2 = \rho \frac{dh}{dt} = \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (\text{II-34})$$

Avec, la variation de ρ à travers l'épaisseur du film n'est pas importante.

L'intégration des équations (II-32) et (II-33) sont difficiles à calculer, pour les déterminer en utilisant le théorème de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x,h_2,z,t) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x,h_1,z,t) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_i}$$

$i=1, 2, 3$

Les intégrales I_1 et I_3 deviennent :

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho \left\{ \frac{U_2}{h} y + \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right] \right\} dy - U(h) \cdot \rho \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \rho \left\{ \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot y - \sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right)} \right) \right] \right\} dy - W(h) \cdot \rho \frac{\partial h}{\partial z}$$

Donc :

$$I_1 = \frac{U_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho}{12 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[e^{\alpha p} \cdot h^3 - 12\ell^2 \cdot h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p}}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right) \right] \right\} - U_2 \cdot \rho \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$I_3 = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho}{12 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[e^{\alpha p} \cdot h^3 - 12\ell^2 \cdot h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p}}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right) \right] \right\}$$

Avec : $U(h)=U_2$ et $W(h)=W_2$.

En remplaçant I_1 , I_2 et I_3 dans l'équation (II-31), on trouve :

$$\frac{U_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho}{12 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[e^{\alpha p} \cdot h^3 - 12\ell^2 \cdot h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p}}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right) \right] \right\} - U_2 \cdot \rho \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho}{12 \cdot \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[e^{\alpha p} \cdot h^3 - 12\ell^2 \cdot h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p}}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p}} \cdot h}{2\ell}\right) \right] \right\} = 0$$

Alors :

$$\frac{1}{12.\mu_0 .e^{2\alpha p}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho \frac{\partial p}{\partial x} \left[e^{\alpha p} . h^3 - 12\ell^2 . h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p} . h}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p} . h}}{2\ell} \right) \right] \right\} + \frac{1}{12.\mu_0 .e^{2\alpha p}} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho \frac{\partial p}{\partial z} \left[e^{\alpha p} . h^3 - 12\ell^2 . h + \frac{24\ell^3}{\sqrt{e^{\alpha p} . h}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{e^{\alpha p} . h}}{2\ell} \right) \right] \right\} = \frac{U_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) - U_2 . \rho \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (\text{II-35})$$

On suppose que :

$$G_m(h, \ell, p) = h^3 . e^{(-\alpha p)} - 12\ell^2 . h . e^{(-2\alpha p)} + 24\ell^3 . e^{(-2.5.\alpha.p)} \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell . e^{(-0.5.\alpha.p)}} \right)$$

L'équation (II-35) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12 . \mu_0 \left(\frac{U_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + \rho \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12 . \mu_0 \left(\frac{U_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + \rho \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{II-36})$$

Avec :

$$G_m(h, \ell, p) = h^3 . e^{(-\alpha p)} - 12\ell^2 . h . e^{(-2\alpha p)} + 24\ell^3 . e^{(-2.5.\alpha.p)} \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell . e^{(-0.5.\alpha.p)}} \right)$$

L'équation (II-36) est l'équation de base de la lubrification hydrodynamique en film mince visqueux par fluide polaire piézovisqueux et barotrope écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) en régime laminaire et isotherme.

Remarque : le second membre de l'équation générale de Reynolds (II-36) correspond à deux effets qui sont :

$\left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \right)$: l'effet d'entraînement (*wedge effect*).

$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)$: l'effet d'écrasement (*squeeze effect*).

Avec :

U_2 et V_2 : composante de vecteur vitesse \vec{V}_2 suivant direction x et y d'un point (M) appartenant à la surface (S2) (figure II-3)

$p(x, z, t)$: pression dans le film

$h(x, z, t)$: épaisseur du film lubrifiant

ρ : densité de fluide ou la masse volumique de fluide

α : coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile lubrifiant

μ_0 : viscosité à pression atmosphérique

t : temps

Les hypothèses formulées pour la mise en place de l'équation de Reynolds modifiée dans le cas d'un palier sont :

- *Le milieu est continu* : l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film
- *L'écoulement est laminaire*
- *Les forces de volume et les couples de volume sont négligeables*
- *Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression* ; cela est vérifié dans le cas des films minces tant que l'écoulement est laminaire
- *Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact* ; ainsi, sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois
- *La courbure générale du film est négligée*, on peut démontrer qu'en film mince, dans un palier par exemple, l'effet de courbure est du second ordre
- *La vitesse d'une des parois du contact est toujours tangente à cette paroi* : ce qui permet de placer le système d'axe (o, x, z) sur la paroi (S₁) où $h_1 = 0$ et $h_2 = h(x, y, t)$ (figure II-3)
- *L'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact*, le rapport entre ces grandeurs doit être de l'ordre de 10^{-3} . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, l'équation de Reynolds ne peut s'appliquer.
- *La variation de la viscosité et la masse volumique du fluide selon l'épaisseur du contact est très faible.*

4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a rappelé les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus écrites pour un fluide polaire piézovisqueux et barotrope.

L'utilisation des hypothèses d'un écoulement de fluide en films minces permet de simplifier sensiblement les équations de mouvement. L'intégration de ces équations permet d'obtenir le champ des vitesses de l'écoulement. La dérivation de l'équation de Reynolds modifiée qui est une équation différentielle partielle du second ordre de type elliptique permet de déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant.

Chapitre trois : Application

Etude de Comportement Statique d'un Palier lisse lubrifié par Fluide Polaire Piezovisqueux et Barotrope

1. INTRODUCTION

Lorsque deux surfaces chargées en mouvement l'une par rapport à l'autre sont entièrement séparées par un film mince visqueux, le régime de lubrification est dit hydrodynamique. La connaissance du champ de pression qui existe à l'intérieur du fluide permet de déterminer les caractéristiques statiques, tels que la portance d'un écoulement en film mince ainsi que les forces de frottement exercées par le fluide sur les parois du contact et le couple de frottement.

On s'intéresse dans cette étude aux paliers hydrodynamiques (figure III-1) qui sont largement utilisés dans les machines tournantes ainsi que dans les moteurs à combustion interne, vu leurs simple conception, leur faible coût de fabrication et les coefficients élevés d'amortissement. Pour cette raison ils sont toujours abordés par les chercheurs et restent l'objet de plusieurs études diversifiées. Parmi les paliers hydrodynamiques existés, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'étude des caractéristiques statiques des paliers hydrodynamiques lubrifiés par un fluide polaire piézo-visqueux et barotrope.

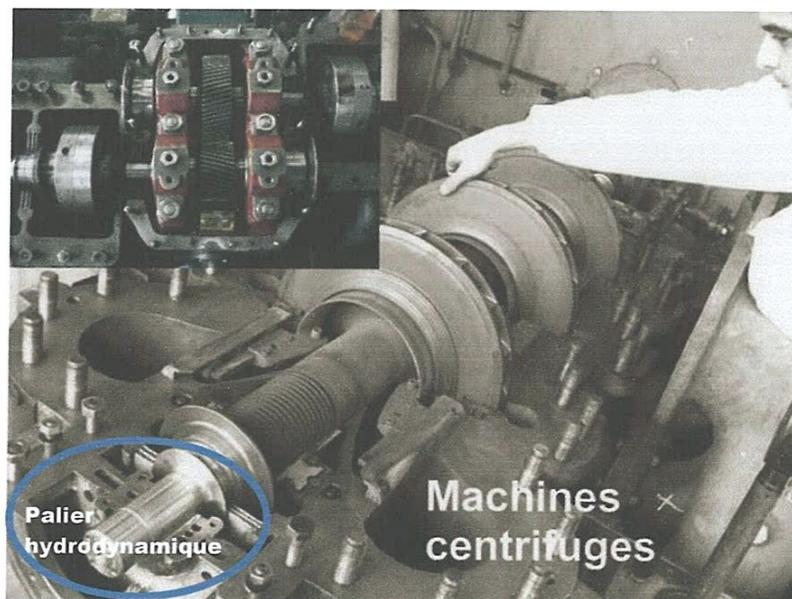
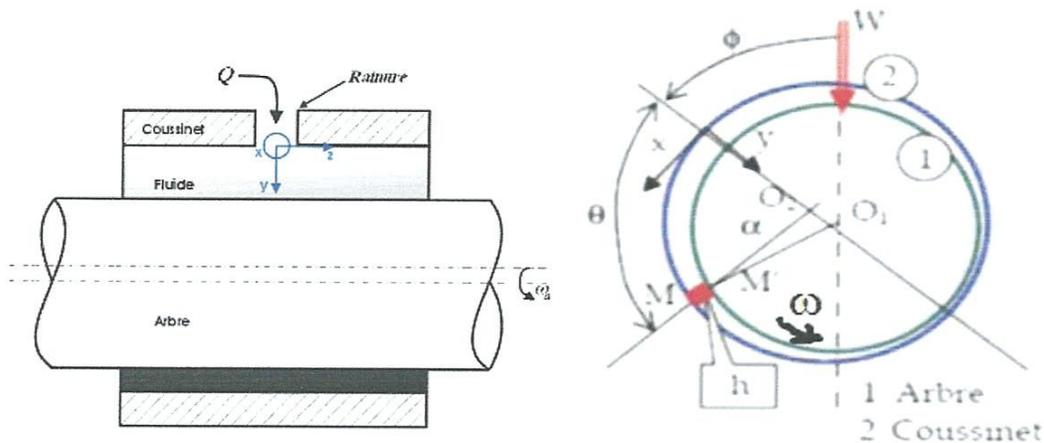


Fig.III-1 : photo d'un palier hydrodynamique d'une machine centrifuge

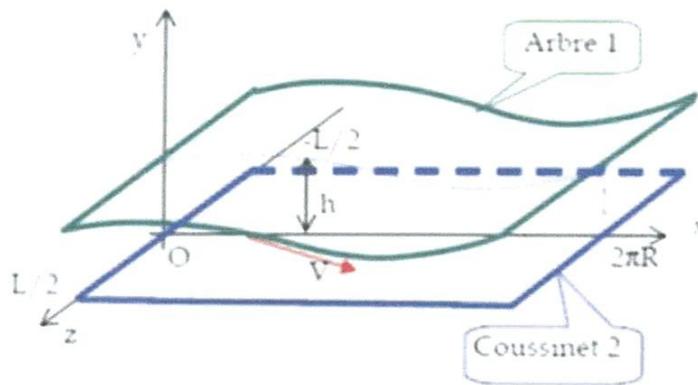
2. ÉTUDE D'UN PALIER LISSE HYDRODYNAMIQUE

Les paliers sont des organes de machines utilisés pour guider les arbres en rotation, ils déterminent la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme, parmi les paliers hydrodynamiques existés on est intéressé plus particulièrement à l'étude d'un palier lisse cylindrique, car celui-ci présente la géométrie la plus simple à réaliser et plus utiliser (figure III-2).

Dans un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation (ω) dans un coussinet fixe (figures III.2 .a et b), le jeu radial (C) étant très petit devant le rayon (R) du coussinet ou de l'arbre ($R_a \approx R_b = R$). On peut alors négliger, la courbure du film est développée suivant sa direction circonférentielle. Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (O, x, Z) du référentiel local. Si les axes de l'arbre est du coussinet sont parallèles, la surface de l'arbre est représentée par l'équation : $y = h(x)$, (figure III-2.c).



a) vue de profil d'un palier b) section droite d'un palier



c) palier développé

Fig.III-2 : Schémas d'un palier lisse

3. EXPRESSION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS DANS LE CAS D'UN PALIER LISSE LUBRIFIÉ PAR FLUIDE POLAIRE PIEZOVISCEUX ET BAROTROPE

Dans le cas d'un palier (figure III-2) on a les mêmes conditions sur les vitesses des parois de contact (II-20.a et II-20.c) l'équation de Reynolds (II-36) en régime permanent et isotherme, elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \theta} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho G_m(h, \ell, p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu_0 \omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho h) \quad (\text{III-1})$$

Avec : $G_m(h, \ell, p) = h^3 \cdot e^{(-\alpha p)} - 12\ell^2 \cdot h \cdot e^{(-2\alpha p)} + 24\ell^3 \cdot e^{(-2.5\alpha p)} \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}} \right)$

L'équation (III-1) est l'équation Reynolds modifiée dans le cas d'un palier lubrifié par un fluide polaire piézovisqueux et barotrope écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) en régime laminaire et isotherme.

Avec :

$p(x, z, t)$: pression dans le film

$h(x, z, t)$: épaisseur du film lubrifiant

U_2 : vitesse tangentielle de l'arbre ($U_2 = \omega R$)

μ_0 : viscosité dynamique à la pression atmosphérique

ρ : densité du fluide ($\rho = f(p)$)

α : coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile lubrifiant

$\ell = \sqrt{\eta/\mu}$: paramètre des couples de contraintes qui représente physiquement la chaîne moléculaire des additifs.

θ : coordonnée circonférentielle dont l'origine est situé sur la ligne des centres ($\theta = \frac{x}{R}$)

3.1. Expression de l'épaisseur du film

Pour un palier rigide a une vitesse de rotation (ω) stable et une charge (W) constante, le centre de l'arbre (O_a) occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet.

Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique \vec{W} qui agit dans le plan de la section médiane du palier aligné, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles. Dans ce cas deux paramètres sont nécessaires pour positionner O_a par rapport à O_c :

- l'excentricité : $e = |\vec{O}_c \vec{O}_a|$

- l'angle que fait la direction de la charge \vec{W} avec la ligne des centres, appelé angle de calage ϕ .

Concédons une section droite du palier (figure III-3) un point M_1 appartenant à la surface du coussinet sera repère par la coordonnée angulaire tel que :

$$\theta = (\vec{O}_c \vec{A}, \vec{O}_c \vec{M}_1).$$

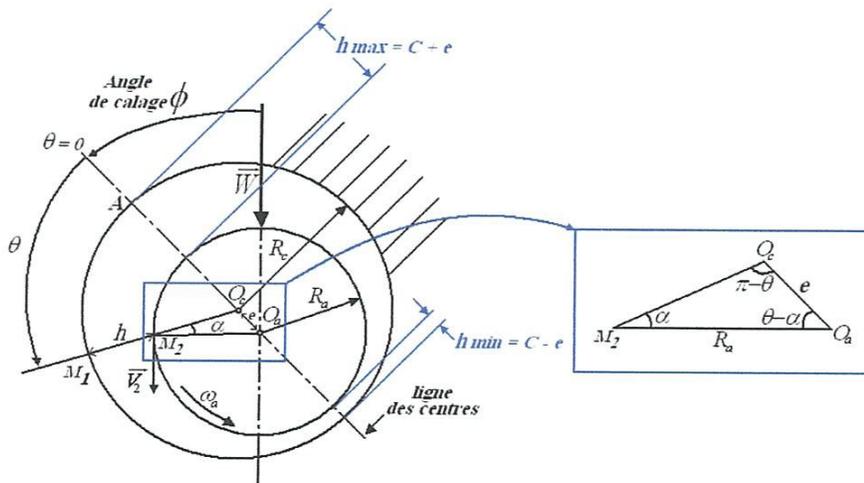


Fig.III-3 : Section droite d'un palier

L'expression géométrique de l'épaisseur du film est :

$$h = O_c M_1 - O_c M_2 = R_c - O_c M_2 \quad (III-2)$$

- **Détermination du segment $O_c M_2$**

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_c O_a M_2$ il vient :

$$\frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{O_c M_2}{\sin(\theta - \alpha)}$$

$$\text{D'où, } \sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta$$

$$\text{Et } O_c M_2 = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sin(\theta - \alpha) &= \sin \theta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta \\ &= \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \theta \\ &= \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{e}{R_a} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Donc :

$$O_c M_2 = R_a \left[\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right] = R_a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \right)^2 \sin^2 \theta} - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right]$$

En développant le terme $\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2}$, on obtient :

$$\left[1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^4 + \dots$$

La quantité $\left(\frac{e}{R_a} \right)$ est très petite devant l'unité (de l'ordre 10^{-3}), on peut donc négliger le

terme $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2$ et $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^4$, etc. devant 1, il vient alors :

$$O_c M_2 = R_a \left(1 - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right) = R_a - e \cos \theta$$

$$\text{Donc : } h = R_a + C - O_c M_2 = R_a + C - R_a + e \cos \theta \quad (\text{III-3})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} h(\theta) &= C + e \cos \theta \\ &= C(1 + \varepsilon \cos \theta) \end{aligned} \quad \text{(III-4)}$$

C'est l'équation de l'épaisseur du film en tout point du palier, cette relation est applicable dans le cas de palier aligné et indéformable.

Avec, $\varepsilon = \frac{e}{C}$ qui est l'excentricité relative (*eccentricity ratio*), elle varie de 0 à 1.

- Si, $\varepsilon = 0$, l'arbre et le coussinet sont coaxiaux.
- Si, $\varepsilon = 1$, il y a présence de contact entre l'arbre et le coussinet.

3.2. Conditions aux limites

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds et à certaines conditions limites liées à l'alimentation du palier ainsi qu'à l'écoulement du lubrifiant dans le palier.

3.2.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier

$$p(\theta = 0) = p_a \quad \text{dans les rainures d'alimentation axiale du palier} \quad \text{(III-5)}$$

3.2.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant

On distingue trois types de conditions aux limites :

a. Conditions de Sommerfeld

Ces conditions ne tiennent pas compte du phénomène de cavitation (figure III-4.a, film complet), obligeant le film en entier d'être actif :

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = 2\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{(III-6)}$$

La solution de Sommerfeld donne une distribution de pression antisymétrique au point $\theta = \pi$ pour une position de l'arbre. La solution donne aussi un angle de calage de $\frac{\pi}{2}$

par rapport à la direction de charge, ces conditions aux limites ne sont valables que pour des paliers fonctionnant à de très faibles charges ou sous des pressions très élevées.

b. Conditions de Gumbel ou de demi-Sommerfeld :

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = \pi) = 0 \\ p(\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \pi < \theta < 2\pi \text{ (étendue de la zone de cavitation)} \quad \text{(III-7)}$$

Ces conditions prennent en compte la rupture du film lubrifiant (figure III-4.b) mais elles ne respectent pas la continuité du débit qui est physiquement inacceptable. Cette solution est fréquemment employée car elle permet d'obtenir, dans le cas du palier court par exemple, une solution proche des résultats expérimentaux et elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire.

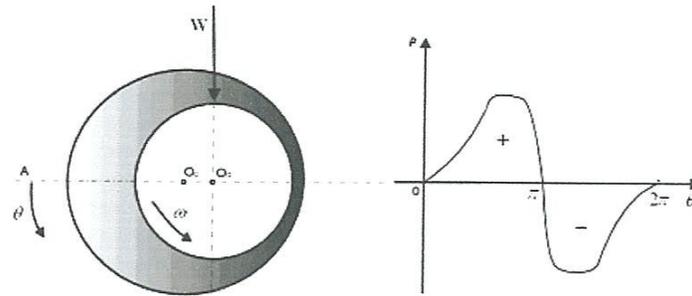
c. Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber

Ces conditions respectent la continuité du débit à la rupture du film (figure III-4.c), elles supposent que pour une abscisse θ_s , a priori inconnue, appelée angle de cavitation la pression et le gradient de pression s'annule:

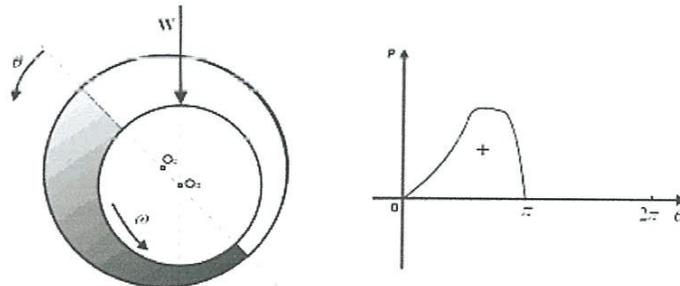
$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = \theta_s) = 0 \\ p(\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \theta_s < \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s) = 0 \quad \text{(III-8)}$$

Pendant, ces conditions ne satisfont pas à la reformation du film dans la partie divergente de l'écoulement.

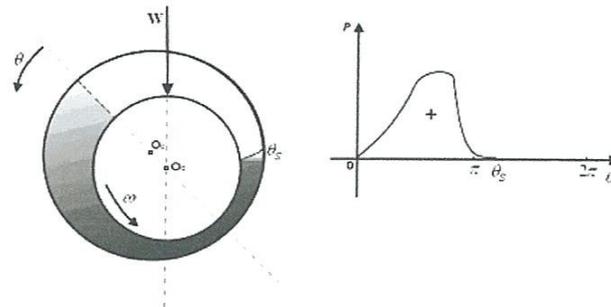
Les conditions les plus utilisées et relativement proche de la réalité physique sont celles de Swift-Stieber connues sous le nom de conditions de Reynolds, une des difficultés majeures du calcul réside dans la double recherche de la répartition de pression dans le film et la frontière de la zone active du palier.



a) conditions de Sommerfeld



h) conditions de Gûmhel



□ Zone inactive ■ Zone active

c) conditions de Reynolds

Fig.III-4 : répartition de pression statique pour les différentes conditions aux limites

4. PERFORMANCES STATIQUES DU PALIER

4.1. Champ de pression dans le film

La pression hydrodynamique est obtenue par intégration de l'équation de *Reynolds* (éq.III.1) en tenant compte des conditions aux limites liées à l'alimentation du palier et à

l'écoulement du fluide lubrifiant. La connaissance du champ de pression permettra de calculer l'action du fluide sur l'arbre et le coussinet (portance, force de frottement).

4.2. Action du fluide sur les surfaces de l'arbre et du coussinet

L'action de contact t , appelée vecteur contrainte, exercée en un point M de la surface (paroi) de l'arbre ou du coussinet, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal n (figure III-5):

$$t(M, n) = t_i x_i = \sigma_{ij} n_j x_i \quad (\text{III-9})$$

Exemple la matrice représentative du tenseur des contraintes dans le cas de l'écoulement unidimensionnel d'un fluide newtonien s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{III-10})$$

Où : $\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ est la contrainte de cisaillement visqueuse.

Les éléments de réduction en un point C quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface S du contact seront :

- résultante : $R = \iint_S t(M, n) dS \quad (\text{III-11})$

- moment en C : $M(C) = \iint_S CM \wedge t(M, n) dS \quad (\text{III-12})$

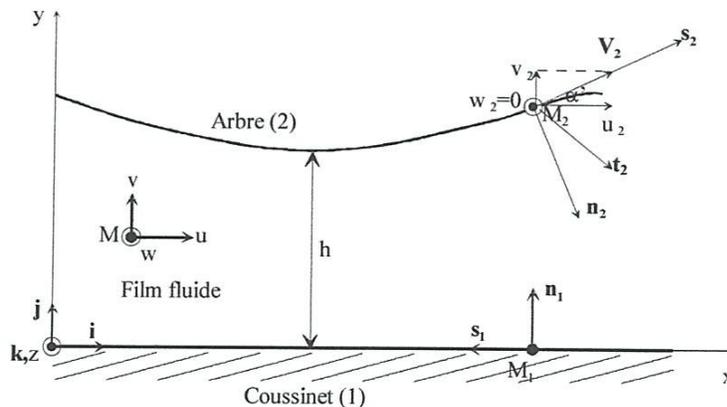


Fig.III-5: Section droite d'un palier développé

- **Composantes de la portance hydrodynamique**

Dans le repère local (x, y, z) dont les vecteurs de base sont (i, j, k) (figure III-5), les composantes du vecteur contrainte $\mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2)$ sont :

$$\mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) = [\sigma] \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} = \left(-p \sin \alpha - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha \right) \mathbf{i} + \left(p \cos \alpha + \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha \right) \mathbf{j} \quad (\text{III-13})$$

$$\text{avec : } \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{s}_2 \end{Bmatrix}$$

D'après la figure III.6, la relation qui relie le vecteur $\begin{Bmatrix} \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{s}_2 \end{Bmatrix}$ au vecteur $\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

Compte tenu de la relation (III.13), les composantes du vecteur contraint \mathbf{t} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) = \varepsilon & \left[\left(-p \sin \alpha - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha \right) \sin(\theta - \alpha) + \right. \\ & \left. \left(\sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha + p \cos \alpha \right) \cos(\theta - \alpha) \right] + \\ & \phi \left[\left(-p \sin \alpha - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha \right) \cos(\theta - \alpha) + \right. \\ & \left. \left(\sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha + p \cos \alpha \right) \sin(\theta - \alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

Après développement de la relation (III-15) et compte tenu de $\alpha' \ll 1$, on obtient :

$$\mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) \approx \begin{Bmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{Bmatrix}_{(\varepsilon, \phi)} \quad (\text{III-16})$$

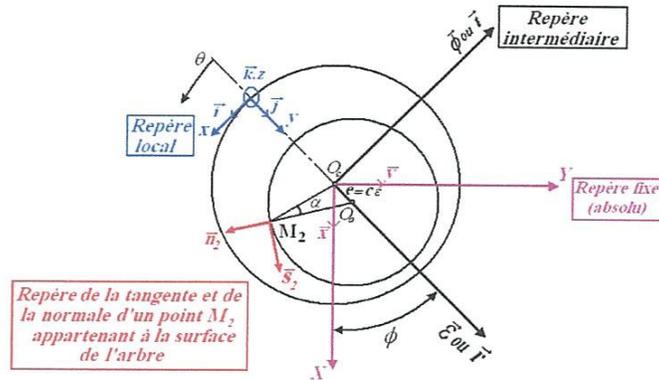


Fig.III.6 : Système d'axe

- Les composantes de la portance hydrodynamique dans le repère (ε, ϕ) sont obtenues par l'intégration de la relation (III-16) sur la surface de l'arbre :

$$F_{\varepsilon} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta dz$$

$$F_{\phi} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta dz$$
(III-17)

F_{ε} et F_{ϕ} sont les composantes de la charge portante dans les directions $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\phi}$.

L est la longueur du palier

De ces deux relations, on peut déterminer la portance hydrodynamique (W) et l'angle de calage (ϕ) du palier fluide, comme suit :

$$W = (F_{\varepsilon}^2 + F_{\phi}^2)^{1/2}$$

$$\phi = \arctg \left(-\frac{F_{\phi}}{F_{\varepsilon}} \right)$$
(III-18)

4.3. Forces de frottement

Les valeurs des forces de frottement sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} F_a = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_a \cdot R \cdot dz \cdot d\theta \\ F_c = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_c \cdot R \cdot dz \cdot d\theta \end{cases}$$
(III-19)

Où :

$$\tau_a = \tau|_{y=h} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} - \underbrace{\eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=h}}_{=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h}$$

$$\tau_c = \tau|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \underbrace{\eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=0}}_{=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

τ_a et τ_b : contraintes de cisaillement respectivement sur l'arbre et le coussinet.

Nous remarquons que les contraintes de cisaillement au niveau des parois s'expriment de la même manière que pour les fluides newtoniens, et ceci parce que les couples de contraintes au niveau des parois sont nuls.

Pour une fluide polaire piézo-visqueux la vitesse u est donnée par la relation (II-27), après dérivation du terme de la vitesse u , on obtient les expressions des contraintes de cisaillement au niveau des parois comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{\mu_0 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{\alpha p}}{h} + \frac{e^{(-\alpha p)}}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \left(\frac{h}{e^{-\alpha p}} - \frac{2\ell}{e^{(-0.5\alpha p)}} \cdot \text{th} \left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}} \right) \right) \\ \tau_c &= \frac{\mu_0 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{\alpha p}}{h} - \frac{e^{(-\alpha p)}}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \left(\frac{h}{e^{-\alpha p}} - \frac{2\ell}{e^{(-0.5\alpha p)}} \cdot \text{th} \left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

Avec : $U_2 = \omega \cdot R$ et $\mu = \mu_0 \cdot e^{\alpha p}$

Et en remplaçant τ_a et τ_c dans (III-19), il vient :

$$\begin{aligned} F_a &= R \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{\mu_0 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{\alpha p}}{h} + \frac{e^{(-\alpha p)}}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \left(\frac{h}{e^{-\alpha p}} - \frac{2\ell}{e^{(-0.5\alpha p)}} \cdot \text{th} \left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}} \right) \right) \right] dz \cdot d\theta \\ F_c &= R \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{\mu_0 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{\alpha p}}{h} - \frac{e^{(-\alpha p)}}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \left(\frac{h}{e^{-\alpha p}} - \frac{2\ell}{e^{(-0.5\alpha p)}} \cdot \text{th} \left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}} \right) \right) \right] dz \cdot d\theta \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

4.4. Puissance dissipée

La puissance dissipée doit être considérée comme un paramètre important dans la conception des paliers hydrodynamiques car celle conditionne l'élévation de température du fluide lubrifiant.

La puissance dissipée est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse comme suit :

$$\mathcal{P} = R \iiint_v \Phi d\theta dy dz \quad (\text{III-22})$$

Avec :

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \eta_0 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (\text{III-23})$$

$$\begin{cases} u(y) = \frac{\omega R}{h} y + \frac{1}{2 \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{y(y-h)}{e^{(-\alpha p)}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{(-0.5\alpha p)}}\right)}{\text{ch}\left(\frac{h}{2\ell e^{(-0.5\alpha p)}}\right)} \right) \right] \\ w(y) = \frac{1}{2 \mu_0 \cdot e^{2\alpha p}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{y(y-h)}{e^{(-\alpha p)}} + 2\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{(-0.5\alpha p)}}\right)}{\text{ch}\left(\frac{h}{2\ell e^{(-0.5\alpha p)}}\right)} \right) \right] \end{cases}$$

Après l'intégration par rapport à y, on trouve :

$$\mathcal{P} = \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{G_m(h, \ell, p)}{12 \mu_0} \left(\left(\frac{\partial p}{R \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right) \right]}_{I_1} R d\theta dz + \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\mu_0 e^{\alpha p} \cdot \omega^2 \cdot R^2}{h} \right]}_{I_2} R d\theta dz \quad (\text{III-25})$$

Avec : $G_m(h, \ell, p) = h^3 \cdot e^{(-\alpha p)} - 12\ell^2 \cdot h \cdot e^{(-2\alpha p)} + 24\ell^3 \cdot e^{(-2.5\alpha p)} \text{th}\left(\frac{h}{2\ell \cdot e^{(-0.5\alpha p)}}\right)$

Où :

I_1 : terme de Poiseuille.

I_2 : terme de Couette.

4.5. vitesses moyennes de l'écoulement de fluide

Les vitesses moyennes sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u \cdot dy = \frac{\omega R}{2} - \frac{1}{h} \frac{G_m(h, \ell, p)}{12 \cdot \mu_0} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \\ w_m = \frac{1}{h} \int_0^h w \cdot dy = -\frac{1}{h} \frac{G_m(h, \ell, p)}{12 \cdot \mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

4.6. Le débit volumique

Dans le cas où les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles (palier aligné) (fig.III-2.a) la pression est symétrique, on a donc :

$$q^+ = q^- \quad \text{et} \quad q = 2q^+ = 2q^-$$

A l'extrémité ($z=L/2$), le débit s'exprime par :

$$q^+ = \int_{S, L, z} w|_{z=L/2} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h w|_{z=L/2} R \cdot dy \cdot d\theta \quad (\text{III-27})$$

Pour un fluide polaire piézovisqueux et barotrope la vitesse w est donnée par la relation (II-27.b).

Après intégration par rapport à y le débit devient :

$$q^+ = \left| \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{12 \cdot \mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=L/2} G_m(h, \ell, p) \right| R \cdot d\theta \quad (\text{III-28})$$

Alors, le débit volumique moyen :

$$q = \left| \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L/2} G_m(h, \ell, p) \right] R. d\theta \right| \quad (\text{III-29})$$

5. EQUATIONS DE PROBLEME EN VARIABLES SANS DIMENSIONS

5.1. Equation de Reynolds modifiée en variables sans dimension

Pour les traitements numériques, il est recommandé de réécrire toutes les équations de la lubrification hydrodynamique en variables sans dimension (variables réduites).

L'adimensionnement a pour but de diminuer le nombre de paramètres physiques, en utilisant des paramètres composés sans dimension. Dans le cas d'un palier fluide, on pose :

$$\theta = \frac{x}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{C}, \quad \tilde{\ell} = \frac{\ell}{C}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\mu_0 \omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}$$

En remplacer les variables réduites dans l'équation de Reynolds (III-1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{\rho} \tilde{G}_m(\tilde{h}, \tilde{\ell}, \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{\rho} \tilde{G}_m(\tilde{h}, \tilde{\ell}, \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 6 \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{\rho} \tilde{h}) \quad (\text{III-30})$$

Avec : $\tilde{G}_m(\tilde{h}, \tilde{\ell}, \tilde{p}) = e^{(-\tilde{\alpha}\tilde{p})} \cdot \tilde{h}^3 - 12\tilde{\ell}^2 \cdot \tilde{h} \cdot e^{(-2\tilde{\alpha}\tilde{p})} + 24\tilde{\ell}^3 \cdot e^{(-2.5\tilde{\alpha}\tilde{p})} \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell} e^{(-0.5\tilde{\alpha}\tilde{p})}} \right)$

Où :

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = e^{\tilde{\alpha}\tilde{p}} \\ \tilde{\alpha} = \mu_0 \omega \left(\frac{R}{C}\right)^2 \alpha \\ \tilde{\rho} = 1 + \frac{0,58 \times 10^{-9} p}{1 + 1,68 \times 10^{-9} p} \end{cases} \quad (\text{III-31})$$

5.2. Equation géométrique adimensionnée de film

D'après l'équation (III-4), l'expression de l'épaisseur du film adimensionnée devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (\text{III-32})$$

5.3. Performances statiques du palier sans dimensions

- composantes de la portance Hydrodynamique

Les relations de ce dernier s'expriment par :

- Le débit volumique

Le débit volumique moyen adimensionné s'écrit :

$$\tilde{q} = \left| \int_0^{2\pi} \left[- \frac{\tilde{G}_m(\tilde{h}, \tilde{\ell}, \tilde{p})}{6} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=1/2} \right] d\theta \right| \quad (\text{III-38})$$

Où : $\tilde{q} = \left(\frac{L}{\omega \cdot R^3 C} \right) q$

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté l'équation de Reynolds modifiée dans le cas d'un palier lisse hydrodynamique lubrifié par un fluide polaire piézovisqueux et barotrope fonctionnant en régime permanent et isotherme, l'équation géométrique du film qui permet de définir en chaque point l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas d'un palier aligné rigide et les expressions des performances statiques d'un palier hydrodynamique.

Chapitre quatre :

Etude paramétrique Palier lisse lubrifié par Fluide Polaire Piézovisqueux et Barotrope

1. INTRODUCTION

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. Les géométries souvent complexes des paliers ainsi que les conditions limites ne permettent pas toujours d'envisager une résolution analytique de cette équation, sauf dans le cas des hypothèses de paliers infiniment court ($L/D \rightarrow 0$) ou des paliers infiniment long ($L/D \rightarrow \infty$) lubrifiés par fluide newtonien.

Pour les paliers de longueur finie (lorsque l'écoulement est bidimensionnel), les méthodes actuelles utilisées sont pour la plupart des méthodes numériques telles que les différences finies (MDF) et les éléments finis (MEF).

La méthode de discrétisation retenue dans notre étude est celle des différences finies centrées bidimensionnelle (2D).

2. METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE POLAIRE PEIZOVISQUEUX ET BAROTROPE

La méthode des différences finies (2D) est utilisée dans le cas du palier de longueur finie où l'écoulement du fluide est bidimensionnel. Dans cette méthode, simple à mettre en œuvre pour des géométries de films et d'alimentation régulières, le domaine est discrétisé en rectangles élémentaires appelés mailles.

La pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point du maillage en fonction des valeurs de la pression aux points environnants.

2.1. Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée

Dans un palier, les rayons de l'arbre et du coussinet étant voisins la courbure du film est négligeable, le palier est alors développé suivant sa direction circonférentielle. On est ainsi ramené à un problème bidimensionnel. La figure (IV-1), représente la discrétisation du palier par la méthode des différences finies (2D).

Si on considère que le palier est aligné et que la pression à ses extrémités est nulle, le palier étant symétrique par rapport à la coordonnée axiale z , seul le demi-palier est considéré (fig.IV-1). Dans ces conditions, le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée se réduit à $(0, 2\pi) \times (0, 1/2)$.

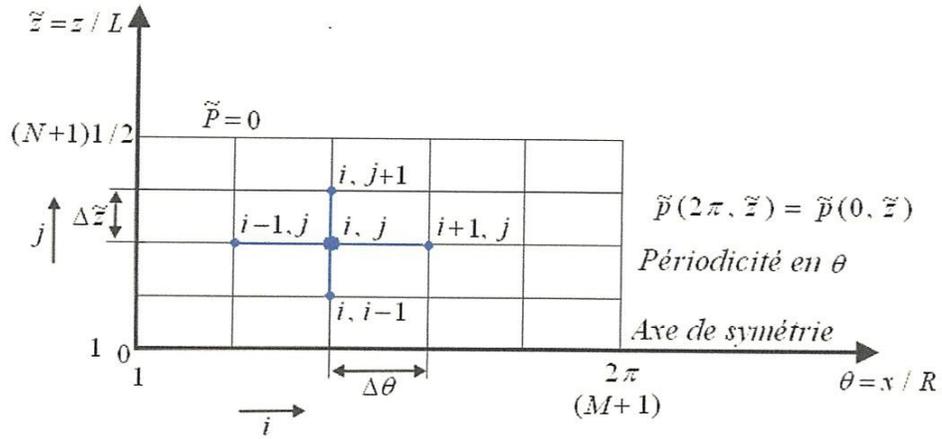


Fig. IV-1: Maillage du film lubrifiant par la MDF (2D)
(Discretisation du demi-palier)

M et N sont respectivement les nombres de mailles suivant θ et \tilde{z} .

$\Delta\theta$ et $\theta\tilde{z}$ sont respectivement les pas du maillage dans les directions circonférentielle et axiale tel que:

$$\Delta\theta = 2\pi/M$$

$$\theta\tilde{z} = 0.5/N$$

Les variables continues θ et \tilde{z} sont remplacées par des variables discrètes i et j :

$$\tilde{p}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{p}_{ij}$$

$$\tilde{h}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{h}_{ij}$$

$$\tilde{\rho}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{\rho}_{ij}$$

$$\tilde{G}_m(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{G}_{m\ ij}$$

Les gradients de pression en un point du maillage sont approchés par :

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - 2\tilde{p}_{ij} + \tilde{p}_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{z}^2}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - 2\tilde{p}_{ij} + \tilde{p}_{i,j-1}}{(\Delta\tilde{z})^2}$$

La méthode des différences finies centrées est utilisée pour la discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée (III-30). L'équation aux différences s'écrit :

$$\tilde{p}_{ij}^{(K+1)} = a_{ij} \tilde{p}_{i+1,j}^{(K)} + b_{ij} \tilde{p}_{i-1,j}^{(K+1)} + c_{ij} \tilde{p}_{i,j+1}^{(K)} + d_{ij} \tilde{p}_{i,j-1}^{(K+1)} - e_{ij} \quad (IV-1)$$

Où :

$$a_{ij} = \left[\frac{1}{2\Delta\theta} \tilde{G}_{m\ ij} \frac{\partial(\tilde{p}_{ij})}{\partial\theta} + \frac{1}{2\Delta\theta} \tilde{p}_{ij} \frac{\partial(\tilde{G}_{m\ ij})}{\partial\theta} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} (\tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}) \right] \cdot \frac{1}{\text{den}_{ij}}$$

$$b_{ij} = \left[\left(\frac{1}{\Delta\theta}\right)^2 (\tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}) - \frac{1}{2\Delta\theta} \tilde{G}_{m\ ij} \frac{\partial(\tilde{p}_{ij})}{\partial\theta} - \frac{1}{2\Delta\theta} \tilde{p}_{ij} \frac{\partial(\tilde{G}_{m\ ij})}{\partial\theta} \right] \cdot \frac{1}{\text{den}_{ij}}$$

$$c_{ij} = \left[\frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \tilde{G}_{m\ ij} \frac{\partial(\tilde{p}_{ij})}{\partial\tilde{z}} + \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \tilde{p}_{ij} \frac{\partial(\tilde{G}_{m\ ij})}{\partial\tilde{z}} + \frac{1}{(\Delta\tilde{z})^2} (\tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}) \right] \cdot \frac{(R/L)^2}{\text{den}_{ij}}$$

$$d_{ij} = \left[\frac{1}{(\Delta\tilde{z})^2} (\tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}) - \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \tilde{G}_{m\ ij} \frac{\partial(\tilde{p}_{ij})}{\partial\tilde{z}} - \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \tilde{p}_{ij} \frac{\partial(\tilde{G}_{m\ ij})}{\partial\tilde{z}} \right] \cdot \frac{(R/L)^2}{\text{den}_{ij}}$$

$$\tilde{e}_{ij} = 6 \left[\tilde{h}_{ij} \frac{\partial(\tilde{p}_{ij})}{\partial\theta} + \tilde{p}_{ij} \frac{\partial(\tilde{h}_{ij})}{\partial\theta} \right] \cdot \frac{1}{\text{den}_{ij}}$$

$$\text{Avec : } \text{den}_{ij} = \left(\frac{2 \tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}}{(\Delta\theta)^2} + 2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\tilde{p}_{ij} \tilde{G}_{m\ ij}}{(\Delta\tilde{z})^2} \right)$$

L'utilisation l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficients de sur-relaxation donne :

$$\tilde{p}_{ij}^{(K+1)} = (1 - \Omega) \tilde{p}_{ij}^{(K)} + \Omega \left[a_{ij} \tilde{p}_{i+1,j}^{(K)} + b_{ij} \tilde{p}_{i-1,j}^{(K+1)} + c_{ij} \tilde{p}_{i,j+1}^{(K)} + d_{ij} \tilde{p}_{i,j-1}^{(K+1)} - e_{ij} \right] \quad (IV-2)$$

Où : Ω est le facteur de sur-relaxation dans la valeur est comprise entre 1 et 2.

2.2. Calcul des caractéristiques statiques

Les intégrales des caractéristiques statiques sont évaluées à l'aide de la formule des Trapèzes généralisée.

- portance hydrodynamique

Les composantes de la portance hydrodynamique \tilde{F}_ε et \tilde{F}_ϕ adimensionnée (III-33) s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_\varepsilon \\ \tilde{F}_\phi \end{Bmatrix} \approx \Delta\tilde{z} \cdot \Delta\theta \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \tilde{p}_{ij} \begin{Bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

Ces relations sont valables pour le cas d'un palier lisse complet avec une rainure axiale infiniment mince située à $(\theta=0)$, la pression d'alimentation est supposée égale à la pression atmosphérique.

- Forces de frottement

$$\begin{cases} \tilde{F}_a = \Delta\theta \cdot \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left[\frac{e^{\tilde{\alpha}\tilde{p}_{ij}}}{\tilde{h}_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \left(\tilde{h}_{ij} - 2\tilde{\ell} \cdot e^{(-0.5\tilde{\alpha}\tilde{p})} \cdot \text{th} \left(\frac{\tilde{h}_{ij}}{2\tilde{\ell} e^{(-0.5\tilde{\alpha}\tilde{p})}} \right) \right) \right] \\ \tilde{F}_r = \Delta\theta \cdot \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left[\frac{e^{\tilde{\alpha}\tilde{p}}}{\tilde{h}_{ij}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \left(\tilde{h}_{ij} - 2\tilde{\ell} \cdot e^{(-0.5\tilde{\alpha}\tilde{p})} \cdot \text{th} \left(\frac{\tilde{h}_{ij}}{2\tilde{\ell} e^{(-0.5\tilde{\alpha}\tilde{p})}} \right) \right) \right] \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

- Vitesses moyennes de l'écoulement

$$\begin{cases} \tilde{u}_m = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{G}_m(\tilde{h}_{ij}, \tilde{\ell}, \tilde{p}_{ij})}{12 \cdot \tilde{h}_{ij}} \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \\ \tilde{w}_m = - \frac{\tilde{G}_m(\tilde{h}_{ij}, \tilde{\ell}, \tilde{p}_{ij})}{12 \cdot \tilde{h}_{ij}} \left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \right) \end{cases} \quad (\text{IV-5})$$

- Débit volumique

$$\tilde{q} = \left| -\Delta\theta \sum_{i=1}^M \left[\frac{\tilde{G}_m(\tilde{h}_{ij}, \tilde{\ell}, \tilde{p}_{ij})}{6} \left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \right) \right] \right| \quad (\text{IV-6})$$

- Puissance dissipée

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} = \Delta\theta \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left\{ \frac{\tilde{G}_m(\tilde{h}_{ij}, \tilde{\ell}, \tilde{p}_{ij})}{12} \left[\left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \right)^2 \right] \right\} + \\ \Delta\theta \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}\tilde{p}_{ij}}}{\tilde{h}_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV-7})$$

3. ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA RHEOLOGIE DU FLUIDE SUR LES PERFORMANCES STATIQUES D'UN PALIER LISSE

L'étude du comportement statique du palier lisse lubrifié par fluide polaire piézo-visqueux et barotrope a conduit à l'écriture, en langage ms-fortran, d'un programme de calcul basé sur l'approche numérique (2D) développée

précédemment. Ce programme permet de déterminer : le champ de pression dans le film lubrifiant du palier, l'angle de calage, le débit volumique, le nombre de frottement ou la puissance dissipée et les vitesses moyennes.

3-1. Schéma général de résolution du problème

1. Lecture des données : $\varepsilon_0, \alpha, \mu_0, \rho_0, \alpha, \tilde{\ell}, \omega, R, L, N, M, \Omega$.

2. Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée (\tilde{h}_{ij}) à partir des équations (III-32)

3. Initialisation du champ de pression statique adimensionnée $\tilde{p}_{ij}^{(0)} = 0$, où, $i=1, M+1$ et $j=1, N+1$

4. Calcul de la viscosité dynamique adimensionnée ($\tilde{\mu}_{ij}$) et de la densité relative $\tilde{\rho}_{ij}$ à partir de l'équation (III-31)

5. calcul de la pression adimensionnée en tout point du maillage par résolution de l'équation de Reynolds modifiée à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation

6. vérifier le critère de convergence $\left(\left| \frac{\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}}{\tilde{p}_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-5} \right)$, si la convergence n'est

pas atteinte incrémenter le nombre d'itération de 1 et revenir à l'étape 4

- convergence atteinte
- calcul des performances hydrodynamiques du palier
- arrêt

7. si la convergence est atteinte calcul les performances statiques du palier à partir des équations (IV-3) à (IV-7).

3-2. Résultats et discussions

Pour valider le programme de calcul développé pour l'étude de l'influence de la rhéologie du fluide sur le comportement statique du palier, il est nécessaire de faire une comparaison des résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature.

Les figures IV.2 (programme développé) et IV.3 [24], représentent la variation de circumférentielles de la pression statique adimensionnée dans la section médiane d'un palier aligné rigide de longueur finie ($L/D = 1$) pour différentes valeurs de paramètre

des couples de contraintes ou la longueur de la chaîne moléculaire des additifs ($\tilde{\ell} = 0.0, \tilde{\ell} = 0.2$ et $\tilde{\ell} = 0.4$) et une excentricité relative statique $\varepsilon_0 = 0.9$.

Comme il est montré dans les figures, les résultats obtenus sont en bonne concordance avec ceux publiés par Kabouya [25].

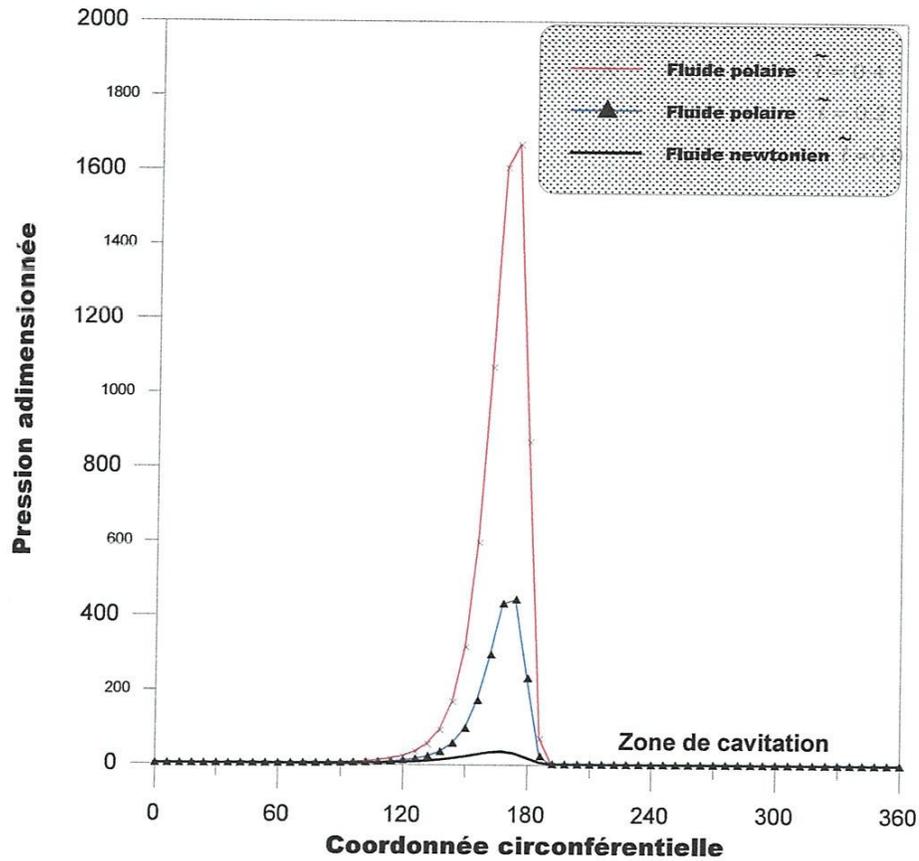


Fig. IV-2: Variations circonférentielle de la pression statique adimensionnée dans la section médiane du palier aligné pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes

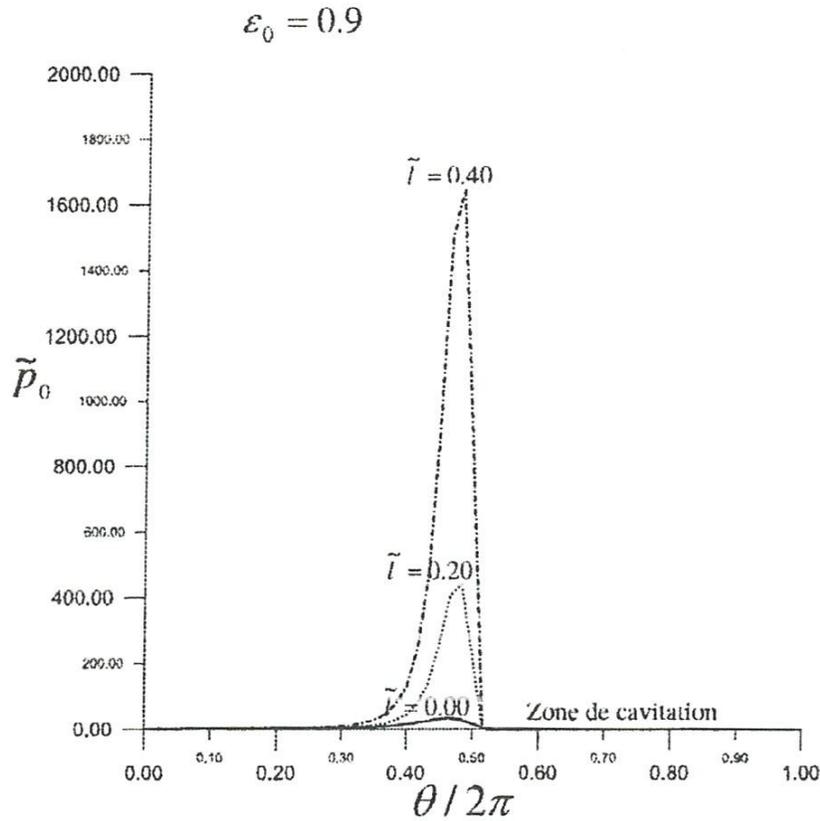


Fig. IV-3: Variations circonférentielle de la pression statique adimensionnée dans la section médiane du palier aligné pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes [25].

3-3. Etude paramétrique

Dans cette étude paramétrique, on va étudier l'influence de la longueur relative des chaînes moléculaires des additifs ($\tilde{\ell}$), la piézoviscosité et la compressibilité du lubrifiant sur le champ de pression, la portance hydrodynamique, Le nombre de frottement sur le coussinet et l'angle de calage d'un palier lisse de longueur fini lubrifié par un fluide polaire piezovisqueux et barotrope dont les caractéristiques géométrique, les conditions de fonctionnement, les propriétés physiques du lubrifiant sont portés dans le tableau IV-1.

Tableau IV-1: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.

Caractéristiques géométriques	
- Rayon de l'arbre, R	0.025 m
- Jeu radial, C	7×10^{-5} m
Conditions de fonctionnement	
- Vitesse angulaire de l'arbre, ω	$100 \times \pi$ rad/s
Propriétés du lubrifiant	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, μ_0	0.003 Pa.s
- Masse volumique, ρ_0	870 kg/m ³
- Coefficient de piézoviscosité, α	0, 10 et 30×10^{-9} Pa ⁻¹

3-3.1. Influence du paramètre du couple de contraintes, de la piézoviscosité et de la compressibilité de fluide lubrifiant sur le champ de pression

On a étudié les effets combinés de la longueur relative des chaînes moléculaires des polymères, la piézoviscosité et de la compressibilité du fluide lubrifiant sur la pression maximale dans le palier.

Les calculs ont été effectués pour une excentricité relative statique $\varepsilon_0 = 0.9$, différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes ($\tilde{\ell} = 0.0$ (fluide newtonien), 0.2 et 0.3) et quatre types de fluide polaire lubrifiant :

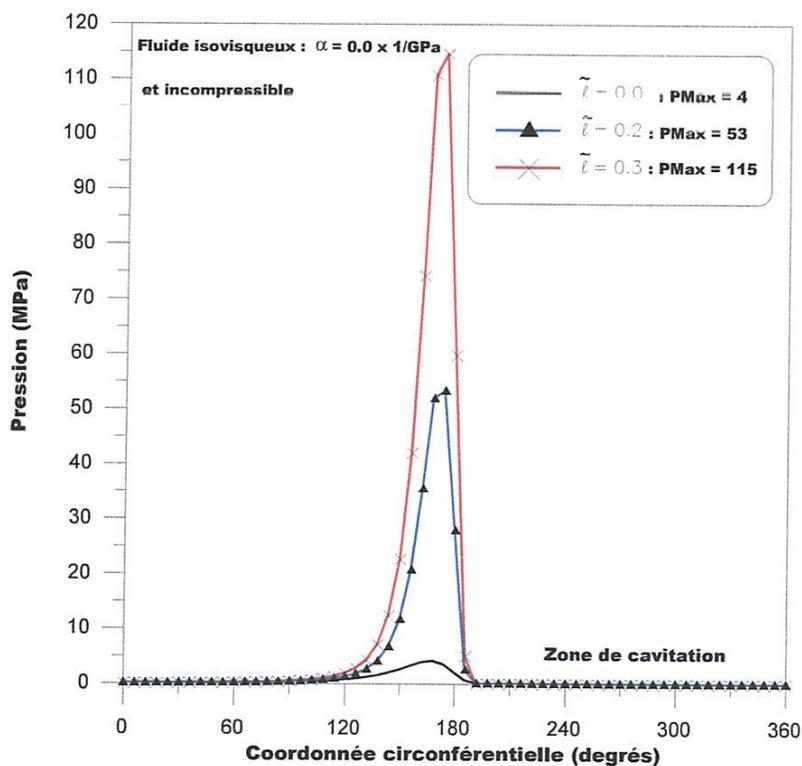
- fluide incompressible et isovisqueux : $\tilde{\rho} = \text{cte}$ et $\tilde{\mu} = \text{cte}$;
- fluide Compressible et isovisqueux : $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(p)$ et $\tilde{\mu} = \text{cte}$;
- fluide incompressible et Piézovisqueux : $\tilde{\rho} = \text{cte}$ et $\tilde{\mu}(\tilde{p}) = \exp(\tilde{\alpha}\tilde{p})$;
- fluide Compressible et Piézovisqueux : $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{p})$ et $\tilde{\mu}(\tilde{p}) = \exp(\tilde{\alpha}\tilde{p})$.

La figure IV-4 présente les variations circonférentielles du champ de pression hydrodynamique dans le palier pour différents fluides lubrifiants. On constate une augmentation importante du pic de pression dans le film lubrifiant d'un palier lubrifié avec fluide additivé (fluide polaire) comparativement au palier lubrifié avec fluide newtonien (fluide non additivé) (figure IV-4 : a, b, c, d, e et f). Cette augmentation devient très importante de l'ordre de 97% lorsque la chaîne moléculaire des additifs augmente ($\tilde{\ell} = 0.3$) et le coefficient de la piézoviscosité augmente ($\alpha = 30\text{GPa}^{-1}$) (figure IV-4-a, d et f).

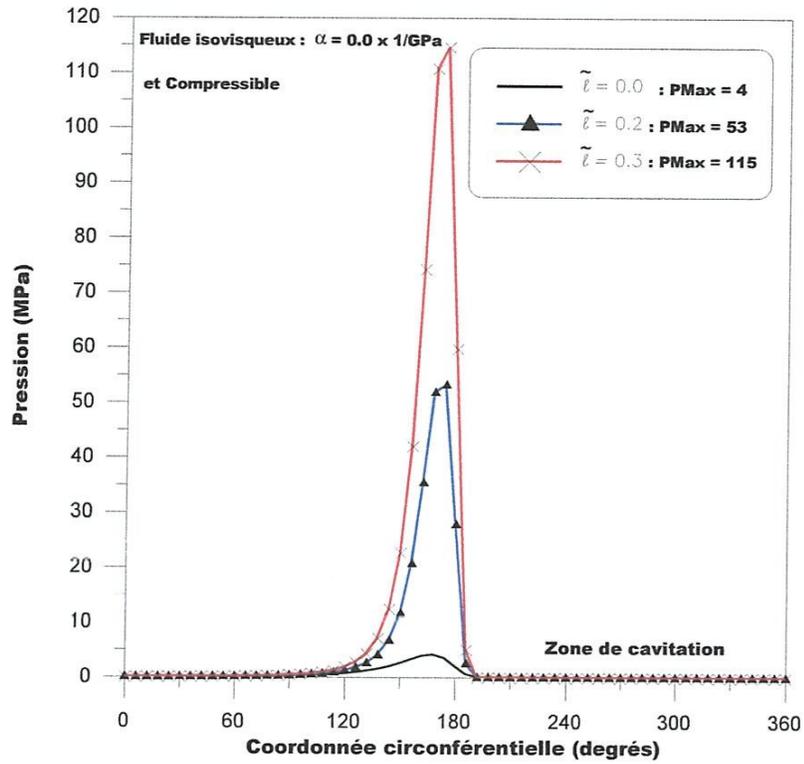
Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent d'augmenter le champ de pression dans le film lubrifiant du palier fluide et surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires relatives des additifs.

Pour les mêmes valeurs de la chaîne moléculaire des additifs ou paramètre des couples de contraintes, la piézoviscosité du fluide lubrifiant conduit à une augmentation assez importante du pic de pression dans le film (figure IV-4 : a-d, b-f et figure IV-5 : a-c). On conclut que la piézoviscosité du fluide lubrifiant ne peut être négligée pour la prédiction des performances statiques ou dynamiques linéaires ou non-linéaires des paliers fluides surtout si le palier sévèrement chargé où l'effet de la piézoviscosité devient importante.

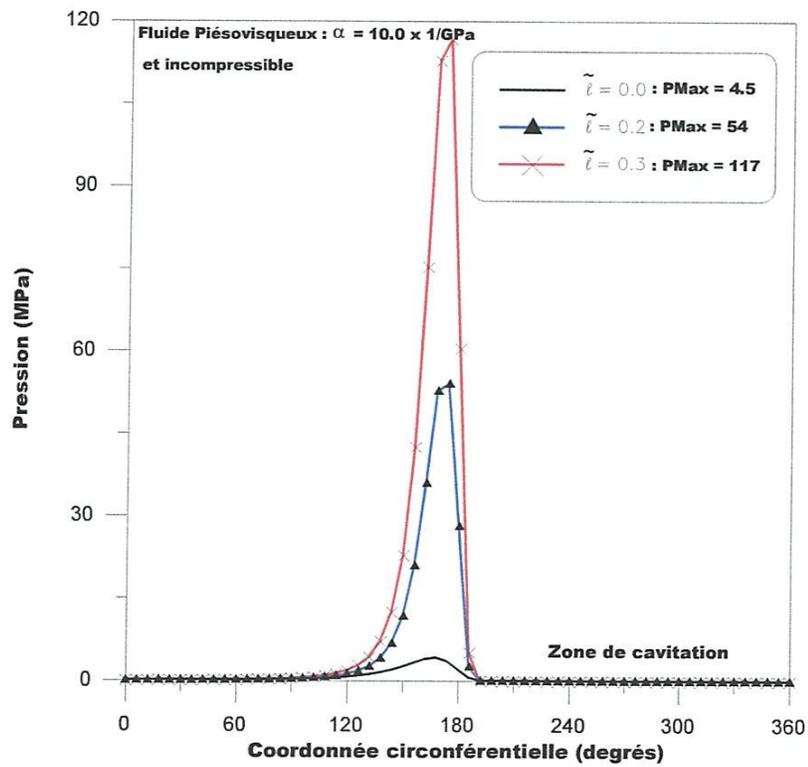
La compressibilité du fluide n'a pas d'effets significatifs sur le champ de pression dans le film lubrifiant (figure IV-4 : a - b et f - d).



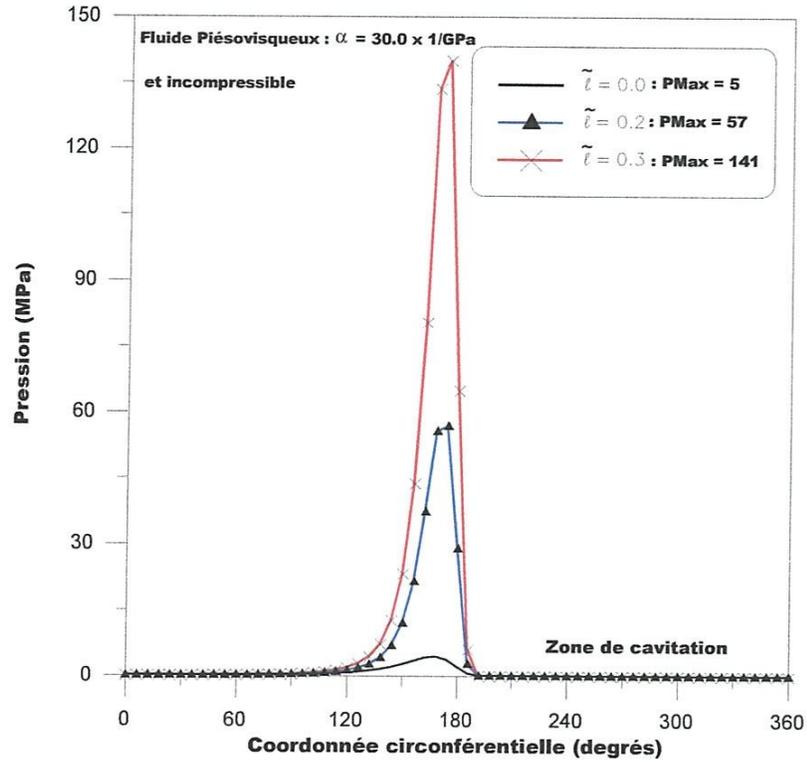
a) fluide isovisqueux et incompressible



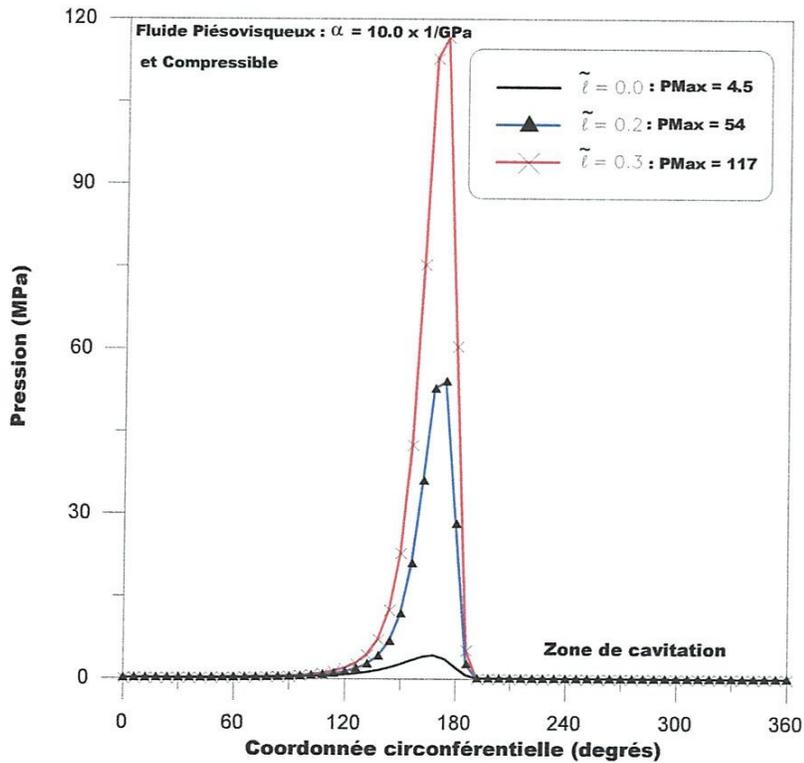
b) fluide isovisqueux et Compressible



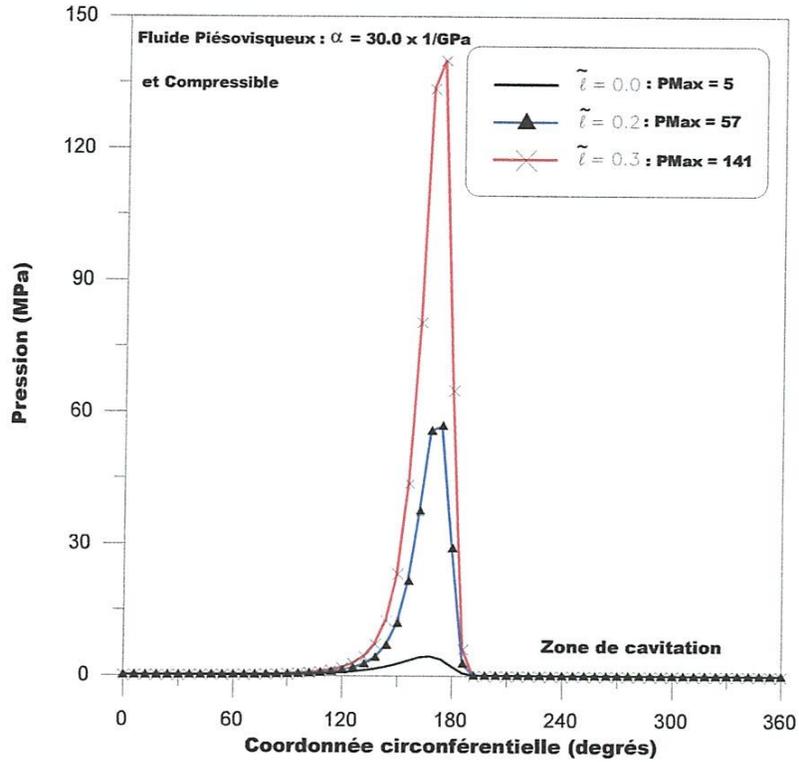
c) fluide Piezovisqueux ($\alpha = 10 \text{ GPa}^{-1}$) et incompressible



d) fluide Piezovisqueux ($\alpha = 30 \text{ GPa}^{-1}$) et incompressible

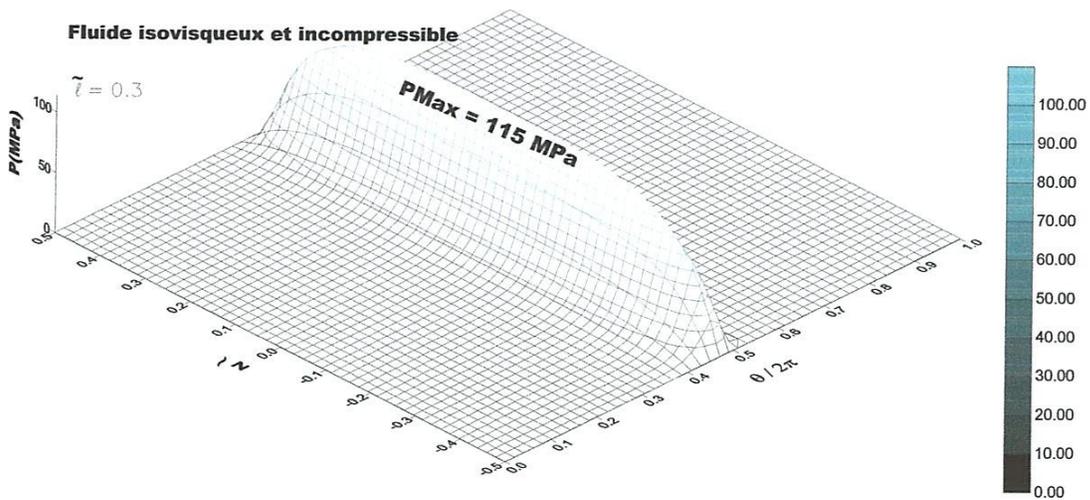


e) fluide Piezovisqueux ($\alpha = 10 \text{ GPa}^{-1}$) et Compressible

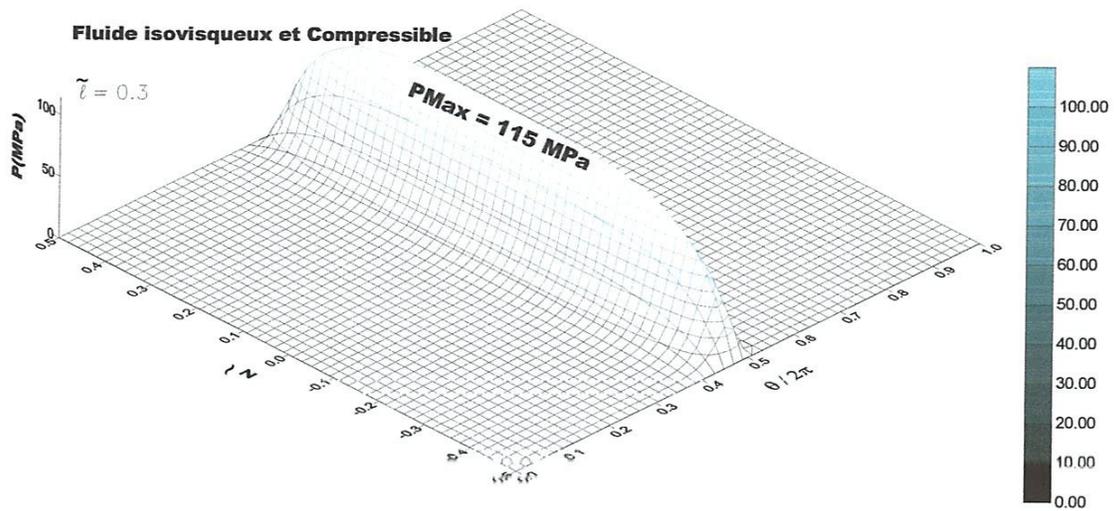


f) fluide Piezovisqueux($\alpha = 30 \text{ GPa}^{-1}$) et Compressible

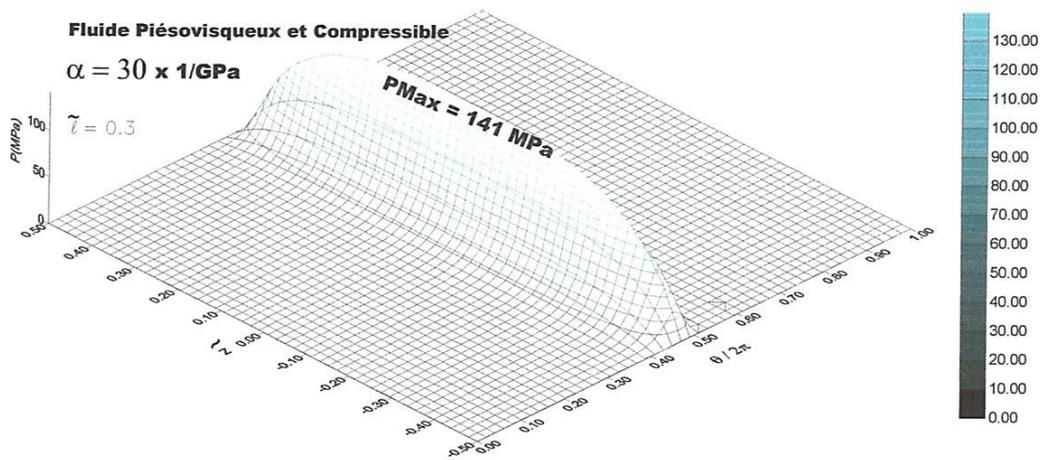
Fig. IV-4: Variations circonférentielles du champ de pression du palier pour différents fluides lubrifiants ($\epsilon_0 = 0.9$).



a) fluide isovisqueux et incompressible



b) fluide isovisqueux et Compressible



c) fluide Piezovisqueux et Compressible

Fig. IV-5: *Présentation en 3D du champ de pression statique*

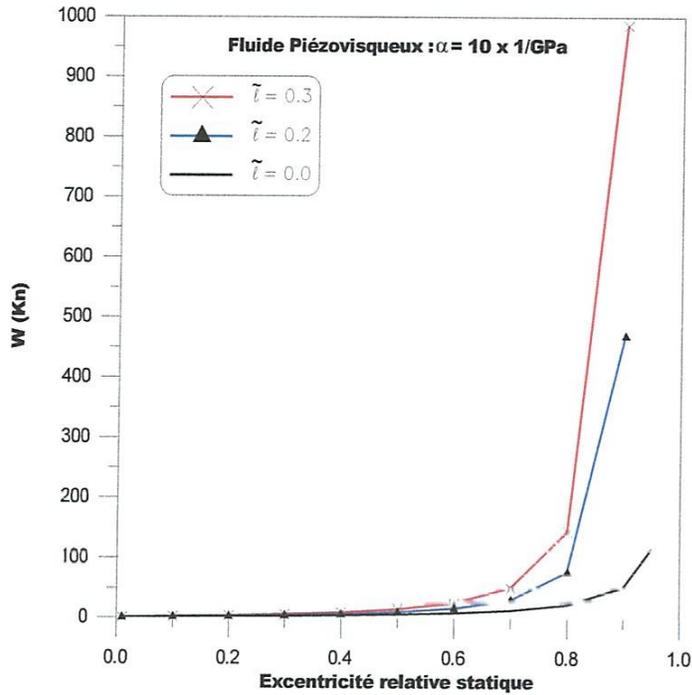
du palier pour différents fluides lubrifiants ($\epsilon_0 = 0.9$).

3-3.2. Influence de la longueur de chaîne moléculaire des additifs et de la piésoviscosité du fluide lubrifiant sur les performances statiques d'un palier de longueur fini

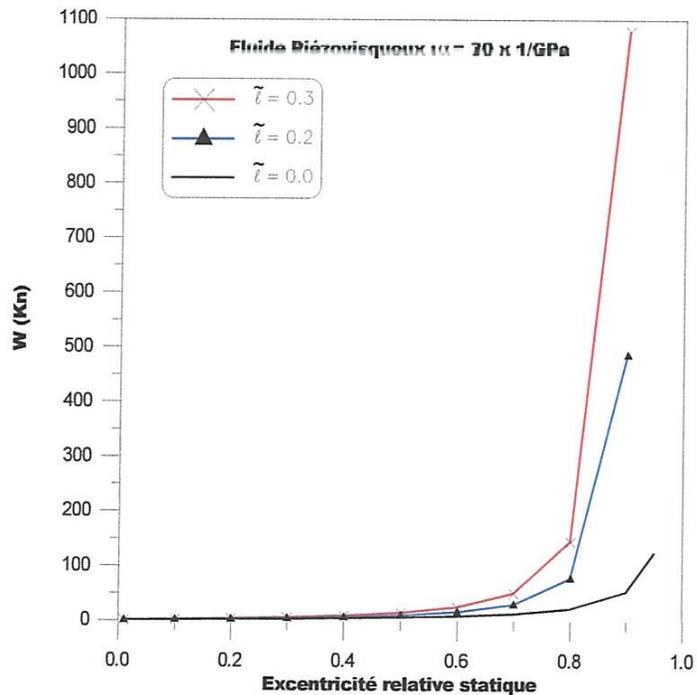
Les performances statiques (la portance hydrodynamique, le nombre de frottement et le débit) ont été obtenues pour une excentricité relative statique variant de **0.04** à **0.90** et différentes valeurs du paramètre adimensionné des couples de contraintes relatif qui représente la longueur des chaînes moléculaires des additifs ($\tilde{\ell} = 0.0, 0.2$ et **0.3**) et de la piésoviscosité ($\alpha = 10\text{GPa}^{-1}$ et $\alpha = 30\text{GPa}^{-1}$) d'un palier rigide de longueur fini lubrifié par fluide polaire piézovisqueux.

La figure IV-6 présente les variations de la portance hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative statique et différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ($\tilde{\ell}$) du palier. La figure montre une augmentation significative de la portance hydrodynamique du palier avec le paramètre des couples de contraintes et surtout pour des grandes valeurs d'excentricité relative statique (palier lourdement chargé). Cette augmentation est très importante pour un paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell} = 0.3$ qui représente la plus grande chaîne moléculaire des additifs et un coefficient de piésoviscosité $\alpha = 30\text{GPa}^{-1}$ de palier lourdement chargé ($\varepsilon_0 = 0.9$).

On peut conclure que la présence des additifs des grandes chaînes moléculaires dans les huiles lubrifiantes (huiles non newtoniens) et de la piésoviscosité du fluide lubrifiant permettant d'améliorer la capacité de charge du palier fluide comparativement au palier lubrifié avec une huile pure ne contenant pas d'additifs (huiles newtoniennes) et isovisqueux.



a) Fluide Piéoviscosité ($\alpha = 10 \text{ GPa}^{-1}$)



b) Fluide Piéoviscosité ($\alpha = 30 \text{ GPa}^{-1}$)

Fig.IV-6. Variations de la portance hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes et coefficient de la piéoviscosité du fluide.

Les variations du nombre de frottement et de débit moyen en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes d'un palier lubrifié par fluide piésovisqueux sont présentées sur les figures IV-7 et IV-8. Comme le montrent les figures, les effets du paramètre des couples de contraintes conduit à une diminution du nombre de frottement dans le film lubrifiant, cette diminution est plus significative de l'ordre de 68% dans le cas de grande valeur du paramètre des couples de contraintes ($\tilde{\ell} = 0.3$: huiles contenant des additifs de grandes chaînes moléculaires) et palier lourdement chargé ($\varepsilon = 0.9$), ainsi qu'une diminution de débit moyen surtout pour des grandes valeurs de l'excentricité relative statique de fonctionnement du palier.

Les huiles à couple de contraintes (huiles additivées) permettent de réduire sensiblement les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où les paliers fluides sont fortement chargés.

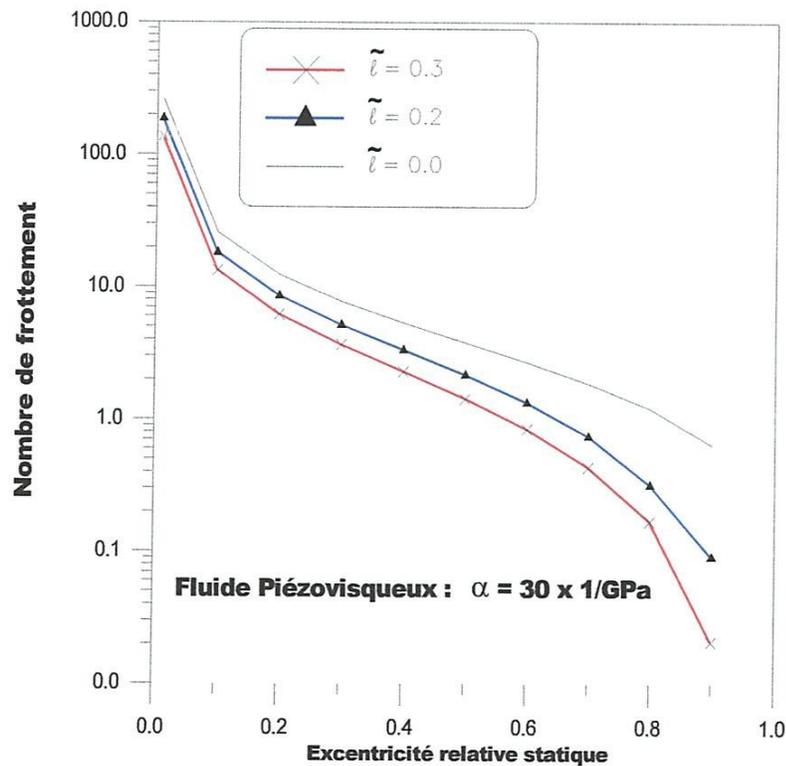


Fig.IV-7. Variations du nombre de frottement en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes

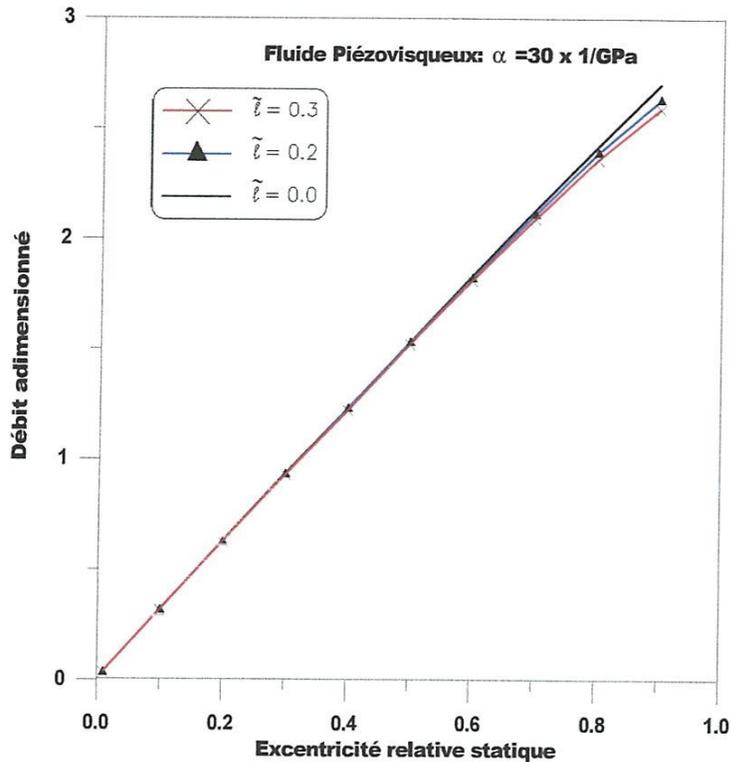


Fig.IV-8. Variations de débit moyen en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes

4. CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent que la présence dans le lubrifiant de base des additifs et la piézoviscosité a une influence non négligeable sur les performances statiques du palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes (présence des grandes des chaînes moléculaires des additives). Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent :

- une augmentation importante du pic de pression dans le film lubrifiant et de la portance hydrodynamique surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires relatives des additifs et de l'excentricité relative statique ;
- une diminution du nombre de frottement dans le film et de débit moyen d'écoulement de fluide lubrifiant pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique. En conséquence, le fluide à couples de contraintes permet de réduire

sensiblement les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé.

Pour les mêmes valeurs du paramètre du couple de contraintes, la piézoviscosité du fluide lubrifiant conduit à une augmentation du pic de pression dans le film et de la portance hydrodynamique du palier surtout si le palier lourdement chargé. On peut conclure que la piézoviscosité du fluide lubrifiant ne peut être négligée pour la prédiction des performances statiques ou dynamiques des paliers fluides sévèrement chargés où les effets de la piésoviscosité devient important.

La compressibilité du fluide n'a pas des effets significatifs sur le champ de pression dans le film lubrifiant.

Conclusion Générale

CONCLUSION GENERALE

Notre étude théorique et numérique a pour but essentiel la mise en évidence de l'influence des effets combinés du paramètre des couples de contraintes (représente physiquement la longueur des chaînes moléculaires des additifs dans les fluides lubrifiants), de la variation viscosité-pressure (piézoviscosité) et de la variation densité-pressure (effet de compressibilité) sur les performances statiques d'un palier lisse de longueur fini fonctionnant en régime isotherme, en se basant sur la théorie de Micro-Continuum de V. K. Stokes pour décrire le mouvement des fluides polaires. La loi de Barus et la loi de Dawson et Higginson sont retenus pour tenir compte à la fois des effets de la variation viscosité-pressure et de la variation densité-pressure dans l'étude paramétrique. Le problème est résolu numériquement par des processus itératifs.

Les résultats obtenus montrent que la présence dans le lubrifiant de base des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) et la piézoviscosité a une influence non négligeable sur les performances statiques du palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes (présence des grandes des chaînes moléculaires des additives). Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent :

- une augmentation importante du pic de pression dans le film lubrifiant et de la portance hydrodynamique surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires relatives des additifs et de l'excentricité relative statique ;
- une diminution du nombre de frottement dans le film et débit moyen d'écoulement de fluide pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique. En conséquence, le fluide à couples de contraintes permet de réduire sensiblement les pertes d'énergie par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé.

Pour les mêmes valeurs du paramètre des couples de contraintes, la piézoviscosité du fluide lubrifiant conduit à une augmentation du pic de pression dans le film et de la portance hydrodynamique du palier surtout si le palier lourdement chargé.

On peut conclure que la piézoviscosité du fluide lubrifiant ne peut être négligée pour la prédiction des performances statiques ou dynamiques des paliers fluides sévèrement chargés où les effets de la piésoviscosité devient important.

La compressibilité du fluide n'a pas des effets significatifs sur le champ de pression dans le film lubrifiant.

Annexes

ANNEXE A
FLUIDE POLAIRE

1- Fluide polaire

Considérons un corps B_0 limité par la surface S_0 et B_1 une partie de B_0 , limitée par la surface S_1 . L'action de la partie $(B_0 - B_1)$ du corps B_0 sur la partie B_1 est représentée par un vecteur contrainte t_i et un couple des contraintes m_i agissant en un point de la surface S_1 [8].

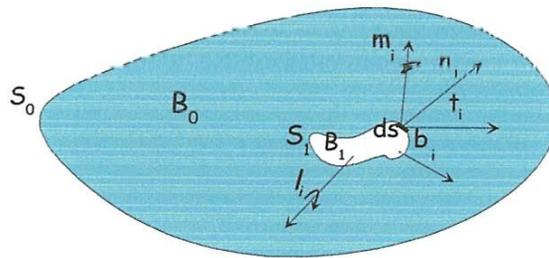


Fig.A-1 : Efforts agissant sur un élément de fluide.

La théorie non polaire de fluide est caractérisée par les conditions $m_i=0$, $l_i=0$, où l_i est le moment de volume par unité de masse. Il n'y a aucune raison, a priori, de prendre $m_i=0$. Si m_i n'est pas égale à zéro, alors l'action d'une part du volume sur son voisinage ne peut pas être représentée par une force seule, mais par une force et un couple.

2. Cinématique d'écoulement d'un fluide polaire

Soit u_i les composantes de la vitesse d'écoulement. Alors, le tenseur de taux de déformation (D_{ij}) qui est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse. En coordonnées cartésiennes, le tenseur de taux de déformation s'exprime par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (A-1)$$

$i, j = 1, 2, 3$

x_i : variable d'espace

Le tenseur tourbillon (W_{ij}) qui est la partie antisymétrique du gradient de vitesse est donné par:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (A-2)$$

Le vecteur tourbillon (ω_i) est défini comme la moitié du rotationnel du vecteur vitesse \vec{V} :

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{irs} \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \quad (A-3.a)$$

$i, s, r = 1, 2, 3$

Ou bien :
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V}) \quad (A-3.b)$$

e_{ijk} : Tenseur de permutation d'ordre trois.

Le vecteur tourbillon et le tenseur tourbillon sont reliés par les expressions suivantes:

$$W_{ij} = e_{ijr} \omega_r$$

Et
$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{irs} W_{rs} \quad (A-4)$$

Tenseur du taux de rotation (K_{ij}) est définie par le gradient du vecteur tourbillon:

$$K_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad (A-5)$$

$i, j = 1, 2, 3$

A partir de l'équation, 3 on obtient que :

$$K_{ii} = 0 \quad (A-6)$$

3. Equations du mouvement et le moment des équations du mouvement (les lois d'Euler de mouvement) :

$$\int_{B_1} \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} d\mathbf{v} = \int_{\partial B_1} t_i ds + \int_{B_1} \rho b_i d\mathbf{v} \quad (A-7)$$

$$\int_{B_1} \rho e_{ijk} (x_j \frac{d^2 x_k}{dt^2}) d\mathbf{v} = \int_{S_1} e_{ijk} x_j t_k ds + \int_{B_1} \rho e_{ijk} x_j b_k d\mathbf{v} + \int_{B_1} \rho \ell_i d\mathbf{v} + \int_{S_1} m_i ds \quad (A-8)$$

$i, j, k = 1, 2, 3$

Où:

ρb_i : Force de volume

dv : élément de volume

$$\mathbf{t}_i = n_j \sigma_{ji}, \quad \mathbf{m}_i = n_j M_{ji} \quad (\text{A-9})$$

n_j est la normale à la surface sur laquelle le vecteur contrainte (t_i) et le couple des contraintes (m_i) agissent.

La substitution de l'équation (A-9) dans les équations (A-7) et (A-8) avec une certaine simplification, on obtient les lois de mouvement de Cauchy :

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} + \rho \ell_i + e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (\text{A-11})$$

En prenant le rotationnel d'équation (A-11), on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{[ji]}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} e_{ijs} \left\{ \frac{\partial^2 M_{rs}^D}{\partial x_r \partial x_j} + \frac{\partial(\rho \ell_s)}{\partial x_j} \right\} \quad (\text{A-12})$$

Où:

$$\sigma_{[ij]} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) = \sigma_{ij}^A$$

σ_{ij}^A est le tenseur des contraintes antisymétrique.

Le déviateur du tenseur des couples de contraintes est donné par :

$$M_{ij}^D = M_{ij} - \frac{1}{3} M_{rr} \delta_{ij} \quad (\text{A-13})$$

δ_{ij} : Symbole de Kronecker

Si on substitue l'équation (A-13) dans l'équation (A-10), on obtient :

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{(ji)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} e_{ijs} \left\{ \frac{\partial^2 M_{rs}^D}{\partial x_r \partial x_j} + \frac{\partial(\rho \ell_s)}{\partial x_j} \right\} + \rho b_i \quad (\text{A-14})$$

$$\text{Où, } \sigma_{(ij)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = \sigma_{ij}^s$$

Avec ; $\text{rot}(\nabla.M) = \text{rot}(\nabla.M^D)$

$\sigma_{(ij)}^s$: Tenseur des contraintes symétrique

À partir d'équation (A-11), on peut obtenir:

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_{ijs} \left(\frac{\partial M_{rs}}{\partial x_r} + \rho \ell_s \right) \quad (\text{A-15})$$

2-4. Équations constitutives

Dans le cas non polaire, il y a une similitude limitée entre les équations constitutives de l'élastique et fluide. À savoir, quand on substitue le champ de vitesse au champ de déplacement dans les équations constitutives pour l'élasticité linéaire, on obtient l'équation constitutive pour les fluides. Mindlin et Tiersten[16] ont donné des équations constitutives linéaires pour l'élasticité polaire. On essaie de suivre le même procédé pour le cas polaire en employant les équations Mindlin et des Tiersten.

D'après toutes les propositions données ci-dessus, on propose les équations constitutives suivantes:

$$\sigma_{(ij)} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{rr} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{A-16})$$

$$M_{ij}^D = 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji}$$

L'équation (A-16) donne le tenseur des contraintes $\sigma_{(ij)}$ qui est identique à celui d'un fluide newtonien classique. Les dimensions de λ et de μ les constantes matérielles sont celles de la viscosité de dimension $(ML^{-1}T^{-1})$, tandis que les dimensions de η et η' sont celles de la quantité du mouvement (MLT^{-1}) . Les coefficients λ et μ donnés ici ne devraient pas être confondus avec ceux d'un fluide non polaire. Le rapport η/μ a une dimension de la longueur au carré et on note la racine carrée de ce rapport par ℓ tel que $\ell = (\eta/\mu)^{0.5}$ est le paramètre de couple de contraintes.

La partie antisymétrique de σ_{ij} et la trace de M_{ij} sont laissées indéterminées par les équations constitutives. Comme cité précédemment, ces deux quantités, tout en n'affectant pas la première loi de mouvement des Cauchy ou de l'équation d'énergie, peut être déterminée à partir des conditions limitées.

Pour les fluides incompressibles ($\rho = cte$) on a :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{3} M_{rr}$$

Ainsi :
$$M_{ij} = m\delta_{ij} + 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji} \quad (\text{A-17})$$

On considère le cas où : λ , μ , η et η' sont des constantes.

En utilisant les expressions de D_{ij} et K_{ij} , et en substituant les équations (A-16) et (A-17) dans les équations (A-14) et (A-15), on obtient les équations de mouvement qui sont les équations de base de la mécanique des fluides polaires:

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right) + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right) - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_r \partial x_r \partial x_r \partial x_r} + \eta \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_s \partial x_s} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right) + \frac{1}{2} e_{irs} \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho \ell_s) + \rho b_i \quad (\text{A-18})$$

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijs} \frac{\partial m}{\partial x_s} - 2\eta \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x_r \partial x_r} - \frac{1}{2} \rho e_{ijs} \ell_s \quad (\text{A-19})$$

$i, r, s = 1, 2, 3$

Pour un fluide incompressible, $\frac{\partial u_r}{\partial x_r} = 0$

L'équation (A-18) se réduit à :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right) - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_r^2 \partial x_s^2} + \frac{1}{2} e_{irs} \frac{\partial}{\partial x_r} (\rho \ell_s) + \rho b_i \quad (\text{A-20})$$

$i, r, s = 1, 2, 3$

En régime permanent et pour un fluide incompressible les équations de mouvement (A-20) et l'équation de continuité en forme vectorielles données par:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{b} + \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} \ell + \nabla (\mu \nabla \vec{V}) - \eta \nabla^4 \vec{V} \quad (\text{A-21})$$

Lorsque les forces de volume et les couples de volume sont négligés les équations (A-21) et (A-19) deviennent :

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right) - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_r \partial x_r \partial x_s \partial x_s} \quad (\text{A-22})$$

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijs} \frac{\partial m}{\partial x_s} - 2\eta \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x_r \partial x_r} \quad (\text{A-23})$$

Dans beaucoup des cas, en raison de la symétrie dans la géométrie, $m=0$. Si m n'entre pas dans les conditions limites, alors il peut supposer égale zéro sans n'importe quelle perte de généralité.

ANNEXE B

ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film ($0, \bar{x}_2$) est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur du contact (figure II-1)). Ce qui permet de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation (II-6). Pour cela, on pose:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \bar{t} = \frac{t.V}{L}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r}, \bar{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \bar{u}_2 = \frac{u_2.L}{V.h}, \bar{u}_3 = \frac{u_3}{V},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r}, \bar{\ell} = \frac{\ell}{C}, \bar{h} = \frac{h}{C}$$

Dans ces expressions :

L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes ($0, \bar{x}_1$) et ($0, \bar{x}_3$)

h et $\frac{V.h}{L}$ sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristique suivant l'épaisseur du film ($0, \bar{x}_2$)

$\frac{L}{V}$: définit l'ordre de grandeur du temps

μ, ρ : sont la viscosité dynamique de la masse volumique exprimée à la température T .

μ_r, ρ_r : sont la viscosité dynamique de la masse volumique de référence.

En régime de lubrification hydrodynamique, V est la vitesse caractéristique d'une des parois du contact.

Compte tenu de ces changements de variables, pour $i=1$, l'équation (II-6) devient :

$$\rho u_j \frac{du_1}{dx_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \right) -$$

$$2\eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} \right) \quad (B-1)$$

Par changement des variables de l'équation (B-1) devient :

$$\rho \bar{u}_j V \frac{d\bar{u}_1}{L d\bar{x}_j} = - \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\mu_r V}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\mu_r V}{h^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\mu_r V}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) - \eta \left(\frac{V}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^4} + \right.$$

$$\left. \frac{V}{h^4} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^4} + \frac{V}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{V}{L^2 h^2} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{V}{h^2 L^2} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^2 \partial \bar{x}_3^2} + \frac{V}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_3^2} \right) \quad (B-2)$$

$$\rho \tilde{U}_j \frac{V^2 d\tilde{U}_1}{L d\tilde{x}_j} = -\frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\mu_r V}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] + \frac{\mu_r V}{h^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) - \frac{\eta V}{L^4} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) - \frac{\eta V}{h^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} - \frac{2\eta V}{L^2 h^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) - \frac{2\eta V}{L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2}$$

$$-\frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_1} = \rho \frac{V^2}{L} \tilde{U}_j \frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{x}_j} - \frac{\mu_r V}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] - \frac{\mu_r V}{h^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) + \frac{\eta V}{L^4} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\eta V}{h^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} + \frac{2\eta V}{L^2 h^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{2\eta V}{L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} \quad (B-3)$$

On produit l'équation (B-3) par $\left(\frac{h^2}{\mu_r V}\right)$ et simplifier, on trouve :

$$-\frac{h^2}{\mu_r V L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_1} = \rho \frac{V h^2}{\mu_r L} \tilde{U}_j \frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{x}_j} - \frac{h^2}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) + \frac{\eta h^2}{\mu_r L^4} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\eta}{\mu_r h^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} + \frac{2\eta}{\mu_r L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{2\eta h^2}{\mu_r L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} \quad (B-4)$$

Où :

$$R_H = \frac{\rho V h}{\mu_r} \quad (\text{Nombre de Reynolds relatif a l'épaisseur de l'écoulement})$$

$\varepsilon = \frac{h}{L}$ (Paramètre d'échelle est en mécanique des films mince visqueux de l'ordre 10^{-3})

$$\text{Avec,} \quad p = \frac{\tilde{p} L V \mu}{h^2}$$

$$\ell^2 = \frac{\eta}{\mu_r}$$

ℓ est le paramètre de couple de contraintes.

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \varepsilon R_H \tilde{U}_j \frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{x}_j} - \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) + \frac{\ell^2 \varepsilon^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\ell^2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} + \frac{2\ell^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{2\ell^2 \varepsilon^2}{L^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} \quad (B-5)$$

En négligeant les termes multiplies par ε^2 ($\varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{-6} \simeq 0$), l'équation (B-5) devient :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = -\varepsilon R_H \tilde{U}_j \frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{x}_j} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) - \frac{\ell^2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} - \frac{2\ell^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \quad (B-6)$$

On suppose que: $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{c}$ et $\tilde{h} = \frac{h}{c}$

Avec, C le jeu radial

L'équation (B-6) devient :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = -\varepsilon \cdot R_H \cdot \tilde{U}_j \frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{x}_j} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) - \frac{\tilde{\rho}^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} - \frac{2 \cdot \tilde{\rho}^2 \cdot C^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \quad (B-7)$$

Tant que, ε^2 , ε^4 et $\frac{C^2}{L^2}$ d'ordre zéro et les termes en ε ou termes d'inertie de l'équation (B-7) seront négligeable devant les termes de viscosité quand $\varepsilon \cdot R_H$ inférieur à l'unité.

Si pour hypothèse, on néglige les forces d'inertie, le système d'équation (B-7) devient :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) - \frac{\tilde{\rho}^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} \quad (B-8)$$

En revenant aux variables dimensionnées avec $\left(\frac{\tilde{\rho}^2}{\tilde{h}^2} = \eta \right)$, l'équation de mouvement (B-8) s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \eta \frac{\partial^4 U_1}{\partial x_2^4}$$

De la même manière pour $i=3$:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) - \eta \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_2^4}$$

Pour $i=2$, à partir l'équation (II.6), on obtient :

$$\rho U_j \frac{dU_2}{dx_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 U_2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \quad (B-9)$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation (B-9) devient :

$$\rho \tilde{U}_j \frac{V \cdot h \cdot V \cdot d\tilde{U}_2}{L \cdot L \cdot d\tilde{x}_j} = -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\mu_r \cdot h \cdot V}{L^3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\mu_r \cdot h \cdot V}{L \cdot h^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right) + \frac{\mu_r \cdot h \cdot V}{L^3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) - \eta \left(\frac{V \cdot h}{L \cdot L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{V \cdot h}{L \cdot h^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_2^4} + \frac{V \cdot h}{L \cdot L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{V \cdot h}{L \cdot L^2 \cdot h^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{V \cdot h}{L \cdot L^4} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \frac{V \cdot h}{L \cdot L^2 \cdot h^2} \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \quad (B-10)$$

Par simplification :

$$-\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_2} = \rho \tilde{U}_j \frac{V^2 \cdot h}{L^2} \cdot \frac{d\tilde{U}_2}{d\tilde{x}_j} - \frac{\mu_r \cdot h \cdot V}{L^3} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] - \frac{\mu_r \cdot V}{L \cdot h} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right) +$$

$$\frac{\eta.V.h}{L^5} \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3^4} \right) + \frac{\eta.V.h}{L.h^4} \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^4} - \frac{2\eta.V.h}{L^3.h^2} \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^2 \partial \bar{x}_3^2} \right) + \frac{2\eta.V.h}{L^5} \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_3^2} \quad (B-11)$$

On multiplie l'équation (B-11) par $\left(\frac{h^3}{\mu_r.V.L}\right)$ et simplifie :

Avec: $p = \frac{\bar{p}.L.V.\mu}{h^2}$

$$-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_2} = \rho \frac{V.h^4}{\mu_r.L^3} \bar{U}_j \frac{d\bar{U}_2}{d\bar{x}_j} - \frac{h^4}{L^4} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] - \frac{h^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\eta.h^4}{\mu_r.L^6} \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3^4} \right) + \frac{\eta}{\mu_r.L^2} \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^4} + \frac{2.\eta.h^2}{\mu_r.L^4} \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^2 \partial \bar{x}_3^2} \right) + \frac{2.\eta.h^4}{\mu_r.L^6} \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_3^2} \quad (B-12)$$

Avec: $R_H = \frac{\rho.V.h}{\mu_r}$, $\varepsilon = \frac{h}{L}$, $\ell^2 = \frac{\eta}{\mu_r}$ et $\ell = \bar{\ell}.C$

$$-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_2} = \varepsilon^3 . R_H . \bar{U}_j \frac{d\bar{U}_2}{d\bar{x}_j} - \varepsilon^4 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2} \right) + \bar{\ell}^2 . \varepsilon^4 \frac{C^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3^4} \right) + \bar{\ell}^2 \frac{C^2}{L^2} \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^4} + 2 . \bar{\ell}^2 \frac{C^2}{L^2} \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^2 \partial \bar{x}_3^2} \right) + 2 . \bar{\ell}^2 \frac{C^2}{L^2} \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_3^2} \quad (B-13)$$

Tant que ε^2 , ε^4 et $\frac{C^2}{L^2}$ d'ordre zéro donc l'équation (B-13) devient égal à zéro :

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0$$

En revenant aux variables dimensionnées, les équations de Navier dans le cas où les forces de volume et les couples de volume sont négligeables. Pour un écoulement film mince visqueux). Les équations de mouvement pour un fluide polaire piézo-visqueux sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_2} \right) - \eta \frac{\partial^4 U_i}{\partial x_2^4} & i = 1, 3 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (B-14)$$

La deuxième équation du système montre que la pression dans le film est indépendante de x_2 , ($p=p(x_1, x_3)$).

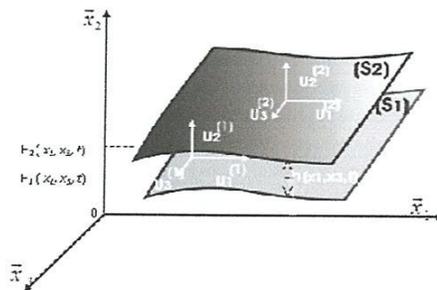


Fig. B-1 : Schéma d'un écoulement en film mince ($h/L \ll 1$).

ANNEXE C

LOIS DE VARIATION VISCOSITE-PRESSION ET DENSITE-PRESSION

Lorsque les surfaces de contact lubrifiées sont sévèrement chargées, les hautes pressions engendrées dans le film lubrifiant ont une influence significative sur le lubrifiant et les surfaces des éléments constituant le contact par exemple un palier (arbre, coussinet, patin). Les deux propriétés importantes du lubrifiant qui sont affectées par les pressions élevées sont la densité (masse volumique) et la viscosité. Plusieurs lois de variation viscosité-pressure et densité-pressure ont été proposées dans la littérature [18], [19]. Parmi ces lois, on cite celles qui conviennent pour l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure en régime isotherme.

1. Lois de variation viscosité-pressure [19]

Pour caractériser l'effet piézo-visqueux, on peut utiliser les lois suivantes :

- lois de Barus établie en 1893 [17]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (c-1)$$

où p est la pression, μ_0 la viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique et α le coefficient de piézo-viscosité qui dépend de l'huile et qui est généralement compris entre 5 et 40 GPa⁻¹.

Les valeurs de ce coefficient pour différents fluides lubrifiants sont reportées dans le tableau (c-1) [20].

Tableau c-1 : Valeurs du coefficient de piézo-viscosité pour différents fluides lubrifiants

Lubrifiant	Coefficient de piézo-viscosité, α (GPa ⁻¹)			
	20° C	40° C	60° C	80° C
Huile minérale naphénique	26.5	23.4	20.0	16.4
Huile minérale paraffinique	19.8	18.2	16.2	15.0
Polyglycol	18.7	16.0	13.2	10.5
TMP-ester	15.5	14.4	13.1	12.2
Diester	14.6	13.6	12.8	11.6
Polyalphaolefine	15.5	13.8	12.2	10.5

Les viscosimètres à haute pression permettant de déterminer l'influence de la pression sur la viscosité sont :

- le viscosimètre à chute de bille qui peut être utilisé à des pressions allant jusqu'à 30 MPa.

- le viscosimètre de *Couette* ou à cylindres concentriques développé pour mesurer les propriétés rhéologiques des fluides pour des pressions qui peuvent atteindre 500 MPa et des taux de cisaillement qui s'échelonnent de 0.5 à 2×10⁴ s⁻¹.

Ce coefficient est sensiblement constant pour des pressions inférieures à 70 MPa. Il peut être calculé par la relation suivante [21] :

$$\alpha = 1,216 + 4,143 (\log_0 \nu)^{3,0627} + 2,848 \times 10^{-4} m^{5,1903} (\log_0 \nu)^{1,5976} - 3,999 (\log_0 \nu)^{3,0975} \rho^{0,1162} \quad (\text{c-2})$$

Dans la relation (c-2), α est le coefficient de piézoviscosité en 10^{-8} Pa^{-1} , ν est la viscosité cinématique à la température considérée en cSt ou mm^2/s , ρ la masse volumique du lubrifiant en g/cm^3 . m est le coefficient viscosité température défini par la relation suivante:

$$\log_0(\log_0(\nu+a)) = -m \log_0 T + n \quad (\text{c-3})$$

La relation (c-3) est due à *Mac Coull* et *Walther* [21]. Dans cette relation, ν est la viscosité cinématique, a , m et n des constantes qui dépendent du lubrifiant et T la température absolue en degrés Kelvin (K). La valeur de a dépend de l'unité de viscosité, si ν est en centi-Stokes (cSt), la valeur de a est comprise entre 0,6 et 0,75.

Autre relation [19], relation de *Wooster* :

$$\alpha = (0,6 + 0,965 \log_0 \mu_0) \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (\text{c-4})$$

où α en (Pa^{-1}) et μ_0 la viscosité à la pression atmosphérique en (cPo) ou (mPa.s).

- loi de *Roelands* établie en 1966

Les effets de la pression sur la viscosité du lubrifiant sont mieux décrits par la relation de *Roelands* [22]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{1 - \left(1 + \frac{p}{c} \right)^Z} \quad (\text{c-5})$$

où :

μ_0 : viscosité à la pression atmosphérique ($p = 0$)

Z : indice pression-viscosité

$\mu_\infty = 6,31 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ et $c = 1,96 \times 10^8 \text{ Pa}$

Autre écriture de la loi de *Reynolds* [23] :

$$\mu = \mu_0 \exp \left[\frac{p_0 \alpha}{Z} \left(\left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^Z - 1 \right) \right] \quad (\text{c-6})$$

où le paramètre Z est relié au coefficient de piézoviscosité α et à la viscosité dynamique du lubrifiant à la pression atmosphérique μ_0 dans le système normalisé S.I par :

$$Z = \frac{\alpha p_0}{\log_e \mu_0 + 9,67} \quad (\text{c-7})$$

p_0 est la constante viscosité-pression de *Roelands*, $p_0 = 1,96 \times 10^8$ Pa.

- loi de *Sargent* [24]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\frac{Ap}{B+p}} \quad (\text{c-8})$$

où : μ et μ_0 sont les viscosités dynamiques en (mPa.s) mesurées respectivement à la pression p en (GPa) et à la pression atmosphérique. A et B sont des constantes dont les valeurs dépendent du fluide lubrifiant tableau (c-2). A est sans dimension tandis que l'unité de B est celle de la pression.

Il est à noter que le terme $\frac{A}{B+p}$ peut être considéré comme l'expression du coefficient de piézo-viscosité α intervenant dans la loi de *Barus* (c-1). Lorsque p tend vers 0, le terme $\frac{A}{B+p} \rightarrow \frac{A}{B}$. Donc, la loi de *Barus* est seulement un cas particulier de la loi de *Sargent* (IV-36) lorsque $p \rightarrow 0$ et le rapport $\frac{A}{B}$ devient égale à α .

Tableau 2: Valeurs des coefficients viscosité-pression [24]

Lubrifiant	A	B (GPa)	A/B (GPa ⁻¹)	α (GPa ⁻¹)	Coefficient de <i>Roelands</i> Z
Huile paraffinique	34	1.54	22.1	22.2	0.663
Huile naphénique	49	1.62	30.2	32.4	0.867
Silicone	-14	-0.78	17.9	17.1	0.627

2. Loi de variation densité-pression

Pour une huile minérale, la compressibilité du lubrifiant est modélisée par *Dowson et Higginson*, 1966 [18] :

- si p est exprimée en (GPa) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,58 \times 10^{-9} p}{1 + 1,68 \times 10^{-9} p} \quad (\text{c-9})$$

- si p est exprimée en (Pa) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,58 \times 10^{-9} p}{1 + 1,68 \times 10^{-9} p} \quad (\text{c-10})$$

Où ρ_0 est la densité ou la masse volumique du lubrifiant à la pression atmosphérique.

La variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression est représentée sur la figure 2.

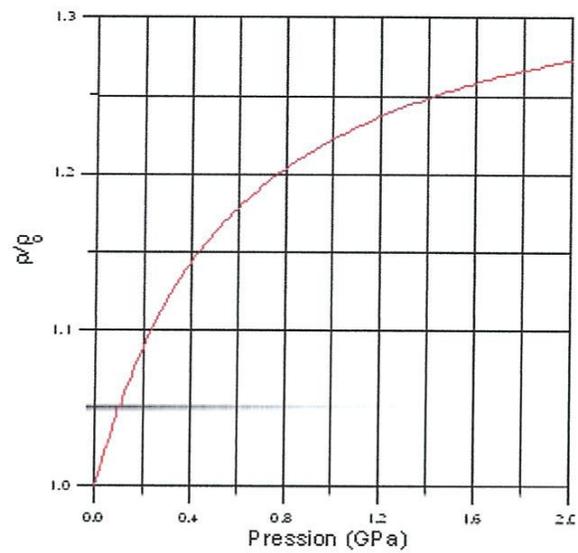


Fig. c-1: Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de Dowson et Higginson [18].

Nomenclature

C	jeu radial du palier (m)
e	excentricité de fonctionnement (m)
F_ϵ et F_ϕ	composantes de portance hydrodynamique (N.m ⁻¹)
f	nombre de frottement par unité de longueur, $f = \frac{\tilde{C}_c}{\tilde{W}}$, m ⁻¹
h	épaisseur du film lubrifiant (m)
\tilde{h}	épaisseur du film adimensionnée, $\tilde{h} = h / C$
k	nombre des itérations
k_{\max}	nombre maximal des itérations
ℓ	paramètre des couples de contraintes, $\ell = (110/\mu_0)^{1/2}$, (μ)
$\tilde{\ell}$	paramètre des couples de contraintes relative, $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{C}$
N	nombre de mailles suivant la direction circonférentielle du palier
O _a	centre de l'arbre
O _c	centre du coussinet
p	pression dans le film lubrifiant (Pa)
\tilde{p}	pression statique adimensionnée,
R _a	rayon de l'arbre (m)
R _c	rayon de coussinet (m)
R _H	nombre de Reynolds
U ₂	composante normale de vecteur vitesse (m.s ⁻¹)
V ₂	composante tangentielle de vecteur vitesse (m.s ⁻¹)
W	portance hydrodynamique (N)
\tilde{W}	portance hydrodynamique adimensionnée,
ϵ_0	excentricité relative statique, $\epsilon = e / C$
η_0	constante physique due à la présence des couples de contraintes dans le fluide (N.s)
μ	viscosité dynamique du fluide lubrifiant (Pa.s)
μ_0	viscosité dynamique à la pression atmosphérique (Pa.s)
$\tilde{\mu}$	viscosité dynamique adimensionnée, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r}$

ρ	densité du fluide (kg.m^{-3})
ρ_0	densité du fluide à la pression atmosphérique (kg.m^{-3})
$\tilde{\rho}$	densité du fluide adimensionnée, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r}$
ϕ	angle de calage (rad)
θ	coordonnée circonférentielle (rad)
ω	vitesse angulaire de l'arbre (rad.s^{-1})
α	coefficient de piézoviscosité (Pa^{-1})
$\tilde{\alpha}$	coefficient de piésoviscosité adimensionné de fluide, $\tilde{\alpha} = \mu_0 \omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \alpha$
$\Delta\theta$	pas circonférentiel, $\Delta\theta = 2\pi/N$
$\Delta\tilde{z}$	pas selon l'axe z : $\Delta z = 0.5/N$

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure I-1: Schéma décrivant les relations entre le frottement, l'usure et la lubrification

Figure I-2: Frottement secs (vue microscopique de la zone de contact)

Figure I-3: Frottement visqueux (vue microscopique)

Figure I-4: Conséquence de l'usure par abrasion

Figure I-5 : Conséquence de l'usure par adhésion

Figure I-6: Schéma d'un contact lubrifié

Figure I-7: Courbe de Stribeck

Figure I-8: Viscosités des lubrifiants à l'aide d'un bidon d'huile

Figure I-9: écoulement laminaire entre deux plans parallèles

Figure I-10: Profil des vitesses de la graisse dans une conduite

Figure I-11 : Rhéogramme de comportement d'un fluide de Bingham.

Figure II-1 : Schéma d'un écoulement en film mince ($h / L \ll 1$)

Figure II.2 : Géométrie et cinématique d'un contact hydrodynamique

Figure II-3: palier développé

Figure III-1 : photo d'un palier hydrodynamique d'une machine centrifuge

Figure III-2 : Schémas d'un palier lisse

Figure III-3 : Section droite d'un palier

Figure III-4 : répartition de pression statique pour les différentes conditions aux limites

Figure III-5: *Section droite d'un palier développé*

Figure III-6 : *Système d'axe*

Figure IV-1: *Maillage du film lubrifiant par la MDF (2D) (Discrétisation du demi-palier)*

Figure IV-4: *Variations circumférentielles du champ de pression du palier pour différentes fluides lubrifiants ($\epsilon_0 = 0.9$).*

Figure IV-5: *Présentation en 3D du champ de pression statique du palier pour différentes fluides lubrifiants ($\epsilon_0 = 0.9$).*

Figure IV-6. *Variations de la portance hydrodynamique en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes et coefficient de la piésoviscosité du fluide.*

Figure IV-7. *Variations du nombre de frottement en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes*

Figure IV-8. *Variations de débit moyen en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre du couple de contraintes*

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	(1)
CHAPITRE UN : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIE	
1. INTRODUCTION	(3)
2. TRIBOLOGIE	(3)
2.1. Frottement	(4)
2.2. Usure	(5)
2.3. LUBRIFICATION	(7)
2.3.1. Les régimes de lubrification	(8)
3. LUBRIFIANTS	(9)
3.1. Fonctions essentielles des lubrifiants	(9)
3.2. Classification de lubrification	(10)
3.2.1. Lubrifiants gazeux	(10)
3.2.2. Lubrifiants solides	(11)
3.2.3. Lubrifiants semi-solides ou plastiques (graisses)	(11)
3.2.4. Lubrifiants liquides	(11)
3.2.5. La viscosité	(12)
4. LOIS RHEOLOGIQUES DES FLUIDES LUBRIFIANTS	(14)
4.1. Fluide newtonien	(14)
4.2. Fluide non newtoniens	(15)
4.2.1. Fluides visqueux non-linéaires	(16)
4.2.2. Fluides viscoélastiques	(17)
4.2.3. Fluides viscoplastiques	(18)
4.2.4. Fluides polaires	(21)
5. PROBLEMATIQUE	(23)
6. CONCLUSION	(23)
CHAPITRE DEUX : EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR UN FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX	
1. INTRODUCTION	(25)

2. EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE	(25)
2.1. Equation de continuité (la loi de la conservation de la masse)	(26)
2.2. Equations constitutives	(26)
2.3. Equation de mouvement pour un fluide polaire piezovisqueux (Equations de NAVIER-STOKES)	(27)
2.3.1. Expression des équations de Navier pour un écoulement en film mince visqueux et conditions aux limites sur les vitesses	(27)
2.4. Détermination de champs des vitesses	(29)
2.4.1. Conditions aux limites	(33)
2.4.2. Calcul des valeurs des constantes : $A_0, A_1, B_1, B_2, A'_0, A'_1, B'_1$ et B'_2	(33)
3. DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS MODIFIEE POUR UN FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE	(36)
4. CONCLUSION	(39)

CHAPITRE TROIS : APPLICATION : ETUDE DE COMPORTEMENT STATIQUE D'UN PALIER LISSE LUBRIFIE PAR UN FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE

1. INTRODUCTION	(40)
2. ÉTUDE D'UN PALIER LISSE HYDRODYNAMIQUE	(41)
3. EXPRESSION DE L'EQUATION DE REYNOLDS DANS LE CAS D'UN PALIER LISSE LUBRIFIE PAR UN FLUIDE POLAIRE PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE	(42)
3.1. Expression de l'épaisseur du film	(43)
3.2. Conditions aux limites	(45)
3.2.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier	(45)
3.2.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant	(45)
a. Conditions de Sommerfeld	(45)
b. Conditions de Gümbel ou de demi-Sommerfeld	(46)

c. Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber	(46)
4. PERFORMANCES STATIQUES DU PALIER	(47)
4.1. Champ de pression dans le film	(47)
4.2. Action du fluide sur les surfaces de l'arbre et du coussinet	(48)
4.3. Composantes de la portance hydrodynamique	(49)
4.4. Forces de frottement	(50)
4.5. Puissance dissipée	(51)
4.6. vitesses moyennes de l'écoulement	(52)
4.7. Le débit volumique	(52)
5. EQUATIONS DE PROBLEME EN VARIABLES SANS DIMENSIONS	(53)
5.1. Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension	(53)
5.2. Equation géométrique adimensionnée de film	(53)
5.3. Performances statiques du palier sans dimensions	(53)
6. CONCLUSION	(55)
 CHAPITRE QUATRE : ETUDE PARAMETRIQUE D'UN PALIER LUBRIFIE PAR FLUIDE POLAIRE PIESOVISQUEUX	
1. INTRODUCTION	(56)
2. METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE POLAIRE PEIZOVISQUEUX ET BAROTROPE	(56)
2.1. Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée	(56)
2.2. Calcul des caractéristiques statiques	(58)
3. ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA RHEOLOGIE DU FLUIDE SUR LES PERFORMANCES STATIQUES D'UN PALIER LISSE	(59)
3-1. Schéma général de résolution du problème	(60)
3-2. Résultats et discussions	(60)

3-3. Etude paramétrique	(62)
3-3.1. Influence du paramètre du couple de contraintes, de la piézoviscosité et de la compressibilité de fluide lubrifiant sur le champ de pression	(63)
3-3.2. Influence de la longueur de chaîne moléculaire des additifs de la piézoviscosité du fluide lubrifiant sur les performances statiques d'un palier lubrifié par fluide polaire	(69)
4. CONCLUSION	(72)
CONCLUSION GENERALE	(74)
ANNEXES	(76)
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	(89)
NOMENCLATURE	(91)